

El exoesqueleto de rehabilitación de la marcha ALICE: análisis dinámico y evaluación del sistema de control utilizando cuaternios de Hamilton

Cardona, M.^{a,b,*}, Serrano, F.^c, Martín, J.A.^{d,e}, Rausell, E.^d, Saltarén, R.^a, García-Cena, C.E.^a

^aCentro de Automática y Robótica, UPM-CSIC, Universidad Politécnica de Madrid, España.

^bFacultad de Ingeniería, Universidad Don Bosco, El Salvador

^cUniversidad Tecnológica Centroamericana (UNITEC), Honduras.

^dEscuela de Fisioterapia de la ONCE, Universidad Autónoma de Madrid, España.

^eDepartamento de Anatomía, Histología y Neurociencia, Universidad Autónoma de Madrid, España.

To cite this article: Cardona, M., Serrano, F., Martín, J.A., Rausell, E., Saltarén, R., García-Cena, C.E. 2021. The exoskeleton for gait rehabilitation ALICE: dynamic analysis and control system evaluation using Hamilton quaternions. *Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial* 18, 48-57. <https://doi.org/10.4995/riai.2020.12558>

Resumen

Un exoesqueleto robótico es un dispositivo electromecánico utilizado para aumentar la capacidad física de una persona, como ayuda a la locomoción o para procesos de rehabilitación de la marcha. En el caso de los exoesqueletos de rehabilitación se requiere que el sistema de control sea capaz de adaptarse adecuadamente a la evolución de los pacientes con el fin de optimizar su recuperación, esto implica el diseño de controladores robustos y precisos. En este trabajo se presenta el análisis cinemático, análisis dinámico y evaluación del sistema de control del exoesqueleto de rehabilitación ALICE, se evalúan diferentes estrategias de control con el objetivo de identificar la estrategia de control más adecuada. Dentro de las técnicas de control empleadas están: el controlador PD, PD adaptativo, y el controlador en modo deslizante. Además, se realiza un análisis de estabilidad utilizando el criterio de Lyapunov. Para probar el rendimiento de los controladores, se utilizan datos de marcha obtenidos en la Escuela de Fisioterapia de la ONCE de Madrid, correspondiente a personas sanas y personas con esclerosis múltiple. Se utiliza MATLAB como software de simulación y lenguaje de programación.

Palabras clave: Control, dinámica, exoesqueleto, esclerosis múltiple, miembro inferior, rehabilitación, robótica

The exoskeleton for gait rehabilitation ALICE: dynamic analysis and control system evaluation using Hamilton quaternions

Abstract

A robotic exoskeleton is an electromechanical device that can be worn by a person to increase its physical capacity, to assist locomotion or for gait rehabilitation processes. In the case of rehabilitation exoskeletons, the control system is required to be smooth and capable to match accurately with the patients' evolution in order to optimize the efficiency of their recovery, this implies the design of robust and precise controllers. In this paper, kinematic analysis, dynamic analysis and control system evaluation for ALICE rehabilitation exoskeleton is presented. Among the control techniques used are: the PD controller, adaptive PD, and the sliding mode controller. In addition, a stability analysis using the Lyapunov criterion is performed. To test the performance of the controllers, gait data obtained by the ONCE School of Physiotherapy in Madrid, which correspond to healthy people and people with multiple sclerosis, are used. MATLAB as simulation software and programming language is used.

Keywords: Control, dynamics, exoskeleton, multiple sclerosis, lower limb, rehabilitation, robotics

*Autor para correspondencia: manuel.cardona@udb.edu.sv

1. Introducción

Un exoesqueleto robótico es un dispositivo electromecánico cuya principal funcionalidad es la de aumentar la capacidad física de una persona o, en caso de personas con marcha patológica, contribuir a su recuperación o rehabilitación, Cardona et al. (2017).

En el caso de los exoesqueletos robóticos para rehabilitación, se busca que estos dispositivos ayuden al paciente en la rehabilitación después de haber sufrido algún tipo de lesión muscular o nerviosa, o para ejercitar a la población mayor.

Es importante que el exoesqueleto se adapte a la patología del paciente ya que esto permitirá que la rehabilitación se efectúe adecuadamente, en ese sentido, el exoesqueleto debe proporcionar la ayuda necesaria no solo para que el paciente siga una marcha normal Reinkensmeyer (2003), Reinkensmeyer et al. (2006) sino también deberá adaptarse a las condiciones particulares del paciente y de su patología. Por tanto, el sistema de control deberá tomar en cuenta tanto los valores de la marcha normal, como los valores cinéticos del paciente y del exoesqueleto.

Algunos investigadores, Abolvafaei and Ganjefar (2019), Eker (2010), Proietti et al. (2015), Yang et al. (2009), Wu et al. (2019), He et al. (2019), sugieren utilizar controladores PD, control adaptativo, control por impedancia o en modo deslizante. En el presente artículo se evalúan diferentes estrategias de control con el objetivo de identificar la arquitectura de controlador más adecuada. Para las pruebas de las estrategias se utilizaron datos de marcha de voluntarios de la Fundación ONCE de Madrid, correspondientes a personas sanas y con esclerosis múltiple.

El artículo está organizado de la siguiente manera, primero se presenta el proyecto ALICE y se estudia la geometría del mecanismo, luego se realiza el análisis cinemático del mecanismo utilizando cuaternios de Hamilton, posteriormente se realiza el análisis dinámico utilizando la formulación de Euler-Lagrange, luego se presenta una evaluación de un controlador PD, PD adaptativo, y un controlador en modo deslizante adaptativo utilizando las leyes de Lyapunov. Finalmente se presentan y se discuten los resultados obtenidos.

2. El Proyecto ALICE

En los últimos 15 años, la investigación en el campo de la robótica de rehabilitación ha crecido exponencialmente como se muestra en Yakub et al. (2014), Chong et al. (2013), Maciejasz et al. (2014). Esto se debe al hecho de que los recursos humanos y materiales no son suficientes para cubrir la demanda actual, en la actualidad, la rehabilitación es una tarea uno-a-uno, es decir, por cada paciente es necesario contar con un fisioterapeuta para su rehabilitación, por lo que la carga de trabajo de los fisioterapeutas es muy alta, considerando que los procesos de rehabilitación son muy repetitivos y la lista de espera es larga. Por otra parte, el aumento en la incidencia de accidentes cerebrovasculares en la población adulta o el envejecimiento de la población, hacen que el servicio de rehabilitación no disponga de medios humanos suficientes para dar cobertura al aumento de la demanda. Más aun, según Riener et al. (2014), el exceso de trabajo físico al que están sometidos estos profesionales los termina convirtiendo en pacientes.

El objetivo principal del proyecto ALICE es proporcionar a los fisioterapeutas una herramienta que ayude en el proceso de rehabilitación y les permita reducir la carga de trabajo. ALICE es un exoesqueleto de rehabilitación de miembro inferior, consta de 3 eslabones (pelvis, fémur y tibia) e incluye 3 actuadores eléctricos. La primera versión de ALICE incluye 4 grados de libertad (GDL), 3 activos (flexión/extensión de la cadera, abducción/aducción de la cadera y flexión/extensión de la rodilla) y un pasivo (flexión dorsal/plantar del tobillo).

El exoesqueleto es ajustable para pacientes con longitudes de fémur y tibia entre 35 cm a 50 cm y ancho pélvico de 29 cm a 40 cm, Cardona and García Cena (2019b). ALICE está diseñado para ayudar en la rehabilitación de la marcha a pacientes que han sufrido una lesión locomotora como resultado de trastornos neurológicos o musculares. El uso previsto de ALICE incluye pacientes con patologías como accidente cerebrovascular, esclerosis múltiple, enfermedad de Parkinson, trastornos neurológicos, lesiones musculoesqueléticas o parálisis cerebral.

Actualmente, el proyecto está en proceso de validación de componentes / subsistemas, realizando pruebas de laboratorio y simulaciones en un entorno real. ALICE tiene un nivel de madurez tecnológica o TRL (Nivel de preparación tecnológica, NASA) de 4-5. Entre las principales limitaciones que impide el uso generalizado de estos dispositivos, se puede mencionar el largo y difícil proceso regulatorio que como dispositivos médicos deben cumplir, y el elevado coste que estos dispositivos tienen en el mercado. Como consecuencia, nos hemos propuesto desarrollar un exoesqueleto de rehabilitación que cumpliendo las especificaciones de las normativas, sea de bajo coste comparativamente a otros disponibles en el mercado.

2.1. Geometría del mecanismo

ALICE se compone de una base adaptable a la pelvis y 2 elementos ajustables que se adaptan al fémur y tibia respectivamente, como se muestra en la Figura 1.



Figura 1: Exoesqueleto robótico de rehabilitación, ALICE

El mecanismo tiene 3 articulaciones para cada miembro, lo que permite 3 grados de libertad activos y 1 pasivo. La primera articulación activa corresponde a la abducción / aducción de la cadera, la segunda articulación activa a la flexión / extensión de

la cadera, y la tercera articulación activa corresponde a la flexión / extensión de la rodilla. Finalmente, el grado de libertad pasivo corresponde al tobillo, lo que permite la flexión dorsal y plantar.

El rango de movilidad de cada articulación está restringido a los valores encontrados en la literatura, Kapanji (2010), Cardona and García Cena (2019a), Arnold et al. (2010) y se muestran en la Tabla 1.

Tabla 1: Articulaciones y Rango de Movilidad (ROM) de ALICE.		
Articulación	Acción	ROM
Cadera	Extensión/Flexión	$-30^\circ/120^\circ$
	Abducción/Aducción	$-50^\circ/30^\circ$
Rodilla	Flexión/Extensión	$-120^\circ/0^\circ$
Tobillo	Flexión Plantar/Dorsal	$-40^\circ/30^\circ$

3. Análisis Cinemático Utilizando Cuaternios

Para el análisis cinemático del exoesqueleto de miembro inferior propuesto en este estudio se utilizan cuaternios unitarios Zhou et al. (2015); Özgür and Mezouar (2016); Wang et al. (2013), ya que este método permite una representación simple y compacta en comparación con otros métodos, tal como el método de Denavit-Hartenberg.

Las propiedades y operaciones de cuaternios unitarios se muestran en el Apéndice A y si se necesitan las operaciones para cuaternios duales se puede referir a las citas mostradas anteriormente.

La cinemática del exoesqueleto obtenida por medio de cuaternios unitarios, consiste en definir las matrices de transformación utilizando propiedades y operaciones de los cuaternios unitarios para luego obtener las velocidades lineales y angulares de la misma. Para tal efecto, se usarán los marcos de referencias sugeridos por Denavit-Hartenberg (DH) tal como se muestra en la Figura 2.

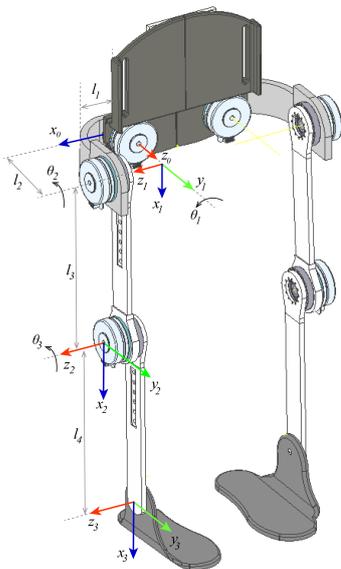


Figura 2: Marcos de referencia de acuerdo a DH

3.1. Obtención de las Matrices de Transformación

Considere el siguiente cuaternio unitario:

$$b = b_0 + b_1i + b_2j + b_3k \quad (1)$$

La matriz de transformación está dada por:

$$T_i^{i-1} = \begin{bmatrix} R_i^{i-1} & P_i^{i-1} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2)$$

donde $R_i^{i-1} \in \mathfrak{R}^{3 \times 3}$ es la matriz de rotación y P_i^{i-1} es el vector de traslación. La matriz de rotación en términos de cuaternios unitarios se puede obtener al rotar un ángulo θ_i alrededor del eje z , y un ángulo α_i alrededor del eje x , definiendo al vector z_i :

$$z_i = \cos(\theta_i) + \sin(\theta_i).k \quad (3)$$

la rotación alrededor de z estará dada por:

$${}_zR_i^{i-1} = [z_i \otimes d_x, z_i \otimes d_y, d_z] \quad (4)$$

donde $d_x = i$, $d_y = j$ y $d_z = k$. Además, una rotación α_i en x produce el siguiente cuaternio:

$$x_i = \cos(\alpha_i) + \sin(\alpha_i).i \quad (5)$$

por lo que se obtiene la siguiente matriz de rotación en x :

$${}_xR_i^{i-1} = [d_x, x_i \otimes d_y, x_i \otimes d_z] \quad (6)$$

Si es necesario profundizar sobre esta cuestión, las operaciones con cuaternios se encuentran en el Apéndice A. Las traslaciones en el eje z y x están dadas por:

$${}_zP_i^{i-1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ s_i \end{bmatrix} \quad {}_xP_i^{i-1} = \begin{bmatrix} a_i \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (7)$$

Las matrices y vectores de rotación y traslación respectivamente, se utilizan para definir las matrices de transformación necesarias para obtener la cinemática del exoesqueleto, siguiendo el método de Denavit-Hartenberg D-H. Los pasos para el método de D-H se muestran a continuación Zhou et al. (2015):

- Rotar θ_i alrededor del eje z .
- Trasladar s_i en z .
- Trasladar a_i en x .
- Rotar α_i en x .

Las matrices para las traslaciones en z y x están dadas por:

$$S_i^{i-1} = \begin{bmatrix} I & {}_zP_i^{i-1} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad A_i^{i-1} = \begin{bmatrix} I & {}_xP_i^{i-1} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (8)$$

Por lo que las matrices de transformación están dadas por:

$$T_i^{i-1} = \begin{bmatrix} {}_zR_i^{i-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} S_i^{i-1} A_i^{i-1} \begin{bmatrix} {}_xR_i^{i-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (9)$$

donde I es una matriz identidad de dimensiones adecuadas. Por lo que la matriz de transformación del exoesqueleto se obtiene con:

$$T_3^0 = T_1^0 T_2^1 T_3^2 \quad (10)$$

Los parámetros de D-H y sus respectivos cuaternios se encuentran en el Apéndice B.

3.2. Obtención de las Matrices de Velocidad

Para la obtención de las velocidades angulares es necesario definir primero tanto las coordenadas lineales y angulares tal como se expresan en Spong et al. (2006). Considere el siguiente vector de coordenadas lineales $X = [x, y, z]^T$. Además, considere las velocidades lineales respecto al origen como:

$$\dot{X}_1^0 = \dot{P}_1^0 \quad \dot{X}_2^0 = \dot{P}_2^0 \quad \dot{X}_3^0 = \dot{P}_3^0 \quad (11)$$

Por otra parte, considere los ángulos de las articulaciones del exoesqueleto $q = [q_1, q_2, q_3]^T$ respecto al eje z con los ángulos de rotación $\Phi = [\theta, \phi, \psi]^T$. Por lo tanto, las velocidades angulares respecto al eje de base están dadas por Spong et al. (2006):

$$\begin{aligned} \omega_1^0 &= \dot{\Phi}_1^0 = \dot{q}_1 k \\ \omega_2^0 &= \dot{\Phi}_2^0 = \dot{q}_1 k + \dot{q}_2 R_1^0 k \\ \omega_3^0 &= \dot{\Phi}_3^0 = \dot{q}_1 k + \dot{q}_2 R_1^0 k + \dot{q}_3 R_2^0 k \end{aligned} \quad (12)$$

definiendo al vector $k = [0, 0, 1]^T$, las expresiones dadas en (12) las podemos escribir en forma matricial como,

$$W_1 = [k, 0, 0] \quad W_2 = [k, R_1^0 k, 0] \quad W_3 = [k, R_1^0 k, R_2^0 k] \quad (13)$$

Por último, las matrices W_i para $i = 1, 2, 3$ nos permiten obtener una importante relación de modo que se puedan obtener las velocidades en los tres ejes por medio de las velocidades angulares de cada junta actuada:

$$\omega_i^0 = W_i \dot{q} \quad (14)$$

4. Análisis Dinámico

Para la obtención de la dinámica del exoesqueleto se implementa el método de Euler-Lagrange, definiendo primero el Lagrangiano tal como se muestra a continuación:

$$L = \sum_{i=1}^3 K_i - \sum_{i=1}^3 P_i \quad (15)$$

donde K_i es la energía cinética y P_i es la energía potencial para los eslabones $i = 1, 2, 3$. Las respectivas energías cinética y potencial están dadas por:

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \dot{X}_i^T M_i \dot{X}_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \omega_i^T I_i \omega_i \\ P &= \sum_{i=1}^3 m_i g X_i^T D_y \end{aligned} \quad (16)$$

donde $D_y = [0, 1, 0]^T$, X_i y ω_i están definidas en las ecuaciones (11) y (12) y una matriz M_i dada por:

$$M_i = \begin{bmatrix} m_i & 0 & 0 \\ 0 & m_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (17)$$

donde m_i es la masa para el eslabón $i = 1, 2, 3$ considerando que sólo hay movimientos de translación en los ejes x y y pero no en el eje z, $I_i \in \mathbb{R}^3$ es la matriz de inercias para los eslabones $i = 1, 2, 3$, y g es la constante de gravedad. Haciendo un cambio de variables el Lagrangiano se convierte en $L = \frac{1}{2} \dot{X}^T M \dot{X} + \frac{1}{2} \Omega^T I \Omega - \bar{X}^T D'_y$, donde:

$$\begin{aligned} \bar{X} &= [X_1, X_2, X_3]^T & \Omega &= [\omega_1, \omega_2, \omega_3]^T \\ \Omega &= [\dot{\Phi}_1, \dot{\Phi}_2, \dot{\Phi}_3]^T & \Phi &= [\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3]^T \end{aligned} \quad (18)$$

con las matrices:

$$\begin{aligned} M &= \begin{bmatrix} M_1 & 0 & 0 \\ 0 & M_2 & 0 \\ 0 & 0 & M_3 \end{bmatrix} & I &= \begin{bmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{bmatrix} \\ D'_y &= \begin{bmatrix} D_y m_1 g \\ D_y m_2 g \\ D_y m_3 g \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (19)$$

ahora haciendo el siguiente cambio de variables:

$$\begin{aligned} Q &= [\bar{X}^T, \Phi^T]^T & \dot{Q} &= [\dot{\bar{X}}^T, \dot{\Phi}^T]^T = [\dot{\bar{X}}^T, \Omega^T]^T \\ \ddot{Q} &= [\ddot{\bar{X}}^T, \ddot{\Phi}^T]^T = [\ddot{\bar{X}}^T, \dot{\Omega}^T]^T \end{aligned} \quad (20)$$

el Lagrangiano se convierte en:

$$L = \frac{1}{2} \dot{Q}^T \begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \dot{Q} - Q^T \begin{bmatrix} D'_y \\ 0 \end{bmatrix} \quad (21)$$

Por tanto, al aplicar la ecuación de Euler-Lagrange dada por:

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{Q}} \right] - \frac{\partial L}{\partial Q} = \tau_Q \quad (22)$$

donde $\tau_Q = [0_3, \tau_\Phi]^T$, la ecuación de la dinámica del exoesqueleto estará dada por,

$$\begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\bar{X}} \\ \dot{\Omega} \end{bmatrix} + D_Q = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_\Phi \end{bmatrix} \quad (23)$$

Donde $D_Q = [D_y^T, 0]^T$. Para poder implementar las entradas de los actuadores del exoesqueleto es necesario definir un torque virtual τ_{qn} por medio de una transformación que permita representarlo en función de la entrada $\tau_{\Phi n}$. Para esto considere la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned} I_n \dot{\omega}_n &= \tau_{\Phi n} \\ I_n [\dot{W}_n \dot{q} + W_n \ddot{q}] &= \tau_{\Phi n} \end{aligned} \quad (24)$$

obteniendo $\dot{\omega}_n$ de la primera derivada de (14), la expresión dada por (24) se puede reescribir como,

$$D_n \ddot{q} + C_n \dot{q} = \tau_{\Phi_n} \quad (25)$$

donde $D_n = I_n W_n$ y $C_n = I_n \dot{W}_n$. Multiplicando a ambos lados de (25) por D_n^{-1} se obtiene:

$$\ddot{q} + D_n^{-1} C_n \dot{q} = D_n^{-1} \tau_{\Phi_n} \quad (26)$$

por lo que para transformar las fuerzas y momentos de los eslabones del exoesqueleto a los torques de los actuadores para $n = 3$, la transformación $\tau_{\Phi_n} \rightarrow \tau_{q_n}$ dada por $\tau_{q_n} = D_n^{-1} \tau_{\Phi_n}$ es necesaria.

5. Evaluación de la Arquitectura de Control

En la fase de investigación y desarrollo que nos encontramos con el proyecto ALICE, es necesario evaluar la estrategia de control más adecuada considerando las propias características cinemáticas y dinámicas del dispositivo así como también la usabilidad del mismo en el contexto de la rehabilitación de la marcha. Nuestro objetivo es estudiar qué técnica de control es la más adecuada para este dispositivo garantizando la estabilidad del lazo de control.

En esta sección se presentan los controladores seleccionados junto con el análisis de estabilidad teórico, y los resultados de simulación obtenidos con datos reales de la marcha de pacientes con esclerosis múltiple.

Para analizar el comportamiento en lazo cerrado de la dinámica del exoesqueleto se utilizaron los ángulos de actuación para cada junta de un sujeto sano, los cuales sirven como referencia para los ángulos de los actuadores, así como los ángulos de actuación de las articulaciones del paciente, los cuales se transforman con un modelo de dinámica inversa a un torque de perturbación. Estos datos fueron recolectados y provistos gracias a la clínica de rehabilitación de la fundación ONCE en Madrid, España. Es muy importante recalcar que las técnicas de control que se muestran en este apartado utilizan el modelo dinámico obtenido por medio de cuaternios unitarios (23) considerando que es un modelo dinámico desacoplado.

Además, hay que hacer notar que para el presente estudio y para la prueba de los controladores, no se contemplan perturbaciones a normales generadas por la patología. Por otra parte, para la implementación real, se aconseja limitar el torque máximo de los actuadores de acuerdo con la evaluación previa hecha por el fisioterapeuta, esto con el fin de evitar lesiones y asegurar la recuperación progresiva del paciente.

5.1. Controlador PD

Tal como se explicó en el inicio de esta sección el controlador PD es uno de los controladores más básicos que se utilizan en robótica, aunque dependiendo del caso a veces se obtiene una estabilización satisfactoria, en otras ocasiones, en específico al implementar valores de ganancias muy altos, el sistema en lazo cerrado se hace proclive a perturbaciones.

Tal como se muestra en la Figura 3 se pueden observar las siguientes variables de entrada y referencia $q = [\theta_1, \theta_2, \theta_3]^T$ y $\tilde{q} = [\tilde{\theta}_1, \tilde{\theta}_2, \tilde{\theta}_3]^T$ donde q representa el vector de ángulos medidos y \tilde{q} representa los ángulos de referencia. Expresando los siguientes errores de trayectoria $e_p = \tilde{q} - q$ y $e_D = \dot{\tilde{q}} - \dot{q}$ se

puede expresar el controlador proporcional-derivativo PD en la siguiente forma:

$$\tau_q = K_p e_p + K_D e_D \quad (27)$$

donde $\tau_q \in \mathbb{R}^3$ es el vector de torque de los actuadores, el cual es transformado de la siguiente forma $\tau_q \rightarrow \tau_{\Phi}$ tal como aparece en la Figura 3, en la cual $K_p \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ y $K_D \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ son respectivamente las matrices proporcional y derivativa del controlador PD las cuales se deben ajustar apropiadamente.

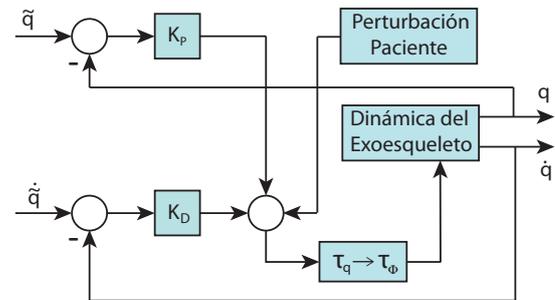


Figura 3: Controlador proporcional-derivativo PD para el exoesqueleto

5.2. Controlador PD Adaptativo

En la Figura 4 se puede observar el diagrama de bloques del controlador PD adaptativo para el seguimiento de trayectorias de los actuadores del exoesqueleto. Este controlador se desarrolla por medio de un enfoque de Lyapunov considerando la entrada del torque de perturbación. Para el diseño de este controlador considere el sistema (25) adicionándole una entrada de perturbación tal como se muestra en (28).

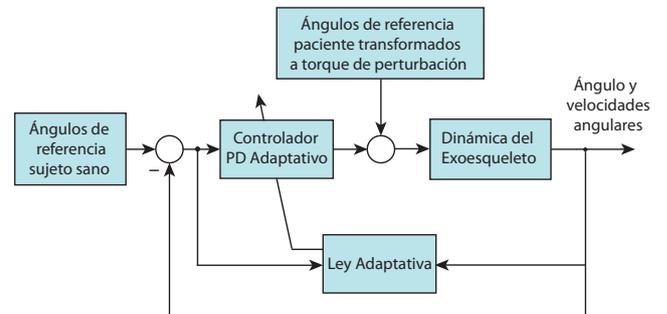


Figura 4: Controlador proporcional-derivativo PD adaptativo

$$D_n \ddot{q} + C_n \dot{q} = \tau_{\Phi_n} + \tau_{d_n} \quad (28)$$

donde τ_{d_n} es el torque perturbación. Multiplicando D_n^{-1} a ambos lados de (28) se obtiene:

$$\ddot{q} + D_n^{-1} C_n \dot{q} = D_n^{-1} \tau_{\Phi_n} + D_n^{-1} \tau_{d_n} \quad (29)$$

considerando los torques virtuales de entrada y de perturbación como $\tau_{q_n} = D_n^{-1} \tau_{\Phi_n}$ y $\tau_{q_d} = D_n^{-1} \tau_{d_n}$ respectivamente. Siendo este par el aportado por la fuerza muscular del pacientes y por tanto siempre en la dirección del movimiento. Para poder diseñar el controlador PD adaptativo es necesario convertir (29) a variables de estado por medio de las variables $z_1 = q$ y $z_2 = \dot{q}$, por lo tanto se obtiene:

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= \tau_{qn} + \tau_{qd} - D_n^{-1} C_n z_2\end{aligned}\quad (30)$$

por lo que el controlador PD está dado por:

$$\tau_{qn} = K_1 e_1 + K_2 e_2 \quad (31)$$

donde $e_1 = q_r - q = z_{1r} - z_1$ y $e_2 = \dot{q}_r - \dot{q} = z_{2r} - z_2$, $q_r = z_{1r}$ es el vector de referencia, $\dot{q}_r = z_{2r}$ es la derivada del vector de referencia, y K_1 , K_2 son las respectivas constantes de ganancia proporcional y derivativa. Para poder obtener las leyes de control adaptativa y asegurarse que los errores $e_1 \rightarrow 0$ y $e_2 \rightarrow 0$ cuando el tiempo se aproxime a infinito es necesario definir la siguiente dinámica de error:

$$\begin{aligned}\dot{e}_1 &= \dot{z}_{1r} - \dot{z}_1 = \dot{z}_{1r} - z_2 \\ \dot{e}_2 &= \dot{z}_{2r} - \dot{z}_2 = \dot{z}_{2r} - \tau_{qn} - \tau_{qd} + D_n^{-1} C_n z_2\end{aligned}\quad (32)$$

sustituyendo τ_{qn} en (32) se obtiene:

$$\begin{aligned}\dot{e}_1 &= \dot{z}_{1r} - z_2 \\ \dot{e}_2 &= \dot{z}_{2r} - K_1 e_1 - K_2 e_2 - \tau_{qd} + D_n^{-1} C_n z_2\end{aligned}\quad (33)$$

Para poder encontrar las leyes de control adaptativas es necesario definir la siguiente función de Lyapunov:

$$V = \frac{1}{2} e_1^T e_1 + \frac{1}{2} e_2^T e_2 + \frac{1}{2} K_1^2 + \frac{1}{2} K_2^2 \quad (34)$$

derivando (34) se obtiene:

$$\begin{aligned}\dot{V} &= e_1^T [\dot{z}_{1r} - z_2] \\ &+ e_2^T [\dot{z}_{2r} - K_1 e_1 - K_2 e_2 - \tau_{qd} + D_n^{-1} C_n z_2] \\ &+ K_1 \dot{K}_1 + K_2 \dot{K}_2\end{aligned}\quad (35)$$

Sustituyendo las siguientes leyes adaptativas en (35)

$$\begin{aligned}\dot{K}_1 &= \frac{-1}{K_1} [K_1 e_1^T \dot{z}_{1r} - K_1 e_1^T z_2 - e_2^T K_1^2 e_1] \\ \dot{K}_2 &= \frac{-1}{K_2} [K_2 e_2^T \dot{z}_{2r} - e_2^T K_2^2 e_2 + K_2 e_2^T D_n^{-1} C_n z_2]\end{aligned}\quad (36)$$

se obtiene el siguiente resultado:

$$\dot{V} = -e_2^T \tau_{qd} \quad (37)$$

Analizando la expresión anterior, se debe tener en cuenta la relación que existe entre los vectores en (37), para una determinada tarea de rehabilitación el esfuerzo del paciente siempre irá en la dirección de la señal de referencia. Por otro lado τ_{qd} es el par articular del paciente y siempre tendrá la dirección del movimiento inducido por el exoesqueleto. Lo anterior además implica que el ángulo entre estos vectores (e_2^T y τ_{qd}) no superará los 90° .

Por tanto, $\dot{V} < 0$, con lo cual se asegura la estabilidad de lazo cerrado del exoesqueleto para el respectivo seguimiento de trayectorias.

5.3. Controlador en Modo Deslizante Adaptativo

El controlador en modo deslizante seleccionado para el seguimiento de trayectorias del exoesqueleto, es un controlador adaptativo en modo deslizante de segundo orden basado en las estrategias que se encuentran en İlyas Eker (2010); Abolvafaei and Ganjefar (2019) con sus adaptaciones. Para el diseño de esta estrategia de control se considera el sistema (29) con los torques virtuales τ_{qn} y τ_{qd} . Las variables de error y sus derivadas se definen como $e = q_r - q$, $\dot{e} = \dot{q}_r - \dot{q}$ y $\ddot{e} = \ddot{q}_r - \ddot{q}$ por lo que la superficie deslizante y su derivada se definen por:

$$s = K_1 e + K_2 \dot{e} \quad \dot{s} = K_1 \dot{e} + K_2 \ddot{e} \quad (38)$$

donde $K_1 > 0$ y $K_2 > 0$ son las constantes (mayores que cero) en modo deslizante. La segunda derivada del error está dada por:

$$\ddot{e} = \ddot{q}_r - \tau_{qn} - \tau_{qd} + D_n^{-1} C_n \dot{q} \quad (39)$$

La ley de control en modo deslizante está definida de la siguiente forma $\tau_{qn} = \tau_{eq} + \tau_{sw}$ donde τ_{eq} es la entrada de torque equivalente y τ_{sw} es la entrada de torque de conmutación İlyas Eker (2010). Definiendo a

$$\tau_{eq} = K_2^{-1} K_1 \dot{e} + D_n^{-1} C_n \dot{q} \quad \tau_{sw} = K_2^{-1} K_{sc} \text{sgn}(s) \quad (40)$$

donde K_{sc} es la ganancia de conmutación. Ahora sustituyendo (40) en \dot{s} se obtiene:

$$\dot{s} = K_2 \ddot{q}_r - K_2 \tau_{qd} - K_{sc} \text{sgn}(s) \quad (41)$$

Para obtener las leyes adaptativas del controlador en modo deslizante de segundo orden es necesario definir la siguiente función de Lyapunov:

$$V = \frac{1}{2} s^T s + \frac{\alpha}{2} K_1^2 + \frac{\beta}{2} K_2^2 \quad (42)$$

donde α y β son constantes de adaptación. Ahora, derivando (42) se obtiene:

$$\begin{aligned}\dot{V} &= s^T [K_2 \ddot{q}_r - K_2 \tau_{qd} - K_{sc} \text{sgn}(s)] \\ &+ \alpha K_1 \dot{K}_1 + \beta K_2 \dot{K}_2\end{aligned}\quad (43)$$

sustituyendo las siguientes leyes adaptativas en (43)

$$\begin{aligned}\dot{K}_1 &= \frac{1}{\alpha} K_1^{-1} s^T K_{sc} \text{sgn}(s) \\ \dot{K}_2 &= -\frac{1}{\beta} s^T \ddot{q}_r\end{aligned}\quad (44)$$

se obtiene

$$\dot{V} = -s^T K_2 \tau_{qd} \quad (45)$$

Analizando la expresión anterior, se debe tener en cuenta la relación que existe entre los vectores de (45). El valor de s , la cual representa la superficie deslizante está definida a partir de los valores de los errores $e = q_r - q$ y las constantes en modo deslizantes ($K_1 > 0$, $K_2 > 0$), por tanto el valor de e siempre

irá en la dirección de la señal de referencia. Además, τ_{qd} es el par articular del paciente y tiene la dirección del movimiento inducido por el exoesqueleto y por tanto la dirección de la señal de referencia. Lo anterior significa que el ángulo entre estos vectores (s y τ_{qd}) no superará los 90° .

Lo anterior implica que siempre $\dot{V} < 0$, por lo que la estabilidad en lazo cerrado para el exoesqueleto se asegura, así como también realizar un seguimiento de trayectoria preciso.

6. Discusión de los Resultados

En esta sección se discuten los resultados obtenidos a partir de un experimento numérico para el seguimiento de trayectorias del exoesqueleto, para lo cual se consideran los parámetros geométricos y masas de los eslabones mostrados en la Tabla 2, y las matrices de inercia que se muestran en (46). Tal como se explicó anteriormente, las trayectorias de los actuadores para sujetos sanos (variables de referencia), y las trayectorias que se transforman a torque de perturbación (sujetos enfermos), fueron facilitadas por la clínica de rehabilitación de la fundación ONCE de Madrid, España.

Tabla 2: Valores de los parámetros de ALICE

Parámetro	valor
l_1	0.115 m
l_2	0.160 m
l_3	0.400 m
l_4	0.400 m
m_1	1.18 kg
m_2	13.228 kg
m_3	5.594 kg

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \begin{bmatrix} 0,004977351 & 0 & 0 \\ 0 & 0,004835199 & 0 \\ 0 & 0 & 0,001191692 \end{bmatrix} \\
 I_2 &= \begin{bmatrix} 0,009337758 & 0 & 0 \\ 0 & 0,166430481 & 0 \\ 0 & 0 & 0,169652773 \end{bmatrix} \\
 I_3 &= \begin{bmatrix} 0,019400497 & 0 & 0 \\ 0 & 0,135966856 & 0 \\ 0 & 0 & 0,146655675 \end{bmatrix} \quad (46)
 \end{aligned}$$

6.1. Experimento Numérico de Prueba con Referencias de Entradas de Paso y Entradas Sigmoideas

En esta subsección se muestra la validación del sistema dinámico obtenido en este estudio, por medio del seguimiento de una trayectoria de paso y sigmoideal, para los ángulos de los actuadores $q_1 = \theta_1$, $q_2 = \theta_2$ y $q_3 = \theta_3$. El controlador que se utilizó en este experimento se muestra en la Figura 3, con un torque de perturbación igual a cero. De esta forma, se puede observar el comportamiento de la dinámica del exoesqueleto así como su velocidad de respuesta en lazo cerrado.

En la Figura 5, y Figura 6 se puede observar que con el controlador PD con las condiciones iniciales $q = [0, 0, 0]^T$

radianes y un valor de paso final de $q = [0, 1, -0, 31, -0, 32]^T$ *radianes* se alcanza el valor final deseado aproximadamente a los 20 s, mostrando que se obtiene un valor de error final igual a cero, aunque la velocidad de respuesta de la dinámica del exoesqueleto es considerablemente lenta. Por esta razón, es necesario diseñar controladores que aseguren una convergencia al valor final deseado en un tiempo corto. Controladores robustos y de estructura variable, así como controladores en modo deslizante, son recomendados para poder mejorar la respuesta en el tiempo de la dinámica del exoesqueleto.

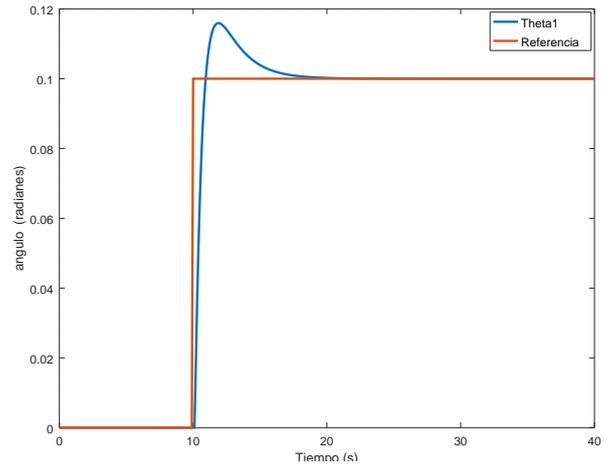


Figura 5: Seguimiento de una trayectoria de escalón para el actuador $q_1 = \theta_1$

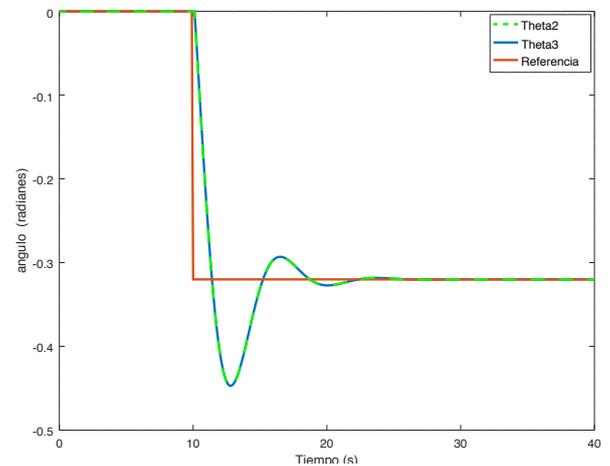


Figura 6: Seguimiento de una trayectoria de escalón para el actuador $q_2 = \theta_2$, y $q_3 = \theta_3$

En las Figura 7, y Figura 8 se realizó un experimento numérico usando una referencia del tipo sigmoideal bajo distintas conclusiones. Tal como se puede observar, el valor final deseado para cada uno de los actuadores se alcanzó satisfactoriamente con un valor bajo de sobrepulso. Tomando en cuenta que la función sigmoideal nos provee de una trayectoria más suave, a diferencia de la referencia de paso, se nota que el seguimiento de trayectoria es preciso.

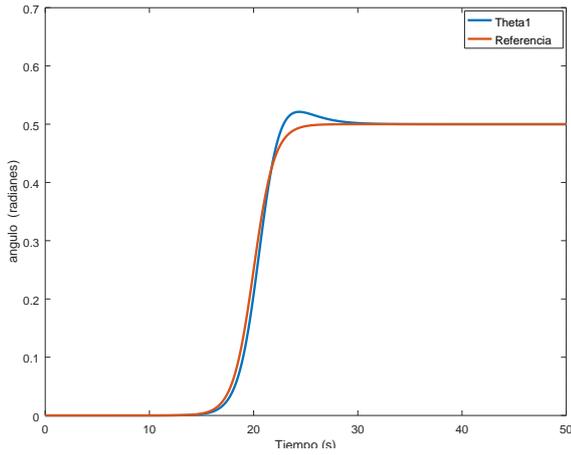


Figura 7: Seguimiento de una trayectoria sigmoideal para el actuador $q_1 = \theta_1$

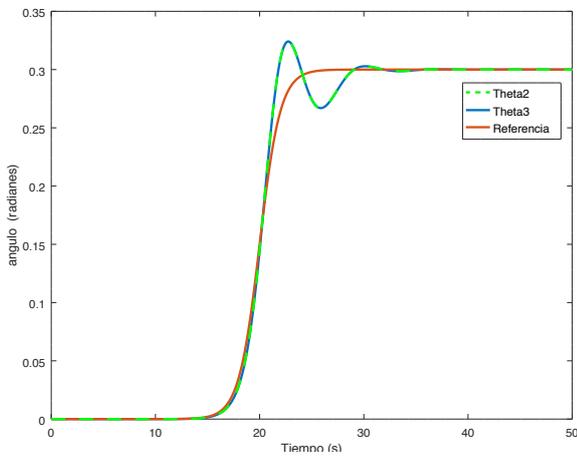


Figura 8: Seguimiento de una trayectoria sigmoideal para el actuador $q_2 = \theta_2$, y $q_3 = \theta_3$

6.2. Experimento Numérico con Datos de Marcha de Personas Sanas y con Esclerosis Múltiple

En esta subsección se realiza un experimento numérico con datos de sujetos sanos y datos de sujetos con esclerosis múltiple, los primeros se utilizan como señales de referencia, mientras que los segundos se convierten a torque de perturbación. Este experimento se realizó utilizando un controlador PD, un controlador PD adaptativo y un controlador en modo deslizante adaptativo de segundo orden tal como se explica en la Sección 5.

Tal como se muestra en la Figura 9, el seguimiento de la trayectoria del actuador $q_1 = \theta_1$, se realiza considerando que es la trayectoria que sigue un sujeto sano al caminar cuando hay una perturbación en el torque de los actuadores generada por el movimiento de los miembros inferiores de un sujeto enfermo. Se puede observar en la Figura 9 que el mejor seguimiento de trayectorias se logra con el controlador en modo deslizante adaptativo de segundo orden, esto se debe a la característica de rechazo a perturbaciones que posee este tipo de controlador en comparación con controladores PD no-adaptativos o adaptativos.

Por otra parte, la Figura 9 muestra que el error se aproxima más a cero cuando el tiempo llega aproximadamente a los 2 s,

la estrategia de control en modo deslizante provee una respuesta en el tiempo más rápida incluso de la que el exoesqueleto requiere.

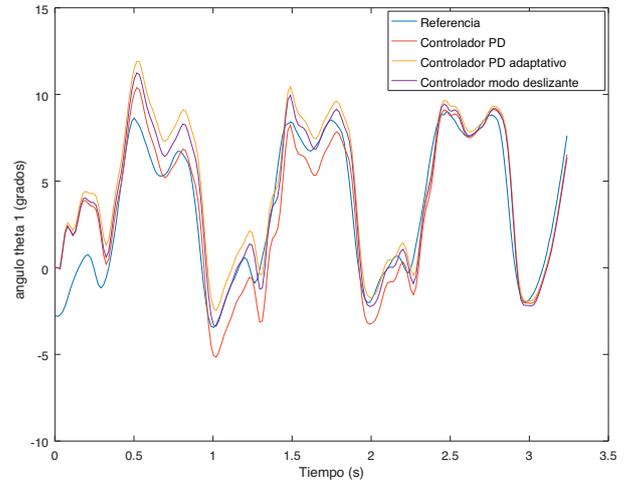


Figura 9: Trayectoria del actuador q_1 para las estrategias propuestas.

Similar a la figura anterior, en la Figura 10 se observa que el controlador en modo deslizante provee de un preciso seguimiento de la trayectoria para un sujeto sano al haber una perturbación de torque generada por un sujeto enfermo.

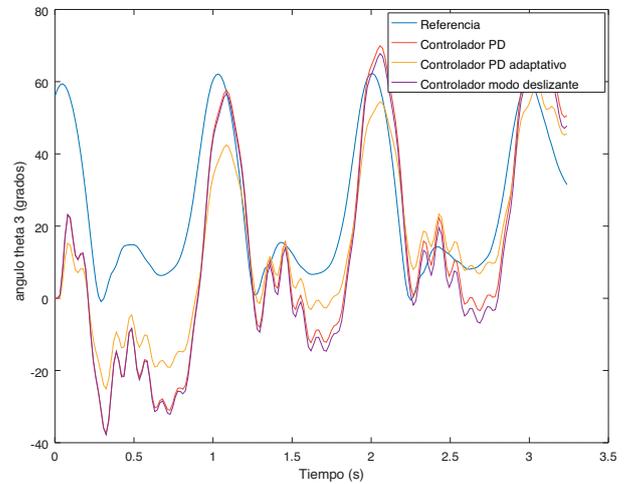


Figura 10: Trayectoria del actuador q_3 para las estrategias propuestas.

Además, se puede notar como la trayectoria del actuador $q_3 = \theta_3$ reduce el error cuando el tiempo se aproxima a los 2 s, comprobando la efectividad del controlador en modo deslizante en comparación con el controlador PD adaptativo.

En la Tabla 3 se puede observar la integral del error cuadrado, denominado ISE por sus siglas en inglés, para las tres estrategias de control y para las tres variables actuadas q_1 , q_2 y q_3 , el cual se denota por $ISE_i = \int_0^t e_i(\tau)^2 d\tau$ con $i = 1, 2, 3$, para las variables de error $e_i(t)$. Se puede notar en dicha tabla que el menor error se obtiene tanto por el controlador PD adaptativo como el controlador en modo deslizante adaptativo (MDA),

en específico, para las variables q_1 y q_3 tal como se comprobó en las figuras anteriores. En el caso de la variable q_2 , el menor error cuadrado se obtiene con el controlador PD adaptativo aunque con valores similares al controlador PD.

Tabla 3: Tabla Comparativa del error integral cuadrado, obtenido con las tres estrategias de control para q_1 , q_2 y q_3

Controlador	q_1	q_2	q_3
PD	0.44902	0.22961	0.30963
PD Adaptativo	0.43732	0.22961	0.26871
Controlador MDA	0.44191	0.40141	0.31648

Por último, en las figuras 11 y 12 se puede observar la evolución en el tiempo de las ganancias k_1 y k_2 para los controladores adaptativos PD y en modo deslizante respectivamente.

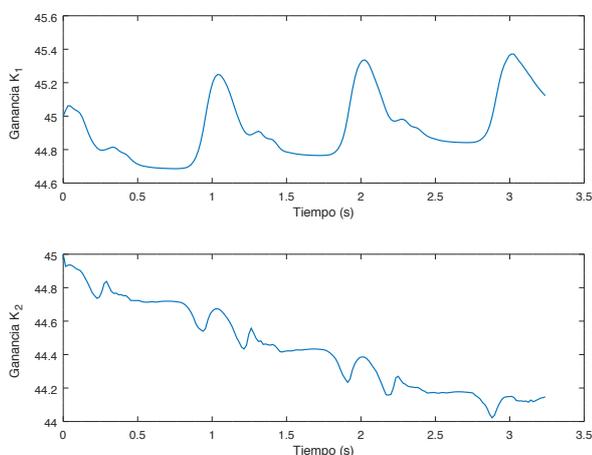


Figura 11: Ganancias adaptativas del controlador PD

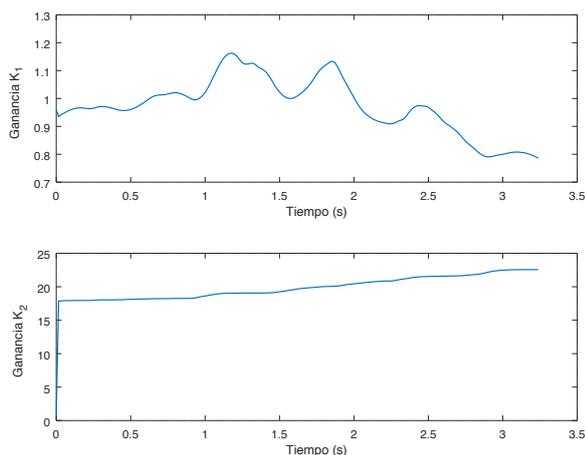


Figura 12: Ganancias del controlador adaptativo en modo deslizante

Hay que hacer notar de que las ganancias evolucionan hasta tener una cota superior y que no alcanzan valores elevados que pueden comprometer la robustez de dichas estrategias de control.

Finalmente, es importante resaltar que el propósito de este estudio es analizar que técnica de control es la más adecuada

para este dispositivo médico, considerando datos reales de pacientes con marcha patológica. Además, es importante aclarar que los resultados obtenidos a partir de este experimento son aceptables pero que se mejorarán en el futuro. Este experimento demostró que los controladores PD, PD adaptativo y en modo deslizante adaptativo proveen resultados buenos aunque no óptimos, esto se debe a que en el caso de los controladores PD al aumentar la ganancia se disminuye el error de seguimiento pero afecta en la robustez del sistema en lazo cerrado, en específico cuando hay una entrada de perturbación, algo que se mejorará con el controlador en modo deslizante de segundo orden adaptativo debido a su propiedad de rechazo a perturbaciones.

7. Conclusiones

En este artículo se presentó la solución a la cinemática del exoesqueleto de rehabilitación ALICE, utilizando cuaternios de Hamilton, se realizó un análisis dinámico por medio de la formulación de Euler-Lagrange y se expresó en variables de estado. Se evaluaron diferentes arquitecturas de control con el objetivo de proporcionar al paciente la ayuda necesaria para realizar una marcha sana, los datos de prueba se tomaron de la fundación ONCE en Madrid y corresponden a datos de marcha de pacientes sanos y con esclerosis múltiple. Se realizaron análisis con controladores PD, PD adaptativo y modo deslizante, de acuerdo a los resultados se obtienen resultados buenos, siendo PD adaptivo y el modo deslizante los que mejores resultados presentan.

Los resultados no son óptimos debido a que en el caso de los controladores PD al aumentar la ganancia se disminuye el error de seguimiento pero afecta en la robustez del sistema en lazo cerrado, en específico cuando hay una entrada de perturbación, por tanto, en los futuros experimentos se diseñará un controlador en modo deslizante de segundo orden de tipo adaptativo, con el cual se espera se obtengan resultados óptimos ya que presenta la propiedad de rechazo a perturbaciones.

Agradecimientos

Manuel Cardona agradece a la Fundación Carolina y a la Universidad Politécnica de Madrid, España, por el apoyo para la realización de esta investigación gracias a la beca de Doctorado otorgada en el marco del convenio con la Universidad Don Bosco, El Salvador.

Referencias

- Abolvafaei, M., Ganjefar, S., 2019. Maximum power extraction from a wind turbine using second-order fast terminal sliding mode control. *Renewable Energy* 139, 1437 – 1446.
- Abolvafaei, M., Ganjefar, S., 2019. Maximum power extraction from a wind turbine using second-order fast terminal sliding mode control. *Renewable Energy* 139, 1437 – 1446.
- Arnold, E. M., Ward, S. R., Lieber, R. L., Delp, S. L., 2010. A model of the lower limb for analysis of human movement.
- Cardona, M., Destarac, M. A., García, C. E., Nov 2017. Exoskeleton robots for rehabilitation: State of the art and future trends. In: 2017 IEEE 37th Central America and Panama Convention (CONCAPAN XXXVII). pp. 1–6. DOI: 10.1109/CONCAPAN.2017.8278480
- Cardona, M., García Cena, C. E., 2019a. Biomechanical analysis of the lower limb: A full-body musculoskeletal model for muscle-driven simulation. *IEEE Access* 7, 92709–92723. DOI: 10.1109/ACCESS.2019.2927515

- Cardona, M., García Cena, C. E., October 2019b. Musculoskeletal modeling as a tool for biomechanical analysis of normal and pathological gait. VIII Latin American Conference on Biomedical Engineering and XLII National Conference on Biomedical Engineering. CLAIB 2019. IFMBE Proceedings, Springer 75, 955–963.
- Chong, L., Jianfeng, S., Linhong, J., 2013. Lower limb rehabilitation robots: A review. In: World Congress on Medical Physics and Biomedical Engineering. IFMBE Proceedings. Vol. 39. p. 2042–2045.
- Eker, I., 2010. Second-order sliding mode control with experimental application. ISA Transactions 49 (3), 394 – 405.
- He, W., Li, Z., Dong, Y., Zhao, T., Jan 2019. Design and adaptive control for an upper limb robotic exoskeleton in presence of input saturation. IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems 30 (1), 97–108. DOI: 10.1109/TNNLS.2018.2828813
- Kapandji, A., 2010. Fisiología Articular, 6th Edition. Vol. 2. Editorial Panamericana, France.
- Maciejasz, P., Eschweiler, J., Gerlach-Hahn, K., et.al., 2014. “a survey on robotic devices for upper limb rehabilitation”.
- Proietti, T., Jarrassé, N., Roby-Brami, A., Morel, G., April 2015. Adaptive control of a robotic exoskeleton for neurorehabilitation. In: 2015 7th International IEEE/EMBS Conference on Neural Engineering (NER). pp. 803–806. DOI: 10.1109/NER.2015.7146745
- Reinkensmeyer, D. J., 2003. How to retrain movement after neurologic injury: a computational rationale for incorporating robot (or therapist) assistance. In: Proceedings of the 25th Annual International Conference of the IEEE Engineering in Medicine and Biology Society (IEEE Cat. No.03CH37439). Vol. 2. pp. 1479–1482 Vol.2.
- Reinkensmeyer, D. J., Aoyagi, D., Emken, J., Galvez, J., Ichinose W, W., etal, Aug-Sep 2006. Tools for understanding and optimizing robotic gait training. J Rehabil Res Dev 43 (5), 657–70.
- Riener, R., Guidali, M., Keller, U., Duschau-Wicke, A., et.al., 2014. “a survey on robotic devices for upper limb rehabilitation”.
- Serrano, F. E., Rossell, J. M., 2015. Complete kinematic analysis of the stewart-gough platform by unit quaternions. Mechanics and Control (Vol, 34, no. 4), 59–69.
- Spong, M., Hutchinson, S., Vidyasagar, M., 2006. Robot Modeling and Control. John Wiley and Sons.
- Wang, J.-Y., Liang, H.-Z., Sun, Z.-W., Wu, S.-N., Zhang, S.-J., 2013. Relative motion coupled control based on dual quaternion. Aerospace Science and Technology 25 (1), 102 – 113.
- Wu, Q., Chen, B., Wu, H., 2019. Rbfn-based adaptive backstepping sliding mode control of an upper-limb exoskeleton with dynamic uncertainties. IEEE Access 7, 134635–134646. DOI: 10.1109/ACCESS.2019.2941973
- Yakub, F., Khudzari, A., Mori, Y., March 2014. “recent trends for practical rehabilitation robotics, current challenges and the future”.
- Yang, Z., Zhu, Y., Yang, X., Zhang, Y., Aug 2009. Impedance control of exoskeleton suit based on adaptive rbf neural network. In: 2009 International Conference on Intelligent Human-Machine Systems and Cybernetics. Vol. 1. pp. 182–187. DOI: 10.1109/IHMSC.2009.54
- Zhou, W., Chen, W., Liu, H., Li, X., 2015. A new forward kinematic algorithm for a general stewart platform. Mechanism and Machine Theory 87, 177 – 190.
- Özgür, E., Mezouar, Y., 2016. Kinematic modeling and control of a robot arm using unit dual quaternions. Robotics and Autonomous Systems 77, 66 – 73.
- İlyas Eker, 2010. Second-order sliding mode control with experimental application. ISA Transactions 49 (3), 394 – 405.

Apéndice A. Operaciones con Cuaternios Unitarios

Para definir las operaciones con cuaternios unitarios es necesario definir los siguientes cuaternios:

$$\begin{aligned} a &= a_0 + a_1i + a_2j + a_3k \\ b &= b_0 + b_1i + b_2j + b_3k \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

donde la parte escalar del cuaternio unitario está definida por a_0 y la parte vectorial está definida por $\vec{a} = a_1i + a_2j + a_3k$. La suma y resta de cuaternios esta definida por:

$$a \pm b = [a_0 \pm b_0, \vec{a} \pm \vec{b}] \quad (\text{A.2})$$

La multiplicación de cuaternios está definida por Spong et al. (2006); Serrano and Rossell (2015):

$$\begin{aligned} c &= a \otimes b \\ c_0 &= a_0b_0 - \vec{a}^T \vec{b} \\ \vec{c} &= a_0\vec{b} + b_0\vec{a} + \vec{a} \times \vec{b} \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

donde el operador \times denota el producto cruz vectorial. Por último, el conjugado de un cuaternio unitario está dado por $\bar{a} = [a_0, -\vec{a}]$.

Apéndice B. Cuaternios Unitarios Para la Obtención de las Matrices de Rotación

En la Tabla B.4 se puede observar los parámetros de Denavit-Hartenberg los cuales se utilizan para obtener las matrices de rotación por cuaternios unitarios.

Tabla B.4: Parámetros de Denavit-Hartenberg para el exoesqueleto

Junta	θ	d	a	α
1	$\theta_1 + \frac{\pi}{2}$	l_2	0	$\frac{\pi}{2}$
2	θ_2	l_1	l_3	0
3	θ_3	0	l_4	0

A continuación se muestran los cuaternios unitarios para el eje 1:

$$\begin{aligned} z_1 &= -\sin(\theta_1) + \cos(\theta_1).k \\ s_1 &= l_2.k \\ a_1 &= 0 \\ x_1 &= i \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

Los cuaternios para el eje 2 están dados por:

$$\begin{aligned} z_2 &= \cos(\theta_2) + \sin(\theta_2).k \\ s_2 &= l_1.k \\ a_2 &= l_3.i \\ x_2 &= 1 \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

Por último los cuaternios para el eje 3 son:

$$\begin{aligned} z_3 &= \cos(\theta_3) + \sin(\theta_3).k \\ s_3 &= 0 \\ a_3 &= l_4.i \\ x_3 &= 1 \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$