INNODOCT 2020
Valencia, 11st-13th November 2020
DOI: http://dx.doi.org/10.4995/INN2020.2020.11796

Modelando matemáticamente el teorema de Bayes para investigar el origen de un incendio forestal

Francisco J. Boigues[a], Vicente D. Estruch[b] y Anna Vidal-Meló[c]
[a] fraboipl@mat.upv.es, [b] vdestruc@mat.upv.es y [c] avidal@mat.upv.es
Departamento de Matemática Aplicada de la Universitat Politècnica de València

Resumen

La modelización matemática (MMT) es un elemento básico para enseñar matemáticas en ingeniería. Las fases de la MMT serían traducir el problema real a un problema matemático, resolver el problema, interpretar el resultado en clave real y finalmente validarlo. La probabilidad bayesiana es uno de los tópicos que el futuro ingeniero encuentra en su formación. Desde ese enfoque la probabilidad tiene un carácter subjetivo, ya que irá cambiando en la medida que encontremos evidencia que la modifiquen. En esta comunicación mostraremos un proyecto donde el enfoque Bayesiano se utiliza, con la ayuda de MATLAB, para establecer criterios de búsqueda del origen de un incendio forestal. La traducción matemática pasa por identificar la zona quemada con una matriz inicial que fija las probabilidades a priori de que cada zona sea el origen del incendio. A partir de un método de búsqueda, con determinada eficacia de detectar el origen del incendio, y con la ayuda del teorema de Bayes, obtendremos las nuevas probabilidades del origen del incendio, probabilidades a posteriori. Se puede comprobar que si la investigación en una zona resulta negativa entonces la probabilidad a posteriori de que ese lugar sea el origen del incendio disminuye y, en cambio, la de las otras zonas no investigadas aumenta. También mostraremos los scripts de MATLAB que se han utilizado en todo el proceso de la MMT y sobre todo en la transformación de los números de las matrices en un mapa de colores que ayuda a visualizar la búsqueda del origen del incendio. Aunque los estudiantes que llevaron a cabo el proyecto mostraron una actitud positiva, también hay que resaltar que necesitan mayores bases teóricas para llevarlo a cabo y así como mejorar en el uso del MATLAB.

Palabras clave: *Modelización, matemática, incendios forestales, teorema, Bayes, scripts, Matlab.*

1. Introducción

Desde una perspectiva fenomenológica, la educación matemática ha de fomentar una enseñanza que muestre la aplicabilidad de las matemáticas en la vida cotidiana, aunque no todos vayan a ser profesionales de esta disciplina (Barquero, 2019; Ferrando, 2019). Y no solo trabajar la resolución de problemas sino también introducir conceptos ligados a un contexto (Takahashi, 2018). La modelización matemática (MMT) es un elemento básico para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas universitarias especialmente en la ingeniería. Consiste sobre todo en usar las matemáticas para resolver problemas contextualizados, a los que se suele referir como problemas "reales" (Pérez-Gómez, 2015).

En síntesis, el ciclo de la MMT (ver figura 1) recorre las siguientes etapas: traducir el problema real a un problema matemático, resolución, interpretación del resultado en clave real y finalmente la validación (Ortlieb, 2004).

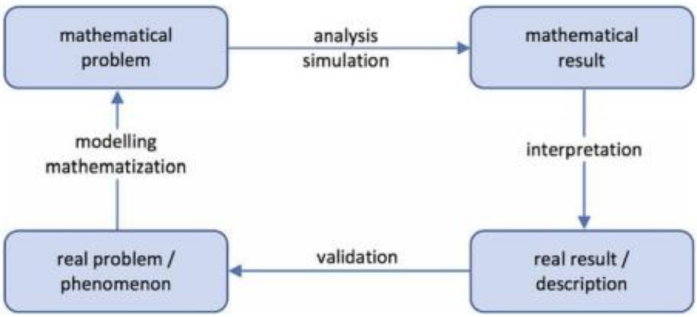

Fig. 1 Etapas de la modelización según Ortlieb, (2004, p.23)

En la MMT se suele recurrir a software matemático, que en nuestra experiencia ha sido MATLAB. Adquirir la competencia de resolver problemas no estandarizados, y que tengan que ver con su materia de estudio, constituye un plus de calidad en la formación del futuro ingeniero o científico.

La probabilidad bayesiana es uno de los tópicos que el futuro ingeniero encuentra en su formación (Boigues y Estruch, 2018). La probabilidad de un suceso puede tener un carácter subjetivo pues no siempre es posible aplicar la regla de Laplace (Erickson, 2017). La probabilidad inicial de un suceso A, $p(A)$, llamada "a priori", se irá modificando en la medida en que encontremos ciertas evidencias relacionadas con el suceso (Estruch y otros, 2019), obteniéndose la probabilidad "a posteriori", $p(A/B)$, a partir del teorema de Bayes como $p(A/B)= p(B/A)\cdot p(A)/p(B)$.

2. Desarrollo de la innovación

2.1. Participantes y contexto

La experiencia se realizó durante una sesión de prácticas informáticas en la asignatura de estadística y simulación que se cursaba en 2º del Grado de Ciencias Ambientales y de una duración de 2 horas. En esta experiencia participaron 21 estudiantes que ya habían estudiado las bases de la teoría de probabilidad y además desde el primer curso estaban familiarizados con el programa MATLAB. Durante unas sesiones de teoría de aula, previas a la práctica informática, se les explicó el tema de la probabilidad y el problema que tenían que resolver.

2.2. El problema a resolver

En una investigación para hallar el origen de un incendio forestal, se ha dividido la zona quemada en un mallado de 18X15, dando lugar a un total de *18X15* casillas o sectores que denotaremos como $S=(i,j),\ i=1,2,\ldots 18,\ j=1,2,\ldots 15,$ es decir, a través de su posición en el mallado total (ver Figura 2). Inicialmente, hay indicios para pensar que el origen del foco podrían ser los sectores $S1=(1,4)$, $S2=(5,8)$ y $S3=(15,12)$.

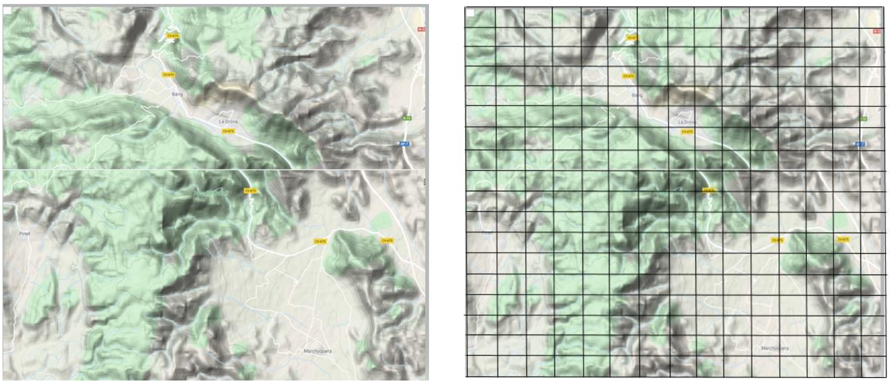

Fig. 2 Zona quemada

Cada sector esta formado por el punto y las casillas que lo rodean y con una probabilidad inicial del 18% de ser el origen del incendio distribuida uniformemente entre las casillas que la forman. Para el resto lógicamente un 46%, distribuido también de forma uniforme. Además, la eficacia del método de investigación que vamos a emplear inicialmente es del 60%, es decir, si la investigación se hiciera sobre un sector que haya sido el origen del incendio, el método de investigación lo detectaría en el 60% de las veces.

a) Halla una matriz P0 de orden 18x15 que recoja las probabilidades a priori de cada sector.
b) ¿Cuál sería la matriz de las probabilidades a posteriori P1 si se ha realizado una investigación en el sector S2 y el resultado ha sido negativo?
c) Volvemos al sector S2 investigamos en el punto con mayor probabilidad, utilizando en este caso un nuevo método de investigación cuya eficacia en la detección es del 75% y el resultado vuelve a ser negativo, ¿Cuál es la nueva matriz de probabilidades a posteriori?

2.3. La traducción matemática del problema

Evidentemente durante las sesiones de aula se les explica el teorema de Bayes y los problemas estándares típicos de la materia. Además, se les explicaba las bases teóricas que sustentan la solución matemática del problema (Barcena et al., 2017). En concreto, se comenzará realizando un mallado sobre el mapa de la zona que ha sufrido el incendio, obteniendo de esta forma una división en un conjunto de regiones A_{ij}.

A continuación, hay que introducir una serie de variables aleatorias que ayuden a la MMT:

- Llamaremos Y_{ij} a la variable aleatoria, con valores 1 ó 0, que indica si el origen del fuego ha tenido lugar en A_{ij} o no. De esta manera, si $Y_{ij}=1$ es que la región A_{ij} ha sido el origen del incendio mientras que si $Y_{ij}=0$, no lo ha sido.
- Por otro lado, supongamos que se utilice un determinado método para investigar el origen del incendio. Para ello introduciremos la variable aleatoria X, cuyos valores también serán de 1 ó 0, que indica la eficacia del método de investigación empleado puede detectar el origen del incendio. Por tanto, X=1 indicará que a través de la investigación se ha detectado el origen del incendio, mientras que X= 0 denotará que la investigación no ha detectado el origen del incendio.

Además, consideraremos las siguientes dos hipótesis:

- Si A_{ij} no ha sido el origen del incendio, entonces no es posible que la investigación diga lo contrario, es decir, $p(X=1/Y_{ij}=0)= 0$ y consecuentemente $p(X=0/Y_{ij}=0)=1$.
- Los métodos de detección del origen del incendio tienen un porcentaje, p, de eficacia, es decir, si el origen del incendio está en un determinado lugar entonces la probabilidad de que el método de investigación lo detecte es p, por tanto $p(X=1/Y_{ij}=1)= p$. Esto equivale a admitir que puede ocurrir un error en la detección, es decir, si realmente el origen ha sido en la región A_{ij}, el método de investigación puede fallar e indicar que no, es decir, $p(X=0/Y_{ij}=1)=1-p <1$.

Supongamos que la investigación no haya detectado indicios de que el foco del incendio haya sido $A_{ij,}$ es decir, que X=0. Entonces:

- Si q es la probabilidad a priori de que el origen del incendio haya sido en la región A_{ij}, es decir, $p(Y_{ij}=1)= q$, para obtener la probabilidad a posteriori de que A_{ij} sea el origen del incendio sabiendo que no ha sido detectado, aplicando Bayes se tendría

$$p(Y_{ij}=1/X=0)=\frac{(1-p)q}{1-pq}=q\frac{1-p}{1-pq} \qquad (1)$$

  siendo q la probabilidad a priori en A_{ij}. Por tanto la probabilidad a posteriori en esta región se obtiene multiplicando la probabilidad a priori por el factor *(1-p)/(1-p·q)*

- Supongamos que q_1 representa la probabilidad a priori de que el origen del incendio haya tenido lugar en una región A_{kl} diferente a A_{ij}, es decir, $p(Y_{kl}=1)= q_1$. Es este caso, la probabilidad a posteriori de que A_{kl} sí que sea el foco es

$$p(Y_{kl}=1/X=0)=\frac{q_1}{1-pq}=q_1\frac{1}{1-pq} \qquad (2)$$

  siendo q_1 la probabilidad a priori en A_{kl}. Por tanto la probabilidad a posteriori en esta región se obtiene multiplicando la probabilidad a priori por el factor *1/(1-p·q)*

Es relativamente fácil comprobar que si en determinado lugar la investigación resulta negativa la probabilidad a posteriori de que ese lugar sea el origen del incendio disminuye y, en cambio, la de las otras zonas no investigadas aumenta.

2.4. La resolución del problema con MATLAB

Ya se ha comentado que el problema tuvo que resolverse en una sesión de práctica informática cuya duración fue de dos horas. La labor del profesor fue presentar otra vez el problema e ir orientando el trabajo de los estudiantes, señalando estrategias, resolviendo dudas, recordando conocimientos, etc. Por ejemplo, el determinar la probabilidad a priori de cada posición fue resuelta por muy pocos (ver Tabla 1), y fue necesario bastantes indicaciones y resolver algún sector por el profesor para que la mayoría de estudiantes siguieran con el proyecto.

Tabla 1. Asignación de las probabilidades a priori

	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7	C8	C9	C10	C11	C12	C13	C14	C15
F1			p1	p1	p1										
F2			p1	p1	p1										
F3															
F4						p2	p2	p2							
F5						p2	p2	p2							
F6						p2	p2	p2							
…															
F14											p3	p3	p3		
F15											p3	p3	p3		
F16											p3	p3	p3		
F17															
F18															
Zona 1: 6 sectores a distribuir uniformemente p=18/100. Cada sector con probabilidad inicial p1= 18/600=3/100.															
Zona 2: 9·sectores a distribuir uniformemente p=18/100. Cada sector con probabilidad inicial p2=18/900=2/100 .															
Zona 3: 9 sectores a distribuir uniformemente p= 18/100. Cada sector con probabilidad inicial p3=18/900=2/100.															
Restantes sectores: Hay 18x15 –(6+9+9)= 270-24=246 sectores para repartir el 46%, por tanto p4=0'46/246= 23/12300															

En la construcción de la matriz con MATLAB, todos los estudiantes necesitaron ayuda del profesor, al menos en las primeras líneas (ver tabla 2).

Tabla 2. Comandos MATLAB de la matriz a priori y mapa de color

```
>> P0= 23/12300*ones(18,15);
>> P0(1:2,3:5)= 3/100;  % añadimos las probabilidades del sector S1
>> P0(4:6,7:9)=2/100;  % añadimos las probabilidades al sector S2
>> P0(14:16, 11:13)= 2/100; % añadimos las probabilidades al sector S3
```

A continuación, en la tabla 3 mostraremos un script de MATLAB para transformar una matriz numérica en un mapa de colores

Tabla 3. Comandos MATLAB para transformar una matriz en un mapa de colores

```
>> %Invertir filas
>> for i=1:18,  for j=1:15, P0I(i,j)=P0(19-i,j); end, end
>> P0A=P0I;
>> P0A(19,:)=0.031; P0A(:,16)=0; %para que haya contraste de colores
>> pcolor(P0A), colorbar %mapa coloreado
```

En la Figura 4 puede verse el mapa de color correspondiente a la matriz P0.

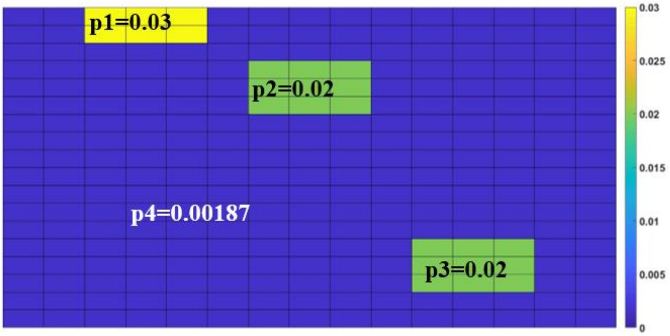

Fig. 4 Mapa de color correspondiente a las probabilidades a priori

Respecto al cálculo de las probabilidades a posteriori(ver tabla 4) hubo que aclararles a todos que la ecuación (1) era la nueva probabilidad de la zona investigada y que la ecuación (2) era la nueva probabilidad de las restantes zonas. Después hubo que orientarles diciendo que primero modificasen las probabilidades de la zona no investigada y por último la zona investigada.

Tabla 4. Comandos MATLAB de la matriz a posteriori

```
>> p=0.6;  % p es la eficacia del método de investigación
>> q= 2/100;  % q=P0(5,8) probabilidad a priori del punto investigado
>> P1=  (1/(1-p*q))*P0;
>> P1(5,8)=q*( (1-p)/(1-p*q));
```

En la Figura 5 puede verse el mapa de color correspondiente a la matriz P1.

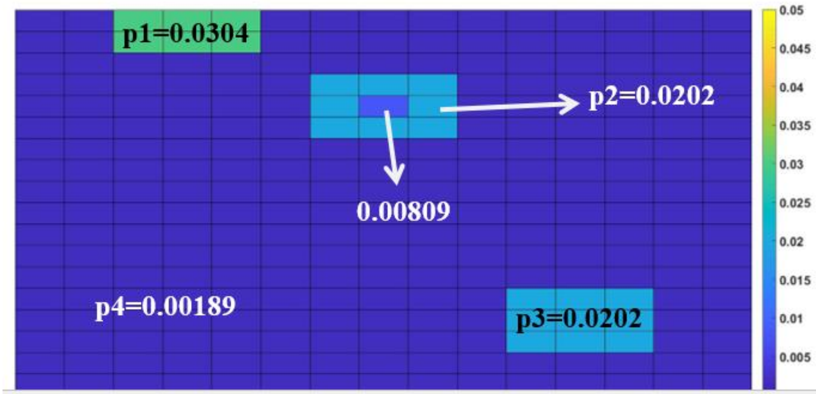

Fig. 5 Mapa de color correspondiente a las probabilidades a posterior

Se terminó el apartado b) pidiendo que analicen lo ocurrido con la probabilidad a posteriori, tanto en la zona investigada como en las otras zonas respecto a la priori. Se logró que un mayor número de estudiantes realizaran correctamente el apartado c, pero sigo habiendo estudiantes con serias dificultades ya que realmente no entendieron bien el problema.

3. Conclusiones

El proyecto ha servido para plantearnos algunas cuestiones fundamentales sobre la enseñanza de las matemáticas en las ingenierías: ¿Cuál es el papel de la teoría en la formación matemática del ingeniero? En el contexto actual de los planes de estudio, ¿Es viable abordar desarrollos matemáticos con cierta carga teórica?

Lo que quedado más patente es la necesidad de impulsar la transversalidad del conocimiento. La resolución de proyectos parecidos al presentado y siguiendo el ciclo de un enfoque a través de la MMT ayudará a romper la visión de conocimiento estancos e impulsar una enseñanza más centrada en el desarrollo de competencias.

Agradecimiento

Los autores quieren agradecer la ayuda económica y el apoyo institucional recibidos de la Universitat Politècnica de València a través del proyecto PIME 19-20/190. "Competencias transversales en asignaturas físico-matemáticas consideradas punto de control: desarrollo de actividades, recoger evidencias y evaluar sin morir en el intento"

Referencias

Barcena, M.J., Garin M. A., Martin A., Tusell F. y Unzueta A. (2017). Un simulador para asistir en la enseñanza del teorema de Bayes. Vicente Botti y Miguel A. Fernández (eds*.). INRED III Congreso de Innovación Educativa y Docencia en Red*. Universitat Politècnica de València.15-23.

Barquero, B. (2019). Una perspectiva internacional sobre la enseñanza y aprendizaje de la modelización matemática. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y Á. Alsina (eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII* .Valladolid: SEIEM.,19-22.

Boigues, F.J. y Estruch, V.D. (2018). Un enfoque Bayesiano de la Probabilidad. *Artículo docente*. en Ruinet de la Universitat Politècnica de València. http://hdl.handle.net/10251/105097 [Consulta: 15 de marzo de 2020]

Erickson, T. (2017). Beginning Bayes. *Teaching Statistics* 39(1), p. 30-35.

Estruch, V.D., Boigues, F.J., Vidal, A y Pastor J.(2019). Redes bayesianas y diagnóstico médico. Una forma diferente de aprender probabilidades condicionadas. *Modelling in Science Education and Learning* ,12 (2), p.59-75.

Ferrando, I. (2019). Avances en las investigaciones en España sobre el uso de la modelización en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas". En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y Á. Alsina (eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII* .Valladolid: SEIEM, pp. 43-64

Ortlieb, C. P. (2004). Mathematische Modelle und Naturerkenntnis. *Mathematica didactica*, 27(V.1), pp. 23–40.

Pérez-Gómez, R. (2015). Resolución de problemas y modelización matemática para la clase. *Revista UNO,* 69, 7-21.

Takahashi, A. (2018). Designing Curriculum Material That Facilitates Teaching Mathematics Through Problem Solving. Paper presented at 14th Annual Conference of the International Society for Design and Development in Education. May 28 - 31, 2018, National University of Ireland, Galway. https://drive.google.com/file/d/1peUdu7qfJTMkvkcxSa-9fppZSLxqI_22/view. [Consulta: 10 de marzo de 2020]