

UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE VALENCIA

Departamento de Ingeniería Mecánica y de Materiales



TESIS DE MASTER

---

MODELADO MEDIANTE ELEMENTOS  
FINITOS DE CONFIGURACIÓN INICIAL DE  
CATENARIAS DE FERROCARRIL

---

*Presentada por:* Dña. Virginia Vidal Urrutia

*Dirigida por:* Dr. D. F. Javier Fuenmayor Fernández  
Dr. D. Manuel Tur Valiente

Valencia, Septiembre de 2011



## **RESUMEN**

En la presente tesis de máster se aborda el desarrollo del modelo de catenaria de ferrocarril con el fin de establecer una configuración de equilibrio estático de los cables que forman el sistema, permitiendo así el análisis dinámico de su interacción con el pantógrafo en trabajos futuros.

La catenaria se comporta como un sistema no lineal, por lo que se plantean esquemas de elementos finitos que permitan su análisis y el cálculo de la posición de todos sus puntos. Se desarrollan dos métodos diferentes para el cálculo de las longitudes de las péndolas que produzcan la geometría deseada, uno basado en la imposición de restricciones puntuales y otro en la optimización de la altura del cable de contacto.

Una vez planteado el modelo de la configuración de equilibrio estático se realizan comparaciones necesarias para validar el modelo y se analizan algunos aspectos que pueden tener influencia en la longitud optimizada de las péndolas, y con ello en la configuración obtenida de la catenaria.



## **ABSTRACT**

The present master thesis introduces the development of a railway catenary model with the purpose of establishing a static equilibrium position of the wires that form the system, allowing the analysis of its interaction with the pantograph in future works.

The catenary system is a nonlinear system, so that finite element methods are presented to allow its analysis as well as the calculation of the position of all its nodes. Two different methods are developed to calculate the droppers' lengths that produce the desired geometry: the first one is based on the imposition of on-point restrictions, the other one on the optimization of the contact wire's height.

Once the model of the static equilibrium configuration is presented, some comparisons are made to validate it. The analysis of some aspects that may be influencing the optimized droppers' lengths, and therefore the obtained configuration, are also made.



## **RESUM**

En la present tesi de màster s'aborda el desenvolupament del model de catenària de tren per tal d'establir una configuració d'equilibri estàtic dels cables que formen el sistema, permetent així l'anàlisi dinàmica de la seva interacció amb el pantògraf en treballs futurs.

La catenària es comporta com un sistema no lineal, de manera que es plantegen esquemes d'elements finits que permeten la seua anàlisi i el càlcul de la posició de tots els seus punts. Es desenvolupen dos mètodes diferents per al càlcul de les longituds de les pèndoles que produeixen la geometria desitjada, l'un basat en la imposició de restriccions puntuals i l'altre en l'optimització de l'alçada del cable de contacte.

Un cop plantejat el model de la configuració d'equilibri estàtic es realitzen les comparacions necessàries per validar el model i s'analitzen alguns aspectes que poden tenir influència en la longitud optimitzada de les pèndoles, i amb això en la configuració obtinguda de la catenària.





# AGRADECIMIENTOS

En primer lugar me gustaría dar las gracias a mis dos directores de proyecto, Javier Fuenmayor y Manolo Tur, por su interés, dedicación y conocimientos transmitidos para realizar esta tesis, así como por darme la oportunidad de trabajar con ellos durante este año, permitiéndome adquirir grandes conocimientos y disfrutar cada día con el trabajo realizado.

Quiero extender mi agradecimiento también a Héctor, compañero de fatigas durante este año. Gracias por tu impagable ayuda y por las largas conversaciones mantenidas.

Por otro lado, se merecen un especial agradecimiento todos los profesores y personal administrativo del área de ingeniería mecánica.

También quiero agradecer especialmente a mis compañeros y amigos del departamento, que me han ayudado cada día desde que entré hace ya casi dos años, y con los que he pasado tan buenos momentos entre cenas, cafés, partidos de squash,... A Jose, Enrique, Antoine, Ramy, Héctor, Octavio, Eva, Vicente, Mohamad y Rafa , a todos y cada uno de vosotros, gracias.

Cómo no, a Fede, sin el cual todo sería mucho más difícil. Gracias por haberme ayudado siempre cuando lo he necesitado.

A todos mis amigos y amigas, gracias por estar ahí siempre apoyándome, escuchándome, y haciéndome pasar tan buenos ratos. En especial a mis dos mejores amigas, por todos los buenos momentos que hemos pasado juntas y por los que quedan.

A Rafa, por tu apoyo incondicional, por tu cariño, y por ser lo mejor que me ha pasado en la vida. Gracias.

Por último, a las personas más importantes de mi vida, mi familia. Gracias por apoyarme siempre y por todo lo que me habéis dado y enseñado. Nunca os lo podré agradecer suficiente.

# ÍNDICE GENERAL

<b>1</b>	<b>INTRODUCCIÓN.....</b>	<b>1</b>
1.1	OBJETO DE LA TESIS DE MÁSTER.....	3
1.2	MOTIVACIÓN.....	5
<b>2</b>	<b>FORMULACIÓN DEL PROBLEMA.....</b>	<b>7</b>
2.1	INTRODUCCIÓN.....	8
2.2	DEFINICIÓN DEL TRAZADO.....	10
2.3	ELEMENTOS FINITOS DESARROLLADOS.....	13
2.3.1	<i>Elemento cable</i> .....	13
2.3.2	<i>Elemento barra</i> .....	26
2.4	RESOLUCIÓN DEL PROBLEMA ESTÁTICO.....	29
2.5	CÁLCULO DE LONGITUDES INICIALES.....	30
2.5.1	<i>Consideración de restricciones en el problema elástico</i> .....	31
2.6	CÁLCULO ÓPTIMO DE LA POSICIÓN DEL CABLE DE CONTACTO.....	33
<b>3</b>	<b>MODELO DE ELEMENTOS FINITOS.....</b>	<b>37</b>
3.1	DESCRIPCIÓN DEL MODELO.....	37
3.2	RESTRICCIONES IMPUESTAS.....	41
<b>4</b>	<b>CÁLCULO DE LA CONFIGURACIÓN INICIAL.....</b>	<b>49</b>
4.1	CATENARIA DEL AVE. TRAZADO RECTO.....	49
4.1.1	<i>Posición de equilibrio estático</i> .....	50
4.1.2	<i>Imposición de restricciones</i> .....	52
4.1.3	<i>Imposición mejorada de la altura del cable de contacto</i> .....	58
4.2	CATENARIA DEL AVE. TRAZADO CURVO.....	62
4.3	OPTIMIZACIÓN DE UNA CATENARIA CON TIPOLOGÍA DE LA NORMA.....	
	EN 50318.....	64
<b>5</b>	<b>RESULTADOS OBTENIDOS.....</b>	<b>67</b>
5.1	COMPARACIÓN CON LA SOLUCIÓN ANALÍTICA DE CABLE.....	68

5.1.1	<i>Modelo analítico</i>	69
5.1.2	<i>Modelo FEM</i>	70
5.2	COMPARACIÓN CON CASOS RESUELTOS EN BIBLIOGRAFÍA	72
5.2.1	<i>Artículo 1, [6]</i>	72
5.2.2	<i>Artículo 2, [7]</i>	76
5.2.3	<i>Artículo 3, [8]</i>	79
5.3	INFLUENCIA DEL GRADO DE DISCRETIZACIÓN DE LA CATENARIA	83
5.4	INFLUENCIA DE LA FLEXIÓN EN EL SUSTENTADOR	88
5.5	ANÁLISIS DE LA RIGIDEZ	90
5.5.1	<i>Rigidez del problema en función de la fuerza aplicada</i>	90
5.5.2	<i>Rigidez del problema en función de la inercia del sustentador</i>	92
5.5.3	<i>Rigidez del problema en función de la tensión del cable 'Y'</i>	93
5.5.4	<i>Rigidez del problema en función de la tensión aplicada en el cable sustentador</i>	95
<b>6</b>	<b>CONCLUSIONES Y DESARROLLOS FUTUROS</b>	<b>97</b>
6.1	CONCLUSIONES	97
6.2	DESARROLLOS FUTUROS	99
<b>7</b>	<b>BIBLIOGRAFÍA</b>	<b>101</b>
	<b>ANEXO</b>	<b>105</b>
1.1	INSTALACIÓN Y CONFIGURACIÓN DE LA APLICACIÓN	106
1.2	CONFIGURACIÓN DE UN PROBLEMA. FORMATO DE DATOS	109
1.3	CREACIÓN DE INFORMACIÓN DE ELEMENTOS FINITOS	117







# 1 INTRODUCCIÓN

La línea aérea de contacto o catenaria ferroviaria está formada por un sistema de cables que se encarga de la transmisión de corriente eléctrica al tren a través del colector o pantógrafo. El sistema de cables que componen la catenaria está formado, por lo general, por el cable sustentador, el cable de contacto, las péndolas y los cables 'Y'. Además, también cuenta con elementos estructurales encargados de soportar todo el sistema, como son los postes y las ménsulas.

A continuación se detalla mínimamente la función de cada uno de los componentes de la catenaria.

- Cable sustentador: Se trata de un cable suspendido sucesivamente a lo largo de la vía férrea, adoptando entre las suspensiones una línea curva con flecha máxima en el centro. Esta forma geométrica adoptada es la descrita por la función catenaria, y da nombre a todo el conjunto de cables que forman la línea aérea de alimentación. Su función principal es la de soportar al hilo de contacto que está en contacto directo con el pantógrafo, manteniéndolo, en general, lo más paralelo posible a la vía.
- Cable de contacto: Se encuentra suspendido del sustentador a intervalos regulares por medio de cables verticales, llamados péndolas, y es el encargado de suministrar al vehículo la energía eléctrica necesaria. Como su nombre indica, está en contacto directo con el pantógrafo. Para que la transmisión de energía sea óptima, es importante que dicho contacto sea lo

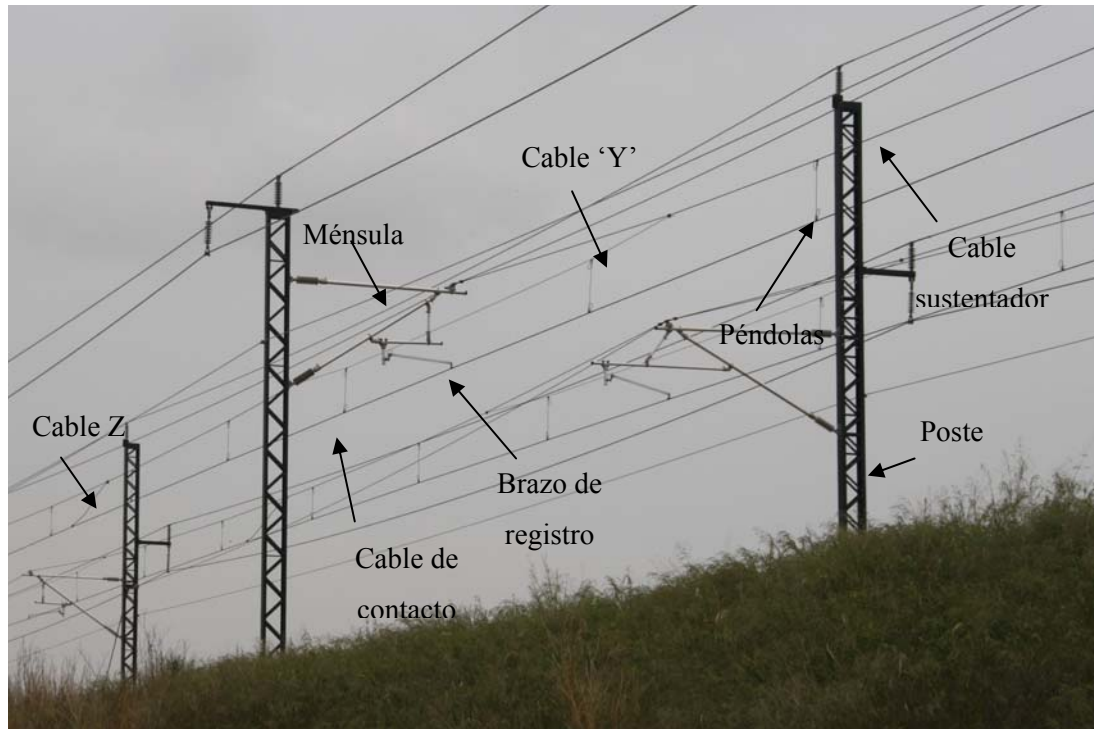


más uniforme posible, por lo que, en general, es necesario que la altura de este cable permanezca constante.

- Péndolas: Son los elementos que sujetan el cable de contacto al sustentador a través de elementos auxiliares llamados grifas, confiriendo al sistema de una rigidez uniforme.
- Cable 'Y': Se añaden con el fin de mantener lo más uniforme posible la rigidez de la catenaria a la altura de los postes. Al igual que las péndolas, se sujetan a los cables sustentador y de contacto mediante las grifas.
- Postes: Son los pilares verticales que se levantan desde la altura del terreno hasta la altura adecuada para soportar la línea aérea de contacto a través de las ménsulas.
- Ménsulas: Conjunto de barras encargado de sujetar el sistema de cables a los postes.
- Brazo de registro: Pertenece a la ménsula y su misión es sujetar el cable de contacto. Puede ser interior, estirando al cable hacia el poste, o exterior, alejándolo de él, de manera que produce sobre el cable de contacto un trazado zigzagueante. Dicho trazado permite que el desgaste en el pantógrafo sea uniforme.

Todo el sistema de cables que forma la catenaria ferroviaria se encuentra tensionado mediante un sistema de compensación mecánica, de manera que tanto la flecha que se produce en el cable de contacto como en el sustentador pueden ser controladas.





**Ilustración 1: Catenaria de la línea del Ave Madrid-Valencia.**

## 1.1 OBJETO DE LA TESIS DE MÁSTER

El objeto de la presente tesis de máster es el estudio del comportamiento de una catenaria ferroviaria. Para ello se ha implementado un programa en MATLAB que permite realizar la simulación de una catenaria ferroviaria mediante el método de los elementos finitos.

Se tratará de desarrollar una herramienta para el cálculo de longitudes de péndolas que produzca la geometría de catenaria deseada, es decir, que trate de



mantener la altura del cable de contacto lo más uniforme posible, de manera que éste sea paralelo al plano de la vía y pueda mantener así constante su contacto con el pantógrafo.

Por tanto, se calculará el punto de equilibrio de cada nodo de la malla de la catenaria, así como las longitudes iniciales de los elementos, teniendo en cuenta tanto la condición de posición de los nodos del cable de contacto como la tensión introducida en el sistema por los mecanismos de compensación de la catenaria.

El objetivo principal de este trabajo es la correcta simulación de la catenaria bajo la aplicación de fuerzas tanto gravitatorias como elásticas. Este objetivo general se puede subdividir en varios objetivos a alcanzar:

- Planteamiento y formulación del problema estático.
- Generación del modelo geométrico y mallado de la catenaria, para lo cual se utilizará el método de los elementos finitos mediante elementos unidimensionales tipo cable y barra.
- Modelado del comportamiento con el fin de obtener la posición de equilibrio del sistema bajo acciones gravitatorias y de tensado.

En cuanto a la estructuración de la tesis de máster, en el capítulo 2 se aborda el análisis del problema de grandes desplazamientos que se presenta al tratar de calcular la deformación de los cables, deduciendo la formulación del problema mediante dos planteamientos diferentes. A continuación se presenta el modelo de elementos finitos desarrollado y se muestra mediante ejemplos el cálculo de la configuración de posición inicial (capítulos 3 y 4). En el capítulo 5 se han llevado a cabo una serie de comparaciones y comprobaciones para validar el modelo, presentándose además ciertos parámetros de influencia en el modelo de elementos



finitos desarrollado. En el capítulo 6 se recogen las conclusiones extraídas a lo largo del trabajo, indicando también posibles desarrollos futuros. Finalmente, la memoria termina con una lista de referencias bibliográficas (capítulo 7).

Por último, en el Anexo, se presenta el manual del programador así como las rutinas más importantes del programa de cálculo implementado en Matlab.

## 1.2 MOTIVACIÓN

Las motivaciones que han impulsado al desarrollo de esta tesis de máster de máster son las siguientes:

- La aplicación de los conocimientos adquiridos durante la obtención del título de grado y postgrado a la resolución de un problema de gran interés práctico.
- Participación en un proyecto de investigación sobre un tema de aplicación real como es el estudio de una catenaria ferroviaria.
- El poder desarrollar un proyecto en el que se conjuga el conocimiento del método de los elementos finitos y la programación en MATLAB.
- Cumplir el último requisito para la obtención del título de Máster en Ingeniería Mecánica y Materiales tras la finalización de los estudios.





## 2 FORMULACIÓN DEL PROBLEMA

En este capítulo se resumen los desarrollos realizados en relación a la definición del modelo de elementos finitos de la catenaria.

En cuanto a contenido, en primer lugar se plantea la definición del trazado. Se considera inicialmente que está contenido en un plano horizontal y definido en base a un arco de circunferencia. No obstante, la formulación se ha desarrollado de forma general, admitiendo la definición del trazado mediante la ecuación paramétrica correspondiente al eje de la vía (en un plano horizontal).

A continuación se presentan los modelos asociados a los cables, incluyendo la definición de la interpolación, los modelos de comportamiento longitudinal y transversal y finalmente las ecuaciones que permiten calcular las fuerzas elásticas y gravitatorias en estos elementos. También se presentan los elementos barra, asociados al modelado de componentes de la catenaria cuya rigidez a flexión es despreciable (como por ejemplo es el caso de las péndolas). Definido el modelo estático del sistema, se resume la metodología de resolución del problema no lineal.

Con este planteamiento es posible calcular la posición deformada de la catenaria, considerando como datos las longitudes de los elementos que la componen. Sin embargo, los mecanismos de compensación de la catenaria inducen tracciones en los cables sustentador y conductor, y es necesario que en la posición deformada el cable conductor adopte una geometría preestablecida. Por este motivo, se presenta la metodología desarrollada en este trabajo para incorporar la existencia de tensiones conocidas en cables y el cálculo de longitudes de péndolas.



La primera metodología desarrollada consiste en incorporar al problema estático el conjunto de restricciones que permitan definir estas características, incorporando como variables del problema las longitudes de elementos que permiten controlar la tensión en los cables o la altura de los puntos de unión entre péndolas y catenaria.

El segundo enfoque, más general, consiste en plantear un problema de optimización. Dada una posición deseada del cable conductor, se busca minimizar el error en dicha posición, considerando como restricciones las ecuaciones de equilibrio de la catenaria, las que permiten inducir las tensiones deseadas de los cables y las asociadas a la posición de nodos del sistema.

## 2.1 INTRODUCCIÓN

La catenaria es un sistema en cuyo análisis no es posible realizar la hipótesis de pequeños desplazamientos. La deformación del sistema no es despreciable, es decir, es necesario considerar esta deformación para el análisis de las fuerzas que intervienen. En la formulación tradicional de vigas mediante elementos finitos se utilizan como grados de libertad los desplazamientos y rotaciones con respecto a la posición de equilibrio inicial para definir la deformación. En general, es necesario utilizar sistemas de referencia asociados a los elementos finitos que permitan considerar el problema de grandes desplazamientos. En el presente trabajo se ha optado por formular el problema en coordenadas nodales absolutas. En este caso se utilizan como grados de libertad (gdl) la posición absoluta de los nodos (no los desplazamientos) y las derivadas de estas variables con respecto a las coordenadas. No se utilizan, por lo tanto, rotaciones infinitesimales o finitas para describir el giro de la sección transversal.



La formulación seleccionada tiene ventajas importantes. Conduce a la definición de elementos finitos isoparamétricos, permitiendo por lo tanto utilizar todos los desarrollos habituales asociados a este tipo de elementos. Permite considerar de forma sencilla el comportamiento de grandes desplazamientos, obviando la definición de sistemas de ejes locales en cada elemento, necesarios en la formulación convencional de elementos viga.

Para desarrollar la formulación de elementos finitos se considerará la minimización de la energía potencial total, considerando la energía de deformación asociada a la deformación axial y de flexión de los elementos cable. Mediante este planteamiento, las fuerzas nodales elásticas corresponden a la derivada de la energía de deformación con respecto a las coordenadas nodales. La torsión del cable no queda representada mediante esta formulación, sin embargo se trata de un efecto despreciable en la mayoría de los problemas tridimensionales, y en concreto en el caso presentado del cable de la catenaria.

Debido a que se trata de un problema de grandes desplazamientos, el modelo obtenido será no lineal, con lo que se deberán utilizar procedimientos apropiados para resolverlo, como por ejemplo el método numérico de Newton-Raphson. Esto implica obtener las derivadas de las fuerzas nodales con respecto a las coordenadas, definiendo la matriz tangente del elemento.

Para realizar el estudio de la catenaria mediante elementos finitos se utilizan elementos tipo cable, capaces de transmitir tanto esfuerzos de tracción como de flexión, y elementos tipo barra, que se deforman únicamente a lo largo de su eje longitudinal. Ambos están sometidos tanto a fuerzas externas, por ejemplo las gravitatorias, como a esfuerzos de deformación elástica. Hay que tener en cuenta que la dificultad a la hora de calcular las fuerzas totales a las que está sometida la



estructura es que no se pueden considerar pequeños desplazamientos, como se haría si la deformación elástica sobre los elementos fuesen despreciables, sino que se trata de un problema de grandes desplazamientos.

Esto implica que el cálculo de las fuerzas no se puede realizar como en un problema lineal, ya que la matriz de rigidez del elemento dependerá de sus grados de libertad. Será pues necesario definir primero la energía a la que está sometido el elemento. Esta energía se puede separar en energía cinética y de deformación, obteniéndose a partir de cada una de ellas respectivamente las fuerzas inerciales aplicadas y los esfuerzos de deformación elástica.

En el presente capítulo se analizará todo el problema para elementos de longitud  $L$ , módulo de Young  $E$ , área de sección transversal  $A$ , momento de inercia  $I$  y densidad  $\rho$ .

## 2.2 DEFINICIÓN DEL TRAZADO

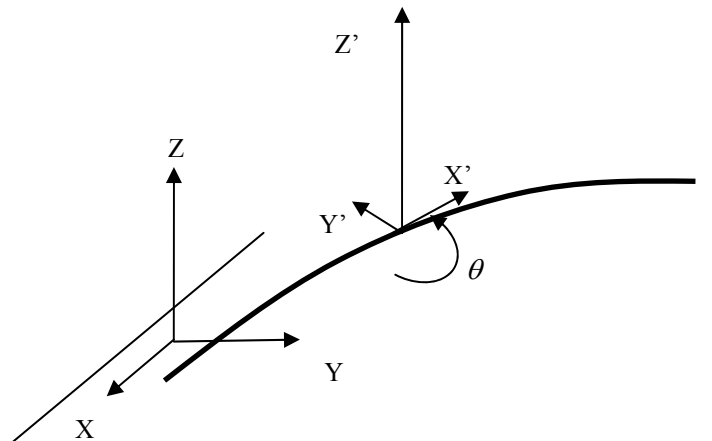
Aunque el trazado corresponda con una recta, la catenaria real es tridimensional, ya que por ejemplo, los tirantes producen el escalonado del cable de contacto. En el caso de trazado en curva, los efectos tridimensionales pueden ser algo más importantes, aunque su influencia en el caso de alta velocidad, dado el radio de las curvas, podría no ser relevante. En este trabajo se va a considerar la posibilidad de que el trazado no sea recto. El modelado de trazados no rectos hace más complejo el modelo de elementos finitos de la catenaria, fundamentalmente en lo que respecta a la imposición de condiciones de contorno.



En el modelo de curva implementado se considera que el trazado es plano. El eje Z del sistema de coordenadas global es vertical. La curva que define el eje de la vía está definida paramétricamente en el plano XY.

$$\begin{aligned}x_v &= x_v(s) \\y_v &= y_v(s)\end{aligned}\tag{2-1}$$

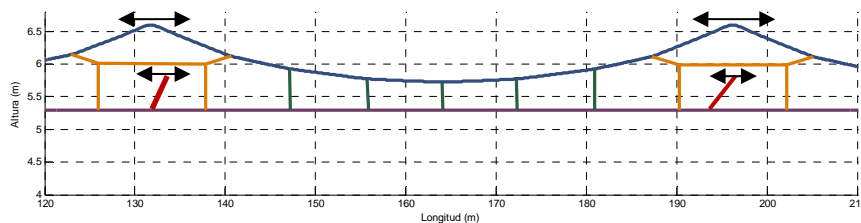
Asociado a cada punto del eje de la vía, se define un sistema de coordenadas local en el que la dirección X' corresponde a la dirección tangente de la curva. Este sistema de coordenadas locales (definido por el ángulo  $\theta$ ) se utiliza para poder imponer de forma sencilla condiciones de apoyo o restricciones de movimiento en la catenaria. Si el trazado es rectilíneo, se supone que el sistema global es tal que el eje X coincide con el eje de la vía.



**Ilustración 2: Definición de sistema de coordenadas**

En los ejemplos resueltos, se ha considerado como trazado en curva el definido por un arco de circunferencia, aunque la implementación es general. Es decir, si se requiere modelar otro tipo de trazado plano solo es necesario disponer de las ecuaciones paramétricas de la curva correspondiente.

El sistema de coordenadas asociado a la vía tiene como principal objetivo permitir simular condiciones de apoyo o restricciones de movimiento en puntos de la catenaria. Por ejemplo, el soporte del hilo de contacto en la ménsula, debe permitir el movimiento en la dirección de la vía. Si el trazado es recto, esta condición corresponde simplemente a considerar que la altura y la posición con respecto al eje de la vía del nodo correspondiente son fijas (coordenadas  $y$  y  $z$ ). En el caso de trazado en curva, si las coordenadas nodales correspondientes al punto de unión de la ménsula con el hilo portador están definidas en el sistema asociado a la vía, estas condiciones se imponen de forma análoga (coordenadas  $y'$  y  $z'$ ). En el programa desarrollado, las variables nodales pueden estar definidas bien en el sistema de coordenadas global o bien en el sistema de coordenadas de vía, de forma que se facilite la oportuna aplicación de condiciones de contorno o restricciones.



**Ilustración 3: Condición de soporte de cable portador y tirante (desplazamientos permitidos)**



## 2.3 ELEMENTOS FINITOS DESARROLLADOS

Como se ha comentado anteriormente, el modelado de la catenaria se realiza básicamente mediante dos tipos de elementos: cable y barra. El primero de ellos admite deformaciones longitudinales y de flexión, mientras que el segundo sólo admite deformación longitudinal. Los elementos barra se utilizan para modelar las péndolas y los tirantes que generan el escalonado. Adicionalmente se pueden incorporar elementos de características puntuales que simulan la masa de elementos de unión como grifas. En el caso que nos ocupa, el estático, dichos elementos puntuales sólo influirán aportando fuerzas gravitacionales en los nodos en los que están estos elementos.

### 2.3.1 Elemento cable

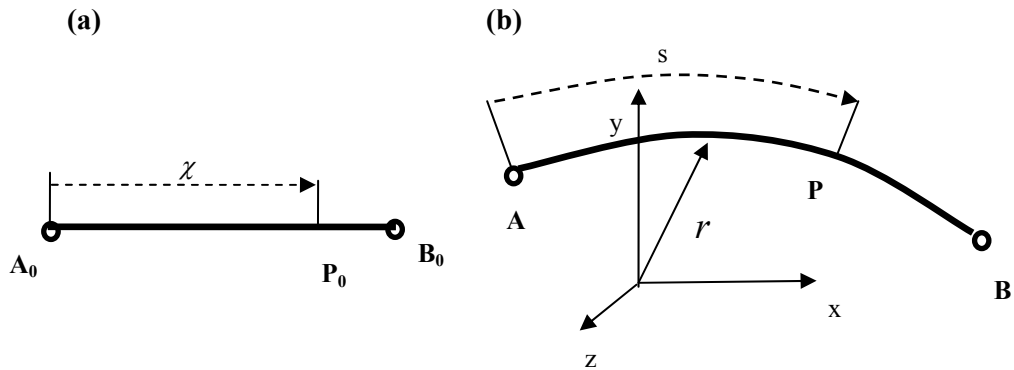
#### 2.3.1.1 Interpolación. Funciones de forma

Se ha considerado el modelado de los elementos cable mediante coordenadas absolutas. De esta forma, no se consideran como grados de libertad (gdl) los desplazamientos y rotaciones con respecto a la posición de equilibrio inicial, sino la posición absoluta de los nodos y sus derivadas. Esta formulación permite considerar correctamente el problema de grandes desplazamientos que se presenta en el sistema catenaria.

Al considerar el problema tridimensional, cada nodo tiene 6 gdl, siendo estos gdl las coordenadas  $x$ ,  $y$ ,  $z$  de su posición y sus derivadas respectivas,  $\frac{dx}{d\chi}$ ,  $\frac{dy}{d\chi}$ ,

$\frac{dz}{d\chi}$ , de manera que cada elemento vendrá definido por un total de 12 gdl.

Considérese el elemento de la Ilustración 4 (a), definido por sus nodos  $i$  y  $j$ . En el elemento no deformado se define la coordenada de un punto arbitrario  $\chi$ , que varía entre 0 y  $L$  (longitud del elemento no deformado).



**Ilustración 4: (a) Elemento no deformado (b) Elemento deformado**

El vector que define los gdl nodales del elemento es el siguiente:

$$\mathbf{q} = [q_{i1} \quad q_{i2} \quad q_{i3} \quad q_{i4} \quad q_{i5} \quad q_{i6} \quad q_{j1} \quad q_{j2} \quad q_{j3} \quad q_{j4} \quad q_{j5} \quad q_{j6}]^T \quad 2-2$$

$$\mathbf{q} = \left[ x_i \quad y_i \quad z_i \quad \frac{dx_i}{d\chi} \quad \frac{dy_i}{d\chi} \quad \frac{dz_i}{d\chi} \quad x_j \quad y_j \quad z_j \quad \frac{dx_j}{d\chi} \quad \frac{dy_j}{d\chi} \quad \frac{dz_j}{d\chi} \right]^T \quad 2-3$$

En la Ilustración 4 se puede observar el elemento original y el mismo tras sufrir una deformación.  $\chi$  es la coordenada que define la posición del punto



arbitrario  $\mathbf{P}_0$  dentro del elemento sin deformar, y  $s$  la del correspondiente punto  $\mathbf{P}$  en elemento deformado.

Denominando  $\mathbf{r}$  al vector de posición del punto  $\mathbf{P}$ ,  $\mathbf{q}$  al vector de gdl y  $\mathbf{S}$  a la matriz de funciones de forma del elemento, la interpolación del elemento está definida por:

$$\mathbf{r} = \begin{Bmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{Bmatrix} = \mathbf{S}\mathbf{q} \quad 2-4$$

Donde la matriz de funciones de forma es

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} s1 & 0 & 0 & s2 & 0 & 0 & s3 & 0 & 0 & s4 & 0 & 0 \\ 0 & s1 & 0 & 0 & s2 & 0 & 0 & s3 & 0 & 0 & s4 & 0 \\ 0 & 0 & s1 & 0 & 0 & s2 & 0 & 0 & s3 & 0 & 0 & s4 \end{bmatrix} \quad 2-5$$

Como el vector  $\mathbf{r}$  viene definido por un polinomio cúbico, se tendrá:

$$\mathbf{r} = \begin{Bmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \\ b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 \\ c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 \end{Bmatrix} \quad 2-6$$

Considerando las condiciones necesarias de continuidad en la interpolación, las funciones de forma son:

$$\begin{aligned} S_1(\xi) &= 1 - 3\xi^2 + 2\xi^3 \\ S_2(\xi) &= L(\xi - 2\xi^2 + \xi^3) \\ S_3(\xi) &= 3\xi^2 - 2\xi^3 \\ S_4(\xi) &= L(\xi^3 - \xi^2) \end{aligned} \quad 2-7$$

Siendo la coordenada local normalizada  $\xi = \frac{\chi}{L} \in [0, 1]$ .

### 2.3.1.2 Fuerzas elásticas

El planteamiento del elemento se basa en la definición de las deformaciones longitudinales y de flexión y la formulación de las energías de deformación asociadas. A partir de las expresiones de la energía de deformación se pueden obtener las fuerzas elásticas asociadas al elemento.

La energía de deformación elástica se puede descomponer en energía de deformación longitudinal,  $U_L$ , y transversal o de flexión,  $U_T$ . Para el cálculo de dicha energía es importante la manera en que se define la deformación de un punto arbitrario del elemento.

#### 2.3.1.2.1 Deformación longitudinal

Considerando que  $\varepsilon_L$  es la deformación longitudinal,  $E$  es el módulo de elasticidad y  $A$  el área de sección transversal, la energía de deformación longitudinal está definida por:

$$U_L = \frac{1}{2} \int_0^L EA \varepsilon_L^2 d\chi \quad 2-8$$



La deformación longitudinal se define como la relación entre la diferencia de longitud tras la deformación y la longitud original de un segmento infinitesimal del elemento. Como se ha definido en el apartado anterior, la configuración deformada del elemento está descrita mediante el vector  $\mathbf{r}(\chi)$ , donde  $\chi$  representa la coordenada local asociada al elemento sin deformar. La longitud diferencial de arco en el elemento deformado está definida por:

$$ds = \sqrt{\mathbf{r}'^T \mathbf{r}'} d\chi \quad 2-9$$

Siendo  $\mathbf{r}' = \frac{d\mathbf{r}}{d\chi}$ .

De esta forma, la longitud total del elemento deformado será:

$$\int_0^L ds = \int_0^L \sqrt{\mathbf{r}'^T \mathbf{r}'} d\chi \quad 2-10$$

Considerando ahora la definición de deformación longitudinal, ésta puede escribirse como:

$$\varepsilon_L = \frac{1}{2} \frac{ds^2 - d\chi^2}{d\chi^2} \quad 2-11$$

Definiendo el gradiente de deformación longitudinal

$$f = \frac{ds}{d\chi} = \sqrt{\mathbf{r}'^T \mathbf{r}'}, \quad 2-12$$

se obtiene finalmente la deformación longitudinal como:



$$\varepsilon_L = \frac{1}{2}(\mathbf{r}'^T \mathbf{r}' - 1) = \frac{1}{2}(f^2 - 1) \quad 2-13$$

El vector de fuerzas asociado a la deformación longitudinal puede deducirse del siguiente modo:

$$\varepsilon_L = \frac{1}{2}(f^2 - 1) = \frac{1}{2}(\mathbf{r}'^T \mathbf{r}' - 1) \quad 2-14$$

En la que se sustituye la aproximación de elementos finitos dada por

$$\mathbf{r}(\chi) = \mathbf{S}(\chi)\mathbf{q} \rightarrow \mathbf{r}' = \mathbf{S}'\mathbf{q} \quad 2-15$$

Si se denota por  $\mathbf{S}_{,\xi}$  a la derivada de la matriz de funciones de forma  $\mathbf{S}$  con respecto a la coordenada local normalizada del elemento,  $\xi$ , y se define la matriz

$$\mathbf{S}_L = \mathbf{S}'^T \mathbf{S}' = \frac{1}{L^2} \mathbf{S}_{,\xi}^T \mathbf{S}_{,\xi} \quad 2-16$$

Se obtiene,

$$\mathbf{r}'^T \mathbf{r}' = \mathbf{q}^T \mathbf{S}'^T \mathbf{S}' \mathbf{q} = \mathbf{q}^T \mathbf{S}_L \mathbf{q} \quad 2-17$$

La deformación longitudinal será, por lo tanto

$$\varepsilon_L = \frac{1}{2}(\mathbf{q}^T \mathbf{S}_L \mathbf{q} - 1) \quad 2-18$$

La energía de deformación longitudinal es





$$U_L = \frac{1}{2} \int_0^L EA \varepsilon_L^2 d\chi \quad 2-19$$

Y su derivada con respecto a las coordenadas nodales, que define el vector de fuerzas elásticas en el elemento debido a la deformación longitudinal, es:

$$\mathbf{F}_{Lel} = \int_0^L EA \varepsilon_L \left( \frac{\partial \varepsilon_L}{\partial \mathbf{q}} \right)^T d\chi \quad 2-20$$

Teniendo en cuenta la expresión de la deformación de la ecuación 2-18, se obtiene

$$\mathbf{F}_{Lel} = \left( \int_0^L EA \varepsilon_L \mathbf{S}_L d\chi \right) \mathbf{q} \quad 2-21$$

Considerando una relación matricial entre coordenadas y fuerzas elásticas correspondientes definida por:

$$\mathbf{F}_{Lel} = \mathbf{K}_L \mathbf{q} \quad 2-22$$

La matriz  $\mathbf{K}_L$  (función de las coordenadas nodales) es:

$$\mathbf{K}_L = \int_0^L EA \varepsilon_L \mathbf{S}_L d\chi \quad 2-23$$

Utilizando de nuevo la definición de la deformación  $\varepsilon_L$ , la matriz  $\mathbf{K}_L$  puede calcularse como



$$\mathbf{K}_L = EA \int_0^L \frac{1}{2} (\mathbf{q}^T \mathbf{S}_L \mathbf{q} - 1) \mathbf{S}_L d\chi = \frac{EA}{2} \left( \int_0^L \mathbf{q}^T \mathbf{S}_L \mathbf{q} \mathbf{S}_L d\chi - \int_0^L \mathbf{S}_L d\chi \right) \quad 2-24$$

$$\mathbf{K}_L = \frac{EAL}{2} \left( \int_0^1 \mathbf{q}^T \mathbf{S}_L \mathbf{q} \mathbf{S}_L d\xi - \bar{\mathbf{S}}_L \right) \quad 2-25$$

Desarrollando estas expresiones, se obtiene:

$$\mathbf{K}_L = EA \begin{bmatrix} \mathcal{A} & 0 & 0 & \mathcal{B} & 0 & 0 & -\mathcal{A} & 0 & 0 & \mathcal{C} & 0 & 0 \\ & \mathcal{A} & 0 & 0 & \mathcal{B} & 0 & 0 & -\mathcal{A} & 0 & 0 & \mathcal{C} & 0 \\ & & \mathcal{A} & 0 & 0 & \mathcal{B} & 0 & 0 & -\mathcal{A} & 0 & 0 & \mathcal{C} \\ & & & \mathcal{D} & 0 & 0 & -\mathcal{B} & 0 & 0 & \mathcal{E} & 0 & 0 \\ & & & & \mathcal{D} & 0 & 0 & -\mathcal{B} & 0 & 0 & \mathcal{E} & 0 \\ & & & & & \mathcal{D} & 0 & 0 & -\mathcal{B} & 0 & 0 & \mathcal{E} \\ & & & & & & \mathcal{A} & 0 & 0 & -\mathcal{C} & 0 & 0 \\ & & & & & & & \mathcal{A} & 0 & 0 & -\mathcal{C} & 0 \\ & & & & & & & & \mathcal{A} & 0 & 0 & -\mathcal{C} \\ & & & & & & & & & \mathcal{F} & 0 & 0 \\ & & & & & & & & & & \mathcal{F} & 0 \\ & & & & & & & & & & & \mathcal{F} \end{bmatrix} \quad 2-26$$

Donde se ha definido:



$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= \frac{3}{70L^3} \left( L^2 (q_4^2 + q_5^2 + q_6^2 + q_{10}^2 + q_{11}^2 + q_{12}^2) - 48j + 24k - 6(m1 + m2 + m3 + m4 + m5 + m6) - 14L^2 \right) \\ \mathcal{B} &= -\frac{1}{280L^2} \left( L^2 (q_4^2 + q_5^2 + q_6^2 - q_{10}^2 - q_{11}^2 - q_{12}^2) - 2l + 72j - 36k + 24(m1 + m2 + m3) + 14L^2 \right) \\ \mathcal{C} &= \frac{1}{280L^2} \left( L^2 (q_4^2 + q_5^2 + q_6^2 - q_{10}^2 - q_{11}^2 - q_{12}^2) + 2l - 72j + 36k - 24(m4 + m5 + m6) - 14L^2 \right) \\ \mathcal{D} &= \frac{1}{420L} \left( 12L^2 (q_4^2 + q_5^2 + q_6^2) + L^2 (q_{10}^2 + q_{11}^2 + q_{12}^2) - 3l - 36j + 18k + 3(m1 + m2 + m3 - m4 - m5 - m6) - 28L^2 \right) \\ \mathcal{E} &= -\frac{1}{280L} \left( L^2 (q_4^2 + q_5^2 + q_6^2 + q_{10}^2 + q_{11}^2 + q_{12}^2) \right) + \frac{1}{210L} l - \frac{m1 + m2 + m3 + m4 + m5 + m6}{140L} + \frac{L}{60} \\ \mathcal{F} &= \frac{1}{420L} \left( L^2 (q_4^2 + q_5^2 + q_6^2) + 12L^2 (q_{10}^2 + q_{11}^2 + q_{12}^2) - 3l - 36j + 18k - 3(m1 + m2 + m3 - m4 - m5 - m6) - 28L^2 \right)\end{aligned}$$

2.1

Siendo

$$\begin{aligned}j &= q_1 q_7 + q_2 q_8 + q_3 q_9 \\ k &= q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + q_7^2 + q_8^2 + q_9^2 \\ l &= L^2 (q_4 q_{10} + q_5 q_{11} + q_6 q_{12}) \\ m1 &= L q_6 (q_9 - q_3) \\ m2 &= L q_4 (q_7 - q_1) \\ m3 &= L q_5 (q_8 - q_2) \\ m4 &= L q_{10} (q_7 - q_1) \\ m5 &= L q_{11} (q_8 - q_2) \\ m6 &= L q_{12} (q_9 - q_3)\end{aligned}$$

### 2.3.1.2.2 Deformación de flexión

En el modelo de flexión que se va a utilizar, se va a considerar como hipótesis básica que el efecto del cortante es despreciable y por lo tanto que las secciones transversales permanecen planas y perpendiculares a la línea media deformada de la viga. Además, se despreciará la influencia de la deformación longitudinal en la



transversal o de flexión. Bajo esta hipótesis, y considerando ciertas simplificaciones, el momento flector está dado por:

$$M = EI\kappa \quad 2-27$$

Siendo  $I$  el momento de inercia de la sección transversal y  $\kappa$  la curvatura definida a partir de la deformada como:

$$\kappa = \left| \frac{d^2 \mathbf{r}}{ds^2} \right| \quad 2-28$$

En base a esto, la energía de deformación debida a la flexión (o energía de deformación transversal) es:

$$U_F = \frac{1}{2} \int_0^L EI\kappa^2 ds \quad 2-29$$

Considerando la descripción de la deformada a partir de  $\mathbf{r}(\chi)$ , la curvatura puede obtenerse como:

$$\kappa = \frac{|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''|}{|\mathbf{r}'|^3} = \frac{\mathbf{r}'' \tilde{\mathbf{I}} \mathbf{r}'}{|\mathbf{r}'^T \mathbf{r}'|^{3/2}} = \frac{\mathbf{r}'' \tilde{\mathbf{I}} \mathbf{r}'}{f^3} \quad 2-30$$

Con



$$\tilde{\mathbf{I}} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad 2-31$$

Como puede observarse, la curvatura depende de la deformación longitudinal (a través de  $\mathbf{r}'$  y  $f$ ). En el caso en el que las deformaciones longitudinales sean pequeñas, se puede despreciar este efecto. En este caso, como aproximación para considerar la deformación a flexión se obtiene:

$$\kappa = \left| \frac{d^2 \mathbf{r}}{ds^2} \right| \approx \left| \frac{d^2 \mathbf{r}}{d\chi^2} \right| = |\mathbf{r}''| \quad 2-32$$

Considerando la aproximación de elementos finitos, se obtiene:

$$\kappa^2 = \mathbf{q}^T \mathbf{S}''^T \mathbf{S}'' \mathbf{q} \quad 2-33$$

La energía de deformación puede escribirse como:

$$U_F = \mathbf{q}^T \left[ \frac{EI}{2} \int_0^L \mathbf{S}''^T \mathbf{S}'' ds \right] \mathbf{q} \quad 2-34$$

En este caso, la energía de deformación asociada puede definirse como:

$$U_F = \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{K}_F \mathbf{q} \quad 2-35$$

Siendo la matriz de rigidez en este caso constante, ya que no depende de los gdl nodales.



$$\mathbf{K}_F = EI \int_0^L \mathbf{S}^{nT} \mathbf{S}^n d\chi = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 0 & 0 & 6L & 0 & 0 & -12 & 0 & 0 & 6L & 0 & 0 \\ & 12 & 0 & 0 & 6L & 0 & 0 & -12 & 0 & 0 & 6L & 0 \\ & & 12 & 0 & 0 & 6L & 0 & 0 & -12 & 0 & 0 & 6L \\ & & & 4L^2 & 0 & 0 & -6L & 0 & 0 & 2L^2 & 0 & 0 \\ & & & & 4L^2 & 0 & 0 & -6L & 0 & 0 & 2L^2 & 0 \\ & & & & & 4L^2 & 0 & 0 & -6L & 0 & 0 & 2L^2 \\ & & & & & & 12 & 0 & 0 & -6L & 0 & 0 \\ & & & & & & & 12 & 0 & 0 & -6L & 0 \\ & & & & & & & & 12 & 0 & 0 & -6L \\ & & & & & & & & & 4L^2 & 0 & 0 \\ & & & & & & & & & & 4L^2 & 0 \\ & & & & & & & & & & & 4L^2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{2-36}$$

El vector de fuerzas elásticas debido a la deformación de flexión se obtiene como

$$\mathbf{F}_{F el} = \mathbf{K}_F \mathbf{q} \quad \mathbf{2-37}$$

### 2.3.1.2.3 Energía de deformación total

La energía de deformación total será la suma de las energías de deformación longitudinal y la transversal.

$$U = U_F + U_L \quad \mathbf{2-38}$$

Si el problema fuera de pequeños desplazamientos, se podría obtener una expresión para la energía de deformación dada por:

$$U = \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{K} \mathbf{q} \quad \mathbf{2-39}$$



En la que  $\mathbf{K}$  representa la matriz de rigidez del sistema y  $\mathbf{q}$  el vector de gdl (coordenadas nodales). Como en este caso no se puede considerar la hipótesis de pequeños desplazamientos, no se podrá obtener tal expresión, aunque será posible buscar ecuaciones formalmente similares. La diferencia es que la matriz de  $\mathbf{K}$  no será constante, sino que dependerá de las coordenadas  $\mathbf{q}$  definidas para el problema.

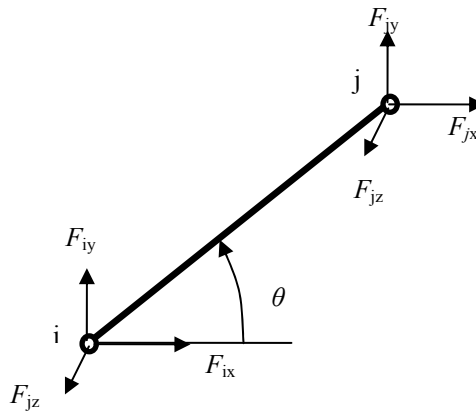
### 2.3.1.3 Fuerzas gravitatorias

Las fuerzas gravitatorias dependen exclusivamente del área de la sección transversal y la densidad  $\rho$  correspondiente del cable. El vector de fuerzas gravitacionales asociado a un elemento se calcula como:

$$\mathbf{F}_g = \int_0^L \mathbf{S}^T \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -g\rho A \end{Bmatrix} d\chi = \frac{-g\rho AL}{12} (0 \ 0 \ 6 \ 0 \ 0 \ 16L \ 0 \ 0 \ 6 \ 0 \ 0 \ -16L)^T \quad \mathbf{2-40}$$

Utilizando este tipo de planteamiento, el vector de fuerzas gravitacionales asociado al elemento es constante (no depende de las coordenadas nodales).

### 2.3.2 Elemento barra



**Ilustración 5: Elemento barra**

En la catenaria existen diferentes elementos cuya rigidez a flexión puede considerarse despreciable. Éste es el caso de las péndolas, por ejemplo. Los elementos finitos que definen su comportamiento serán denominados elementos barra, pudiendo modelarse de forma más sencilla que los elementos cable.

Como no se considera el comportamiento a flexión en este tipo de elementos, las coordenadas nodales involucradas corresponden únicamente a la posición de los correspondientes nodos:

$$\mathbf{q} = [q_{i1} \quad q_{i2} \quad q_{i3} \quad q_{j1} \quad q_{j2} \quad q_{j3}]^T = [x_i \quad y_i \quad z_i \quad x_j \quad y_j \quad z_j]^T \quad 2-41$$





La longitud deformada del elemento y su orientación angular están definidas por:

$$\begin{aligned}L_{def} &= \sqrt{(q_4 - q_1)^2 + (q_5 - q_2)^2 + (q_6 - q_3)^2} \\ \cos \theta_x &= \frac{q_4 - q_1}{L_{def}} \\ \cos \theta_y &= \frac{q_5 - q_2}{L_{def}} \\ \cos \theta_z &= \frac{q_6 - q_3}{L_{def}}\end{aligned}\tag{2-42}$$

En este caso, la deformación es únicamente longitudinal y se supone una interpolación lineal en del elemento, de forma que el vector de posición de un punto  $\mathbf{P}$ , arbitrario, está definida por:

$$\mathbf{r} = \begin{Bmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{Bmatrix} = \mathbf{S}\mathbf{q}\tag{2-43}$$

siendo la matriz de funciones de forma en este caso:

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_1 & 0 & 0 & \mathbf{S}_2 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{S}_1 & 0 & 0 & \mathbf{S}_2 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{S}_1 & 0 & 0 & \mathbf{S}_2 \end{bmatrix}\tag{2-44}$$

Con:

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_1(\xi) &= 1 - \xi \\ \mathbf{S}_2(\xi) &= \xi \end{aligned} \quad 2-45$$

A partir de la definición de la interpolación en el elemento es sencillo obtener la expresión del vector de fuerzas elásticas. Al igual que en elemento cable, se puede expresar este vector como:

$$\mathbf{F}_{Lel} = \mathbf{K}_L \mathbf{q} \quad 2-46$$

La matriz  $\mathbf{K}_L$  resulta en este caso:

$$\mathbf{K}_L = \mathcal{A} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad 2-47$$

siendo:

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \frac{EA}{L^3} (L_{def}^2 - L^2) \\ L_{def} &= \sqrt{(q_4 - q_1)^2 + (q_5 - q_2)^2 + (q_6 - q_3)^2} \end{aligned} \quad 2-48$$

### 2.3.2.1 Fuerzas gravitatorias

Con la formulación planteada, las fuerzas gravitatorias en el elemento son:



$$\mathbf{F}_g = \frac{\rho g AL}{2} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad 2-49$$

## 2.4 RESOLUCIÓN DEL PROBLEMA ESTÁTICO

Una vez definidos los vectores de fuerzas elásticas y gravitacionales de los diferentes elementos que componen la malla de elementos finitos de la catenaria, mediante un procedimiento de ensamblado se obtienen las ecuaciones de comportamiento del sistema, que corresponde al equilibrio de fuerzas.

$$\mathbf{F}(\mathbf{q}) = \mathbf{F}_{el} - \mathbf{F}_{ext} = 0 \quad 2-50$$

En este caso, las fuerzas externas corresponden a las gravitacionales.

En estas ecuaciones se deben de considerar convenientemente las condiciones de apoyo de la catenaria, restringiendo para ello la posición de ciertos puntos (nodos de elementos finitos) de la misma. Como se ha indicado previamente, cuando se considera trazado en curva es necesario restringir la posición de ciertos nodos (soporte) en las coordenadas de vía y no en el sistema de coordenadas global.

El problema planteado corresponde a un sistema de ecuaciones no lineales y para resolverlo se ha utilizado el método iterativo de Newton-Raphson. Este método requiere la obtención de las derivadas del vector de fuerzas elásticas con



respecto a las coordenadas (matriz tangente), ya que las fuerzas externas aplicadas son constantes. Las matrices tangentes a nivel de elemento se obtienen derivando los vectores de fuerzas elásticas obtenidos anteriormente.

## 2.5 CÁLCULO DE LONGITUDES INICIALES

La configuración de equilibrio estático de la catenaria no es conocida a priori, al contrario de lo que ocurre en los problemas estructurales convencionales. La posición inicial del sistema depende de las diferentes longitudes de elementos y tensiones de montaje, y en general éstas deben calcularse para obtener una configuración inicial que verifique ciertos requisitos. La característica más importante está asociada a la obtención de una altura del hilo de contacto que posibilite una correcta interacción pantógrafo-catenaria. Para conseguir este objetivo es necesario diseñar ciertos elementos (en concreto la longitud de las péndolas), teniendo en cuenta las cargas que soporta inicialmente la catenaria (fuerzas gravitacionales y tensión impuesta a los cables).

Se desarrollan dos metodologías para la obtención de la configuración inicial de la catenaria. En primer lugar se plantea el problema, incorporando a las ecuaciones de equilibrio elástico un conjunto de restricciones que permiten imponer por una parte la tensión conocida en cables y por otra definir la posición que en el equilibrio estático tendrán ciertos nodos del sistema (coordenadas). Esta última restricción permite considerar la altura a la se desea que permanezca el cable conductor en la posición de equilibrio, imponiendo el valor de las coordenadas asociadas a los nodos de unión con las péndolas.



Otra alternativa es considerar el problema de cálculo de longitudes como un problema de optimización. En este caso, se considera el problema de minimizar el error en la posición vertical del cable conductor con respecto a la posición deseada. Se consideran como restricciones al problema de minimización, las ecuaciones que definen el comportamiento elástico del sistema, restricciones en tensión de cables o en posición de nodos. De esta forma, se consigue definir el problema de una forma más general.

### 2.5.1 Consideración de restricciones en el problema elástico

El planteamiento consiste en considerar simultáneamente las ecuaciones de equilibrio estático del problema junto con un conjunto de ecuaciones de restricción, que representan condiciones que han de verificarse en la configuración de equilibrio. Se debe considerar que las ecuaciones de equilibrio dependen de las coordenadas nodales y de las longitudes de elementos que se desee calcular. Si el vector  $\mathbf{L}$  representa las longitudes de elementos, las ecuaciones de equilibrio se expresan como:

$$\mathbf{F}(\mathbf{q}, \mathbf{L}) = \mathbf{F}_{el}(\mathbf{q}, \mathbf{L}) - \mathbf{F}_{ext}(\mathbf{q}, \mathbf{L}) = 0 \quad 2-51$$

Las ecuaciones de restricción representan condiciones que se desea imponer en la configuración de equilibrio. Ejemplos de este tipo de condiciones son, como se indicará posteriormente, la tensión predefinida en un cable o la posición de nodos de la catenaria. Teniendo en cuenta que estas restricciones dependen del valor de las coordenadas nodales y adicionalmente de las longitudes de los elementos que componen la catenaria, formalmente estas restricciones se representarán por:



$$\mathbf{R}(\mathbf{q}, \mathbf{L}) = 0$$

2-52

El conjunto de las dos ecuaciones vectoriales definidas anteriormente es un sistema no lineal de ecuaciones, de cuya solución se obtiene, por una parte, las longitudes de elementos necesarias para obtener la configuración deseada y por otra la posición final de equilibrio del sistema. Este sistema de ecuaciones se resuelve mediante el algoritmo de Newton-Raphson. Para su resolución, se requiere la obtención de las primeras derivadas de las fuerzas elásticas y de las restricciones con respecto a las coordenadas nodales y longitudes de elemento.

### 2.5.1.1 Definición de restricciones.

Las restricciones que se van a considerar son las asociadas a la posición de los nodos de elementos finitos y a la tensión de cables.

#### 2.5.1.1.1 Restricciones en posición de nodos.

Mediante este tipo de restricciones se busca imponer en el problema que ciertas coordenadas nodales estén predefinidas. Por ejemplo, esto permitirá calcular las longitudes de las péndolas para que la posición vertical de los nodos que representan el hilo conductor sea la deseada.

Una restricción en la coordenada nodal  $k$ , es simplemente:

$$R_k = q_k - q_{k0} = 0$$

2-53

Donde  $q_{k0}$  es el valor deseado para el gdl  $k$  (coordenada).



### 2.5.1.1.2 Restricciones en tensión de cable.

Con este tipo de restricción se impone la tensión en un punto del cable. Para definir el punto, se considera el nodo  $i$  de un elemento  $e$ . Las componentes de la tensión en el cable pueden calcularse del siguiente modo:

$$\begin{aligned}T_x^{e,i} &= F_{elx}^{e,i} - F_{gx}^{e,i} \\T_y^{e,i} &= F_{ely}^{e,i} - F_{gy}^{e,i} \\T_z^{e,i} &= F_{elz}^{e,i} - F_{gz}^{e,i}\end{aligned}\tag{2-54}$$

Las fuerzas elásticas en un elemento dependen exclusivamente de las coordenadas nodales (gdl) del elemento  $\mathbf{q}^e$  y de su longitud  $L^e$ . Las fuerzas gravitatorias dependen únicamente de la longitud del elemento.

Una ecuación de restricción de este tipo es:

$$R^{e,i}(\mathbf{q}, \mathbf{L}) = R^{e,i}(\mathbf{q}^e, L^e) = T_x^{e,i^2} + T_y^{e,i^2} + T_z^{e,i^2} - T_0^{e,i^2} = 0\tag{2-55}$$

$T_0^{e,i}$  representa el valor de la tensión que se desea imponer.

## 2.6 Cálculo óptimo de la posición del cable de contacto

En este apartado se resume la formulación del problema con el que se pretende conseguir que la posición del cable de contacto sea lo más parecida posible a una función definida. La función más simple consiste en considerar una altura constante del cable conductor con respecto al plano de la vía, es decir, que la



posición vertical del cable sea lo más constante posible a lo largo de toda su longitud. Para conseguir optimizar esta variable se consideran como variables de diseño las longitudes de las péndolas. Durante la resolución del problema de optimización se debe tener en cuenta que la catenaria debe estar en equilibrio, es decir, que se debe cumplir la ecuación de equilibrio de fuerzas internas y externas, así como las condiciones de contorno de desplazamiento, y además la tensión de tracción en los cables sustentador y de contacto tiene que ser la especificada para la catenaria.

Se plantea como un problema de minimización con restricciones, donde el funcional minimizado mide la diferencia de la posición vertical del cable de contacto respecto de la introducida por el usuario,  $h_{cc}$ , en una serie de puntos a lo largo de todo el cable de contacto. La consideración de una función general que defina la posición vertical del cable a lo largo del tendido es inmediata. El conjunto de restricciones que se ha mencionado anteriormente se introducen mediante el método de los multiplicadores de Lagrange.

Para definir la función objetivo se plantea minimizar la diferencia entre la posición calculada de la catenaria en un conjunto de puntos correspondientes a cada elemento finito que representa el cable conductor. Se define la función error en la posición del cable conductor considerando la diferencia entre la posición calculada de un conjunto de puntos de cada uno de los elementos del cable conductor y la deseada (función  $h_{cc}$ ).

$$E(\mathbf{q}, \mathbf{L}) = \sum_{e=1}^{N_e} \sum_{p=1}^{N_p} \frac{k_p}{2} \left( r_z(\mathbf{q}, \mathbf{L}, \xi_p) - h_{cc} \right)^2 \quad 2-56$$





La función objetivo se calcula con dos sumatorios, el primero para considerar todos los elementos finitos que forman el cable de contacto y el segundo para un determinado número de puntos  $N_p$  en cada elemento de cable. La coordenada  $\xi_p$  indica la posición local (entre 0 y 1) de esos puntos. La constante  $k_p$  se ha introducido para escalar el funcional y su valor no afecta a la solución del problema de minimización.

Matemáticamente, el planteamiento del problema consiste en minimizar la función objetivo considerando un conjunto de restricciones:

$$\begin{aligned} & \min E(\mathbf{q}, \mathbf{L}) \\ & \text{sujeto a} \\ & \mathbf{F}(\mathbf{q}, \mathbf{L}) = \mathbf{F}_{el}(\mathbf{q}, \mathbf{L}) - \mathbf{F}_{ext}(\mathbf{q}, \mathbf{L}) = \mathbf{0} \\ & \mathbf{R}(\mathbf{q}, \mathbf{L}) = \mathbf{0} \end{aligned} \tag{2-57}$$

Las ecuaciones de restricción que se han introducido son el cumplimiento de la ecuación de equilibrio de fuerzas internas y externas,  $\mathbf{F}$ , y de otro tipo de restricciones,  $\mathbf{R}$ , como la tensión impuesta en cables, la imposición de la posición longitudinal de las péndolas constante durante la resolución del problema (a partir de la correspondiente posición de sus nodos), etc.

El problema planteado en la ecuación 2-57 se puede resolver mediante el método de los multiplicadores de Lagrange, dando lugar al siguiente problema de optimización sin restricciones:

$$\text{opt } \mathcal{L}(\mathbf{q}, \mathbf{L}) = \text{opt } [E(\mathbf{q}, \mathbf{L}) + \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{F}(\mathbf{q}, \mathbf{L}) + \boldsymbol{\mu}^T \mathbf{R}(\mathbf{q}, \mathbf{L})] \tag{2-58}$$



Los vectores  $\lambda$  y  $\mu$  representan los multiplicadores de Lagrange asociados a las correspondientes restricciones del problema de optimización. La resolución del problema anterior da lugar a un sistema de ecuaciones no lineales, que se resuelve mediante Newton-Raphson.



### 3 MODELO DE ELEMENTOS FINITOS

#### 3.1 DESCRIPCIÓN DEL MODELO

La generación del modelo de elementos finitos de la catenaria consiste en la definición de la topología de los elementos que forman cada una de las partes de la estructura así como de una estimación de las coordenadas de los nodos. Como se ha explicado en el capítulo anterior, se han empleado dos tipos de elementos: elementos cable y elementos barra. El elemento cable tiene grados de libertad tanto de desplazamientos como de sus derivadas y puede deformarse a tracción y flexión. El elemento barra por su parte sólo incorpora grados de libertad de desplazamientos y por tanto sólo transmite esfuerzos axiales. Para ambos tipos de elementos es necesario definir una longitud del elemento sin deformar.

Las diferentes estructuras que componen la malla así como los criterios empleados para realizar el mallado son los siguientes:

- Cable sustentador: Se define previamente el número de elementos en los que se va a dividir el cable. Las coordenadas de posición  $(x, y, z)$  estimadas de los nodos se calculan a partir de la ecuación simple de la catenaria. Se considera la deformación de un cable soportado entre dos puntos bajo la acción de fuerzas gravitacionales asociadas a su peso por unidad de longitud sometido a la tensión correspondiente en sus extremos. La longitud de cada elemento se obtiene a partir de estas coordenadas suponiendo que el elemento es una línea recta. La longitud sin deformar del elemento se calcula teniendo en cuenta la



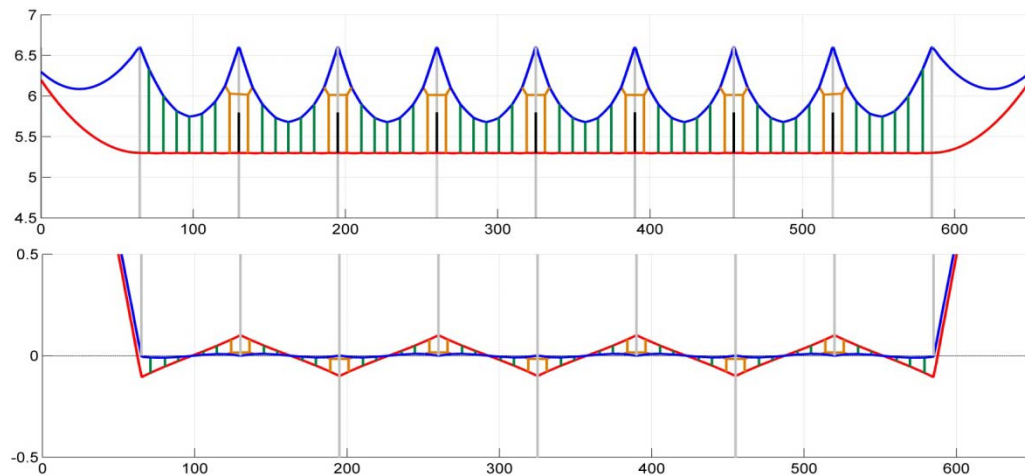
tensión a la que está sometido para tener una mejor aproximación inicial. Las coordenadas asociadas a las derivadas en cada nodo se obtienen promediando los correspondientes valores de los dos elementos que contienen cada nodo.

- Cable de contacto: La definición del mallado se realiza del mismo modo que para el cable sustentador, teniendo en cuenta que está sometido a otra tensión, y que el número de elementos entre péndolas puede ser diferente.
- Péndolas: Cada péndola se define como un único elemento barra vertical, cuya posición en el eje de la vía viene definida en el archivo de configuración. La longitud inicial se estima a partir de la distancia entre el cable sustentador y el de contacto.
- Péndola en 'Y': Está formada por 5 elementos barra. Las distancias entre nodos vienen dadas por la geometría de la catenaria y la tensión a la que deben estar sometidas se define también previamente.
- Brazo de registro: Está formado por un único elemento barra. Las coordenadas de los nodos vienen definidas por las coordenadas del cable de contacto en el punto de unión, la longitud del brazo de registro y las dimensiones del escalonamiento.

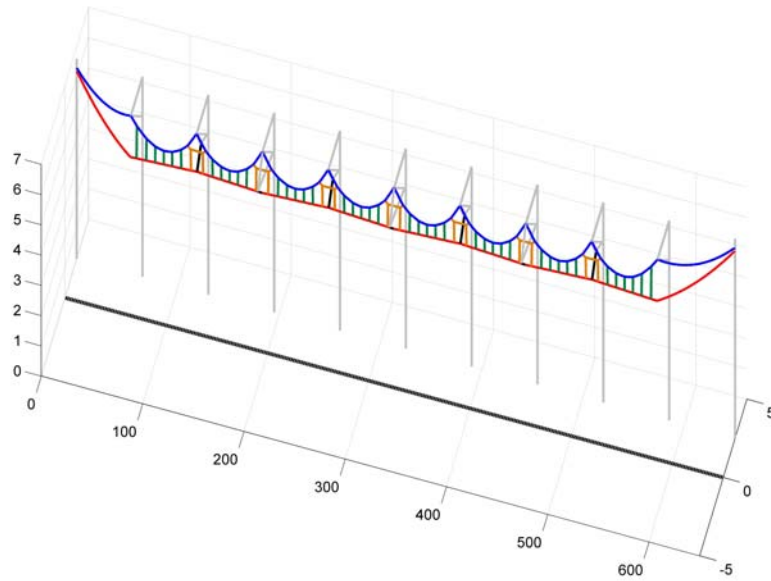
La definición geométrica del cantón se realiza a partir de un fichero de configuración con la información estructurada en diferentes apartados, relacionados con los diferentes elementos que constituyen la catenaria. Estos son:

- Postes: Número total, posición, altura, distancia a la vía, posición del cable sustentador y posición aproximada del cable de contacto. Para los postes inicial y final se define la altura de las poleas.
- Brazo de registro: Longitud del brazo de registro, sentido del escalonamiento y valor del escalonamiento total introducido.
- Cables ‘Y’: Cada poste tiene asociada una péndola ‘Y’, excepto los dos primeros y los dos últimos.
- Péndolas: En cada vano se define un número de péndolas así como la distancia entre las mismas.

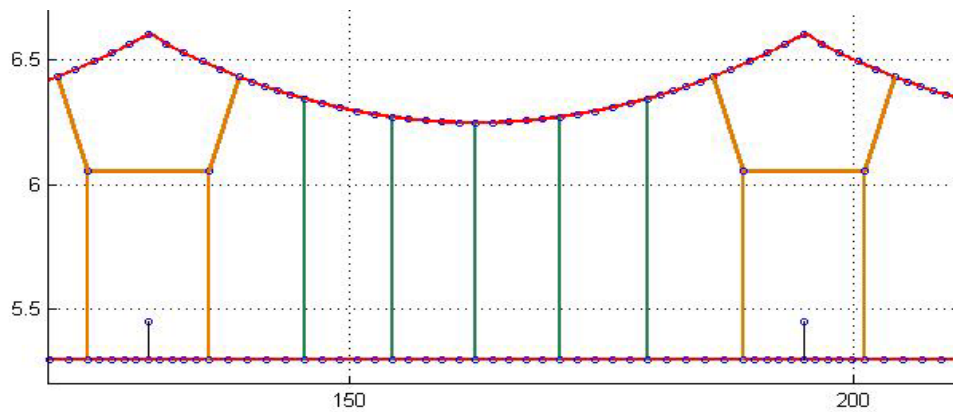
A continuación se presenta un ejemplo de dicho modelo.



**Ilustración 6: Esquema de la catenaria (las escalas son diferentes en cada eje). Vista frontal (imagen superior) y vista en planta (imagen inferior)**



**Ilustración 7: Vista en perspectiva del modelo de la catenaria**

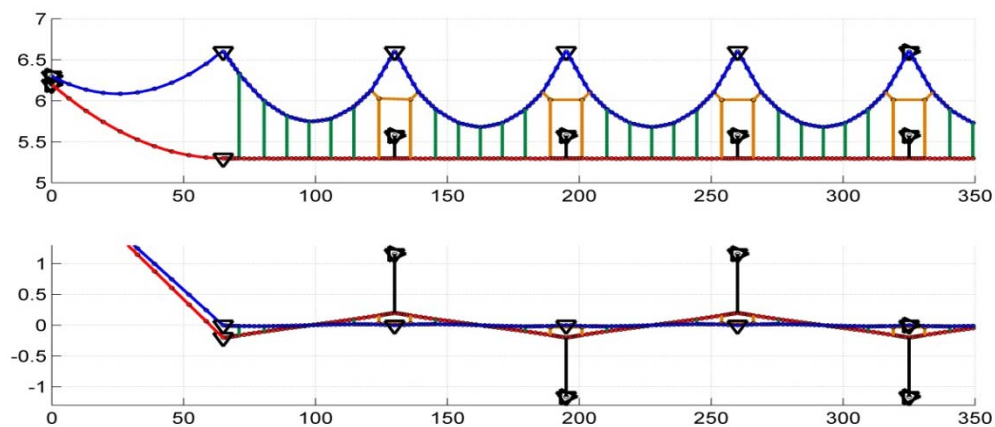


**Ilustración 8: Detalle del esquema de un vano de la catenaria**

### 3.2 RESTRICCIONES IMPUESTAS

Para poder llevar a cabo el montaje del sistema de cables y elementos estructurales, con el fin de garantizar el correcto funcionamiento de la catenaria, es necesario imponer ciertas condiciones que se transfieren al modelo de elementos finitos como restricciones. La introducción de estas restricciones implica en algunos casos la adición de ciertas variables de diseño al sistema. A continuación se presentan estas restricciones.

En primer lugar, se aplican las restricciones de desplazamiento o de Dirichlet que se muestran de forma esquemática en la siguiente figura.



**Ilustración 9: Malla de elementos finitos con restricciones de desplazamientos**

Los nodos iniciales y finales de los cables sustentador y de contacto tienen los 3 desplazamientos restringidos. También el nodo del cable sustentador que corresponde a la posición del poste intermedio (punto fijo) tiene restringidos los

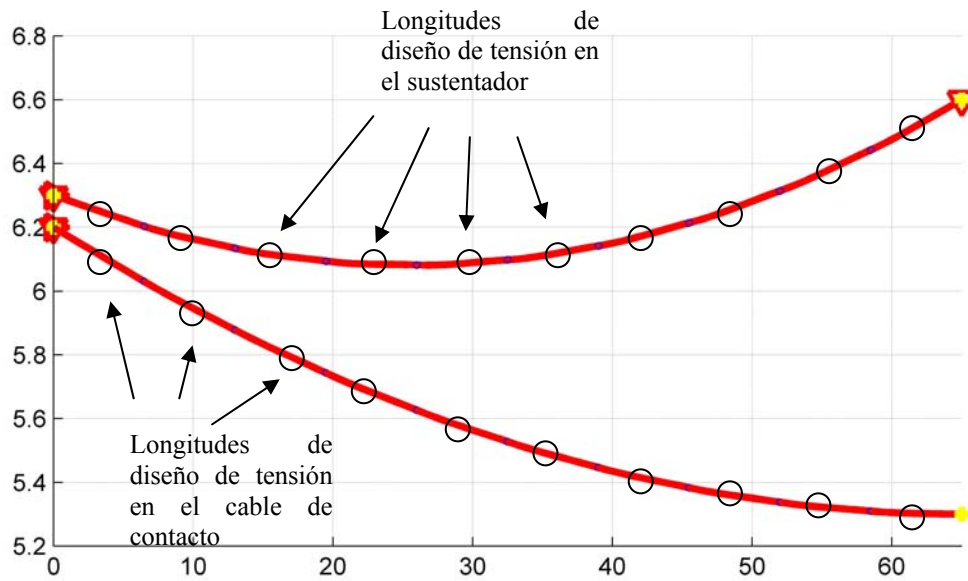


mismos grados de libertad. Los nodos del cable sustentador correspondientes al soporte en las ménsulas tienen restringidos los desplazamientos en la dirección vertical y en el sentido transversal al eje de vía. Los nodos del cable de contacto que conectan con las ménsulas del segundo y penúltimo postes tienen restringidos estos mismos grados de libertad. Por último, el extremo del brazo de registro, en la unión con el poste, tiene restringidos todos sus grados de libertad.

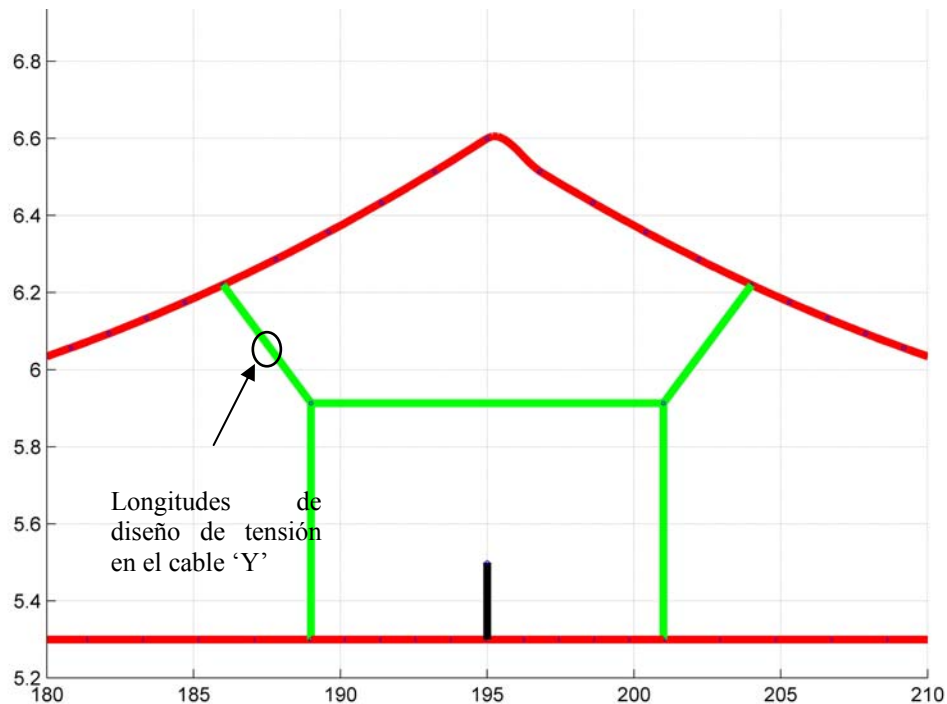
Por otro lado, las restricciones que implican un aumento del número de variables de diseño son las siguientes:

1. Tensión en cables: Con el fin de modelar el sistema de compensación de tensión mecánica, es necesario introducir la fuerza de tracción que dicho sistema ejerce tanto en el cable de contacto como en el sustentador y en los cables 'Y'. Para aplicar dichas tensiones, la longitudes de ciertos elementos se ven modificadas, pasando a ser variables de diseño.





**Ilustración 10: Variables de diseño para introducir tensiones en los cables sustentador y de contacto**



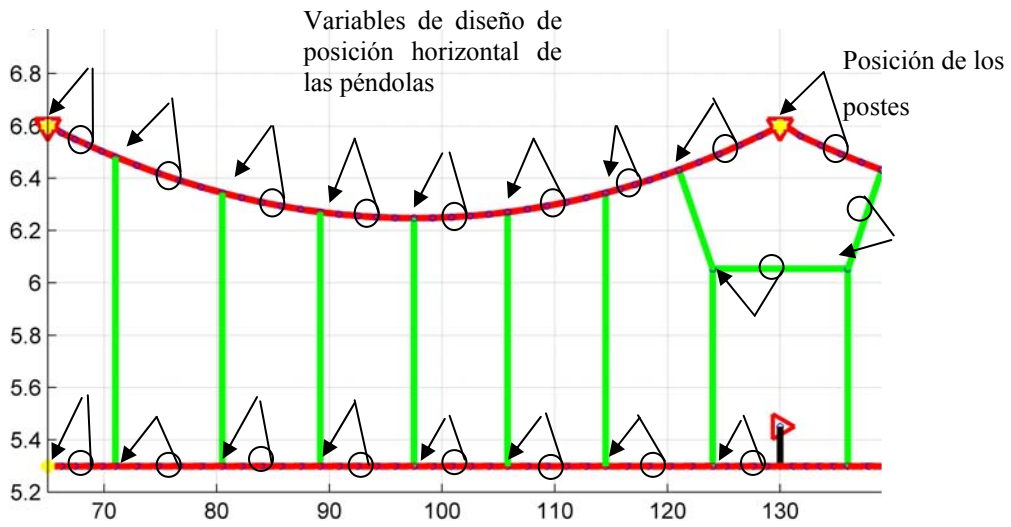
**Ilustración 11: Variables de diseño para introducir tensiones en el cable ‘Y’**

2. Posición de las péndolas en el vano: Las péndolas confieren al sistema del grado de rigidez necesario, por lo que es muy importante determinar con exactitud la posición en la que ha de colocarse cada una de ellas, de manera que la flecha del cable de contacto entre dos péndolas sea la deseada. Con el fin de introducir esta condición en el modelo de elementos finitos, es necesario fijar la coordenada x de las péndolas, añadiendo para ello como variable de diseño las longitudes de los elementos del

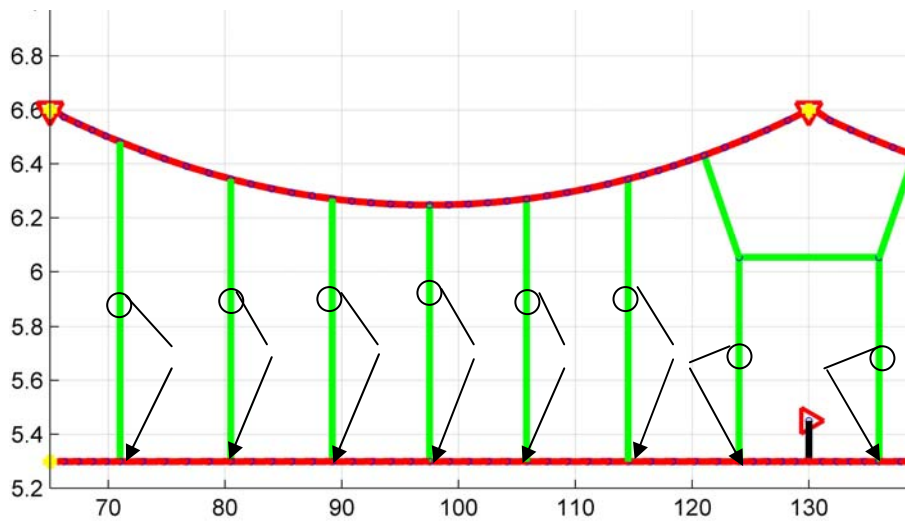


sustentador y del cable de contacto que están en contacto con los nodos de las péndolas.

3. Altura del cable de contacto: Como se ha comentado con anterioridad, para garantizar el contacto ininterrumpido entre la catenaria y el pantógrafo, es imprescindible que la altura del cable de contacto sea lo más constante posible. Para ello, las longitudes de péndolas y de los elementos que forman los cables 'Y' han de optimizarse. Por tanto, se introduce como restricción la posición vertical de los puntos en los que las péndolas están sujetando al cable de contacto.
4. Posición de los postes: Para asegurar que la longitud de los vanos es la deseada, los postes han de posicionarse correctamente. Por ellos, es necesario fijar la posición horizontal de cada uno de ellos, añadiendo como variables de diseño los elementos cercanos a los postes.

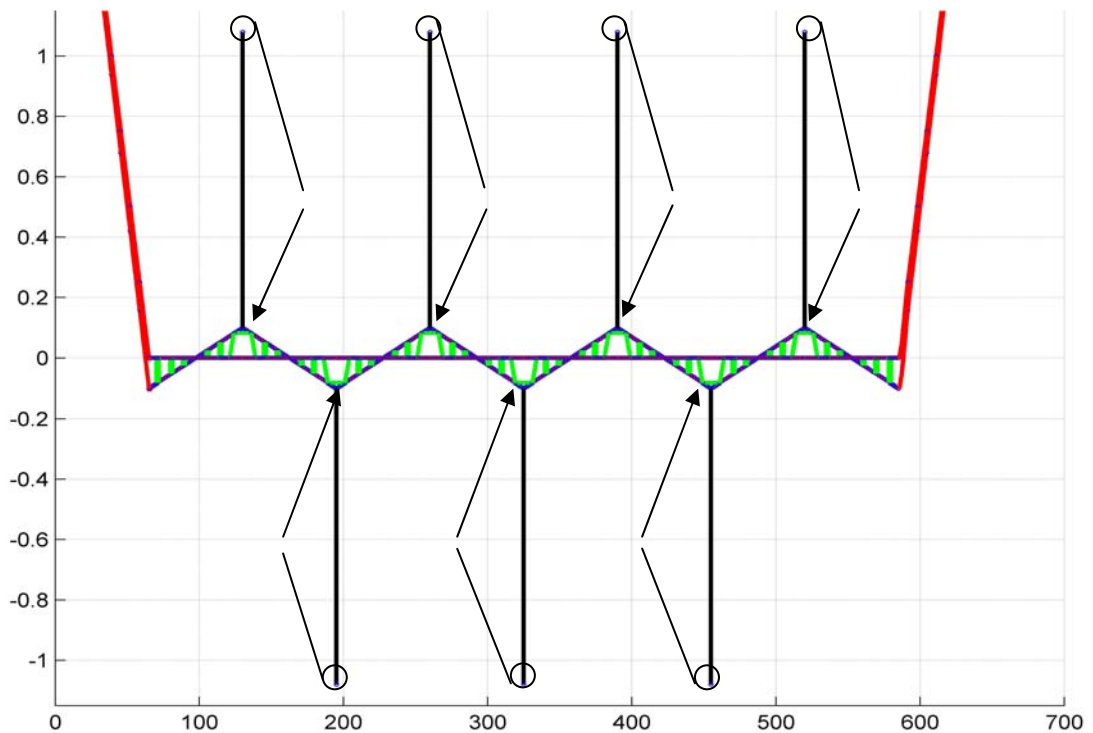


**Ilustración 12: Variables de diseño de la posición horizontal de las péndolas**



**Ilustración 13: Variables de diseño de posición vertical de las péndolas**

5. Zig-zag y posición del brazo de registro: Es necesario definir la posición del brazo de registro en la ménsula, de manera que se pueda obtener la altura deseada del cable de contacto así como el escalonamiento deseado. Para ello se añaden como variables de diseño por cada brazo de registro las coordenadas de posición vertical y lateral de la unión del brazo con la ménsula.



**Ilustración 14: Vista en planta de la catenaria. Variables de diseño para fijar la posición del brazo de registro**



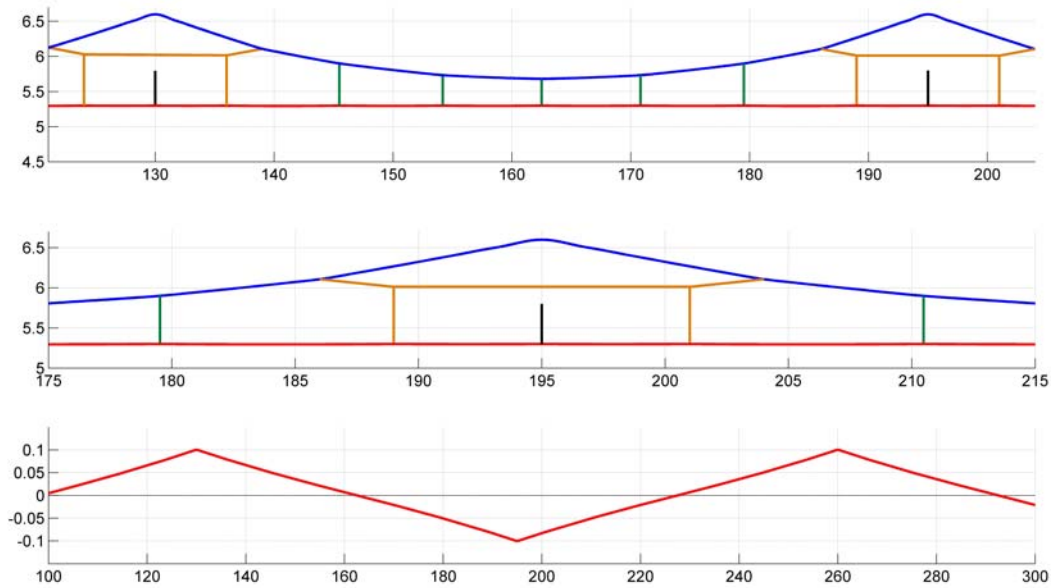


## 4 CÁLCULO DE LA CONFIGURACIÓN INICIAL

A partir de la definición de la malla, las longitudes iniciales y las condiciones de contorno de desplazamientos, se pueden resolver los diferentes problemas de configuración inicial relacionados con la catenaria.

### 4.1 CATENARIA DEL AVE. TRAZADO RECTO

Para ejemplificar los cálculos explicados en este apartado se usará la catenaria del AVE en trazado recto. Dicha catenaria está formada por un cantón con 11 postes, separados 65 m entre sí. La altura del punto de unión del cable sustentador con los postes es de 6.6 m y la altura deseada para el cable de contacto es de 5.3 m. El escalonamiento deseado para el cable de contacto es de 0.2 m en total y las longitudes de los brazos de registro se han fijado a 1 m.



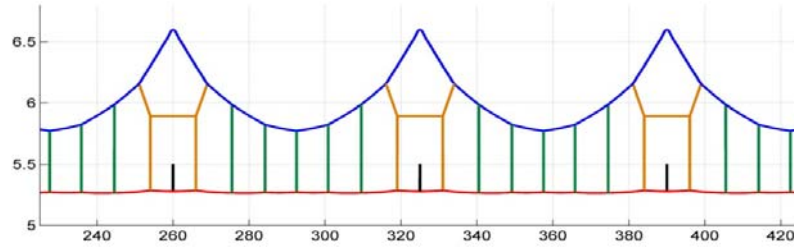
**Ilustración 15: Distancias entre péndolas y dimensión del escalonamiento (en metros)**

#### 4.1.1 Posición de equilibrio estático

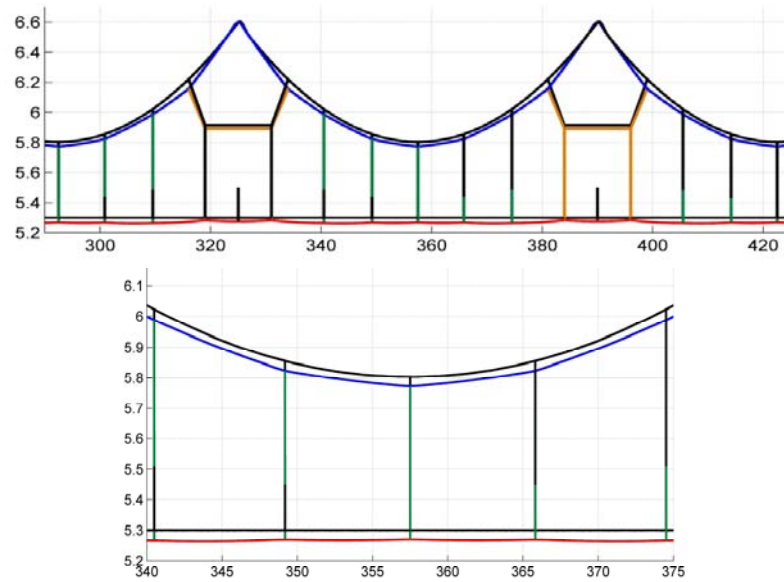
Las longitudes iniciales de los elementos cable y barra de la malla de elementos finitos son una estimación de las verdaderas longitudes del sistema determinadas por medio de la ecuación simple de la catenaria, una corrección por la tensión de los cables y la posición deseada de determinados nodos del sistema. Bajo la única acción del peso propio de los elementos del sistema se puede resolver el sistema de ecuaciones no lineales para calcular la posición de equilibrio. Como la estimación de las longitudes iniciales de las péndolas y cables no es correcta, la



tensión en los cables y la geometría deformada no se corresponden con las deseadas.



**Ilustración 16: Configuración de equilibrio estimada de la catenaria sin incluir tensión en los cables**



**Ilustración 17: Comparación de la posición de equilibrio estático con la posición estimada**



En la figura anterior se muestra la verdadera configuración deformada de la catenaria obtenida resolviendo las ecuaciones de equilibrio y su comparación con la estimación inicial. Por ejemplo, se puede observar claramente que el cable de contacto (rojo) no se encuentra a la altura deseada. Como se puede comprobar, la estimación inicial no es la correcta deformación de la catenaria, aunque es lo suficientemente precisa como para ser utilizada como primer paso de la resolución de Newton-Raphson asociada al problema estático no lineal.

En la siguiente tabla se muestran los resultados de convergencia en norma energética de la iteración de Newton-Raphson.

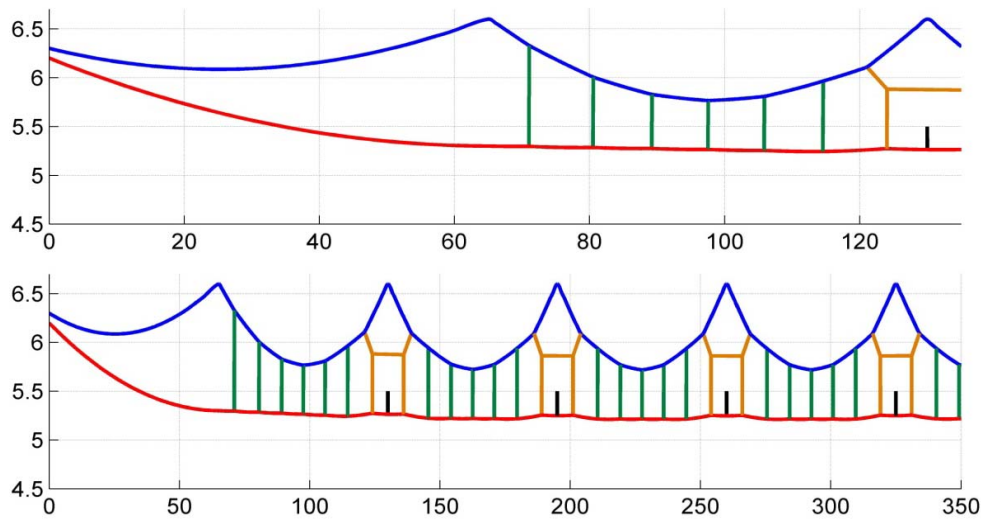
Iteración	1	2	3	4	5	6	7	8
Norma	1.20e+4	1.51e+3	1.23e+2	28.77	9.46 e-4	3.35e-4	9.56e-11	8.88e-12

**Tabla 1: Convergencia en norma energética de la iteración de Newton-Raphson**

## 4.1.2 Imposición de restricciones

### 4.1.2.1 Tensión en los cables

Con objeto de ir incorporando las características reales de la catenaria, se pueden incluir las restricciones de tensión en los cables sustentador, de contacto y en los cables 'Y'. El problema se plantea resolviendo el problema estático, imponiendo las restricciones de tensiones en cables y definiendo como variables de diseño a calcular las longitudes de ciertos elementos mostrados en Ilustración 10 e Ilustración 11.



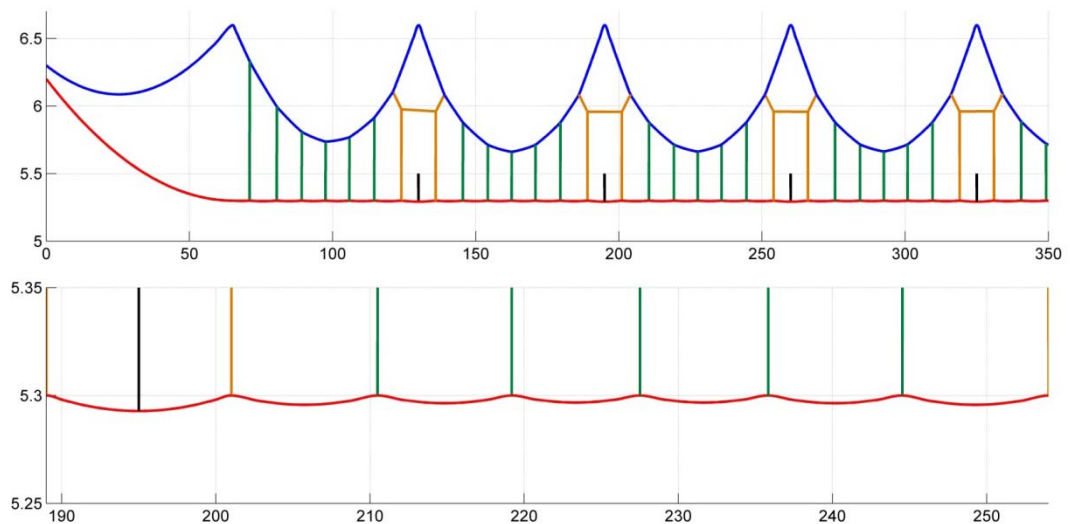
**Ilustración 18: Configuración de equilibrio con tensión en los cables**

Como la longitud de las péndolas se ha estimado y no es la verdadera, el cable de contacto no está horizontal ni centrado en torno a la altura deseada (5.3 m en este caso).

#### 4.1.2.2 Imposición de la altura del cable de contacto mediante ecuaciones de restricción.

Para garantizar que la altura de ciertos puntos del cable de contacto (los puntos de unión entre el cable de contacto y las péndolas) sea la deseada, 5.3 m, se pueden calcular las longitudes óptimas de las péndolas y de los elementos de los cables ‘Y’.

Incorporando estas restricciones adicionales se consigue fijar la altura deseada en el conjunto de puntos donde se imponen. No obstante, debido al peso propio del cable, la posición de este no puede ser horizontal entre cada péndola, por lo que se genera una pequeña catenaria con una flecha entre 3 y 7 mm para este ejemplo.

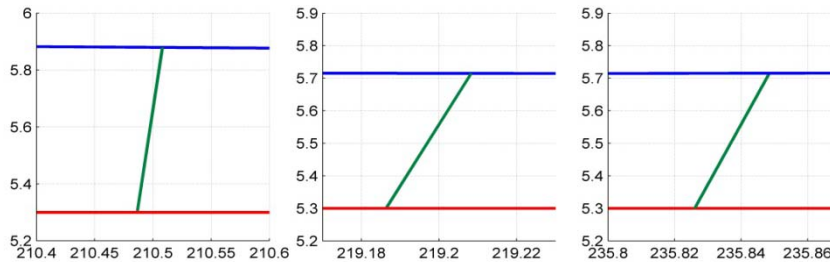


**Ilustración 19: Optimización de la longitud de las péndolas para posicionar el cable de contacto**

Como se puede ver en la figura anterior, la posición vertical del punto de unión del cable de contacto con el brazo de registro no se encuentra en la posición deseada. Este problema se abordará en el apartado 4.1.2.4, en el que se calcula la posición de unión del brazo de registro con la ménsula del poste para fijar su posición.

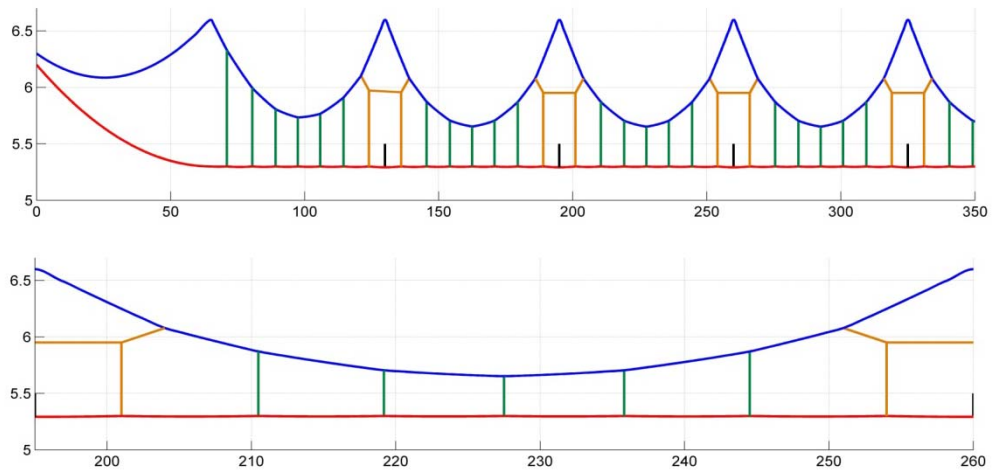
#### 4.1.2.3 Posición horizontal de las péndolas

Debido a que la estimación de la posición inicial de los nodos y las longitudes de los elementos no es exacta, y por lo tanto las deformaciones del cable sustentador y de contacto son diferentes, las péndolas no quedan en la posición exacta y por ello no están en posición totalmente vertical.



**Ilustración 20: Inclinación de las péndolas debido a la diferente deformación del cable sustentador y del cable de contacto**

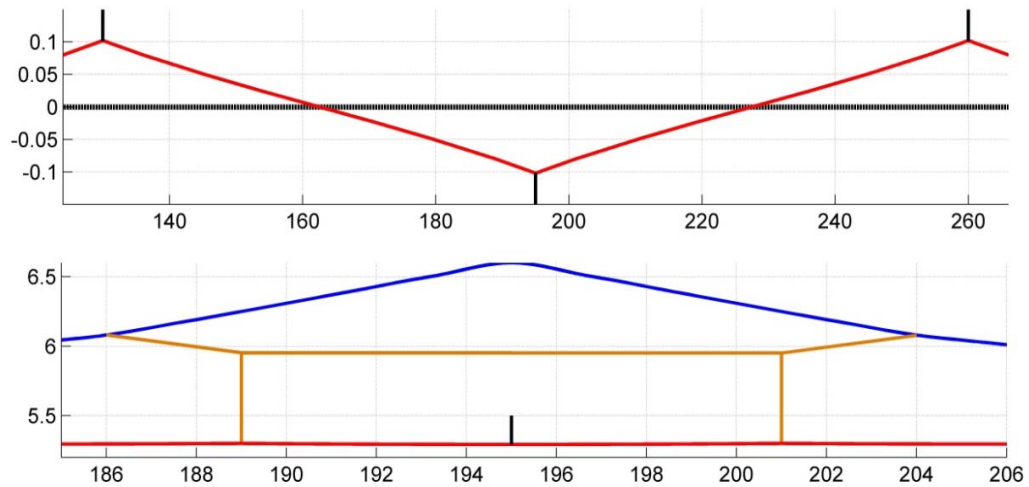
Para corregir esta desviación se pueden incluir como variables de diseño adicionales que la posición horizontal de los nodos de las péndolas se encuentren en la posición deseada, añadiendo las variables adicionales necesarias, tal y como se ha mostrado en el capítulo anterior en la Ilustración 12. Añadiendo estas variables a la optimización es posible conseguir que el sistema se encuentre en la posición deseada.



**Ilustración 21: Posición de equilibrio tras optimizar la posición horizontal de las péndolas**

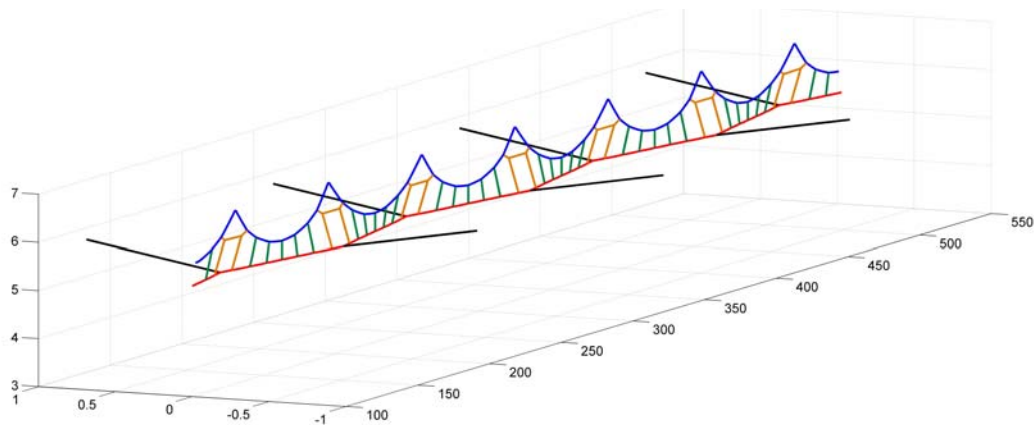
#### 4.1.2.4 Posición vertical y lateral del punto de unión con el brazo de registro

Por último, para posicionar todos los elementos de la catenaria, falta definir la posición del punto de unión del brazo de registro con la ménsula del poste para que en su otro extremo, en la unión con el cable de contacto, se obtenga la altura deseada a la vez que el escalonamiento introducido sea el buscado.



**Ilustración 22: Posición incorrecta del punto de unión del brazo de registro con el cable de contacto. La altura de este punto es de 5.293 m (valor objetivo de 5.3 m) y el escalonamiento es de 0.1015 m (valor objetivo de 0.1 m).**

Con el fin de lograr la posición deseada para el punto de unión del brazo de registro con el cable de contacto añadimos dos nuevas variables al problema de optimización. En este caso las variables no están asociadas a la longitud de ningún elemento de la catenaria, sino que corresponden a las posiciones vertical y lateral del punto de unión del brazo de registro con la ménsula del poste. En la siguiente figura se muestra el resultado final obtenido considerando esta última característica.



**Ilustración 23: Posición deformada de la catenaria una vez impuestas todas las restricciones**

#### 4.1.3 Imposición mejorada de la altura del cable de contacto

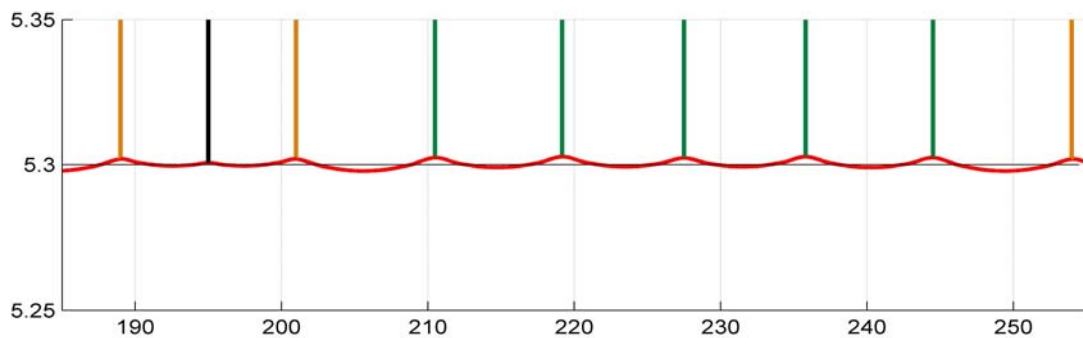
En los apartados anteriores se ha considerado el problema de configuración inicial de la catenaria considerando restricciones. Para obtener la posición deseada del cable de contacto, se ha impuesto la altura correspondiente de los nodos de unión con las péndolas. Otra forma alternativa desarrollada consiste en plantear el problema de minimización, en el que se busca que la diferencia entre la deformada real en el cable de contacto sea mínima.

El resultado de aplicar esta condición se muestra a continuación. A diferencia de la imposición con restricciones puntuales de la Ilustración 19, en este caso se observa que el cable de contacto se encuentra por encima y por debajo de la cota impuesta de 5.3 m. Estas desviaciones con respecto a la altura deseada son de



entre 1 mm y 3 mm, con lo cual el resultado obtenido es mejor que el del apartado anterior, en el que la flecha generada entre dos nodos con imposición de altura es mayor.

En la Ilustración 24 se muestra dicha posición de equilibrio. La optimización se ha calculado teniendo en cuenta también las diferentes imposiciones tanto de tensión como de posición de nodos presentadas en los apartados anteriores (tensión en los cables, posición horizontal de péndolas, etc.).



**Ilustración 24: Optimización distribuida de la altura del cable de contacto**

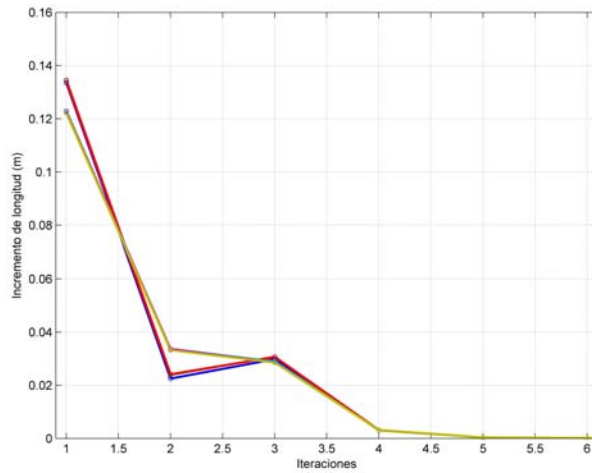
Las longitudes obtenidas para las péndolas de un vano intermedio se muestran en la siguiente tabla, comparando la estimación inicial que se ha hecho de la longitud de las péndolas con los resultados obtenidos primero mediante restricciones puntuales y a continuación al aplicar la restricción distribuida.



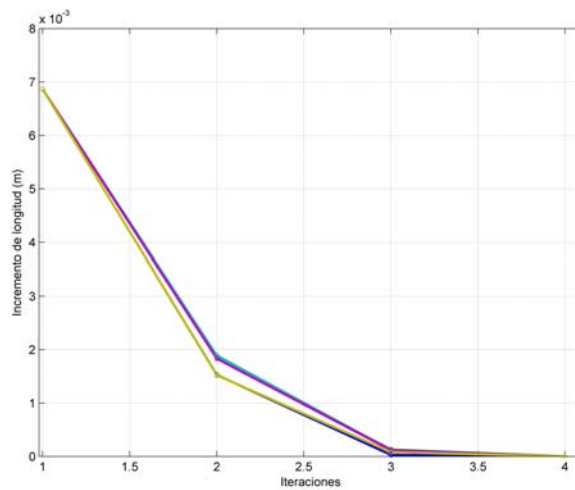
<b>Péndola</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>
<b>Longitud estimada inicialmente (mm)</b>	730	558	504	558	730
<b>Longitud por optimización puntual (mm)</b>	604	434	381	434	604
<b>Longitud por optimización distribuida (mm)</b>	597	425	373	425	597

**Tabla 2: Comparación de las longitudes de péndolas obtenidas mediante los dos métodos desarrollados**

En la Ilustración 25 se muestra gráficamente la variación de longitud de las péndolas en cada iteración, partiendo de la estimación inicial de longitudes de péndolas y aplicando la optimización con restricciones puntuales. En la Ilustración 26 se muestra dicho incremento de longitudes cuando, una vez obtenido un equilibrio al aplicar la optimización puntual de restricciones se optimiza el sistema de forma distribuida.



**Ilustración 25: Incremento de la longitud de las péndolas en cada iteración al aplicar la optimización con restricciones puntuales**

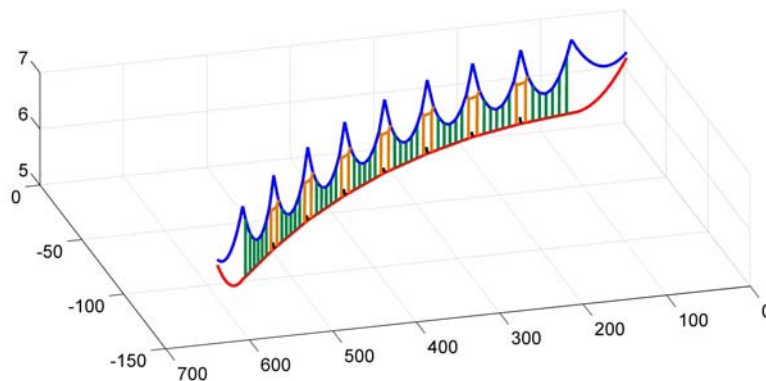


**Ilustración 26: Incremento de la longitud de las péndolas en cada iteración aplicando optimización distribuida**

Como se puede observar, en el segundo paso los incrementos calculados en cada iteración son del orden de mm, frente a los 12-14 cm del primer paso del proceso de optimización.

## 4.2 CATENARIA DEL AVE. TRAZADO CURVO

En este caso se obtendrá la posición óptima de los distintos elementos del sistema catenaria cuando el trazado ferroviario discurre por una curva de radio constante.

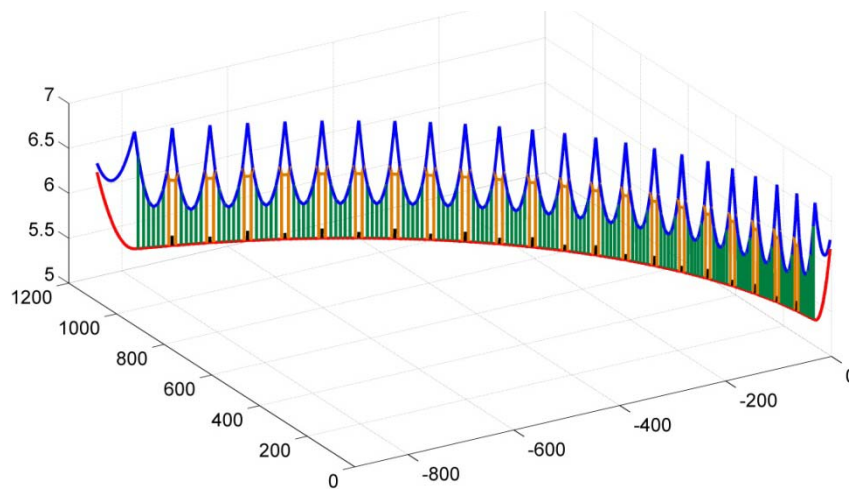


**Ilustración 27: Catenaria en trazado curvo**

El ejemplo a resolver se ha creado con una topología y dimensiones análogas a las descritas anteriormente en el apartado 4.1 para el trazado rectilíneo, con la salvedad de que se ha considerado un trazado con radio de curvatura igual a 1250 m y el número de postes que componen el cantón es mayor, en este caso 25. Se ha mantenido el escalonamiento sobre el eje medio de la vía. Si bien el número de

postes empleado en la generación de este cantón es poco realista, se justifica su elección para poder mejorar la visualización de los resultados a la vez que se prueba la complejidad de los problemas que el programa desarrollado es capaz de manejar.

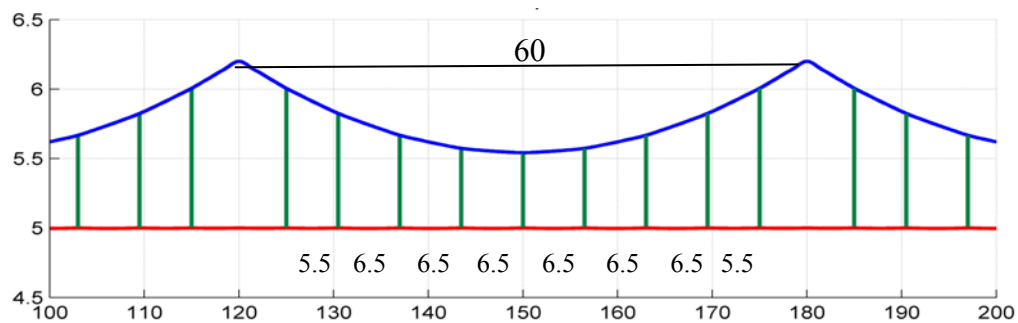
El programa está preparado para resolver problemas y generar las restricciones del problema de optimización para trazados con cualquier orientación sobre el plano.



**Ilustración 28: Posición de todos los elementos de la catenaria cuando el trazado es curvo**

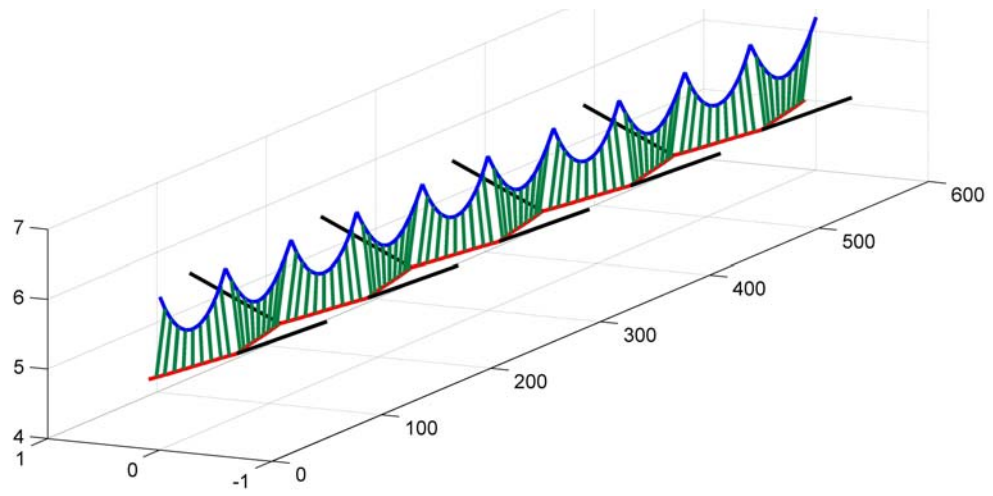
### 4.3 OPTIMIZACIÓN DE UNA CATENARIA CON TIPOLOGÍA DE LA NORMA EN 50318

La línea se define como un sistema de catenaria simple que discurre por un tramo recto. El modelo consta de 10 vanos idénticos de longitud 60 m, un encumbramiento (distancia entre el cable de contacto y el punto más alto del sustentador) de 1.2 m, un escalonado de  $\pm 0.2$  m y una longitud de los brazos de registro de 1 m. Cada vano tiene 9 péndolas, separadas entre sí las distancias que se pueden apreciar en la siguiente figura.



**Ilustración 29: Dimensiones de la catenaria especificada por la norma EN 50318**

Procediendo de manera similar al caso anterior, el programa es capaz de calcular la geometría de la catenaria que cumple con las restricciones de posición y tensión deseadas.



**Ilustración 30: Configuración final de la catenaria tipo EN 50318**







## 5 RESULTADOS OBTENIDOS

Una vez desarrollado el modelo de elementos finitos de la catenaria y calculada la configuración de equilibrio estático, se han realizado diferentes análisis y comparaciones con el fin de conocer la influencia de ciertos parámetros sobre los resultados obtenidos, así como de comprobar el correcto funcionamiento del modelo y de las rutinas desarrolladas

Los análisis realizados mediante la simulación de la catenaria son los siguientes:

- Comparación de la solución analítica de un cable sometido a su propio peso con el modelo de elementos finitos desarrollado para el cable sustentador
- Comparación de los resultados de longitudes de péndolas obtenidos con los presentados en diferentes artículos de investigación
- Influencia del grado de discretización de la catenaria en la longitud de las péndolas
- Influencia de la flexión del cable sustentador en la longitud de las péndolas
- Rigidez del cable de contacto en función de diferentes parámetros del problema, como son la fuerza aplicada, la flexión del cable sustentador, la tensión en los cables 'Y' o en los hilos sustentador y de contacto



## 5.1 COMPARACIÓN CON LA SOLUCIÓN ANALÍTICA DE CABLE

El objeto de este análisis es la comparación de la solución de elementos finitos del cable sustentador, obtenida mediante el programa desarrollado, con la solución analítica de un cable sometido a su propio peso, suspendido por sus dos extremos.

En el modelo de elementos finitos se han desarrollado dos tipos diferentes de elementos: los elementos cable, capaces de transmitir tanto esfuerzos de tracción como de flexión, y los elementos barra, que sólo se deforman a lo largo de su eje longitudinal. La ecuación de la catenaria no tiene en cuenta la deformación longitudinal del cable, por lo que tomando para el elemento tipo barra el módulo de elasticidad un valor cada vez más alto que el correspondiente al material real del cable, dicha deformación longitudinal de los elementos se irá reduciendo, obteniéndose un resultado cada vez más cercano al analítico. Se realiza la comparación entre los resultados obtenidos a continuación.

Los resultados obtenidos se muestran a continuación, así como los datos geométricos y del material utilizados en el análisis.

Parámetro	Longitud del vano [m]	Tensión horizontal en cable [N]	Esust [Pa]	Asust [m <sup>2</sup> ]	ρsust [kg/m <sup>3</sup> ]	Isust [m <sup>4</sup> ]
Medida	50	12000	1e11	6.785e-5	8.9167e3	2.9e-8

Tabla 3: Datos geométricos del cable analizado

### 5.1.1 Modelo analítico

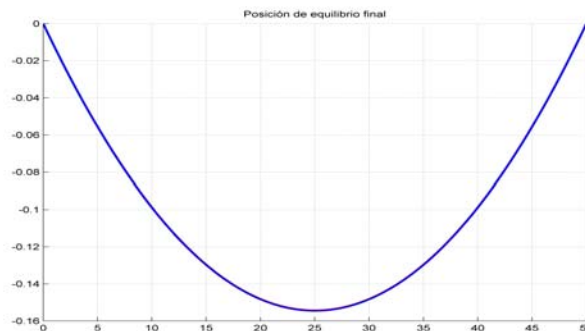
La fórmula analítica de la curva catenaria, cuya forma geométrica es la que adopta un cable suspendido de sus extremos bajo la acción de su propio peso, es la siguiente:

$$y = a \cosh\left(\left(x - \frac{L}{2}\right)/a\right) - a \cosh\left(\frac{L}{2a}\right) \quad 5-1$$

Siendo

$$a = \frac{T}{EA} \quad 5-2$$

Para los datos tomados, la flecha máxima del cable analítico es de **15.456008 cm**



**Ilustración 31: Cable suspendido por sus dos extremos, ecuación analítica**



### 5.1.2 Modelo FEM

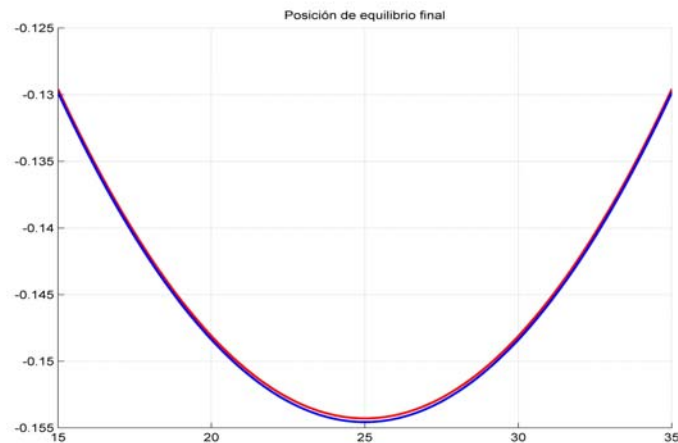
Se ha podido comprobar que el aumento excesivo de elementos no conduce a cambios significativos del resultado, por lo que se tomarán para todos los análisis 3200 elementos, es decir, elementos de tamaño 1.5625 cm. Como se ha comentado anteriormente, se comparará la flecha máxima para valores cada vez más altos de elasticidad, para ambos tipos de elementos.

Elementos barra:

<b>E [Pa]</b>	<b>Flecha máxima [cm]</b>
1e11	15.4299
1e12	15.45446
1e13	15.45692
1e14	15.45716

**Tabla 4: Flecha máxima del cable con elementos barra**

Como se puede observar, los resultados obtenidos mediante elementos finitos son muy parecidos al resultado de la ecuación analítica, tanto si se usan elementos cable como elementos barra. Se aprecia también cómo va disminuyendo cada vez más la diferencia entre ambos resultados conforme se incrementa el módulo elástico, lo cual confirma que el modelo de elementos finitos generado representa correctamente el comportamiento del cable de la catenaria.



**Ilustración 32: Comparación curva analítica de un cable suspendido por sus extremos (roja) con modelo de elementos finitos de dicho cable (azul)**

A continuación se puede comprobar que para elementos tipo cable con un momento de inercia nulo, de manera que se comporten igual que los utilizados anteriormente, y del mismo modo aumentando progresivamente su Módulo de Young, se obtienen también resultados prácticamente idénticos a los obtenidos en el modelo analítico.

Elementos cable:

<b>E [Pa]</b>	<b>Flecha máxima [cm]</b>
1e11	15.42883
1e12	15.45444
1e13	15.45700
1e14	15.45716

**Tabla 5 Flecha máxima del cable con elementos cable**

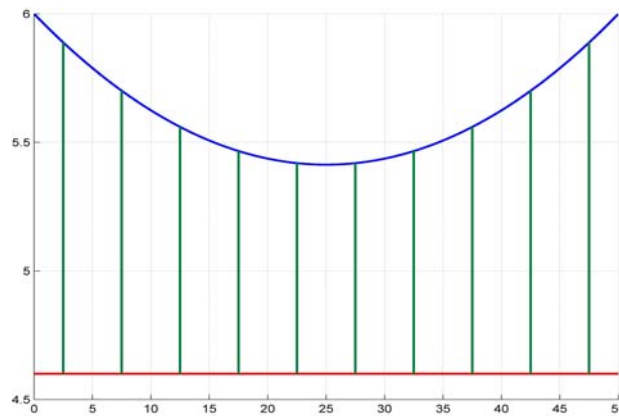
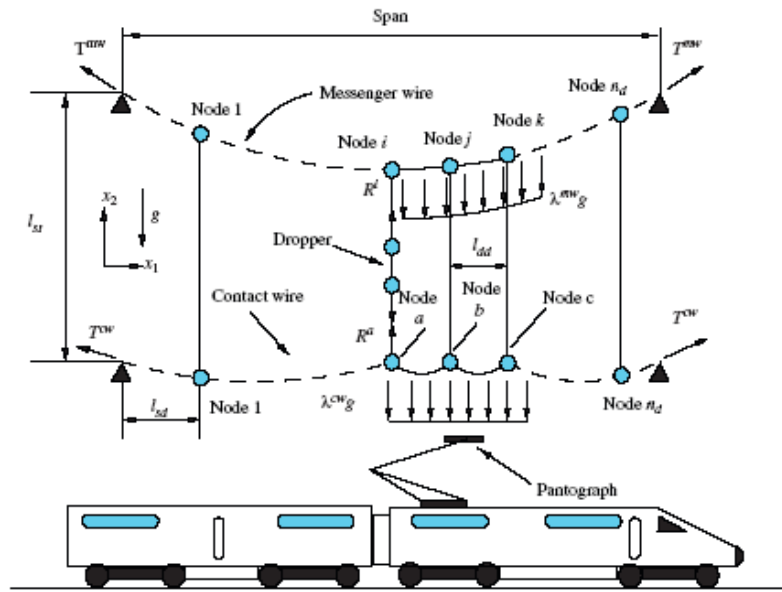


## 5.2 COMPARACIÓN CON CASOS RESUELTOS EN BIBLIOGRAFÍA

En este apartado se han comparado las longitudes de las péndolas obtenidas al aplicar el programa de optimización del equilibrio estático desarrollado a los problemas presentados en tres artículos diferentes. Los resultados obtenidos se muestran a continuación.

### 5.2.1 Artículo 1, [6]

En el artículo de **O. Lopez-García, A. Carnicero, V. Torres, J. R. Jimenez-Octavio**, ‘The influence of cable slackening on the stiffness computation of railway overheads’, *International Journal of Mechanical Sciences*, **50 (2008) 1213-1223** se presentan las longitudes de las péndolas obtenidas para un vano sencillo, de 50 m de longitud, sin cables ‘Y’, formado por cable sustentador, de contacto y por 10 péndolas. Al tratarse de un modelo simétrico, se mostrarán únicamente las longitudes de la mitad de las péndolas. Aunque en el artículo no se considera la flexión de los elementos, se han comparado los resultados tomando tanto elementos cable como barra. Además, en el artículo se ha obtenido el equilibrio estático mediante ecuación analítica de la catenaria, por lo que han de tomarse altos valores del Módulo de Young para obtener los mismos resultados que en el artículo.



**Ilustración 33: Catenaria analizada en el artículo [6]**

Los datos geométricos de dicha catenaria se muestran en la siguiente tabla.

PARÁMETRO	MEDIDA
Nº de postes	2
Longitud del vano [m]	50
Altura de los postes [m]	6
Escalonamiento	0 (sin escalonamiento)
Altura cable de contacto [m]	4.6
Nº de péndolas	10
Distancia entre péndolas [m]	2.5 entre la primera/última y el poste 5 entre las demás
Poleas	Sin poleas
Masa de grifas y elementos de conexión [kg]	0
Tensión cable sustentador [N]	9800
Tensión cable de contacto [N]	9800
$E_{sust}$ [Pa]	1e11
$A_{sust}$ [m <sup>2</sup> ]	9.1e-5
$\rho_{sust}$ [kg/m <sup>3</sup> ]	8.9167e3
$I_{sust}$ [m <sup>4</sup> ]	0
$E_{cc}$ [Pa]	1.1e11
$A_{cc}$ [m <sup>2</sup> ]	1.1818e-4
$\rho_{cc}$ [kg/m <sup>3</sup> ]	9e3
$I_{cc}$ [m <sup>4</sup> ]	1.234e-20
$E_{pend}$ [Pa]	1.1e11
$A_{pend}$ [m <sup>2</sup> ]	1.1818e-5
$\rho_{pend}$ [kg/m <sup>3</sup> ]	9e3
$I_{pend}$ [m <sup>4</sup> ]	0

**Tabla 6: Datos geométricos de la catenaria del artículo**

Las longitudes obtenidas de cada péndola y en comparación con las calculadas en el artículo se muestran a continuación. Se comparan los resultados obtenidos considerando los elementos del sustentador tanto tipo cable (longitud calculada 1) como barra (longitud calculada 2).





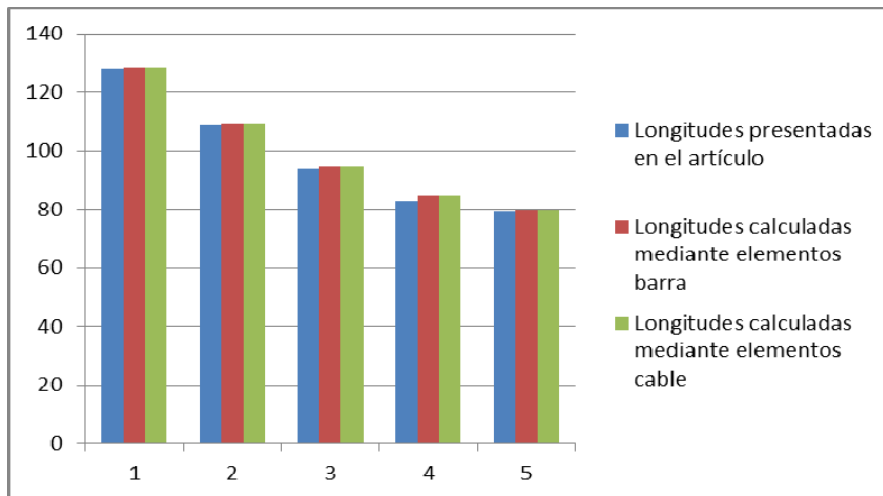
Se han utilizado:

- 30 elementos entre péndolas, tanto para el sustentador como para el cable de contacto
- $E_{sust}' = E_{sust} \times 100$
- $E_{cc}' = E_{cc} \times 100$
- $E_{pend}' = E_{pend} \times 100$

Como se puede observar, se han tomado valores altos de elasticidad, con el fin de que los resultados sean lo más parecido posibles a los del artículo, obtenidos a partir de la ecuación analítica.

	1	2	3	4	5
Posición x [m]	2.5	7.5	12.5	17.5	22.5
<b>Longitud calculada 1 [cm]</b>	<b>128.377</b>	<b>108.995</b>	<b>94.509</b>	<b>84.852</b>	<b>80.025</b>
<b>Longitud calculada 2 [cm]</b>	<b>128.374</b>	<b>108.989</b>	<b>94.503</b>	<b>84.846</b>	<b>80.019</b>
Longitud del artículo [cm]	128.22	108.52	93.75	83.01	78.99

**Tabla 7: Comparación longitudes de péndolas del artículo con las del programa desarrollado**



**Ilustración 34: Comparación de longitudes de péndolas**

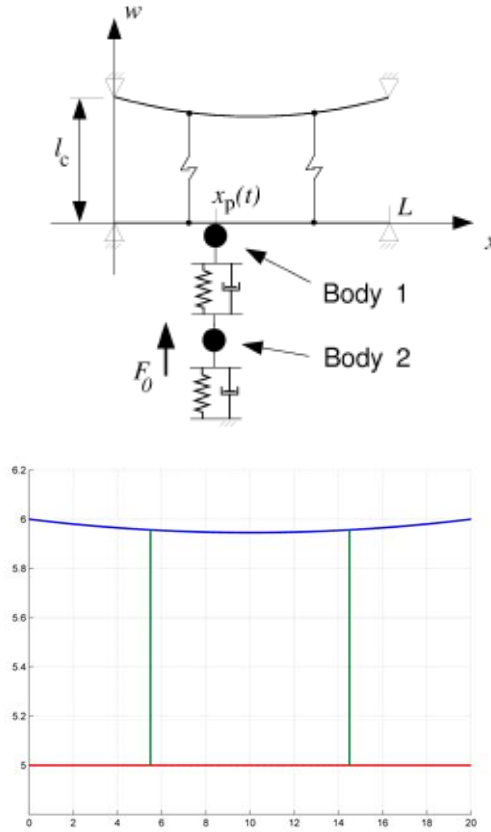
Como puede observarse, existe cierta diferencia entre las longitudes calculadas, tanto mediante elementos cable como barra, y las del artículo. Esta diferencia puede deberse a los procedimientos diferentes que se han utilizado, o bien a las inexactitudes a la hora de tomar los datos geométricos o de cálculo. Aun así se puede apreciar que las longitudes calculadas 2, es decir, las realizadas mediante los elementos barra, se aproximan más a la solución obtenida por López et al., ya que ésta ha sido calculada sin considerar la flexión del cable.

### 5.2.2 Artículo 2, [7]

En este artículo,

**M. Arnold, B. Simeon, ‘Pantograph and catenary dynamics: A benchmark problem and its numerical solution’, *Applied Numerical***

**Mathematics, 34 (2000)** 345-362., la catenaria analizada consta únicamente de un vano con 2 péndolas, tal y como se muestra en la imagen siguiente.



**Ilustración 35: Catenaria analizada en el artículo [6]**

Los datos geométricos se muestran a continuación.

PARÁMETRO	MEDIDA
Nº de postes	2
Longitud del vano [m]	20
Altura de los postes [m]	6
Escalonamiento	0 (sin escalonamiento)
Altura cable de contacto [m]	5
Nº de péndolas	2
Distancia entre péndolas [m]	5.5 entre la primera/última y el poste 9 entre las demás
Poleas	Sin poleas
Masa de grifas y elementos de conexión [kg]	0.25
Tensión cable sustentador [N]	15000
Tensión cable de contacto [N]	15000
$E_{sust}$ [Pa]	1e11
$A_{sust}$ [m <sup>2</sup> ]	6.72e-5
$\rho_{sust}$ [kg/m <sup>3</sup> ]	8.9167e3
$I_{sust}$ [m <sup>4</sup> ]	0
$E_{cc}$ [Pa]	1.1e11
$A_{cc}$ [m <sup>2</sup> ]	1.187e-4
$\rho_{cc}$ [kg/m <sup>3</sup> ]	9e3
$I_{cc}$ [m <sup>4</sup> ]	1.364e-9
$E_{pend}$ [Pa]	1.1e11
$A_{pend}$ [m <sup>2</sup> ]	1.556e-5
$\rho_{pend}$ [kg/m <sup>3</sup> ]	9e3
$I_{pend}$ [m <sup>4</sup> ]	0

**Tabla 8: Datos geométricos de la catenaria del artículo**

Las longitudes obtenidas de cada péndola y la comparación con las calculadas en el artículo se muestran en la Tabla 9. Se comparan los resultados obtenidos



considerando los elementos del sustentador tanto tipo cable (longitud calculada 1) como barra (longitud calculada 2).

Se han utilizado:

- 30 elementos entre péndolas, tanto para el sustentador como para el cable de contacto
- $E_{sust}' = E_{sust} \times 100$
- $E_{cc}' = E_{cc} \times 100$
- $E_{pend}' = E_{pend} \times 100$

Posición x [m]	5.5
<b>Longitud calculada 1 [cm]</b>	<b>95.4997</b>
<b>Longitud calculada 2 [cm]</b>	<b>95.492</b>
Longitud artículo [cm]	95

**Tabla 9: Comparación longitudes de péndolas artículo – programa desarrollado**

En este caso, se observa de nuevo que las longitudes de péndolas obtenidas son muy parecidas a las presentadas en el artículo, siendo la diferencia del orden de mm.

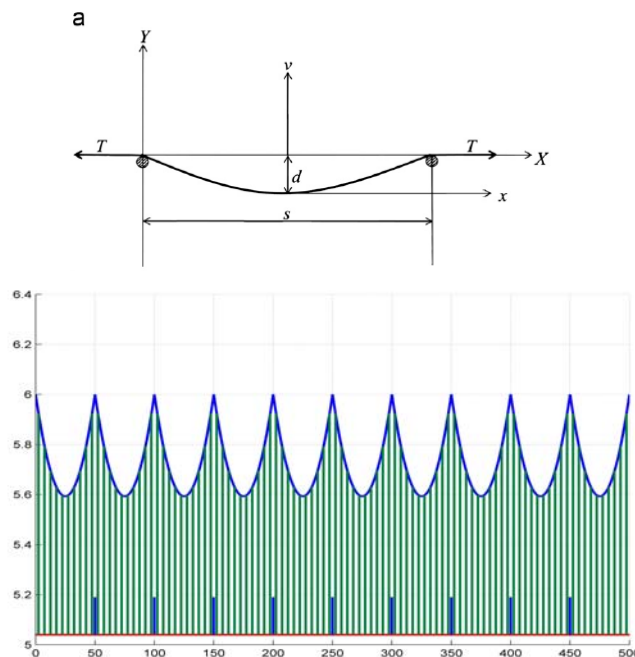
### 5.2.3 Artículo 3, [8]

En este artículo, **Y. H. Cho, K. Lee, Y. Park, B. Kang, K. Kim**, ‘**Influence of contact wire pre-sag on the dynamics pantograph-railway catenary**’, *International Journal of Mechanical Sciences*, **52 (2010) 1471-1490**. se realiza

una comparación de los resultados del análisis estático de la catenaria con y sin imposición de una flecha en el cable de contacto. Como en el caso presentado en esta tesis de máster la altura de los nodos del cable de contacto en los que se sujetan las péndolas es constante, se compararán los resultados con los obtenidos en el artículo sin dicha imposición.

A diferencia de los otros artículos, en éste se han realizado los cálculos sobre un cantón entero, compuesto por 10 vanos (11 postes). Se mostrarán los resultados únicamente de uno de ellos.

La catenaria analizada y los resultados obtenidos son los siguientes.



**Ilustración 36: Catenaria analizada en el artículo**

PARÁMETRO	MEDIDA
Nº de postes	11
Longitud del vano [m]	50
Altura de los postes [m]	6
Escalonamiento	0 (sin escalonamiento)
Altura cable de contacto [m]	5.04
Nº de péndolas	10
Distancia entre péndolas [m]	2.5 entre la primera/última y el poste 5 entre las demás
Poleas	Sin poleas
Masa de grifas y elementos de conexión [kg]	0
Tensión cable sustentador [N]	12000
Tensión cable de contacto [N]	12000
$E_{sust}$ [Pa]	1e11
$A_{sust}$ [m <sup>2</sup> ]	6.785e-5
$\rho_{sust}$ [kg/m <sup>3</sup> ]	8.9167e3
$I_{sust}$ [m <sup>4</sup> ]	2.9e-8
$E_{cc}$ [Pa]	1.1e11
$A_{cc}$ [m <sup>2</sup> ]	1.097e-4
$\rho_{cc}$ [kg/m <sup>3</sup> ]	9e3
$I_{cc}$ [m <sup>4</sup> ]	1.1818e-9
$E_{pend}$ [Pa]	1.1e11
$A_{pend}$ [m <sup>2</sup> ]	6.785e-5
$\rho_{pend}$ [kg/m <sup>3</sup> ]	9e3
$I_{pend}$ [m <sup>4</sup> ]	0

**Tabla 10: Datos geométricos de la catenaria analizada en el artículo**

De nuevo sólo se presenta las longitudes obtenidas para la mitad de las péndolas, ya que el vano es simétrico. Se comparan los resultados obtenidos considerando los elementos del sustentador tanto tipo cable (longitud calculada 1) como barra (longitud calculada 2).



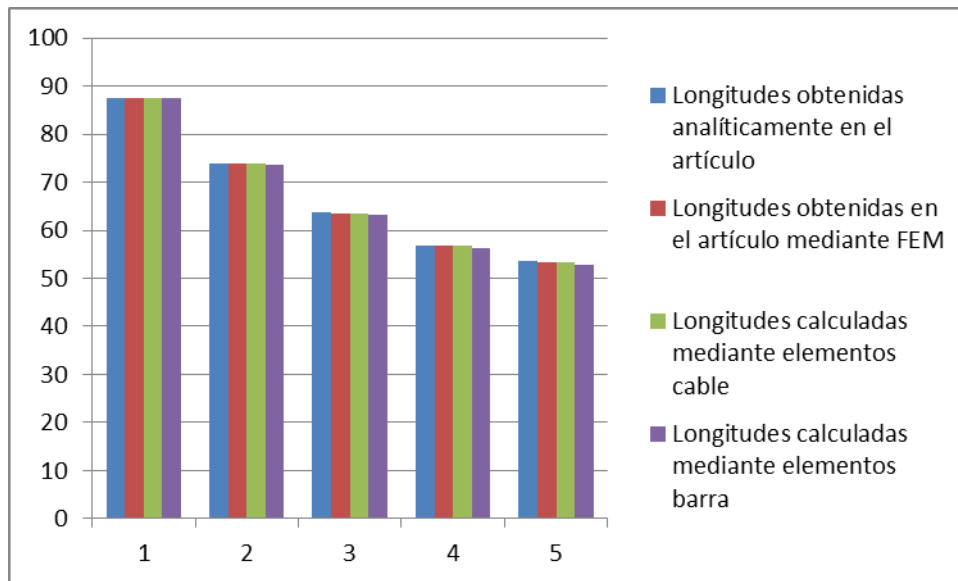
Se han utilizado:

- 30 elementos entre péndolas, tanto para el sustentador como para el cable de contacto
- $E_{sust}' = E_{sust} \times 100$
- $E_{cc}' = E_{cc} \times 100$
- $E_{pend}' = E_{pend} \times 100$
- $I_{sust} = 0$

	1	2	3	4	5
Posición x [m]	2.5	7.5	12.5	17.5	22.5
<b>Longitud calculada 1 [cm]</b>	<b>87.59</b>	<b>73.86</b>	<b>63.59</b>	<b>56.76</b>	<b>53.36</b>
<b>Longitud calculada 2 [cm]</b>	<b>87.591</b>	<b>73.640</b>	<b>63.237</b>	<b>56.308</b>	<b>52.843</b>
Longitud artículo, obtenida analíticamente[cm]	87.6	74	63.7	56.9	53.5
Longitud artículo, obtenida mediante FEM [cm]	87.5	73.8	63.6	56.7	53.3

**Tabla 11: Comparación longitudes de péndolas artículo – programa desarrollado**





**Ilustración 37: Comparación de longitudes de péndolas**

En este último caso se observan también resultados muy similares a los mostrados en el artículo, si bien en este caso los elementos cable modelan mejor la estructura de cables.

### 5.3 INFLUENCIA DEL GRADO DE DISCRETIZACIÓN DE LA CATENARIA

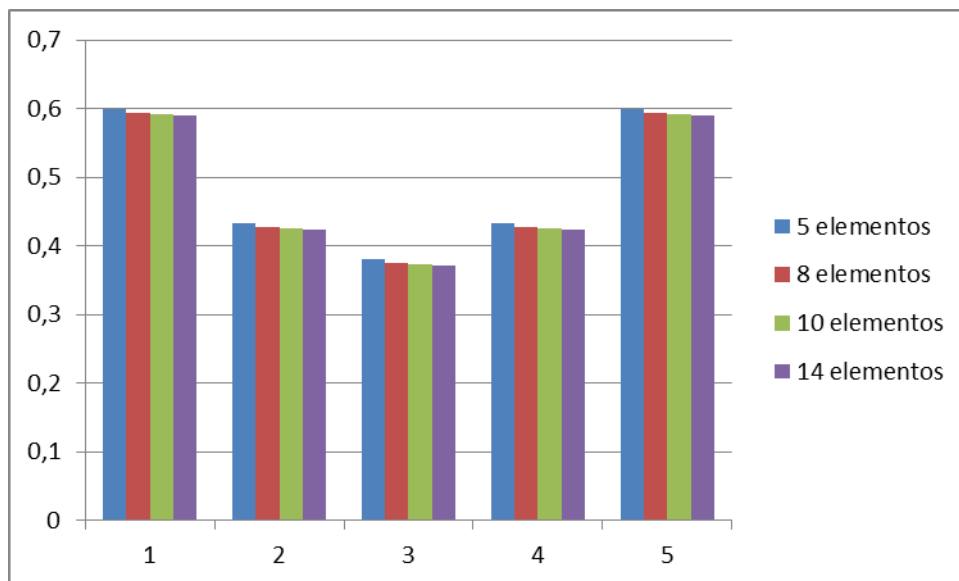
El grado de discretización de la catenaria en elementos finitos puede tener relación con los resultados obtenidos. En este apartado se va a analizar esta influencia en las longitudes de las péndolas obtenidas en la posición de equilibrio



estático, tratando de sacar algunas conclusiones que pueden ser interesantes para saber, por ejemplo, hasta qué tamaño de elementos es útil dicha discretización

El parámetro a analizar será pues el número de elementos por vano que, como ya se ha explicado con anterioridad, se trata de un dato que es definido por el programador de manera manual. Más concretamente, se modifica el número de elementos entre péndolas de un vano. Los resultados obtenidos se presentan a continuación.

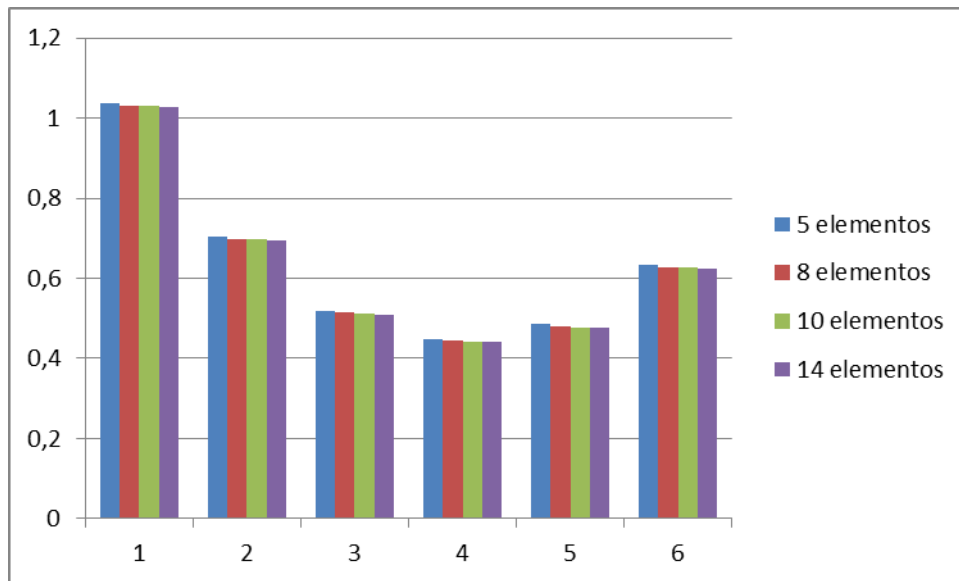
En primer lugar, se ha analizado la discretización del cable sustentador, manteniendo constante el número de elementos del cable de contacto. Las diferentes longitudes de péndolas obtenidas para un vano cualquiera (en concreto el tercero), se presentan en el gráfico de la Ilustración 38.



**Ilustración 38: Longitud de las péndolas en función del número de elementos del cable sustentador**

Como se puede observar, la longitud de las péndolas disminuye conforme se va disminuyendo el tamaño de los elementos del sustentador, llegando a ser esta disminución del 2,57% aproximadamente cuando se utilizan 14 elementos (que hacen un total de 924 elementos en el sustentador).

También se ha representado en la Ilustración 39 la longitud de las péndolas del primer vano, que es diferente al resto, ya que no cuenta con cable 'Y' en uno de sus extremos. Así, el resultado obtenido difiere del obtenido para el resto de los vanos.

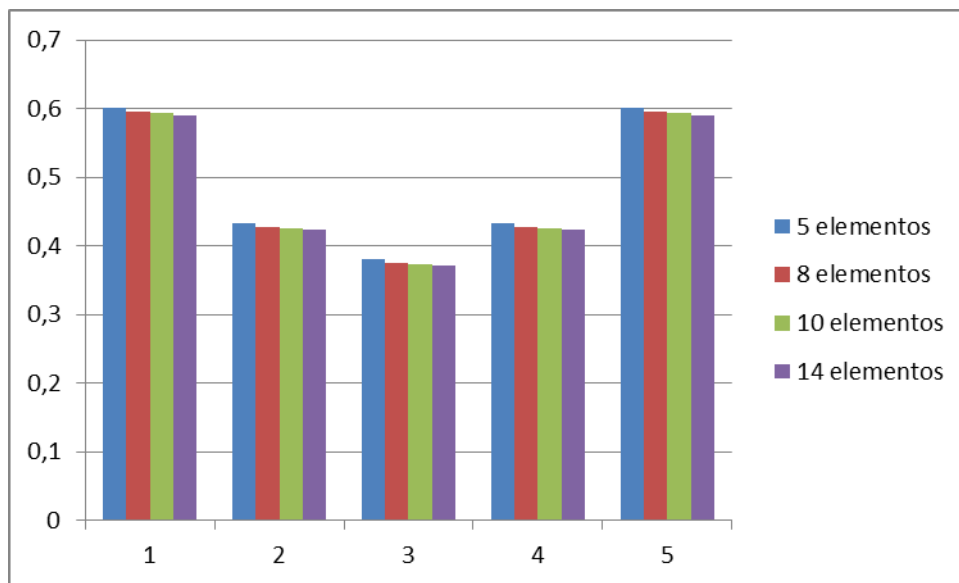


**Ilustración 39: Longitud de las péndolas del primer vano en función del número de elementos del cable sustentador**

En este caso, la influencia del mallado en la longitud de las péndolas es ligeramente menor, siendo su decremento máximo de aproximadamente 2,06%.

En segundo lugar, se pasará a estudiar el mismo fenómeno modificando ahora tanto el número de elementos del cable sustentador como del de contacto por igual.

Los resultados obtenidos se presentan en el siguiente gráfico.



**Ilustración 40: Longitud de péndolas frente al número de elementos**

Se puede observar de nuevo cómo se van obteniendo longitudes de péndolas cada vez menores, es decir, cómo se va aproximando la solución cada vez más a la real conforme se va aumentando el número de elementos utilizado. En este caso, la reducción máxima que se aprecia es del 2,56%, prácticamente igual que en el primero de los análisis, en el que únicamente se ha modificado el tamaño de elementos para el cable sustentador.

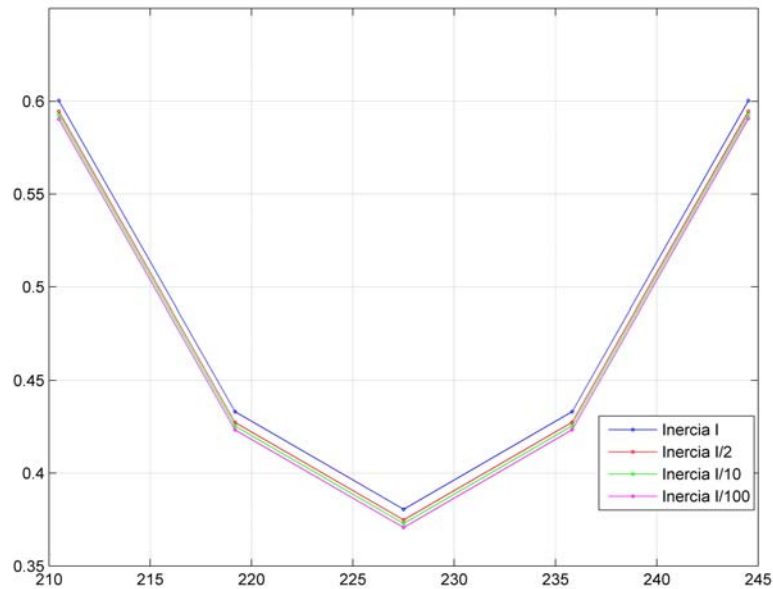
Por tanto, como resultado general de este análisis se concluye, tanto para el caso de la discretización del sustentador como para la del cable de contacto, que al aumentar el número de elementos, la solución se va aproximando cada vez más a una solución real.



## 5.4 INFLUENCIA DE LA FLEXIÓN EN EL SUSTENTADOR

Además de la discretización de la malla, otro parámetro que puede influir en los resultados, en concreto de nuevo en las longitudes de las péndolas, es la flexión del cable sustentador. La importancia de la relación de este parámetro con los resultados obtenidos es que, en el caso de que no exista o sea despreciable la influencia, se anularía la necesidad de utilizar elementos cable para la malla de elementos finitos del sustentador. Dado que estos elementos tienen 8 gdl frente a los elementos barra (utilizados en este problema para péndolas y cables 'Y'), que únicamente tienen 4 gdl, este hecho simplificaría en gran medida los cálculos.

Los resultados obtenidos en este análisis se presentan a continuación. Se ha comenzado calculando la longitud de péndolas para la inercia utilizada hasta ahora durante todos los análisis,  $I = 1.24e-10$ , y se ha ido disminuyendo, tal y como se indica en la Ilustración 41.



**Ilustración 41: Relación de las longitudes de las péndolas con respecto al momento de inercia del cable sustentador**

De las curvas presentadas en la Ilustración 41 se puede observar que la influencia de la flexión es bastante importante, ya que la longitud de las péndolas llega a disminuir un 2,55%.



## 5.5 ANÁLISIS DE LA RIGIDEZ

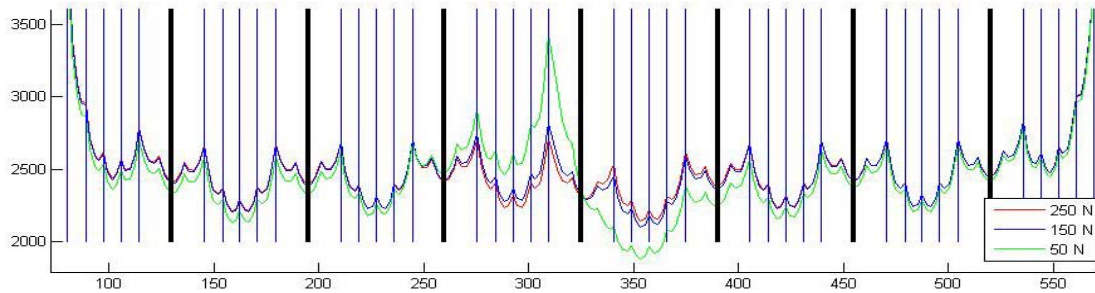
Los análisis anteriores se han llevado a cabo sin la aplicación de ninguna fuerza externa, únicamente teniendo en cuenta las fuerzas gravitatorias debidas al peso propio de los cables. En este apartado se analiza el comportamiento del sistema cuando se le aplica una fuerza externa puntual y constante que cambia de posición con el tiempo, representando así la interacción del cable de contacto con el pantógrafo del vehículo. Se analizan en los próximos apartados los problemas siguientes:

- Influencia de la fuerza aplicada
- Influencia del momento de inercia del cable sustentador
- Influencia de la tensión aplicada en los cables ‘Y’
- Influencia de la tensión aplicada en el cable sustentador

### 5.5.1 Rigidez del problema en función de la fuerza aplicada

En primer lugar se ha analizado la rigidez del sistema en función de las fuerzas aplicadas. Para ello, se ha hallado la deformación o el desplazamiento que producen sobre el cable de contacto unas fuerzas verticales, puntuales y constantes de 250, 150 y 50 Newton. Los resultados obtenidos se presentan a continuación en la Ilustración 42.



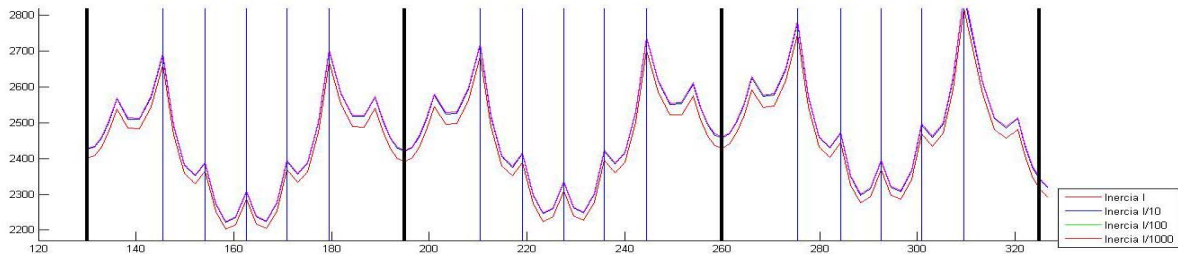


**Ilustración 42: Representación de la rigidez frente al punto de aplicación de la fuerza, para diferentes valores de ésta**

Como se puede observar, a excepción de los dos vanos que están junto al poste central (el poste fijo), la rigidez de la catenaria relativamente constante en relación con la fuerza aplicada. Sin embargo, en los vanos extremos la rigidez aumenta. Esto se debe a que el cable de contacto está anclado en los postes extremos, estando en ellos imposibilitado su movimiento tanto horizontal como vertical (condiciones de contorno de Dirichlet), de manera que en estos puntos su desplazamiento es nulo, por lo que la rigidez tiende localmente a infinito. En cuanto a los dos vanos centrales, en ellos la rigidez también aumenta, debido a que el poste central se encuentra anclado, de manera que aumenta levemente la rigidez de todo el sistema.

### 5.5.2 Rigidez del problema en función de la inercia del sustentador

Se realiza a continuación el análisis de la influencia de la flexión de los elementos del cable sustentador, representada por su momento de inercia, sobre la rigidez del cable de contacto cuando éste está sometido a una fuerza puntual y constante que se desplaza con el tiempo a lo largo de todo el cantón. Para ello se ha escogido una fuerza de 150 N y se ha analizado la rigidez en los vanos tercero, cuarto y quinto, para distintas inercias de los elementos del cable sustentador ( $I$ ,  $I/10$ ,  $I/100$ ,  $I/1000$ ). El resultado obtenido es el siguiente:



**Ilustración 43: Representación de la rigidez del problema frente al punto de aplicación de la fuerza, para distintos momentos de inercia del cable sustentador**

Como se observa en la gráfica de la Ilustración 43, los resultados obtenidos para cada momento de inercia de los elementos del cable de sustentador no difieren mucho. Sin embargo, haciendo un zoom en un punto aleatorio, se puede apreciar que sí que hay cierto aumento de la rigidez del problema conforme disminuye la inercia de los elementos del sustentador.



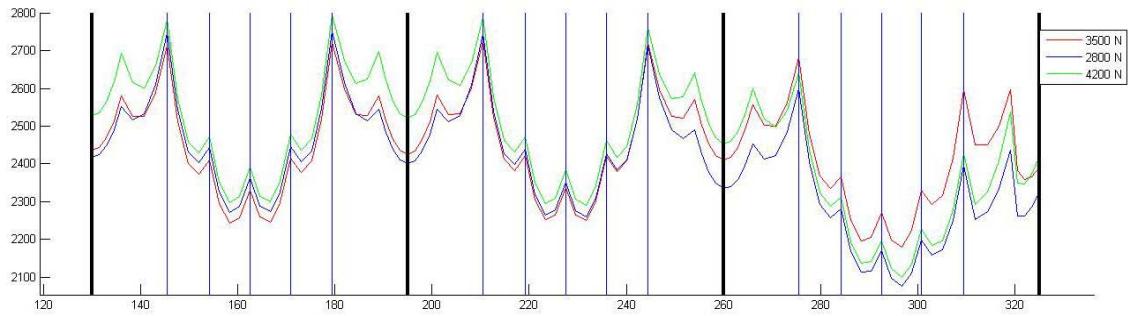
Dado que el aumento de la rigidez conforme disminuye el momento de inercia puede llegar a ser del 1%, se puede concluir que los elementos viga, que introducen como gdl la flexión del elemento, son necesarios y convenientes para el modelo de la catenaria realizado en este proyecto, a pesar de que conlleven un aumento del coste computacional en comparación con la opción de utilizar elementos barra que, como no tienen en cuenta la flexión, sólo tienen dos gdl.

### 5.5.3 Rigidez del problema en función de la tensión del cable

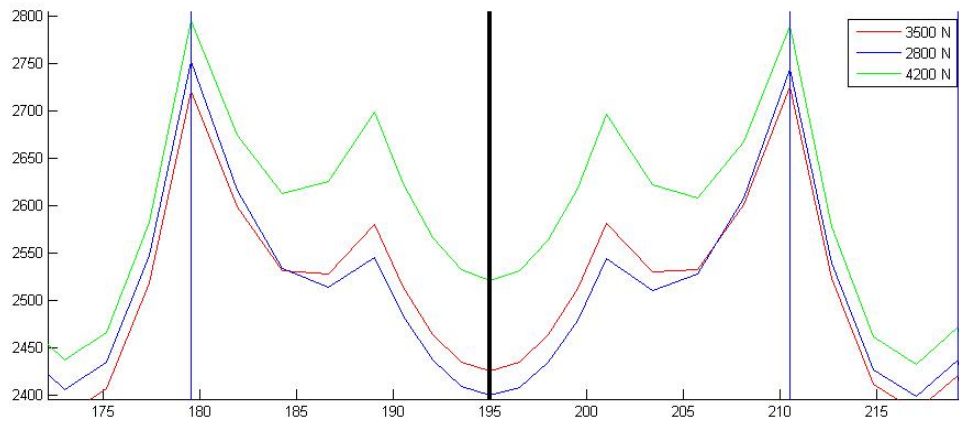
‘Y’

Otro aspecto a tener en cuenta es la tensión introducida en los cables ‘Y’, ya que éstos tienen la función de dotar a la catenaria de una mayor flexibilidad y elasticidad. Esto influirá, por tanto, en el modelo desarrollado, principalmente en el punto de equilibrio obtenido tras aplicar el método de Newton-Raphson bajo la imposición de las condiciones de tensión en cables, afectando también a la rigidez del problema.

Hasta ahora se ha estado aplicando a lo largo de todo el trabajo una fuerza en los cables ‘Y’ de 3500 Newton. En este análisis se ha analizado la rigidez del problema cuando esta fuerza se ve aumentada o reducida en un 20%, es decir, cuando toma los valores de 4200 y 2800 Newton. De nuevo, la fuerza puntual aplicada será de 150 Newton y los vanos analizados el segundo, el tercero y el cuarto. El resultado obtenido es el siguiente.



**Ilustración 44: Representación de la rigidez del problema frente al punto de aplicación de la fuerza, para distintas tensiones aplicadas en los cables ‘Y’**



**Ilustración 45: Detalle de la rigidez del problema en función de la tensión en los cables ‘Y’**



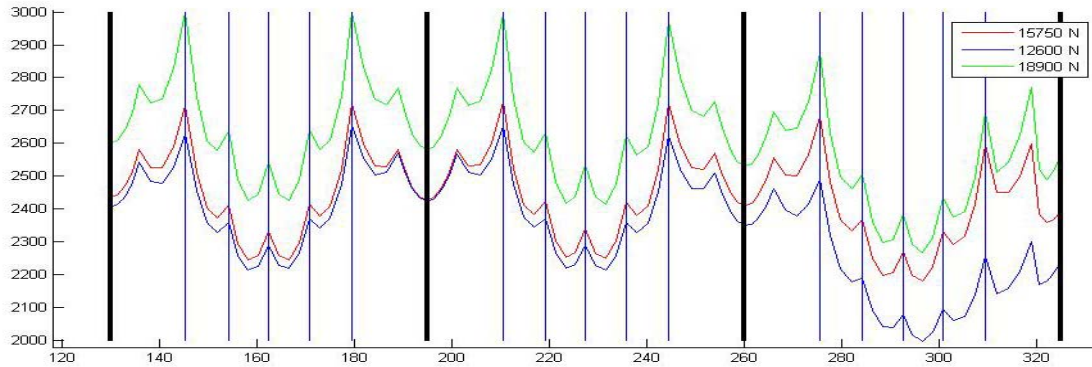
Como se puede observar, la fuerza introducida en los cables 'Y' afecta principalmente a éstos. Puede apreciarse claramente que para la menor tensión introducida el problema tiene una menor rigidez, llegando a disminuir en un 5,8%, lo cual quiere decir que el desplazamiento de los nodos disminuye conforme se tensan dichos cables. Fuera de los segmentos de catenaria en los que se encuentran los cables 'Y', la tensión aplicada no tiene un efecto tan importante, aunque también se observa que la rigidez aumenta con la fuerza de 4200 Newton, no habiendo tanta diferencia al aplicar las otras dos fuerzas.

Se puede concluir, por tanto, que los cables 'Y' están cumpliendo su función al dotar de una mayor estabilidad a todo el sistema de la catenaria y principalmente a las partes de los cables que se encuentran a la altura o cerca de los anclajes de las ménsulas.

#### 5.5.4 Rigidez del problema en función de la tensión aplicada en el cable sustentador

Al igual que la tensión aplicada en los cables 'Y' tiene una influencia importante en el problema presentado, del mismo modo la fuerza que introducen los mecanismos de compensación de tensión mecánica sobre el cable sustentador también afecta a la rigidez del sistema. En cuanto al cable de contacto, en éste la tensión aplicada viene determinada principalmente por la velocidad de operación del vehículo, como se ha explicado a lo largo de este trabajo, por lo que no se va a realizar ningún análisis de su influencia en la rigidez de la catenaria, ya que no se trata de un parámetro que se pueda modificar libremente.

Las rigideces obtenidas bajo las mismas condiciones de fuerza al aumentar y disminuir en un 20% las fuerzas a las que está sometido el cable sustentador son las siguientes.



**Ilustración 46: Representación de la rigidez del problema frente al punto de aplicación de la fuerza, para distintas tensiones aplicadas en el sustentador**

Queda representada en la solución (Ilustración 46) claramente la importancia del parámetro analizado sobre la rigidez de la catenaria. Se puede observar que ésta aumenta conforme se aumenta la tensión introducida en el cable sustentador, siendo este incremento de hasta un 8%, lo cual indica que, al haber menos tensión en éste, habrá una mayor deformación del sistema bajo la acción de la fuerza externa aplicada (que, como ya se ha mencionado, representa la fuerza que haría el contacto con el pantógrafo), disminuyendo por tanto la rigidez.



## 6 CONCLUSIONES Y DESARROLLOS FUTUROS

En este apartado se recogen las principales conclusiones extraídas de los apartados anteriores y se enumeran posibles desarrollos futuros que continúen la línea de investigación en la que se enmarca la tesis de máster aquí presentada.

### 6.1 CONCLUSIONES

En el presente trabajo se ha desarrollado el modelo numérico y su implementación computacional de la simulación estática de la catenaria ferroviaria. De esta simulación se han ido presentando las conclusiones presentadas en el apartado 5. A continuación se recogen de manera concisa las más importantes:

- Para obtener una simulación aceptable de la catenaria ha sido necesario imponer suficientes condiciones de contorno, de manera que ésta quede totalmente definida. Estas restricciones a imponer son de posición vertical de los nodos del cable de contacto, de tensión en cables, de posición horizontal de péndolas y de postes y de posición de los nodos de los cables 'Y'.
- La discretización, tanto en el cable de contacto como en el sustentador, tiene cierta influencia en los resultados obtenidos, si bien a partir de un cierto número de elementos por vano esta influencia deja de ser apreciable.



- La flexión del cable sustentador, que va asociada a la utilización de elementos viga, tiene una influencia importante en los resultados obtenidos, por lo que es necesaria la consideración de dichos elementos.
- En cuanto a la rigidez del sistema, se ha demostrado que ésta es prácticamente independiente de la fuerza puntual aplicada, mientras que sí que depende fuertemente del punto del vano en el que sea analizada, ya que en los postes fijos tiene un incremento importante.
- Finalmente, se ha presentado la variación de la rigidez del sistema tanto con el momento de inercia del sustentador como con las tensiones aplicadas en el sustentador y en los cables Y.

En el caso del análisis del momento de inercia, se ha llegado a la misma conclusión que en el realizado anteriormente en el que no se aplicaba ninguna fuerza externa; la flexión considerada en los elementos del sustentador influye en los resultados obtenidos, por lo que la utilización de elementos viga ha sido acertada.

Por otro lado, se ha observado que la rigidez aumenta con las tensiones aplicadas tanto en el cable Y como en el sustentador, ya que al aplicarlas se restringe de manera importante el desplazamiento de los cables sobre los que se aplica la fuerza.





## 6.2 DESARROLLOS FUTUROS

El código implementado en el proyecto queda abierto al futuro desarrollo y perfeccionamiento del mismo, así como a la adición de nuevas funcionalidades. Algunas de las líneas a seguir pueden ser las siguientes:

- Planteamiento del problema dinámico
- Obtención de funciones de respuesta en frecuencia del sistema
- Análisis mediante integración numérica de la respuesta de la catenaria bajo la aplicación de las fuerzas inducidas por el pantógrafo





## 7 BIBLIOGRAFÍA

- [1] M. Berzeri, A. A. Shabana, 1999, 'Development of simple models for the elastic forces in the absolute nodal coordinate formulation', *Journal of Sound and Vibration*, **235**(4), 539-565.
- [2] Jong-Hwi Seo, Seok-Won Kim, Il-Ho-Jung, Tae-Won Park, Jin, Yong Mok, Young-Guk Kim, Jang-Bom Chai, 2006, 'Dynamic analysis of a pantograph-catenary system using absolute nodal coordinates', *Vehicle System Dynamics*, Vol. 44, 615-630.
- [3] A. A. Shabana, 'Dynamics of multibody systems', ISBN-13 978-0-521-85011-7, ISBN-10 0-521-85011-8, Cambridge University Press (2005).
- [4] Fernando Oliveros Rives, Manuel Rodriguez Mendez, Manuel Megia Puente, 'Tratado de Ferrocarriles II, Ingeniería Civil e Instalaciones', ISBN 84-7207-015-8, Editorial Rueda (1980).
- [5] Friedrich Kiessling, 'Contact lines for electrical railways: Planning, design, implementation', ISBN 978-3-89578-322-7, Publics MCD Verlag (2008).
- [6] O. Lopez-García, A. Carnicero, V. Torres, J. R. Jimenez-Octavio, 'The influence of cable slackening on the stiffness computation of railway overheads', *International Journal of Mechanical Sciences*, 50 (2008) 1213-1223



- [7] M. Arnold, B. Simeon, 'Pantograph and catenary dynamics: A benchmark problem and its numerical solution', *Applied Numerical Mathematics*, 34 (2000) 345-362.
- [8] Y. H. Cho, K. Lee, Y. Park, B. Kang, K. Kim, 'Influence of contact wire pre-sag on the dynamics pantograph-railway catenary', *International Journal of Mechanical Sciences*, 52 (2010) 1471-1490.
- [9] G. Poetsch, J. Evans, R. Meisinger, W. Kortüm, W. Baldauf, A. Veitl, J. Wallaschek, 'Pantograph/Catenary Dynamics and Control', *Vehicle System Dynamics*, 28:2, (1997), 159-195.
- [10] H. Sugiyama, J. L. Escalona, A. A. Shabana, 'Formulation of Three-Dimensional Joint Constraints Using the Absolute Nodal Coordinates', *Nonlinear Dynamics*, 31 (2003) 167-195
- [11] K. E. Dufva, J. T. Sopanen, A. M. Mikkola, 'Three-Dimensional Beam Element based on a Cross-Sectional Coordinate System Approach', *Nonlinear Dynamics*, 43 (2006) 311-327
- [12] A. A. Shabana, R. Y. Yakoub, 'Three Dimensional Absolute Nodal Coordinates Formulation for Beam Elements: Theory', *Journal of Mechanical Design*, Vol. 123, (2001)
- [13] A. A. Shabana, R. Y. Yakoub, 'Three Dimensional Absolute Nodal Coordinates Formulation for Beam Elements: Implementation and Applications', *Journal of Mechanical Design*, Vol. 123, (2001)

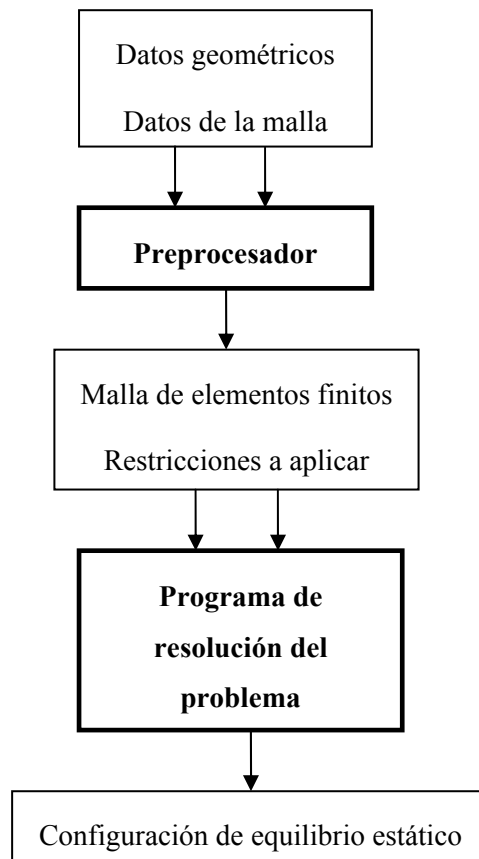




## Anexo

En este anexo se describe brevemente la estructuración del programa implementado en MATLAB para llevar a cabo el modelado mediante elementos finitos de la configuración inicial de la catenaria.

El programa se estructura en dos partes principales: Preprocesador, o generador de la geometría y de la malla de elementos finitos, y Programa principal o de elementos finitos. Una visión general del programa se muestra a continuación.



**Ilustración 47: Esquema del programa desarrollado**

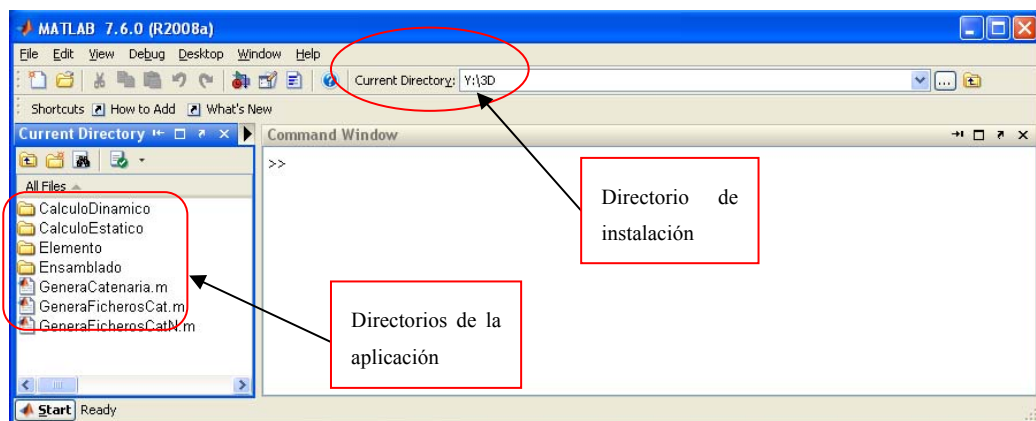
## 1. Manual del preprocesador

En este apartado del anexo se describen los pasos que es necesario seguir para instalar la aplicación, cargar los datos de un problema dado, y a partir de ellos, generar la información de elementos finitos para resolverlo.

### 1.1 INSTALACIÓN Y CONFIGURACIÓN DE LA APLICACIÓN

La instalación de la aplicación tan solo requiere montar el directorio que contiene todas las rutinas y ficheros de definición del programa en una unidad elegida por el usuario.

Una vez montado el directorio, éste debe ser seleccionado como directorio de trabajo en MATLAB.



**Ilustración 48: Instalación de la aplicación**

La estructura de directorios de la aplicación es la siguiente:



<b>Directorio</b>	<b>Contenido</b>
<b>CalculoDinamico</b>	Funciones y carpetas necesarias para la resolución del problema dinámico.
<b>CalculoEstatico</b>	Funciones y carpetas necesarias tanto para la generación de la malla de elementos finitos como para la resolución del problema estático.
<b>Elemento</b>	Funciones del elemento, tanto para tipo cable como para barra.
<b>Ensamblado</b>	Funciones necesarias para la resolución del problema de optimización para imponer una altura constante en el cable de contacto.

**Tabla 12: Estructura de directorios de la aplicación**

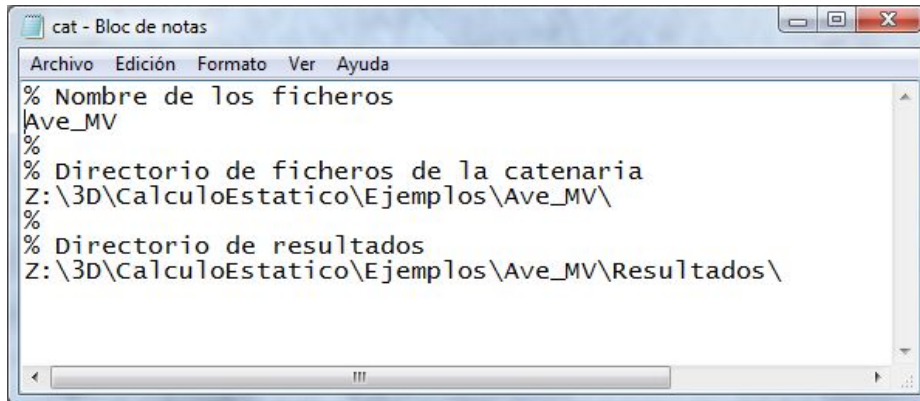
Tanto para el caso del preprocesador como para el cálculo estático, ficheros, rutinas y carpetas se encuentran en el directorio de trabajo “CalculoEstatico”. La estructura de dicho directorio es la siguiente:

<b>Directorio</b>	<b>Contenido</b>
<b>GeneraFicherosCat</b>	Funciones necesarias para leer los datos geométricos de la catenaria y generar los ficheros para la malla de elementos finitos: Cat0, tc, pvc,...
<b>GeneraCatenaria</b>	Funciones utilizadas para el cálculo de la posición de nodos y de la longitud de los elementos para cumplir determinadas condiciones adicionales.
<b>AlturaOptima</b>	Funciones necesarias para la resolución del problema de optimización para imponer una altura constante en el cable de contacto.
<b>Ejemplos</b>	Directorio donde se guardan los ficheros de entrada y salida del programa.
<b>Imagenes</b>	Funciones de representación gráfica.

**Tabla 13: Estructura del directorio ‘CalculoEstatico’**

## ANEXOS

Una vez se ha seleccionado el directorio, se debe editar el archivo de configuración de la aplicación **cat.ini**. Este archivo contiene información del nombre de los ficheros así como las rutas de los directorios donde se guardan los datos y los resultados. El archivo de configuración del programa tiene el siguiente aspecto:



```
cat - Bloc de notas
Archivo Edición Formato Ver Ayuda
% Nombre de los ficheros
Ave_MV
%
% Directorio de ficheros de la catenaria
Z:\3D\CalculoEstatico\Ejemplos\Ave_MV\
%
% Directorio de resultados
Z:\3D\CalculoEstatico\Ejemplos\Ave_MV\Resultados\
```

**Ilustración 49: Fichero de configuración**

	<b>Explicación</b>
<b>Nombre de los ficheros</b>	Todos los ficheros de entrada y salida de la aplicación se crearán poniendo como raíz este nombre seguidos de una terminación característica para cada tipo de fichero. Así mismo, el fichero de entrada de datos deberá comenzar por este nombre.
<b>Directorio de ficheros de la catenaria</b>	Esta carpeta debe contener el archivo de datos a partir del cual se genera la información de elementos finitos ( <i>Ave_MV_datos.txt</i> , en el ejemplo). Los archivos de elementos finitos se guardan en esta carpeta una vez terminado el preproceso.
<b>Directorio de resultados</b>	En esta carpeta se almacenan los ficheros de resultados de la configuración inicial de la catenaria una vez resuelto el problema de optimización.

**Tabla 14: Contenido del archivo de configuración de la aplicación**

## 1.2 CONFIGURACIÓN DE UN PROBLEMA. FORMATO DE DATOS

Para llevar a cabo el análisis, el primer paso es generar la información geométrica y de la malla de elementos finitos del sistema, para lo cual han de determinarse los parámetros de entrada.

Para la catenaria elegida en el apartado 4, la topología utilizada en el tramo recto de la línea AVE Madrid – Valencia, se tiene un cantón con 11 postes, separados 65 m entre sí. La altura del punto de unión del cable sustentador con los postes es de 6.6 m y la altura deseada para el cable de contacto es de 5.3 m. El

## ANEXOS

escalonamiento deseado para el cable de contacto es de 0.2 m en total y las longitudes de los brazos de registro se han fijado a 1 m.

La información de entrada contiene por tanto los parámetros para la descripción geométrica general de la catenaria así como las opciones para generar el mallado, y se especificará a través del fichero **Nombre\_datos.txt**. El texto que debe contener este fichero se muestra en la siguiente imagen, y las medidas de los diferentes componentes del sistema se especifican a continuación mediante esquemas de representación de la catenaria.

```
% FICHERO DE DATOS DE ENTRADA DE CATENARIA
%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% DATOS DE LA GEOMETRÍA DE LA CATENARIA
%
% POSTES
% Número total de postes (NPostes):
  11
% Distancia del poste a la vía (D_p_vía):
  2.5
% Distancia entre postes (DPostes):
  65
% Altura postes (HPostes):
  6.6
% Longitud de la ménsula de unión con el cable sustentador (LMensula):
  2
% Brazo de registro: Longitud/altura/escalonamiento (LReg/HReg/SReg)
  1 0.15 0.2
% Escalonamiento del sustentador (1 escalonado, 0 recta) (SSust):
  0
% Sentido del escalonamiento (SentEsc) (1 alternante(recta), 0 al mismo lado(curva)):
  1
% Altura cable de contacto (HContacto):
  5.3
%
% CABLE EN Y
% Anchura del cable en Y en el sustentador (LY_Sust): (desde el nodo
% de conexión hasta el poste):
  18
% Anchura del cable en Y en el cable de contacto (LY_Contacto):
  12
%
% PÉNDOLAS
% Número de péndolas por vano (NPend):
  7
% Distancia entre péndolas (DPend) (se comienza con la distancia entre
% el poste y la péndola del cable en Y):
  6
  9.48
```

```

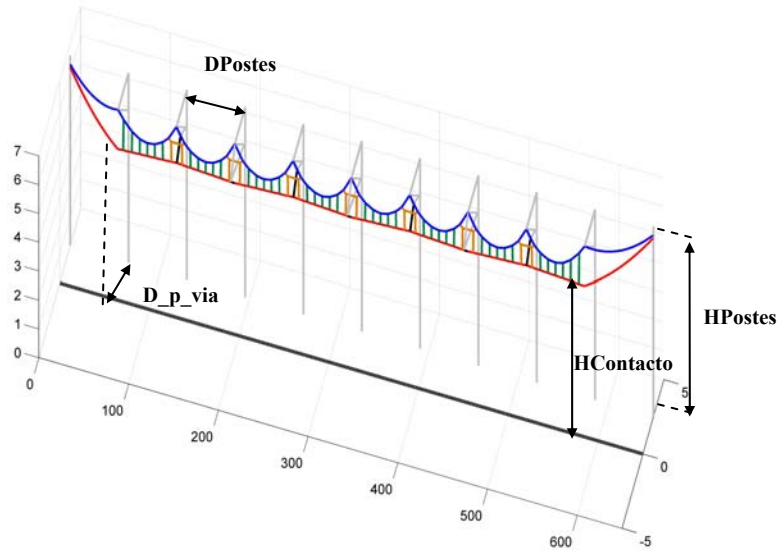
8.7
8.32
8.32
8.7
9.48
6
% POLEAS
% Altura polea sustentador (HPoleaSust):
6.3
% Altura polea cable de contacto (HPoleaContacto):
6.2
% Masa de la polea en el cable sustentador (MSust):
1000
% Masa de la polea en el cable de contacto (MContacto):
1000
% Masa de las grifas de conexión de péndolas con cable sustentador (MGrifasS):
0
% Masa de las grifas de conexión de péndolas con cable de contacto (MGrifasC):
0
% Masa de las grifas de conexión de péndolas con cable Y (MGrifasY):
0
%
%
% DATOS DE LA TENSION Y PESO ESPECIFICO
%
% Fuerza (en N) en el sustentador (FuerzaS):
15750
% Fuerza (en N) en el cable de contacto (FuerzaC):
31500
% Fuerza (en N) en los cables en Y (FuerzaY):
3500
%
%
% DATOS DE GENERACION DE LA MALLA
% Número de elementos entre péndolas del sust (Ne_Sust):
5
% Número de elementos entre péndolas del CC (Ne_Contacto):
4
% Número de elementos del sustentador en el cable en Y (Ne_SustY):
5
% Número de elementos del CC en el cable en Y (Ne_ContactoY):
4
% Número de elementos del sustentador del vano inicial y final (Ne_SustIni):
10
% Número de elementos del CC del vano inicial y final (Ne_ContactoIni):
20
%
%
% DATOS DE LOS MATERIALES (E,A,Dens,I)
% Número de materiales
5
% MATERIAL 1 (SUSTENTADOR):
1.100000e+011 9.480000e-005 9.114000e+003 1.237200e-009
% MATERIAL 2 (CABLE DE CONTACTO):
1.100000e+011 1.500000e-004 9.160000e+003 2.170000e-009
% MATERIAL 3 (PÉNDOLAS):

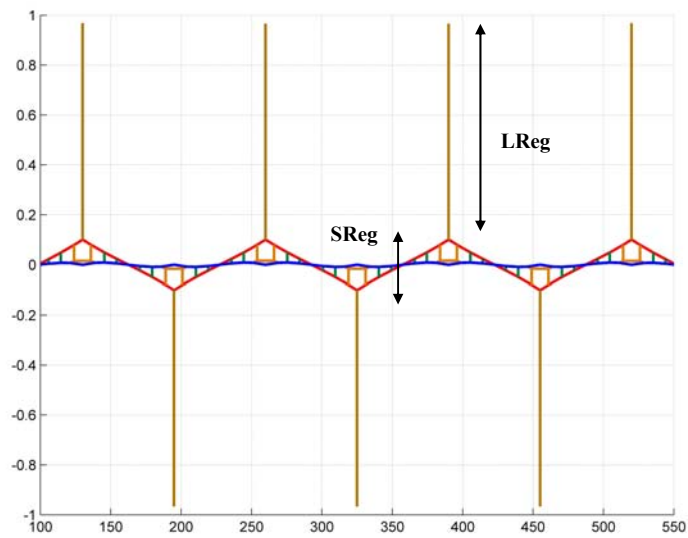
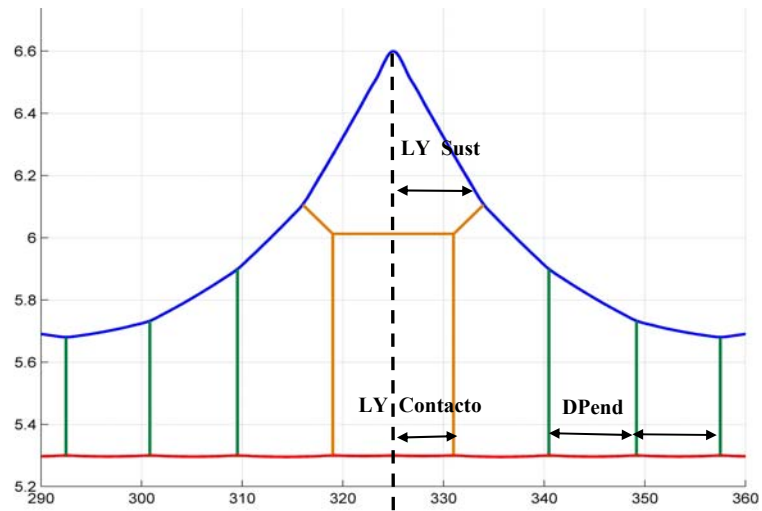
```

## ANEXOS

```
1.100000e+011 1.000000e-005 9.114000e+003 0.000000e+000
% MATERIAL 4 (CABLE EN Y):
1.100000e+011 1.000000e-005 9.114000e+003 0.000000e+000
% MATERIAL 5 (BRAZO DE REGISTRO):
1.100000e+011 1.000000e-004 1.000000e+004 0.000000e+000
```

**Ilustración 50: Formato y contenido del fichero de datos**





**Ilustración 51: Parámetros geométricos de la catenaria**

La información geométrica básica a partir de la cual se genera la catenaria es:

ANEXOS

<b>Variable</b>	<b>Contenido</b>	<b>Variable</b>	<b>Contenido</b>
NPostes	Número total de postes en el cantón, incluyendo postes inicial y final con poleas.	NPend	Número de péndolas en el vano, incluyendo las del cable 'Y'.
DPostes	Distancia entre postes medida sobre la vía.	DPend	Lista de distancias entre péndolas del vano. Debe contener NPend+1 distancias.
HPostes	Altura de unión del cable sustentador con postes.	HPoleaSust	Altura de unión del cable sustentador con los postes inicial y final.
LMensula	Longitud del brazo de la ménsula que sujeta al cable sustentador.	HPoleaContacto	Altura de unión del cable de contacto con los postes inicial y final.
D_p_v	Distancia entre un poste y el eje de la vía.	MSust	Masa de las poleas del cable sustentador.
LReg	Longitud del brazo de registro.	MContacto	Masa de las poleas del cable de contacto.
HReg	Altura del brazo de registro	MGrifasS	Masa de cada grifa que sujeta una péndola al cable sustentador.
SReg	Valor del escalonamiento total.	MGrifasC	Masa de cada grifa que sujeta una péndola al cable de contacto.
SSust	Variable que indica si el cable sustentador está en recta (0) o en zig-zag (1).	MGrifasY	Masa de cada grifa que sujeta una péndola del cable 'Y' al sustentador.
SentEsc	Sentido del escalonamiento del cable de contacto.	FuerzaC	Fuerza de tensión del cable de contacto.



Variable	Contenido	Variable	Contenido
	Valor 1 para escalonado, 0 sin escalonar.		
HContacto	Altura del cable de contacto.	FuerzaS	Fuerza de tensión del cable sustentador.
LY_Sust	Distancia entre los puntos de unión del cable 'Y' con el sustentador.	FuerzaY	Fuerza de tensión de los cables 'Y'.
LY_CC	Distancia entre los puntos de unión del cable 'Y' con el cable de contacto.		

**Tabla 15: Geometría básica de la catenaria**

Variable	Contenido	Variable	Contenido
Ne_Sust	Número de elementos entre péndolas del cable sustentador.	Ne_SustY	Número de elementos en el cable sustentador sobre el cable 'Y'.
Ne_Contacto	Número de elementos entre péndolas del cable de contacto.	Ne_ContactoY	Número de elementos en el cable de contacto bajo el cable 'Y'.
Ne_Pend	Número de elementos por péndola.	Ne_SustIni	Número de elementos en el cable sustentador en los vanos inicial y final.
		Ne_ContactoIni	Número de elementos en el cable de contacto en los vanos inicial y final.

**Tabla 16: Información de la malla de elementos finitos**

## ANEXOS

<b>Variable</b>	<b>Contenido</b>	<b>Variable</b>	<b>Contenido</b>
E	Módulo de Young.	Dens	Densidad del material.
A	Área de la sección transversal.	I	Momento de inercia de la sección transversal.

**Tabla 17: Propiedades de materiales**

La descripción del trazado de la catenaria se incorpora a partir de la función trazado, "*trazado.m*", la cual devuelve las coordenadas globales del mismo, así como la orientación de la vía para cada punto kilométrico.

El trazado de la vía se considera situado sobre un plano horizontal (perpendicular a la dirección del vector  $g$ ).

Una función para describir el trazado de la catenaria debe tener una cabecera similar a la de la función mostrada en la siguiente tabla.

```

function [X Y Z thz] = trazado(s)

%=====
% Función que devuelve las coordenadas globales y la orientación de la vía
% para cada punto kilométrico 's'.
%
% s      : Punto kilométrico sobre la vía.
% X, Y, Z : Coordenadas globales del punto.
% thz    : Ángulo de giro respecto al eje Z del vector tangente a la
%          proyección del trazado sobre el plano Z = 0.
%=====

%- Curva de radio constante.
R = 1500; a = -R; b = 0;
t = s./R;
X = a + R.*cos(t);
Y = b + R.*sin(t);
Z = 0*s;
thz = t + pi/2;

```

**Tabla 18: Ejemplo de función Trazado**

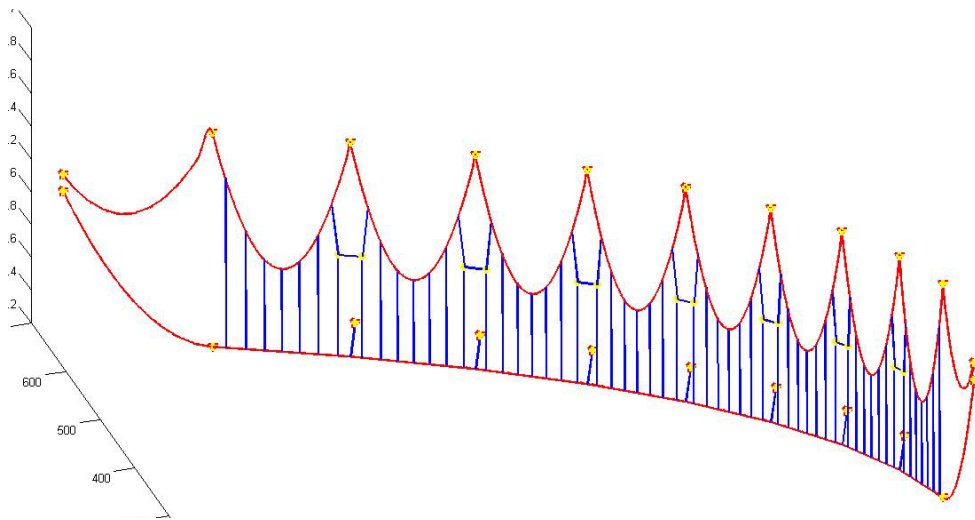
La función “**trazado.m**” debe encontrarse en el directorio de la aplicación “**../GeneraFicherosCat**”. Esta función puede ser modificada para generar mallas con trazados diferentes.

### 1.3 CREACIÓN DE INFORMACIÓN DE ELEMENTOS FINITOS

La generación de la información de elementos finitos se realiza llamando a las siguientes rutinas desde la línea de comandos de MATLAB (el directorio de trabajo debe ser el directorio raíz de la aplicación)

>> GeneraFicherosCatN	Genera la malla de EF para resolver el problema estático de una catenaria con la topología descrita por la norma EN 50318
>> GeneraFicherosCat	Genera la malla de EF para resolver el problema estático de una catenaria con una topología como la de las líneas de AVE.

**Tabla 19: Generación de la malla de elementos finitos**



**Ilustración 52: Malla inicial de la catenaria del AVE**

Una vez ha terminado la rutina, se escriben los ficheros que contienen la información que el programa de elementos finitos necesita para resolver el problema estático. Estos archivos se crean dentro del directorio de ficheros de la catenaria especificado en el archivo de configuración **cat.ini**.

El nombre y contenido de los ficheros generados se recoge en la siguiente tabla.

<b>Nombre del fichero</b>	<b>Contenido</b>
<b>Nombre_cat0.txt</b>	Fichero general de la malla de EF de la catenaria inicial.
<b>Nombre_tc.txt</b>	Información necesaria para aplicar las condiciones de tensión en los cables sustentador y de contacto.
<b>Nombre_tcy.txt</b>	Información necesaria para aplicar las condiciones de tensión en los cables en 'Y'.
<b>Nombre_pvc.txt</b>	Ecuaciones de restricción asociadas a la posición vertical en determinados nodos del cable de contacto.
<b>Nombre_phpe.txt</b>	Ecuaciones de restricción de posición horizontal de los nodos de las péndolas.
<b>Nombre_phpo.txt</b>	Ecuaciones de restricción de posición horizontal en los nodos de unión con los postes.
<b>Nombre_PosY.txt</b>	Ecuaciones de restricción asociadas a la posición de los nodos del cable 'Y'.
<b>Nombre_br.txt</b>	Ecuaciones de restricción asociadas a la posición de nodos de unión del cable de contacto con el brazo de registro.

**Tabla 20: Ficheros de configuración del problema de elementos finitos**

Por tanto, éstos son los ficheros de datos que el programa de elementos finitos utilizará como datos de entrada tanto para resolver el problema de la configuración inicial de la catenaria como para el cálculo dinámico de su interacción con el pantógrafo.

## 2. Programa de elementos finitos

A continuación se muestran las rutinas principales del programa de resolución del equilibrio estático de la catenaria.

1. **GeneraCatenaria.m.** Esta función permite escoger el problema que se desea resolver, en función de las restricciones que se desee aplicar, de si se desea realizar la optimización distribuida de la longitud de

## ANEXOS

péndolas o de si se desea calcular el equilibrio estático para la catenaria propuesta por la norma mencionada a lo largo de este trabajo.

```
function GeneraCatenaria(TipoProblema)

%=====
%% Función que genera el fichero con la definición de la
catenaria que cumple determinadas condiciones:
%% tensión cables, posición nodos, etc.
%% Para eso se resuelven varios problemas de equilibrio con
restricciones.
%=====

%== Incluye en el path los directorios donde se encuentran
los programas
clear all
path(path, './CalculoEstatico/GeneraCatenaria');
path(path, './CalculoEstatico/GeneraFicherosCat');
path(path, './Elemento/ElemCable');
path(path, './Elemento/ElemBarra');
path(path, './Ensamblado/Estatico');

%== Lee el archivo cat.ini para definir el nombre y el
directorio de los datos
[nombre DirF DirR] = LeerCatIni;

switch TipoProblema

    case 0
        %== Optimización distribuida en la altura del cable de
contacto.
        GeneraCatenaria_0(nombre,DirF,DirR);

    case 1
        %== Equilibrio del sistema bajo la aplicación de todas
las restricciones. Se genera el fichero 'nombre_cat1.txt'.
        GeneraCatenaria_1(nombre,DirF,DirR);

    case 2
        %== Ecuaciones de restricciones de tensión distribuidas
en sustentador y cable de contacto (tc). Se genera
nombre_cat2.txt'.
```

```

GeneraCatenaria_2(nombre,DirF,DirR);

case 3
    %== Ecuaciones de restricción puntuales en la altura del
cable de contacto (tc+pvc). Se genera 'nombre_cat3.txt'.
    GeneraCatenaria_3(nombre,DirF,DirR);

case 4
    %== Ecuaciones de restricción de tensión distribuidas
en sustentador y cable de contacto y en cables 'Y'
(tc+pvc+tcy). Se genera 'nombre_cat4.txt'.
    GeneraCatenaria_4(nombre,DirF,DirR);

case 5
    %== Ecuaciones de restricción de tensión distribuidas
en sustentador, cable de contacto y cables 'Y', y de posición
horizontal de los nodos de las péndolas que están en el
cable de contacto (tc+pvc+tcy+phpe). Se genera
'nombre_cat5.txt'.
    GeneraCatenaria_5(nombre,DirF,DirR);

case 6
    %== Ecuaciones de restricción de tensión distribuidas
en sustentador, cable de contacto y cables Y, de posición
horizontal de los nodos de las péndolas que están en el
cable de contacto y de posición horizontal de los nodos de
los postes (tc+pvc+tcy+phpe+phpo). Se genera
'nombre_cat6.txt'.
    GeneraCatenaria_6(nombre,DirF,DirR);

case 7
    % == Ecuaciones de restricción de tensión distribuidas
en sustentador, cable de contacto y cables Y, de posición
horizontal de los nodos de las péndolas que están en el
cable de contacto, de posición horizontal de los nodos de los
postes y de posición (x, y, z) de los nodos de los cables 'Y'
(tc+pvc+tcy+phpe+phpo+posY). Se genera 'nombre_cat6.txt'.
    GeneraCatenaria_7(nombre,DirF,DirR);

case 8
    % == Equilibrio del sistema bajo la aplicación de todas
las restricciones, incluidas las restricciones de las
variables de diseño de la posición del brazo de registro.
    GeneraCatenaria_8(nombre,DirF,DirR);

```

## ANEXOS

```
case 9
    % == CATENARIA DE LA NORMA.
% Se aplican directamente todas las restricciones (excepto
las del (cable 'Y')). Se genera 'nombre_catn.txt'.
    GeneraCatenaria_n(nombre,DirF,DirR);

end
```

**Ilustración 53: Rutina ‘GeneraCatenaria.m’**

2. **GeneraCatenaria\_0.m.** Como ejemplo se va a mostrar la más genérica de las funciones a escoger en la rutina anterior, la que halla el equilibrio estático optimizando la longitud de péndolas.

```
function GeneraCatenaria_0(nombre,DirF,DirR)

%=====
%% FUNCIÓN QUE OPTIMIZA LA ALTURA DE LOS NODOS DEL CABLE DE
CONTACTO DE MANERA DISTRIBUIDA.
%
% FICHERO DE DATOS DE ENTRADA (nombre_cat0.txt):
% Param      : Parámetros del problema (Dimensión, N° nodos,
N° gdl,...)
% GrupoE     : Topología de la malla, longitudes de
elemento,...
% ThZ_nod    : Datos de la orientación y sistema de
coordenadas de nodos.
% XYZ        : Coordenadas iniciales de cada nodo.
% MatCable   : Datos de materiales
% Rest       : Condiciones de contorno de Dirichlet.
%
% FICHEROS DE RESTRICCIONES:
% nombre_cat_tc.txt : Restricciones de tensión en el
extremo de los cables sustentador y de contacto.
% nombre_cat_pvc.txt : Restricciones de posición verical de
los nodos de las péndolas.
% nombre_cat_tcy.txt : Restricciones de tensión en los
cables 'Y'.
% nombre_cat_phpe.txt: Restricciones de posición horizontal
de las péndolas.
```



```

% nombre_cat_posY.txt: Restricciones de posición de los
nodos del cable 'Y'.
% nombre_cat_phpo.txt: Restricciones de posición horizontal
de los postes.
% nombre_cat_br.txt : Restricciones de posición de los
nodos del brazo de registro.
%
% DATOS DE FICHERO DE SALIDA ('nombre_catOPT.txt'):
% Los mismos que de entrada, pero coordenadas XYZ y
longitudes optimizadas en equilibrio estático.
%=====

clf

format long

path(path, './AlturaOptima');

%=== LECTURA DE DATOS
Fichero_cat = [DirF nombre '_cat0.txt'];
Fichero_BR = [DirF nombre '_br.txt'];
Fichero_tc = [DirF nombre '_tc.txt'];
Fichero_pvc = [DirF nombre '_pvc.txt'];
Fichero_tcy = [DirF nombre '_tcy.txt'];
Fichero_posY = [DirF nombre '_posY.txt'];
Fichero_phpe = [DirF nombre '_phpe.txt'];
Fichero_phpo = [DirF nombre '_phpo.txt'];

[Param, GrupoE, XYZ, ThZ_nod, MatCable, Rest] =
LectCat_ave(Fichero_cat);
[NRest_BR, Rest_BR] = Lect_BR(Fichero_BR);
[NRest_tc, Rest_tc] = Lect_tens(Fichero_tc);
[NRest_pvc, Rest_pvc] = Lect_pos(Fichero_pvc);
[NRest_tcy, Rest_tcy] = Lect_tens(Fichero_tcy);
[NRest_posY, Rest_posY] = Lect_pos(Fichero_posY);
[NRest_phpe, Rest_phpe] = Lect_pos(Fichero_phpe);
[NRest_phpo, Rest_phpo] = Lect_pos(Fichero_phpo);

% Restricciones totales de posición de nodos
Param.NRestPN = NRest_pvc + NRest_posY + NRest_phpe +
NRest_phpo;
RestPN = [Rest_pvc ; Rest_posY ; Rest_phpe ; Rest_phpo];

```

## ANEXOS

```
% Restricciones totales de tension en cables
Param.NRestTens = NRest_tc + NRest_tcy;
RestT = [Rest_tc ; Rest_tcy];
% Restricciones totales de posición en el brazo de registro
Param.NRest_BR = NRest_BR;

%=== NUMERACION DE GDL
Rest_3D = Rest;
[NgdlT, ID] = NumeragDL(Param,Rest_3D);
Param.NgdlT= NgdlT;

%=== DIBUJO
dibujar(Param, XYZ, GrupoE, Rest_3D, 'Malla inicial')
% pause

%=== CALCULO DE POSICION INICIAL Y DE LONGITUDES INICIALES DE
ELEMENTO

%== Parámetros de iteración Newton-Raphson
Param.IterMaxNR= 10;    %- Número máximo de iteraciones
Newton-Raphson
Param.TolNR= 1.0e-15;  %- Tolerancia fin Newton-Raphson

Param.IterMaxNR_L0= 20;    %- Número máximo de iteraciones
Newton-Raphson para cálculo de L0
Param.TolNR_L0= 1.0e-10;  %- Tolerancia fin Newton-Raphson
para cálculo de L0

% === ACTUALIZACIÓN DE LAS VARIABLES DE DISEÑO ===
% Actualizar IDLong para restricciones:
NLong = 0;
for iGrupo = 1:Param.NGruposE
    NLong = NLong + GrupoE(iGrupo).Numel;    % Generación
del vector IDLong
end
IDLong = zeros(NLong,1);
IDLong(Rest_tc(:,5))=1;    % Actualización IDLong
IDLong(Rest_pvc(:,4))=1;
IDLong(Rest_tcy(:,5))=1;
IDLong(Rest_posY(:,4))=1;
```

```

IDLLong(Rest_phpe(:,4))=1;
IDLLong(Rest_phpo(:,4))=1;

Param.NRestTot = Param.NRestPN + Param.NRestTens;    % Número
total de restricciones

% Actualizar Variables de diseño en coordenadas de posición
% de nodos del brazo de registro
[N_BR ID_BR] = NumeraCoord(Param,Rest_BR);
Param.N_BR = N_BR;

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%=== EQUILIBRIO NEWTON-RAPHSON
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
Param.G= -9.81;          %- Definición de G

%=====
%=====
%- Sistema de referencia de ensamblado de nodos.
    NodSis = zeros(1, Param.NNodos);
    NodTens = zeros(size(RestT, 1), 1);
    for t = 1:size(RestT, 1)
        NodTens(t) = GrupoE(RestT(t, 1)).Top(RestT(t, 2),
RestT(t, 3));
    end
    NodPN = RestPN(:, 2) > 10;
    RestPN(NodPN, 2) = RestPN(NodPN, 2) - 10;
    NodPN = RestPN(NodPN, 1);
    if NRest_BR > 0
        NodBR = Rest_BR(:, 2) > 10;
        Rest_BR(NodBR, 2) = Rest_BR(NodBR, 2) - 10;
        NodBR = Rest_BR(NodBR, 1);
        NRest = sort(unique([Rest(:, 1); NodTens; NodPN;
Rest_BR(:, 4); NodBR]))');
        NodSis(NRest) = ThZ_nod(2, NRest);
    else
        NRest = sort(unique([Rest(:, 1); NodTens; NodPN]))';
        NodSis(NRest) = ThZ_nod(2, NRest);
    end
%     NRest = 1:Param.NNodos;
%     NodSis(:)= 1;
%=====
%=====

%-- Fuerzas externas

```

## ANEXOS

```
Fgrav= Fg_Tot(Param,ID,GrupoE,MatCable,Param.G);
Fpuntual = 0;
FApl = (Fgrav + Fpuntual);

%% Resolución inicial del sistema de ecuaciones
XYZ =
EQ_NR(Param,FApl,XYZ,GrupoE,ID,MatCable,ThZ_nod,NodSis,NRest)
;           % Newton-Raphson

[XYZ Error GrupoE] =
EQ_NR_L0_T(Param,XYZ,FApl,GrupoE,ID,IDLong,ID_BR,...

MatCable,RestPN,RestT,Rest_BR,ThZ_nod,NodSis,NRest);           %
Optimización Inicial.
dibujar(Param, XYZ, GrupoE, Rest_3D, 'Malla inicial')

%% OPTIMIZACIÓN DISTRIBUIDA
% Actualización de las restricciones (se eliminan las
restricciones puntuales a optimizar de manera distribuida)
Param.NRestPN = NRest_posY + NRest_phpe + NRest_phpo;
RestPN = [Rest_posY ; Rest_phpe ; Rest_phpo];
NodPN = RestPN(:, 2) > 10;
RestPN(NodPN, 2) = RestPN(NodPN, 2) - 10;
Param.NRestTot = Param.NRestPN + Param.NRestTens;
if NRest_BR > 0
    BR = zeros(7,5);
    for i=1:7
        BR(i,:) = Rest_BR(2*i-1,1:5);
    end
    Rest_BR = BR;
    Param.NRest_BR = size(Rest_BR,1);
else
end

%% === OPTIMIZACIÓN DISTRIBUIDA ===
[XYZ GrupoE ErrorF] =
EQ_ALT_OP(Param,XYZ,GrupoE,ID,IDLong,ID_BR,MatCable,Rest_3D,R
estPN,RestT,Rest_BR,ThZ_nod,NodSis,NRest);
dibujar(Param, XYZ, GrupoE, Rest_3D, 'Posición de equilibrio
final')

%== GENERACIÓN DEL FICHERO DE SALIDA
```

```
Fichero_salida = [DirR nombre '_catOPT.txt'];
escribe_salida_Ave(Fichero_salida, Param, GrupoE, XYZ,
ThZ_nod, MatCable, Rest);
```

#### Ilustración 54: Rutina 'GeneraCatenaria\_0.m'

3. **EQ\_NR.m.** Rutina que aplica el método de Newton-Raphson, hallando la configuración de equilibrio estático de la catenaria sin tener en cuenta tensiones aplicadas. Se utiliza como aproximación inicial a la solución final.

```
function XYZ = EQ_NR(Param, FApl, XYZ, GrupoE, ID, MatCable,
ThZ_nod, NodSis, NRest)

%=====
%% CALCULO DE POSICIÓN DE EQUILIBRIO ESTÁTICO (NEWTON-
RAPHSON)
%=====
% DATOS ENTRADA:
% Param.      : Parámetros globales del problema
% IterMax     : Número máximo de iteraciones Newton-Raphson
% Tol         : Tolerancia fin Newton-Raphson
% FApl        : Fuerzas externas aplicadas (inicialmente
gravitatorias)
% XYZ         : Coordenadas nodales
% GrupoE      : Datos de elementos (Incluidas longitudes)
% ID          : Definición de gdl
% MatCable    : Datos de material de cable
%=====

% --- Iteración Newton-Raphson
IterMax = Param.IterMaxNR;
Tol= Param.TolNR;
Iter= 0;
Error= 1;
NgdlT = Param.NgdlT;

% --- Sistema de referencia de ensamblado
NnodosLoc = numel(find(NodSis));

%- Vector de actualización de coordenadas
```

## ANEXOS

```

ActXYZG = ID'>0;
ActXYZG(:, NodSis==1) = 0;
SolG = sort(ID(ActXYZG'));

%%=====
%- Índices de ensamblado y matrices de cambio de coordenadas.
    [ic, ib, fc, fb] = IndEns_Fe_Tot(GrupoE, ID);
    [IC, IB, JC, JB, KC, KB] = IndEns_Ke_Tot(GrupoE, ID);
    T = TransfMat_vector(1, ThZ_nod(1, NRest));
% Generación del vector ElemRefSis:
    ElemRefSis = cell(1, length(GrupoE));
    for Igrupo = 1:length(GrupoE)
        cont = 0;
        for ele = 1:GrupoE(Igrupo).Numel
            if (NodSis(GrupoE(Igrupo).Top(ele, 1)) ||
NodSis(GrupoE(Igrupo).Top(ele, 2)))
                if (NodSis(GrupoE(Igrupo).Top(ele, 1)) &&
~NodSis(GrupoE(Igrupo).Top(ele, 2)))
                    ElemRefSis{Igrupo}(:, cont+1) = [ele;
find(NRest == GrupoE(Igrupo).Top(ele, 1)); 0];
                    cont = cont + 1;
                elseif (NodSis(GrupoE(Igrupo).Top(ele, 2)) &&
~NodSis(GrupoE(Igrupo).Top(ele, 1)))
                    ElemRefSis{Igrupo}(:, cont+1) = [ele; 0;
find(NRest == GrupoE(Igrupo).Top(ele, 2))];
                    cont = cont + 1;
                else
                    ElemRefSis{Igrupo}(:, cont+1) = [ele;
find(NRest == GrupoE(Igrupo).Top(ele, 1)); find(NRest ==
GrupoE(Igrupo).Top(ele, 2))];
                    cont = cont + 1;
                end
            end
        end
    end
end
%%=====

while (Iter<IterMax)&&(Error>Tol)
    Iter= Iter+1;

    %--- Fuerzas elásticas y totales
    [f_el_c, f_el_b] = Fe_Tot_vector(Param, XYZ, GrupoE,
MatCable, T, ElemRefSis, NRest);
    Felast = accumarray(ic, f_el_c(fc), [NgdlT 1]) +
accumarray(ib, f_el_b(fb), [NgdlT 1]);
    F= Felast - FApl;

```

```

    %--- Matriz tangente
    [k_el_b, k_el_c] = Ke_Tot_vector(Param, XYZ, GrupoE,
    MatCable, T, ElemRefSis, NRest);
    KT = sparse([IC ;IB], [JC ;JB], [k_el_c(KC); k_el_b(KB)],
    NgdlT, NgdlT);
    %--- Solución sistema ecuaciones
    Sol= KT\F;
    Error= norm(Sol'*F);
    ErrorF= norm(F);

    %--- Transformación al sistema de referencia global:
    %- Nodos ensamblados en el sistema global.
    XYZ(ActXYZG) = XYZ(ActXYZG) - Sol(SolG);

    %- Nodos ensamblados en el sistema local.
    if NnodosLoc > 0
        for n = 1:NnodosLoc
            DQe = zeros(6, 1);
            gdlg = ID(NRest(n), :);
            gdll = gdlg > 0;
            DQe(gdll) = Sol(gdlg(gdll));
            XYZ(:, NRest(n)) = XYZ(:, NRest(n)) - T(:, :, n)*DQe;
        end
    end

    Iter
    Error
    ErrorF
    clf;

end

```

**Ilustración 55: Rutina 'EQ\_NR.m'**

4. **EQ\_NR\_L0\_T.m.** Función que calcula la misma iteración de Newton-Raphson que la anterior, pero aplicando las restricciones necesarias.

```

function [XYZ ErrorF GrupoE] =
EQ_NR_L0_T(Param,XYZ,FApl,GrupoE, ID, IDLong, ID_BR, MatCable, Res
tPN, RestT, Rest_BR, ThZ_nod, NodSis, NRest)

```

## ANEXOS

```
=====  
%% CALCULO DE POSICIÓN DE EQUILIBRIO ESTÁTICO CON  
RESTRICCIONES Y CALCULO DE LONGITUDES INICIALES DE ELEMENTOS  
=====  
% DATOS ENTRADA:  
% Param.      : Parámetros globales del problema  
% XYZ         : Coordenadas nodales  
% GrupoE      : Datos de elementos  
% ThZ_nod     : Datos de la orientación y sistema de  
coordenadas de nodos.  
% NodSis      : Información sobre el sistema de coord. en el  
que se ensambla cada nodo.  
% NRest       : Número de nodo que se ensambla en el sistema  
local.  
% ID          : Definición de gdl  
% IDLong      : Definición de longitudes a calcular  
% ID_BR       : Definición de las variables de diseño en  
coordenadas de nodos del brazo de registro  
% MatCable    : Datos de material de cable  
% RestPN      : Definición de restricciones de posición de  
los nodos  
% RestT       : Definición de restricciones en tensión de  
cable  
% Rest_BR     : Definición de restricciones de posición de los  
nodos del brazo de registro  
%  
% DATOS SALIDA  
% ErrorF      : Error en el cálculo  
% XYZ         : Coordenadas de posición de nodos  
optimizadas  
% GrupoE().Long : Longitudes de elementos optimizadas  
=====  
  
%=== Indicador de error en el cálculo  
ErrorF= 0;  
  
%=== Variables  
NgdlT= Param.NgdlT;  
NRestTot= Param.NRestTot;  
NRest_BR= Param.NRest_BR;  
  
IterMax = Param.IterMaxNR_L0;  
Tol_L0  = Param.TolNR_L0;  
Tol_q   = Param.TolNR;
```



```

%-- Longitudes iniciales
for iGrupo = 1:Param.NGruposE
    GrupoE(iGrupo).L_inicial = GrupoE(iGrupo).Long;
end

%== Numeración de longitudes a calcular
%- Vector de actualización de longitudes
ActL= find(IDLong>0);
NumLeD= length(ActL);
Param.NumLeD= NumLeD;
IDLong(ActL)= 1:Param.NumLeD;
% Factor de longitud. Inicialmente será 1.
FactorLong = ones(NumLeD,1)';
%--- Error si num restricciones <> num longitudes a calcular
if NRestTot ~= NumLeD
    MError= 'EQ_NR_L0_T: Numero de restricciones <> Numero de
longitudes a calcular';
    FError(MError);
end

%- Vector de actualización de coordenadas
ActXYZG = ID'>0;
ActXYZG(:, NodSis==1) = 0;
SolG = sort(ID(ActXYZG'));

%%=====
=====%%
%- Índices de ensamblado y matrices de cambio de coordenadas.
[ic, ib, fc, fb] = IndEns_Fe_Tot(GrupoE, ID);
[IC, IB, JC, JB, KC, KB] = IndEns_Ke_Tot(GrupoE, ID);
T = TransfMat_vector(1, ThZ_nod(1, NRest));
% --- Sistema de referencia de ensamblado
NnodosLoc = numel(find(NodSis));

% --- Sistema de referencia para nodos del brazo de registro.
if size(Rest_BR, 2) > 1
    NNodosBR = sort(unique(Rest_BR(:, 4)));
else
    NNodosBR = 0;
end

```

## ANEXOS

```
% Generación del vector ElemRefSis:
ElemRefSis = cell(1, length(GrupoE));
for Igrupo = 1: length(GrupoE)
    cont = 0;
    for ele = 1:GrupoE(Igrupo).Numel
        if (NodSis(GrupoE(Igrupo).Top(ele, 1)) ||
NodSis(GrupoE(Igrupo).Top(ele, 2)))
            if (NodSis(GrupoE(Igrupo).Top(ele, 1)) &&
~NodSis(GrupoE(Igrupo).Top(ele, 2)))
                ElemRefSis{Igrupo}(:, cont+1) = [ele;
find(NRest == GrupoE(Igrupo).Top(ele, 1)); 0];
                cont = cont + 1;
            elseif (NodSis(GrupoE(Igrupo).Top(ele, 2)) &&
~NodSis(GrupoE(Igrupo).Top(ele, 1)))
                ElemRefSis{Igrupo}(:, cont+1) = [ele; 0;
find(NRest == GrupoE(Igrupo).Top(ele, 2))];
                cont = cont + 1;
            else
                ElemRefSis{Igrupo}(:, cont+1) = [ele;
find(NRest == GrupoE(Igrupo).Top(ele, 1)); find(NRest ==
GrupoE(Igrupo).Top(ele, 2))];
                cont = cont + 1;
            end
        end
    end
end

%%=====

%% === ITERACIÓN NEWTON-RAPHSON CON OPTIMIZACIÓN DE
LONTIGUDES
Iter= 0;
Error_L0= 2*Tol_L0;
Error_q = 2*Tol_q;

while (Iter<=IterMax)&&(Error_L0>Tol_L0)&&(Error_q>Tol_q)

%--- Fuerzas elásticas y totales
[f_el_c, f_el_b] = Fe_Tot_vector(Param, XYZ, GrupoE,
MatCable, T, ElemRefSis, NRest);
Felast = accumarray(ic, f_el_c(fc), [NgdlT 1]) +
accumarray(ib, f_el_b(fb), [NgdlT 1]);
F= Felast - FApl;

%--- Matriz tangente
```

```

[k_el_b, k_el_c] = Ke_Tot_vector(Param, XYZ, GrupoE,
MatCable, T, ElemRefSis, NRest);

%=== Matriz derivada de fuerzas elásticas y totales con
respecto a longitudes
DL_Felast=
dFedL_Tot(Param,XYZ,ID,GrupoE,MatCable,IDLONG,NodSis,T,ElemRe
fSis);
DL_FGrav = dFgdL_Tot(Param,ID,GrupoE,MatCable,IDLONG);

%=== Matriz derivada de fuerzas elásticas y totales con
respecto a las coordenadas de diseño del brazo de registro
DqBR_Felast =
dFedq_BR_Tot(Param,XYZ,GrupoE,MatCable,ID_BR,ID,NodSis,T,Elem
RefSis);

%=== RESTRICCIONES EN TENSIÓN DE CABLE
[RT DL_RT Dq_RT] =
EQ_NR_L0_RT(Param,XYZ,GrupoE, ID, IDLONG,MatCable,RestT,NodSis,
T,ElemRefSis);

%=== RESTRICCIONES EN POSICIÓN DE NODOS
[RN Dq_RN Dq_BR_RN] =
EQ_NR_L0_RN(Param,XYZ, ID, ID_BR, RestPN, ThZ_nod, NodSis);

%=== RESTRICCIONES EN POSICIÓN DE NODOS DEL BRAZO DE REGISTRO
[RBR DqBR_RBR Dq_RBR] =
EQ_NR_L0_RBR(Param,XYZ, ID, ID_BR, Rest_BR, ThZ_nod, NodSis);

%=== SISTEMA DE ECUACIONES
Mat = sparse([[IC;IB]' DL_Felast(1,:) DL_FGrav(1,:)
DqBR_Felast(1,:) Dq_RT(1,:) DL_RT(1,:) Dq_RN(1,:)
Dq_BR_RN(1,:) Dq_RBR(1,:) DqBR_RBR(1:)],...
[[JC;JB]' DL_Felast(2,:) DL_FGrav(2,:)
DqBR_Felast(2,:) Dq_RT(2,:) DL_RT(2,:) Dq_RN(2,:)
Dq_BR_RN(2,:) Dq_RBR(2,:) DqBR_RBR(2:)],...
[[k_el_c(KC);k_el_b(KB)]' DL_Felast(3,:) -
DL_FGrav(3,:) DqBR_Felast(3,:) Dq_RT(3,:) DL_RT(3,:)
Dq_RN(3,:) Dq_BR_RN(3,:) Dq_RBR(3,:) DqBR_RBR(3:)],...
(Ngd1T+NumLeD+NRest_BR),(Ngd1T+NumLeD+NRest_BR));
Vec= [F ; RT ; RN ; RBR];

```

## ANEXOS

```
Sol= Mat\Vec;
IncL= Sol(NgdlT+1:NgdlT+NumLeD); % Incremento de f, factor
multiplicativo de
                                %las longitudes
FactorLong = FactorLong - Sol(NgdlT+1:NgdlT+NumLeD)';
Sol_XYZ= Sol(1:NgdlT);
Sol_BR = Sol(NgdlT+NumLeD+1:end);

%=== ACTUALIZACION DE LONGITUDES
for IGrupo = 1:Param.NGruposE
    for Ie = 1:GrupoE(IGrupo).Numel
        if (IDLong(GrupoE(IGrupo).GrupoLong(Ie)))
            GrupoE(IGrupo).Long(Ie) = ...

GrupoE(IGrupo).L_inicial(Ie)*FactorLong(IDLong(GrupoE(IGrupo)
.GruposLong(Ie)));
        end
    end
end

%=== ACT. COORDENADAS. CAMBIO AL SISTEMA DE REFERENCIA GLOBAL
%- Nodos ensamblados en el sistema global.
XYZ(ActXYZG) = XYZ(ActXYZG) - Sol(SolG);

%- Nodos ensamblados en el sistema local.
if NnodosLoc > 0
    for n = 1:NnodosLoc
        DQe = zeros(6, 1);
        gdlg = ID(NRest(n), :);
        gdll = gdlg > 0;
        DQe(gdll) = Sol(gdlg(gdll));
        XYZ(:, NRest(n)) = XYZ(:, NRest(n)) - T(:, :, n)*DQe;
    end
end

%=== ACTUALIZACION DE VARIABLES DE DISEÑO DEL BRAZO DE
REGISTRO
if NNodosBR ~= 0
for n = 1:length(NNodosBR)
    if NodSis(NNodosBR(n)) == 1
        gdlg = ID_BR(NNodosBR(n), :);
        gdll = gdlg > 0;
        DQe = zeros(6, 1);
        DQe(gdll) = Sol_BR(gdlg(gdll));
```

```

        XYZ(:, NNodosBR(n))= XYZ(:, NNodosBR(n)) -
T(:, :, n)*DQe;
    else
        gdlg = ID_BR(NNodosBR(n), :);
        gdll = gdlg > 0;
        XYZ(gdll, NNodosBR(n))= XYZ(gdll, NNodosBR(n)) -
Sol_BR(gdlg(gdll));
    end
end
end

%=== PARAMETROS DE ITERACION
Iter= Iter + 1;
% Error_L0= max(abs(Incf));
Error_L0= max(abs(Incl));
Error_q= max(abs(Sol_XYZ));
Error_qBR= max(abs(Sol_BR));

fprintf('Error_L0= %e\n',Error_L0)
fprintf('Error_q = %e\n',Error_q)
fprintf('Error_qBR = %e\n',Error_qBR)
fprintf('Incl: ')
fprintf('%e ',Incl')
fprintf('\n\n')

end

```

**Ilustración 56: Rutina 'EQ\_NR\_L0\_T.m'**

5. **EQ\_ALT\_OP.m.** Cálculo de la posición de equilibrio estático mediante optimización de la longitud de las péndolas.

```

function [XYZ GrupoE ErrorF] =
EQ_ALT_OP(Param,XYZ,GrupoE, ID, IDLong, ID_BR, MatCable, Rest_3D, R
estPN, RestT, Rest_BR, ThZ_nod, NodSis, NRest)

%=====
%% CALCULO DE POSICIÓN DE EQUILIBRIO ESTÁTICO (NEWTON-
RAPHSON) Y DE LA LONGITUD DE LAS PÉNDOLAS PARA CONSEGUIR
MINIMIZAR LA DIFERENCIA EN LA POSICIÓN VERTICAL DEL CABLE DE
CONTACTO
%=====

```

## ANEXOS

```
% DATOS ENTRADA:
% Param. : Parámetros del problema (Dimensión, N° nodos,
N° gdl,...)
% XYZ : Coordenadas nodales
% GrupoE : Topología de la malla, longitudes de
elemento,...
% ID : Definición de gdl
% IDLong : Definición de longitudes a calcular como
variables de diseño
% ID_BR : Definición de las variabes de diseño del brazo
de registro
% MatCable: Datos de material de cable
% Rest_3D : Condiciones de contorno de Dirichlet.
% RestPN : Definición de restricciones en posición de
nodos
% RestT : Definición de restricciones en tensión de cable
% Rest_BR : Definición de restricciones de posición de los
nodos del brazo de registro
% ThZ_nod : Datos de la orientación y sistema de
coordenadas de nodos.
% NodSis : Información sobre el sistema de coord. en el
que se ensambla cada nodo.
% NRest : Número de nodo que se ensambla en el sistema
local.
%
% DATOS DE SALIDA:
% Los mismos que de entrada, pero coordenadas XYZ y
longitudes optimizadas en equilibrio estático.
% ErrorF : Error en el cálculo
%=====

%=== Indicador de error en el cálculo
ErrorF= 0;

%=== Variables
NgdlT = Param.NgdlT;
IterMax = Param.IterMaxNR_L0;
Tol_L0 = Param.TolNR_L0;
Tol_q = Param.TolNR;
NRestTot= Param.NRestTot;
N_BR = Param.N_BR;
NRest_BR = Param.NRest_BR;

%-- Longitudes iniciales
for iGrupo = 1:Param.NGruposE
```

```

GrupoE(iGrupo).L_inicial = GrupoE(iGrupo).Long;
end

%== Numeración de longitudes a calcular
%- Vector de actualización de longitudes
ActL= find(IDLong>0);
NumLeD= length(ActL);
Param.NumLeD= NumLeD;
IDLong(ActL)= 1:Param.NumLeD;
% Factor de longitud. Inicialmente será 1.
FactorLong = ones(NumLeD,1)';

%- Vector de actualización de coordenadas
NnodosLoc = numel(find(NodSis));
ActXYZ = ID' > 0;
ActXYZG = ActXYZ;
ActXYZG(:, NodSis == 1) = 0;
SolG = sort(ID(ActXYZG'));

%- Vector de actualización de variables de diseño de posición
de nodos del BR
Act_BR= ID_BR' > 0;
Act_BRG = Act_BR;
Act_BRG(:, NodSis == 1) = 0;

% Datos para definir la posición vertical del cable de
contacto:
% Número de puntos en el interior de cada elemento del cable
de contacto donde se evalúa la altura del cable
AltOp.NAltCont = 20;
% Constante de penalización
AltOp.kn = 1;
% Constante igual a la altura óptima
AltOp.HOpt = 5.3;

% Definición de los grupos del cable de contacto:
% Grupo Elemento_Inicial Elemento_Final
GruposCalcH = [2 11 GrupoE(2).Numel-11];

% Ordenación de las variables:
% 1 - Posición de los nodos: XYZ
% 2 - Longitud de los elementos (incluye las péndolas):

```

## ANEXOS

```
GrupoE(Igrupo).Long
% 3 - Posición de los nodos del brazo de registro (BR)
% 4 - Multiplicadores de Lagrange para garantizar el
equilibrio de fuerzas: MultFuerzas
    MultFuerzas = zeros(6,Param.NNodos);
% 5 - Multiplicadores de Lagrange para garantizar la
tensión de tracción en los cables sustentador y de contacto
    if RestT ~= 0
        NRestT = size(RestT,1);
        MultTension = zeros(NRestT,1);
    else
        NRestT = 0;
    end
% 6 - Multiplicadores de Lagrange para garantizar las
restricciones puntuales de posición del nodo
    if RestPN ~= 0
        NRestPN = size(RestPN,1);
        MultPN = zeros(NRestPN,1);
    else
        NRestPN = 0;
    end
% 7 - Multiplicadores de Lagrange para garantizar el
equilibrio de la posición de los nodos del brazo de registro
    MultBR = zeros(Param.NRest_BR,1);

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%% == ITERACIÓN NEWTON-RAPHSON
Iter= 0;
Error_L0= 2*Tol_L0;
Error_q = 2*Tol_q;

for Iter=1:10
    Pend_ini = GrupoE(3).Long;
    %%= MONTAR EL RESIDUO DE LA ECUACIÓN Y LA MATRIZ TANGENTE

    %% 1 - Términos derivados de la definición de altura óptima
    % - ResH_q : Variación del funcional (parte que
define la altura óptima) respecto de las coordenadas.
    % - ResH_L : Variación del funcional (parte que
define la altura óptima) respecto de la longitud.
    % - ResH_br : Variación del funcional (parte que
define la altura óptima) respecto de las coordenadas del
brazo de registro.
```



```

%      - TanH_qq : Contribución a la matriz tangente.
%      - TanH_qL : Contribución a la matriz tangente.
%      - TanH_LL : Contribución a la matriz tangente.

[ResH_q ResH_L TanH_qq TanH_qL TanH_LL] =
ALT_OP_H(Param, ID, XYZ, GrupoE, IDLong, GruposCalcH, AltOp, ThZ_nod
, NodSis, NRest);
TanH_qq = sparse(TanH_qq);
TanH_qL = sparse(TanH_qL);
TanH_LL = sparse(TanH_LL);

%% 2 - Términos derivados del equilibrio de fuerzas
internas y externas
%      - ResEF_q : Variación respecto de las coordenadas:
Kt'*MultFuerzas
%      - ResEF_L : Variación de la ec. de equilibrio
respecto de la longitud
%      - ResEF_br: Variación de la ec. de equilibrio
respecto de las coordenadas del brazo de registro
%      - ResEF      : Fuerzas internas menos fuerzas externas
%      - TanEF_qq TanEF_qL TanEF_qbr TanEF_qmef TanEF_LL
TanEF_brL
%      TanEF_Lmef TanEF_brbr TanEF_brmeff: Términos de
contribución a la matriz tangente.

[ResEF_q ResEF_L ResEF_br ResEF TanEF_qq TanEF_qL
TanEF_qbr TanEF_qmef TanEF_LL TanEF_brL TanEF_Lmef TanEF_brbr
TanEF_brmeff] =
ALT_OP_EF(Param, ID, XYZ, MultFuerzas, GrupoE, IDLong, ID_BR, MatCab
le, ThZ_nod, NodSis, NRest);

TanEF_qq = sparse(TanEF_qq);
TanEF_qL = sparse(TanEF_qL);
TanEF_qbr = sparse(TanEF_qbr);
TanEF_qmef = sparse(TanEF_qmef);
TanEF_LL = sparse(TanEF_LL);
TanEF_brL = sparse(TanEF_brL);
TanEF_Lmef = sparse(TanEF_Lmef);
TanEF_brmeff = sparse(TanEF_brmeff);

%% 3 - Términos derivados del brazo de registro
%      - ResBR_q: Variación respecto de las

```

```

coordenadas:
    %      - ResBR   : Ecuación de equilibrio de los nodos
del brazo de registro
    %      - TanBR_qmbr: Término de contribución a la
matriz tangente.

    if (Param.NRest_BR>0)

        ResBR = zeros(NRest_BR,1);
        ResBR_q = zeros(NgdlT,1);
        ResBR_br = zeros(N_BR,1);
        TanBR_qmbr = zeros(NgdlT,NRest_BR);
        TanBR_brnbr = zeros(N_BR,NRest_BR);

        if NRest_BR ~= 0
            for IRest_BR= 1:NRest_BR
                Inodo= Rest_BR(IRest_BR,1);
                Icoor= Rest_BR(IRest_BR,2);
                Valor = Rest_BR(IRest_BR,3);
                if NodSis(Inodo) == 1
                    T = TransfMat(2, ThZ_nod(1, Inodo));
                    xyz = T'*XYZ(1:3, Inodo);
                    %- Valor de restricción
                    ResBR(IRest_BR)= xyz(Icoor) - Valor;
                    %- Derivada de restricción con
respecto a coordenadas
                    gdl = ID(Inodo,Icoor);
                    ResBR_q(gdl) = MultBR(IRest_BR)*1;
                    TanBR_qmbr(gdl,IRest_BR) = 1;
                else
                    %- Valor de restricción
                    ResBR(IRest_BR)= XYZ(Icoor, Inodo) -
Valor;
                    %- Derivada de restricción con
respecto a coordenadas
                    gdl = ID(Inodo,Icoor);
                    ResBR_q(gdl) = MultBR(IRest_BR)*1;
                    TanBR_qmbr(gdl,IRest_BR) = 1;
                end
            end
        end
    end

    if (NRestTot > 0)

```

```

%% 4 - Términos derivados de las tensiones de tracción en
los cables
%      - ResTC_q: Variación respecto de las coordenadas:
%      - ResTC_L: Variación de la ec respecto de la
longitud
%      - ResTC: Ecuación de tensión en el cable
%      - TanTC_qq TanTC_qL TanTC_qmtc TanTC_LL TanTC_Lmtc:
Términos de contribución a la matriz tangente.

    if (NRestT > 0)
        [ResTC_q ResTC_L ResTC TanTC_qq TanTC_qL
TanTC_qmtc TanTC_LL TanTC_Lmtc] =
ALT_OP_TC(Param, ID, XYZ, GrupoE, MultTension, IDLong, MatCable, Res
tT, ThZ_nod, NodSis, NRest);

        Residuo = [ResH_q + ResEF_q + ResTC_q +
ResBR_q; ResH_L + ResEF_L + ResTC_L; ResEF_br; ResEF; ResTC;
ResBR];

        Tan = sparse([ TanH_qq + TanEF_qq + TanTC_qq
TanH_qL + TanEF_qL + TanTC_qL TanEF_qbr TanEF_qmef
TanTC_qmtc TanBR_qmbr; TanH_qL' + TanEF_qL' + TanTC_qL'
TanH_LL + TanEF_LL + TanTC_LL TanEF_brL' TanEF_Lmef
TanTC_Lmtc zeros(NumLeD, NRest_BR); TanEF_qbr' TanEF_brL
TanEF_brbr TanEF_brmeff zeros(N_BR, NRestT)
zeros(N_BR, NRest_BR); TanEF_qmef' TanEF_Lmef' TanEF_brmeff'
zeros(NgdlT, NgdlT) zeros(NgdlT, NRestT)
zeros(NgdlT, NRest_BR); TanTC_qmtc' TanTC_Lmtc'
zeros(NRestT, N_BR) zeros(NRestT, NgdlT) zeros(NRestT, NRestT)
zeros(NRestT, NRest_BR); TanBR_qmbr' zeros(NRest_BR, NumLeD)
zeros(NRest_BR, N_BR) zeros(NRest_BR, NgdlT)
zeros(NRest_BR, NRestT) zeros(NRest_BR, NRest_BR)]);
    end

%% 5 - Términos derivados de las posiciones de
ciertos nodos
%      - ResPN_q: Variación respecto de las
coordenadas:
%      - ResPN: Ecuación de equilibrio de los nodos
restringidos
%      - TanPN_qmpn: Término de
contribución a la matriz tangente.

```

```

if (NRestPN > 0)
    ResPN_q = zeros(NgdlT,1);
    ResPN = zeros(NRestPN,1);
    TanPN_qmpn = zeros(NgdlT,NRestPN);
    for i=1:NRestPN
        Nodo = RestPN(i,1);
        gdl = RestPN(i,2);
        if NodSis(Nodo) == 1
            T = TransfMat(2, ThZ_nod(1, Nodo));
            xyz = T'*XYZ(1:3, Nodo);
            Valor = RestPN(i,3);
            PosiGlobal = ID(Nodo,gdl);
            ResPN(i) = (xyz(gdl) - Valor);
        else
            Valor = RestPN(i,3);
            PosiGlobal = ID(Nodo,gdl);
            ResPN(i) = (XYZ(gdl,Nodo) - Valor);
        end

        ResPN_q(PosiGlobal) = MultPN(i)*1e6;
        TanPN_qmpn(PosiGlobal,i) = 1e6;
    end

    Residuo = [ResH_q + ResEF_q + RestC_q + ResPN_q
+ ResBR_q; ResH_L + ResEF_L + RestC_L; ResEF_br; ResEF;
RestC;.ResPN; ResBR];

    Tan = sparse([ TanH_qq + TanEF_qq + TanTC_qq
TanH_qL + TanEF_qL + TanTC_qL TanEF_qbr TanEF_qmef
TanTC_qmtc TanPN_qmpn TanBR_qmbr; TanH_qL' + TanEF_qL' +
TanTC_qL' TanH_LL + TanEF_LL + TanTC_LL TanEF_brL'
TanEF_lmef TanTC_lmtc zeros(NumLeD,NRestPN)
zeros(NumLeD,NRest_BR); .TanEF_qbr' TanEF_brL TanEF_brbr
TanEF_brmef zeros(N_BR,NRestT) zeros(N_BR,NRestPN)
zeros(N_BR,NRest_BR); TanEF_qmef' TanEF_lmef' TanEF_brmef'
zeros(NgdlT,NgdlT) zeros(NgdlT,NRestT) zeros(NgdlT,NRestPN)
zeros(NgdlT,NRest_BR); TanTC_qmtc' TanTC_lmtc'
zeros(NRestT,N_BR) zeros(NRestT,NgdlT)
zeros(NRestT,NRestT) zeros(NRestT,NRestPN)
zeros(NRestT,NRest_BR); TanPN_qmpn' zeros(NRestPN,NumLeD)
zeros(NRestPN,N_BR) zeros(NRestPN,NgdlT)

```

```

zeros(NRestPN,NRestT) zeros(NRestPN,NRestPN)
zeros(NRestPN,NRest_BR); TanBR_qmbr' zeros(NRest_BR,NumLeD)
zeros(NRest_BR,N_BR) zeros(NRest_BR,NgdlT)
zeros(NRest_BR,NRestT) zeros(NRest_BR,NRestPN)
zeros(NRest_BR,NRest_BR)];
    end

else

    Residuo = [ResH_q + ResEF_q + ResBR_q ; ...
              ResH_L + ResEF_L ; ...
              ResEF_br; ...
              ResEF ;...
              ResBR];

    Tan = [ TanH_qq + TanEF_qq      TanH_qL + TanEF_qL
TanEF_qbr TanEF_qmef TanBR_qmbr ; ..TanH_qL'+ TanEF_qL'
TanH_LL + TanEF_LL      TanEF_brL' TanEF_Lmef
zeros(NumLeD,NRest_BR); TanEF_qbr' TanEF_brL TanEF_brbr
TanEF_brmeff zeros(N_BR,NRest_BR); .TanEF_qmef' TanEF_Lmef'
TanEF_brmeff' ;TanBR_qmbr' zeros(NRest_BR,NumLeD)
eros(NRest_BR,N_BR)];

    end

%% === SISTEMA DE ECUACIONES
Sol= Tan\Residuo;
ErrorSE=Residuo-Tan*Sol;
if norm(ErrorSE) > 1e-6
    disp('Error en el sistema de ecuaciones...')
    ErrorSE = norm(ErrorSE)
    pause
end

IncXYZ= Sol(1:NgdlT);
Incl= Sol(NgdlT+1:NgdlT+NumLeD); % Incremento de f,
factor multiplicativo de las longitudes

if Param.N_BR ~= 0

```

```

    IncBR = Sol(NgdlT+NumLeD+1:NgdlT+NumLeD+N_BR);
end
FactorLong = FactorLong - IncL';
IncMF= Sol(NgdlT+NumLeD+N_BR+1:NgdlT+NumLeD+N_BR+NgdlT);
IncMBR =
Sol(NgdlT+NumLeD+N_BR+NgdlT+NRestT+NRestPN+1:NgdlT+NumLeD+N_B
R+NgdlT+NRestT+NRestPN+NRest_BR);

%=== ACTUALIZACION DE LONGITUDES
for IGrupo = 1:Param.NGruposE
    for Ie = 1:GrupoE(IGrupo).Numel
        if (IDLong(GrupoE(IGrupo).GrupoLong(Ie)))
            GrupoE(IGrupo).Long(Ie) = ...

GrupoE(IGrupo).L_inicial(Ie)*FactorLong(IDLong(GrupoE(IGrupo)
.GruposLong(Ie)));
        end
    end
end
%=== ACTUALIZACION DE COORDENADAS
%- Coordenadas Globales
XYZ(ActXYZG)= XYZ(ActXYZG) - IncXYZ(SolG);

%- Sistema de referencia de nodos.
if NnodosLoc > 0
    for n = 1:NnodosLoc
        DQe = zeros(6, 1);
        gdlg = ID(NRest(n), :);
        gdll = gdlg > 0;
        DQe(gdll) = IncXYZ(gdlg(gdll));
        T = TransfMat(1, ThZ_nod(1, NRest(n)));
        XYZ(:, NRest(n)) = XYZ(:, NRest(n)) - T*DQe;
    end
end

%=== ACTUALIZACION DE VARIABLES DE DISEÑO DEL BRAZO DE
REGISTRO
if Param.N_BR ~= 0
    for br = 1:size(Rest_BR, 1)
        if NodSis(Rest_BR(br, 1)) == 1
            Inodo = Rest_BR(br, 4);
            Icoor = [2 3];
            DQe = zeros(6, 1);
            DQe(Icoor) = IncBR(2*br-1:2*br);
            T = TransfMat(1, ThZ_nod(1, Inodo));

```

```

        XYZ(:, Inodo) = XYZ(:, Inodo) - T*DQe;
    else
        Inodo = Rest_BR(br, 4);
        Icoor = [2 3];
        XYZ(Icoor, Inodo) = XYZ(Icoor, Inodo) -
IncBR(2*br-1:2*br);
    end
end
end

%=== ACTUALIZACION DE MULTIPLICADORES DE LA ECUACIÓN DE
EQUILIBRIO DE FUERZAS
%- Sistema de referencia global.
MultFuerzas(ActXYZG) = MultFuerzas(ActXYZG) -
IncMF(SolG);

%- Sistema de referencia de nodos.
if NnodosLoc > 0
    for n = 1:NnodosLoc
        DQe = zeros(6, 1);
        gdlg = ID(NRest(n), :);
        gdll = gdlg > 0;
        DQe(gdll) = IncMF(gdlg(gdll));
        T = TransfMat(1, ThZ_nod(1, NRest(n)));
        MultFuerzas(:, NRest(n)) = MultFuerzas(:,
NRest(n)) - T*DQe;
    end
end

% %=== ACTUALIZACION DE MULTIPLICADORES DEL BRAZO DE
REGISTRO
MultBR = MultBR - IncMBR;

if (NRestTot>0)
    if (NRestT>0)
        IncMT=
Sol(NgdlT+NumLeD+N_BR+NgdlT+1:NgdlT+NumLeD+N_BR+NgdlT+NRestT)
;
        %=== ACTUALIZACION DE MULTIPLICADORES QUE IMPONEN
TENSIÓN EN EL CABLE
        MultTension = MultTension - IncMT;
    end
    if (NRestPN>0)
        IncMPN =
Sol(NgdlT+NumLeD+N_BR+NgdlT+NRestT+1:NgdlT+NumLeD+N_BR+NgdlT+

```

## ANEXOS

```
NRestT+NRestPN);
    %=== ACTUALIZACION DE MULTIPLICADORES QUE IMPONEN
    POSICIÓN DE NODO
    MultPN = MultPN - IncMPN;
    end
end

%% === PARAMETROS DE ITERACION
Error_L0= max(abs(IncL));
Error_q= max(abs(IncXYZ));
Error_BR= max(abs(IncBR));
Error_MF= max(abs(IncMF));
Error_MBR= max(abs(IncMBR));

if (NRestTot>0)
    ResQ = ResH_q + ResEF_q + ResBR_q;
    ResL = ResH_L + ResEF_L;
    ResBR = ResEF_br;
    if (NRestT>0)
        ResQ = ResQ + ResTC_q;
        ResL = ResL + ResTC_L;
        ResBR = ResBR;
        ResiduoTC = max(abs(ResTC));
        Error_TC= max(abs(IncMT));
    end
    if (NRestPN>0)
        ResQ = ResQ + ResPN_q;
        ResBR = ResBR;
        ResiduoPN = max(abs(ResPN));
        Error_PN = max(abs(IncMPN));
    end
    ResiduoQ = max(abs(ResQ));
    ResiduoEF = max(abs(ResEF));
    ResiduoL = max(abs(ResL));
    ResiduoBR = max(abs(ResBR));
else
    ResiduoQ = max(abs(ResH_q+ResEF_q));
    ResiduoL = max(abs(ResH_L+ResEF_L));
    ResiduoEF = max(abs(ResEF));
    ResiduoBR = max(abs(ResEF_br));
end

Iter
fprintf('Error_L0= %e\n',Error_L0)
```



```

fprintf('Error_q = %e\n',Error_q)
fprintf('Error_MF = %e\n',Error_MF)
fprintf('Error_BR = %e\n',Error_BR)
if (NRestT>0)
    fprintf('Error_TC = %e\n',Error_TC)
end
if (NRestPN>0)
    fprintf('Error_PN = %e\n',Error_PN)
end
fprintf('Residuo_Q = %e\n',ResiduoQ)
fprintf('Residuo_L = %e\n',ResiduoL)
fprintf('Residuo_EF = %e\n',ResiduoEF)
fprintf('Residuo_BR = %e\n',ResiduoBR)
if (NRestT>0)
    fprintf('Residuo_TC = %e\n',ResiduoTC)
end
if (NRestPN>0)
    fprintf('Residuo_PN = %e\n',ResiduoPN)
end
fprintf('  ')

%=== DIBUJO
clf;
dibujar(Param, XYZ, GrupoE, Rest_3D, 'Longitudes
iniciales : Newton-Raphson')
grid on
%      pause

AL_pend(:,Iter) = abs(GrupoE(3).Long-Pend_ini);

end

```

Ilustración 57: Rutina 'EQ\_ALT\_OP.m'