

## Modelado y control con compensación de fricción de un sistema pendubot

Soto, I.<sup>a,\*</sup>, Campa, R.<sup>b</sup>, Sánchez-Mazuca, S.<sup>c</sup>

<sup>a</sup>Universidad Autónoma de Ciudad Juárez, Instituto de Ingeniería y Tecnología, Ciudad Juárez, Chihuahua, México.

<sup>b</sup>Tecnológico Nacional de México, Instituto Tecnológico de la Laguna, Torreón, Coahuila, México

<sup>c</sup>Universidad Autónoma del Noreste, Campus Piedras Negras, Piedras Negras, Coahuila, México

**To cite this article:** Soto, I., Campa, R., Sánchez-Mazuca, S. 2021. Modeling and control with friction compensation of a pendubot system. Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial 18, 39-47. <https://doi.org/10.4995/riai.2020.13083>

### Resumen

El pendubot es un sistema mecánico subactuado de dos grados de libertad que comúnmente se utiliza como plataforma educativa y de investigación en las áreas de robótica y control. Se le considera como un sistema subactuado debido a que sólo cuenta con una entrada de control. Aunque se han aplicado distintas leyes de control para estabilizar el pendubot, la mayoría de ellas desprecian los efectos de fricción. En este artículo el análisis es diferente, ya que se considera un sistema pendubot en el que la articulación actuada tiene una cantidad de fricción significativa, que no se puede despreciar. En primer lugar, se revisan algunos modelos de fricción existentes en la literatura, incluyendo uno que fue propuesto por los autores recientemente. Después, se describe la implementación de algunos controladores de estabilización que compensan los efectos de la fricción. Por último, se hace una comparación exhaustiva de los compensadores de fricción presentados para mejorar el desempeño de un sistema pendubot real.

*Palabras clave:* Modelado, control, fricción, compensación, sistemas mecánicos

### Modeling and control with friction compensation of a pendubot system

#### Abstract

The pendubot is a two degree of freedom mechanical underactuated system that is used as an educational and research platform in the areas of robotics and control. It is considered as an underactuated system because it has only one control input. Although several control laws have been applied to stabilize the pendubot, most of them neglect the effects of friction. In this article, the analysis is different, since it is considered a pendubot system in which the actuated joint has a significant amount of friction that cannot be neglected. First, we review some of the existing friction models in the literature, including one that was recently proposed by the authors. Then we describe the implementation of some stabilization controllers that compensate for the effects of friction. Finally, an exhaustive comparison of the presented friction compensators is made to improve the performance of a real pendubot system.

*Keywords:* Modelling, control, friction, compensation, mechanical systems

### 1. Introducción

El pendubot es un sistema del tipo conocido como péndulo invertido, que consiste en un robot que se mueve en un plano vertical, con la primera articulación (hombro) actuada y la segunda articulación (codo) sin actuar (Spong and Block, 1995); es decir, es un sistema con dos grados de libertad pero con una

sola entrada de control, por esta razón, el pendubot, se considera como un sistema subactuado.

El pendubot tiene cuatro puntos de equilibrio, denominados aquí como abajo-abajo, abajo-arriba, arriba-abajo y arriba-arriba, dependiendo de la posición vertical tomada por cada uno de los dos eslabones. Sólo el equilibrio de abajo-abajo es esta-

\*Autor para correspondencia: [angel.soto@uacj.mx](mailto:angel.soto@uacj.mx)

ble, y alcanzar el de arriba-arriba suele ser el objetivo de control para este sistema.

El pendubot es también un sistema no holonómico de segundo orden (Zhang and Tarn, 2002) y se considera un sistema de fase no-mínima (Guemghar, 2005). Debido a estas características, el pendubot es considerado un sistema de referencia entre los sistemas subactuados, utilizado para la educación y la investigación en la teoría de control no lineal.

El problema de control del pendubot se puede dividir en dos objetivos de control: *el control de balanceo* y *el control de estabilización*. El control de balanceo consiste en aplicar a la articulación actuada la energía requerida para hacer que el segundo eslabón (el péndulo) se balancee hasta alcanzar la posición vertical hacia arriba (equilibrio arriba-arriba); y se requiere el control de estabilización para mantener el péndulo en tal punto de equilibrio inestable.

Se han propuesto una gran variedad de algoritmos de control para hacer que el pendubot se balancee, y los mismos se basan en diferentes técnicas de control, tales como el control por linealización parcial (Spong and Block, 1995), el control inteligente (Ma and Su, 2002), control híbrido (O’Flaherty et al., 2008), (Zhang and Tarn, 2002), control basado en energía (Fantoni et al., 2000), (Xin et al., 2002) y control no lineal (Wang et al., 2004). Para el control de estabilización, en este artículo se linealiza el sistema y se utiliza el método basado en un regulador cuadrático lineal (LQR) al igual que en (Spong and Block, 1995).

Sin embargo, hay muchos factores que afectan el comportamiento de estos controladores, siendo de los más importantes los efectos dinámicos no modelados del sistema, tales como los efectos de la fricción. Por lo tanto, para que el pendubot tenga un mejor desempeño bajo control, es deseable tener un modelo de fricción que describa mejor el comportamiento real de este fenómeno.

El objetivo de este artículo es doble. Primero recordar algunos de los modelos de fricción encontrados en la literatura, incluyendo una modificación a algunos de ellos que los autores han propuesto recientemente en (Sánchez-Mazuca and Campa, 2013). En segundo lugar, hacer una comparación exhaustiva de los compensadores de fricción presentados para mejorar el desempeño de un pendubot de transmisión directa con efectos de fricción significativos (ver Figura 1).

Cabe mencionar aquí que este trabajo está basado en (Sánchez-Mazuca et al., 2015) pero se ha complementado haciendo la comparación ahora entre todos los modelos de fricción presentados; como se explica en esa misma referencia la compensación de fricción en un sistema subactuado como el pendubot es de gran relevancia. Prácticamente todos los documentos que se ocupan del control de sistemas subactuados suponen que la fricción articular es insignificante, y por lo tanto se puede despreciar.

El resto de este documento está organizado de la siguiente manera. La revisión de los modelos de fricción se da en la sección 2. Tanto el modelo dinámico lineal como el no lineal del pendubot se dan en la sección 3. Las técnicas de control utilizadas para balancear y estabilizar el pendubot se mencionan en la sección 4. Los resultados experimentales se presentan en la sección 5, mientras que algunas conclusiones finales se dan en la sección 6.



Figura 1: Prototipo de sistema pendubot

## 2. Modelos de Fricción

La fricción es una fuerza que actúa contra el movimiento relativo entre dos superficies en contacto. El fenómeno está presente en todos los sistemas mecánicos, incluyendo los actuadores rotacionales. A lo largo del tiempo se han propuesto varios modelos, cada uno tratando de capturar la esencia del complejo fenómeno de la fricción; sin embargo, encontrar un modelo para describir todos sus efectos es difícil.

En términos generales, la fricción estática es la fuerza que se opone al que inicie un movimiento visible entre dos superficies en contacto; pero si la fuerza tangencial aplicada es mayor a la fricción estática máxima, entonces se produce un movimiento relativo visible entre las superficies y se habla ahora de fricción cinética. La transición entre estas dos fases de la fricción (estática y cinética) se conoce como punto de ruptura (en inglés "breakaway point") y a la fuerza tangencial aplicada para producir esa transición se le llama fuerza de ruptura. Cabe mencionar también que en el pasado se pensaba que durante la fase de fricción estática no había ningún tipo de movimiento entre las superficies en contacto; pero ahora después de los trabajos de (Rabinowics, 1956) y (Courtney-Pratt and Eisner, 1957) se sabe que antes del punto de ruptura se presentan desplazamientos muy pequeños (o microdesplazamientos) y otros efectos de la fricción tal como el llamado "stick-slip", que hacen que la fase de fricción estática sea difícil de modelar.

Considérese un motor con un par de fricción  $f$ ; sean  $q$ ,  $\dot{q}$  y  $\ddot{q}$ , respectivamente, el desplazamiento, la velocidad y la aceleración angular del eje del motor; además, sea  $\tau$  el par externo aplicado al motor para producir el movimiento. La relación entre estas cantidades está dada por la dinámica del motor

$$J\ddot{q} + f = \tau \quad (1)$$

donde  $J$  representa el momento de inercia del rotor del motor.

Es común suponer que el par de fricción de un motor depende sólo de la velocidad, es decir,  $f(\dot{q})$ . Sin embargo, en 1833, A. Morin (Morin, 1833) estableció el primer modelo para la

fricción estática, afirmando que dicha fricción no puede describirse satisfactoriamente sólo como función de la velocidad sino también del par aplicado, es decir,  $f(\dot{q}, \tau)$ .

### 2.1. Modelos Estáticos (Sin Memoria)

El modelo de fricción estática de Morin (Morin, 1833) se define para  $\dot{q} = 0$ , y viene dado por

$$f(0, \tau) = \begin{cases} \tau, & \text{si } |\tau| < f_s \\ f_s \text{sgn}(\tau), & \text{si } |\tau| \geq f_s \end{cases} \quad (2)$$

donde la función signo se define como

$$\text{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x > 0 \\ 0, & \text{si } x = 0 \\ -1, & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

y  $f_s$  es el coeficiente de fricción estática máxima, que se supone es constante. Básicamente, el modelo de Morin establece que el punto de ruptura se alcanza cuando  $|\tau| = f_s$ .

Con respecto a la fricción cinética, está presente cuando  $\dot{q} \neq 0$  y no depende de  $\tau$ , por lo que se denota como  $f_k(\dot{q})$ . Uno de los modelos más comunes para describir la fricción cinética es el que combina la fricción de Coulomb y los efectos de fricción viscosa; este modelo se puede escribir como:

$$f_k(\dot{q}) = f_c \text{sgn}(\dot{q}) + f_v \dot{q} \quad (3)$$

donde  $f_c$  y  $f_v$  son los coeficientes de fricción de Coulomb y viscosa, respectivamente.

En 1902, R. Stribeck realizó algunos experimentos a una velocidad constante de baja amplitud (Stribeck, 1902), mostrando la existencia del fenómeno ahora conocido como efecto Stribeck, que describe la transición entre la fricción estática máxima y la fricción de Coulomb. Una de las expresiones más utilizadas para modelar este fenómeno es la siguiente función exponencial conocida como modelo de Armstrong (Armstrong-Helouvy, 1991):

$$f_k(\dot{q}) = \text{sgn}(\dot{q}) \left[ f_c + (f_s - f_c) e^{-\frac{|\dot{q}|}{v_s} |\delta_v|} \right] + f_v \dot{q} \quad (4)$$

que no sólo incorpora los coeficientes de fricción estática, de fricción de Coulomb y los coeficientes de fricción viscosa, sino que también incluye dos parámetros más: el coeficiente de velocidad de Stribeck  $v_s$  y un parámetro de ajuste  $\delta_v$ .

El modelo de fricción estática (2) se puede combinar con la fricción cinética de la siguiente manera,

$$f(\dot{q}, \tau) = \begin{cases} \tau, & \text{si } \dot{q} = 0, |\tau| < f_s \\ f_s \text{sgn}(\tau), & \text{si } \dot{q} = 0, |\tau| \geq f_s \\ f_k(\dot{q}), & \text{si } \dot{q} \neq 0 \end{cases} \quad (5)$$

donde  $f_k(\dot{q})$  puede ser (3), (4), o cualquier otro modelo de fricción cinética (con  $\dot{q} \neq 0$ ). Nótese además que (5) se puede reescribir como

$$f(\dot{q}, \tau) = \begin{cases} \text{sat}(\tau; f_s), & \text{si } \dot{q} = 0 \\ f_k(\dot{q}), & \text{si } \dot{q} \neq 0 \end{cases} \quad (6)$$

donde la función saturación  $\text{sat}(x; a)$  se define como

$$\text{sat}(x; a) = \begin{cases} x, & \text{si } |x| < a \\ a \text{sgn}(x), & \text{si } |x| \geq a \end{cases}$$

### 2.2. Modelos Dinámicos (Con Memoria)

La fricción es un fenómeno tan complejo que no puede ser descrito completamente con los modelo de la sección anterior. La evidencia experimental muestra que la fricción tiene su propia dinámica, principalmente en la región de bajas velocidades; por esta razón se vuelve necesario emplear ecuaciones diferenciales para modelar su comportamiento. Los modelos dinámicos de fricción más importantes se revisan a continuación.

En 1968, P. Dahl propuso un modelo dinámico de fricción basado en el comportamiento de la aspereza entre dos superficies en contacto (Dahl, 1968). Dahl considera que esta aspereza se puede modelar como las cerdas de dos cepillos colocados uno frente al otro; así, si  $z$  representa la deflexión promedio de las cerdas, entonces  $z$  multiplicado por un coeficiente de rigidez  $\sigma_0$  produce el par de fricción estática. Las dos características clave del modelo de Dahl son:

- La variable  $z$  tiene su propia dinámica, la cual depende de la velocidad  $\dot{q}$ .
- La fricción estática (con  $\dot{q} = 0$ ) está acotada por la fricción de Coulomb, en otras palabras,  $|\sigma_0 z| \leq f_c$  ó, equivalentemente,  $|z| \leq f_c / \sigma_0$ .

Si se incluye el efecto de fricción viscosa, el modelo de Dahl viene dado por,

$$f(\dot{q}, z) = \sigma_0 z + f_v \dot{q} \quad (7)$$

$$\dot{z} = -\frac{\sigma_0 |\dot{q}|}{f_c} z + \dot{q} \quad (8)$$

Ahora considérese el caso en el que se aplica un par constante  $\tau = \tau_0$  y se supone una velocidad  $\dot{q}$  inicial pequeña. Se presentan tres casos:

- Si  $\dot{q} = 0$  (y  $q = q_0$  constante) entonces, de (8)  $\dot{z} = 0$  y  $z$  permanece en un valor constante, no necesariamente cero; de (1) y (7), como  $\ddot{q} = 0$  ese valor constante debe de ser  $z = \frac{f}{\sigma_0} = \frac{\tau_0}{\sigma_0}$  y tal condición corresponde a un estado de equilibrio del sistema definido por (1), (7) y (8).
- Si  $\dot{q} \neq 0$  y  $|\tau_0| \leq f_c$  entonces, de (7) y (8), se tiene que  $z$  y  $f$  cambian su valor oponiéndose al movimiento y reduciendo  $|\dot{q}|$  a cero, i.e., alcanzando un estado de equilibrio.
- Si  $|\tau_0| > f_c$  entonces no es posible alcanzar un estado de equilibrio; tanto  $|\dot{q}|$  como  $|z|$  aumentan hasta sus correspondientes valores en estado estacionario,  $|\dot{q}_{ss}|$  y  $|z_{ss}|$ , respectivamente, donde  $\ddot{q} = 0$  y  $\dot{z} = 0$ ; además, usando (1), (7) y (8). se puede demostrar que  $|z_{ss}| = f_c / \sigma_0$  y  $|\dot{q}_{ss}| = (\tau_0 - f_c) / f_v$ .

En resumen, las dos fases de la fricción están claramente definidas para el modelo de Dahl; si  $|\tau_0| < f_c$  entonces siempre es posible alcanzar un estado para el cual  $\dot{q} = 0$ ,  $z = \frac{\tau_0}{\sigma_0}$  y  $f(0, z) = \tau_0$ ; por otro lado, si  $|\tau_0| > f_c$  entonces  $\dot{q} = \dot{q}_{ss} \neq 0$ ,  $z = z_{ss} = \frac{f_c}{\sigma_0} \text{sgn}(\dot{q})$  y  $f(\dot{q}_{ss}, z_{ss}) = f_c \text{sgn}(\dot{q}_{ss}) + f_v \dot{q}_{ss}$ . Por lo tanto, el modelo de Dahl (7)-(8) resulta ser una aproximación suave del modelo (3), el cual es discontinuo.

El llamado modelo LuGre (Canudas de Wit et al., 1995) es una generalización del modelo de Dahl, y también puede expresarse en términos de la velocidad  $\dot{q}$  y la deflexión promedio de las cerdas  $z$ , pero también incluye un término proporcional a  $\dot{z}$ , quedando:

$$f(\dot{q}, z) = \sigma_0 z + \sigma_1 \dot{z} + f_v \dot{q}, \quad (9)$$

$$\dot{z} = -\frac{\sigma_0 |\dot{q}|}{g(\dot{q})} z + \dot{q}, \quad (10)$$

$$g(\dot{q}) = f_c + (f_s - f_c) e^{-|\frac{\dot{q}}{v_s}|^{\delta_s}}; \quad (11)$$

donde  $\sigma_1$  es llamado el coeficiente de amortiguamiento de las cerdas, y la función  $g(\dot{q})$  permite extender el modelo de Dahl para describir el efecto Stribeck, empleando la misma función exponencial que en (4). Nótese que en este modelo  $f_c \leq g(\dot{q}) \leq f_s$  para toda  $\dot{q}$ , y ahora  $|\sigma_0 z| \leq f_s$ , de modo que  $|z| \leq f_s/\sigma_0$ .

Se puede hacer un análisis similar al que se hizo con el modelo de Dahl para el modelo de LuGre. Considerando nuevamente una entrada constante de par  $\tau = \tau_0$  se tienen tres casos:

- Si  $|\tau_0| \leq f_c$  entonces siempre es posible alcanzar un equilibrio donde  $\dot{q} = 0$  y  $z = \frac{\tau_0}{\sigma_0}$ .
- Si  $|\tau_0| > f_s$  entonces el equilibrio no se puede alcanzar, pero los estados  $\dot{q}$  y  $z$  tienden a sus valores en estado estacionario  $\dot{q}_{ss}$  y  $z_{ss}$ , respectivamente, donde, para una  $\dot{q}_{ss}$  dada se tiene que  $|z_{ss}| = \frac{g(\dot{q}_{ss})}{\sigma_0}$ .
- Si  $f_c < |\tau_0| \leq f_s$ , entonces los estados  $\dot{q}$  y  $z$  pueden alcanzar ya sea un equilibrio o el estado estacionario  $\dot{q}_{ss}$  y  $z_{ss}$ , dependiendo de las condiciones iniciales.

Se puede mostrar que el par de fricción en estado estacionario está dado por  $f(\dot{q}_{ss}) = g(\dot{q}_{ss}) \text{sgn}(\dot{q}_{ss}) + f_v \dot{q}_{ss}$ , así que el modelo de LuGre (9) está relacionado con el modelo de Armstrong (4).

### 2.3. Modelo Mejorado para la Fricción Estática

La mayoría de los modelos de fricción no consideran la variación del punto de ruptura; sólo tienen en cuenta la fricción estática máxima, dada por  $f_s$ . Pero algunas observaciones bien documentadas, como las de (Johannes et al., 1973), muestran que el par de ruptura es una función de la razón de cambio del par aplicado. Recientemente, en (Sánchez-Mazuca and Campa, 2013), se proporciona una expresión explícita para dicha función (llamada  $\phi_s(\dot{\tau})$ ), y también se propone reemplazar  $f_s$  por  $\phi_s(\dot{\tau})$  en aquellos modelos de fricción que incluyen dicho parámetro. Como resultado, se obtienen algunos nuevos modelos de fricción, para los cuales la fricción depende no solo de  $\dot{q}$  y  $\tau$ , sino también de  $\dot{\tau}$ .

La expresión propuesta en (Sánchez-Mazuca and Campa, 2013) para el par de ruptura es

$$\phi_s(\dot{\tau}) = f_c + (f_s - f_c) e^{-|\frac{\dot{\tau}}{t_s}|^{\delta_t}} \quad (12)$$

donde  $f_s$  y  $f_c$  ya se definieron,  $t_s$  se denomina el coeficiente de variación del par aplicado y  $\delta_t$  es el parámetro de ajuste correspondiente. Debe notarse además que si el par aplicado es constante (esto es si  $\dot{\tau}=0$ ) entonces el par de ruptura es

$\phi_s(0) = f_s$ ; pero si  $\tau$  cambia abruptamente (esto es, si  $\dot{\tau} \rightarrow \infty$ ), como cuando se aplica un escalón de par al motor, entonces  $\lim_{\dot{\tau} \rightarrow \infty} |\phi_s(\dot{\tau})| = f_c$ . y para todo  $\dot{\tau}$  se tiene

$$f_c \leq \phi_s(\dot{\tau}) \leq f_s.$$

Reemplazando  $f_s$  por  $\phi_s(\dot{\tau})$ , el modelo estático general de fricción (6) puede reescribirse como

$$f(\dot{q}, \tau, \dot{\tau}) = \begin{cases} \text{sat}(\tau, \phi_s(\dot{\tau})), & \text{si } \dot{q} = 0, \\ f_k(\dot{q}, \dot{\tau}), & \text{si } \dot{q} \neq 0 \end{cases} \quad (13)$$

donde en el caso de usarse el modelo de fricción cinética de Coulomb más viscosa se considera  $f_k(\dot{q}, \dot{\tau}) = f_k(\dot{q})$  como en (3), pero si se usa el modelo de Armstrong entonces (4) se reemplaza por

$$f_k(\dot{q}, \dot{\tau}) = \text{sgn}(\dot{q}) [f_c + (f_s - f_c) e^{-|\frac{\dot{q}}{v_s}|^{\delta_v} + |\frac{\dot{\tau}}{t_s}|^{\delta_t}}] + f_v \dot{q}. \quad (14)$$

Otro modelo que se puede mejorar es el LuGre (9)-(11); con  $\phi_s(\dot{\tau})$  en lugar de  $f_s$ , resulta en

$$f(\dot{q}, z, \dot{\tau}) = \sigma_0 z + \sigma_1 \dot{z} + f_v \dot{q}, \quad (15)$$

$$\dot{z} = -\frac{\sigma_0 |\dot{q}|}{g(\dot{q}, \dot{\tau})} z + \dot{q}, \quad (16)$$

$$g(\dot{q}, \dot{\tau}) = f_c + (f_s - f_c) e^{-|\frac{\dot{q}}{v_s}|^{\delta_v} + |\frac{\dot{\tau}}{t_s}|^{\delta_t}}. \quad (17)$$

## 3. Sistema Pendubot

En esta sección se describe el sistema pendubot que se ha construido en el Laboratorio de Mecatrónica y Control del Instituto Tecnológico de la Laguna. El prototipo se muestra en la Figura 1(a). La primera articulación es un servomotor de CD sin escobillas de transmisión directa, modelo DM1200A de Parker Compumotor, con un codificador (encoder) de alta resolución de 1024000 pulsos por revolución, que está montado en un pedestal; el primer eslabón está hecho de aluminio mientras que el péndulo es una varilla de acero; la segunda articulación es un codificador industrial de Precizike Metrology, que se configuró para tener 144000 pulsos por revolución.

### 3.1. Modelo Dinámico

Considerando las ecuaciones de movimiento de Lagrange el modelo dinámico del pendubot está dado por

$$M(\mathbf{q}; \theta_I) \ddot{\mathbf{q}} + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}; \theta_I) \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}; \theta_I) + \mathbf{f}(\dot{\mathbf{q}}, \tau, \dot{\tau}; \theta_f) = \boldsymbol{\tau} \quad (18)$$

donde  $\mathbf{q}$ ,  $\dot{\mathbf{q}}$ ,  $\ddot{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^2$  son, respectivamente, los vectores de los desplazamientos, velocidades y aceleraciones articulares,  $M(\mathbf{q}; \theta_I) \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  es la matriz de inercia,  $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}; \theta_I) \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  es la matriz de pares centrífugos y de Coriolis,  $\mathbf{g}(\mathbf{q}; \theta_I) \in \mathbb{R}^2$  es el vector de términos gravitacionales,  $\mathbf{f}(\dot{\mathbf{q}}, \tau, \dot{\tau}; \theta_f) \in \mathbb{R}^2$  es el vector de los términos de fricción, y  $\boldsymbol{\tau} \in \mathbb{R}^n$  es el vector de pares externos aplicados al pendubot. El vector de parámetros inerciales  $\theta_I$ , se toma como

$$\theta_I = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \\ \theta_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_1 l_{c1}^2 + m_2 l_1^2 + I_1 \\ m_2 l_{c2}^2 + I_2 \\ m_2 l_1 l_{c2} \\ m_1 l_{c1} + m_2 l_1 \\ m_2 l_{c2} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^5$$

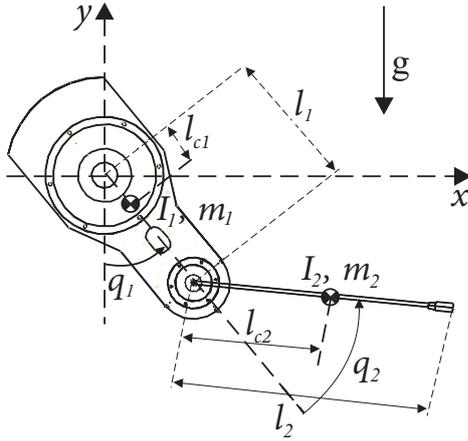


Figura 2: Parámetros del modelo del pendubot

donde  $m_i$ ,  $l_{ci}$ ,  $l_i$  e  $I_i$  para  $i = 1, 2$ , corresponden a la masa, la distancia del eje de rotación al centro de masa, la longitud total, y el momento de inercia con respecto al centro de masa del eslabón  $i$ , respectivamente (ver Figura 2).  $\theta_f$  es el vector de parámetros de fricción cuyo número depende del modelo de fricción elegido.

Los términos del modelo dinámico (18) están dados por

$$M(\mathbf{q}; \theta_I) = \begin{bmatrix} \theta_1 + \theta_2 + 2\theta_3 \cos(q_2) & \theta_2 + \theta_3 \cos(q_2) \\ \theta_2 + \theta_3 \cos(q_2) & \theta_2 \end{bmatrix},$$

$$C(\mathbf{q}; \dot{\mathbf{q}}; \theta_I) = \theta_3 \sin(q_2) \begin{bmatrix} -\dot{q}_2 & -(\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \\ \dot{q}_1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$g(\mathbf{q}; \theta_I) = g \begin{bmatrix} \theta_4 \sin(q_1) + \theta_5 \sin(q_1 + q_2) \\ \theta_5 \sin(q_1 + q_2) \end{bmatrix},$$

$$\tau = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

y

$$f(\dot{\mathbf{q}}, \tau; \theta_f) = \begin{bmatrix} f_1(\dot{q}_1, \tau_1, \dot{\tau}_1; \theta_{f1}) \\ f_2(\dot{q}_2; \theta_{f2}) \end{bmatrix} \quad (19)$$

donde  $g$  es la constante de aceleración de gravedad ( $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ ) y  $\tau_1$  corresponde al único par externo, aplicado a la articulación actuada del pendubot.

### 3.1.1. Modelo Linealizado

En esta sección, el modelo no lineal del pendubot (18) se linealiza alrededor del equilibrio arriba-arriba para utilizarlo en el diseño del controlador de estabilización.

Considerando que los estados del sistema están definidos por  $\mathbf{x} = [q_1 \ q_2 \ \dot{q}_1 \ \dot{q}_2]^T \in \mathbb{R}^4$ , y despreciando el término de fricción de (18), es posible reescribir la dinámica en espacio de estados como el siguiente modelo no lineal

$$\dot{\mathbf{x}} = \varphi(\mathbf{x}) + \gamma(\mathbf{x})\tau_1 \quad (20)$$

donde

$$\varphi(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ M^{-1}(\mathbf{x}) \left( -C(\mathbf{x}) \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} - g(\mathbf{x}) \right) \end{bmatrix} \mathbf{y}$$

$$\gamma(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ M^{-1}(\mathbf{x}) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix}.$$

El sistema no lineal (20) puede ser linealizado alrededor de cualquier punto  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_e$  para obtener

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + \mathbf{b}\tau_1 \quad (21)$$

donde

$$A = \left. \frac{\partial \varphi(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_e} \quad \text{y} \quad \mathbf{b} = \gamma(\mathbf{x})|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_e}$$

Así que, si  $\mathbf{x}_e = [\pi \ 0 \ 0 \ 0]^T$  se obtiene

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{(\theta_2\theta_4 - \theta_3\theta_5)g}{\theta_1\theta_2 - \theta_3^2} & -\frac{\theta_3\theta_5g}{\theta_1\theta_2 - \theta_3^2} & 0 & 0 \\ \frac{(\theta_1 + \theta_3)\theta_5g - (\theta_2 + \theta_3)\theta_4g}{\theta_1\theta_2 - \theta_3^2} & \frac{(\theta_1 + \theta_3)\theta_5g}{\theta_1\theta_2 - \theta_3^2} & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{y}$$

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\theta_2}{\theta_1\theta_2 - \theta_3^2} & -\frac{(\theta_2 + \theta_3)}{\theta_1\theta_2 - \theta_3^2} \end{bmatrix}^T$$

### 3.2. Identificación de Parámetros

Los parámetros inerciales del pendubot prototipo se identificaron mediante el uso de procedimientos estándar de mínimos cuadrados. Después de eso, la estimación de los cinco parámetros inerciales resultó en  $\theta_1 = 1.059$  [kg·m<sup>2</sup>/rad],  $\theta_2 = 0.053$  [kg·m<sup>2</sup>/rad],  $\theta_3 = 0.037$  [kg·m<sup>2</sup>/rad],  $\theta_4 = 2.401$  [kg·m] y  $\theta_5 = 0.117$ , [kg·m]. Con respecto al término de fricción en (18), se empleó el procedimiento propuesto en (Sánchez-Mazuca and Campa, 2013) para obtener los nueve parámetros del modelo de fricción de LuGre modificado (15)-(17) para la articulación actuada del pendubot. Los parámetros de fricción estimados están

Tabla 1: Parámetros de fricción estimados

Parámetro	Valor (+)	Valor (-)	Unidad	Parámetro	Valor (+)	Valor (-)	Unidad
$f_c$	8.955	10.01	Nm	$\delta_v$	1.032	1.286	
$f_v$	5.234	5.335	Nms/rad	$\delta_t$	0.172	0.287	
$f_s$	17.617	23.813	Nm	$\sigma_0$	17260		Nm/rad
$v_s$	0.145	0.078	rad/s	$\sigma_1$	66.708		Nms/rad
$t_s$	0.888	1.954	Nm/s				

dados en la Tabla 1 donde se observa que algunos parámetros toman diferente valor dependiendo de si el motor gira en un sentido o en otro (+: sentido antihorario, -: sentido horario). Los efectos de fricción se consideran despreciables para el segundo eslabón.

### 4. Evaluación experimental

#### 4.1. Control de Balanceo

Debido a los importantes efectos de fricción en la primera articulación del pendubot prototipo, no fue posible utilizar controladores de balanceo conocidos, como los que se reportan en (Fantoni et al., 2000) y (Spong and Block, 1995). Por lo tanto, para hacer que el pendubot se balancee y alcance el equilibrio arriba-arriba deseado, se probó un enfoque heurístico que emplea un controlador tipo PD dado por

$$\tau_1 = k_p \tanh(q_{d1} - q_1) - k_v \dot{q}_1 \tag{22}$$

para llevar al primer eslabón a su posición vertical deseada (donde  $q_{d1} = \pi$ ). Después de eso, para hacer que el péndulo comience una oscilación creciente, se cambia el valor de  $q_{d1}$  de acuerdo con la siguiente regla

$$q_{d1} = \begin{cases} \pi + \alpha, & \text{si } q_2 \geq -\pi \\ \pi - \alpha, & \text{si } q_2 < -\pi \end{cases}$$

donde  $\alpha$  inicialmente comienza con un valor de  $\frac{7\pi}{180}$ , pero una vez que la condición  $|q_2 - \pi| > \frac{\pi}{3}$  se alcanza por primera vez, entonces  $\alpha = \frac{2.3\pi}{180}$ . Para los experimentos presentados en esta sección se seleccionaron  $k_p = 58$  [Nm],  $k_v = 15$  [Nms/rad].

#### 4.2. Controlador de estabilización

Una vez que el controlador de balanceo lleva al péndulo cerca del equilibrio arriba-arriba, dentro de un rango dado por

$$|q_1 - \pi| < \frac{\pi}{18}, \quad \text{y} \quad |q_2| < \frac{\pi}{15}, \tag{23}$$

el controlador de estabilización inicia su operación tratando de estabilizar al péndulo alrededor del equilibrio.

Se decidió utilizar un controlador LQR, que fue diseñado siguiendo la metodología tradicional con el modelo dinámico linealizado (21) y añadiendo un término de compensación de fricción. La ley de control está dada por

$$\tau_1 = -Kx + f_1 \tag{24}$$

Después de algunas pruebas para sintonizar las ganancias, se decidió utilizar  $K = \text{diag}\{-267.262, -267.282, -51.5, -35.0\}$ . El término de compensación de fricción  $f_1$  en (19) se reemplaza por alguno de los modelos descritos en la sección 3 y, en general, puede depender de  $\dot{q}_1, \tau_1$  y  $\dot{\tau}_1$ , además de  $\theta_{f1}$ , es decir  $f_1 = f_1(\dot{q}_1, \tau_1, \dot{\tau}_1; \theta_{f1})$

#### 4.3. Resultados Experimentales

Para comprobar los beneficios de incluir modelos de fricción en la ley de control del pendubot, se realizaron los siguientes experimentos, con la intención de comparar modelos de fricción similares:

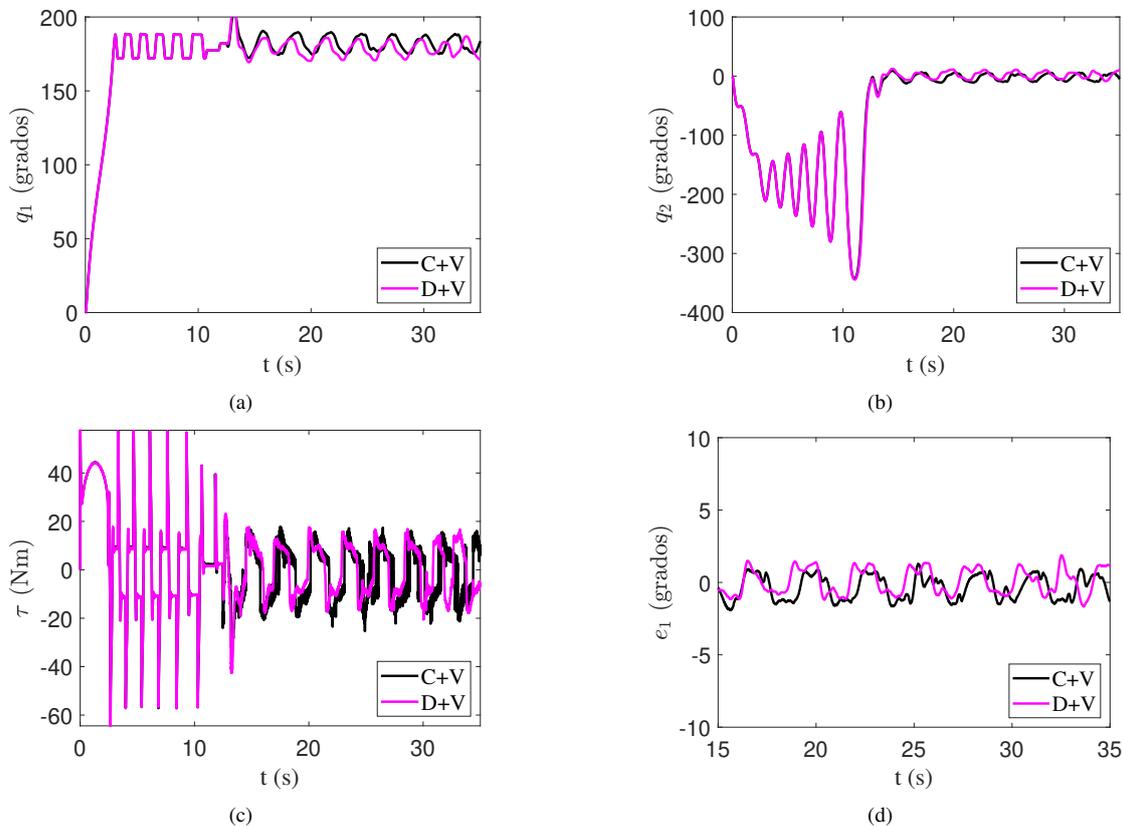


Figura 3: Experimentos con los modelos de fricción (C+V) y (D+V): (a) desplazamiento de la articulación 1; (b) desplazamiento de la articulación 2; (c) par de la articulación 1; (d) error con respecto a la vertical del péndulo.

1. El modelo de fricción de Coulomb + viscosa (C+V), con  $f = f_k$  en (3), contra el modelo de Dahl + viscosa (D+V) en (7)-(8)
2. El modelo de fricción estática + de Coulomb + viscosa (S+C+V) en (3) y (6), contra el modelo de fricción estática + de Coulomb + viscosa mejorado (M(S+C+V)) en (3) y (13)
3. El modelo de fricción estática + de Armstrong (S+A) en (4)-(5), contra el modelo de fricción estática + de Armstrong mejorado M(S+A) en (13)-(14).
4. El modelo de fricción LuGre (LG) en (9)-(11), contra el modelo de fricción LuGre mejorado M(LG) en (15)-(17).

Por otra parte, con el fin de evaluar el desempeño del controlador para los diferentes compensadores de fricción, se definieron las siguientes señales de error

$$e_1 = q_1 + q_2 - \pi, \tag{25}$$

$$e_2 = \sqrt{(q_1 - \pi)^2 + q_2^2}. \tag{26}$$

Nótese que si  $q_1 = \pi$  y  $q_2 = 0$  el pendubot se encuentra en el equilibrio deseado y  $e_1 = e_2 = 0$ ; pero mientras  $e_2$  representa la norma euclidiana de la desviación de cada articulación con respecto al equilibrio,  $e_1$  indica que tan alejado está el péndulo de la vertical (si  $q_1 = \pi - \gamma$ , entonces el péndulo está vertical si  $q_2 = \gamma$ ).

La Figura 3 muestra la evolución en el tiempo de los desplazamientos angulares  $q_1$ ,  $q_2$ , el par aplicado  $\tau_1$ , y el error  $e_1$  para los experimentos en los que se consideraron el modelo de

fricción de Coulomb + viscosa (C+V) y el modelo de fricción de Dahl + viscosa (D+V). Nótese que, tal como lo predice la teoría, existe una gran similitud entre estos dos modelos de fricción.

Las figuras 4 y 5 presentan también las gráficas de los desplazamientos angulares, el par aplicado y el error  $e_1$ , pero comparando los casos en los que se utilizan los modelos de fricción estática + de Coulomb + viscosa y de fricción estática + de Armstrong, respectivamente, con los correspondientes modelos mejorados.

Con respecto a los experimentos que consideran el modelo de fricción LuGre (LG) y el modelo de fricción LuGre mejorado (M(LG)), la Figura 6 muestra los resultados obtenidos.

Cabe mencionar que en las gráficas correspondientes a  $q_1$ ,  $q_2$  y  $\tau_1$  de las figuras 3-6 se muestra el desarrollo de los experimentos desde  $t = 0$ , que es cuando arranca el controlador de balanceo (22), siendo el mismo en todos los casos; aproximadamente en  $t = 12$  segundos se cumplen las condiciones (23) para que se conmute al controlador de estabilización (24), que incluye ya la compensación de fricción correspondiente. Las gráficas de  $e_1$  en todas las figuras 3-6, inician en  $t = 15$  segundos, es decir, una vez que ha pasado el transitorio debido a la conmutación.

Para cuantificar las señales de error, dadas por (25) y (26), en estado estacionario (una vez que entra el controlador de estabilización) y comparar así los diferentes métodos de compensación de fricción, se emplea el llamado valor cuadrático medio (RMS) estándar como índice de desempeño. Siendo  $e(k)$  la señal a analizar para la muestra  $k$ , donde  $k = 1, 2, \dots, N$ , el valor

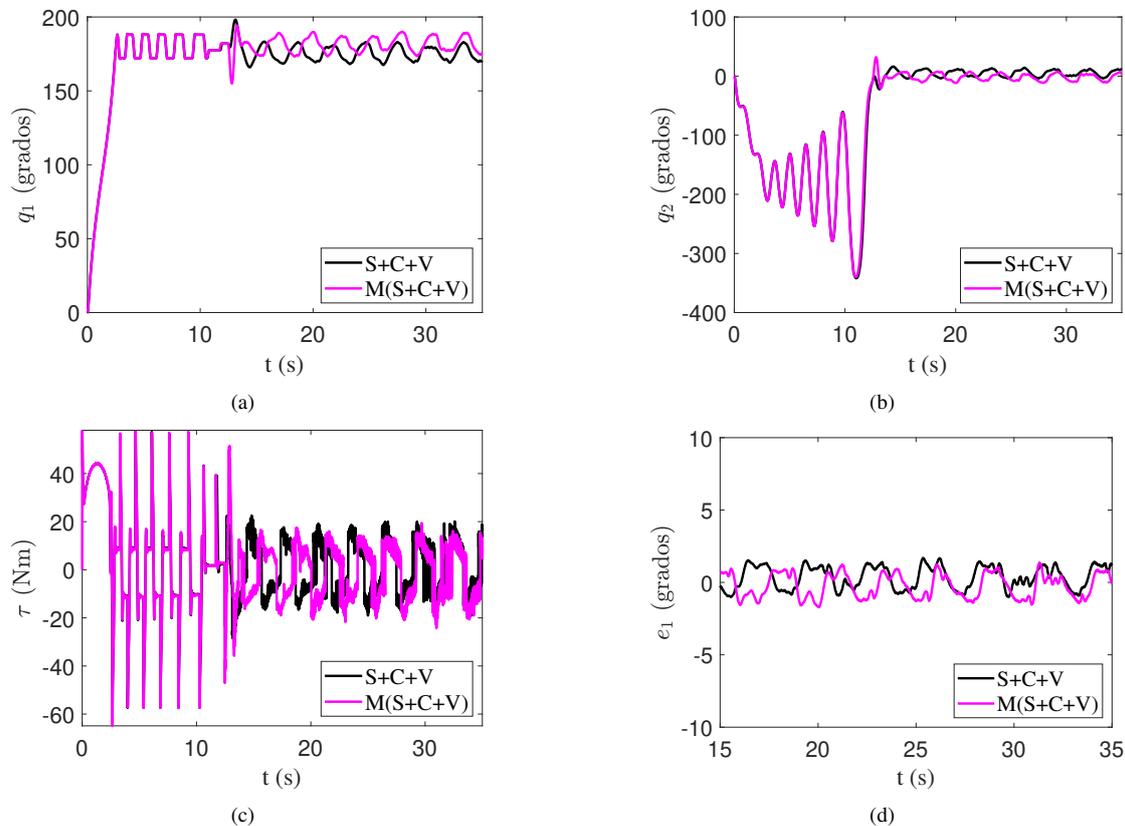


Figura 4: Experimentos con los modelos de fricción (S+C+V) y M(S+C+V): (a) desplazamiento de la articulación 1; (b) desplazamiento de la articulación 2; (c) par de la articulación 1; (d) error con respecto a la vertical del péndulo.

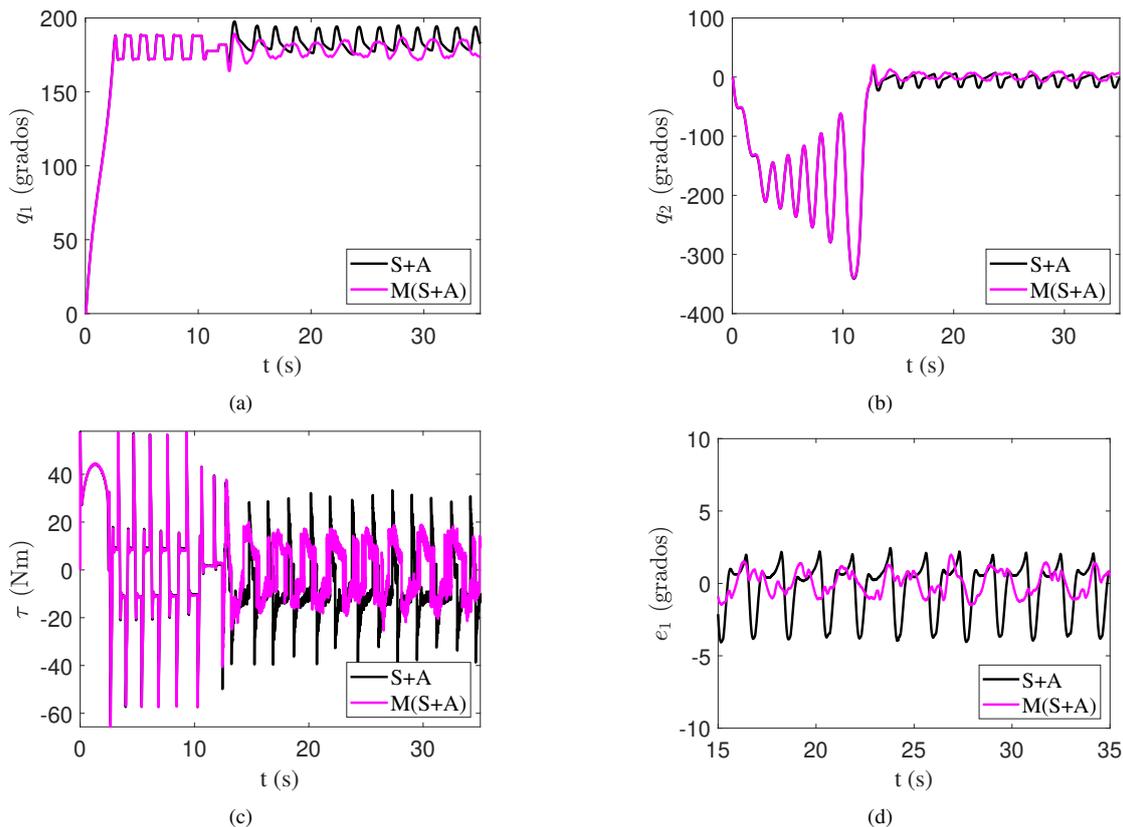


Figura 5: Experimentos con los modelos de fricción (S+A) y M(S+A): (a) desplazamiento de la articulación 1, (b) desplazamiento de la articulación 2, (c) par de la articulación 1, (d) error con respecto a la vertical del péndulo.

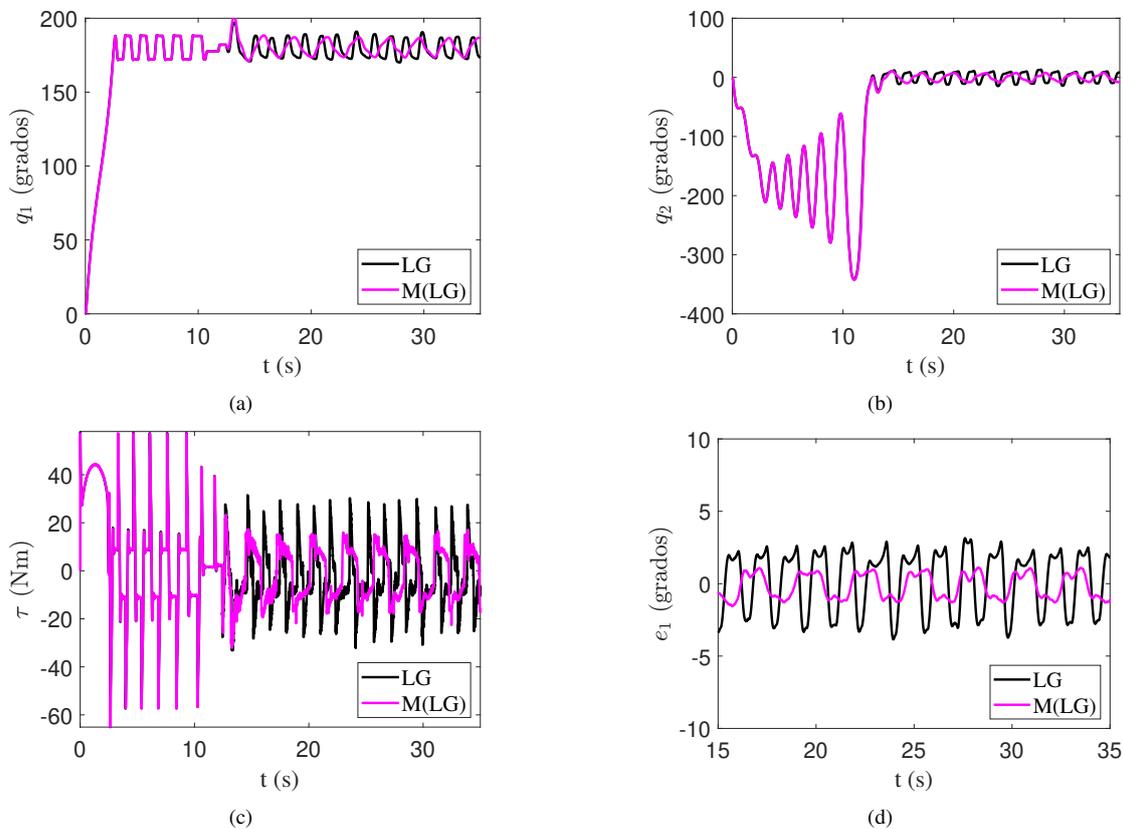


Figura 6: Experimentos con los modelos de fricción (LG) y M(LG): (a) desplazamiento de la articulación 1, (b) desplazamiento de la articulación 2, (c) par de la articulación 1, (d) error con respecto a la vertical del péndulo.

Tabla 2: Rendimiento considerando diferentes modelos de fricción.

Modelo de fricción	C+V	D+V	S+C+V	M(S+C+V)	S+A	M(S+A)	LG	M(LG)
$RMS(e_1)$	0.8763	0.8787	0.8526	0.8533	1.8668	0.8207	2.1253	0.8551
$RMS(e_2)$	5.4952	5.2419	6.9983	5.5101	7.7771	4.9842	7.3153	4.8543

RMS se define como

$$RMS(e) = \sqrt{\frac{1}{T} \sum_{k=0}^N [e(k)]^2 h} \quad (27)$$

donde  $h$  es el periodo de muestreo y  $T$  es el intervalo de tiempo que se desea analizar, de manera que  $T = Nh$ .

La Tabla 2 muestra los valores  $RMS(e_1)$  y  $RMS(e_2)$  para los ocho compensadores de fricción probados. Se puede apreciar que para los modelos de fricción que en general incluyen la mejora a la fricción estática M(C+V+S), M(S+A) y M(LG), ambos errores son más pequeños cuando se comparan con los mismos modelos sin la mejora.

## 5. Conclusiones

Este artículo muestra el comportamiento de un pendubot de transmisión directa con efectos de fricción significativos en su primera articulación. Después de una fase de balanceo, que emplea una ley de control simple, la estabilización del sistema alrededor del equilibrio inestable arriba-arriba se logra utilizando un controlador LQR con compensación de fricción. Los resultados experimentales muestran la viabilidad de este enfoque y también validan la mejora al modelo de fricción estática propuesto recientemente en (Sánchez-Mazuca and Campa, 2013).

Con respecto a (Sánchez-Mazuca et al., 2015), este documento no sólo describe con mayor detalle el comportamiento de los modelos de fricción dinámicos, sino que la evaluación experimental se realiza entre los ocho controladores presentados; además, se consideran un nuevo índice de desempeño ( $e_1$ ).

## Agradecimientos

Este trabajo fue apoyado parcialmente por el Tecnológico Nacional de México y la Universidad Autónoma de Ciudad Juárez.

## Referencias

- Armstrong-Helouvry, B., 1991. Control of Machines with Friction. Kluwer Academic Publishers.
- Canudas de Wit, C., Olson, H., Astrom, K., Lischinsky, P., 1995. A new model for control of system with friction. IEEE Transactions on Automatic Control 40, 419–425.
- Courtney-Pratt, J., Eisner, E., 1957. The effect of a tangential force on the contact of metallic bodies. Proceedings of the Royal Society A 238, 529–550.
- Dahl, P., 1968. A solid friction model. Technical report TOR-0158(3107-18)-1, The Aerospace Corporation.
- Fantoni, I., Lozano, R., Spong, M. W., 2000. Energy based control of the pendubot. IEEE Transactions on Automatic Control 45, 79–86.
- Guemghar, K., 2005. On the use of input-output feedback linearization techniques for the control of nonminimum-phase systems. Ph.D. thesis, École Polytechnique Fédérale de Lausanne, Lausanne, Switzerland.
- Johannes, V. I., Green, M. A., Brockley, C. A., 1973. The role of the rate of application of the tangential force in determining the static friction coefficient. Wear 24, 381–385.
- Ma, X. Q., Su, C. Y., 2002. A new fuzzy approach for swing up control of pendubot. In: Proceedings of the American Control Conference. Anchorage, AK, USA.
- Morin, A., 1833. New friction experiments carried out at Metz in 1831-1833. Proceedings of the French Royal Academy of Sciences 4, 1–128.
- O’Flaherty, R. W., Sanfelice, R. G., Teel, A. R., 2008. Hybrid control strategy for robust global swing-up of the pendubot. In: Proceedings of the American Control Conference. Seattle, WA, USA.
- Rabinowics, E., 1956. Stick and slip. Scientific American 194, 109–118.
- Sánchez-Mazuca, S., Campa, R., 2013. An improvement proposal to the static friction model. Mathematical Problems in Engineering 2013.
- Sánchez-Mazuca, S., Soto, I., Campa, R., 2015. Modeling and control of a pendubot with static friction. In: Cecarelli, M., Hernández Martínez, E. E. (Eds.), Multibody Mechatronic Systems: Proceedings of the MUSME Conference held in Huatulco, Mexico, October 21-24, 2014. Springer, pp. 229–240.
- Spong, M. W., Block, D. J., 1995. The pendubot: a mechatronic system for control research and education. In: Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control. New Orleans, LA, USA.
- Stribeck, R., 1902. The key qualities of sliding and rolling bearings. (in German) Zeitschrift Des Vereins Deutscher Ingenieure 46, 1342–1348.
- Wang, W., Yi, J., Zhao, D., Liu, X., 2004. Adaptive sliding mode controller for an underactuated manipulator. In: Proceedings of the International Conference on Machine Learning and Cybernetics. Shanghai, China.
- Xin, X., Kaneda, M., Oki, T., 2002. The swing-up control for the pendubot based on energy control approach. In: Proceeding of the IFAC World Congress. Barcelona, Spain.
- Zhang, M. J., Tarn, T. J., 2002. Hybrid control of the pendubot. IEEE Transactions on Mechatronics 7, 79–86.