Universitat Politècnica de València

Departamento de Matemática Aplicada

Estudio de la clase de matrices $\{K, s+1\}$-potentes

RESUMEN de TESIS DOCTORAL

Presentada por:

José Óscar Romero Martínez

Dirigida por:

Néstor Thome Coppo

Leila Lebtahi

Enero de 2012

Resumen

Esta tesis doctoral se encuadra dentro del Análisis Matricial, y dentro de esta área se estudia un tipo particular de matrices. Se ha realizado un análisis tanto desde el punto de vista de sus caracterizaciones, pasando por el establecimiento de relaciones con diferentes tipos de matrices complejas conocidas en la literatura, hasta llegar a obtenerlas de manera efectiva mediante diferentes métodos numéricos. A continuación se indican los problemas concretos que han sido desarrollados en esta tesis así como los resultados conseguidos.

En primer lugar, se ha introducido una nueva clase de matrices denominada $\{K, s+1\}$-potente. Se puede observar que las matrices $\{K, s+1\}$-potentes contienen como casos particulares las matrices $\{s + 1\}$-potentes, periódicas, centrosimétricas, mirrorsimétricas, circulantes, etc. Estos últimos tipos de matrices son de gran utilidad en diferentes áreas tales como transmisión de líneas multiconductor, antenas, ondas, sistemas eléctricos y mecánicos, y teoría de la comunicación, entre otros.

Para la clase de matrices $\{K, s+1\}$-potentes se ha realizado el análisis de su existencia. También, se han obtenido diferentes propiedades relacionadas

con la suma, el producto, la inversa, la adjunta, la semejanza y la suma directa.

Los resultados que permiten el posterior desarrollo de la tesis vienen dados por las caracterizaciones de las matrices $\{K, s+1\}$-potentes. Estas condiciones necesarias y suficientes se han obtenido desde distintos puntos de vista: usando teoría espectral, potencias de matrices, inversas generalizadas, y también mediante una representación por bloques de una matriz de índice 1. Este hecho permite abordar los casos particulares anteriormente citados a partir de un nuevo enfoque.

Posteriormente se ha relacionado la clase de matrices introducida con diferentes clases de matrices con coeficientes complejos: matrices $\{K\}$-hermíticas, proyectores $\{s+1\}$-generalizados, matrices unitarias, matrices normales, centrosimétricas $\{K\}$-generalizadas, etc. Se han obtenido una serie de inclusiones entre los conjuntos que las definen, y se ha observado que la mayoría de estas inclusiones son estrictas mediante la construcción de los contraejemplos adecuados.

Con la intención de construir de manera efectiva matrices de esta clase se han diseñado algoritmos tanto en el caso s mayor o igual a 1 y el caso $s = 0$. Mediante su implementación en MATLAB se ha podido analizar su efectividad así como sus prestaciones.

Por otra parte, para los casos s mayor o igual a 1 y $s = 0$ se ha resuelto el problema inverso de calcular las matrices involutivas K que satisfacen la ecuación matricial que se está tratando. Estos algoritmos se han construido a partir de la teoría espectral, concretamente mediante los idempotentes principales de la matriz original.

La tesis termina con una extensión del estudio anterior al caso de matrices $\{K, -(s+1)\}$-potentes, completando así todos los posibles valores enteros de s. Como antes, en este último análisis, se han distinguido los casos $s = 0$ y s mayor o igual a 1.

Esta tesis está organizada en 5 capítulos. El Capítulo 1 contiene una introducción donde se detallan algunos antecedentes del tema y se introducen las notaciones necesarias. El Capítulo 2 contiene la existencia y propiedades de las matrices $\{K, s+1\}$-potentes, siendo su principal resultado el Teorema 2.2 en el que se presentan diferentes caracterizaciones de las mismas. En el Capítulo 3 se introducen una serie de conjuntos de matrices y se establecen relaciones con las matrices $\{K, s+1\}$-potentes utilizando las caracterizaciones obtenidas en el Capítulo 2. En el Capítulo 4 se desarrollan diferentes algoritmos para el cálculo de las matrices $\{K, s+1\}$-potentes. Primero se construyen matrices en esta clase a partir de información espectral de la matriz involutiva K. Más ejemplos se pueden construir utilizando este algoritmo, uno auxiliar que permite hallar otra matriz $\{K, s+1\}$-potente, y el análisis de combinaciones lineales. En la última parte del Capítulo 4 se analiza el problema inverso al planteado en la memoria y se dan una serie de ejemplos numéricos. En el Capítulo 5 se extiende el tipo de matrices introducidas de modo que se abarcan todos los casos para los valores de s enteros. La tesis finaliza con un anexo en el que se indican las conclusiones finales y las líneas futuras.

Resum

Aquesta tesi doctoral s'enquadra dins de l'Anàlisi Matricial, i dins d'aquesta àrea s'estudia un tipus particular de matrius. S'ha realitzat una anàlisi tant des del punt de vista de les seues caracteritzacions, passant per l'establiment de relacions amb diferents tipus de matrius complexes conegudes en la literatura, fins a arribar a obtindre de manera efectiva per mitjà de diferents mètodes numèrics. A continuació s'indiquen els problemes concrets que s'han desenvolupat en aquesta tesi així com els resultats aconseguits.

En primer lloc, s'ha introduit una nova classe de matrius denominada $\{K, s+1\}$-potent. Es pot observar que les matrius $\{K, s+1\}$-potents contenen com a casos particulars les matrius $\{s+1\}$-potents, periòdiques, centrosimètriques, mirrorsimètriques, circulants, etc. Aquests darrers tipus de matrius són de gran utilitat en diferents àrees com ara transmisió de línies multiconductor, antenes, ones, sistemes elèctrics i mecànics, i teoria de la comunicació entre altres.

Per a la classe de matrius $\{K, s+1\}$-potents s'ha realitzat l'anàlisi de la seua existència. També, s'han obtés diferents propietats relacionades amb la

suma, el producte, la inversa, l'adjunta, la semblança i la suma directa.

Els resultats que permeten el posterior desenvolupament de la tesi vénen donats per les caracteritzacions de les matrius $\{K, s+1\}$-potents. Aquestes condicions necessàries i suficients s'han obtés des de distints punts de vista: usant teoria espectral, potències de matrius, inverses generalitzades, i també per mitjà d'una representació per blocs d'una matriu d'índex 1. Aquest fet permet abordar els casos particulars anteriorment citats a partir d'un nou enfocament.

Posteriorment s'ha relacionat la classe de matrius introduïda amb diferents classes de matrius amb coeficients complexos: matrius $\{K\}$-hermítiques, projectors $\{s+1\}$-generalitzats, matrius unitàries, matrius normals, centro-simètriques $\{K\}$-generalitzades, etc. S'han obtés una sèrie d'inclusions entre els conjunts que les definiexen, i s'ha observat que la major part d'aquestes inclusions són estrictes mitjançant la construcció de contraexemples adequats.

Amb la intenció de construir de manera efectiva matrius d'aquesta classe s'han disenyat algoritmes tant per al cas s major o igual a 1 com per al cas $s = 0$. Mitjançant la seua implementació en MATLAB s'ha pogut analitzar la seua efectivitat així com les seues prestacions.

Per altra banda, per als casos s major o igual que 1 i $s = 0$ s'ha resolt el problema invers de calcular les matrius involutives K que satisfan l'equació matricial que está tractant-se. Aquests algoritmes s'ha construit a partir de la teoria espectral, concretament per mitjà dels idempotents principals de la matriu original.

La tesis finalitza amb una extensió de l'estudi anterior al cas de matrius $\{K, -(s+1)\}$-potents, completant d'aquesta manera tots els valors sencers de s possibles. Com anteriorment, en aquest darrer anàlisi, s'han distinguit els casos $s = 0$ i s major o igual que 1.

Aquesta tesi està organitzada en 5 capítols. El Capítol 1 conté una introducció on es detallen alguns antecedents del tema i s'introduixen les notacions necessàries. El Capítol 2 conté l'existència i propietats de les matrius $\{K, s+1\}$-potents, essent el seu principal resultat el Teorema 2.2 en el que es presenten diferents caracteritzacions de les mateixes. En el Capítol 3 s'introduixen una sèrie de conjunts de matrius i s'establixen relacions amb les matrius $\{K, s+1\}$-potents utilitzant les caracteritzacions obtingudes al Capítol 2. Al Capítol 4 es desenvolupen diferents algoritmes per al càlcul de les matrius $\{K, s+1\}$-potents. Primer es construixen matrius d'aquesta classe a partir d'informació espectral de la matriu involutiva K. Més exemples es poden construir utilitzant: aquest algoritme, un altre auxiliar que permet trobar una altra matriu $\{K, s+1\}$-potent, i l'anàlisi de combinacions linials. En la darrera part del Capítol 4 s'analitza el problema invers al plantejat en la memòria i es donen una sèrie d'exemples numèrics. Al Capítol 5 s'estén el tipus de matrius introduides de manera que es consideren tots els casos per als valors sencers de s. La tesi finalitza amb un annexe on s'indiquen les conclusions finals i les línies futures.

Summary

This thesis can be classified as being part of Matrix Analysis. Within this area, a particular type of matrices is studied. It has been analyzed from the point of view of its characterizations, through the establishment of relations with different known types of complex matrices, and this particular class of matrices has been effectively obtained by different numerical methods. Now we detail the specific problems developed in this thesis and the results achieved.

First, a new class of matrices called $\{K, s+1\}$-potent has been introduced. It can be seen that the $\{K, s+1\}$-potent matrices contain, as particular cases, $\{s+1\}$-potent matrices, regular matrices, centrosymmetric, mirrorsymetric, circulant, etc. These latter types of matrices are very useful in various areas such as multiconductor transmission lines, antennas, waves, electrical and mechanical systems, and communication theory, etc.

For this class of $\{K, s+1\}$-potent matrices, it has been performed an analysis about its existence. Also, different properties related to the sum, product, conversely, conjugate transpose, similarity, and direct sum, have been obtained.

The results that allow the further development of this thesis are given by the characterizations of the $\{K, s+1\}$-potent matrices. These necessary and sufficient conditions have been obtained from different points of view: using spectral theory, powers of matrices, generalized inverses, and by a block representation of a matrix of index 1. This allow us to study the particular cases previously mentioned.

Then, the new introduced class of matrices has been related to different classes of matrices with complex coefficients: $\{K\}$-Hermitian matrices, $\{s+1\}$-generalized projectors , unitary matrices, normal matrices, $\{K\}$-centrosymmetric generalized matrices, etc. We have obtained a series of inclusions between the sets that define them, and it has been observed that most of these inclusions are strict constructing the appropriated counterexamples to check them.

With the purpose to build in an effective way matrices of this class, several algorithms have been developed for the case s greater than or equals 1, and for the case $s = 0$. Their effectiveness and performance have been analyzed through its implementation in MATLAB.

Moreover, for the cases s greater than or equals 1 and $s = 0$ it has been solved the inverse problem for calculating involutive matrices K that satisfy the matrix equation that we are analyzing. These algorithms have been constructed from spectral theory, particularly through the principal idempotents of the original matrix.

This thesis ends with an extension of the previous study to the case of $\{K, -(s+1)\}$-potent matrices, completing all possible integer values of s. As before, in the last analysis, we have distinguished the case $s = 0$ and s greater than or equals 1.

This thesis is organized in 5 chapters. Chapter 1 contains an introduction where the background are mentioned, and the necessary notation is introduced. Chapter 2 contains the existence and properties of $\{K, s+1\}$-potent matrices. The main result in this chapter, Theorem 2.2, provides characterizations of this class of matrices. Chapter 3 introduces a number of sets of matrices and establishes relations with the $\{K, s+1\}$-potent matrices by using the characterizations obtained in Chapter 2. In Chapter 4 different algorithms for calculating the $\{K, s+1\}$-potent matrices are developed. First, matrices of this class are constructed from spectral information given by the involutive matrix K. More examples can be constructed using: this algorithm, an auxiliary algorithm that allows us to find another $\{K, s+1\}$-potent matrix, and the analysis of linear combinations. In the last part of Chapter 4, the inverse problem is analyzed and several numerical examples are shown. Chapter 5 extends the type of matrices introduced to include all cases for integer values of s. The thesis concludes with an annex where the final conclusions and future lines are shown.

D. Néstor Thome Coppo, profesor titular de universidad del Departamento de Matamática Aplicada de la Universitat Politècnica de València; y Dª. Leila Lebtahi, profesora asociada del Departemento de Matemática Aplicada de la Universitat Politècnica de València,

CERTIFICAN:

que la presente memoria *"Estudio de la clase de matrices* $\{K, s+1\}$*-potentes"*, ha sido realizada bajo su dirección por D. José Óscar Romero Martínez, y constituye su tesis para optar al grado de Doctor por la Universitat Politècnica de València.

Para que conste, en cumplimiento de la legislación vigente, se ratifican en la autorización de la presentación de la referida tesis doctoral ante la Comisión de Doctorado de la Universitat Politècnica de València, firmando el presente certificado.

Valencia, 30 de enero de 2012.

Néstor Thome Coppo   Leila Lebtahi

Índice general

CAPÍTULO 1

Preliminares

1.1. Antecedentes y estado actual

Es conocido el estudio de situaciones donde una matriz coincide con alguna de sus potencias, siendo casos básicos los de las matrices idempotentes y tripotentes [4, 6]. Este tipo de matrices está relacionado con las matrices inversas generalizadas [3, 7, 8, 29].

Una matriz involutiva $K \in \mathbb{C}^{n\times n}$ es una matriz que coincide con su propia inversa, es decir, cuando se aplica dos veces, se vuelve al punto de partida. Algebraicamente se representa $K^2 = I_n$, donde I_n denota la matriz identidad de tamaño $n \times n$. Algunos ejemplos de matrices involutivas son: una de las tres clases de matrices elementales (denominada matriz elemental de intercambio de filas) que corresponde a una matriz de permutación, las matrices signatura (es decir, matrices cuyas diagonales contengan sólo 1 y/o -1), una matriz ortogonal que también sea simétrica, etc.

Se han aplicado involuciones en diferentes áreas. Por ejemplo, en geometría euclídea (reflexión sobre un plano), teoría de grupos (clasificación de grupos simples finitos), teoría de anillos (tomar la traspuesta en un anillo de matrices), etc. Por otra parte, en criptografía, se ha utilizado una matriz involutiva como clave para la encriptación mediante el cifrado de Hill. En este caso, es muy útil el uso de matrices involutivas para eliminar el cálculo de matrices inversas para las desencriptaciones de Hill. Esto significa que la misma herramienta se podría utilizar tanto para encriptar como para desencriptar mensajes. [16].

Es bien sabido que la matriz de intercambio $J = [j_{k,t}] \in \mathbb{C}^{n\times n}$ se define como una matriz con unos a lo largo de la diagonal secundaria (i.e., $j_{k,n-k+1} = 1$, $1 \le k \le n$) y ceros en las restantes posiciones. Las matrices $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tales que $JA = AJ$ se denominan centrosimétricas y se han estudiado en profundidad por sus aplicaciones en ondas, teoría de antenas, sistemas eléctricos y mecánicos, física cuántica, teoría de la comunicación, filtros digitales, sistemas lineales, ecuaciones en derivadas parciales y otras áreas [10, 15]. De forma más general, una matriz $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ es centrosimétrica con respecto a una matriz involutiva $K \in \mathbb{C}^{n\times n}$ si satisface $KA = AK$, y esta clase de matrices se ha estudiado en [32].

En [26, 27] se han estudiado las matrices denominadas mirrorsimétricas (o con simetría tipo espejo). La mayor parte de las propiedades de las matrices centrosimétricas se pueden generalizar para las matrices mirrorsimétricas. Como aplicación de este tipo de matrices destaca la transmisión de líneas multiconductor.

En esta memoria se introduce y se estudia un nuevo tipo de matrices, denominado matrices $\{K, s+1\}$-potentes, como una extensión de las mencionadas anteriormente. En el Capítulo 2, se desarrollan diferentes propiedades básicas así como caracterizaciones de este tipo de matrices desde distintos puntos de vista. Al final del capítulo, se proporciona una aplicación al estudio de combinaciones lineales de este tipo de matrices. En el Capítulo 3, se obtienen relaciones entre las matrices $\{K, s+1\}$-potentes y otros tipos de matrices, como por ejemplo, matrices $\{K\}$-hermíticas, proyectores $\{s+1\}$-generalizados, matrices unitarias y matrices normales. También se obtienen nuevas propiedades de las matrices centrosimétricas. En el Capítulo 4 se presentan diversos algoritmos para obtener matrices $\{K, s+1\}$-potentes así como varios ejemplos numéricos. En el Capítulo 5 se extienden los resultados encontrados en el Capítulo 2 para los restantes valores enteros del parámetro s, completando así el estudio de esta clase de matrices.

1.2. Resultados preliminares y notaciones

Con la intención de establecer las notaciones a utilizar se recuerdan conceptos y resultados clásicos del análisis matricial que serán necesarios en la memoria.

Definición 1.1 *Una matriz $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ se llama* normal *si conmuta con su traspuesta conjugada A^*, es decir, si $AA^* = A^*A$.*

Definición 1.2 *Una matriz* involutiva *$K \in \mathbb{C}^{n\times n}$ es una matriz que coincide con su propia inversa, es decir, si $K^{-1} = K$, o equivalentemente, si $K^2 = I_n$.*

Definición 1.3 *El* espectro *de una matriz $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ es el conjunto de todos sus valores propios y se denota por $\sigma(A)$, es decir,*

$$\sigma(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\},$$

donde para cada escalar $\lambda_i \in \mathbb{C}$, denominado valor propio, *existe un vector no nulo $x_i \in \mathbb{C}^n$, denominado* vector propio, *que satisface $Ax_i = \lambda_i x_i$ para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.*

Definición 1.4 *Una matriz $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ se denomina* unitaria *si su inversa coincide con su traspuesta conjugada, es decir, $A^{-1} = A^*$, que es equivalente a $AA^* = A^*A = I_n$.*

Definición 1.5 *Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Una matriz $A^\# \in \mathbb{C}^{n\times n}$ se denomina* inversa de grupo *de A si cumple las tres condiciones siguientes:*

(IG1) $AA^\#A = A$,

(IG2) $A^\#AA^\# = A^\#$,

(IG3) $AA^\# = A^\#A$.

La matriz $A^\#$ existe si y sólo si A y A^2 tienen el mismo rango. Si existe, es única [3]. Una representación para las matrices que cumplen esta condición se muestra en el siguiente resultado.

Lema 1.1 *Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ una matriz de rango $r > 0$ tal que existe su inversa de grupo. Entonces existe una matriz invertible $S \in \mathbb{C}^{n\times n}$ y una matriz invertible $C \in \mathbb{C}^{r\times r}$ tales que*

$$A = S \begin{bmatrix} C & O \\ O & O \end{bmatrix} S^{-1}.$$

En este caso,

$$A^\# = S \begin{bmatrix} C^{-1} & O \\ O & O \end{bmatrix} S^{-1}.$$

Se denota mediante Ω_k el conjunto de todas las raíces k-ésimas de la unidad siendo k un entero positivo. Es conocido que Ω_k es un grupo multiplicativo, y si se define $\omega_k = e^{2\pi i/k}$ entonces $\Omega_k = \{\omega_k^0, \omega_k^1, \ldots, \omega_k^{k-1}\}$.

Definición 1.6 *Una matriz $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ se llama* idempotente *si coincide con su cuadrado, es decir, si $A^2 = A$.*

Es conocida la siguiente caracterización de matrices idempotentes [37].

Lema 1.2 *Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ una matriz idempotente de rango r. Entonces*

(a) *A es diagonalizable y $\sigma(A) \subseteq \{0,1\}$. Por tanto, existe una matriz invertible $S \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tal que*

$$A = S \begin{bmatrix} I_r & O \\ O & O \end{bmatrix} S^{-1}.$$

(b) $\operatorname{rango}(A) = \operatorname{traza}(A) = r$.

Definición 1.7 *Una matriz $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ se llama tripotente si coincide con su cubo, es decir, si $A^3 = A$.*

Una caracterización de las matrices tripotentes se establece en el siguiente lema [21].

Lema 1.3 *Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ una matriz tripotente de rango r. Entonces*

(a) *A es diagonalizable y $\sigma(A) \subseteq \{-1,0,1\}$. Por tanto, existe una matriz invertible $S \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tal que*

$$A = S \begin{bmatrix} I_{r_1} & O & O \\ O & -I_{r_2} & O \\ O & O & O_{r_3} \end{bmatrix} S^{-1}$$

donde $r_1 + r_2 = r$ y además $r_1 + r_2 + r_3 = n$.

(b) $r_1 = \frac{1}{2}\operatorname{traza}(A^2 + A)$, $r_2 = \frac{1}{2}\operatorname{traza}(A^2 - A)$ *y* $r_3 = \operatorname{traza}(I - A^2)$.

Una relación entre matrices idempotentes y tripotentes se encuentra en el siguiente resultado [29]. Se puede observar que dicho resultado es una consecuencia del Lema 1.3.

Se dice que dos matrices $B, C \in \mathbb{C}^{n\times n}$ son *disjuntas* si $BC = O = CB$.

Lema 1.4 *Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Entonces A es tripotente si y sólo si existen dos matrices idempotentes disjuntas $B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ y $C \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tales que $A = B - C$. En estas condiciones, las matrices B y C son únicas y cumplen que*

$$B = \frac{1}{2}(A^2 + A) \qquad y \qquad C = \frac{1}{2}(A^2 - A).$$

En general, una matriz $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ se denomina $\{k+1\}$-*potente* cuando $A^{k+1} = A$ siendo $k \in \mathbb{N}$. Una caracterización de matrices $\{k+1\}$-potentes se recoge en la siguiente proposición y, por completitud, se incluye una demostración [4].

Proposición 1.1 *Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ y $k \in \mathbb{N}$. Entonces A es $\{k+1\}$-potente si y sólo si A es diagonalizable y $\sigma(A) \subseteq \{0\} \cup \Omega_k$. En este caso, existe una matriz invertible $S \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tal que*

$$A = S \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} S^{-1}$$

donde $\lambda_i \in \{0\} \cup \Omega_k$ para $i = 1, 2, \dots, n$.

Demostración. Si $A^{k+1} = A$ entonces el polinomio $q(t) = t^{k+1} - t$ es un múltiplo del polinomio minimal $q_A(t)$ de A, y como cada raíz de $q_A(t)$ está en $\mathbb{C}$ y tiene multiplicidad 1, entonces A es diagonalizable y además $\sigma(A) \subseteq \{0\} \cup \Omega_k$.

Recíprocamente, si A es una matriz diagonalizable y además cumple que $\sigma(A) \subseteq \{0\} \cup \Omega_k$, entonces existe una matriz invertible $S \in \mathbb{C}^{n\times n}$ y escalares complejos $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tales que $\lambda_i^k \in \{0, 1\}$ para $i = 1, 2, \dots, n$, con lo que

$$A = S \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} S^{-1}$$

Luego un cálculo sencillo muestra que $A^{k+1} = A$ pues $\lambda_i^{k+1} = \lambda_i$ para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. ■

Más generalmente, para matrices diagonalizables se tiene el siguiente resultado conocido con el nombre de *Teorema espectral* [3].

Teorema 1.1 *Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ una matriz con valores propios $\lambda_1, \ldots, \lambda_t$ que sean distintos dos a dos. Entonces A es diagonalizable si y sólo si existen matrices $P_1, \ldots, P_t$ de $\mathbb{C}^{n\times n}$ tales que*

(a) $P_i^2 = P_i$, $i = 1, \ldots, t$.

(b) $P_i P_j = O$, *para todo* $i, j \in \{1, \ldots, t\}$ *tales que* $i \neq j$.

(c) $I_n = P_1 + \cdots + P_t$.

(d) $A = \lambda_1 P_1 + \cdots + \lambda_t P_t$.

Además, las matrices $P_1, \ldots, P_t$ con estas propiedades son únicas y se llaman idempotentes principales *de A.*

La primera condición del Teorema 1.1 se expresa diciendo que los P_i son proyectores (y generalmente serán proyectores oblicuos), la segunda que son proyectores disjuntos, la tercera suele llamarse resolución de la identidad y la cuarta expresa propiamente la *descomposición espectral* de A.

A continuación se mostrará la forma, probablemente más natural, de construir los idempotentes principales.

Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ una matriz diagonalizable. Entonces es posible escribir la matriz

$$A = SDS^{-1}$$

para alguna matriz invertible $S \in \mathbb{C}^{n\times n}$ y alguna matriz diagonal $D \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Agrupando los valores propios iguales y ordenándolos según sus multiplicidades, la matriz diagonal D se puede escribir como

$$\begin{aligned} D &= \begin{bmatrix} \lambda_1 I_{r_1} & \dots & O \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ O & \dots & \lambda_t I_{r_t} \end{bmatrix} \\ &= \lambda_1 \begin{bmatrix} I_{r_1} & \dots & O \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ O & \dots & O_{r_t} \end{bmatrix} + \cdots + \lambda_t \begin{bmatrix} O_{r_1} & \dots & O \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ O & \dots & I_{r_t} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

con $r_1 + \cdots + r_t = n$. Ahora se consideran, para $i = 1, \dots, t$, las matrices

$$E_i = \begin{bmatrix} O_{r_1} & \dots & \dots & \dots & O \\ \vdots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & I_{r_i} & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ O & \dots & \dots & \dots & O_{r_t} \end{bmatrix}.$$

Es evidente que

- $E_i^2 = E_i$ para todo $i = 1, \dots, t$.
- $E_i E_j = O$, para todo $i, j \in \{1, \dots, t\}$ tales que $i \neq j$.
- $\sum_{i=1}^{t} E_i = I_n$.
- $D = \sum_{i=1}^{t} \lambda_i E_i$.

Como $A = SDS^{-1}$, los proyectores buscados son

$$P_i = SE_iS^{-1}$$

para los cuales es fácil comprobar que

- $P_i^2 = P_i$ para todo $i = 1, \dots, t$.

- $P_iP_j = O$, para todo $i, j \in \{1, \ldots, t\}$ tales que $i \neq j$.
- $\sum_{i=1}^{t} P_i = I_n$.
- $A = \sum_{i=1}^{t} \lambda_i P_i$.

Además es posible probar que $AP_i = P_iA$ $(= \lambda_i P_i)$, para todo $i = 1, \ldots, t$.

Cuando $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ es una matriz diagonalizable con t valores propios distintos $\lambda_1, \ldots, \lambda_t$, entonces se prueba que los idempotentes principales de A están dados por

$$P_i = \frac{p_i(A)}{p_i(\lambda_i)}, \text{ para } i = 1, \ldots, t$$

donde

$$p_i(\lambda) = \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{t} (\lambda - \lambda_j).$$

Una ligera modificación permite establecer un resultado semejante al dado en el Teorema 1.1 para matrices normales. Para establecerlo se debe cambiar diagonalizable por normal y agregar la condición $P^* = P$ a las indicadas en (a)-(d).

CAPÍTULO 2

Matrices $\{K, s+1\}$-potentes

2.1. Introducción

Como se ha comentado en la introducción, han sido objeto de estudio situaciones en que una matriz $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ cumple

$$AJ = JA,$$

siendo

$$J = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \iddots & \vdots & \vdots \\ 1 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

la matriz de intercambio; o bien situaciones en las que

$$AM = MA,$$

correspondiendo

$$M = \begin{bmatrix} O & O & I \\ O & J & O \\ I & O & O \end{bmatrix}$$

a las matrices mirrorsimétricas.

Además, en [11, 14], se estudian las matrices *circulantes* que corresponden a aquellas matrices $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tales que

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_n & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_2 & a_3 & \cdots & a_1 \end{bmatrix} = \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1} R^k$$

donde

$$R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Es posible observar que las matrices circulantes satisfacen las condiciones: $AR = RA$ con $R^n = I_n$.

Por otra parte, en relación a las potencias de la matriz A, se conocen caracterizaciones de las matrices $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tales que $A^{k+1} = A$ para algún $k \in \mathbb{N}$.

Motivados por estos tipos de matrices, se presenta la siguiente definición que corresponde a la clase de matrices objeto de estudio en esta memoria. La intención es introducir un ámbito general en el cual todos los tipos de matrices mencionados sean casos particulares y realizar un análisis de esta nueva clase de matrices.

Definición 2.1 *Sea $K \in \mathbb{C}^{n\times n}$ una matriz involutiva y $s \in \{1, 2, 3, \dots\}$. Una matriz $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ se denomina $\{K, s+1\}$-potente si cumple*

$$KA^{s+1}K = A. \tag{2.1}$$

Se denotará por $\mathbf{P}^{(K,s)}$ al conjunto de todas las matrices $\{K, s+1\}$-potentes, es decir,

$$\mathbf{P}^{(K,s)} = \{A \in \mathbb{C}^{n\times n} :\ KA^{s+1}K = A\}. \tag{2.2}$$

Concretamente, las matrices $\{K, s+1\}$-potentes incluyen los siguientes tipos de matrices: $\{s+1\}$-potentes (i.e., $A^{s+1} = A$), idempotentes, tripotentes, involutivas, periódicas (i.e., $A^s = I_n$), centrosimétricas (i.e., $AJ = JA$), mirrorsimétricas (i.e., $AM = MA$), circulantes (i.e., $AR = RA$), etc. En el Cuadro 2.1 se puede observar la relación entre estos diferentes tipos [4, 11, 26, 34].

$\{K, s+1\}-$ potentes	$\{s+1\}-$ potentes	periódicas	centro-simétricas	mirror-simétricas	circulantes
K	I_n	I_n	J	M	R
s	–	–	0	0	0
A	–	invertible	–	–	–
n	–	–	–	–	2

Cuadro 2.1: Casos particulares de matrices $\{K, s+1\}$-potentes.

Este capítulo está organizado de la siguiente forma. En la Sección 2.2 se obtienen propiedades de las matrices $\{K, s+1\}$-potentes. Especialmente, se muestra que para cada entero positivo n, existe al menos una matriz de tamaño n que pertenece a esta clase. También se presenta un método para construir un número infinito de matrices $\{K, s+1\}$-potentes a partir de solamente una de ellas. Además, se estudia cuándo sumas, productos, inversas, adjuntas y sumas directas de matrices $\{K, s+1\}$-potentes permanecen en dicha clase. En la Sección 2.3, se presentan caracterizaciones de las matrices $\{K, s+1\}$-potentes desde distintos puntos de vista: mediante la descomposición espectral, en términos de potencias de la matriz, mediante su inversa de grupo y también mediante una representación por bloques de una matriz de índice 1. Finalmente, en la Sección 2.4, como aplicación se proporcionan condiciones bajo las cuales una combinación lineal de dos matrices $\{K, s+1\}$-potentes que conmutan es $\{K, s+1\}$-potente.

Se observa que, si bien el caso de matrices centrosimétricas corresponde al valor de $s = 0$ y no se incluye en la Definición 2.1, en capítulos posteriores se desarrollarán tanto el caso $s = 0$ como cuando s toma valores enteros negativos.

2.2. Existencia y propiedades

La primera cuestión que se abordará en este capítulo está relacionada con la existencia de matrices $\{K, s+1\}$-potentes y se analiza en el siguiente resultado.

Teorema 2.1 *Para cada $n \in \mathbb{N}$, existe al menos una matriz $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tal que A es $\{K, s+1\}$-potente para cualquier matriz involutiva K y para cada $s \in \{1, 2, 3, \dots\}$.*

Demostración. Sea $n \in \{1, 2, 3, \dots\}$ y la matriz $A = \omega I_n$ donde $\omega \in \Omega_s$. Se tiene que $A^{s+1} = \omega^{s+1} I_n = \omega I_n = A$ y entonces

$$KA^{s+1}K = KAK = \omega K^2 = A.$$

■

Ahora se establecerán propiedades referentes a matrices $\{K, s+1\}$-potentes.

Es claro que el determinante de matrices en esta clase es un elemento de $\{0\} \cap \Omega_s$. En efecto,

$$\det(KAK) = \det(A^{s+1}) \iff \det(K)\det(A)\det(K) = [\det(A)]^{s+1}$$

$$\iff \det(A) = 0 \text{ ó } [\det(A)]^s = 1.$$

Lema 2.1 *Sean $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $K \in \mathbb{C}^{n\times n}$ una matriz involutiva y $s \in \{1, 2, 3, \dots\}$. Entonces se cumple que:*

(I) Las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) A es una matriz $\{K, s+1\}$-potente.

(b) $KAK = A^{s+1}$.

(c) $KA = A^{s+1}K$.

(d) $AK = KA^{s+1}$.

(II) Si $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ es una matriz $\{K, s+1\}$-potente entonces $A^{(s+1)^2} = A$.

Demostración. A partir de $K^2 = I_n$, multiplicando ambos lados de la igualdad $KA^{s+1}K = A$ por K, se obtiene $K^2A^{s+1}K^2 = KAK$ y entonces $A^{s+1} = KAK$. La implicación recíproca es similar, y entonces la equivalencia entre (a) y (b) en (I) queda probada. Las otras igualdades de (I) se obtienen directamente teniendo en cuenta que $K^{-1} = K$.

Utilizando (I) (b) y la definición, se obtiene

$$A^{(s+1)^2} = (A^{s+1})^{s+1} = (KAK)^{s+1} = KA^{s+1}K = A.$$

Por tanto el lema queda probado. ■

Además, en este apartado se presentan propiedades que muestran cuándo el conjunto de matrices $\{K, s+1\}$-potentes es cerrado bajo ciertas operaciones.

Lema 2.2 *Sea $K \in \mathbb{C}^{n\times n}$ una matriz involutiva, $s \in \{1,2,3,\dots\}$, y sean $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ matrices $\{K, s+1\}$-potentes. Se cumplen las siguientes propiedades.*

(a) Si $s = 1$ entonces A y B son anticonmutativas (i.e., $AB = -BA$) si y sólo si $A + B$ es una matriz $\{K, 2\}$-potente.

(b) Si $AB = BA = O$ entonces $A + B$ es una matriz $\{K, s+1\}$-potente.

(c) Si $AB = BA$ entonces AB es una matriz $\{K, s+1\}$-potente.

(d) Si $t \in \{0\} \cup \Omega_s$ entonces tA es una matriz $\{K, s+1\}$-potente.

(e) Si A es una matriz invertible, entonces A^{-1} es una matriz $\{K, s+1\}$-potente.

(f) Si K es hermítica (i.e., $K^* = K$) entonces A^* es $\{K, s+1\}$-potente.

(g) Si $W \in \mathbb{C}^{n\times n}$ es invertible y $KW = WK$ entonces WAW^{-1} es $\{K, s+1\}$-potente.

(h) $P^{-1}AP$ es $\{P^{-1}KP, s+1\}$-potente para toda matriz invertible $P \in \mathbb{C}^{n\times n}$.

Demostración. Sea $s = 1$. Como $KA^2K = A$ y $KB^2K = B$, entonces se obtiene que la condición $K(A + B)^2K = A + B$ es equivalente a $AB = -BA$. El apartado (a) queda demostrado.

En el apartado (b), si $AB = BA = O$, entonces

$$(A + B)^{s+1} = A^{s+1} + B^{s+1}$$

y

$$K(A + B)^{s+1}K = KA^{s+1}K + KB^{s+1}K = A + B.$$

El apartado (c) se obtiene directamente de

$$K(AB)^{s+1}K \quad = \quad KA^{s+1}B^{s+1}K$$

$$\begin{aligned} &= (KA^{s+1}K)(KB^{s+1}K) \\ &= AB \end{aligned}$$

ya que $AB = BA$.

La suposición $t^{s+1} = t$ implica que

$$K(tA)^{s+1}K = t^{s+1}KA^{s+1}K = tA.$$

La propiedad relacionada con la no singularidad de A es cierta porque

$$\begin{aligned} A^{-1} &= \left(KA^{s+1}K\right)^{-1} \\ &= K^{-1}(A^{s+1})^{-1}K^{-1} \\ &= K(A^{-1})^{s+1}K. \end{aligned}$$

De forma similar, al ser K hermítica, se obtiene que

$$\begin{aligned} A^* &= (KA^{s+1}K)^* \\ &= K(A^{s+1})^*K \\ &= K(A^*)^{s+1}K. \end{aligned}$$

En el apartado (g), por la definición y por la hipótesis, se tiene

$$\begin{aligned} K(WAW^{-1})^{s+1}K &= KWA^{s+1}W^{-1}K^{-1} \\ &= W(KA^{s+1}K)W^{-1} \\ &= WAW^{-1}. \end{aligned}$$

Finalmente, para demostrar el apartado (h) basta aplicar la definición como sigue

$$\begin{aligned} (P^{-1}KP)(P^{-1}AP)(P^{-1}KP) &= P^{-1}KAKP \\ &= P^{-1}A^{s+1}P \\ &= (P^{-1}AP)^{s+1}, \end{aligned}$$

teniendo en cuenta que $(P^{-1}KP)^2 = I_n$. ■

Lema 2.3 *Si* $A \in \mathbf{P}^{(K,s)}$ *entonces se cumplen las siguientes propiedades:*

(a) $KA^jK = A^{j(s+1)}$ *para todos los enteros* $j \geq 1$.

(b) $(KA)^2 = A^{s+2}$.

(c) $(KA)^{2s+1} = KA$

(d) $(AK)^{2s+1} = AK$.

Demostración. El apartado (a) se demostrará por inducción sobre j. Si $j = 1$, es evidente a partir de la propia definición. Supóngase que $KAK = A^{s+1}$ y que, por hipótesis de inducción, $KA^jK = A^{j(s+1)}$ se cumple para algún $j > 1$. Debido a que $K^2 = I_n$,

$$\begin{aligned} KA^{j+1}K &= (KA^jK)(KAK) \\ &= A^{j(s+1)}A^{s+1} \\ &= A^{(j+1)(s+1)}. \end{aligned}$$

Por tanto, la propiedad (a) queda demostrada.

La propiedad (b) se deduce directamente de la definición, ya que

$$\begin{aligned} (KA)^2 &= (KAK)A \\ &= A^{s+1}A \\ &= A^{s+2}. \end{aligned}$$

La propiedad (c) se puede demostrar de la siguiente forma

$$\begin{aligned} (KA)^{2s+1} &= (KA)((KA)^2)^s \\ &= (KA)(A^{s+2})^s \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= KA^{(s+1)^2} \\
&= KA,
\end{aligned}
$$

donde se ha utilizado el apartado (b) y la propiedad (II) del Lema 2.1.

El apartado (d) es similar al apartado (c). ■

A partir del apartado (a) del Lema 2.3 es posible obtener de nuevo la propiedad (II) del Lema 2.1 como sigue:

$$
\begin{aligned}
A^{(s+1)^2} &= A^{s^2}A^{2s}A \\
&= A^{s(s+1)}A^{s+1} \\
&= KA^sKA^{s+1} \\
&= KA^sKKAK \\
&= KA^{s+1}K \\
&= A.
\end{aligned}
$$

Mediante la utilización de la semejanza unitaria, los siguientes resultados permiten construir más ejemplos a partir de los iniciales. Más aún, el Corolario 2.1 permite construir infinitas matrices $\{K, s+1\}$-potentes a partir de solamente una de ellas, donde K es hermítica y conmuta con una matriz unitaria dada.

Corolario 2.1 *Sean $s \in \{1, 2, 3, \dots\}$, $K \in \mathbb{C}^{n\times n}$ una matriz involutiva y hermítica, y $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ una matriz $\{K, s+1\}$-potente. Si $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$ es una matriz unitaria tal que $KU = UK$ entonces UAU^* es $\{K, s+1\}$-potente.*

Demostración. Como $KA^{s+1}K = A$ y $K^{-1} = K = K^*$ entonces

$$K(UAU^*)^{s+1}K = KUA^{s+1}U^*K^* = UKA^{s+1}K^*U^* = UAU^*,$$

y por tanto el resultado queda demostrado. ■

Ejemplo 2.1 *Para las matrices*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -i \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad y \qquad K = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

es fácil ver que A es $\{K,2\}$-potente. La forma más general para la matriz unitaria U que cumple $UK = KU$ es

$$U = \begin{bmatrix} a & b & b \\ d & e & f \\ d & f & e \end{bmatrix}$$

siendo $a, b, d, e, f \in \mathbb{C}$ que satisfacen $|a|^2 + 2|b|^2 = 1$, $a\bar{d} + b\bar{e} + b\bar{f} = 0$, $|d|^2 + |e|^2 + |f|^2 = 1$ y $|d|^2 + e\bar{f} + f\bar{e} = 0$. Por ejemplo, si $e = 0$ se obtiene $d = 0$, $|a| = |f| = 1$ y $b = 0$. En este caso, se obtienen infinitas matrices $\{K,2\}$-potentes:

$$UAU^* = \begin{bmatrix} 0 & -ia\bar{f} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ if\bar{a} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

donde $|a| = |f| = 1$.

Se puede observar que el Corolario 2.1 tiene una demostración sencilla. Sin embargo, es interesante puesto que permite construir un amplio conjunto de ejemplos a partir de solamente uno. En especial, este resultado muestra que con sólo una matriz $\{K, s+1\}$-potente se pueden construir infinitos ejemplos.

El corolario anterior lleva a la siguiente cuestión: ¿toda matriz $\{K, s+1\}$-potente tiene esta forma? Es decir, dadas dos matrices $\{K, s+1\}$-potentes A y B del mismo tamaño, ¿es posible encontrar una matriz unitaria U tal que $B = UAU^*$ y $KU = UK$? La respuesta es negativa tal y como se comprueba mediante el siguiente contraejemplo: las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix} \qquad \text{y} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}$$

son $\{K, 5\}$-potentes para $K = I_2$, pero es fácil comprobar que no existe una matriz unitaria U tal que $B = UAU^*$. En efecto, si existiese tal matriz U en esas condiciones se tendría que cumplir que $\det(A) = \det(B)$, lo cual es una contradicción. Este ejemplo, además de responder a esta pregunta relacionada con el Corolario 2.1, también soluciona el mismo problema para matrices no singulares, es decir, el correspondiente al caso (g) del Lema 2.2.

Ahora se presentan algunas propiedades relacionadas con las matrices $\{K, s+1\}$-potentes mediante la utilización de matrices definidas por bloques.

Lema 2.4 *Sean $\{K_1, K_2, \ldots, K_t\}$ y $\{A_1, A_2, \ldots, A_t\}$ dos conjuntos de matrices tales que $K_i, A_i \in \mathbb{C}^{n_i \times n_i}$ siendo K_i una matriz involutiva para todo $i = 1, 2, \ldots, t$ y sea $s \in \{1, 2, 3, \ldots\}$. Si para cada $i = 1, 2, \ldots, t$, cada matriz A_i es $\{K_i, s+1\}$-potente, entonces definiendo las sumas directas*

$$A = \bigoplus_{i=1}^{t} A_i \qquad y \qquad K = \bigoplus_{i=1}^{t} K_i,$$

la matriz A es $\{K, s+1\}$-potente.

Demostración. Como

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & \cdots & O \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ O & \cdots & A_t \end{bmatrix}$$

y

$$K = \begin{bmatrix} K_1 & \cdots & O \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ O & \cdots & K_t \end{bmatrix},$$

realizando el producto $KA^{s+1}K$ por bloques se obtiene

$$
KA^{s+1}K = \begin{bmatrix} K_1A_1^{s+1}K_1 & \cdots & O \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ O & \cdots & K_tA_t^{s+1}K_t \end{bmatrix}
$$

$$
= \begin{bmatrix} A_1 & \cdots & O \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ O & \cdots & A_t \end{bmatrix}.
$$

Se puede observar que para todas las matrices A_i, $i = 1, 2, \ldots, t$, es necesario utilizar la misma potencia $s + 1$. ■

2.3. Caracterizaciones

En esta sección se utilizará la descomposición espectral indicada en el Teorema 1.1 de la página 7.

2.3.1. Observaciones previas

Antes de la caracterización general se estudiarán dos casos particulares para ver el comportamiento de este tipo de matrices.

- Caso $s = 1$. Sea $K \in \mathbb{C}^{n\times n}$ una matriz involutiva, y sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ una matriz que cumple

  $$KAK = A^2,$$

  es decir, A es $\{K, 2\}$-potente. De estas condiciones se deduce que $A^4 = A$, puesto que

  $$A^4 = A^2A^2 = KAKKAK = KA^2K = A$$

  y por tanto se cumple, por la Proposición 1.1, que

(a) A es diagonalizable.

(b) $\sigma(A) \subseteq \{0, \omega, \omega^2, \omega^3\}$, donde $\omega = e^{\frac{2\pi i}{3}}$.

Por el Teorema 1.1, es posible escribir A como

$$A = \lambda_0 P_0 + \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \lambda_3 P_3,$$

de donde

$$\begin{aligned} KAK &= K(\lambda_0 P_0 + \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \lambda_3 P_3)K \\ &= \lambda_0 K P_0 K + \lambda_1 K P_1 K + \lambda_2 K P_2 K + \lambda_3 K P_3 K \end{aligned}$$

siendo $\lambda_0 = 0$, $\lambda_1 = \omega$, $\lambda_2 = \omega^2$, $\lambda_3 = \omega^3 = 1$ y P_i proyectores disjuntos para $i = 0, 1, 2, 3$.

Además, usando esta propiedad de los proyectores, se tiene

$$\begin{aligned} A^2 &= (\lambda_0 P_0 + \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \lambda_3 P_3)^2 \\ &= \lambda_0^2 P_0 + \lambda_1^2 P_1 + \lambda_2^2 P_2 + \lambda_3^2 P_3 \\ &= \lambda_0 P_0 + \lambda_2 P_1 + \lambda_1 P_2 + \lambda_3 P_3. \end{aligned}$$

Comparando las expresiones para KAK y A^2 y, teniendo en cuenta la unicidad de la descomposición espectral, se obtiene que

$$P_0 = KP_0K, \qquad P_1 = KP_2K, \qquad P_2 = KP_1K, \qquad P_3 = KP_3K,$$

siendo la expresión $P_2 = KP_1K$ redundante ya que es equivalente a la expresión $P_1 = KP_2K$.

- Caso $s = 2$. Sea ahora $K \in \mathbb{C}^{n \times n}$ una matriz involutiva, y A una matriz que cumple

$$KAK = A^3.$$

Como en el caso anterior, de estas condiciones se deduce que $A^9 = A$, puesto que

$$A^9 = A^3A^3A^3 = KAKKAKKAK = KA^3K = A.$$

Por tanto se cumple que, de nuevo, por la Proposición 1.1,

(a) A es diagonalizable.

(b) $\sigma(A) \subseteq \{0, \omega, \omega^2, \omega^3, \omega^4, \omega^5, \omega^6, \omega^7, \omega^8\}$, siendo $\omega = e^{\frac{2\pi i}{8}}$.

Denotando por $\lambda_0 = 0$ y $\lambda_j = \omega^j$ para $j = 1, \ldots, 8$ (obsérvese que $\omega^8 = 1$), y realizando un razonamiento análogo al caso de matrices $\{K, 2\}$-potentes, se obtiene que

$$P_0 = KP_0K, \qquad P_1 = KP_3K, \qquad P_2 = KP_6K, \qquad P_3 = KP_1K,$$

$$P_4 = KP_4K, \qquad P_5 = KP_7K, \qquad P_6 = KP_2K, \qquad P_7 = KP_5K,$$

$$P_8 = KP_8K,$$

puesto que $(\omega^1)^3 = \omega^3$, $(\omega^2)^3 = \omega^6$, $(\omega^5)^3 = \omega^7$, y además, $(\omega^j)^3 = \omega^j$ para $j = 0, 4, 8$.

Como antes, las expresiones $P_3 = KP_1K$, $P_6 = KP_2K$ y $P_7 = KP_5K$ son redundantes por ser equivalentes a las expresiones $P_1 = KP_3K$, $P_2 = KP_6K$ y $P_5 = KP_7K$, respectivamente.

A partir de los casos analizados para las matrices $\{K, 2\}$ y $\{K, 3\}$-potentes se puede observar una cierta relación entre los proyectores. Más concretamente, es posible en ambos casos establecer las correspondencias biyectivas que se muestran en el Cuadro 2.2 para los subíndices de los proyectores involucrados en cada caso.

$\{K,2\}-potente$	$\{K,3\}-potente$
$0 \longleftrightarrow 0$	$0 \longleftrightarrow 0$
$1 \longleftrightarrow 2$	$1 \longleftrightarrow 3$
$2 \longleftrightarrow 1$	$2 \longleftrightarrow 6$
$3 \longleftrightarrow 3$	$3 \longleftrightarrow 1$
	$4 \longleftrightarrow 4$
	$5 \longleftrightarrow 7$
	$6 \longleftrightarrow 2$
	$7 \longleftrightarrow 5$
	$8 \longleftrightarrow 8$

Cuadro 2.2: Correspondencia biyectiva.

2.3.2. Caracterización de matrices $\{K, s+1\}$-potentes

Con el fin de generalizar los casos particulares anteriormente analizados a matrices $\{K, s+1\}$-potentes es necesario establecer una relación entre los proyectores correspondientes. Esto se realizará a partir de la función φ construida en el siguiente lema, basada en el Cuadro 2.2.

Lema 2.5 *Sea* $s \in \{1, 2, 3, \dots\}$ *y*

$$\varphi : \{0, 1, 2, \dots, (s+1)^2 - 2\} \to \{0, 1, 2, \dots, (s+1)^2 - 2\}$$

la función definida por $\varphi(j) = b_j$ *donde* b_j *es el menor entero no negativo tal que* $b_j \equiv j(s+1)$ $[\mathrm{mod}\ ((s+1)^2 - 1)]$. *Entonces* φ *es una función biyectiva.*

Demostración. Es evidente que la función φ está bien definida. Ahora, se definen los siguientes conjuntos:

$$B_1 = \{0, s+1, 2(s+1), \dots, s(s+1)\}$$

y, por recurrencia, para cada $k \in \{1, 2, \dots, s-1\}$, los conjuntos

$$B_{k+1} = \{1\} + B_k$$

y, finalmente,

$$B_{s+1} = \{s, (s+1)+s, 2(s+1)+s, \dots, (s-1)(s+1)+s\}.$$

Denominando B a la unión de todos ellos, por construcción se obtiene

$$B = \bigcup_{k=1}^{s+1} B_k = \{0, 1, 2, \dots, (s+1)^2 - 2\}.$$

A continuación se demostrará que para cada $b \in B$, existe un valor único $j \in \{0, 1, 2, \dots, (s+1)^2 - 2\}$ tal que $b \equiv j(s+1)$ [mod $((s+1)^2 - 1)$] donde b es el menor entero no negativo que satisface estas condiciones. Para esto, primero se construyen los siguientes conjuntos:

$$J_1 = \{0, 1, 2, \dots, s\}$$

y, por recurrencia, para cada $i \in \{1, 2, \dots, s-1\}$ los conjuntos

$$J_{i+1} = \{s+1\} + J_i$$

y, finalmente,

$$J_{s+1} = \{s(s+1), s(s+1)+1, s(s+1)+2, \dots, s(s+1)+(s-1)\}.$$

Sea $b \in B$. Entonces existe $k \in \{1, 2, \dots, s+1\}$ tal que $b \in B_k$.

Si $k = 1$ entonces $b \in B_1$, y es evidente que existe un único $j \in J_1$ tal que $b = j(s+1)$ y por tanto $b \equiv j(s+1)$ [mod $((s+1)^2 - 1)$].

Si $k \in \{2, 3, \dots, s\}$ entonces

$$b \in B_k = \{k-1, (s+1)+(k-1), 2(s+1)+(k-1), \dots, s(s+1)+(k-1)\},$$

por tanto es evidente que existe un único $j \in J_k$ tal que $j(s+1) = b + (k-1)((s+1)^2 - 1)$, y por tanto, $b \equiv j(s+1)$ [mod $((s+1)^2 - 1)$].

Finalmente, si $b \in B_{s+1}$ entonces es evidente que existe un único $j \in J_{s+1}$ tal que $j(s+1) = b+s((s+1)^2-1)$ y por tanto $b \equiv j(s+1)$ [mod $((s+1)^2-1)$].

Además, por construcción,

$$\bigcup_{i=1}^{s+1} J_i = \{0, 1, 2, \ldots, (s+1)^2 - 2\}$$

y por tanto el razonamiento previo demuestra la existencia. Finalmente, es obvio que $\#(J_i) = s+1$ para $i \in \{1, 2, \ldots, s\}$, $\#(J_{s+1}) = s$ y la condición $J_i \cap J_k = \emptyset$ se cumple para cada $i, k \in \{1, 2, \ldots, s+1\}$ con $i \neq k$, lo que garantiza la unicidad. Esto finaliza la demostración. ■

La teoría espectral es un enfoque adecuado para obtener caracterizaciones de diferentes clases de matrices que incluyen potencias [12]. Se utilizará esta teoría con el propósito de caracterizar las matrices $\{K, s+1\}$-potentes.

Teorema 2.2 *Sea $K \in \mathbb{C}^{n\times n}$ una matriz involutiva, $s \in \{1, 2, 3, \ldots\}$ y sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) A es $\{K, s+1\}$-potente.

(b) A es diagonalizable, $\sigma(A) \subseteq \{0\} \cup \Omega_{(s+1)^2-1}$, $KP_jK = P_{\varphi(j)}$, donde $j \in \{0, 1, \ldots, (s+1)^2 - 2\}$ y $KP_{(s+1)^2-1}K = P_{(s+1)^2-1}$ siendo φ la biyección definida en el Lema 2.5 y $P_0, P_1, \ldots, P_{(s+1)^2-1}$ los proyectores que aparecen en la descomposición espectral de A dada en el Teorema 1.1 asociados a los valores propios

$$0, \omega^1_{(s+1)^2-1}, \ldots, \omega^{(s+1)^2-2}_{(s+1)^2-1}, 1,$$

respectivamente.

(c) $A^{(s+1)^2} = A$, $KP_jK = P_{\varphi(j)}$, donde $j \in \{0, 1, \ldots, (s+1)^2 - 2\}$ y además $KP_{(s+1)^2-1}K = P_{(s+1)^2-1}$ siendo φ la biyección definida en el Lema 2.5

y $P_0, P_1, \ldots, P_{(s+1)^2-1}$ los proyectores que aparecen en la descomposición espectral de A dada en el Teorema 1.1 asociados a los valores propios

$$0, \omega^1_{(s+1)^2-1}, \ldots, \omega^{(s+1)^2-2}_{(s+1)^2-1}, 1,$$

respectivamente.

Demostración.

$(a) \Longrightarrow (b)$ Como A es $\{K, s+1\}$-potente, la propiedad (II) del Lema 2.1 implica que $A^{(s+1)^2} = A$. Por la Proposición 1.1 se tiene que A es diagonalizable y $\sigma(A) \subseteq \{0\} \cup \Omega_{s+1)^2-1}$.

Por otra parte, existen proyectores disjuntos $P_0, P_1, \ldots, P_{(s+1)^2-1}$ (Teorema 1.1) tal que

$$A = \sum_{j=1}^{(s+1)^2-1} \omega^j_{(s+1)^2-1} P_j \qquad \text{y} \qquad \sum_{j=0}^{(s+1)^2-1} P_j = I_n, \tag{2.3}$$

donde se debe entender que $P_{j_0} = O$ si existe $j_0 \in \{1, 2, \ldots, (s+1)^2 - 1\}$ tal que $\omega^{j_0}_{(s+1)^2-1} \notin \sigma(A)$ y además, que $P_0 = O$ cuando $0 \notin \sigma(A)$.

Pre y postmultiplicando las dos expresiones anteriores por la matriz K se obtiene

$$KAK = \sum_{j=1}^{(s+1)^2-1} \omega^j_{(s+1)^2-1} K P_j K$$

y

$$\sum_{j=0}^{(s+1)^2-1} K P_j K = I_n \tag{2.4}$$

ya que $K^2 = I_n$. Por tanto, como los proyectores P_j son disjuntos dos a dos, es evidente que KP_jK también son proyectores disjuntos dos a dos para todo $j = 0, 1, \ldots, (s+1)^2 - 1$, ya que

$$(KP_jK)^2 = KP_j^2K = KP_jK$$

y

$$(KP_jK)(KP_tK) = KP_jP_tK = O$$

para todo $j, t \in \{0, 1, \ldots, (s+1)^2 - 1\}$. De nuevo, como P_j son proyectores disjuntos dos a dos, de (5.2) se deduce por recurrencia que

$$A^{s+1} = \sum_{j=1}^{(s+1)^2-1} \omega_{(s+1)^2-1}^{j(s+1)} P_j$$

y como $\varphi(j) \equiv j(s+1)$ [mod $((s+1)^2 - 1)$] para todo $j = 1, 2, \ldots, (s+1)^2 - 2$ se llega a que

$$A^{s+1} = \sum_{j=1}^{(s+1)^2-2} \omega_{(s+1)^2-1}^{\varphi(j)} P_j + P_{(s+1)^2-1}.$$

Utilizando la hipótesis y el Lema 2.1, e identificando las expresiones KAK y A^{s+1} se obtiene

$$\sum_{i=1}^{(s+1)^2-2} \omega_{(s+1)^2-1}^{i} KP_iK + KP_{(s+1)^2-1}K = \sum_{j=1}^{(s+1)^2-2} \omega_{(s+1)^2-1}^{\varphi(j)} P_j + P_{(s+1)^2-1}.$$

Como φ es una biyección, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, (s+1)^2 - 2\}$, existe un único $j \in \{1, 2, \ldots, (s+1)^2 - 2\}$ tal que $i = \varphi(j)$. A partir de la unicidad de la descomposición espectral se obtiene que para cada $i \in \{1, 2, \ldots, (s+1)^2 - 2\}$, existe un único $j \in \{1, 2, \ldots, (s+1)^2 - 2\}$ tal que $KP_{\varphi(j)}K = KP_iK = P_j$ y por tanto se cumple que $KP_jK = P_{\varphi(j)}$. Es claro que dicha unicidad también implica que $KP_{(s+1)^2-1}K = P_{(s+1)^2-1}$. Finalmente, de (5.2), se obtiene

$$P_0 = I_n - \sum_{j=1}^{(s+1)^2-1} P_j$$

y teniendo en cuenta (2.4) y la definición de biyección φ se obtiene

$$KP_0K = I_n - \sum_{i=1}^{(s+1)^2-2} KP_iK - KP_{(s+1)^2-1}K$$

$$
\begin{aligned}
&= I_n - \sum_{j=1}^{(s+1)^2-2} KP_{\varphi(j)}K - KP_{(s+1)^2-1}K \\
&= I_n - \sum_{i=1}^{(s+1)^2-2} P_i - P_{(s+1)^2-1} \\
&= P_0.
\end{aligned}
$$

Se debe observar que en el caso de que exista $j_0 \in \{1, 2, \ldots, (s+1)^2 - 2\}$ tal que $\omega_{(s+1)^2-1}^{j_0} \notin \sigma(A)$, se ha indicado que se tiene que considerar $P_{j_0} = O$. En esta situación, también se debe cumplir que $P_{\varphi(j_0)} = KP_{j_0}K = O$.

$(b) \Longrightarrow (a)$ Por hipótesis y por el Teorema 1.1, es evidente que

$$
A = \sum_{j=1}^{(s+1)^2-1} \omega_{(s+1)^2-1}^{j} P_j \tag{2.5}
$$

y por recurrencia se obtiene

$$
A^{s+1} = \sum_{j=1}^{(s+1)^2-1} \omega_{(s+1)^2-1}^{j(s+1)} P_j.
$$

Mediante un razonamiento similar al de la implicación $(a) \Longrightarrow (b)$ y utilizando la hipótesis se tiene que

$$
\begin{aligned}
A^{s+1} &= \sum_{j=1}^{(s+1)^2-2} \omega_{(s+1)^2-1}^{\varphi(j)} P_j + P_{(s+1)^2-1} \\
&= \sum_{j=1}^{(s+1)^2-2} \omega_{(s+1)^2-1}^{\varphi(j)} KP_{\varphi(j)}K + KP_{(s+1)^2-1}K \\
&= \sum_{i=1}^{(s+1)^2-1} \omega_{(s+1)^2-1}^{i} KP_iK \\
&= KAK,
\end{aligned}
$$

donde en el último paso se ha utilizado (2.5).

$(b) \Longleftrightarrow (c)$ Es suficiente demostrar que las condiciones A diagonalizable y $\sigma(A) \subseteq \{0\} \cup \Omega_{(s+1)^2-1}$ equivalenten a $A^{(s+1)^2} = A$.

Pero este hecho es consecuencia directa de aplicar el Lema 1.1 particularizado para $k = (s+1)^2 - 1$. Esto termina la demostración. ■

Nota 2.1 *Como se puede observar en la demostración del Teorema 2.2, para cada* $j_0 \in \{0, 1, 2, \ldots, (s+1)^2 - 2\}$*, los proyectores* P_{j_0} *y* $P_{\varphi(j_0)}$ *deben ser ambos nulos, o bien, ambos proyectores no nulos en la descomposición espectral de* A *porque* $KP_{j_0}K = P_{\varphi(j_0)}$*. Además, el proyector* $P_{(s+1)^2-1}$ *puede aparecer o no en esa descomposición satisfaciendo las relaciones indicadas en los apartados (b) y (c) dependiendo de si el valor propio* 1 *pertenece o no al espectro de* A*. Por ejemplo, si* $s = 2$ *(es decir,* $(s+1)^2 - 1 = 8$*) y* ω *es una raíz primitiva de la unidad de orden 8, entonces* $A = \omega^7 I_n$ *no puede ser una matriz* $\{K, 3\}$*-potente para ninguna matriz involutiva* $K \in \mathbb{C}^{n \times n}$*. En efecto, el espectro de la matriz* A *debería contener el valor propio* ω^5 *(debido a que* $KP_7K = P_{\varphi(7)} = P_5$*), lo que conduciría a una contradicción. También se puede observar directamente que* $KA^3K = \omega^5 K^2 = \omega^{-2} A \neq A$*.*

Ejemplo 2.2 *Sean las matrices*

$$A = \begin{bmatrix} k & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \qquad y \qquad K = \begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

con $k \in \mathbb{C} - \{\pm 2\}$*. Para este ejemplo,* $A \in \mathbf{P}^{(K,s)}$ *si y sólo si* $k = 2\cos\left(\frac{2\pi r}{s+2}\right)$*, con* $r \in \{1, 2, \ldots, s+1\} - \left\{\frac{s+2}{2}\right\}$*. En efecto, primero se diagonaliza la matriz* A *mediante* $A = PDP^{-1}$ *donde*

$$D = \begin{bmatrix} \frac{k+\sqrt{k^2-4}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{k-\sqrt{k^2-4}}{2} \end{bmatrix} \qquad y \qquad P = \begin{bmatrix} \frac{-k-\sqrt{k^2-4}}{2} & \frac{-k+\sqrt{k^2-4}}{2} \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ahora,

$$P^{-1}KAKP = \begin{bmatrix} \frac{k-\sqrt{k^2-4}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{k+\sqrt{k^2-4}}{2} \end{bmatrix}$$

e identificando con D^{s+1} se obtiene que

$$\begin{cases} a = b^{s+1} \\ b = a^{s+1} \end{cases}$$

donde $a = \frac{k-\sqrt{k^2-4}}{2}$ *y* $b = \frac{k+\sqrt{k^2-4}}{2}$. *De este último sistema se obtiene que* $a = 0 = b$ *ó* $a, b \in \Omega_{(s+1)^2-1}$. *El caso* $a = 0 = b$ *supone una contradicción y por tanto se descarta. Con un sencillo cálculo se obtiene*

$$k = \tfrac{1+a^2}{a} \qquad \text{con } \sqrt{k^2-4} = \tfrac{1-a^2}{a}$$

y

$$k = \tfrac{1+b^2}{b} \qquad \text{con } \sqrt{k^2-4} = -\tfrac{1-b^2}{b}.$$

Por tanto, $b = a$ $(\neq 0)$ *ó* $b = \frac{1}{a}$ *(cuando* $b \neq a$*). De* $b = a$ *se obtiene que* $a = \pm 1$ *y* $k = \pm 2$*, los cuales se descartan. De* $a \in \Omega_{(s+1)^2-1}$ *se puede escribir*

$$k = a + a^{-1} = e^{\frac{2\pi i t}{(s+1)^2-1}} + e^{-\frac{2\pi i t}{(s+1)^2-1}} = 2\cos\left(\frac{2\pi t}{(s+1)^2-1}\right) \tag{2.6}$$

para algún $t \in \{0, 1, \ldots, (s+1)^2-2\}$. *Además,* $t \neq 0$ *(porque* $k \neq 2$*) y* $t \neq \frac{s(s+2)}{2}$ *cuando* s *es par (porque* $k \neq -2$*). Sustituyendo (2.6) en el sistema anterior se obtiene*

$$k = 2\cos\left(\frac{2\pi r}{s+2}\right), \qquad \text{con } r \in \{1, 2, \ldots, s+1\} - \left\{\frac{s+2}{2}\right\}.$$

Tal y como se ha visto, $A^{(s+1)^2} = A$ se cumple para cada matriz A que sea $\{K, s+1\}$-potente. ¿Sería posible que exista una potencia k de A tal que $A^k = A$ se cumpla siendo $k < (s+1)^2$? La respuesta está dada en el siguiente resultado.

Corolario 2.2 *Sea* $K \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *una matriz involutiva,* $s \in \{1, 2, 3, \ldots\}$ *y sea* $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *de modo que exista un entero positivo* $1 < k < (s+1)^2$ *que cumpla*

$A^k = A$. *Entonces* A *es una matriz* $\{K, s+1\}$*-potente si y sólo si* $k-1$ *divide a* $(s+1)^2 - 1$, A *es diagonalizable,*

$$\sigma(A) = \{\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_t\} \subseteq \{0\} \cup \Omega_{k-1} \tag{2.7}$$

(siendo $\lambda_i \neq \lambda_j$ *para* $i \neq j$*, con* $i, j \in \{0, 1, \ldots, t\}$*), y para cada* $i \in \{0, 1, \ldots, t\}$ *existe un único* $j \in \{0, 1, \ldots, t\}$ *tal que* $\lambda_i = \lambda_j^{s+1}$ *y* $P_i = KP_jK$ *donde* $P_0, P_1, \ldots, P_t$ *son proyectores que aparecen en la descomposición espectral del Teorema 1.1 de* A *asociados a los valores propios dados en (2.7), respectivamente.*

Demostración. Como A es $\{K, s+1\}$-potente, por el Teorema 2.2, la matriz A es diagonalizable y $\sigma(A) \subseteq \{0\} \cup \Omega_{(s+1)^2-1}$. Como $\{A, A^2, \ldots, A^{k-1}\}$ es un subgrupo de orden $k-1$ del grupo cíclico $\{A, A^2, \ldots, A^{(s+1)^2-1}\}$ de orden $(s+1)^2 - 1$ se tiene que $k-1$ divide a $(s+1)^2 - 1$. La suposición $A^k = A$ conduce a que $\sigma(A) \subseteq \{0\} \cup \Omega_{k-1}$ y por tanto $\sigma(A) \subseteq \{0\} \cup \Omega_{\text{mcd}(k-1,(s+1)^2-1)} = \{0\} \cup \Omega_{k-1}$. A partir de $A = KA^{s+1}K$ y de la unicidad de la descomposición espectral, se obtiene la correspondencia $\lambda_i = \lambda_j^{s+1}$ y $P_i = KP_jK$ tal y como se ha indicado en el enunciado.

La implicación recíproca se puede demostrar de forma similar, tal y como se ha hecho en el Teorema 2.2. ■

Ejemplo 2.3 *La matriz*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -i \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

es $\{K, 2\}$*-potente para la matriz involutiva*

$$K = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

y cumple $A^4 = A$. Se puede comprobar que, en este caso,

$$\sigma(A) = \{\omega, \omega^2, \omega^3\} = \left\{ \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}, \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}, 1 \right\},$$

siendo $\omega = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$. Los proyectores correspondientes son

$$P_1 = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & -i\,\omega & -i\,\overline{\omega} \\ i\,\overline{\omega} & 1 & \omega \\ i\,\omega & \overline{\omega} & 1 \end{bmatrix}, \quad P_2 = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & -i\,\overline{\omega} & -i\,\omega \\ i\,\omega & 1 & \overline{\omega} \\ i\,\overline{\omega} & \omega & 1 \end{bmatrix},$$

$$P_3 = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & -i & -i \\ i & 1 & 1 \\ i & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

y la relación entre ellos es: $KP_1K = P_2$ y $KP_3K = P_3$.

Por otra parte, se puede verificar fácilmente que cualquier matriz $\{K, s+1\}$-potente tiene una matriz inversa de grupo. En efecto, si A es $\{K, s+1\}$-potente entonces $KA^{s+1}K = A$. Luego

$$\mathrm{rango}(A) = \mathrm{rango}(KA^{s+1}K) = \mathrm{rango}(A^{s+1}) \leq \mathrm{rango}(A^2) \leq \mathrm{rango}(A),$$

es decir,

$$\mathrm{rango}(A^2) = \mathrm{rango}(A)$$

con lo que $A^{\#}$ existe. Este hecho permitirá obtener otra equivalencia para las matrices $\{K, s+1\}$-potentes mediante este tipo de inversas generalizadas.

En [6] se ha demostrado la equivalencia entre las condiciones $A^{\#} = A$ y $A^3 = A$. En el siguiente lema se realiza una extensión directa.

Lema 2.6 *Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) Existe la inversa de grupo $A^{\#}$ y $A^{\#} = A^{(s+1)^2-2}$.

(b) $A^{(s+1)^2} = A$.

Demostración.

$(a) \Rightarrow (b)$ *Si* $A^{\#} = A^{(s+1)^2-2}$ *entonces, por definición de inversa de grupo se tiene que* $AA^{\#}A = A$, *luego* $AA^{(s+1)^2-2}A = A$, *es decir,* $A^{(s+1)^2} = A$.

$(b) \Rightarrow (a)$ *Sabiendo que* $A^{(s+1)^2} = A$ *se tiene que la matrix* $X = A^{(s+1)^2-2}$ *cumple que*

(I) $AXA = AA^{(s+1)^2-2}A = A^{(s+1)^2} = A$.

(II) $XAX = A^{(s+1)^2-2}AA^{(s+1)^2-2} = A^{(s+1)^2}A^{(s+1)^2-3} = AA^{(s+1)^2-3} = A^{(s+1)^2-2} = X$.

(III) $AX = A^{(s+1)^2-1} = XA$.

Por la unicidad de la inversa de grupo se deduce que $A^{\#} = X$.

■

Corolario 2.3 *Sea* $K \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *una matriz involutiva,* $s \in \{1, 2, 3, \dots\}$ *y sea* $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. *Entonces se cumple que* A *es* $\{K, s+1\}$*-potente si y sólo si se cumplen las condiciones siguientes:*

(I) $A^{\#} = A^{(s+1)^2-2}$,

(II) $KP_jK = P_{\varphi(j)}$, *para* $j \in \{0, 1, 2, \dots, (s+1)^2-2\}$,

(III) $KP_{(s+1)^2-1}K = P_{(s+1)^2-1}$,

donde φ *es la biyección definida en el Lema 2.5, y* $P_0, P_1, \dots, P_{(s+1)^2-1}$ *son los proyectores que aparecen en la descomposición espectral de* A *dada en el Teorema 1.1 asociados a los valores propios*

$$0, \omega^1_{(s+1)^2-1}, \dots, \omega^{(s+1)^2-2}_{(s+1)^2-1}, 1,$$

respectivamente.

Demostración. La demostración es una consecuencia inmediata del Lema 2.6 y de la propiedad (c) del Teorema 2.2. ■

De nuevo, como cualquier matriz $\{K, s+1\}$-potente tiene una inversa de grupo, se puede dar otra caracterización de las matrices $\{K, s+1\}$-potentes mediante inversas generalizadas. En realidad, se utilizará el siguiente resultado: una matriz cuadrada tiene índice 1 si y sólo si A y A^2 tienen el mismo rango. Se recuerda que el índice de una matriz cuadrada A es el menor entero no negativo k tal que $\mathrm{rango}(A^k) = \mathrm{rango}(A^{k+1})$ [7].

Teorema 2.3 *Sea $K \in \mathbb{C}^{n\times n}$ una matriz involutiva, $s \in \{1, 2, 3, \dots\}$ y sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Entonces A es una matriz $\{K, s+1\}$-potente si y sólo si existen dos matrices invertibles $Q, P \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tales que*

$$A = Q \begin{bmatrix} D & O \\ O & O \end{bmatrix} Q^{-1}, \qquad K = P \begin{bmatrix} X & O \\ O & T \end{bmatrix} P^{-1},$$

$$P^{-1}Q = \begin{bmatrix} W & O \\ O & I_{n-r} \end{bmatrix},$$

donde $D = [d_{ij}] \in \mathbb{C}^{r\times r}$ es diagonal, $r = \mathrm{rango}(A)$, y $d_{ii} \in \{0\} \cup \Omega_{(s+1)^2-1}$; $X \in \mathbb{C}^{r\times r}$ y $T \in \mathbb{C}^{(n-r)\times(n-r)}$ son matrices involutivas, y $W \in \mathbb{C}^{r\times r}$ es una matriz invertible tal que $C = WDW^{-1} \in \mathbb{C}^{r\times r}$ es $\{X, s+1\}$-potente.

Demostración. Como se ha comprobado en la página 34, si A es $\{K, s+1\}$-potente entonces A tiene índice 1. Por tanto, por el Lema 1.1 de la página 4 es posible escribir A (de rango r) de la siguiente forma

$$A = P \begin{bmatrix} C & O \\ O & O \end{bmatrix} P^{-1}, \tag{2.8}$$

donde $C \in \mathbb{C}^{r\times r}$ es invertible. Utilizando esta expresión, se tiene que

$$A^{s+1} = P \begin{bmatrix} C^{s+1} & O \\ O & O \end{bmatrix} P^{-1}$$

y

$$KAK = KP \begin{bmatrix} C & O \\ O & O \end{bmatrix} P^{-1}K.$$

Igualando se obtiene

$$P \begin{bmatrix} C^{s+1} & O \\ O & O \end{bmatrix} P^{-1} = KP \begin{bmatrix} C & O \\ O & O \end{bmatrix} P^{-1}K^{-1}. \tag{2.9}$$

Se considera ahora la partición de $P^{-1}KP$ dada por

$$P^{-1}KP = \begin{bmatrix} X & Y \\ Z & T \end{bmatrix}$$

con X, Y, Z, T de tamaños adecuados según la partición de A dada en (2.8). Sustituyendo esta última matriz en (2.9) se obtiene

$$\begin{bmatrix} C^{s+1} & O \\ O & O \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X & Y \\ Z & T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X & Y \\ Z & T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C & O \\ O & O \end{bmatrix}$$

e identificando se llega a

$$C^{s+1}X = XC, \qquad C^{s+1}Y = O \qquad \text{y} \qquad ZC = O.$$

Como C es invertible, $Y = O$, $Z = O$ y por tanto

$$K = P \begin{bmatrix} X & O \\ O & T \end{bmatrix} P^{-1}.$$

Como $K^2 = I_n$, esta última expresión implica que X y T son matrices involutivas. Por tanto $XC^{s+1}X = C$, es decir, C es $\{X, s+1\}$-potente. Por el Teorema 2.2, existe una matriz invertible W y una matriz diagonal D tal que $C = WDW^{-1}$ donde los elementos de la diagonal de D pertenecen a $\{0\} \cup \Omega_{(s+1)^2-1}$. Sustituyendo estas expresiones en (2.8) se llega a

$$\begin{aligned} A &= P \begin{bmatrix} WDW^{-1} & O \\ O & O \end{bmatrix} P^{-1} \\ &= P \begin{bmatrix} W & O \\ O & I_{n-r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D & O \\ O & O \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W^{-1} & O \\ O & I_{n-r} \end{bmatrix} P^{-1} \end{aligned}$$

y denotando

$$Q = P \begin{bmatrix} W & O \\ O & I_{n-r} \end{bmatrix}$$

se obtiene la forma requerida para la matriz A.

La implicación recíproca se prueba como sigue. Como

$$A = Q \begin{bmatrix} D & O \\ O & O \end{bmatrix} Q^{-1}$$

y

$$\begin{bmatrix} X & O \\ O & T \end{bmatrix} P^{-1}Q = \begin{bmatrix} X & O \\ O & T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W & O \\ O & I_{n-r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} XW & O \\ O & T \end{bmatrix},$$

se tiene que

$$\begin{aligned} KA^{s+1}K &= P \begin{bmatrix} X & O \\ O & T \end{bmatrix} P^{-1}Q \begin{bmatrix} D^{s+1} & O \\ O & O \end{bmatrix} Q^{-1}P \begin{bmatrix} X & O \\ O & T \end{bmatrix} P^{-1} \\ &= P \begin{bmatrix} XW & O \\ O & T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D^{s+1} & O \\ O & O \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W^{-1}X & O \\ O & T \end{bmatrix} P^{-1} \\ &= P \begin{bmatrix} XWD^{s+1}W^{-1}X & O \\ O & O \end{bmatrix} P^{-1} \\ &= P \begin{bmatrix} XC^{s+1}X & O \\ O & O \end{bmatrix} P^{-1} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= P \begin{bmatrix} C & O \\ O & O \end{bmatrix} P^{-1} \\
&= P \begin{bmatrix} W & O \\ O & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D & O \\ O & O \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W^{-1} & O \\ O & I \end{bmatrix} P^{-1} \\
&= Q \begin{bmatrix} D & O \\ O & O \end{bmatrix} Q^{-1} \\
&= A
\end{aligned}
$$

Esto completa la demostración. ∎

Nota 2.2 *Suponiendo ahora que ambas matrices A y K comparten la misma matriz de semejanza, un razonamiento similar al realizado en el anterior teorema proporciona el siguiente resultado: A es una matriz $\{K, s+1\}$-potente si y sólo si existen matrices invertibles $P \in \mathbb{C}^{n\times n}$ y $C \in \mathbb{C}^{r\times r}$ tales que*

$$A = P \begin{bmatrix} C & O \\ O & O \end{bmatrix} P^{-1}, \qquad K = P \begin{bmatrix} X & O \\ O & T \end{bmatrix} P^{-1}$$

donde $r = \mathrm{rango}(A)$, $X \in \mathbb{C}^{r\times r}$ y $T \in \mathbb{C}^{(n-r)\times(n-r)}$ son matrices involutivas y C es una matriz $\{X, s+1\}$-potente.

También, aprovechando la estructura de la matriz involutiva K, se puede proporcionar el siguiente resultado.

Teorema 2.4 *Sea $K \in \mathbb{C}^{n\times n}$ una matriz involutiva y sea $P \in \mathbb{C}^{n\times n}$ una matriz invertible tal que*

$$K = P \begin{bmatrix} I_p & O \\ O & -I_q \end{bmatrix} P^{-1}.$$

Se supone que

$$A = P \begin{bmatrix} B & C \\ O & D \end{bmatrix} P^{-1}$$

donde $B \in \mathbb{C}^{p\times p}$, $C \in \mathbb{C}^{p\times q}$ y $D \in \mathbb{C}^{q\times q}$. Entonces A es $\{K, s+1\}$-potente si y sólo si B y D son $\{s+1\}$-potentes y

$$C + \sum_{i=0}^{s} B^{s-i} C D^i = O.$$

Demostración. Es fácil comprobar que

$$A^{s+1} = P \begin{bmatrix} B^{s+1} & \sum_{i=0}^{s} B^{s-i} C D^i \\ O & D^{s+1} \end{bmatrix} P^{-1} \tag{2.10}$$

puesto que

$$A^2 = P \begin{bmatrix} B^2 & BC + CD \\ O & D^2 \end{bmatrix} P^{-1},$$

$$A^3 = P \begin{bmatrix} B^3 & B^2C + BCD + CD^2 \\ O & D^3 \end{bmatrix} P^{-1},$$

$$A^4 = P \begin{bmatrix} B^4 & B^3C + B^2CD + BCD^2 + CD^3 \\ O & D^4 \end{bmatrix} P^{-1},$$

y así sucesivamente, de donde por inducción se deduce la expresión (2.9).

Ahora, después de realizar algunas manipulaciones algebraicas, se obtiene que $KA^{s+1}K = A$ si y sólo si B y D son matrices $\{s+1\}$-potentes y además $C + \sum_{i=0}^{s} B^{s-i} C D^i = O$, lo que finaliza la demostración. ■

Se puede obtener un resultado similar a este último asumiendo que la matriz A es semejante a una matriz triangular inferior por bloques. Sin embargo, cuando no se asume esta forma especial de A, la tesis del Teorema 2.4, en general, no se cumple. Por ejemplo, considérese

$$K = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} P^{-1}$$

y la matriz $\{K, 2\}$-potente

$$A = \begin{bmatrix} -3 & -2\sqrt{7} \\ \frac{\sqrt{7}}{2} & 2 \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} - \sqrt{7} \\ \frac{5}{2} + \sqrt{7} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} P^{-1}$$

donde

$$P = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Utilizando la misma notación que en el Teorema 2.4, es claro que las matrices

$$B = D = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

no son $\{2\}$-potentes y por tanto la conclusión no es válida.

Otra caracterización de las matrices $\{K, s+1\}$-potentes se presenta en el siguiente teorema.

Teorema 2.5 *Sea $K \in \mathbb{C}^{n\times n}$ una matriz involutiva, $s \in \{1, 2, 3, \dots\}$ y sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ con espectro*

$$\sigma(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_t\} \tag{2.11}$$

(siendo $\lambda_i \neq \lambda_j$ para $i \neq j$ con $i, j \in \{1, 2, \dots, t\}$). Entonces A es una matriz $\{K, s+1\}$-potente si y sólo si A es diagonalizable y para cada $i \in \{1, 2, \dots, t\}$ existe un único $j \in \{1, 2, \dots, t\}$ tal que $\lambda_i = \lambda_j^{s+1}$ y $P_i = KP_jK$ donde $P_1, P_2, \dots, P_t$ son los proyectores que aparecen en la descomposición espectral del Teorema 1.1 de A asociados a los valores propios dados en (2.11), respectivamente.

Demostración. Como A es $\{K, s+1\}$-potente, por el Teorema 2.2, se tiene que A es diagonalizable. De la expresión $A = KA^{s+1}K$, se obtiene que A es semejante a A^{s+1}. La unicidad de la descomposición espectral permite establecer la siguiente correspondencia: para cada $i \in \{1, 2, \dots, t\}$, hay un único $j \in \{1, 2, \dots, t\}$ tal que $\lambda_i = \lambda_j^{s+1}$ y $P_i = KP_jK$ tal y como se indica en el Teorema 2.2 ya que

$$A = \sum_{i=1}^{t} \lambda_i P_i, \qquad \text{y} \qquad KA^{s+1}K = \sum_{j=1}^{t} \lambda_j^{s+1} KP_jK.$$

La implicación recíproca se puede demostrar de forma similar por medio del teorema espectral. ■

Se puede observar que, bajo la notación del Teorema 2.5, es posible definir una función

$$\theta : \{1, 2, \ldots, t\} \to \{1, 2, \ldots, t\}$$

por medio de $\theta(i) = j$, donde j es el único elemento de $\{1, 2, \ldots, t\}$ tal que $\lambda_i = \lambda_j^{s+1}$. Por lo tanto, se observa que θ es una involución (en particular, biyectiva). Esta función permite escribir en el Teorema 2.5

$$\lambda_i = \lambda_{\theta(i)}^{s+1} \quad \text{y} \quad P_i = K P_{\theta(i)} K.$$

Otra condición necesaria para que A sea una matriz $\{K, s+1\}$-potente se proporciona en el siguiente resultado donde aparecen los vectores propios.

Corolario 2.4 *Sea $K \in \mathbb{C}^{n\times n}$ una matriz involutiva, $s \in \{1, 2, 3, \ldots\}$ y sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tal que $Ax_i = \lambda_i x_i$ siendo $\lambda_i \neq \lambda_j$ para $i \neq j$, $x_i \neq 0$ para $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Si existe $i_0 \in \{1, 2, \ldots, n\}$ tal que $A^{s+1}x_{\theta(i_0)} \neq \lambda_{i_0} x_{\theta(i_0)}$ entonces A no es $\{K, s+1\}$-potente.*

Demostración. Si se supone que A es $\{K, s+1\}$-potente entonces

$$A = P \begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & O \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ O & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} P^{-1}$$

y por tanto el Teorema 2.5 conduce a

$$A^{s+1} = P \begin{bmatrix} \lambda_1^{s+1} & \cdots & O \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ O & \cdots & \lambda_n^{s+1} \end{bmatrix} P^{-1}$$

$$= P \begin{bmatrix} \lambda_{\theta(1)} & \cdots & O \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ O & \cdots & \lambda_{\theta(n)} \end{bmatrix} P^{-1}$$

$$= P\Sigma \begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & O \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ O & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} \Sigma^T P^{-1}$$

$$= (P\Sigma) \begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & O \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ O & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} (P\Sigma)^{-1}$$

donde Σ representa un producto de matrices de permutación que reordena los valores propios. Este resultado es contrario a la hipótesis. ■

2.4. Combinaciones lineales

Como aplicación de los resultados presentados en las secciones anteriores se proporciona el siguiente teorema. Hay que recordar que dos matrices diagonalizables que conmutan comparten una base de vectores propios, y por tanto, son simultáneamente diagonalizables [18].

Teorema 2.6 *Sean c_1, c_2 números complejos no nulos y $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ matrices $\{K, s+1\}$-potentes no nulas tales que $AB = BA$. Supóngase que $C = c_1A + c_2B$ es una combinación lineal de A y B que sea $\{K, s+1\}$-potente. Entonces alguna de las siguientes condiciones se cumple:*

a) $c_1, c_2 \in \Omega_{(s+1)^2-1}$.

b) $c_1 \in \Omega_{(s+1)^2-1}$ *y existe* $r \in \{0, 1, \ldots, (s+1)^2 - 2\}$ *tal que* $\omega^r_{(s+1)^2-1} c_1 + c_2 \in \{0\} \cup \Omega_{(s+1)^2-1}$.

c) $c_2 \in \Omega_{(s+1)^2-1}$ *y existe* $t \in \{0, 1, \ldots, (s+1)^2 - 2\}$ *tal que* $c_1 + \omega^t_{(s+1)^2-1} c_2 \in \{0\} \cup \Omega_{(s+1)^2-1}$.

d) *Existe* $r, t \in \{0, 1, \ldots, (s+1)^2 - 2\}$ *tal que* $r+t$ *no es múltiplo de* $(s+1)^2 - 1$ *y existe* $\zeta_1, \zeta_2 \in \{0\} \cup \Omega_{(s+1)^2-1}$, *con* $\zeta_1 \neq 0$ *o* $\zeta_2 \neq 0$, *y*

$$c_1 = \frac{\zeta_1 \omega^t_{(s+1)^2-1} - \zeta_2}{\omega^{r+t}_{(s+1)^2-1} - 1}, \qquad c_2 = \frac{\zeta_2 \omega^r_{(s+1)^2-1} - \zeta_1}{\omega^{r+t}_{(s+1)^2-1} - 1}.$$

e) I) $c_1 + c_2 \in \{0\} \cup \Omega_{(s+1)^2-1}$.

II) *Existe* $t \in \{0, 1, \ldots, (s+1)^2 - 2\}$ *tal que* $\omega^{-t}_{(s+1)^2-1} c_1 + c_2 \in \{0\} \cup \Omega_{(s+1)^2-1}$.

Demostración. Como A y B son matrices $\{K, s+1\}$-potentes tales que $AB = BA$, existe (Teorema 1.3.19 de [18] y Teorema 2.2) una matriz invertible P y matrices diagonales D_A y D_B tales que $A = PD_AP^{-1}$ y $B = PD_BP^{-1}$. Por tanto,

$$C = c_1A + c_2B = P(c_1D_A + c_2D_B)P^{-1},$$

denotando

$$D_A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & O \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ O & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} \qquad \text{y} \qquad D_B = \begin{bmatrix} \mu_1 & \cdots & O \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ O & \cdots & \mu_n \end{bmatrix}.$$

Los valores propios de D_A, D_B y $c_1D_A + c_2D_B$ son elementos de $\{0\} \cup \Omega_{(s+1)^2-1}$ porque A, B y C son matrices $\{K, s+1\}$-potentes (Teorema 2.2). De este modo,

$$c_1\lambda_i + c_2\mu_i \in \{0\} \cup \Omega_{(s+1)^2-1}, \qquad \text{para todo } \; i = 1, \ldots, n. \tag{2.12}$$

Como $D_A \neq O$, existe $i_0 \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $\lambda_{i_0} \neq 0$ y por tanto $\lambda_{i_0} \in \Omega_{(s+1)^2-1}$. A partir de (2.12),

$$c_1 + c_2 \frac{\mu_{i_0}}{\lambda_{i_0}} \in \{0\} \cup \Omega_{(s+1)^2-1},$$

y además $\frac{\mu_{i_0}}{\lambda_{i_0}} \in \{0\} \cup \Omega_{(s+1)^2-1}$ porque $\Omega_{(s+1)^2-1}$ es un grupo multiplicativo. Análogamente, existe $j_0 \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $\mu_{j_0} \in \Omega_{(s+1)^2-1}$ porque $D_B \neq O$. De nuevo, a partir de (2.12) se obtiene

$$\frac{\lambda_{j_0}}{\mu_{j_0}} c_1 + c_2 \in \{0\} \cup \Omega_{(s+1)^2-1}.$$

Si $\mu_{i_0} = 0 = \lambda_{j_0}$ entonces $c_1, c_2 \in \Omega_{(s+1)^2-1}$ (porque $c_1 \neq 0 \neq c_2$) y por tanto se obtiene el caso (a).

Si $\mu_{i_0} = 0$ y $\lambda_{j_0} \in \Omega_{(s+1)^2-1}$ entonces $c_1 \in \Omega_{(s+1)^2-1}$ y existe $r \in \{0, 1, \ldots, (s+1)^2 - 2\}$ tal que $\omega^r_{(s+1)^2-1} c_1 + c_2 \in \{0\} \cup \Omega_{(s+1)^2-1}$. Así, se obtiene el caso (b).

Si $\mu_{i_0} \neq 0$ y $\lambda_{j_0} = 0$, se obtiene el caso (c) de forma similar al caso (b).

Finalmente, si $\mu_{i_0}, \lambda_{j_0} \in \Omega_{(s+1)^2-1}$ entonces hay que resolver el sistema lineal

$$\begin{cases} \omega^r_{(s+1)^2-1} c_1 + c_2 = \zeta_1 \\ c_1 + \omega^t_{(s+1)^2-1} c_2 = \zeta_2 \end{cases}$$

en las incógnitas c_1 y c_2 donde $\zeta_1, \zeta_2 \in \{0\} \cup \Omega_{(s+1)^2-1}$. Mediante eliminación de Gauss es fácil comprobar que

$$c_1 = \frac{\zeta_1 \omega^t_{(s+1)^2-1} - \zeta_2}{\omega^{r+t}_{(s+1)^2-1} - 1}, \qquad c_2 = \frac{\zeta_2 \omega^r_{(s+1)^2-1} - \zeta_1}{\omega^{r+t}_{(s+1)^2-1} - 1}$$

si $\omega^{r+t}_{(s+1)^2-1} \neq 1$, es decir, cuando $r+t$ no es múltiplo de $(s+1)^2 - 1$ (caso (d)). Cuando $\omega^{r+t}_{(s+1)^2-1} = 1$, hay dos posibilidades: $r = t = 0$ o $r + t = (s+1)^2 - 1$. El primero conduce al caso (e)-(i) y el segundo al caso (e)-(ii) ya que $\omega^r_{(s+1)^2-1} = \omega^{-t}_{(s+1)^2-1}$. Esto completa la demostración. ∎

CAPÍTULO 3

Relación con otras clases de matrices

3.1. Introducción

En este capítulo se analizan las matrices $\{K, s+1\}$-potentes considerando sus relaciones con diferentes clases de matrices complejas. Estas clases de matrices corresponden a: proyectores $\{s+1\}$-generalizados, matrices $\{K\}$-hermíticas, matrices normales y matrices $B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ que anticonmutan con K o tal que KB es involutiva, hermítica o normal. Además, se proporcionan nuevas relaciones para matrices centrosimétricas K-generalizadas.

Se dice que una matriz $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ es *anticentrosimétrica* si $JAJ = -A$, donde $J \in \mathbb{C}^{n\times n}$ es la matriz de intercambio con unos en la antidiagonal y ceros los elementos restantes. Estas matrices han sido estudiadas ampliamente por varios autores y tienen aplicaciones en ecuaciones diferenciales, procesamiento de señal, procesos de Markov, problemas de ingeniería, etc. (véanse, por ejemplo, [1, 2, 10, 24, 34]).

Con la intención de extender los resultados conocidos para matrices centrosimétricas, en [30] Stuart proporciona una generalización, encontrando todas las matrices que conmutan con una matriz de permutación. En [26], Li y Feng analizan matrices mirrorsimétricas (o con simetría tipo espejo), siendo ese trabajo un caso especial de las generalizaciones que se consideran en este estudio y tienen aplicaciones en líneas de transmisión multiconductoras. Se pueden encontrar otros resultados relacionados con esta clase de matrices, por ejemplo, en [9, 12, 13, 25, 28, 31, 32, 33].

Otra generalización conocida de la clase de matrices centrosimétricas son las denominadas matrices centrosimétricas K-generalizadas que son matrices $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ que cumplen $A = KAK$ donde $K \in \mathbb{C}^{n\times n}$ es una matriz involutiva. Un análisis de la teoría espectral de este tipo de matrices fue realizado en [36].

En lo que sigue, se utilizará el siguiente conjunto:

$$\mathbf{\Omega}^{(s)} = \{A \in \mathbb{C}^{n\times n} :\ \sigma(A) \subseteq \{0\} \cup \Omega_{s+1}\},$$

donde $\sigma(A)$ representa el conjunto de todos los valores propios de A, es decir, el espectro de A.

A lo largo de este capítulo, se asumirá que la matriz $K \in \mathbb{C}^{n\times n}$ es involutiva y que $s \in \{1, 2, 3, \ldots\}$. Además, como ya se ha indicado en la página 13 se denotará por $\mathbf{P}^{(K,s)}$ al conjunto de todas las matrices $\{K, s+1\}$-potentes, es decir,

$$\mathbf{P}^{(K,s)} = \{A \in \mathbb{C}^{n\times n} :\ KA^{s+1}K = A\}.$$

Por otra parte, serán necesarias las notaciones

$$K\mathbf{S} = \{KB :\ B \in \mathbf{S}\} \qquad \text{y} \qquad \mathbf{S}K = \{BK :\ B \in \mathbf{S}\}$$

donde K es la matriz fijada anteriormente y donde $\mathbf{S}$ es un subconjunto prefijado de $\mathbb{C}^{n\times n}$.

Una matriz $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ con la propiedad $KA^*K = A$ se denomina $\{K\}$-*hermítica*. En [17], Hill y Waters llaman matrices κ-hermíticas a las matrices

$\{K\}$-hermíticas. En su artículo, los autores enfatizan la permutación κ y ahora, en este estudio, se pone énfasis en la matriz K para ser consecuentes con las restantes definiciones. Es claro que la igualdad $KA^*K = A$ es equivalente a $KAK = A^*$ ya que $K^2 = I_n$.

Respecto a las propiedades de las matrices $\{K, s+1\}$-potentes analizadas en este capítulo, en particular, en la Sección 3.2, se obtienen relaciones entre matrices $\{K, s+1\}$-potentes y matrices $\{K\}$-hermíticas, proyectores $\{s+1\}$-generalizados, matrices unitarias y matrices $B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tal que KB sea involutiva. En la Sección 3.3, se analizan relaciones con matrices normales y matrices $B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tal que KB sea hermítica o normal. En la Sección 3.4, las matrices hermíticas y antihermíticas, y matrices $B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ anticonmutativas con K se relacionan con matrices $\{K, s+1\}$-potentes. En todos estos casos, se han estudiado relaciones entre estas clases de matrices, y en caso de haber obtenido una inclusión, se ha analizado si es propia. Por otra parte, se ha obtenido un conjunto de nuevas propiedades de las matrices centrosimétricas.

3.2. Análisis de $\mathbf{P}^{(K,s)}$ mediante diferentes conjuntos de matrices

Sea $s \in \{1, 2, 3, \dots\}$ y sea

$$\varphi : \{0, 1, 2, \dots, (s+1)^2 - 2\} \to \{0, 1, 2, \dots, (s+1)^2 - 2\}$$

la función dada por $\varphi(j) = b_j$ donde b_j es el menor entero no negativo tal que $b_j \equiv j(s+1)\ [\mathrm{mod}\ ((s+1)^2-1)]$. En el Lema 2.5 de la página 25 se ha demostrado que esta función φ es biyectiva. Por otra parte, en el Teorema 2.2 de la página 27 se ha demostrado que los valores propios de una matriz $\{K, s+1\}$-potente están incluidos en el conjunto constituido por $0, \omega^1_{(s+1)^2-1}, \dots, \omega^{(s+1)^2-2}_{(s+1)^2-1}, 1$ y dicha matriz A tiene asociados unos idempotentes principales. Se considerarán las matrices P_j's que cumplan las relaciones

$$KP_jK = P_{\varphi(j)} \quad \text{y} \quad KP_{(s+1)^2-1}K = P_{(s+1)^2-1} \tag{3.1}$$

para $j \in \{0, 1, \ldots, (s+1)^2 - 2\}$ donde $P_0, P_1, \ldots, P_{(s+1)^2-1}$ son los proyectores que aparecen el la descomposición espectral de A dada en el Teorema 1.1 asociados a los valores propios

$$0, \omega^1_{(s+1)^2-1}, \ldots, \omega^{(s+1)^2-2}_{(s+1)^2-1}, 1,$$

respectivamente. A partir de ahora, se dirá que los proyectores P_j's que satisfagan (3.1) cumplen la condición ($\mathcal{P}$).

El siguiente teorema reproduce las caracterizaciones de la clase de matrices $\{K, s+1\}$-potentes obtenidas previamente en el Teorema 2.2 y en el Corolario 2.2 de la página 32 utilizando la condición ($\mathcal{P}$).

Teorema 3.1 *Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) $A \in \mathbf{P}^{(K,s)}$.

(b) A es diagonalizable, $\sigma(A) \subseteq \{0\} \cup \Omega_{(s+1)^2-1}$ y las matrices P_j satisfacen la condición ($\mathcal{P}$).

(c) $A^{(s+1)^2} = A$ y las matrices P_j satisfacen la condición ($\mathcal{P}$).

(d) $A^{\#} = A^{(s+1)^2-2}$ y las matrices P_j satisfacen la condición ($\mathcal{P}$).

Considerando los conjuntos

$$\mathbf{D} = \{A \in \mathbb{C}^{n\times n} : \ A \text{ es diagonalizable}\},$$

$$\mathbf{\Phi} = \{A \in \mathbb{C}^{n\times n} : \ \text{proyectores } P_j \text{ que satisfacen la condición } (\mathcal{P})\},$$

$$\mathbf{P}^{(s)} = \{A \in \mathbb{C}^{n\times n} : \ A^{s+1} = A\},$$

$$\mathbf{G}^{(s)} = \{A \in \mathbb{C}^{n\times n} :\ A^{\#} = A^{s+1}\},$$

se puede reescribir el Teorema 3.1 de la siguiente forma más compacta:

$$\mathbf{P}^{(K,s)} = \mathbf{D} \cap \mathbf{\Omega}^{(s+1)^2-2} \cap \mathbf{\Phi} = \mathbf{P}^{((s+1)^2-1)} \cap \mathbf{\Phi} = \mathbf{G}^{((s+1)^2-3)} \cap \mathbf{\Phi}.$$

Según la notación anterior, se tiene que $\mathbf{P}^{(I_n,s)} = \mathbf{P}^{(s)}$. Por otra parte, $\mathbf{P}^{(1)}$ es el conjunto de todos las matrices idempotentes de tamaño $n \times n$. Además, $\mathbf{P}^{(s+2)} = \mathbf{G}^{(s)}$.

Es conocido que la matriz $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ con la propiedad $A^{s+1} = A^*$ para algún entero positivo s se denomina *proyector* $\{s+1\}$*-generalizado* [5, 12], y también que la matriz A se denomina $\{K\}$*-hermítica* cuando $KA^*K = A$. Estas clases de matrices se representarán mediante los siguientes conjuntos.

$$\mathbf{GP}^{(s)} = \{A \in \mathbb{C}^{n\times n} :\ A^{s+1} = A^*\},$$

$$\mathbf{H}^{(K)} = \{A \in \mathbb{C}^{n\times n} :\ KA^*K = A\}.$$

En el resultado que se establece en el Teorema 3.2 siguiente, se obtiene la relación entre los conceptos conocidos de proyector $\{s+1\}$-generalizado y de matriz $\{K\}$-hermítica y el concepto de matriz $\{K, s+1\}$-potente. Antes de ello se observan los siguientes ejemplos.

La matriz

$$A = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1+i & -1-i \\ 1+i & 1+i \end{bmatrix} \tag{3.2}$$

es un proyector $\{3\}$-generalizado para $K = I_2$. Sin embargo, A no es $\{K, 3\}$-potente ni $\{K\}$-hermítica.

Por otra parte, la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{bmatrix} \tag{3.3}$$

es $\{K\}$-hermítica para $K = I_2$. Sin embargo, A no es $\{K, s+1\}$-potente ni un proyector $\{s+1\}$-generalizado para ningún entero positivo impar s.

Finalmente, la matriz

$$A = \begin{bmatrix} -3 & -2\sqrt{7} \\ \frac{\sqrt{7}}{2} & 2 \end{bmatrix} \tag{3.4}$$

es $\{K, 2\}$-potente para

$$K = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}.$$

Sin embargo, A no es una matriz $\{K\}$-hermítica ni un proyector $\{2\}$-generalizado.

A partir de estos tres ejemplos, se han buscado relaciones entre proyectores $\{s+1\}$-generalizados, matrices $\{K, s+1\}$-potentes y matrices $\{K\}$-hermíticas. Es fácil ver que para que si dos de ellas son válidas también lo es la tercera.

Teorema 3.2 *Se cumplen las siguientes inclusiones:*

(a) $\mathbf{P}^{(K,s)} \cap \mathbf{H}^{(K)} \subseteq \mathbf{GP}^{(s)} \cap \mathbf{P}^{(s+2)} = \mathbf{GP}^{(s)}$.

(b) $\mathbf{P}^{(K,s)} \cap \mathbf{GP}^{(s)} \subseteq \mathbf{H}^{(K)} \cap \mathbf{P}^{(s+2)}$.

(c) $\mathbf{H}^{(K)} \cap \mathbf{GP}^{(s)} \subseteq \mathbf{P}^{(K,s)} \cap \mathbf{P}^{(s+2)}$.

Demostración. Sea $A \in \mathbf{P}^{(K,s)} \cap \mathbf{H}^{(K)}$. Entonces, $KAK = A^{s+1}$ y $KAK = A^*$. Por tanto, $A \in \mathbf{GP}^{(s)}$. A partir del Teorema 2.1 de [5] se tiene que $A^{s+3} = A$, por tanto $A \in \mathbf{P}^{(s+2)}$. Se observa que además se ha obtenido que $\mathbf{GP}^{(s)} \subseteq \mathbf{P}^{(s+2)}$, y entonces $\mathbf{GP}^{(s)} \cap \mathbf{P}^{(s+2)} = \mathbf{GP}^{(s)}$. Así, el apartado (a) queda demostrado.

Utilizando las definiciones, se puede ver fácilmente que ambas intersecciones $\mathbf{P}^{(K,s)} \cap \mathbf{GP}^{(s)}$ y $\mathbf{H}^{(K)} \cap \mathbf{GP}^{(s)}$ están incluidas en $\mathbf{H}^{(K)}$ y $\mathbf{P}^{(K,s)}$, respectivamente. De nuevo, la inclusión $\mathbf{GP}^{(s)} \subseteq \mathbf{P}^{(s+2)}$ conduce a las propiedades (b) y (c). ■

Los ejemplos que preceden al Teorema 3.2 muestran que ninguna de las condiciones implica las otras dos, y que, en general, las tres inclusiones son estrictas.

Se debe tener en cuenta que el Teorema 3.2 relaciona un conjunto que sólo depende de K con otros dos que dependen sólo de s, y con otro conjunto que depende de K y de s a la vez. Además, los tres conjuntos más pequeños en las inclusiones no son vacíos porque todos ellos contienen la matriz identidad.

Un caso particular importante es cuando se requiere que las matrices A son invertibles. En este caso, se obtienen relaciones con las matrices unitarias. Para esto, se definen los siguientes conjuntos

$$\mathbf{GL} = \{A \in \mathbb{C}^{n\times n} :\ A \text{ es invertible}\},$$

$$\mathbf{U} = \{A \in \mathbb{C}^{n\times n} :\ AA^* = A^*A = I_n\}.$$

Teorema 3.3 *Se cumplen las siguientes inclusiones:*

$$\mathbf{P}^{(K,s)} \cap \mathbf{H}^{(K)} \cap \mathbf{GL} \subseteq \mathbf{U}.$$

Demostración. Sea A una matriz $\{K, s+1\}$-potente y $\{K\}$-hermítica. El apartado (a) del Teorema 3.2 implica que $A^{s+3} = A$. Como A es invertible, se obtiene que $A^{s+2} = I_n$ y por tanto $AA^* = AA^{s+1} = I_n$, es decir, A es unitaria. Así, la demostración queda completada. ■

Incluso se puede decir más. En general,

$$\mathbf{P}^{(K,s)} \cap \mathbf{H}^{(K)} \cap \mathbf{GL} \subsetneq \mathbf{U} \tag{3.5}$$

ya que por ejemplo, la matriz dada en (3.2) es unitaria y pertenece a $\mathbf{P}^{(K,4)}$ pero no pertenece a $\mathbf{H}^{(K)}$ para $K = I_2$. También, la matriz dada en (3.3) es unitaria y $\{K\}$-hermítica pero no pertenece a $\mathbf{P}^{(K,s)}$ cuando s es impar para $K = I_2$.

Se obtienen varias observaciones interesantes como consecuencia directa de los Teoremas 3.2 y 3.3. La primera es:

$$\mathbf{P}^{(K,s)} \cap \mathbf{H}^{(K)} \cap \mathbf{GP}^{(s)} = \mathbf{P}^{(K,s)} \cap \mathbf{H}^{(K)} = \mathbf{P}^{(K,s)} \cap \mathbf{GP}^{(s)} = \mathbf{H}^{(K)} \cap \mathbf{GP}^{(s)}, \tag{3.6}$$

es decir, si un elemento pertenece a dos de los tres conjuntos considerados, entonces pertenece al conjunto restante.

Otra observación general basada en (3.5) y (3.2) es que se cumplen las siguientes inclusiones estrictas:

(a) $\mathbf{P}^{(K,s)} \cap \mathbf{H}^{(K)} \cap \mathbf{GL} \subsetneq \mathbf{U}$.

(b) $\mathbf{P}^{(K,s)} \cap \mathbf{GP}^{(s)} \cap \mathbf{GL} \subsetneq \mathbf{U}$.

(c) $\mathbf{H}^{(K)} \cap \mathbf{GP}^{(s)} \cap \mathbf{GL} \subsetneq \mathbf{U}$.

Incluso, a partir del Teorema 2.1 de [5] se puede demostrar que se cumple una inclusión más general.

Teorema 3.4 *Se cumple la siguiente inclusión:*

$$\mathbf{GP}^{(s)} \cap \mathbf{GL} \subseteq \mathbf{U}.$$

La matriz dada en (3.3) muestra que la última inclusión es estricta: s debe ser impar.

En (3.5) se ha presentado una inclusión que involucra el conjunto de matrices unitarias. ¿Qué ocurre con $\supseteq$ si se intersecta $\mathbf{U}$ con otro conjunto?

Sea

$$\mathbf{I}^{(s)} = \{A \in \mathbb{C}^{n\times n} : \ A^{s+1} = I_n\}.$$

Obsérvese que, cuando $s = 1$ el conjunto $\mathbf{I}^{(1)}$ corresponde a las matrices involutivas, y además, es evidente que $\mathbf{I}^{(s)} \subsetneq \mathbf{P}^{(s+1)}$ y que $\mathbf{I}^{(s)} = \mathbf{P}^{(s+1)} \cap \mathbf{GL}$.

Teorema 3.5 *Se cumplen las siguientes inclusiones:*

(a) $\mathbf{U} \cap K\mathbf{I}^{(1)} \subseteq \mathbf{H}^{(K)}$.

(b) $\mathbf{U} \cap \mathbf{H}^{(K)} \subseteq K\mathbf{I}^{(1)}$.

(c) $\mathbf{U} \cap \mathbf{P}^{(s+2)} \subseteq \mathbf{GP}^{(s)}$.

(d) $K\mathbf{I}^{(1)} \cap \mathbf{H}^{(K)} \subseteq \mathbf{U}$.

Demostración. Supóngase que A es unitaria y que existe $B \in \mathbf{I}^{(1)}$ tal que $A = KB$. Entonces $KAKA = (KA)^2 = B^2 = I_n$ y por tanto, $KAK = A^{-1} = A^*$. De esta forma, el apartado (a) queda probado.

Con la finalidad de demostrar el apartado (b), postmultiplicando por A la igualdad $KAK = A^*$ se obtiene $(KA)^2 = I_n$ ya que $A \in \mathbf{U}$. Así, $KA \in \mathbf{I}^{(1)}$ y por tanto $A \in K\mathbf{I}^{(1)}$.

Sea $A \in \mathbf{U} \cap \mathbf{P}^{(s+2)}$. Como A es invertible, $A^{s+3} = A$ implica que $A^{s+2} = I_n$ que es equivalente a $A^{s+1} = A^{-1} = A^*$. Así, $A \in \mathbf{GP}^{(s)}$.

Finalmente, si se supone que $KAK = A^*$ y $A = KB$ con $B^2 = I_n$, entonces el apartado (d) se deduce a partir de

$$A^*A = (KAK)A = (KA)^2 = B^2 = I_n.$$

De esta forma, la demostración queda completada. ■

Se puede ver que en general, las inclusiones del Teorema 3.5 son estrictas, como muestran los siguientes ejemplos.

(I) El apartado (a) se puede analizar mediante la matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

(II) El apartado (b) se puede analizar mediante la matriz

$$\begin{bmatrix} 0 & 2i \\ -\frac{1}{2}i & 0 \end{bmatrix}.$$

(III) El apartado (c) se puede analizar mediante la matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

(IV) El apartado (d) se puede analizar mediante la matriz dada por (3.2),

donde $s \in \{1, 2, 3, \dots\}$ para el caso (III). Además, en todos los casos se utiliza $K = I_2$.

Del Teorema 3.5 es posible ver que

$$\mathbf{U} \cap \mathbf{KI}^{(\mathbf{1})} = \mathbf{U} \cap \mathbf{H}^{(K)} = \mathbf{KI}^{(\mathbf{1})} \cap \mathbf{H}^{(K)} = \mathbf{U} \cap \mathbf{KI}^{(1)} \cap \mathbf{H}^{(K)}.$$

Para el conjunto $K\mathbf{I}^{(1)}$ también se pueden obtener las siguientes inclusiones:

(a) $K\mathbf{I}^{(1)} \cap \mathbf{P}^{(K,s)} \subseteq \mathbf{I}^{(s+1)}$.

(b) $\mathbf{GP}^{(s)} \cap K\mathbf{I}^{(1)} \cap \mathbf{GL} \subseteq \mathbf{P}^{(K,s)}$.

(c) $\mathbf{P}^{(s+2)} \cap K\mathbf{I}^{(1)} \cap \mathbf{H}^{(K)} \subseteq \mathbf{P}^{(K,s)}$.

La demostración requiere la propiedad (b) del Lema 2.3 y del Teorema 2.1 de [5]. En general, todas las inclusiones son estrictas. Para ello se consideran los siguientes ejemplos: la matriz del ejemplo (I) de la página 55 para (a), y la matriz dada en (3.4) para analizar (b) y (c).

De nuevo, ¿qué ocurre en (3.5) con $\supseteq$ si se intersecta $\mathbf{U}$ con $\mathbf{P}^{(K,s)}$? Se puede proporcionar el siguiente resultado.

Proposición 3.1 *Sea* $(\mathbf{P}^{(K,s)})^* = \{A^* : \ A \in \mathbf{P}^{(K,s)}\}$. *Entonces se cumple la siguiente igualdad:*

$$\mathbf{U} \cap \mathbf{P}^{(K,s)} = \mathbf{U} \cap (\mathbf{P}^{(K,s)})^*.$$

Demostración. Sea $A \in \mathbf{U}$. Se debe demostrar que $A \in \mathbf{P}^{(K,s)}$ si y sólo si $A^* \in \mathbf{P}^{(K,s)}$. En efecto, si $A \in \mathbf{P}^{(K,s)}$, utilizando la propiedad (e) del Lema 2.2 se tiene que

$$KA^*K = KA^{-1}K = (A^{-1})^{s+1} = (A^*)^{s+1}.$$

Así, $A^* \in \mathbf{P}^{(K,s)}$ y por tanto $A \in (\mathbf{P}^{(K,s)})^*$. La implicación recíproca se puede obtener de forma similar. Esto finaliza la demostración. ■

¿Qué se puede decir con respecto a la igualdad $\mathbf{P}^{(K,s)} = (\mathbf{P}^{(K,s)})^*$ cuando $A \notin \mathbf{U}$? En general, no se cumple. De hecho, la matriz dada en (3.4) pertenece a $\mathbf{P}^{(K,1)}$ y $A \notin \mathbf{U}$, pero A no pertenece a $(\mathbf{P}^{(K,1)})^*$.

Sin embargo, la igualdad sigue siendo válida en el caso que la matriz K es hermítica. El resultado siguiente extiende las propiedades (d) y (e) presentadas en el Lema 2.2.

Lema 3.1 *Sea* $(\mathbf{P}^{(K,s)})^{-1} = \{A^{-1} : A \in \mathbf{P}^{(K,s)} \cap \mathbf{GL}\}$. *Entonces*

(a) $\mathbf{P}^{(K^*,s)} = (\mathbf{P}^{(K,s)})^*$. *En particular,* $\mathbf{P}^{(K,s)} = (\mathbf{P}^{(K,s)})^*$ *si* K *es hermítica.*

(b) $\mathbf{P}^{(K,s)} \cap \mathbf{GL} = (\mathbf{P}^{(K,s)})^{-1}$.

En particular, $A \in (\mathbf{P}^{(K,s)})^{-1}$ si y sólo si $A^{-1} \in (\mathbf{P}^{(K,s)})^{-1}$.

Además, en general, la igualdad $\mathbf{P}^{(K,s)} = \mathbf{P}^{(K^*,s)}$ no se cumple cuando K no es hermítica. Esto se puede comprobar utilizando la matriz del ejemplo (3.4).

Por otra parte, se puede asegurar que en general

$$\mathbf{P}^{(K,s)} \cap \mathbf{P}^{(K^*,s)} \cap \mathbf{GL} \not\subseteq \mathbf{U},$$

como es posible comprobar mediante la matriz $\{K, 4\}$-potente

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 + i\sqrt{3} \\ 0 & -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$$

para $K = I_2$. También se observa que $\mathbf{P}^{(K,s)} \cap \mathbf{P}^{(K^*,s)} \neq \emptyset$ ya que contiene, al menos, a la matriz nula.

Con el fin de ver que en general $\mathbf{U} \not\subseteq \mathbf{P}^{(K,s)} \cap \mathbf{P}^{(K^*,s)}$, se puede considerar $A = -I_n$, cualquier número positivo impar s, y cualquier matriz involutiva $K \in \mathbb{C}^{n\times n}$.

Esta sección finaliza con el análisis del último conjunto considerado $\mathbf{P}^{(K,s)} \cap \mathbf{P}^{(K^*,s)}$. Recuérdese que K^*K es una matriz hermítica y semidefinida positiva. Por lo tanto, existe una matriz unitaria $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$ y una matriz diagonal $D \in \mathbb{R}^{n\times n}$ con elementos diagonales no negativos tal que

$$K^*K = UDU^*. \tag{3.7}$$

Teorema 3.6 *Sean $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$ una matriz unitaria y*

$$D = \operatorname{diag}(\lambda_1 I_{r_1}, \lambda_2 I_{r_2}, \ldots, \lambda_t I_{r_t})$$

una matriz diagonal no negativa como en (3.7) con $r_1 + r_2 + \cdots + r_t = n$ y $\lambda_i \neq \lambda_j$ para $i \neq j$. Entonces el conjunto $\mathbf{P}^{(K,s)} \cap \mathbf{P}^{(K^*,s)}$ es dado por todas las matrices de la forma $U\tilde{D}U^*$ siendo

$$\tilde{D} = \operatorname{diag}(A_{11}, A_{22}, \ldots, A_{tt}) \in \mathbf{P}^{(U^*KU,s)} \cap \mathbf{P}^{(U^*K^*U,s)}$$

con $A_{ii} \in \mathbb{C}^{r_i\times r_i}$ para $i = 1, 2, \ldots, t$.

Demostración. Sea $A \in \mathbf{P}^{(K,s)} \cap \mathbf{P}^{(K^*,s)}$. Entonces $A^{s+1} = KAK$ y $(A^*)^{s+1} = KA^*K$. Realizando algunas manipulaciones algebraicas se obtiene $K^*KA = AK^*K$. En efecto,

$$\begin{aligned} K^*KA &= K^*A^{s+1}K \\ &= \left(K^*\,(A^*)^{s+1}\,K\right)^* \\ &= (K^*KA^*KK)^* \\ &= AK^*K. \end{aligned}$$

Debido a que K^*K es hermítica y semidefinida positiva, se puede suponer que $K^*K = UDU^*$ con U y D como en el enunciado. Por tanto, sustituyendo en la igualdad anterior, se tiene

$$UDU^*A = AUDU^*$$

y en consecuencia

$$D\,(U^*AU) = (U^*AU)\,D.$$

Ahora, se particiona la matriz U^*AU de la siguiente forma

$$\tilde{A} = U^*AU = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1t} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2t} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{t1} & A_{t2} & \dots & A_{tt} \end{bmatrix}$$

donde los bloques son de tamaños adecuados conforme a D. Así, $\tilde{A}D = D\tilde{A}$ conduce a $A_{ij} = O$ para todos $i, j \in \{1, 2, \dots, t\}$ con $i \neq j$, y consecuentemente

$$A = U\mathrm{diag}(A_{11}, A_{22}, \dots, A_{tt})U^*.$$

Como $A \in \mathbf{P}^{(K,s)}$ se tiene que

$$U^*KU \begin{bmatrix} A_{11}^{s+1} & O & \dots & O \\ O & A_{22}^{s+1} & \dots & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & \dots & A_{tt}^{s+1} \end{bmatrix} U^*KU = \begin{bmatrix} A_{11} & O & \dots & O \\ O & A_{22} & \dots & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & \dots & A_{tt} \end{bmatrix}.$$

Entonces $\tilde{D} = \mathrm{diag}(A_{11}, A_{22}, \dots, A_{tt})$ es $\{U^*KU, s+1\}$-potente porque U^*KU es evidentemente involutiva. Un razonamiento similar es válido para $A \in \mathbf{P}^{(K^*,s)}$. Así, $\tilde{D} \in \mathbf{P}^{(U^*KU,s)} \cap \mathbf{P}^{(U^*K^*U,s)}$. La otra inclusión es evidente. ■

El teorema previo permite obtener otra representación para el conjunto $\mathbf{P}^{(K,s)}$ (véase el Teorema 3.1). Su ventaja es que la diagonalización está dada por una matriz unitaria U. Sin embargo, a diferencia del Teorema 3.1, la matriz diagonal $\tilde{D}$ está dada por bloques.

Se puede observar que, con respecto al espectro de cada A_{ii}, para $i = 1, 2, \dots, t$, se tiene

$$\sigma(A_{ii}) \subseteq \sigma(\tilde{D}) \subseteq \{0\} \cup \Omega_{(s+1)^2-1}.$$

3.3. Análisis de $\mathbf{P}^{(K,s)}$ mediante $\mathbf{GP}^{(s)}$ y la normalidad

Se pueden obtener más relaciones cuando se involucran las matrices hermíticas. Sea el conjunto

$$\mathbf{H} = \{A \in \mathbb{C}^{n\times n} : \; A^* = A\}.$$

Se debe tener en cuenta que $\mathbf{H}^{(I_n)} = \mathbf{H}$. Cuando $K \in \mathbf{H}$ se puede observar que $\mathbf{H} = K\mathbf{H}^{(K)} = \mathbf{H}^{(K)}K$ o bien, de forma equivalente, $\mathbf{H}^{(K)} = K\mathbf{H} = \mathbf{H}K$.

Hasta el final de esta sección, la matriz K es involutiva a menos que se especifique alguna hipótesis adicional de manera explícita.

Teorema 3.7 *Se cumple la siguiente inclusión:*

$$K\mathbf{H} \cap \mathbf{P}^{(K,s)} \subseteq K\mathbf{P}^{(2)}.$$

Demostración. Sea $A \in K\mathbf{H}\cap\mathbf{P}^{(K,s)}$. Es conocido que el espectro de la matriz hermítica KA es real y también, por la propiedad (c) del Lema 2.1, que está incluido en $\{0\} \cup \Omega_{2s}$ puesto que $A \in \mathbf{P}^{(K,s)}$. Por lo tanto, $\sigma(KA) \subseteq \{0, 1, -1\}$. Como KA es diagonalizable, entonces es tripotente, y por tanto, $A \in K\mathbf{P}^{(2)}$. ■

En general, la última inclusión es estricta tal y como muestran las siguientes matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ -3 & -2 & 1 \end{bmatrix} = KB$$

donde

$$K = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad \text{y} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Sin embargo, la condición adicional de que K sea hermítica permite obtener un resultado más interesante.

Teorema 3.8 *Sea* $K \in \mathbf{H}$. *Entonces*

$$K\mathbf{H} \cap \mathbf{P}^{(K,s)} = \mathbf{GP}^{(s)} \cap \mathbf{P}^{(K,s)}.$$

Demostración. Sea $A \in \mathbf{P}^{(K,s)}$. Se debe probar que $A \in K\mathbf{H}$ si y sólo si $A \in \mathbf{GP}^{(s)}$. En efecto, si existe $B \in \mathbf{H}$ tal que $A = KB$ entonces es obvio que $KA = B$ y por tanto $KA \in \mathbf{H}$. Además, las igualdades

$$KA = (KA)^* = A^*K$$

permiten concluir que $A^{s+1} = KAK = A^*$. De esta forma, $A \in \mathbf{GP}^{(s)}$.

Para la implicación recíproca, si $A \in \mathbf{GP}^{(s)}$, por definición se tiene que $A^{s+1} = A^*$. Por tanto, $KAK = A^*$ y $KA = A^*K$. Así, se obtiene que $A = K(A^*K)$, es decir, $A = KB$ donde $B = A^*K$ cumple

$$B^* = K^*A = KA = A^*K = B.$$

De esta forma, $B \in \mathbf{H}$ y finalmente $A \in K\mathbf{H}$, lo que termina la demostración.

■

Ahora se considerará el conjunto de las matrices normales:

$$\mathbf{N} = \{A \in \mathbb{C}^{n\times n} : \ AA^* = A^*A\}.$$

En [5], se han establecido las equivalencias entre las siguientes afirmaciones:

(PG1) $A^{s+1} = A^*$.

(PG2) A es normal y $\sigma(A) \subseteq \Omega_{s+2}$.

(PG3) A es normal y $A^{s+3} = A$.

A partir de estas equivalencias y del Teorema 3.8, se puede obtener una relación entre las matrices $\{K, s+1\}$-potentes y las matrices normales, con los proyectores $\{s+1\}$-generalizados y las matrices $\{s+1\}$-potentes.

Proposición 3.2 *Sea $K \in \mathbf{H}$. Entonces*

$$\mathbf{N} \cap \mathbf{\Omega}^{(s+1)} \cap \mathbf{P}^{(K,s)} = \mathbf{N} \cap \mathbf{P}^{(s+2)} \cap \mathbf{P}^{(K,s)} = K\mathbf{H} \cap \mathbf{P}^{(K,s)}. \tag{3.8}$$

Demostración. Se deduce directamente de (PG1)-(PG3) y del Teorema 3.8. ■

En particular, de la Proposición 3.2 se deduce que se cumple

$$\mathbf{GP}^{(s)} \cap \mathbf{P}^{(K,s)} \subseteq \mathbf{N} \cap \mathbf{P}^{(K,s)}.$$

Sin embargo, en general

$$\mathbf{N} \cap \mathbf{P}^{(K,s)} \nsubseteq \mathbf{GP}^{(s)} \cap \mathbf{P}^{(K,s)}$$

tal y como muestra el siguiente ejemplo. En efecto, es evidente que la matriz $A = iI_2$ es normal y, considerando $K = I_2$, se obtiene que A es $\{K, 5\}$-potente y $A^5 \neq A^*$.

Además, en general

(a) $\mathbf{N} \cap \mathbf{\Omega}^{(s+1)} \nsubseteq \mathbf{GP}^{(s)} \cap \mathbf{P}^{(K,s)}$ (como muestra la matriz indicada en (3.2) cuando $s = 2$).

(b) $\mathbf{P}^{(s+2)} \cap \mathbf{P}^{(K,s)} \nsubseteq \mathbf{GP}^{(s)} \cap \mathbf{P}^{(K,s)}$ (como muestra la siguiente matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.9}$$

considerando $K = I_2$ y $s = 1$).

(c) $\mathbf{\Omega}^{(s+1)} \cap \mathbf{P}^{(K,s)} \nsubseteq \mathbf{GP}^{(s)} \cap \mathbf{P}^{(K,s)}$ (como muestra el mismo ejemplo que se usa en el apartado (b)).

(d) $\mathbf{GP}^{(s)} \nsubseteq K\mathbf{H} \cap \mathbf{P}^{(K,s)}$ (como muestra la matriz indicada en (3.2) cuando $s = 2$).

Ahora se presenta una relación entre $\mathbf{N}$ y $K\mathbf{N}$ para matrices en $\mathbf{P}^{(K,s)}$.

Teorema 3.9 *Sea $K \in \mathbf{H}$. Entonces $\mathbf{N} \cap \mathbf{P}^{(K,s)} \subseteq K\mathbf{N}$.*

Demostración. Sea $A \in \mathbf{N} \cap \mathbf{P}^{(K,s)}$. Los Teoremas 1.1 y 3.1 aseguran que

$$A = \sum_{j=1}^{(s+1)^2-1} \omega_{(s+1)^2-1}^{j} P_j$$

donde las matrices P_j son proyectores ortogonales disjuntos que cumplen la condición $(\mathcal{P})$. Se debe tener en cuenta que $P_{j_0} = O$ si existe un número entero $j_0 \in \{1, 2, \ldots, (s+1)^2-1\}$ tal que $\omega_{(s+1)^2-1}^{j_0} \notin \sigma(A)$ y además, $P_0 = O$ cuando $0 \notin \sigma(A)$. Entonces,

$$\begin{aligned}
KA(KA)^* &= \left(\sum_{j=1}^{(s+1)^2-1} \omega_{(s+1)^2-1}^{j} KP_j\right)\left(\sum_{j=1}^{(s+1)^2-1} \omega_{(s+1)^2-1}^{-j} P_j K\right)\\
&= \sum_{j=1}^{(s+1)^2-1} KP_jK\\
&= \sum_{j=1}^{(s+1)^2-2} P_{\varphi(j)} + P_{(s+1)^2-1}\\
&= \sum_{i=1}^{(s+1)^2-1} P_i.
\end{aligned}$$

En la última igualdad se han utilizado las relaciones (3.1). Un cálculo similar conduce a

$$(KA)^*KA = \sum_{j=1}^{(s+1)^2-1} P_j.$$

Así, $KA \in \mathbf{N}$, lo que termina la demostración. ■

No obstante, no se puede establecer que $\mathbf{N}$ sea cerrado bajo multiplicación por K. Más aún, en general, la inclusión contraria en el Teorema 3.9 no es cierta, es decir $\mathbf{N} \cap \mathbf{P}^{(K,s)} \subsetneq K\mathbf{N}$. En efecto, la matriz

$$A = \begin{bmatrix} i & 1 \\ 1 & -i \end{bmatrix}$$

no es normal y $KA \in \mathbf{N}$ para

$$K = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

A continuación se proporciona una caracterización para aquellas matrices $\{K, s+1\}$-potentes que son también normales.

Teorema 3.10 *Se cumple la siguiente igualdad:*

$$\mathbf{N} \cap \mathbf{P}^{(K,s)} = \mathbf{GP}^{((s+1)^2-3)} \cap \mathbf{P}^{(K,s)}.$$

Demostración. Sea $A \in \mathbf{P}^{(K,s)}$. Se debe probar que $A \in \mathbf{N}$ si y sólo si $A \in \mathbf{GP}^{((s+1)^2-3)}$. En efecto, si $A \in \mathbf{N}$, por los Teoremas 1.1 y 3.1, todos los valores propios diferentes $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ de A pertenecen a $\{0\} \cup \Omega_{(s+1)^2-1}$ y existen proyectores ortogonales disjuntos $P_1, P_2, \dots, P_k$ (i.e., $P_i P_j = \delta_{ij} P_i$ y $P_i^* = P_i$ para $i, j \in \{1, 2, \dots, k\}$) tal que $A = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j P_j$. Bajo estas condiciones, es fácil ver que

$$A^* = \sum_{j=1}^{k} \bar{\lambda}_j P_j \quad \text{y} \quad A^m = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j^m P_j$$

para cada $m \in \{1, 2, 3, \dots\}$. Para todos los $\lambda_j \in \Omega_{(s+1)^2-1}$, se tiene que $\lambda_j \bar{\lambda}_j = 1 = \lambda_j \lambda_j^{(s+1)^2-2}$ y entonces

$$A^* = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j^{-1} P_j = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j^{(s+1)^2-2} P_j = A^{(s+1)^2-2}.$$

Esto prueba que $A \in \mathbf{GP}^{((s+1)^2-3)}$.

La implicación recíproca es evidente ya que A^* es una potencia de A. ■

Los Teoremas 3.8, 3.10 y la igualdad (3.8) permiten deducir que

$$\mathbf{GP}^{(s)} \cap \mathbf{P}^{(K,s)} = \mathbf{\Omega}^{(s+1)} \cap \mathbf{GP}^{((s+1)^2-3)} \cap \mathbf{P}^{(K,s)} = \mathbf{P}^{(s+2)} \cap \mathbf{GP}^{((s+1)^2-3)} \cap \mathbf{P}^{(K,s)}.$$

El siguiente resultado es una consecuencia de los Teoremas 3.9 y 3.10.

Corolario 3.1 *Sea $K \in \mathbf{H}$. Entonces*

$$\mathbf{GP}^{((s+1)^2-3)} \cap \mathbf{P}^{(K,s)} \subseteq K\mathbf{N} \cap \mathbf{P}^{(K,s)}.$$

Se puede observar que, en general, la inclusión opuesta en el Corolario 3.1 no es cierta. Para comprobarlo se usa el ejemplo de la página 31 para $k = -1$. Se puede comprobar que $A \in \mathbf{P}^{(K,1)}$, $A \in K\mathbf{N}$, y es fácil ver que $A \notin \mathbf{GP}^{(1)}$. En efecto,

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad K = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

$$KAK = A^2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq A^*,$$

$$(KA)^*(KA) = (KA)(KA)^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Por tanto, se puede asegurar que, en general, se cumple que

$$\mathbf{GP}^{((s+1)^2-3)} \cap \mathbf{P}^{(K,s)} \subsetneq K\mathbf{N} \cap \mathbf{P}^{(K,s)}.$$

A continuación se deduce una relación entre $K\mathbf{N}$ y $K\mathbf{GP}^{(m)}$ para un valor concreto de m.

Teorema 3.11 *Se cumple la siguiente igualdad:*

$$K\mathbf{N} \cap \mathbf{P}^{(K,s)} = K\mathbf{GP}^{(2s-2)} \cap \mathbf{P}^{(K,s)}.$$

Demostración. Sea $A \in \mathbf{P}^{(K,s)}$. Se debe probar que $A \in K\mathbf{N}$ si y sólo si $A \in K\mathbf{GP}^{(2s-2)}$. En efecto, si $KA \in \mathbf{N}$, por los Teoremas 1.1 y 3.1, se obtiene que todos los valores propios diferentes $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ de KA pertenecen a $\{0\} \cup \Omega_{2s}$ y existen proyectores ortogonales disjuntos $P_1, P_2, \ldots, P_k$ (i.e., $P_i P_j = \delta_{ij} P_i$ y $P_i^* = P_i$ para $i, j \in \{1, 2, \ldots, k\}$) tales que $KA = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j P_j$. Bajo estas condiciones, es fácil comprobar que

$$(KA)^* = \sum_{j=1}^{k} \bar{\lambda_j} P_j$$

y

$$(KA)^m = \sum_{j=1}^{k} {\lambda_j}^m P_j$$

para cualquier $m \in \{1, 2, 3, \ldots\}$. Para todo $\lambda_j \in \Omega_{2s}$, se obtiene que $\lambda_j \bar{\lambda_j} = 1 = \lambda_j^{2s}$ y por tanto

$$(KA)^* = \sum_{j=1}^{k} \bar{\lambda_j} P_j = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j^{-1} P_j = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j^{2s-1} P_j = (KA)^{2s-1}.$$

Esto prueba que $KA \in \mathbf{GP}^{(2s-2)}$.

La implicación recíproca es evidente ya que $(KA)^*$ es una potencia de KA. Esto finaliza la demostración. ∎

Observación 3.1 *Recordando que* $\mathbf{GP}^{(0)} = \mathbf{H}$, *a partir del Teorema 3.11 se puede deducir que*

$$K\mathbf{N} \cap \mathbf{P}^{(K,1)} = K\mathbf{H} \cap \mathbf{P}^{(K,1)}.$$

3.4. Otros resultados

En esta sección se presentan algunas propiedades similares a las estudiadas, pero en este caso el objetivo es analizar la relación entre $\mathbf{P}^{(K,s)}$ y las matrices anticonmutativas, las matrices antihermíticas, y las matrices para las que alguna de sus potencias coincide con su opuesta.

3.4.1. Análisis de $\mathbf{P}^{(K,s)}$ mediante H, SH, $\mathbf{C}^{(K,m)}$ y $\mathbf{SP}^{(s)}$

Esta subsección empieza con la definición del conjunto de matrices antihermíticas y con el conjunto de todas las matrices que conmutan (anticonmutan) con la matriz K:

$$\mathbf{SH} = \{A \in \mathbb{C}^{n\times n} :\ A^* = -A\}$$

$$\mathbf{C}^{(K,m)} = \{A \in \mathbb{C}^{n\times n} :\ AK = mKA\} \text{ donde } m \in \{+,-\}.$$

También se introduce el conjunto dado por:

$$\mathbf{SP}^{(s)} = \{A \in \mathbb{C}^{n\times n} :\ A^{s+1} = -A\}.$$

Ahora, se pueden establecer los siguientes resultados.

Teorema 3.12 *Se cumplen las siguientes igualdades:*

(a) $\mathbf{H} \cap \mathbf{P}^{(K,s)} = \mathbf{C}^{(K,+)} \cap \mathbf{T}$ *donde*

$$\mathbf{T} = \begin{cases} \mathbf{P}^{(1)} \cap \mathbf{GP}^{(1)} & \textit{si } s \textit{ es impar}, \\ \mathbf{P}^{(2)} \cap \mathbf{GP}^{(2)} & \textit{si } s \textit{ es par}. \end{cases}$$

(b) (I) $\mathbf{SH} \cap \mathbf{P}^{(K,s)} = \{O\}$ *si s es impar.*

(II) $\mathbf{SH} \cap \mathbf{P}^{(K,s)} = \mathbf{SP}^{(2)} \cap \mathbf{GP}^{(2)} \cap \mathbf{T}$ *donde*

$$\mathbf{T} = \begin{cases} \mathbf{C}^{(K,+)} & \textit{si } s = 4t, \\ \mathbf{C}^{(K,-)} & \textit{si } s = 4t+2, \end{cases}$$

para $t \in \{1, 2, 3, \dots\}$.

Demostración. Suponiendo que $A^* = A$ y $KA^{s+1}K = A$ se tiene

$$\sigma(A) \subseteq \mathbb{R} \cap (\{0\} \cup \Omega_{(s+1)^2-1}) = \begin{cases} \{0,1\} & \text{si } s \text{ es impar,} \\ \{0,1,-1\} & \text{si } s \text{ es par,} \end{cases}$$

por tanto,

$$A = \begin{cases} A^2 & \text{cuando } s \text{ es impar,} \\ A^3 & \text{cuando } s \text{ es par,} \end{cases}$$

de donde $KAK = A^{s+1} = A$ y de esta forma se obtiene (a). La implicación recíproca se puede comprobar fácilmente.

El apartado (b) se deduce de forma trivial cuando s es impar. Si s es par y $A \in \mathbf{SH} \cap \mathbf{P}^{(K,s)}$ entonces $\sigma(A) \subseteq i\mathbb{R} \cap (\{0\} \cup \Omega_{s(s+2)}) = \{0, i, -i\}$. De ahí que $A^3 = -A$, y por tanto, cuando $s = 4t$ se llega a

$$KAK = A^{s+1} = A^{4t+1} = -A^3 = A,$$

para todo $t \in \{1, 2, 3, \dots\}$. De forma similar, el caso $s = 4t + 2$ se deduce de $A^{4t} = -A^2$. Como antes, la implicación recíproca se puede comprobar fácilmente. ■

Además, las matrices $\{K, s+1\}$-potentes que también están en $K\mathbf{SH}$ cumplen las siguientes relaciones.

Teorema 3.13 *Se cumplen las condiciones siguientes:*

(a) $K\mathbf{SH} \cap \mathbf{P}^{(K,s)} \subseteq K\mathbf{SP}^{(2)}$ *si* s *es par.*

(b) $K\mathbf{SH} \cap \mathbf{P}^{(K,s)} = \{O\}$ *si* s *es impar.*

Demostración. Sea $A \in K\mathbf{SH}$. En primer lugar se observa que $KA \in \mathbf{SH}$ y por tanto $\sigma(KA) \subseteq i\mathbb{R}$. Ahora, para $A \in \mathbf{P}^{(K,s)}$ se tiene que $(KA)^{2s+1} = KA$ y por tanto, $\sigma(KA) \subseteq \{0\} \cup \Omega_{2s}$. De esta forma, el caso s impar se deduce trivialmente. Cuando s es par, se puede observar que $\sigma(KA) \subseteq \{0, i, -i\}$. Como KA es diagonalizable, se obtiene que $(KA)^3 = -KA$, lo cual significa que $A \in K\mathbf{SP}^{(2)}$. ■

Se observa que, en general, la inclusión en (a) es estricta tal y como se puede comprobar mediante el ejemplo dado en (3.9).

También se puede observar que $K\mathbf{SP}^{(2)} \subseteq \mathbf{SP}^{(s+2)}$ porque $(KA)^3 = -KA$ implica que $A^{s+3} = -A$. En general, en este caso la inclusión es estricta porque la matriz 1×1 definida por $A = \begin{bmatrix} \omega \end{bmatrix}$ cumple las condiciones requeridas para $K = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}$ y $\omega^3 = -1 \neq \omega^2$.

Finalmente, cuando $K^* = K$ se puede observar que las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) $KA \in \mathbf{SH}$.

(b) $KA^*K = -A$.

(c) $AK \in \mathbf{SH}$.

Además, la condición $A \in \mathbf{SH}$ es equivalente a $K(KA)^*K = -KA$.

En la Definición 2.1, las matrices $\{K, s+1\}$-potentes han sido consideradas para $s \in \{1, 2, 3, \dots\}$ excluyendo el caso $s = 0$. El motivo es porque el Teorema 3.1 no proporciona ninguna información para el caso $s = 0$. Así pues, en la siguiente subsección se obtienen resultados válidos para $s = 0$.

3.4.2. Matrices centrosimétricas K-generalizadas

En primer lugar, se observa que $\mathbf{P}^{(K,0)} = \mathbf{C}^{(K,+)}$, que es el conjunto de las matrices centrosimétricas K-generalizadas. Mediante el uso de la descomposición espectral, se puede deducir fácilmente el siguiente resultado.

Teorema 3.14 *Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ una matriz diagonalizable con descomposición espectral dada por $A = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i P_i$ tal y como en el Teorema 1.1 y sea $K \in \mathbb{C}^{n\times n}$ una matriz involutiva. Entonces $A \in \mathbf{C}^{(K,+)}$ si y sólo si $KP_i = P_i K$, para todo $i \in \{1, 2, \dots, k\}$.*

Ahora se pueden obtener nuevos resultados para las matrices centrosimétricas K-generalizadas a partir de los establecidos en las Secciones 3.2 y 3.3. Se pueden obtener nuevas relaciones con el valor $s = 0$ en todos los resultados correspondientes después de realizar sencillas verificaciones. En el siguiente teorema se presentan los resultados deducidos a partir de la Sección 3.2.

Teorema 3.15 *Se cumplen las siguientes condiciones:*

(a) $\mathbf{C}^{(K,+)} \cap \mathbf{H}^{(K)} \subsetneq \mathbf{H}$.

(b) $\mathbf{C}^{(K,+)} \cap \mathbf{H} \subsetneq \mathbf{H}^{(K)}$.

(c) $\mathbf{H}^{(K)} \cap \mathbf{H} \subsetneq \mathbf{C}^{(K,+)}$.

(d) $\mathbf{C}^{(K,+)} \cap \mathbf{H}^{(K)} \cap \mathbf{H} = \mathbf{C}^{(K,+)} \cap \mathbf{H}^{(K)} = \mathbf{C}^{(K,+)} \cap \mathbf{H} = \mathbf{H}^{(K)} \cap \mathbf{H}$.

(e) $\mathbf{C}^{(K,+)} \cap \mathbf{H}^{(K)} \cap \mathbf{I}^{(1)} \subsetneq \mathbf{U}$.

(f) $\mathbf{C}^{(K,+)} \cap \mathbf{H} \cap \mathbf{I}^{(1)} \subsetneq \mathbf{U}$.

(g) $\mathbf{C}^{(K,+)} \cap K\mathbf{I}^{(1)} \subsetneq \mathbf{I}^{(1)}$.

(h) $\mathbf{I}^{(1)} \cap K\mathbf{I}^{(1)} \subsetneq \mathbf{C}^{(K,+)}$.

(i) $\mathbf{P}^{(2)} \cap K\mathbf{I}^{(1)} \subsetneq \mathbf{C}^{(K,+)}$.

(j) $\mathbf{U} \cap \mathbf{C}^{(K,+)} = \mathbf{U} \cap (\mathbf{C}^{(K,+)})^*$.

La matriz

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

permite mostrar que la inclusión en el apartado (e) es estricta para $K = I_2$.

Este capítulo termina mostrando en el siguiente teorema los resultados deducidos a partir de la Sección 3.3.

Teorema 3.16 *Sea $K \in \mathbf{H}$. Entonces*

(a) $\mathbf{H} \cap \mathbf{C}^{(K,+)} = K\mathbf{H} \cap \mathbf{C}^{(K,+)}$.

(b) $\mathbf{N} \cap \boldsymbol{\Omega}^{(1)} \cap \mathbf{C}^{(K,+)} = \mathbf{N} \cap \mathbf{P}^{(2)} \cap \mathbf{C}^{(K,+)} = K\mathbf{H} \cap \mathbf{C}^{(K,+)}$.

(c) $\mathbf{N} \cap \mathbf{C}^{(K,+)} \subsetneq K\mathbf{N}$.

CAPÍTULO 4

Problemas directo e inverso para matrices $\{K, s+1\}$-potentes

4.1. Introducción

Se ha observado que las matrices $\{K, s+1\}$-potentes incluyen las siguientes clases: matrices idempotentes, matrices tripotentes, matrices periódicas, matrices $\{s+1\}$-potentes, matrices involutivas, matrices centrosimétricas, matrices mirrorsimétricas, matrices circulantes, etc. Por tanto, es interesante saber cómo construir un número suficiente de elementos de esta nueva clase de matrices.

Uno de los principales objetivos de este capítulo es desarrollar métodos para poder construirlas de manera efectiva. Otro de los objetivos es resolver el problema de encontrar las matrices involutivas K que hacen que una matriz A dada sea $\{K, s+1\}$-potente para un valor de s prefijado. El primero de los problemas, el de encontrar matrices A, es el llamado problema directo. El segundo de los problemas, el de encontrar las matrices K, constituye el llamado problema inverso.

Como en los capítulos anteriores, será necesaria la función introducida en el Lema 2.5 de la página 25. Sea

$$\mathbb{N}_s = \{0, 1, 2, \ldots, (s+1)^2 - 2\} \text{ para } s \geq 1$$

y sea

$$\varphi : \mathbb{N}_s \to \mathbb{N}_s$$

la función biyectiva dada por $\varphi(j) = b_j$ donde b_j es el menor entero no negativo tal que $b_j \equiv j(s+1)$ [mod $((s+1)^2 - 1)$].

Este capítulo está organizado de la siguiente forma. En la Sección 4.2, se presenta un algoritmo para obtener matrices $\{K, s+1\}$-potentes. En la Sección 4.3, se obtienen matrices $\{K, s+1\}$-potentes que conmutan con una matriz $\{K, s+1\}$-potente dada y se desarrolla un algoritmo para obtener todas las combinaciones lineales $\{K, s+1\}$-potentes de matrices $\{K, s+1\}$-potentes. En la Sección 4.4 se dan dos procedimientos que permiten resolver el problema inverso mencionado anteriormente. Finalmente, en la Sección 4.5, se proporcionan varios ejemplos numéricos para mostrar las prestaciones numéricas de los métodos.

Para una matriz involutiva $K \in \mathbb{C}^{n\times n}$, una matriz $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ y un número natural s dados, es fácil verificar si A es $\{K, s+1\}$-potente o no. En primer lugar se dará un algoritmo básico para realizar esta comprobación teniendo en cuenta que, en este caso, sólo se debe aplicar la Definición 2.1.

ALGORITMO 1

Entradas: La matriz $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, el número natural s y la matriz $K \in \mathbb{C}^{n\times n}$.

Salida: Si A es una matriz $\{K, s+1\}$-potente o no.

Paso 1 Calcular $T := KA^sK$.

Paso 2 Si $T = A$ entonces "A es una matriz $\{K, s+1\}$-potente",
en caso contrario "A no es una matriz $\{K, s+1\}$-potente".

Fin

4.2. Obtención de matrices $\{K, s+1\}$-potentes

En esta sección se desarrolla un algoritmo que permite encontrar matrices $\{K, s+1\}$-potentes. Se analizarán dos situaciones: $s = 0$ y $s \geq 1$, empezando por esta última.

4.2.1. Caso $s \geq 1$

Dada una matriz involutiva $K \in \mathbb{C}^{n\times n}$ y $s \in \{1, 2, 3, \ldots\}$, se desea encontrar una matriz $\{K, s+1\}$-potente $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Es evidente que los casos $K = \pm I$ sólo proporcionan los resultados conocidos [4] correspondientes a $A^{s+1} = A$ y estas situaciones no son de interés en este estudio.

Como K es involutiva, existe una matriz no singular

$$T = \begin{bmatrix} t_1 & \ldots & t_n \end{bmatrix}$$

tal que

$$K = T \begin{bmatrix} -I_r & O \\ O & I_{n-r} \end{bmatrix} T^{-1} \tag{4.1}$$

donde los primeros r vectores propios de K que componen las columnas de la matriz T están asociados al valor propio -1.

Sin pérdida de generalidad, se asumirá que $r \leq n - r$. De lo contrario, se elige $-K$ en vez de K obteniéndose la misma solución, puesto que si se cumple $KAK = A^{s+1}$, también se cumple $(-K)A(-K) = A^{s+1}$.

Del Teorema 2.2 de la página 27 se sabe que los valores propios de A deben estar incluidos en el siguiente conjunto

$$\Lambda = \left\{0, \omega^{1}_{(s+1)^2-1}, \ldots, \omega^{(s+1)^2-2}_{(s+1)^2-1}, 1\right\}$$

y que A es diagonalizable, i.e.

$$A = S \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} S^{-1}.$$

Particionando las matrices S y S^{-1} según sus vectores columnas y filas respectivamente, se tiene

$$S = \begin{bmatrix} s_1 & \dots & s_n \end{bmatrix} \qquad \text{y} \qquad S^{-1} = \begin{bmatrix} y_1^T \\ \vdots \\ y_n^T \end{bmatrix}.$$

En tal caso, es fácil comprobar que $y_i^T s_j = \delta_{ij}$ porque $S^{-1}S = I_n$ donde δ_{ij} indica la delta de Kronecker. Por tanto, denotando por $P_i = s_i y_i^T$ se tiene que

$$P_i P_j = \begin{cases} O & \text{si } i \neq j \\ P_i & \text{si } i = j \end{cases}$$

y como $SS^{-1} = I_n$ se obtiene $\sum_{i=1}^n P_i = I_n$. Así pues, la matriz A se debe escribir como

$$A = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i P_i. \tag{4.2}$$

Cuando todos los λ_i son diferentes entre sí, la expresión (4.2) proporciona la descomposición espectral de A. En caso contrario, es decir, cuando algún valor propio está repetido, para obtener dicha descomposición es suficiente con multiplicar cada valor propio correspondiente por la suma de todos los P_i asociados a ese mismo valor propio.

Como se debe cumplir que $KP_iK = P_{\varphi(i)}$, se pueden elegir

$$Ks_i = s_{\varphi(i)} \qquad \text{y} \qquad K^T y_i = y_{\varphi(i)} \tag{4.3}$$

con el objeto de que se cumpla la igualdad $A^{s+1} = KAK$, como se ha demostrado en el Teorema 2.2 de la página 27.

La idea del método está basada en la construcción de los s_i y los y_i en términos de los t_i, que son conocidos. En primer lugar se realizará la elección del primer vector propio t_1 de K asociado a -1 y el primer vector propio t_{r+1} de K asociado a 1 (según el orden establecido en la matriz T). Por tanto, si se realizan las siguientes operaciones

$$s_1 = s'_1 = t_1 + t_{r+1} \qquad \text{y} \qquad s_2 = s'_{\varphi(1)} = -t_1 + t_{r+1},$$

es fácil ver que $Ks_1 = s_2$, puesto que

$$Ks_1 = K(t_1 + t_{r+1}) = Kt_1 + Kt_{r+1} = -t_1 + t_{r+1} = s_2.$$

En segundo lugar, se asignan

$$s_3 = s'_a = t_2 + t_{r+2} \qquad \text{y} \qquad s_4 = s'_{\varphi(a)} = -t_2 + t_{r+2}$$

donde $a \in \mathbb{N}_s - \{0, 1, \varphi(1)\}$ es tal que $\varphi(a) \neq a$. Se puede continuar de esta forma hasta llegar a alguna de las situaciones siguientes:

- Se han obtenido todos los vectores propios necesarios s_i (este caso se da sólo cuando n es par).
- Se han utilizado todos los vectores propios t_i y todavía es necesario obtener más vectores propios s_i, hasta conseguir los n vectores propios de A.

En este último caso, los restantes vectores propios de A se completan tomando como s_i algunos de los vectores propios t_i correspondientes al valor propio 1 aún no utilizados. Esto es posible puesto que se cumple la relación $r \leq n - r$. De esta forma, se obtiene un conjunto de n vectores propios de A linealmente independientes.

De acuerdo al resultado encontrado en el Teorema 2.2, la biyección φ se utiliza para relacionar los proyectores P_j y $P_{\varphi(j)}$ para $j \in \{0, 1, \ldots, (s+1)^2-2\}$ mediante la relación $KP_jK = P_{\varphi(j)}$. Además, si ω^j es un valor propio asociado a P_j, entonces $\omega^{\varphi(j)}$ debe ser valor propio asociado a $P_{\varphi(j)} = KP_jK$. Por tanto, P_j y $P_{\varphi(j)}$ deben construirse simultáneamente. Esto es lo que origina la notación s'_j y $s'_{\varphi(j)}$ que, con la intención de simplificarla, se renombran simplemente como s_1, s_2, s_3, s_4, etc.

Con el fin de clarificar este proceso, en las siguientes tablas se presentan los casos más representativos. Se considerarán las siguientes matrices involutivas $K_i = TD_iT^{-1}$ para $i = 1, 2, 3, 4, 5$ donde

$$D_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad D_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad D_3 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$D_4 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad D_5 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Definiendo $\omega := \omega_{(s+1)^2-1}$ en los Cuadros 1, 2, 3, 4 y 5, se considera que $a \in \mathbb{N}_s - \{0, 1, \varphi(1)\}$ es tal que $\varphi(a) \neq a$, y que $b \in \mathbb{N}_s - \{0\}$ es tal que $\varphi(b) = b$.

	Construcción de los s_i	Construcción de A
D_1	$s_1 = s'_1 = t_1 + t_2$ $s_2 = s'_{\varphi(1)} = -t_1 + t_2$	$A = \omega P_1 + \omega^{\varphi(1)} P_2$

Cuadro 4.1: $D_1 = \mathrm{diag}(-1, 1)$

	Construcción de los s_i	Construcción de A
D_2	$s_1 = s'_1 = t_1 + t_2$ $s_2 = s'_{\varphi(1)} = -t_1 + t_2$ $s_3 = t_3$	$A = \omega P_1 + \omega^{\varphi(1)} P_2 + P_3$

Cuadro 4.2: $D_2 = \mathrm{diag}(-1, 1, 1)$

	Construcción de los s_i	Construcción de A
D_3	$s_1 = s'_1 = t_1 + t_2$ $s_2 = s'_{\varphi(1)} = -t_1 + t_2$ $s_3 = t_3$ $s_4 = t_4$	$A = \omega P_1 + \omega^{\varphi(1)} P_2 + P_3 + P_4$

Cuadro 4.3: $D_3 = \mathrm{diag}(-1, 1, 1, 1)$

	Construcción de los s_i	Construcción de A
D_4	$s_1 = s'_1 = t_1 + t_3$ $s_2 = s'_{\varphi(1)} = -t_1 + t_3$ $s_3 = s'_a = t_2 + t_4$ $s_4 = s'_{\varphi(a)} = -t_2 + t_4$	$A = \omega(P_1 + P_3) + \omega^{\varphi(1)}(P_2 + P_4)$

Cuadro 4.4: $D_4 = \text{diag}(-1, -1, 1, 1)$

	Construcción de los s_i	Construcción de A
D_5	$s_1 = s'_1 = t_1 + t_3$ $s_2 = s'_{\varphi(1)} = -t_1 + t_3$ $s_3 = s'_a = t_2 + t_4$ $s_4 = s'_{\varphi(a)} = -t_2 + t_4$ $s_5 = s'_b = t_5$	$A = \omega(P_1 + P_3) + \omega^{\varphi(1)}(P_2 + P_4) + P_5$

Cuadro 4.5: $D_5 = \text{diag}(-1, -1, 1, 1, 1)$

Se observa en los Cuadros 4.2, 4.3 y 4.5 que los proyectores provenientes de vectores s_i que se obtienen a partir de un sólo t_i, y no de una combinación lineal de ellos, se asocian al valor propio 1. La justificación de este último hecho radica en que se debe cumplir la relación $P_{(s+1)^2-1} = KP_{(s+1)^2-1}K$ cuando se trata del valor propio 1.

Una vez obtenidos los vectores s_i, se puede obtener los vectores y_i resolviendo los sistemas lineales dados por $Sy_i = e_i$, donde e_i son los vectores de la base canónica de $\mathbb{C}^n$ para $1 \leq i \leq n$.

Aunque se va a construir sólo una matriz $\{K, s+1\}$-potente A, es evidente que este método permite construir más matrices de este tipo (es suficiente con cambiar adecuadamente los valores de ω elegidos en $\Omega_{(s+1)^2-1}$).

Algoritmo 2

Entradas: Una matriz $K \in \mathbb{C}^{n\times n}$ y un número natural s.

Salidas: Una matriz $\{K, s+1\}$-potente $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ y los proyectores P_i.

Paso 1 Diagonalizar K como en (4.1).

Paso 2 Si $r > n-r$, cambiar K por $-K$ y reordenar como en el Paso 1.

Paso 3 Para $i = 1, \ldots, r$, calcular $s_{2i-1} = t_i + t_{r+i}$ y $s_{2i} = -t_i + t_{r+i}$.

Paso 4 Para $i = 2r+1, \ldots, n$, asignar $s_i = t_i$.

Paso 5 Resolver los sistemas lineales $Sy_i = e_i$ para $i = 1, \ldots, n$.

Paso 6 Calcular $P_i = s_i y_i^T$ para $i = 1, \ldots, n$.

Paso 7 Para $i = 1, \ldots, r$, calcular $Q_i = \omega P_{2i-1} + \omega^{\varphi(1)} P_{2i}$.

Paso 8 Calcular $A = \sum_{i=1}^r Q_i + \sum_{i=2r+1}^n P_i$.

Fin

Del análisis previo realizado antes del algoritmo se desprende que el único paso que requiere justificación es el Paso 8. En efecto, A es $\{K, s+1\}$-potente porque usando la expresión (4.3) se tiene

$$A^{s+1} = \left(\sum_{i=1}^{r} (\omega P_{2i-1} + \omega^{\varphi(1)} P_{2i}) + \sum_{j=2r+1}^{n} P_j \right)^{s+1}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^{r}(\omega^{\varphi(1)}P_{2i-1} + \omega P_{2i}) + \sum_{j=2r+1}^{n} P_j \\
&= \sum_{i=1}^{r}(\omega K P_{2i-1} K + \omega^{\varphi(1)} K P_{2i} K) + \sum_{j=2r+1}^{n} K P_j K \\
&= KAK.
\end{aligned}
$$

4.2.2. Caso $s = 0$

Este caso corresponde a las matrices $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ que conmutan con K. El Teorema espectral permite afirmar que una matriz diagonalizable $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ es $\{K\}$-centrosimétrica si y sólo si $KP_i = P_iK$ donde P_i son los proyectores que aparecen en esa descomposición, como se ha visto en el Teorema 3.14 de la página 69. Utilizando este hecho se podría construir un algoritmo similar al previo.

Sin embargo, a través de una descomposición por bloques, es fácil ver que en este caso se pueden proporcionar todas las matrices $\{K, 1\}$-potentes. De hecho, si la matriz K es diagonalizable como en (4.1), un sencillo cálculo proporciona las matrices $\{K\}$-centrosimétricas requeridas a partir de:

$$
A = T \begin{bmatrix} X_A & O \\ O & Y_A \end{bmatrix} T^{-1} \tag{4.4}
$$

donde $X_A \in \mathbb{C}^{r\times r}$ y $Y_A \in \mathbb{C}^{(n-r)\times(n-r)}$ son matrices arbitrarias. En efecto, si

$$
K = T \begin{bmatrix} -I & O \\ O & I \end{bmatrix} T^{-1}
$$

y se particiona

$$
A = T \begin{bmatrix} X_A & Z_A \\ W_A & Y_A \end{bmatrix} T^{-1}
$$

(con bloques de tamaños adecuados), se cumple que $KA = AK$ si y sólo si

$$
\begin{bmatrix} -I & O \\ O & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_A & Z_A \\ W_A & Y_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_A & Z_A \\ W_A & Y_A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -I & O \\ O & I \end{bmatrix},
$$

que equivale a

$$\begin{bmatrix} -X_A & -Z_A \\ W_A & Y_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -X_A & Z_A \\ -W_A & Y_A \end{bmatrix},$$

es decir, si y sólo si $Z_A = O$ y $W_A = O$.

Se observa que esta idea no es un buen método para llevar a cabo en el caso $s \geq 1$ puesto que la potencia $s+1$ complica enormemente el cálculo. Este último hecho queda reflejado en el Teorema 2.4 de la página 39.

4.3. Aplicaciones

En esta sección se utilizarán algunos resultados obtenidos hasta ahora con la intención de proporcionar otros métodos que permitan construir más matrices $\{K, s+1\}$-potentes. En el Algoritmo 3 se construyen matrices $\{K, s+1\}$-potentes que conmutan con una dada y luego, dicho algoritmo se utilizará para la construcción de combinaciones lineales $\{K, s+1\}$-potentes de dos matrices $\{K, s+1\}$-potentes que conmutan.

4.3.1. Matrices $\{K, s+1\}$-potentes que conmutan con una dada

El primer objetivo es encontrar una matriz $\{K, s+1\}$-potente $B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tal que $AB = BA$.

Caso $s \geq 1$

Cuando $s \geq 1$, esta matriz $\{K, s+1\}$-potente B que se busca tiene que ser diagonalizable. Por tanto, con el fin de cumplir la condición $AB = BA$, ambas matrices A y B tienen que ser simultáneamente diagonalizables [18], es decir,

$$A = S \begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} S^{-1} \quad \text{y} \quad B = S \begin{bmatrix} \mu_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \mu_n \end{bmatrix} S^{-1}$$

donde los valores propios μ_i tienen que pertenecer a Λ, siendo Λ el conjunto indicado en la página 75.

ALGORITMO 3

Entradas: La matriz $\{K, s+1\}$-potente A obtenida en el Algoritmo 2 y los proyectores P_i.

Salidas: Una matriz $\{K, s+1\}$-potente $B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ que conmuta con A.

Paso 1 Asignar $\mu := \omega^p_{(s+1)^2-1}$, donde $p \notin \{1, \varphi(1), \varphi(p)\}$.

Paso 2 Para $i = 1, \ldots, r$, calcular $W_i = \mu P_{2i-1} + \mu^{\frac{\varphi(p)}{p}} P_{2i}$.

Paso 3 Calcular $B = \sum_{i=1}^{r} W_i + \sum_{i=2r+1}^{n} P_i$.

Fin

Se debe tener en cuenta que μ se elige de entre los no utilizados en el Algoritmo 2. En el Paso 2 es evidente que $\mu^{\frac{\varphi(p)}{p}} = \omega^{\varphi(p)}$. El resto de los cálculos del Algoritmo 3 se realizan como en el Algoritmo 2.

Caso $s = 0$

Cuando $s = 0$, si se fijan las matrices X_A e Y_A de (4.4), se obtiene

$$B = T \begin{bmatrix} X_B & O \\ O & Y_B \end{bmatrix} T^{-1}.$$

Se puede observar que cualquier par de matrices por bloques X_B e Y_B que satisfagan las ecuaciones matriciales (lineales) $X_A X_B = X_B X_A$ y $Y_A Y_B = Y_B Y_A$ proporciona una solución, ya que en este caso $AB = BA$.

4.3.2. Algoritmo para la obtención de combinaciones lineales

Para las matrices A y B obtenidas, por ejemplo, por medio de los Algoritmos 2 y 3 se puede establecer la siguiente relación lineal:

$$C = c_1 A + c_2 B, \tag{4.5}$$

donde c_1 y c_2 son números complejos distintos de cero a determinar. En esta sección se realiza la búsqueda de los escalares c_1 y c_2 tales que C sea una matriz $\{K, s+1\}$-potente.

El valor $s = 0$ no proporciona ningún resultado interesante porque cualquier par de números complejos c_1 y c_2 cumplen la igualdad. Por tanto, se asume $s \geq 1$.

Sustituyendo

$$A = S \begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} S^{-1} \quad \text{y} \quad B = S \begin{bmatrix} \mu_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \mu_n \end{bmatrix} S^{-1}$$

en (4.5) y, eliminando las matrices S y S^{-1}, la condición

$$\begin{bmatrix} \gamma_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \gamma_n \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} \mu_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \mu_n \end{bmatrix}$$

conduce a la solución del siguiente sistema lineal:

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & \mu_1 \\ \vdots & \vdots \\ \lambda_n & \mu_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{bmatrix}$$

donde $C = S \operatorname{diag}(\gamma_1, \ldots, \gamma_n)\, S^{-1}$ y cada γ_i recorre todos los valores en el conjunto $\{0\} \cup \Omega_{(s+1)^2-1}$.

Ahora se puede establecer un algoritmo para calcular esta clase de combinaciones lineales.

ALGORITMO 4

Entradas: Dos matrices $\{K, s+1\}$-potentes A y B que conmutan.

Salidas: Los valores de c_1 y c_2 tales que $C = c_1 A + c_2 B$ sea una matriz $\{K, s+1\}$-potente.

Paso 1 Asignar $M = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \mu_1 \\ \vdots & \vdots \\ \lambda_n & \mu_n \end{bmatrix}$.

Paso 2 Elegir $\gamma_1, \ldots, \gamma_n \in \{0\} \cup \Omega_{(s+1)^2-1}$ y asignar $\gamma = \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{bmatrix}$.

Paso 3 Resolver el sistema lineal $M \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \gamma$.

Paso 4 Repetir los Pasos 2 y 3 para todas las posibles elecciones de γ_i en $\{0\} \cup \Omega_{(s+1)^2-1}$.

Fin

Se observa que hay un número finito de combinaciones posibles a elegir para llevar a cabo los Pasos 2 y 3.

4.4. Problema inverso

En el Teorema 2.2 se ha encontrado una caracterización para las matrices $\{K, s+1\}$-potentes y en la Sección 4.2 se ha realizado un Algoritmo 2 para encontrar este tipo de matrices. Este problema ha sido denominado problema directo.

El problema inverso asociado consiste en hallar (cuando existen) todas las matrices K que satisfagan la ecuación matricial $KA^{s+1}K = A$ para una matriz $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ y un número natural s dados. A tal efecto se diseñará un algoritmo y posteriormente se establecerá su justificación.

4.4.1. Obtención de la matriz K

Para cualquier matriz $X \in \mathbb{C}^{m\times n}$, se denotará por $v(X)$ al vector de $\mathbb{C}^{mn\times 1}$ que se obtiene concatenando consecutivamente las columnas de X en un único vector columna empezando por la primera de ellas. Dadas dos matrices $A = \left[\begin{array}{c} a_{ij} \end{array}\right] \in \mathbb{C}^{n\times n}$ y $B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ se recuerda que el producto y la suma de Kronecker se definen como

$$A \otimes B = \left[\begin{array}{ccc} a_{11}B & \dots & a_{1n}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}B & \dots & a_{nn}B \end{array}\right]$$

y

$$A \oplus B = (A \otimes I_n) + (I_n \otimes B),$$

respectivamente. En [3] se puede encontrar la siguiente propiedad relativa al producto de Kronecker:

Si $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ y $B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ entonces

$$v(AXB) = (B^T \otimes A)v(X)$$

para cualquier matriz $X \in \mathbb{C}^{n\times n}$.

Por otra parte, para establecer simplificaciones obtenidas en las matrices será útil la siguiente propiedad:

Si $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ y $B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ entonces

$$\text{Núc}(A) \cap \text{Núc}(B) = \text{Núc}\left(\left[\begin{array}{c} A \\ B \end{array}\right]\right),$$

lo cual es también válido para un número finito de matrices de tamaños adecuados. Se recuerda que, en este caso, Núc(.) denota el espacio nulo de la matriz (.).

Utilizando la función φ y los proyectores introducidos en el Teorema 2.2 es posible considerar la matriz

$$M = \begin{bmatrix} P_0^T \oplus -P_{\varphi(0)} \\ P_1^T \oplus -P_{\varphi(1)} \\ \vdots \\ P_{(s+1)^2-2}^T \oplus -P_{\varphi((s+1)^2-2)} \\ P_{(s+1)^2-1}^T \oplus -P_{(s+1)^2-1} \end{bmatrix} \tag{4.6}$$

que será de utilidad en el siguiente algoritmo.

Se recuerda que los idempotentes principales asociados a los valores propios $\lambda_{j_1}, \ldots, \lambda_{j_l}$ vienen dados por

$$P_{j_t} = \frac{p_{j_t}(A)}{p_{j_t}(\lambda_{j_t})} \qquad \text{donde} \qquad p_{j_t}(\eta) = \prod_{\substack{i\,=\,j_1 \\ i\,\neq\,j_t}}^{j_l} (\eta - \lambda_i).$$

Por otra parte, será necesaria la siguiente notación, que corresponde al procedimiento inverso de realizar la vectorización de una matriz.

Sea v un vector columna en $\mathbb{C}^{pq\times 1}$. Se denotará por $[v]_{\{1,\ldots,p\}}$ al vector columna formado por los primeros p elementos del vector v, $[v]_{\{p+1,\ldots,2p\}}$ al vector columna formado por los siguientes p elementos del vector v, y así sucesivamente hasta $[v]_{\{qp-p+1,\ldots,qp\}}$ que denota el vector columna formado por los últimos p elementos del vector v. Es decir, el vector de partida y la matriz en la que se convierte al aplicar este proceso son los siguientes:

$$v(X) = \left[\begin{array}{c} v_1 \\ \vdots \\ v_p \\ \hline v_{p+1} \\ \vdots \\ v_{2p} \\ \hline \vdots \\ \hline v_{qp-p+1} \\ \vdots \\ v_{qp} \end{array}\right] \qquad \text{y} \qquad X = \begin{bmatrix} v_1 & v_{p+1} & \cdots & v_{pq-p+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_p & v_{2p} & \cdots & v_{qp} \end{bmatrix}.$$

El algoritmo que se presenta a continuación permite resolver el problema inverso anteriormente descrito.

ALGORITMO 5

Entradas: Una matriz $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ y un número natural s.

Salidas: Todas las matrices $K \in \mathbb{C}^{n\times n}$ (cuando existan) tales que A es $\{K, s+1\}$-potente.

Paso 1 Calcular $\sigma(A) = \{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_l\}$.

Paso 2 Definir $\Lambda = \{0\} \cup \Omega_{(s+1)^2-1} = \{\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{(s+1)^2-1}\}$ en el siguiente orden $0, \omega^1_{(s+1)^2-1}, \ldots, \omega^{(s+1)^2-2}_{(s+1)^2-1}, 1$.

Paso 3 Si existe $i \in \{1, 2, \ldots, l\}$ tal que $\sigma_i \notin \Lambda$ entonces ir al Paso 15.

Paso 4 Si A no es diagonalizable entonces ir al Paso 15.

Paso 5 Si $A^{(s+1)^2} \neq A$ entonces ir al Paso 15.

Paso 6 Reordenar los valores propios σ_i en $\sigma(A)$ de modo que aparezcan en el mismo orden que en Λ donde ahora se llamarán $\{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_l\}$.

Paso 7 Identificar cada β_i, $i = 1, 2, \ldots, l$, con los correspondientes λ_j, $j = 0, 1, 2, \ldots, (s+1)^2 - 1$. El conjunto de estos subíndices j se llamará $\{j_1, j_2, \ldots, j_l\}$.

Paso 8 Para cada $t \in \{1, 2, \ldots, l\}$, calcular los idempotentes principales asociados

$$P_{j_t} = \frac{p_{j_t}(A)}{p_{j_t}(\lambda_{j_t})} \qquad \text{donde} \qquad p_{j_t}(\eta) = \prod_{\substack{i = j_1 \\ i \neq j_t}}^{j_l} (\eta - \lambda_i)$$

a los valores propios $\{\lambda_{j_1}, \lambda_{j_2}, \ldots, \lambda_{j_l}\}$.

Paso 9 Calcular $\varphi(j_1), \varphi(j_2), \ldots, \varphi(j_l)$.

Paso 10 Definir la matriz M como en (4.6) donde sólo se deben incluir las filas (por bloques) correspondientes a los valores propios $\{\lambda_{j_1}, \lambda_{j_2}, \ldots, \lambda_{j_l}\}$.

Paso 11 Calcular el espacio nulo de la matriz M obteniendo la solución $v(K)$.

Paso 12 Si $v(K) = 0$ entonces ir al Paso 15.

Paso 13 Redistribuir los elementos de $v(K)$ para obtener la matriz cuadrada K de modo que

$$K = \begin{bmatrix} [v(K)]_{\{1,\ldots,n\}} & [v(K)]_{\{n+1,\ldots,2n\}} & \ldots & [v(K)]_{\{(n^2-n+1,\ldots,n^2\}} \end{bmatrix}$$

Paso 14 Comprobar si $K^2 = I_n$ para las matrices K obtenidas. Si no se cumple entonces ir al Paso 15; de lo contrario, las matrices K que lo cumplan dan todas las posibilidades para que A sea $\{K, s+1\}$-potente. Ir al Fin.

Paso 15 "No existe una matriz involutiva $K \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tal que A es $\{K, s+1\}$-potente".

Fin

A continuación se presenta la justificación del algoritmo anterior. Como se ha indicado, el objetivo del problema inverso es hallar todas las matrices K tales que $KA^{s+1}K = A$. Para ello, a partir del Teorema 2.2, es posible trasladar este problema al de hallar la solución de las ecuaciones $KP_jK = P_{\varphi(j)}$ en la incógnita K. Es decir, se trata de encontrar las soluciones comunes a

$$KP_j = P_{\varphi(j)}K \qquad \text{y} \qquad KP_{(s+1)^2-1} = P_{(s+1)^2-1}K$$

donde φ es la función definida en el Lema 2.5. Usando la notación de Kronecker se tiene que

$$v(KP_j) = v(P_{\varphi(j)}K)$$

es equivalente a

$$(P_j^T \otimes I_n)v(K) = (I_n \otimes P_{\varphi(j)})v(K)$$

para $j = 0, 1, \ldots, (s+1)^2 - 2$, y análogamente que

$$v(KP_{(s+1)^2-1}) = v(P_{(s+1)^2-1}K)$$

es equivalente a

$$(P_{(s+1)^2-1}^T \otimes I_n)v(K) = (I_n \otimes P_{(s+1)^2-1})v(K)$$

para $j = (s+1)^2 - 1$. Es claro entonces que es necesario encontrar soluciones no triviales $v(K)$ del espacio nulo de la matriz

$$\begin{bmatrix} (P_0^T \otimes I_n) + (I_n \otimes -P_{\varphi(0)}) \\ (P_1^T \otimes I_n) + (I_n \otimes -P_{\varphi(1)}) \\ \vdots \\ (P_{(s+1)^2-2}^T \otimes I_n) + (I_n \otimes -P_{\varphi((s+1)^2-2)}) \\ (P_{(s+1)^2-1}^T \otimes I_n) + (I_n \otimes -P_{(s+1)^2-1}) \end{bmatrix} \tag{4.7}$$

que cumplan la condición $K^2 = I_n$. La notación de la suma de Kronecker permite reescribir esta matriz (4.7) como la matriz M dada en (4.6).

En resumen se ha demostrado el siguiente resultado.

Teorema 4.1 *Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ y $s \in \mathbb{N}$. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(a) Existe una matriz involutiva $K \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tal que A es $\{K, s+1\}$-potente.

(b) A es diagonalizable, $\sigma(A) \subseteq \{0\} \cup \Omega_{(s+1)^2-1}$ y la matriz dada en (4.6) tiene espacio nulo $v(K)$ tal que $K^2 = I_n$ y las matrices P_j satisfacen la condición ($\mathcal{P}$).

(c) $A^{(s+1)^2} = A$, y la matriz definida en (4.6) tiene espacio nulo $v(K)$ tal que $K^2 = I_n$ y las matrices P_j satisfacen la condición ($\mathcal{P}$).

Se debe tener en cuenta que en el Teorema 4.1 se deben considerar sólo los números complejos que estén en el espectro de A, al igual que en el algoritmo. Para ello basta descartar los números complejos de $\{0\} \cup \Omega_{(s+1)^2-1}$ que no se utilicen y hacer las reordenaciones adecuadas como se ha realizado en el algoritmo.

4.4.2. Un método alternativo

Si bien el Teorema 4.1 ha permitido diseñar el Algoritmo 5 a partir de la relación que se establece entre sus proyectores y la matriz K, en el siguiente algoritmo se dará otro procedimiento simplificado para encontrar solución al problema inverso de hallar las matrices involutivas K.

ALGORITMO 6

Entradas: Una matriz $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ y un número natural s.

Salida: Todas las matrices involutivas $K \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tales que A es $\{K, s+1\}$-potente.

Paso 1 Diagonalizar A como $A = PDP^{-1}$.

Paso 2 Resolver el sistema lineal $J_{previas}D - D^{s+1}J_{previas} = O$.

Paso 3 Llamar J a las las matrices $J_{previas}$ del Paso 2 que cumplan $J^2_{previas} = I_n$ (si existen) e ir al Paso 4. De lo contrario, indicar que no existen matrices K en las condiciones requeridas. Ir al Fin.

Paso 4 Para cada una de las matrices J del Paso 3, calcular $K = PJP^{-1}$.

Fin

A continuación se presenta la justificación del algoritmo anterior. De nuevo, el objetivo del problema inverso es hallar todas las matrices K tales que $KA^{s+1}K = A$. Como es sabido, del Teorema 2.2 se desprende que A debe ser diagonalizable y su espectro debe estar contenido en $\{0\} \cup \Omega_{(s+1)^2-1}$. Por tanto, existe una matriz invertible $P \in \mathbb{C}^{n\times n}$ y una matriz diagonal $D \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tales que $A = PDP^{-1}$ con $D = \text{diag}(\lambda_1 I_{r_1}, \ldots, \lambda_k I_{r_k})$ donde $\lambda_i \neq \lambda_j$ para $i \neq j$, $r_1 + \cdots + r_k = n$ y $\lambda_i \in \{0\} \cup \Omega_{(s+1)^2-1}$ para $i = 1, \ldots, k$.

Por el apartado (h) del Lema 2.2 de la página 16 se tiene que $P^{-1}AP$ debe ser $\{P^{-1}KP, s+1\}$-potente, es decir el problema inverso se puede reformular donde ahora se deben buscar todas las matrices $J \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tales que D sea $\{J, s+1\}$-potente y luego calcular $K = PJP^{-1}$. Por tanto, por definición, se debe resolver la ecuación matricial

$$D^{s+1}J = JD$$

para J. Este razonamiento justifica el Paso 2 del Algoritmo 6. Se puede observar que el sistema lineal a resolver es homogéneo. A partir de las matrices $J_{previas}$ calculadas en el Paso 2, se deben descartar las que no sean involutivas, siendo las restantes las matrices buscadas.

De este modo es posible generar gran cantidad de ejemplos de matrices A que sean $\{K, s+1\}$-potentes, a partir de una matriz D (con valores propios adecuados) que diagonalice a A.

4.5. Ejemplos numéricos

Los algoritmos desarrollados han sido implementados empleando el paquete MATLAB R2010b. Entre las consideraciones a tener en cuenta cabe destacar la utilización de variables simbólicas debido a la posibilidad de infinitas soluciones en algunos de ellos, o bien, que algunos elementos de las matrices buscadas sean variables (aunque quizás sólo temporalmente en algunos pasos del algoritmo).

En esta sección se presentan varios ejemplos numéricos para mostrar las prestaciones de estos algoritmos y demostrar su funcionalidad.

4.5.1. Caso $s \geq 1$

Mientras el coste computacional del Algoritmo 2 es $O(n^3)$, el Algoritmo 3 solamente requiere una complejidad computacional $O(n)$.

Nótese que el coste computacional del Algoritmo 4 está básicamente dado por el Paso 3. En este último caso se observa que la matriz M tiene como máximo rango 2. Entonces, para resolver el sistema

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & \mu_1 \\ \vdots & \vdots \\ \lambda_n & \mu_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \gamma,$$

hay que elegir dos ecuaciones linealmente independientes (o bien solamente una cuando rango$(M) = 1$). Es decir, solamente se resuelve como máximo un sistema lineal 2×2.

Por último, en el Algoritmo 5 el coste computacional viene marcado por los Pasos 1, 8, 11 y 14, y en el método alternativo presentado en el Algoritmo 6, el coste computacinoal viene marcado por los Pasos 1 y 2.

Ejemplo 4.1 *Para* $s = 2$ *y*

$$K = \begin{bmatrix} 1{,}2989 & -1{,}2069 & 3{,}5632 & 3{,}0460 \\ 1{,}3793 & -2{,}7241 & 4{,}1379 & 4{,}8276 \\ -0{,}2759 & 1{,}3448 & -3{,}8276 & -3{,}9655 \\ 0{,}6437 & -2{,}1379 & 4{,}5977 & 5{,}2529 \end{bmatrix},$$

con el Algoritmo 2 se obtiene $A = A_1 + iA_2$ *donde*

$$A_1 = \begin{bmatrix} -0{,}3820 & 1{,}2435 & -0{,}9103 & -0{,}9834 \\ 0{,}3657 & 0{,}6035 & -1{,}0241 & -1{,}0180 \\ -0{,}2845 & 0{,}4145 & 0{,}0894 & -0{,}6421 \\ 0{,}3657 & -0{,}1036 & -1{,}0241 & -0{,}3109 \end{bmatrix}$$

y

$$A_2 = \begin{bmatrix} -0{,}0731 & -0{,}0853 & 0{,}4877 & 1{,}1582 \\ 0{,}5202 & -0{,}4145 & -0{,}3251 & 0{,}4064 \\ -0{,}1300 & -0{,}7803 & 0{,}7884 & 0{,}9591 \\ 0{,}5202 & 0{,}2926 & -0{,}3251 & -0{,}3007 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 4.2 *Para la misma matriz* K *del Ejemplo 4.1, con el Algoritmo 3 se obtiene* $B = B_1 + iB_2$ *donde*

$$B_1 = \begin{bmatrix} -0{,}3901 & 0{,}6644 & 0{,}2438 & -0{,}1280 \\ 0{,}2601 & 0{,}1463 & -0{,}1626 & -0{,}5039 \\ -0{,}0650 & 0{,}4938 & 0{,}0406 & -0{,}4044 \\ 0{,}2601 & -0{,}5608 & -0{,}1626 & 0{,}2032 \end{bmatrix}$$

y

$$B_2 = \begin{bmatrix} -0{,}3786 & 0{,}7763 & -1{,}3880 & -0{,}6307 \\ 0{,}4095 & 0{,}0857 & -1{,}3810 & -0{,}5238 \\ -0{,}3754 & -0{,}5022 & 0{,}1096 & 0{,}1433 \\ 0{,}4095 & 0{,}7928 & -1{,}3810 & -1{,}2310 \end{bmatrix}.$$

Ejemplo 4.3 *Para las matrices A y B obtenidas en los Ejemplos 4.1 y 4.2, el Algoritmo 4 proporciona los escalares $c_1 = -0{,}7071 + 0{,}7071i$ y $c_2 = 0$.*

Ejemplo 4.4 *Para $s = 2$, $n = 2$ y*

$$K = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

con el Algoritmo 2 se obtiene

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Ejemplo 4.5 *Para la misma matriz K del Ejemplo 4.4, con el Algoritmo 3 se obtiene*

$$B = \begin{bmatrix} -\sqrt{2}i & \frac{\sqrt{2}}{2}i \\ -\sqrt{2}i & 0 \end{bmatrix}.$$

Ejemplo 4.6 *Para las matrices A y B obtenidas en los Ejemplos 4.4 y 4.5, el Algoritmo 4 proporciona los escalares*

c_1	0	0	1	-1	$i\sqrt{2}$	$-i\sqrt{2}$	-1	1
c_2	1	-1	0	0	1	-1	$i\sqrt{2}$	$-i\sqrt{2}$

además de la solución nula.

Ejemplo 4.7 *Para $s = 2$,*

$$K = \begin{bmatrix} -0{,}3465 & -0{,}4752 & -0{,}7129 & -0{,}1584 \\ -0{,}9703 & 0{,}06931 & -0{,}396 & 0{,}3564 \\ -0{,}3366 & -0{,}1188 & 0{,}8218 & -0{,}0396 \\ -1{,}1290 & 1{,}3660 & -0{,}9505 & -0{,}5446 \end{bmatrix}$$

y

$$D = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

con el Algoritmo 2 se obtiene $A = A_1 + iA_2$ *donde*

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0{,}6581 & -0{,}3501 & 0{,}1820 & -0{,}5881 \\ 0{,}3921 & -0{,}7351 & -0{,}0420 & -0{,}2450 \\ 0{,}4656 & -0{,}9171 & 0{,}3921 & 0{,}6371 \\ -0{,}2030 & -0{,}2380 & 0{,}3501 & -0{,}3150 \end{bmatrix},$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} -0{,}3571 & 1{,}2880 & -0{,}8961 & -1{,}4560 \\ -0{,}5741 & 1{,}2530 & 0{,}1120 & -1{,}2320 \\ -0{,}4901 & 0{,}7421 & -0{,}3010 & -0{,}2240 \\ -0{,}4621 & 0{,}3361 & 0{,}5041 & -0{,}5951 \end{bmatrix},$$

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0{,}4307 & 0{,}5050 & -0{,}7426 & -0{,}8317 \\ 0{,}1436 & 0{,}1683 & -0{,}2475 & -0{,}2772 \\ -0{,}0718 & -0{,}0842 & 0{,}1238 & 0{,}1386 \\ -0{,}1436 & -0{,}1683 & 0{,}2475 & 0{,}2772 \end{bmatrix},$$

$$P_2 = \begin{bmatrix} 0{,}2178 & -0{,}1584 & -0{,}2376 & 0{,}6139 \\ 0{,}2723 & -0{,}198 & -0{,}297 & 0{,}7673 \\ -0{,}0545 & 0{,}0396 & 0{,}0594 & -0{,}1535 \\ 0{,}3267 & -0{,}2376 & -0{,}3564 & 0{,}9208 \end{bmatrix},$$

$$P_3 = \begin{bmatrix} -0{,}1832 & 0{,}4059 & 0{,}1089 & -0{,}198 \\ -0{,}5495 & 1{,}218 & 0{,}3267 & -0{,}5941 \\ -0{,}2748 & 0{,}6089 & 0{,}1634 & -0{,}297 \\ -0{,}1832 & 0{,}4059 & 0{,}1089 & -0{,}198 \end{bmatrix},$$

$$P_4 = \begin{bmatrix} 0{,}5347 & -0{,}7525 & 0{,}8713 & 0{,}4158 \\ 0{,}1337 & -0{,}1881 & 0{,}2178 & 0{,}1040 \\ 0{,}4010 & -0{,}5644 & 0{,}6535 & 0{,}3119 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ejemplo 4.8 *Para la misma K del Ejemplo 4.7, con el Algoritmo 3 se obtiene $B = B_1 + iB_2$ donde*

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0{,}2240 & -0{,}4201 & 0{,}7841 & -0{,}1400 \\ -0{,}0980 & 0{,}0070 & 0{,}3641 & -0{,}4691 \\ 0{,}3220 & -0{,}4271 & 0{,}4201 & 0{,}3290 \\ -0{,}2310 & 0{,}1680 & 0{,}2520 & -0{,}6511 \end{bmatrix}$$

y

$$B_2 = \begin{bmatrix} 0{,}0818 & 0{,}7431 & -1{,}3000 & -1{,}3620 \\ 0{,}4060 & -0{,}7765 & -0{,}5182 & -0{,}2993 \\ -0{,}0421 & -0{,}3220 & -0{,}5437 & 0{,}3236 \\ -0{,}1914 & -0{,}4062 & 0{,}3907 & -0{,}1759 \end{bmatrix}.$$

Ejemplo 4.9 *Para $s = 2$,*

$$K = \begin{bmatrix} 0{,}4982 & -0{,}2292 & -0{,}8301 & 0{,}6536 & -0{,}3221 \\ -0{,}1218 & 0{,}4011 & -0{,}5472 & 0{,}3562 & 0{,}5638 \\ -0{,}3118 & -0{,}4140 & 0{,}3113 & 0{,}5049 & 0{,}1208 \\ 0{,}5018 & 0{,}2292 & 0{,}8301 & 0{,}3464 & 0{,}3221 \\ -0{,}4254 & 0{,}8921 & -0{,}0124 & 0{,}1590 & -0{,}5570 \end{bmatrix}$$

y

$$D = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

con el Algoritmo 2 se obtiene $A = A_1 + iA_2$ *donde*

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0{,}8199 & 0{,}1071 & -0{,}0755 & -0{,}2323 & -0{,}1421 \\ -0{,}5095 & 0{,}4159 & 0{,}3395 & 0{,}4043 & -0{,}5910 \\ 0{,}0328 & 0{,}0410 & 0{,}7337 & -0{,}0356 & 0{,}2039 \\ -0{,}1277 & 0{,}5904 & 0{,}7359 & -0{,}5351 & -0{,}2279 \\ -0{,}8049 & -0{,}1933 & 0{,}7702 & 0{,}0616 & -0{,}4344 \end{bmatrix},$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} -0{,}2089 & 0{,}1635 & -0{,}6308 & 0{,}0815 & -0{,}0759 \\ 0{,}3513 & 0{,}3205 & -0{,}0241 & 0{,}5449 & -0{,}1993 \\ -0{,}1993 & 0{,}1708 & -0{,}3559 & -0{,}0285 & -0{,}1803 \\ 0{,}3434 & 0{,}5293 & -0{,}2234 & -0{,}1970 & 0{,}2088 \\ 0{,}1844 & -0{,}3523 & -0{,}3585 & 0{,}5936 & 0{,}4413 \end{bmatrix},$$

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0{,}0409 & 0{,}1133 & -0{,}0085 & 0{,}0260 & -0{,}0705 \\ 0{,}2861 & 0{,}7932 & -0{,}0596 & 0{,}1819 & -0{,}4933 \\ 0{,}0409 & 0{,}1133 & -0{,}0085 & 0{,}0260 & -0{,}0705 \\ 0{,}1635 & 0{,}4533 & -0{,}0341 & 0{,}1039 & -0{,}2819 \\ -0{,}0410 & -0{,}1133 & 0{,}0085 & -0{,}0260 & 0{,}0705 \end{bmatrix},$$

$$P_2 = \begin{bmatrix} -0{,}0246 & -0{,}0503 & -0{,}0201 & 0{,}0917 & -0{,}0302 \\ 0{,}1230 & 0{,}2517 & 0{,}1007 & -0{,}4586 & 0{,}1510 \\ -0{,}0246 & -0{,}0503 & -0{,}0201 & 0{,}0917 & -0{,}0302 \\ -0{,}1723 & -0{,}3523 & -0{,}1409 & 0{,}6421 & -0{,}2114 \\ 0{,}1230 & 0{,}2517 & 0{,}1007 & -0{,}4586 & 0{,}1510 \end{bmatrix},$$

$$P_3 = \begin{bmatrix} 0{,}0522 & -0{,}0173 & -0{,}0762 & 0{,}0606 & 0{,}0973 \\ 0{,}1567 & -0{,}0519 & -0{,}2284 & 0{,}1817 & 0{,}2919 \\ -0{,}0522 & 0{,}0173 & 0{,}0762 & -0{,}06067 & -0{,}0973 \\ 0{,}2089 & -0{,}0692 & -0{,}3046 & 0{,}2423 & 0{,}3893 \\ 0{,}3656 & -0{,}1211 & -0{,}5330 & 0{,}4240 & 0{,}6812 \end{bmatrix},$$

$$P_4 = \begin{bmatrix} 0{,}4132 & -0{,}0849 & 0{,}8276 & -0{,}1205 & 0{,}1644 \\ -0{,}1771 & 0{,}0364 & -0{,}3547 & 0{,}0516 & -0{,}0705 \\ 0{,}2951 & -0{,}0607 & 0{,}5911 & -0{,}0860 & 0{,}1174 \\ 0{,}05903 & -0{,}0121 & 0{,}1182 & -0{,}0172 & 0{,}0235 \\ -0{,}0590 & 0{,}0121 & -0{,}1182 & 0{,}0172 & -0{,}0235 \end{bmatrix},$$

$$P_5 = \begin{bmatrix} 0{,}5183 & 0{,}0392 & -0{,}7228 & -0{,}0578 & -0{,}1611 \\ -0{,}3887 & -0{,}0294 & 0{,}5421 & 0{,}0434 & 0{,}1208 \\ -0{,}2592 & -0{,}0196 & 0{,}3614 & 0{,}0289 & 0{,}0805 \\ -0{,}2592 & -0{,}0196 & 0{,}3614 & 0{,}0289 & 0{,}0805 \\ -0{,}3887 & -0{,}0294 & 0{,}5421 & 0{,}0434 & 0{,}1208 \end{bmatrix}.$$

Ejemplo 4.10 *Para la misma K del Ejemplo 4.9, con el Algoritmo 3 se obtiene $B = B_1 + iB_2$ donde*

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0{,}8279 & 0{,}0148 & -0{,}1234 & -0{,}2079 & -0{,}0235 \\ -0{,}6010 & -0{,}1817 & 0{,}2201 & 0{,}4042 & -0{,}0358 \\ -0{,}0331 & -0{,}0269 & 0{,}7936 & -0{,}0968 & 0{,}1849 \\ -0{,}0956 & 0{,}2210 & 0{,}5446 & -0{,}4373 & 0{,}2466 \\ -0{,}5175 & -0{,}1988 & 0{,}3873 & 0{,}3798 & -0{,}0026 \end{bmatrix}$$

y

$$B_2 = \begin{bmatrix} -0{,}2861 & 0{,}2263 & -0{,}5033 & -0{,}0143 & -0{,}2627 \\ 0{,}1676 & 0{,}6414 & 0{,}3484 & 0{,}2880 & -0{,}8422 \\ -0{,}0982 & 0{,}1745 & -0{,}4884 & 0{,}0825 & -0{,}0349 \\ 0{,}0346 & 0{,}7802 & 0{,}2866 & -0{,}5802 & -0{,}5383 \\ -0{,}4517 & -0{,}1788 & 0{,}5540 & -0{,}1379 & -0{,}7009 \end{bmatrix}.$$

Ejemplo 4.11 *Para $s = 4$ y*

$$A = \begin{bmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -2 \\ 0 & 15 & -6 \end{bmatrix}$$

el Algoritmo 5 proporciona las soluciones

$$K_1 = I_3, \qquad K_2 = \mathrm{diag}(1,-1,-1), \qquad K_3 = \mathrm{diag}(-1,1,1),$$

$$K_4 = -I_3, \qquad K_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -11 & 4 \\ 0 & -30 & 11 \end{bmatrix}, \qquad K_6 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & -4 \\ 0 & 30 & -11 \end{bmatrix},$$

$$K_7 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -11 & 4 \\ 0 & -30 & 11 \end{bmatrix}, \qquad K_8 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & -4 \\ 0 & 30 & -11 \end{bmatrix},$$

siendo los proyectores obtenidos

$$P_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & -2 \\ 0 & 15 & -5 \end{bmatrix}, \qquad P_6 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad P_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 2 \\ 0 & -15 & 6 \end{bmatrix}.$$

Ejemplo 4.12 *Para la misma matriz A que en el Ejemplo 4.11, las matrices K se obtienen a partir*

$$\begin{bmatrix} z_9 & 0 & 0 \\ 0 & -5z_1 + 6z_5 & 2z_1 - 2z_5 \\ 0 & -15z_1 + 15z_5 & 6z_1 - 5z_5 \end{bmatrix}$$

que resulta de aplicar el Algoritmo 6 dando a los parámetros los valores indicados en el Cuadro 4.6, que coinciden con las soluciones proporcionadas en el ejemplo anterior.

4.5.2. Caso $s = 0$

En este caso, los únicos ejemplos interesantes corresponden a los construidos en el apartado 4.2.2. La razón es que para cada matriz $\{K, 1\}$-potente que conmuta con la matriz A, todas las combinaciones lineales posibles son matrices $\{K, 1\}$-potentes.

Parámetros	z_1	z_5	z_9
1	1	1	1
2	1	1	-1
3	1	-1	1
4	1	-1	-1
5	-1	1	1
6	-1	1	-1
7	-1	-1	1
8	-1	-1	-1

Cuadro 4.6: Parámetros para obtener todas las matrices K

Ejemplo 4.13 *Si se considera la matriz involutiva*

$$K = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 7 & -4 & 4 \\ -4 & 1 & 8 \\ 4 & 8 & 1 \end{bmatrix},$$

todas las posibles matrices $\{K,1\}$*-potentes son* $A = \frac{1}{9}(aM_a + bM_b + cM_c + dM_d + eM_e)$ *donde*

$$M_a = \begin{bmatrix} 4 & -4 & -2 \\ -4 & 4 & 2 \\ -2 & 2 & a \end{bmatrix}, \quad M_b = \begin{bmatrix} -4 & -2 & -4 \\ 4 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad M_c = \begin{bmatrix} -4 & 4 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \\ -4 & 4 & 2 \end{bmatrix},$$

$$M_d = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 4 \end{bmatrix} \quad y \quad M_e = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & -4 \\ -2 & -4 & 4 \end{bmatrix},$$

siendo a, b, c, d, e *son complejos arbitrarios.*

A continuación se estudiará el tiempo computacional en términos de n y s. Para estos cálculos se ha utilizado un procesador Intel Core 2 Duo a 2GHz.

Para $n = 10, 30, 50, \ldots, 500$, la Figura 4.1 muestra el tiempo computacional requerido para $s = 1, 5, 100, 200$. Se puede observar que, como era de esperar, el tiempo computacional crece exponencialmente con s y n. Sin embargo, estos valores de t se incrementan más rápidamente con n que con s.

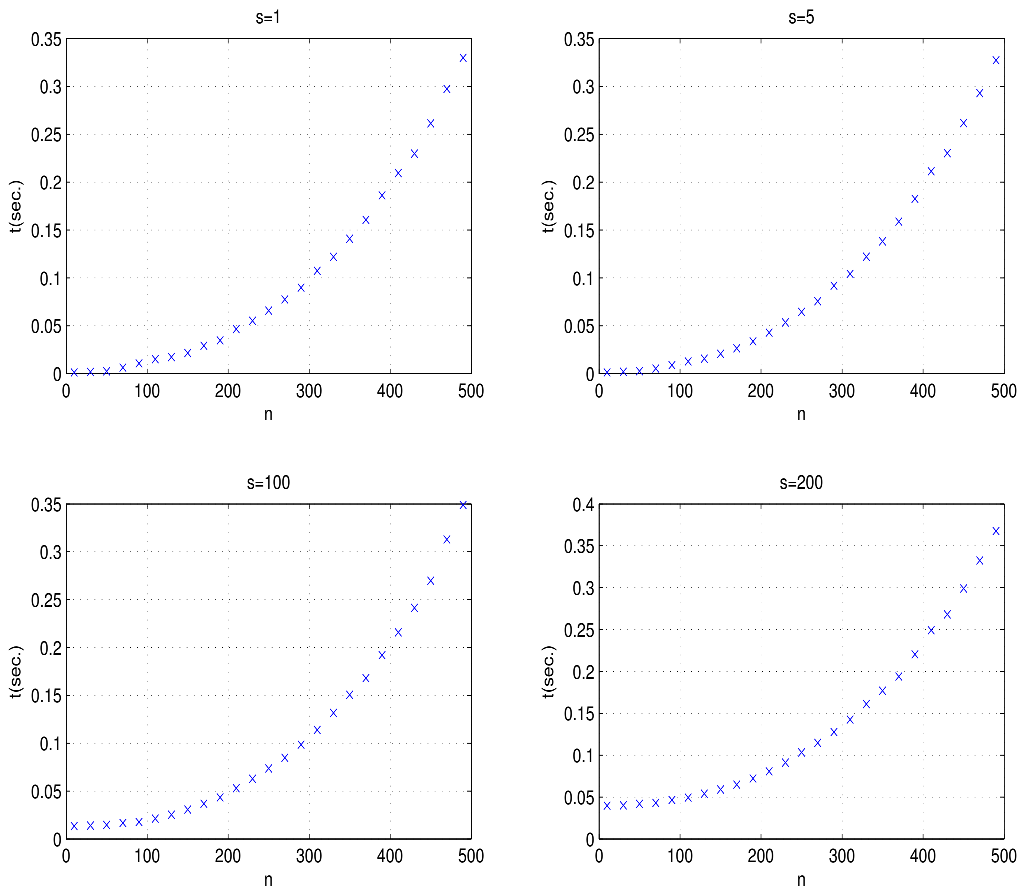

Figura 4.1: Tiempo para la obtención de A con n variable y $s = 1, 5, 100, 200$

CAPÍTULO 5

Matrices $\{K, -(s+1)\}$-potentes

5.1. Introducción

En [10] se han estudiado las matrices centrosimétricas, que son de gran interés por sus diversas aplicaciones y reducción en el cálculo computacional. Entre las aplicaciones de este tipo de matrices cabe destacar el análisis y síntesis de *arrays* de antenas, donde la utilización de matrices centrosimétricas facilita la simulación y cálculos por computador. Otra aplicación interesante es el análisis de vibraciones de estructuras, que se pueden caracterizar mediante matrices de este tipo y facilitar el análisis de las respuesta en frecuencia de dichas estructuras mediante un cálculo computacional reducido. También, en el reconocimiento de patrones son de gran utilidad las matrices centrosimétricas puesto que la complejidad de los cálculos se reduce gracias a su utilización.

Por otro lado, en el artículo [35], Wikramaratna ha estudiado las matrices X tales que $X^{-1} = X_R$, donde $X_R = JXJ$, siendo J la matriz de intercambio.

Este estudio se hizo sobre matrices con coeficientes en los enteros módulo m, puesto que su objetivo era aplicar este estudio en criptografía.

En los Capítulos 2, 3 y 4 se han estudiado las matrices $\{K, s+1\}$-potentes para $s \geq 1$. El caso $s = 0$, que corresponde a las matrices centrosimétricas K-generalizadas, se ha analizado en los Capítulos 3 y 4. Sin embargo, el caso particular $KAK = A^0$ no se ha considerado, puesto que la única matriz que lo verifica es la identidad. Los casos correspondientes a los demás valores enteros de s se estudiarán a lo largo de este capítulo.

Definición 5.1 *Sea $K \in \mathbb{C}^{n\times n}$ una matriz involutiva. Una matriz $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ se denomina $\{K, -1\}$-potente si cumple*

$$KAK = A^{-1}.$$

Es claro que esta clase de matrices es una subclase de las matrices invertibles con determinante ± 1. Además, K es $\{I_n, -1\}$-potente e I_n es $\{K, -1\}$-potente para cualquier matriz involutiva K.

Este capítulo está organizado de la siguiente forma. En la Sección 5.2 se introducen y caracterizan las matrices $\{K, -1\}$-potentes además de realizar el estudio del problema inverso correspondiente. Algunos algoritmos que permiten construir tanto las matrices A como las matrices involutivas K, que hacen que A sea $\{K, -1\}$-potente, se presentan en la Sección 5.3. Finalmente, en la Sección 5.4 se muestra que un estudio similar al realizado para las matrices $\{K, s+1\}$-potentes es posible llevarlo a cabo, en este caso, para las matrices $\{K, -(s+1)\}$-potentes.

5.2. Matrices $\{K, -1\}$-potentes

Sea $\mathbf{P}^{(K,-2)}$ el conjunto de todas las matrices $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tal que A es $\{K, -1\}$-potente, es decir,

$$\mathbf{P}^{(K,-2)} = \{A \in \mathbb{C}^{n\times n} : \; KAK = A^{-1}\};$$

y sea $\mathbf{I}$ el conjunto de todas las matrices complejas involutivas de $\mathbb{C}^{n\times n}$.

Un resultado similar al dado en el Teorema 1 de [35] se proporciona a continuación. En este caso se relaciona además con el conjunto $\mathbf{P}^{(I_n,1)}$ considerado en el Capítulo 3.

Teorema 5.1 *Los conjuntos* $\mathbf{P}^{(K,-2)}$, $\mathbf{I}$ *y* $\mathbf{P}^{(I_n,1)}$ *son equipotentes.*

Demostración. Es fácil ver que la correspondencia $\Psi : \mathbf{P}^{(K,-2)} \to \mathbf{I}$ dada por $A \mapsto KA$ está bien definida puesto que si $KAK = A^{-1}$ entonces

$$[\Psi(A)]^2 = (KA)^2 = KAKA = A^{-1}A = I_n,$$

con lo que $\Psi(A) \in \mathbf{I}$. Además, Ψ es biyectiva. En efecto, es inmediato que por ser K invertible, se tiene que

$$KA_1 = KA_2 \Longrightarrow A_1 = A_2,$$

y es evidente que cualquier matriz $B \in \mathbf{I}$ es la imagen de KB por Ψ siendo $KB \in \mathbf{P}^{(K,-2)}$ puesto que

$$K(KB)K = BK = B^{-1}K = (KB)^{-1}.$$

De esta manera se ha establecido que $\mathbf{P}^{(K,-2)}$ e $\mathbf{I}$ son equipotentes. Más aún, Ψ es una involución puesto que

$$\Psi^2(A) = \Psi(\Psi(A)) = K(KA) = A, \qquad \text{para todo } A \in \mathbf{P}^{(K,-2)}.$$

Por otro lado, se considera la función $\xi : \mathbf{P}^{(K,-2)} \to \mathbf{P}^{(I_n,1)}$ dada por $\xi(A) = \frac{1}{2}(I_n - KA)$ para $A \in \mathbf{P}^{(K,-2)}$. Es claro que ξ está bien definida puesto que si $KAK = A^{-1}$ entonces $(KA)^2 = I_n$ y así

$$\begin{aligned} \xi^2(A) &= \left(\frac{1}{2}(I_n - KA)\right)^2 \\ &= \frac{1}{4}(I_n - KA - KA + (KA)^2) \\ &= \frac{1}{2}(I_n - KA) \\ &= \xi(A), \end{aligned}$$

con lo que $\xi(A) \in \mathbf{P}^{(I_n,1)}$. Además, ξ es biyectiva. En efecto, la inyectividad se deduce del hecho que si $\xi(A_1) = \xi(A_2)$ para $A_1, A_2 \in \mathbf{P}^{(K,-2)}$ entonces $\frac{1}{2}(I_n - KA_1) = \frac{1}{2}(I_n - KA_2)$ de donde $KA_1 = KA_2$ y así, $A_1 = A_2$. Para ver que ξ es sobreyectiva, sea $B \in \mathbf{P}^{(I_n,1)}$. Si se define $A = K(I_n - 2B)$ se cumple que

$$\xi(A) = \frac{1}{2}[I_n - K(K(I_n - 2B))] = B$$

siendo $A \in \mathbf{P}^{(K,-2)}$ puesto que al ser $B^2 = B$ se tiene que $(I_n - 2B)^{-1} = I_n - 2B$ y así

$$KAK = K(K(I_n - 2B))K = (I_n - 2B)K = [K(I_n - 2B)]^{-1} = A^{-1}.$$

De esta manera, $\mathbf{P}^{(K,-2)}$ y $\mathbf{P}^{(I_n,1)}$ son equipotentes. ■

Observación 5.1 *Las matrices*

$$A = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \qquad y \qquad K = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

permiten comprobar que

$$\mathbf{P}^{(K,-2)} \nsubseteq \mathbf{I} \qquad y \qquad \mathbf{P}^{(K,-2)} \nsubseteq \mathbf{P}^{(I_n,1)}$$

puesto que

$$KAK = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = A^{-1} \quad \textit{pero} \quad A^2 = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 15 & 6 \\ -6 & 3 \end{bmatrix} \neq I_2 \ \textit{ y } \ A^2 \neq A.$$

Por otro lado, las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad y \qquad K = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

permiten comprobar que

$$\mathbf{I} \not\subseteq \mathbf{P}^{(K,-2)}$$

puesto que

$$A^2 = I_2 \qquad \textit{pero} \qquad KAK = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \neq A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

y cualquier matriz idempotente no invertible permite comprobar que se tiene $\mathbf{P}^{(I_n,1)} \not\subseteq \mathbf{P}^{(K,-2)}$. *Es evidente que los conjuntos* $\mathbf{I}$ *y* $\mathbf{P}^{(I_n,1)}$ *son distintos.*

Por lo tanto $\mathbf{P}^{(K,-2)}$, $\mathbf{I}$ y $\mathbf{P}^{(I_n,1)}$ son clases coordinables y diferentes dos a dos. Más adelante se verán algunas de estas diferencias.

5.2.1. Caracterizaciones

En el siguiente resultado se proporciona una caracterización de este tipo de matrices.

Teorema 5.2 *Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) A es $\{K, -1\}$-potente.

(b) $(KA)^2 = I_n$.

(c) Existe una matriz invertible $P \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tal que

$$A = KP \begin{bmatrix} I & O \\ O & -I \end{bmatrix} P^{-1}.$$

(d) Existe una matriz idempotente $B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tal que $KA + 2B = I_n$.

Demostración. La equivalencia entre (a) y (b) se prueba directamente a partir de la Definición 5.1.

(b) $\Longleftrightarrow$ (c) Como $(KA)^2 = I_n$, hay una matriz invertible $P \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tal que

$$KA = P \begin{bmatrix} I & O \\ O & -I \end{bmatrix} P^{-1}.$$

Ahora, el resultado se puede obtener directamente. La implicación recíproca es evidente.

La equivalencia entre (a) y (d) es consecuencia del Teorema 5.1. ■

Un resultado dual se da en el siguiente teorema, cuya demostración es análoga a la del Teorema 5.2 (a pesar de que KA no tenga por qué coincidir con AK).

Teorema 5.3 *Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) A es $\{K,-1\}$-potente.

(b) $(AK)^2 = I_n$.

(c) Existe una matriz invertible $P \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tal que

$$A = P \begin{bmatrix} I & O \\ O & -I \end{bmatrix} P^{-1}K.$$

(d) Existe una matriz idempotente $B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tal que $AK + 2B = I_n$.

Para una matriz involutiva $K \in \mathbb{C}^{n\times n}$, se considera una matriz invertible $P \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tal que

$$K = P \begin{bmatrix} I & O \\ O & -I \end{bmatrix} P^{-1}. \tag{5.1}$$

Cuando se utiliza esta información espectral de la matriz K, se puede establecer el siguiente resultado.

Teorema 5.4 *Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ y sea K como en (5.1). Entonces A es una matriz $\{K, -1\}$-potente si y sólo si existen matrices M, N, R y S de tamaños adecuados (siendo M una matriz cuadrada) tal que*

$$A = P \begin{bmatrix} M & N \\ R & S \end{bmatrix} P^{-1} \tag{5.2}$$

donde las matrices por bloque satisfacen $M^2 - NR = I$, $MN = NS$, $RM = SR$ y $S^2 - RN = I$.

Demostración. Como

$$K = P \begin{bmatrix} I & O \\ O & -I \end{bmatrix} P^{-1},$$

para alguna matriz invertible $P \in \mathbb{C}^{n\times n}$, la matriz A se puede particionar como en (5.2). De la hipótesis y el Teorema 5.2, la condición $(KA)^2 = I_n$ conduce a

$$\begin{bmatrix} M^2 - NR & MN - NS \\ -RM + SR & -RN + S^2 \end{bmatrix} = I_n.$$

La implicación recíproca es evidente a partir de un sencillo cálculo y teniendo en cuenta que $(KA)^2 = I_n$ implica que A es invertible. ∎

También es posible analizar las matrices estudiadas en este capítulo a través del complemento de Schur. Recuérdese que el *complemento de Schur de M en Z* para

$$Z = \begin{bmatrix} M & N \\ R & S \end{bmatrix},$$

(donde M y S son matrices cuadradas), viene dado por

$$Z/M = S - RM^{-1}N.$$

En este caso, es bien conocido que $\det(Z) = \det(M)\det(Z/M)$ y

$$\begin{bmatrix} M & N \\ R & S \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} M^{-1} + M^{-1}N(Z/M)^{-1}RM^{-1} & -M^{-1}N(Z/M)^{-1} \\ -(Z/M)^{-1}RM^{-1} & (Z/M)^{-1} \end{bmatrix} \tag{5.3}$$

siempre que M sea invertible. Análogamente, se puede definir el *complemento de Schur de S en Z* mediante $Z/S = M - NS^{-1}R$.

Teorema 5.5 *Sea K como en (5.1) y $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tal que*

$$A = P \begin{bmatrix} M & N \\ R & S \end{bmatrix} P^{-1}$$

para ciertas matrices M, N, R y S de tamaños adecuados. Si A es una matriz $\{K, -1\}$-potente entonces

(a) $M \neq O$ y $S \neq O$.

(b) sólo se cumple una de las siguientes condiciones:

- *(I) M no es invertible.*
- *(II) M es invertible, $M^{-1} + M^{-1}N(Z/M)^{-1}NM^{-1} = M$, $RM^{-1} = (Z/M)R$, $N = MN(Z/M)$ y $(Z/M)S = I$.*

(c) sólo se cumple una de las siguientes condiciones:

(I) *S no es invertible.*

(II) *S es invertible, $S^{-1} + S^{-1}R(Z/S)^{-1}RS^{-1} = S$, $NS^{-1} = (Z/S)N$, $R = SR(Z/S)$ y $(Z/S)M = I$.*

Demostración. A partir del Teorema 5.4, si $M = O$ se tiene que $NR = -I$, $NS = O$, $SR = O$ y $S^2 - RN = I$. Postmultiplicando por S la última igualdad, se obtiene $S^3 - RNS = S$. Por tanto, $S^3 = S$. Si S fuese invertible entonces $R = O$, que supone una contradicción. Así, S no es invertible. Por tanto, existe una matriz invertible P_S tal que

$$S = P_S \begin{bmatrix} D & O \\ O & O \end{bmatrix} P_S^{-1}$$

donde D es una matriz invertible (diagonal). Ahora se realizan las siguientes particiones

$$R = P_S \begin{bmatrix} R_1 & R_2 \\ R_3 & R_4 \end{bmatrix} P_S^{-1} \qquad \text{y} \qquad N = P_S \begin{bmatrix} N_1 & N_2 \\ N_3 & N_4 \end{bmatrix} P_S^{-1}.$$

El hecho de que $SR = O$ supone que $R_1 = O$ y $R_2 = O$ y el hecho de que $NS = O$ supone que $N_1 = O$ y $N_3 = O$. A partir de $NR = -I$ se obtiene $N_2R_3 = -I$ y $N_4R_4 = -I$, es decir, $R_4 = -N_4^{-1}$. Sustituyendo en $S^2 - RN = I$ se obtiene que $R_3N_2 = O$. Postmultiplicando esta última igualdad por R_3, se obtiene $R_3 = O$, que supone una contradicción. Así pues, $M \neq O$. Análogamente se puede comprobar que $S \neq O$ y el apartado (a) queda probado.

Como A es invertible, cuando M también lo sea, se cumple que Z/M también es invertible. Ahora, si se considera K como en (5.1),

$$KAK = P \begin{bmatrix} M & -N \\ -R & S \end{bmatrix} P^{-1}$$

y mediante la utilización de la fórmula de Banachiewicz-Schur (5.3), la igualdad $KAK = A^{-1}$ proporciona el resultado del apartado (b) (II).

La prueba del apartado (c) es similar a la del (b) mediante el cambio de la fórmula (5.3) por

$$\begin{bmatrix} M & N \\ R & S \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} (Z/S)^{-1} & -(Z/S)^{-1}NS^{-1} \\ -S^{-1}R(Z/S)^{-1} & S^{-1}+S^{-1}R(Z/S)^{-1}NS^{-1} \end{bmatrix}.$$

■

Nota 5.1 *Se puede demostrar que las condiciones obtenidas en el Teorema 5.4 son equivalentes a las dadas en el apartado (b) (II) del Teorema 5.5.*

5.2.2. Análisis espectral

En el próximo resultado se estudian los posibles valores propios de una matriz $\{K,-1\}$-potente. Recuérdese que de los Teoremas 5.2 y 5.3 se puede deducir que $\sigma(KA) = \sigma(AK) \subseteq \{-1,1\}$. Por otra parte, si $A^{-1} = KAK$, entonces tomando trazas a ambos lados de la igualdad, y utilizando que

$$\text{traza}(A^{-1}) = \text{traza}(K(AK)) = \text{traza}((AK)K) = \text{traza}(A)$$

se tiene que

$$\sum_{i=1}^{n} \mu_i = \sum_{i=1}^{n} \mu_i^{-1}$$

donde $\sigma(A) = \{\mu_1, \ldots, \mu_n\}$. La información obtenida en esta última igualdad se puede detallar aún más como se observa en el siguiente teorema.

Teorema 5.6 *Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ una matriz $\{K,-1\}$-potente. Entonces*

$$\lambda \in \sigma(A) \iff \lambda^{-1} \in \sigma(A).$$

Además, existen escalares complejos no nulos $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ distintos dos a dos que cumplen *(a)* $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_p\} \cap \{\lambda_1^{-1}, \ldots, \lambda_p^{-1}\} = \emptyset$,

(b) $\lambda_i \neq \lambda_i^{-1}$ *para todo* $i = 1, \ldots, p$*, i.e.:* $\lambda_i \neq \pm 1$ *para todo* $i = 1, \ldots, p$*,*

tales que

$$\sigma(A) \subseteq \{\lambda_1, \lambda_1^{-1}, \ldots, \lambda_p, \lambda_p^{-1}, 1, -1\}.$$

Demostración. Por definición, se cumple que $\sigma(A) = \sigma(A^{-1})$. Si $\lambda \in \sigma(A)$ entonces $\lambda^{-1} \in \sigma(A)$, y recíprocamente. Pueden ocurrir dos situaciones:

- $\lambda^{-1} = \lambda$. Por tanto, $\lambda = \pm 1$.
- $\lambda^{-1} \neq \lambda$. Por tanto, existe $\mu \in \sigma(A) - \{\lambda\}$ tal que $\lambda^{-1} = \mu$, es decir, $\lambda, \lambda^{-1} \in \sigma(A)$ simultáneamente cuando $\lambda \neq \lambda^{-1}$.

■

Evidentemente, la implicación recíproca en el Teorema 5.6 no es cierta como se puede comprobar mediante la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

y cualquier matriz involutiva $K \in \mathbb{C}^{2\times 2}$.

En el caso en que $s \geq 1$, cuando A es $\{K, s+1\}$-potente, se ha mostrado que $A^{(s+1)^2} = A$. Ahora, si A es $\{K, -1\}$-potente, ¿es posible encontrar una potencia $t \in \mathbb{N}$ tal que $A^{t+1} = A$? En general, la respuesta es negativa y se puede comprobar por medio del siguiente contraejemplo. La matriz

$$A = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

es $\{K, -1\}$-potente para

$$K = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Sin embargo, es posible mostrar, por inducción, que

$$A^{t+1} - A = \frac{t}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \neq O, \text{ para todo } t \in \mathbb{N}.$$

En efecto, si $t = 1$,

$$A^2 - A = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \neq O.$$

Sea $t > 1$. Si se supone que

$$A^t - A = \frac{t-1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

entonces

$$\begin{aligned}
A^{t+1} - A &= A^t A - A \\
&= \left(\frac{t-1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} + A\right) A - A \\
&= \left(\frac{t-1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} + A - I\right) A \\
&= \left(\frac{t-1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} + \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} - \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}\right) A \\
&= \frac{1}{3}\begin{bmatrix} t & t \\ -t & -t \end{bmatrix} A \\
&= \frac{t}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} A \\
&= \frac{t}{3^2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \\
&= \frac{t}{3^2}\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ -3 & -3 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$= \frac{t}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Con la intención de buscar un resultado semejante al obtenido en el Teorema 2.2, es necesario estudiar cómo se relaciona las matrices $\{K, -1\}$-potentes con respecto a su diagonalización. A tal efecto, es posible mostrar que la matriz A del ejemplo anterior es $\{K, -1\}$-potente pero no es diagonalizable, puesto que su descomposición de Jordan es

$$A = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 1 \\ -\frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix}}_{S} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{J_A} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}}_{S^{-1}}.$$

A pesar de ello, una relación semejante a la dada en el Teorema 2.2 con respecto a los proyectores de la descomposición espectral de A puede establecerse, suponiendo en este caso que A es diagonalizable. A continuación se da otra caracterización de las matrices $\{K, -1\}$-potentes.

Teorema 5.7 *Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ una matriz diagonalizable. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) A es una matriz $\{K, -1\}$-potente.

(b) El espectro de A satisface las relaciones descritas en el Teorema 5.6 y además

(I) $KP_iK = P_i'$ para todo $i = 1, \dots, p$.

(II) $KP_jK = P_j$ para $j \in \{p+1, p+2\}$.

donde $P_1, P_1', \dots, P_p, P_p', P_{p+1}, P_{p+2}$ son los proyectores asociados a los valores propios $\lambda_1, \lambda_1^{-1}, \dots, \lambda_p, \lambda_p^{-1}, 1, -1$, respectivamente.

Demostración. (a) $\Longrightarrow$ (b) El Teorema 5.6 asegura la afirmación sobre los valores propios de A. Además se observa que cada valor propio distinto de ± 1

tiene la misma multiplicidad que su inverso. En efecto, sea $\lambda \in \sigma(A) - \{\pm 1\}$ con multiplicidad algebraica α y $\lambda^{-1} \in \sigma(A)$ con multiplicidad algebraica β. Como A es diagonalizable, $\lambda^{-1} \in \sigma(A^{-1})$ con multiplicidad algebraica α y $\lambda \in \sigma(A^{-1})$ con multiplicidad algebraica β. Por último, de $\sigma(A) = \sigma(A^{-1})$, se tiene que $\alpha = \beta$. Por tanto, como A es diagonalizable, el Teorema 1.1 permite realizar la descomposición espectral siguiente:

$$\begin{aligned} A &= P \operatorname{diag}\left(\lambda_1 I_{r_1}, \lambda_1^{-1} I_{r_1}, \ldots, \lambda_p I_{r_p}, \lambda_p^{-1} I_{r_p}, I_{r_{p+1}}, -I_{r_{p+2}}\right) P^{-1} \\ &= \lambda_1 P_1 + \lambda_1^{-1} P_1' + \cdots + \lambda_p P_p + \lambda_p^{-1} P_p' + P_{p+1} - P_{p+2}. \end{aligned}$$

La inversa de la matriz A viene dada por

$$A^{-1} = \lambda_1^{-1} P_1 + \lambda_1 P_1' + \cdots + \lambda_p^{-1} P_p + \lambda_p P_p' + P_{p+1} - P_{p+2}.$$

Como A es $\{K, -1\}$-potente, de $KAK = A^{-1}$ se obtiene que

$$\begin{aligned} KP_1K &= P_1' \\ &\vdots \\ KP_pK &= P_p' \\ KP_{p+1}K &= P_{p+1} \\ KP_{p+2}K &= P_{p+2}. \end{aligned}$$

Se debe tener en cuenta que para cada $i = 1, \ldots, p, p+1, p+2$ se tiene

$$(KP_iK)^2 = KP_iKKP_iK = KP_i^2K = KP_iK,$$

con lo que cada KP_iK es idempotente.

(b) $\Longrightarrow$ (a) Por ser A una matriz diagonalizable, la hipótesis de nuevo permite realizar la descomposición espectral

$$\begin{aligned} A &= P \operatorname{diag}\left(\lambda_1 I_{r_1}, \lambda_1^{-1} I_{r_1}, \ldots, \lambda_p I_{r_p}, \lambda_p^{-1} I_{r_p}, I_{r_{p+1}}, -I_{r_{p+2}}\right) P^{-1} \\ &= \lambda_1 P_1 + \lambda_1^{-1} P_1' + \cdots + \lambda_p P_p + \lambda_p^{-1} P_p' + P_{p+1} - P_{p+2}. \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned} A^{-1} &= \lambda_1^{-1}P_1 + \lambda_1 P_1' + \cdots + \lambda_p^{-1}P_p + \lambda_p P_p' + P_{p+1} - P_{p+2} \\ &= \lambda_1^{-1}KP_1'K + \lambda_1 KP_1K + \cdots + \lambda_p^{-1}KP_p'K + \lambda_p KP_pK + \\ &\quad +KP_{p+1}K - KP_{p+2}K \\ &= K(\lambda_1^{-1}P_1' + \lambda_1 P_1 + \cdots + \lambda_p^{-1}P_p' + \lambda_p P_p + P_{p+1} - P_{p+2})K \\ &= KAK, \end{aligned}$$

con lo que A es una matriz $\{K, -1\}$-potente. ■

Se debe entender que $P_{j_0} = O = P_{j_0}'$ si existe $j_0 \in \{1, \ldots, p\}$ de tal modo que $\lambda_{j_0} \notin \sigma(A)$. Además, $P_{p+1} = O \Leftrightarrow 1 \notin \sigma(A)$, y por último se tiene que $P_{p+2} = O \Leftrightarrow -1 \notin \sigma(A)$.

5.2.3. Problema inverso

En esta subsección se responde a la siguiente pregunta. Dada una matriz invertible $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, ¿existe siempre una matriz involutiva $K \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tal que A es $\{K, -1\}$-potente? El siguiente contraejemplo permite comprobar que esto, en general, no es así.

Sea

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Si existiese una matriz involutiva $K \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ tal que $KAK = A^{-1}$ entonces $KA = A^{-1}K$ o bien $I_nKA = A^{-1}KI_n$. Vectorizando esta ecuación matricial se llega a $\left(A^T \otimes I_n - I_n \otimes A^{-1}\right) v(K) = 0$, cuya única solución es $K = O$, que evidentemente no es involutiva.

En el siguiente resultado se encuentra la forma de la matriz involutiva K para que una matriz invertible dada A sea $\{K, -1\}$-potente, (de nuevo, en el caso en que A sea diagonalizable). Este resultado corresponde al problema inverso para el caso de las matrices $\{K,-1\}$-potentes.

Teorema 5.8 *Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ una matriz diagonalizable (i.e., $A = PDP^{-1}$, para alguna matriz invertible $P \in \mathbb{C}^{n\times n}$ y una matriz diagonal $D \in \mathbb{C}^{n\times n}$) con espectro como en el Teorema 5.6. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) Existe una matriz involutiva $K \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tal que A es $\{K,-1\}$-potente.

(b) La matriz K tiene la forma:

$$K = P\left(\begin{bmatrix} O & K_1 \\ K_1^{-1} & O \end{bmatrix} \oplus \cdots \oplus \begin{bmatrix} O & K_t \\ K_t^{-1} & O \end{bmatrix} \oplus K_{t+1} \oplus K_{t+2}\right) P^{-1},$$

donde $K_1,\dots,K_t$ son matrices invertibles arbitrarias cuyos tamaños son $r_1\times r_1,\dots,r_t\times r_t$ respectivamente, $K_{t+1}^2 = I_{r_{t+1}}$ y $K_{t+2}^2 = I_{r_{t+2}}$.

Demostración. (a) $\Longrightarrow$ (b) Se recuerda que cada valor propio de A tiene la misma multiplicidad que su inverso. La demostración se realizará considerando diferentes casos.

Caso 1: La matriz A tiene dos valores propios distintos junto con sus inversos y todos ellos distintos de ± 1.

$$A = P\begin{bmatrix} \lambda I_{r_1} & O & O & O \\ O & \lambda^{-1} I_{r_1} & O & O \\ O & O & \mu I_{r_2} & O \\ O & O & O & \mu^{-1} I_{r_2} \end{bmatrix} P^{-1},$$

La matriz A se puede escribir como

$$A \;=\; \lambda P\begin{bmatrix} I_{r_1} & O & O & O \\ O & O & O & O \\ O & O & O & O \\ O & O & O & O \end{bmatrix} P^{-1} \;+\; \lambda^{-1} P\begin{bmatrix} O & O & O & O \\ O & I_{r_1} & O & O \\ O & O & O & O \\ O & O & O & O \end{bmatrix} P^{-1} \;+$$

$$
\begin{aligned}
&+ \quad \mu P \begin{bmatrix} O & O & O & O \\ O & O & O & O \\ O & O & I_{r_2} & O \\ O & O & O & O \end{bmatrix} P^{-1} \; + \; \mu^{-1} P \begin{bmatrix} O & O & O & O \\ O & O & O & O \\ O & O & O & O \\ O & O & O & I_{r_2} \end{bmatrix} P^{-1} \\
&= \quad \lambda P_1 + \lambda^{-1} P_2 + \mu P_3 + \mu^{-1} P_4
\end{aligned}
$$

donde $P_i = P E_i P^{-1}$ siendo $E_1 = \mathrm{diag}(I_{r_1}, O, O, O)$, $E_2 = \mathrm{diag}(O, I_{r_1}, O, O)$, $E_3 = \mathrm{diag}(O, O, I_{r_2}, O)$ y $E_4 = \mathrm{diag}(O, O, O, I_{r_2})$.

La inversa de A viene dada por

$$A^{-1} = \lambda^{-1} P_1 + \lambda P_2 + \mu^{-1} P_3 + \mu P_4.$$

Por el Teorema 5.7 se tiene

$$K P_1 K = P_2 \qquad \text{y} \qquad K P_3 K = P_4.$$

Sea $M = P^{-1} K P$. Premultiplicando la ecuación $K P_1 K = P_2$ por P^{-1} y postmultiplicando por KP se obtiene

$$M \begin{bmatrix} I_{r_1} & O & O & O \\ O & O & O & O \\ O & O & O & O \\ O & O & O & O \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} O & O & O & O \\ O & I_{r_1} & O & O \\ O & O & O & O \\ O & O & O & O \end{bmatrix} M,$$

donde M se puede dividir en bloques de tamaños adecuados como sigue

$$M = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} & M_{14} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} & M_{24} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} & M_{34} \\ M_{41} & M_{42} & M_{43} & M_{44} \end{bmatrix}.$$

De la igualdad anterior se obtiene que

$$M_{11} = O, \; M_{31} = O, \; M_{41} = O, \; M_{22} = O, \; M_{23} = O \;\text{ y }\; M_{24} = O.$$

Sustituyendo en M y realizando operaciones similares con la ecuación $KP_3K = P_4$ se obtiene que

$$M_{13} = O, \; M_{33} = O, \; M_{42} = O \; \text{ y } \; M_{44} = O.$$

Como $K = PMP^{-1}$, al sustituir los bloques encontrados se consigue

$$K = P \begin{bmatrix} O & M_{12} & O & M_{14} \\ M_{21} & O & O & O \\ O & M_{32} & O & M_{34} \\ O & O & M_{43} & O \end{bmatrix} P^{-1}.$$

Como K es involutiva, a partir de $K^2 = I$ se obtiene que

$$K = P \begin{bmatrix} O & M_{12} & O & O \\ M_{12}^{-1} & O & O & O \\ O & O & O & M_{34} \\ O & O & M_{34}^{-1} & O \end{bmatrix} P^{-1}.$$

Caso 2: La matriz A tiene un valor propio y su inverso junto con los valores propios 1 y -1. Como en el caso anterior, λ y λ^{-1} tienen la misma multiplicidad. Por tanto,

$$A = P \begin{bmatrix} \lambda I_{r_1} & O & O & O \\ O & \lambda^{-1} I_{r_1} & O & O \\ O & O & I_{r_2} & O \\ O & O & O & -I_{r_3} \end{bmatrix} P^{-1}.$$

De nuevo, sea $M = P^{-1}KP$, con

$$M = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} & M_{14} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} & M_{24} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} & M_{34} \\ M_{41} & M_{42} & M_{43} & M_{44} \end{bmatrix}.$$

Realizando un desarrollo similar al Caso 1 se obtiene

$$K = P \begin{bmatrix} O & M_{12} & O & O \\ M_{12}^{-1} & O & O & O \\ O & O & M_{34} & O \\ O & O & O & M_{44} \end{bmatrix} P^{-1}.$$

Caso general: Es claro que la demostración del caso general se obtiene como combinación de casos semejantes a los analizados anteriormente.

(b) $\Longrightarrow$ (a) A partir de la expresión de K dada en (b) es fácil obtener que $K^2 = I_n$. Además, usando que A es diagonalizable, se puede expresar

$$A = P \operatorname{diag}\left(\lambda_1 I_{r_1}, \lambda_1^{-1} I_{r_1}, \ldots, \lambda_p I_{r_p}, \lambda_p^{-1} I_{r_p}, I_{r_{p+1}}, -I_{r_{p+2}}\right) P^{-1}.$$

Realizando algunos cálculos sencillos se obtiene que $KAK = A^{-1}$. ■

5.3. Algoritmos y ejemplos

A partir de los resultados presentados en este capítulo, es posible diseñar los algoritmos de esta sección.

ALGORITMO 7

Entradas: Una matriz involutiva $K \in \mathbb{C}^{n \times n}$.

Salida: Una matriz A que es $\{K, -1\}$-potente.

Paso 1 Generar una matriz $P \in \mathbb{C}^{n \times n}$ invertible arbitraria.

Paso 2 Seleccionar el parámetro $r > 0$.

Paso 3 Calcular $A = KP \begin{bmatrix} I_r & O \\ O & -I_{n-r} \end{bmatrix} P^{-1}$.

Fin

Una forma alternativa al algoritmo anterior se da a continuación.

Algoritmo 8

Entradas: Una matriz involutiva $K \in \mathbb{C}^{n\times n}$.

Salida: Una matriz A que es $\{K, -1\}$-potente.

Paso 1 Generar una matriz $P \in \mathbb{C}^{n\times n}$ invertible arbitraria.

Paso 2 Seleccionar el parámetro $r > 0$.

Paso 3 Calcular

$$B = P \begin{bmatrix} I_r & O \\ O & O \end{bmatrix} P^{-1}.$$

Paso 4 Calcular $A = K(I_n - 2B)$.

Fin

Es posible observar que al variar las elecciones en los Pasos 1 y 2 en los algoritmos anteriores se pueden obtener diferentes matrices A.

Un procedimiento semejante al utilizado para analizar el ejemplo de la página 119 permite establecer el siguiente algoritmo.

Algoritmo 9

Entradas: Una matriz $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ invertible.

Salida: Todas las matrices involutivas $K \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tales que A es $\{K, -1\}$-potente.

Paso 1 Resolver los sistemas lineales $Ax_i = e_i$ para $i = 1, \ldots, n$.

Paso 2 Asignar $B = \begin{bmatrix} x_1 & \ldots & x_n \end{bmatrix}$.

Paso 3 Calcular $M := A^T \otimes I_n - I_n \otimes B$.

Paso 4 Calcular el espacio nulo de la matriz M obteniendo la solución $v(K)$.

Paso 5 Si $v(K) = 0$ entonces ir al Paso 8.

Paso 6 Redistribuir los elementos de $v(K)$ para obtener la matriz cuadrada K de modo que

$$K = \left[[v(K)]_{\{1,\ldots,n\}} \; [v(K)]_{\{n+1,\ldots,2n\}} \ldots [v(K)]_{\{(n^2-n+1,\ldots,n^2\}} \right].$$

Paso 7 Comprobar si $K^2 = I_n$ para las matrices K obtenidas. Si no se cumple entonces ir al Paso 8; de lo contrario, las matrices K que lo cumplan dan todas las posibilidades para que A sea $\{K, -1\}$-potente. Ir al Fin.

Paso 8 "No existe una matriz involutiva $K \in \mathbb{C}^{n \times n}$ tal que A es $\{K, -1\}$-potente".

Fin

Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ una matriz $\{K, -1\}$-potente y diagonalizable. Por tanto, $A = PDP^{-1}$ para alguna matriz invertible $P \in \mathbb{C}^{n\times n}$ y alguna matriz diagonal $D \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Entonces $P^{-1}AP$ es $\{P^{-1}KP, -1\}$-potente. En efecto, sustituyendo $A = PDP^{-1}$ en $KAK = A^{-1}$ se tiene que $(P^{-1}KP)D(P^{-1}KP) = D^{-1}$. Como $P^{-1}KP$ es involutiva, entonces D es $\{P^{-1}KP, -1\}$-potente.

Algoritmo 10

Entradas: Una matriz $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ diagonalizable e invertible.

Salida: Todas las matrices involutivas $K \in \mathbb{C}^{n\times n}$ que hacen que A sea $\{K, -1\}$-potente.

Paso 1 Diagonalizar $A = PDP^{-1}$.

Paso 2 Calcular $M := I_n \otimes D^{-1} - D \otimes I$.

Paso 3 Calcular el espacio nulo de la matriz M obteniendo la solución $v(J)$.

Paso 4 Si $v(J) = 0$ entonces ir al Paso 8.

Paso 5 Redistribuir los elementos de $v(J)$ para obtener la matriz cuadrada J de modo que

$$J = \left[[v(J)]_{\{1,\ldots,n\}} \; [v(J)]_{\{n+1,\ldots,2n\}} \cdots [v(J)]_{\{(n^2-n+1,\ldots,n^2\}} \right].$$

Paso 6 Comprobar si $J^2 = I_n$ para las matrices J obtenidas. Si no se cumple entonces ir al Paso 8; de lo contrario, ir al Paso 7.

Paso 7 Para las matrices J obtenidas en el Paso 6, calcular $K = PJP^{-1}$, que son todas las posibilidades para que A sea $\{K, -1\}$-potente. Ir al Fin.

Paso 8 "No existe una matriz involutiva $K \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tal que A es $\{K, -1\}$-potente".

Fin

Ejemplo 5.1 *Dada la matriz involutiva*

$$K = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

el Algoritmo 7 genera una matriz invertible P de tamaño 3×3. Por ejemplo, al generar

$$P = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -4 & -1 & -4 \end{bmatrix},$$

y elegir $r = 2$ se obtiene la matriz $\{K, -1\}$-potente

$$A = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & -4 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ejemplo 5.2 *Dada la misma matriz involutiva K del ejemplo anterior, el Algoritmo 8 genera una matriz invertible P arbitraria de tamaño 3×3. Por ejemplo, si se genera*

$$P = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

y se elige $r = 2$, la matriz idempotente B obtenida es

$$B = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 5 & 2 & -4 \\ -1 & 8 & -2 \\ -3 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Finalmente, la matriz $\{K, -1\}$-potente obtenida es

$$A = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} -3 & -4 & 8 \\ 6 & -6 & 5 \\ 2 & -9 & 4 \end{bmatrix}.$$

Ejemplo 5.3 *Se considera la matriz invertible*

$$A = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Del Algoritmo 9 se obtienen las matrices involutivas K con la forma

$$K = \begin{bmatrix} -k_{22} & -k_{22} - 1 \\ k_{22} - 1 & k_{22} \end{bmatrix},$$

o bien

$$K = \begin{bmatrix} -k_{22} & -k_{22} + 1 \\ k_{22} - 1 & k_{22} \end{bmatrix},$$

con $k_{22} \in \mathbb{C}$ arbitrario, de modo que la matriz A es $\{K, -1\}$-potente. Se observa que a pesar de que A no es diagonalizable, el Algoritmo es aplicable.

5.4. Matrices $\{K, -(s+1)\}$-potentes

Hasta ahora se ha analizado la ecuación matricial $KAK = A^{s+1}$ para los siguientes casos:

$\{K, s+1\}$ − potente	$s \geq 1$	$s = 0$
Capítulos	$2, 3, 4$	$3, 4$

y la ecuación matricial $KAK = A^{-(s+1)}$ para el caso:

$\{K, -(s+1)\}$ − potente	$s = -1$	$s = 0$
Capítulo	–	5 (Secciones 5.1,5.2 y 5.3)

El caso correspondiente a $s = -1$ carece de interés ya que la única matriz A que lo verifica es la identidad. Los casos restantes serán estudiados en esta sección.

Definición 5.2 *Sea $K \in \mathbb{C}^{n \times n}$ una matriz involutiva y $s \in \{1, 2, 3, \dots\}$. Una matriz $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ se denomina $\{K, -(s+1)\}$-potente si cumple*

$$KAK = A^{-(s+1)}.$$

Es decir, en esta definición se analiza el caso $KAK = A^r$ para $r \leq -2$ con lo que queda completo el estudio de la ecuación matricial para todas las potencias enteras r.

Es claro que esta última clase de matrices es una subclase de las matrices invertibles con determinante en Ω_{s+2}. En efecto,

$$\det(KAK) = \det(A^{-(s+1)}) \iff \det(K)\det(A)\det(K) = \frac{1}{\det(A^{s+1})} \iff$$

$$\iff \det(A) = \frac{1}{(\det(A))^{s+1}} \iff (\det(A))^{s+2} = 1.$$

Como en el Capítulo 2, el próximo objetivo es obtener una caracterización de las matrices $\{K, -(s+1)\}$-potentes. Para ello, de nuevo será necesario construir una biyección adecuada.

Lema 5.1 *Sea $s \in \{1, 2, 3, \dots\}$ y*

$$\psi : \{1, 2, \dots, (s+1)^2 - 2\} \to \{1, 2, \dots, (s+1)^2 - 2\}$$

la función definida por $\psi(j) = b_j$ donde b_j el menor entero no negativo de modo tal que $b_j \equiv -j(s+1)$ $[\mathrm{mod}\ ((s+1)^2 - 1)]$. Entonces ψ es una función biyectiva.

Demostración. Si bien esta demostración se podría realizar de manera constructiva como en el Lema 2.5 de la página 25, una demostración alternativa puede realizarse de la siguiente forma. Es suficiente mostrar que si q es un entero arbitrario positivo y $\mathrm{mcd}(r, q) = 1$, entonces se tiene que la función $\phi(l) = -rl[\mathrm{mod}\ (q)]$ para $1 \leq l \leq q-1$, es una permutation de $\{1, 2, \dots, q-1\}$. Para ver esto, se supone que $-rl \equiv -rm[\mathrm{mod}\ (q)]$ con $r, l \in \{1, 2, \dots, q-1\}$. Entonces $r(l-m)$ es un múltiplo de q. Como $\mathrm{mcd}(r, q) = 1$, esto significa que $l - m = tq$ para algún entero t. Puesto que $|l - m| < q$, $t = 0$; luego $l = m$. En particular, la observación para la función ψ se puede obtener directamente poniendo $r = s + 1$ y $q = (s+1)^2 - 1$. ■

A partir de la Definición 5.2 se tiene que

$$KAK = A^{-(s+1)} \qquad \Longleftrightarrow \qquad KA^{-1}K = A^{s+1}.$$

Es posible obtener una relación que involucre A, semejante a la encontrada en el Teorema 2.2 de la página 27, independientemente de K:

$$KAK = A^{-(s+1)} \quad \Longrightarrow \quad (KAK)^{s+1} = (A^{-(s+1)})^{s+1} \quad \Longrightarrow$$

$$KA^{s+1}K = A^{-(s+1)^2} \quad \Longrightarrow \quad A^{-1} = A^{-(s+1)^2} \quad \Longrightarrow \quad A = A^{(s+1)^2}. \tag{5.4}$$

De este modo, se puede establecer un resultado semejante al Teorema 2.2. No se incluye la demostración puesto que es completamente análoga.

Teorema 5.9 *Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) A es una matriz $\{K,-(s+1)\}$-potente.

(b) A es diagonalizable, $\sigma(A) \subseteq \Omega_{(s+1)^2-1}$ y además

(I) $KP_jK = P_{\psi(j)}$ donde $j \in \{1,2,\dots,(s+1)^2-2\}$,

(II) $KP_{(s+1)^2-1}K = P_{(s+1)^2-1}$,

siendo ψ la biyección definida en el Lema 5.1 y $P_1, P_2, \dots, P_{(s+1)^2-1}$ los proyectores que aparecen en la descomposición espectral dada en el Teorema 1.1 asociados a los valores propios

$$\omega_{(s+1)^2-1}, \omega^2_{(s+1)^2-1}, \dots, \omega^{(s+1)^2-2}_{(s+1)^2-1}, 1,$$

respectivamente.

(c) $A^{(s+1)^2} = A$, y además

(I) $KP_jK = P_{\psi(j)}$ donde $j \in \{1,2,\dots,(s+1)^2-2\}$,

(II) $KP_{(s+1)^2-1}K = P_{(s+1)^2-1}$,

siendo ψ la biyección definida en el Lema 5.1 y $P_1, P_2, \dots, P_{(s+1)^2-1}$ los proyectores que aparecen en la descomposición espectral dada en el Teorema 1.1 asociados a los valores propios

$$\omega_{(s+1)^2-1}, \omega^2_{(s+1)^2-1}, \dots, \omega^{(s+1)^2-2}_{(s+1)^2-1}, 1,$$

respectivamente.

Por ser A una matriz invertible, de la última igualdad de (5.4) se obtiene $A^{(s+1)^2-1} = I$, de donde resulta que

$$A^{-1} = A^{(s+1)^2-2}.$$

De esta manera, el resultado equivalente al obtenido en el Corolario 2.3 es irrelevante en este caso.

También es posible obtener para las clases de matrices analizadas en este capítulo, resultados similares a los obtenidos en los capítulos anteriores.

Por ejemplo, se consideran las tres condiciones siguientes para una matriz $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ y una matriz involutiva $K \in \mathbb{C}^{n\times n}$:

(a) A es $\{K, -1\}$-potente.

(b) A es centrosimétrica K-generalizada.

(c) A es involutiva.

Se puede demostrar que dos de ellas implican la tercera.

Una gran colección de resultados semejantes al indicado se pueden obtener para este tipo de matrices.

Conclusiones y líneas futuras

Debido a la importancia del Análisis Matricial tanto en el desarrollo de las ciencias básicas como de la ingeniería, el estudio de diferentes clases de matrices ha sido abordado por un considerable número de investigadores a lo largo de los últimos años. Por su parte, el auge de la informática ha permitido un gran desarrollo en el campo de las implementaciones de algoritmos dando lugar a la realización de cálculos complicados de manera sencilla. En esta memoria, se han utilizado herramientas de ambas áreas para abordar el estudio de una nueva clase de matrices y se han implementado algoritmos para el cálculo de las mismas.

Con la intención de agrupar y generalizar algunas clases de matrices conocidas, en este trabajo se ha estudiado el nuevo tipo de matrices denominadas matrices $\{K, s+1\}$-potentes. Se han desarrollado propiedades de las mismas y se han construido matrices de este tipo (problema directo) mediante algoritmos tratando tanto este caso como el problema inverso originado a partir de ellas.

En el Capítulo 2, en primer lugar se han introducido las matrices $\{K, s+1\}$-

potentes. La importancia de este tipo de matrices radica en que cuando se particularizan sus parámetros K y s se obtienen las matrices $\{s+1\}$-potentes, periódicas, centrosimétricas, mirrorsimétricas, circulantes, etc. Estos últimos tipos de matrices son de gran utilidad en diferentes áreas como: transmisión de líneas multiconductor, antenas, ondas, sistemas eléctricos y mecánicos, teoría de la comunicación.

Posteriormente, en la Sección 2.2 se analiza la existencia de este tipo de matrices y se presenta un considerable número de propiedades de las mismas. Concretamente, se analiza cuándo esta clase de matrices es cerrada para las operaciones de sumas, productos, inversas, adjuntas, semejanzas, sumas directas, etc.

El principal resultado de este capítulo se encuentra en el Teorema 2.2 de la Sección 2.3 en el cual se caracterizan las matrices de esta nueva clase. Se obtienen caracterizaciones desde distintos puntos de vista: usando teoría espectral, potencias de matrices, inversas generalizadas y también mediante una representación por bloques de una matriz de índice 1. Estas equivalencias serán de gran importancia en el desarrollo de este estudio. Finalmente, en la Sección 2.4, como aplicación se proporcionan condiciones bajo las cuales una combinación lineal de dos matrices $\{K, s+1\}$-potentes que conmutan es $\{K, s+1\}$-potente.

En el Capítulo 3 se analizan las matrices $\{K, s+1\}$-potentes considerando sus relaciones con diferentes clases de matrices complejas. En la Sección 3.2, se obtienen relaciones entre matrices $\{K, s+1\}$-potentes y matrices $\{K\}$-hermíticas (Teoremas 3.2 y 3.3), proyectores $\{s+1\}$-generalizados (Teoremas 3.2 y 3.4), matrices unitarias (Teorema 3.5, Proposición 3.1) y matrices $B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tal que KB sea involutiva (Teorema 3.5).

En la Sección 3.3, se analizan relaciones con matrices normales (Teoremas 3.9 y 3.10) y matrices $B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tal que KB sea hermítica (Teorema 3.7) o normal (Teoremas 3.9 y 3.11). En la Sección 3.4, las matrices hermíticas y antihermíticas, y matrices $B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ anticonmutativas con K se relacionan con matrices $\{K, s+1\}$-potentes (Teorema 3.12). Por otra parte, se ha obtenido un conjunto de nuevas propiedades de las matrices centrosimétricas K-generalizadas en la Sección 3.4 (Teoremas 3.14 y 3.15). En las diferentes secciones de este capítulo, con una serie de contraejemplos, se muestra que algunas relaciones de inclusión entre los conjuntos considerados, en general, no se cumplen.

Con la intención de construir matrices $\{K, s+1\}$-potentes, uno de los principales objetivos del Capítulo 4 es desarrollar métodos para poder realizarlo de manera efectiva. En la Sección 4.2 se obtienen matrices de este tipo para los casos $s = 0$ y $s \geq 1$, que constituye el llamado problema directo. En este último caso, se desarrolla el Algoritmo 2 a partir de información espectral obtenida a partir de la matriz K. En los Algoritmos 3 y 4 se dan dos métodos alternativos.

Otro de los objetivos del Capítulo 4 es resolver el problema de encontrar las matrices involutivas K que hacen que una matriz A dada sea $\{K, s+1\}$-potente para un valor de s prefijado. Este último objetivo constituye el llamado problema inverso. Los Algoritmos 5 y 6 dan solución a este problema. Al final del capítulo se muestran una serie ejemplos numéricos, tanto para el problema directo como para el problema inverso.

Hasta este punto, se han estudiado las matrices $\{K, s+1\}$-potentes para $s \geq 0$. El caso $s = -1$ carece de importancia. En el Capítulo 5 se extiende el estudio de este tipo de matrices para potencias negativas, es decir, matrices $\{K, -(s+1)\}$-potentes con $s \geq 0$. En la Sección 5.2 se estudia el caso particular de matrices $\{K, -1\}$-potentes, donde se presentan condiciones necesarias y suficientes para este tipo de matrices (Teoremas 5.2, 5.3, 5.4 y 5.5). También, un punto de vista espectral se ha dado en los Teoremas 5.6 y 5.7.

La caracterización de las matrices K que dan solución al problema inverso se han encontrado en el Teorema 5.8. En la Sección 5.3 se muestran varios algoritmos y ejemplos para el problema directo y para el problema inverso. Finalmente, en la Sección 5.4 se lleva a cabo el estudio de las matrices $\{K, -(s+1)\}$-potentes para $s \geq 1$ mostrando una caracterización en el Teorema 5.9. Es interesante resaltar que las matrices $\{K, -1\}$-potentes se comportan de una manera diferente a las $\{K, s+1\}$-potentes desde un punto de vista espectral. Sin embargo, las matrices $\{K, -(s+1)\}$-potentes vuelven a tener propiedades similares a las consideradas para potencias positivas.

Algunos problemas concretos a estudiar en líneas futuras se citan a continuación:

- Relacionar las clases de matrices estudiadas con las matrices normales conjugadas (es decir, aquellas matrices $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ que cumplen la condición $AA^* = \overline{A^*A}$).

- Generalizar la propiedad de la matriz K de ser involutiva, pasando a ser periódica y analizando la nueva clase que éstas determinan.

- Un problema más general en el que la matriz involutiva K pase a ser una matriz invertible en general.

- Un problema más general en el que las matrices A de la definición tengan potencias diferentes.

Tabla de símbolos

$\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$	conjunto de los números naturales y enteros.
$\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$	espacio euclideo real y complejo de dimensión n.
$\mathbb{R}^{m\times n}$, $\mathbb{C}^{m\times n}$	espacio de matrices reales/complejas de tamaño $m \times n$.
$\mathbf{N}$	conjunto de las matrices normales.
I_n	matriz identidad de tamaño n.
A^T	traspuesta de la matriz A.
A^*	traspuesta conjugada de la matriz A.
J	matriz de intercambio.
$A^\#$	matriz inversa de grupo de A.
$\mathbf{P}^{(K,s)}$	matriz $\{K, s+1\}$-potente.
$\det(A)$	determinante de la matriz A.

Núc(A)	$x \in \mathbb{C}^n$ tales que $Ax = 0$.
$\sigma(A)$	espectro (conjunto de valores propios) de la matriz A.
$M \otimes N$	producto de Kronecker de M y N.
A^{-1}	inversa ordinaria de la matriz cuadrada A.
$v(A)$	operador vec (transforma la matriz A en un vector columna).

Bibliografía

[1] A. Andrew, Eigenvector of certain matrices, *Linear Algebra and its Applications*, 157–162, 1973.

[2] A. Andrew, Centrosymmetric matrices, *SIAM Review*, 40, 697–698, 1998.

[3] A. Ben-Israel, T. Greville, Generalized Inverses: Theory and Applications, John Wiley & Sons, Segunda Edición, 2003.

[4] J. Benítez, N. Thome, $\{k\}$-group periodic matrices, *SIAM J. Matrix Anal. Appl.* 28, 1, 9–25, 2006.

[5] J. Benítez, N. Thome, Characterizations and linear combinations of k-generalized projectors, *Linear Algebra and its Applications*, 410, 150–159, 2005.

[6] R. Bru, N. Thome, Group inverse and group involutory matrices, *Linear and Multilinear Algebra*, 45, 2–3, 207–218, 1998.

[7] S.L. Campbell, C.D. Meyer, Jr., Generalized Inverses of Linear Transformations, Dover, Nueva York, 1979.

[8] J.J. Climent, N. Thome, Y. Wei, A geometrical approach on generalized inverses by Neumann-type series, *Linear Algebra and its Applications*, 332–334, 533–540, 2001.

[9] C. Coll, L. Lebtahi, N. Thome, $\{P, s+1\}$-Potent Matrices, *XXI Congreso de Ecuaciones Diferenciales y Aplicaciones (CEDYA09)*, Ciudad Real, 2009.

[10] L. Datta, S. Morgera, On the reducibility of centrosymmetric matrices-applications in engineering problems, *Circuits Systems Signal Process*, 8, 71–96, 1989.

[11] P.J. Davis, Circulant Matrices, Segunda Edición, Editorial Chelsea, 1994.

[12] H.K. Du, Y. Li, The spectral characterization of generalized projections, *Linear Algebra and its Applications*, 400, 313–318, 2005.

[13] A. Gersho, Adaptive equalization of highly dispersive channels for data transmission, *BSTJ*, 48, 55–70, 1969.

[14] B. Gellai, Determination of molecular symmetry coordinates using circulant matrices, *Journal of Molecular Structure*, 114, 21–26, 1984.

[15] C.R.H. Hanusa, Pseudo-centrosymmetric matrices, with applications to counting perfect matchings, *Linear Algebra and its Applications*, 427, 2–3, 206–217, 2007.

[16] N.J. Higham, Functions of Matrices, *SIAM*, Filadelfia, 2008.

[17] R.D. Hill, S.R. Waters, On κ-Real and κ-Hermitian Matrices, *Linear Algebra and its Applications*, 169, 17–29, 1992.

[18] R.A. Horn, C.R. Johnson, Matrix Analysis, Cambridge University Press, Nueva York, 1987.

[19] L. Lebtahi, O. Romero, N. Thome, Spectral study of generalizad potent matrices, Proceedings en *Conference on Applied Linear Algebra*, Novi Sad, Serbia, 2010.

[20] L. Lebtahi, O. Romero, N. Thome, Algorithm for computing matrices that involve some of their powers and an involutory matrix, Proceedings en *11th International Conference on Computational and Mathematical Methods in Science and Engineering*, (CMMSE 2011), Benidorm, 2011.

[21] L. Lebtahi, O. Romero, N. Thome, Characterizations of $\{K, s+1\}$-potent matrices and applications, *Linear Algebra and its Applications*, 436, 293–306, 2012.

[22] L. Lebtahi, O. Romero, N. Thome, Relations between $\{K, s+1\}$-potent matrices and different classes of complex matrices. Por aparecer en *Linear Algebra and its Applications*, DOI:10.1016/j.laa.2011.10.042.

[23] L. Lebtahi, O. Romero, N. Thome, Algorithms for $\{K, s+1\}$-potent matrix constructions. Por aparecer en *Journal of Computational and Applied Mathematics*, DOI: 10.1016/j.cam.2012.01.019.

[24] Z. Liu, Some properties of centrosymmetric matrices, *Applied Mathematics & Computation*, 141, 2–3, 17–26, 2002.

[25] Z. Liu, H. Faßbender, Some properties of generalized K-centrosymmetric H-matrices, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 215, 38–48, 2008.

[26] G.L. Li, Z.H. Feng, Mirrorsymmetric matrices, their basic properties, and an application on odd/even-mode decomposition of symmetric multiconductor transmission lines, *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, 24, 1, 78–90, 2002.

[27] G.L. Li, Z.H. Feng, Mirror-transformations of matrices and their application on odd/even modal decomposition of mirror-symmetric multiconductor transmission line equations, *IEEE Transactions on Advanced Packaging*, 26, 2, 172–181, 2003.

[28] F.R. Magee Jr., J.G. Prokis, An estimate of an upper bound on error probability for maximum likelihood sequence estimation on channels having finite-duration pulse response, *IEEE Trans. Inf. Theory*, 699–702, 1973.

[29] C.R. Rao y S.K. Mitra, Generalized inverse of matrices and its applications, John Wiley & Sons, Nueva York, 1971.

[30] J.L. Stuart, Inflation matrices and ZME-Matrices that commute with a permutation matrix, *SIAM J. Matrix Analysis Applications*, 9, 3, 408–418, 1988.

[31] J.L. Stuart, J.R. Weaver, Matrices that commute with a permutation matrix, *Linear Algebra and its Applications*, 150, 255–265, 1991.

[32] D. Tao, M. Yasuda, A spectral characterization of generalized real symmetric centrosymmetric and generalized real symmetric skew-centrosymmetric matrices, *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, 23, 3, 885–895, 2002.

[33] W.F. Trench, Characterization and properties of matrices with generalized symmetry or skew symmetry, *Linear Algebra and its Applications*, 377, 207–218, 2004.

[34] J. Weaver, Centrosymmetric (cross-symmetric) matrices, their basic properties, eigenvalues, and eigenvectors, *American Mathematical Monthly*, 92, 711–717, 1985.

[35] R.S. Wikramaratna, The centro-invertible matrix: A new type of matrix arising in pseudo-randon number generation, *Linear Algebra and its Applicatios*, 434, 1, 144–151, 2011.

[36] M. Yasuda, A spectral characterization for Hermitian centrosymmetric K matrices and Hermitian skew-centrosymmetric K matrices, *SIAM J. Matrix Analysis Applications*, 25, 3, 601–605, 2003.

[37] F. Zhang, Matrix Theory - Basic results and techniques, Springer, 1999.