



UNIVERSITAT  
POLITÈCNICA  
DE VALÈNCIA



# DISEÑO Y ANÁLISIS DINÁMICO DE UN SISTEMA DE TRANSMISIÓN DE MÍNIMO PESO PARA UNA BICICLETA DE COMPETICIÓN

**TRABAJO DE FIN DE GRADO**

GRADO EN INGENIERÍA MECÁNICA

CURSO 2020/2021

**Autor:** Álvaro del Río Monleón

**Tutora:** Ana Vercher Martínez

*Valencia, junio de 2021*

## AGRADECIMIENTOS

*A mi familia, en especial a mi hermano Javier. Un especial agradecimiento a mi tutora Ana Vercher y a todas las personas que han evocado en mí una particular pasión por la ingeniería y la técnica.*

## RESUMEN

En el ciclismo de competición es esencial el uso de componentes que permitan alcanzar altas velocidades minimizando el peso del conjunto. La transmisión es una parte fundamental del vehículo en este aspecto. En este Trabajo Fin de Grado se tratará el diseño y análisis dinámico mediante un enfoque analítico de un sistema de transmisión de una bicicleta de carretera con el mínimo peso posible. Asimismo, se realizará un análisis del comportamiento mecánico de la biela para el sistema diseñado mediante el Método de los Elementos Finitos.

En primer lugar, se determinarán las acciones que actúan sobre el vehículo en condiciones de carrera de fondo. Se optimizarán las relaciones de transmisión con el propósito de alcanzar la mayor velocidad en régimen estacionario considerando las expresiones de la fuerza generalizada motriz y resistente.

Continuando con el aspecto dinámico del problema, se determinará la inercia generalizada, siendo posible de este modo obtener la expresión de la ecuación del movimiento de la bicicleta. Esta expresión puede ser empleada por otros autores con el fin de validar sus diseños, e incluso de cuantificar el rendimiento de un ciclista, desde el punto de vista biomecánico.

Por último, con este objetivo de reducir el peso del conjunto, se modelará la biela para el sistema de transmisión diseñado. En este punto, se considerará como material de fabricación del componente un laminado cruzado y simétrico de matriz polimérica reforzada con fibra de carbono unidireccional. Se ejecutará un análisis resistente y se obtendrán resultados mediante el programa *ANSYS Mechanical APDL*. Las partes objeto de diseño cumplirán con la normativa de aplicación.

## PALABRAS CLAVE

Dinámica de la bicicleta de carreras; Análisis del movimiento; Sistema de transmisión de una bicicleta; Relación de transmisión; Materiales compuestos; Método de los Elementos Finitos.

## RESUM

*En ciclisme competitiu és essencial l'ús de components que permeten aconseguir grans velocitats, mitjançant la minimització del pes del conjunt. La transmissió és una part fonamental del vehicle en aquest sentit. Aquest Treball Final de Grau abordarà el disseny i l'anàlisi dinàmica a través d'un enfocament analític d'un sistema de transmissió d'una bicicleta de carretera amb el mínim pes possible. Així mateix, es realitzarà una anàlisi del comportament mecànic de la biela per al sistema dissenyat mitjançant el Mètode d'Elements Finites.*

*En primer lloc, es determinaran les accions que actuen sobre el vehicle en condicions de carrera de fons. S'optimitzaran les relacions de transmissió per aconseguir la màxima velocitat en règim estacionari considerant les expressions de la força generalitzada motriu i resistent.*

*Continuant amb l'aspecte dinàmic del problema, es determinarà la inèrcia generalitzada, sent possible d'aquesta manera obtenir l'expressió de l'equació del moviment de la bicicleta. Aquesta expressió pot ser utilitzada per altres autors per validar els seus dissenys, i fins i tot, per quantificar el rendiment d'un ciclista des del punt de vista biomecànic.*

*Per últim, amb aquest objectiu de reduir el pes del conjunt, es modelitzarà la biela per a la transmissió dissenyada. En aquest punt, es considerarà com a material de fabricació del component un laminat creuat y simètric de matriu polimèrica reforçada amb fibra de carboni unidireccional. S'executarà una anàlisi resistent i s'obtidran resultats utilitzant el programa ANSYS Mechanical APDL. Les parts subjectes a disseny compliran amb la normativa aplicable.*

## PARAULES CLAU

*Dinàmica de la bicicleta de carreres; Anàlisi del moviment; Sistema de transmissió d'una bicicleta; Relació de transmissió; Materials compostos; Mètode d'Elements Finites.*

## ABSTRACT

*In competitive cycling it is essential to use components which allow high speeds. These speeds are achieved by minimizing the weight of the set. The drivetrain is a fundamental part of the vehicle in this regard. This Final Project will address the design and dynamical analysis of a road bicycle transmission system with a minimum weight, using an analytical approach. Furthermore, an analysis of the mechanical behavior of the crank will be carried out for the designed system using the Finite Elements Method.*

*First, the actions on the vehicle under long race conditions will be determined. The gear ratios will be optimized to achieve the highest speed in stationary regime, considering for this purpose the expressions of the generalized driving and resistant force.*

*Continuing with the dynamical aspect of the problem, the generalized inertia will be determined. By this way it will be possible to obtain the equation of motion of the bicycle. This expression could be used by other authors to validate their designs, and even to quantify the performance of a cyclist from a biomechanical point of view.*

*Finally, with the objective of reducing the weight of the set, the crank of the designed drivetrain will be modeled. At this point a symmetrical cross-laminate, comprised of unidirectional carbon fiber reinforced polymer matrix, will be considered as the component's manufacturing material. Results from a static analysis will be obtained using the tool ANSYS Mechanical APDL. The parts subject to design will comply with the applicable regulations in this matter.*

## KEYWORDS

*Racing bicycle dynamics; Movement analysis; Bicycle drivetrain; Gear ratio; Composite materials; Finite Elements Method.*

# ÍNDICE

---

DOCUMENTO Nº1: MEMORIA	11
------------------------	----

---

<b>OBJETIVO Y MOTIVACIÓN</b>	<b>12</b>
<b>1. INTRODUCCIÓN Y ANTECEDENTES</b>	<b>12</b>
Sistema de Transmisión por Cadena	13
Bielas	13
Platos	14
Cadena	14
Cassette y piñones	15
Buje	16
Desviador trasero	17
Desviador delantero	17
Caja del pedalier	17
Sistema de Transmisión por Correa	17
<b>2. BIOMECÁNICA</b>	<b>19</b>
Factor Q	19
Longitud de Biela	19
Relación Potencia Media – Tiempo de Esfuerzo	21
Relación Potencia Media – Cadencia	22
Ciclo de Pedaleo	23
<b>3. EL ESTADO DEL ARTE EN LA TRANSMISIÓN</b>	<b>24</b>
Platos Ovalados / Platos Excéntricos	24
Bielas Huecas	25
Transmisión Monoplato	26
<i>CeramicSpeed Driven</i>	28
<i>Pinion Drive</i>	29
<b>4. CONCEPTOS PREVIOS: CINEMÁTICA Y DINÁMICA</b>	<b>30</b>
Teorema de las Fuerzas Vivas	30
Aceleración de la Coordenada (Ecuación de Eksergian)	31
Velocidad de un Punto	31
Segunda Ley de Newton y Principio de d’Alembert	31
Método de Potencias Virtuales	31
Fuerzas sobre el Conjunto Vehículo-Ciclista	32
Fuerzas aplicadas en el pedalier	33

Fuerzas de resistencia a la rodadura	34
Fuerza peso	35
Fuerza aerodinámica de arrastre	35
<b>5. CÁLCULO DE LAS RELACIONES DE TRANSMISIÓN</b>	<b>37</b>
Determinación de la Fuerza Generalizada	38
Fuerzas aplicadas en el pedalier	38
Fuerzas de resistencia a la rodadura, delantera y trasera	40
Fuerza peso	42
Fuerza aerodinámica de arrastre	43
Ajuste del Par Motriz	45
Aplicación del Teorema de las Fuerzas Vivas	50
<b>6. EXPRESIÓN DE LA ECUACIÓN DEL MOVIMIENTO</b>	<b>55</b>
Determinación de la Inercia Generalizada	55
Términos del pedalier	56
Términos de la cadena	58
Términos de las ruedas y el cassette	63
Términos del resto de los elementos	64
Suma de todos los términos	65
Obtención mediante la Ecuación de Eksergian	65
Aplicación de la Ecuación del Movimiento al Sistema Modelado	66
<b>7. INCORPORACIÓN DE LAS RELACIONES DE TRANSMISIÓN Y OPTIMIZACIÓN CON COMPOSITOS, DE UN GRUPO PEDALIER MARCA SRAM</b>	<b>69</b>
Cálculo del Número de Dientes de los Piñones a Incorporar	70
Aplicación y Ensayo de Materiales Compuestos en las Bielas	71
Resistencia estática según la norma UNE EN 4210-8	71
Definición del laminado de las bielas	72
Definición del material de la lámina y sus constantes elásticas	74
Modelo de elementos finitos en <i>ANSYS Mechanical APDL</i>	76
Resultados del análisis por elementos finitos	79
<b>8. CONCLUSIONES Y PROPUESTAS</b>	<b>84</b>
<hr/>	
<b>DOCUMENTO Nº2: PLANOS DE LOS COMPONENTES PROYECTADOS</b>	<b>85</b>
<hr/>	
<b>DOCUMENTO Nº3: PLIEGO DE CONDICIONES</b>	<b>87</b>
<hr/>	
<b>INTRODUCCIÓN</b>	<b>88</b>

<b>OBJETO DEL PLIEGO DE CONDICIONES</b>	<b>88</b>
<b>1. CONDICIONES DE CÁLCULO</b>	<b>88</b>
1.1 Condiciones de Uso del Método Propuesto	88
1.2 Condiciones de Cálculo por Ordenador	88
<b>2. CONDICIONES TÉCNICAS</b>	<b>89</b>
2.1 Condiciones Técnicas de la Transmisión Diseñada	89

---

<b>DOCUMENTO Nº4: PRESUPUESTO</b>	<b>90</b>
-----------------------------------	-----------

---

<b>1. PRESUPUESTO PARCIAL: HONORARIOS DE INGENIERÍA</b>	<b>91</b>
<b>2. PRESUPUESTO PARCIAL: EQUIPO DE SOFTWARE</b>	<b>91</b>
<b>3. PRESUPUESTO PARCIAL: EQUIPO DE HARDWARE</b>	<b>92</b>
<b>PRESUPUESTO DE EJECUCIÓN MATERIAL (PEM)</b>	<b>92</b>
<b>PRESUPUESTO DE EJECUCIÓN POR CONTRATA (PEC)</b>	<b>92</b>

---

<b>BIBLIOGRAFÍA</b>	<b>93</b>
---------------------	-----------

---

## ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1. Transmisión por cadena (sin incluir pedales).	13
Figura 2. Representación del engrane de una cadena.	15
Figura 3. Cassette junto a la maza.	16
Figura 4. Ejemplo de ciclos de histéresis elástica en un material polimérico.	18
Figura 5. Transmisión por correa.	18
Figura 6. Longitudes medias de biela en bicicletas de carretera.	20
Figura 7. Potencia media por kg de peso en función del tiempo de esfuerzo.	21
Figura 8. Potencia media en porcentaje del máximo, en función de la cadencia.	22
Figura 9. Ensayo del ciclo de pedaleo, con las componentes de la fuerza.	23
Figura 10. Fuerza efectiva según ángulo en una sola biela.	23
Figura 11. Detalle de los platos ovalados de una bicicleta del equipo <i>Team Sky</i> .	25
Figura 12. Diagrama de una biela hueca del fabricante <i>Shimano</i> .	26
Figura 13. Detalle de una transmisión con monoplato en una bicicleta de carretera.	27
Figura 14. Transmisión <i>CeramicSpeed Driven</i> .	28
Figura 15. Transmisión <i>Pinion Drive</i> .	29
Figura 16. Fuerzas consideradas sobre el vehículo y ciclista.	33
Figura 17. Ilustración de la distribución de presiones en un neumático.	34
Figura 18. Ensayo en túnel de viento para cuantificar el producto $S \cdot Cx$ .	36
Figura 19. Ilustración de diferentes velocidades en el sistema.	37
Figura 20. Diagrama de fuerzas en el pedalier.	38
Figura 21. Diagrama de fuerzas en una rueda.	40
Figura 22. Ejemplo de pesos equilibrados en los componentes rotativos.	42
Figura 23. Valores de $S \cdot Cx$ para las diferentes posiciones y sujetos.	44
Figura 24. Ensayo del ciclo de pedaleo, par según carga de trabajo.	45
Figura 25. Representación por puntos del par en cada una de las bielas.	46
Figura 26. Representación por puntos del par total.	46
Figura 27. Comparación de la función elegida y un polinomio de grado 10.	47
Figura 28. Ajuste de la potencia media con la cadencia.	48
Figura 29. Velocidad en régimen permanente según relación de transmisión.	52
Figura 30. Trabajo de la fuerza generalizada en un ciclo, según cadencia.	53
Figura 31. Valores de los términos resistentes con la velocidad.	54
Figura 32. Diagrama de masas en el pedalier.	56
Figura 33. Diagrama de las masas en la cadena	59
Figura 34. Cálculo de la energía cinética de la cadena en el tramo 3.	60

Figura 35. Cálculo de la energía cinética de la cadena en el tramo 4.	62
Figura 36. Diagrama de masas en la rueda trasera.	63
Figura 37. Variación de la velocidad con el tiempo en régimen transitorio.	67
Figura 38. Progresión de marchas en el tiempo.	68
Figura 39. Pedalier <i>SRAM Force</i> , modelo en <i>SolidWorks</i> .	69
Figura 40. Sistema de referencia del material.	72
Figura 41. Sistema de referencia en un material transversalmente isótropo.	72
Figura 42. Propiedades de la fibra de carbono AS4.	74
Figura 43. Propiedades de la resina epoxi curada.	74
Figura 44. Definición de las propiedades del material.	76
Figura 45. Definición del laminado con los elementos <i>Shell</i> .	76
Figura 46. Mallado del cuerpo de la biela.	77
Figura 47. Región rígida y <i>Keypoint</i> de aplicación de las cargas.	77
Figura 48. Empotramiento de las áreas en la junta con el resto del pedalier.	78
Figura 49. Modelo de elementos finitos.	78
Figura 50. Geometría deformada.	79
Figura 51. Vista trasera de la geometría deformada.	79
Figura 52. Tensiones en el eje x global de la parte superior de la tercera capa.	80
Figura 53. Tensiones en el eje x global de la parte superior de la primera capa.	80
Figura 54. Tensiones en el eje x global de la parte superior de la capa 2.	81
Figura 55. Tensiones en el eje y global de la parte superior de la segunda capa.	81
Figura 56. Tensión tangencial xy global para la parte superior de la capa 3.	82
Figura 57. Valor del criterio de fallo de Tsai-Wu	83



UNIVERSITAT  
POLITÈCNICA  
DE VALÈNCIA



---

# DOCUMENTO Nº1: MEMORIA

---

# OBJETIVO Y MOTIVACIÓN

El objetivo de este trabajo es el diseño de un sistema de mínimo peso que permita la transmisión de potencia en una bicicleta de carretera dirigida a la competición.

Se hará un análisis dinámico para conocer qué relaciones de transmisión debe incorporar, obteniendo más tarde la ecuación del movimiento de la bicicleta al completo. De esta manera, se podrá estimar el comportamiento del vehículo con el sistema. Tras esto, se escogerá una transmisión existente del mercado para aplicar en ella lo calculado. Además, se propondrá una mejora en el diseño de la biela con la aplicación de materiales compuestos. Se ensayará para ello su resistencia según la normativa UNE a través del método de los elementos finitos, analizando un criterio de fallo y su nivel tensional.

Para el cálculo se tomarán como referencia las directrices de la *Union Cycliste Internationale* (UCI), el organismo que establece la normativa de las competiciones en el ciclismo actual.

La motivación principal de este trabajo es ayudar a mejorar la metodología en el diseño de mecanismos de este tipo, además de, personalmente, poder obtener el título de Grado en Ingeniería Mecánica.

## 1. INTRODUCCIÓN Y ANTECEDENTES

El sistema de transmisión es esencial para el funcionamiento de la bicicleta, y en general, de cualquier vehículo o máquina: permite que la potencia desarrollada, en este caso por el ciclista, se distribuya al conjunto de los elementos móviles, para así generar movimiento en el vehículo.

Las transmisiones se encuentran presentes en las bicicletas actuales esencialmente de dos formas distintas: Las transmisiones basadas en cadenas y las basadas en correas de distribución. Cabe destacar que también existen otros tipos de transmisión mucho menos habituales, como las de cardán.

En las bicicletas actuales con transmisión por cadena existen una serie de mecanismos que dan la capacidad al ciclista de variar su geometría de forma manual, con la incorporación de distintas marchas que cambian la relación de transmisión del sistema.

Cabe notar que, si se quiere diseñar un sistema óptimo para todas las condiciones, es necesario que se pueda adaptar la potencia generada por el ciclista para vencer las fuerzas externas, que oponen resistencia al movimiento del vehículo. Esto hace imprescindible que, al menos, las bicicletas de competición incorporen un cambio de marchas para variar esta relación de transmisión.

No se considerará para este trabajo, por tanto, una transmisión por correa, ya que por lo general estos sistemas son incapaces de variar la relación de transmisión (exceptuando el sistema CVT [1] y *Pinion*). Aunque el sistema se dé en muchas bicicletas de calle, se hace muy complicado poderlo incorporar a una bicicleta de carretera de competición.

## Sistema de Transmisión por Cadena

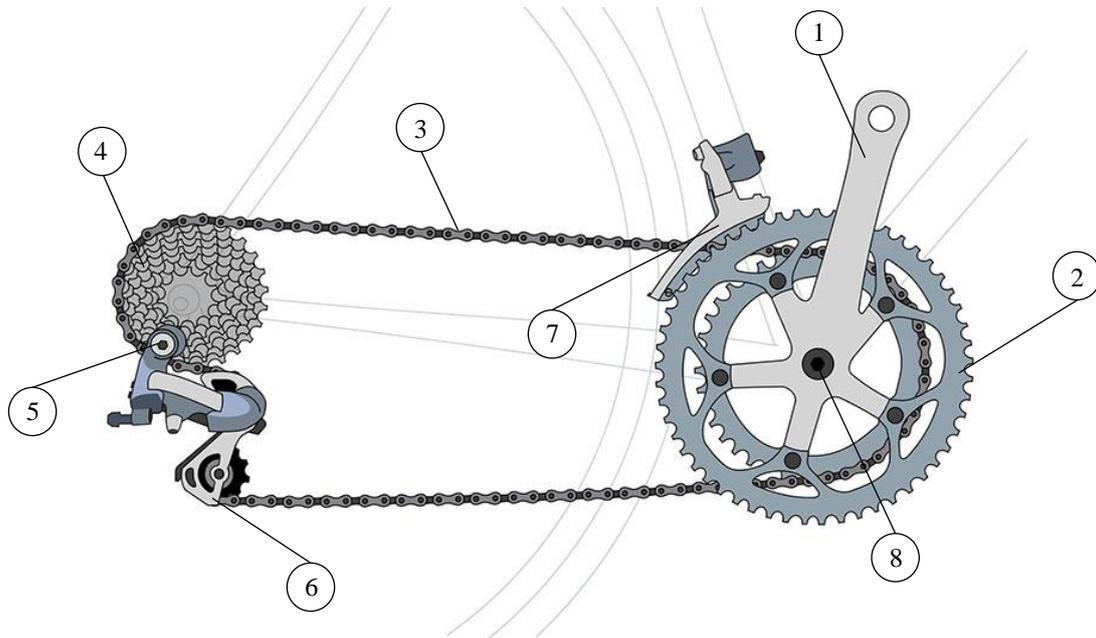


Figura 1. Transmisión por cadena (sin incluir pedales).

*Imagen obtenida de: mobikers.com.br*

Las transmisiones basadas en cadenas son, en comparación con las que incorporan correas, más pesadas y contienen más elementos, también tienden a encajarse de vez en cuando si no están bien tensadas. Requieren de lubricación para su funcionamiento correcto. Son las más usadas en todo tipo de bicicletas, especialmente en las de competición, debido a su gran eficiencia energética (aproximadamente convierten el 98 % de la potencia) y robustez. Estos sistemas no permiten desalineamiento entre ejes.

A continuación, se describe el funcionamiento de cada uno de los elementos que componen la transmisión por cadena, presentes en una bicicleta de carretera para competición.

### 1. Bielas

Permiten generar un par en el sistema debido a la fuerza que ejerce el ciclista en los pedales, elementos que sirven para el apoyo de los pies y se sitúan en el extremo opuesto a la unión de las bielas con los platos.

Debido a que los platos suelen ir aligerados, este enganche con las bielas se realiza de forma habitual mediante una “unión en araña”, nombre que toma de la forma que adopta. La longitud de la biela influirá, no solo en los esfuerzos que se producen en ella, sino también en la fuerza que soportarán los platos para transmitir el par.

Suelen estar fabricadas en metales como acero o aluminio en bicicletas de todo tipo, incluyendo las de competición, pero como se verá más tarde, es posible su fabricación con materiales compuestos, más ligeros y actuales.

## 2. Platos

Se encargan de transmitir el par generado a los piñones, a través de la cadena. Normalmente, en una bicicleta de carretera (y especialmente si se trata de una bicicleta de para competición) suelen tener mayor diámetro que los piñones, de forma que las relaciones de transmisión produzcan multiplicación de la velocidad de giro en estos casos.

No es así para otras bicicletas, como las de montaña, donde se requiere mayor entrega de fuerza y es menos importante la velocidad que llega a alcanzar. Para estos casos sí que es habitual ver relaciones de transmisión de reducción de la velocidad de giro.

Como se ha comentado en el punto anterior, es habitual en bicicletas comerciales que los platos tengan sección aligerada. Suelen ir fabricados en acero o aluminio.

Su funcionamiento, junto al de los piñones, es equivalente al de un engranaje, generando un perfil de evolvente que define una circunferencia de cabeza, una circunferencia primitiva, que se supone en contacto permanente con la cadena, y una circunferencia de base y de pie.

## 3. Cadena

Es el elemento encargado de transmitir las fuerzas entre los platos y los piñones, porque estos elementos se encuentran unidos a ejes diferentes. Se compone de una serie de eslabones y rodillos articulados, hechos habitualmente de acero.

Se define el paso como la distancia entre uniones de eslabones, y el ancho de cadena como la altura de los rodillos (que es la separación entre eslabones interiores). Existe una serie de pasos normalizados de la cadena para las bicicletas actuales. Este paso lógicamente ha de coincidir con el de los platos y los piñones, medido desde su circunferencia primitiva para que ambos elementos encajen y trabajen correctamente.

$$p_1 = \frac{\pi d_1}{z_1} = p_2 = \frac{\pi d_2}{z_2} \rightarrow \frac{d_2}{d_1} = \frac{z_2}{z_1} \quad (ec. 1)$$

Esto permite representar la relación de transmisión de esta manera:

$$i = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{d_2}{d_1} \rightarrow i = \frac{z_2}{z_1} \quad (ec. 2)$$

En las igualdades el subíndice 1 denota el plato (entrada), 2 denota el piñón (salida),  $\omega$  es la velocidad angular,  $d$  es el diámetro y  $z$  el número de dientes.

Por condiciones de intercambiabilidad, entre los fabricantes se ha tendido al uso de un paso de (1/2)" (media pulgada), que corresponde a aproximadamente 12,7 mm. Este paso es usado en todo tipo de bicicletas, incluyendo las de carreras.

Cabe destacar que existen otra serie de pasos, aunque han quedado obsoletos debido a esta tendencia a favorecer las medidas normalizadas.

Esta medida está recogida tanto en la norma ANSI #40 como en la norma ISO 606. Estipulan además los anchos de cadena normalizados, medida que correspondería a la distancia entre placas interiores de la cadena.

Los anchos de cadena más usados a nivel comercial son  $(3/32)$ ", que corresponde a 2'4 mm, y  $(1/8)$ ", que corresponde a 3'2 mm [2]. Las bicicletas de competición suelen usar un ancho de  $(3/32)$ " por una mayor ligereza de la cadena y porque estas bicicletas se encuentran expuestas a menores esfuerzos que otras, como las de montaña.

Tanto los platos como los piñones deben tener un espesor aproximadamente igual al ancho de cadena para que haya una transmisión sin mucho juego interno, aunque debe haber holgura suficiente para permitir el desplazamiento de la cadena al realizar el cambio de marcha.

Cabe notar que siempre hay más de un eslabón engranado en los platos y piñones para distribuir la fuerza que se ha de transmitir. De esta forma siempre será más crítica la transmisión de fuerzas en los piñones que en los platos, que suelen tener menor número de dientes para este tipo de bicicletas.

La siguiente ilustración proporciona una idea inicial de cómo engrana el plato con la cadena y de cómo actúan las fuerzas en el mecanismo.

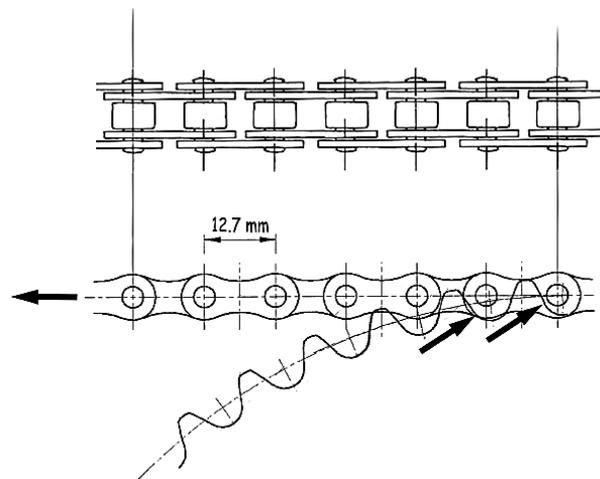


Figura 2. Representación del engrane de una cadena.

*Imagen obtenida de: [3]*

#### 4. Cassette y piñones

Las bicicletas modernas de gamas media, alta y de competición montan un elemento, conocido popularmente como "cassette" o "free hub" que aglomera los piñones en un solo conjunto rígido. A diferencia del sistema conocido como "free wheel", el cassette permite al propietario del vehículo desmontar y montar piñones, para poder variar la relación de transmisión a su criterio.

Es habitual ver hasta 12 piñones en los cassettes más actuales, para reducir el número de platos y permitir tener así un rango amplio de relaciones de transmisión, aligerando además el conjunto del sistema.

Pueden fabricarse en aluminio y en multitud de otros materiales para mayor ligereza, aunque es recomendable que sea del mismo material que la cadena, para evitar incompatibilidades entre ambos materiales, como diferentes coeficientes de dilatación térmica, posibles reacciones de oxidación, etc.

En la siguiente figura se aprecian los elementos que componen el cassette, además de representarse el buje (también denominado maza).

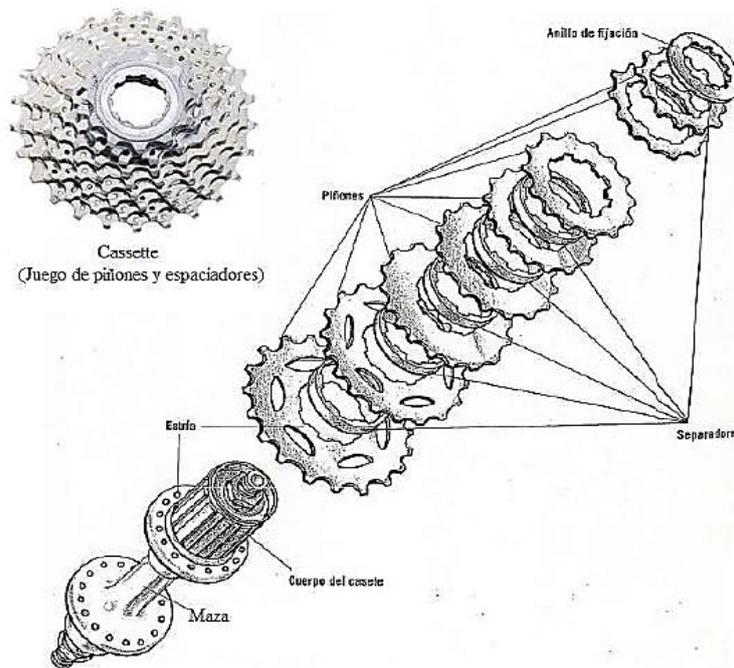


Figura 3. Cassette junto a la maza.

*Imagen obtenida de: Alleg, S. Guía básica de la bicicleta de viajes.*

El funcionamiento de los piñones es equivalente al descrito para los platos, solo que esta vez su misión es transmitir un par a la rueda trasera para generar finalmente el movimiento del vehículo.

Tienen más probabilidad de fallo que los platos, en general, debido a que suelen tener un menor número de dientes. Dado que hay pocos eslabones de la cadena engranados en ellos, se transmite una mayor fuerza a cada uno de los dientes. Además, están bajo carga un mayor número de ciclos, lo que puede propiciar el fallo del material por fatiga. Asimismo, al igual que los platos, toman forma de anillo para aligerar su peso, incluyendo incluso taladros para lograr reducir más el peso.

## 5. Buje

Se trata de un rodamiento, generalmente de bolas o de contacto angular, que dota de un grado de libertad de rotación a la rueda trasera. Suelen ir previamente sellados por lo que no se requiere su lubricación.

En las bicicletas con los mecanismos de aglomeración de piñones anteriormente mencionados, “free wheel” y “free hub” este rodamiento permite el roscado del cassette o piñones en uno de los extremos, generalmente el extremo derecho donde se ubica preferentemente el conjunto de la transmisión.

Un buje moderno es rígido en su unión con la rueda cuando ésta rota en el sentido habitual. En el sentido opuesto, sin embargo, desliza, evitando la transmisión de potencia. De esta manera, invertir el sentido de giro la cadena en plena marcha no tiene ninguna consecuencia en el funcionamiento de la bicicleta.

## 6. Desviador trasero

El desviador trasero es un elemento encargado de desplazar la cadena entre piñones para variar la relación de transmisión. Contiene dos abrazaderas que guían la cadena a la posición elegida. Normalmente es accionado por un cable al elegir la marcha en el cuadro de la bicicleta.

El desviador trasero se diferencia del delantero en que contiene varios rodillos tensores, con engranajes que giran “locos”, es decir, no transmiten potencia alguna. Éstos mantienen la tensión de la cadena en todo momento durante la marcha, así se consigue guiarla más fácilmente a través de las abrazaderas.

Están diseñados para el desmontaje sencillo de la cadena. Con la incorporación de un resorte este elemento puede girar y permite realizar esta operación de forma rápida.

## 7. Desviador delantero

Al igual que su homólogo trasero, se encarga del desplazamiento de la cadena entre platos. Es incluso más sencillo que éste, conteniendo únicamente una guía para el cable de accionamiento, las dos abrazaderas y su enganche al cuerpo de la bicicleta.

## 8. Caja del pedalier

En primer lugar, es necesario mencionar que el elemento que reúne las bielas, los platos y este elemento, la caja, se llama pedalier. La caja del pedalier contiene un eje y los rodamientos necesarios para la rotación libre del conjunto de platos y bielas. De este modo, puede realizarse el pedaleo y transmitir potencia al sistema. Suelen ser rodamientos de bolas rígidos, sellados previamente y de muy pequeño tamaño.

Dependiendo de cómo se quiera realizar su unión con el resto del pedalier, la caja puede contener una unión roscada u otros tipos de juntas.

Éstos son los elementos básicos que componen una transmisión por cadena. Su funcionamiento es sencillo e intuitivo, comparable con el de un tren de engranajes simple.

### Sistema de Transmisión por Correa

Estos sistemas son usados habitualmente en bicicletas de paseo y destacan por la simplicidad de su diseño, ya que prescinden de multitud de mecanismos que sí usan los sistemas basados en cadenas, como desviadores, rodillos tensores, etc. En ellos, la correa usada para distribuir la potencia entre ejes es una correa dentada.

Cabe destacar su ligereza, y que permiten un desalineamiento entre los ejes en los que se encuentra montada la correa (como máximo de 1 mm por cada 230 mm de distancia entre ejes). Aun así, una de sus grandes debilidades es que, por lo general, admiten menores velocidades de giro en funcionamiento que las cadenas.

La relación de transmisión, así como con una cadena puede considerarse constante durante la marcha, en las correas no es así, debido a deslizamientos y elongaciones del material. Este problema complica el uso y diseño este tipo de sistemas.

Requieren aplicar una fuerza inicial de pretensado, a diferencia de otros tipos de transmisión. Esto dificulta la extracción de la correa, y también la reparación del conjunto.

Sufren grandes pérdidas energéticas en comparación con las cadenas debido a estos deslizamientos y ciclos de histéresis elástica en el material, que se traducen en pérdidas por calor al ambiente y ruido.

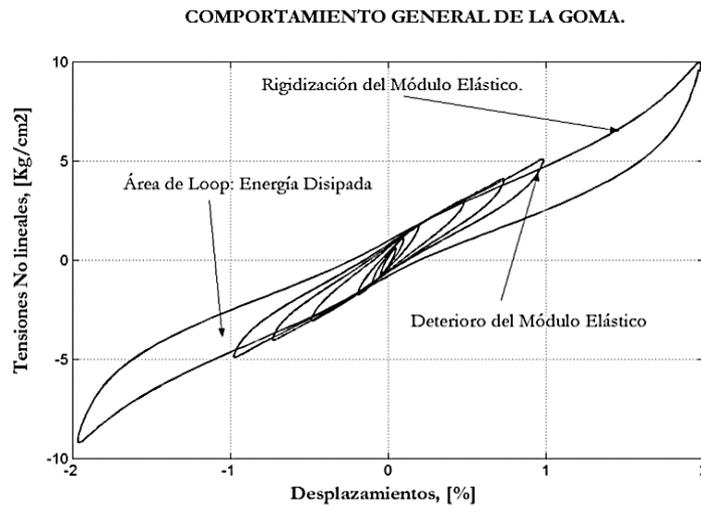


Figura 4. Ejemplo de ciclos de histéresis elástica en un material polimérico.

*Imagen obtenida de: Mata Almonacid, P., Borocshek Krauskopf R. (2001) Caracterización Mecánica de goma de alto amortiguamiento para el desarrollo de disipadores de energía.*

Como se aprecia en la imagen, el material polimérico que en este caso conformaría la correa no siempre se comporta de forma elástica lineal. Muchos de ellos no tienen la capacidad que tienen los metales de recuperar su forma sin disipar apenas energía.

Dado que se ha descartado el uso de este tipo de transmisiones para este trabajo por las razones anteriores, y que comparten multitud de elementos y similitudes con las transmisiones basadas en cadena, no se describirán los componentes que la forman.



Figura 5. Transmisión por correa.

*Imagen obtenida de: [www.bikesworldrevista.es](http://www.bikesworldrevista.es)*

## 2. BIOMECÁNICA

Para el diseño de una transmisión de una bicicleta es imprescindible conocer de qué manera interactúa el ciclista con el vehículo, más incluso si la bicicleta es destinada a competición. La biomecánica es el estudio mecánico del cuerpo humano, que en este caso intercambia movimiento a través de la transmisión. Este sistema, por tanto, deberá adaptarse a las características físicas del ciclista para funcionar de manera adecuada.

A continuación, se desarrollarán conceptos relativos a esta interacción y se definirán los aspectos geométricos que más influyen en ella, que son el factor Q y la longitud de biela.

### Factor Q

Con el propósito de lograr una ergonomía adecuada a las condiciones en las que va a trabajar la persona sobre el vehículo, maximizando su rendimiento, y también con la función de evitar ciertos problemas físicos, se estableció el denominado factor Q.

El factor Q se define como la distancia entre las caras exteriores de las dos bielas. Proporciona una estimación de la medida a la que se van a colocar los pies sobre los pedales. Es conocido que mínimas variaciones de este factor pueden causar lesiones en ciclistas profesionales [6]. Su valor suele estar en torno a 150 mm entre bielas para bicicletas de carretera.

Por lo tanto, dado que no es objeto de este trabajo determinar la distancia idónea entre las bielas para una buena ergonomía, se supondrá que el factor Q más adecuado para el diseño parte de estos 150 mm, siendo preferente esta medida en el diseño de un sistema de transmisión de bicicleta de carretera de competición.

Se suele llamar comúnmente “factor Q máximo”, o vulgarmente, de la misma manera que la distancia entre bielas (el factor Q), a la distancia media entre los pies del ciclista en los pedales. El factor Q máximo idóneo se estimó en función de la anatomía humana, en concreto de la longitud entre crestas ilíacas de la pelvis.

“Hace 50 años un trabajo del CONI determinó que la distancia intercrestal de la cadera de un ciclista tipo tenía como referencia los 26 centímetros y así se estableció. Es importante mencionar que el estudio se realizó con varones ciclistas de alto nivel.” (Iriberry, 2015).

Este valor, en la práctica, difiere ligeramente de los 26 centímetros establecidos en un primer momento por el Comité Olímpico Nacional Italiano (CONI), según los modelos de transmisiones de distintos fabricantes.

### Longitud de Biela

Uno de los conceptos de mayor relevancia en la biomecánica es la longitud de las bielas del pedaliar. Este parámetro se define como la distancia entre el centro de la unión con la caja del pedaliar y el centro de la articulación del pedal. La longitud de biela suele ser función de altura del ciclista en el deporte profesional, y es indispensable para una transmisión adecuada de la potencia.

En los últimos años se ha venido fabricando las bielas con una longitud cada vez mayor, para poder desarrollar mayor par y así incorporar relaciones de transmisión menores (de mayor multiplicación de la velocidad). En general, no son convenientes las bielas cortas.

Es, además, una distancia con escasa variabilidad entre fabricantes, ya que está condicionada por muchos factores [8], como son los siguientes:

- La posición del punto muerto inferior (PMI) y punto muerto superior (PMS) se ven condicionadas por la excesiva longitud de la biela:

Una posición más elevada del punto muerto superior se traduce en un aumento de la altura del sillín, lo que no es conveniente desde el punto de vista dinámico: conlleva elevar el centro de gravedad del conjunto vehículo-ciclista, condicionando la estabilidad en los giros, e incluso empeora la aerodinámica.

Una posición muy baja del punto muerto inferior también condiciona el giro, pudiendo producir impacto con el suelo si el ciclista se inclina más de un cierto ángulo. Para evitar esta última situación se regula en la norma UNE EN 4210-2 (punto 4.13.2.1), que el máximo ángulo con respecto a la vertical que puede inclinarse una bicicleta de carreras sin tocar el suelo ha de ser de 23°.

- Una excesiva longitud de biela puede causar interferencia en la dirección. Este aspecto se encuentra regulado en la norma UNE EN 4210-2 (punto 4.13.2.2).
- Una biela muy larga conlleva mayor flexión de la rodilla y mayor alargamiento de cuádriceps durante el pedaleo. Puede llevar al desarrollo de problemas físicos.

En el siguiente gráfico de dispersión se muestra las longitudes de biela recomendadas por distintos fabricantes, según la altura del ciclista (medida en sistema de anglosajón).

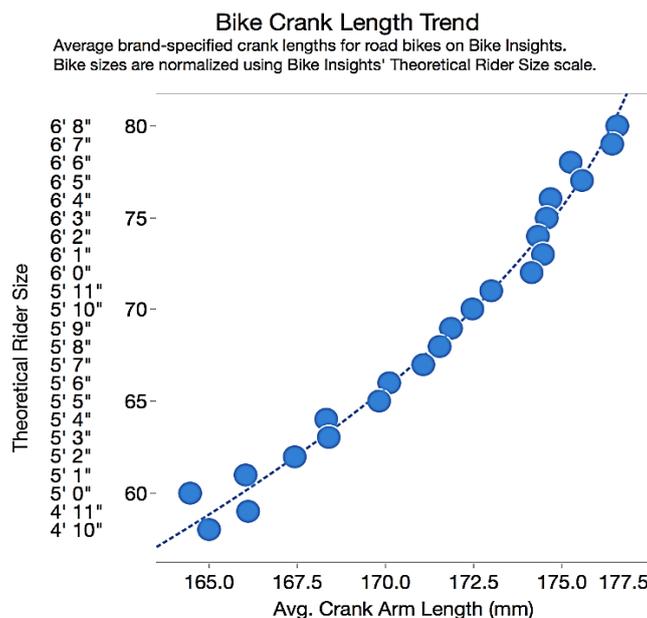


Figura 6. Longitudes medias de biela en bicicletas de carretera.

Imagen obtenida de: [9]

Atendiendo a que las distintas marcas, para un ciclista de 170 a 180 cm de altura, fabrican mayoritariamente bielas de longitud entre 170 y 175 mm, se tomará para el sistema a modelar un valor de longitud de biela en este rango. Es preferente la medida de 175 mm, que es de las más comunes a nivel comercial.

### Relación Potencia Media – Tiempo de Esfuerzo

Es un hecho obvio que los ciclistas profesionales sufren desgaste físico a medida que pasan tiempo en una competición. Para cuantificar la evolución de su fatiga se definen las curvas potencia media – tiempo de esfuerzo, muy extendidas en la competición.

Existen tres fases principales en el desarrollo de una carrera:

- Una fase de alta potencia sostenida durante un tiempo muy limitado (alrededor de 15 segundos), donde se pueden alcanzar potencias medias de 1500 W.
- Una disminución progresiva de la potencia, posterior al primer período de alto esfuerzo, denominada fase anaeróbica. Puede durar hasta el tercer minuto.
- Una fase final, llamada aeróbica, donde se desarrolla una potencia sostenida con el tiempo, y que para ciclistas profesionales ronda los 300 W de potencia media durante este tiempo, o unos 4 W/kg (normalizado por el peso del ciclista).

Si se quiere estimar la potencia que desarrollará un corredor para dimensionar una transmisión, parece lógico despreciar las fases iniciales de alta potencia. Suponen una fracción muy reducida de lo que puede llegar a durar una etapa o carrera. A continuación, se muestra un ejemplo de un corredor determinado, de una curva potencia media – tiempo de esfuerzo.

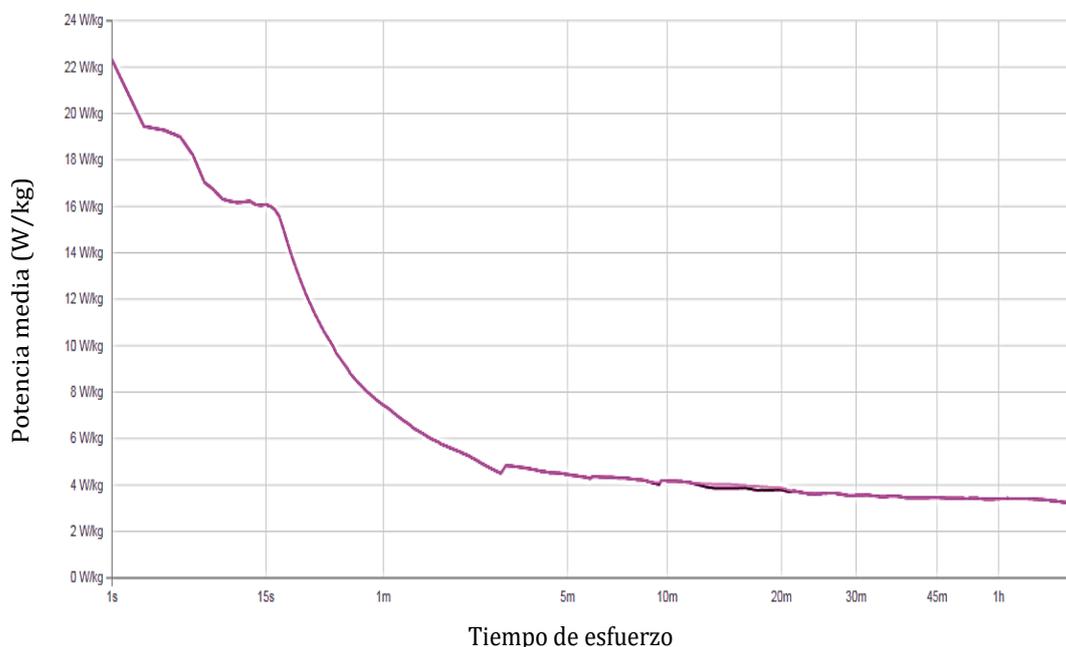


Figura 7. Potencia media por kg de peso en función del tiempo de esfuerzo.

*Imagen obtenida de: roadbikereview.com*

En la gráfica se observan las distintas fases anteriormente descritas, hasta la fase aeróbica, con una potencia media desarrollada sobre los 4 W/kg, que equivale a 300 W para una persona de 75 kg.

Gráficamente, se puede comprobar la validez para el cálculo de una suposición de una potencia media independiente del tiempo. La duración de las fases iniciales es despreciable en comparación con la duración de la fase final, o fase aeróbica.

### Relación Potencia Media – Cadencia

Es conocido que la potencia media que es capaz de suministrar el cuerpo humano al sistema también es dependiente de la cadencia de giro. Esta cadencia se suele definir como la velocidad angular de las bielas del pedalier.

Existe un valor óptimo para el que el organismo se adapta mejor al movimiento del pedalier. Distintos estudios determinan que esta cadencia óptima se encuentra alrededor de los 115 y 125 rpm [10] [11], aunque hoy en día sigue habiendo poco consenso con respecto a este valor entre autores. La potencia media suministrada durante un régimen permanente sigue una distribución cuadrática con respecto a la cadencia, como se observa a continuación.

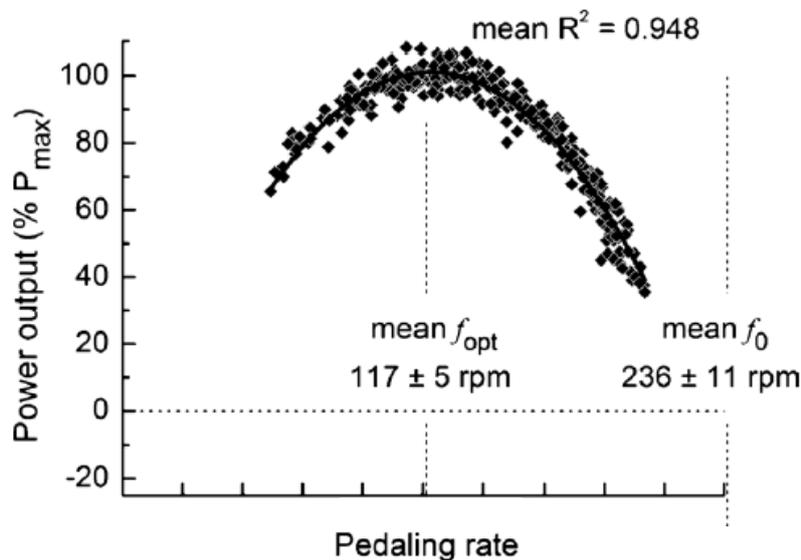


Figura 8. Potencia media en porcentaje del máximo, en función de la cadencia.

*Imagen obtenida de: [10]*

En la imagen, el término  $f_0$  hace referencia a la cadencia del conjunto del pedalier a la que se alcanza una velocidad angular tan alta, que las piernas del ciclista son incapaces de transmitir potencia. Por otra parte,  $f_{\text{opt}}$  hace referencia a la cadencia óptima.

Los ciclistas de carretera profesionales escogen relaciones de transmisión en base a circular este valor de cadencia, de manera les permita alcanzar el pico de potencia cuando ruedan a velocidad constante en cualquier marcha. Esto facilita en gran medida vencer las fuerzas resistentes, que, como se verá más adelante, son proporcionales a la velocidad.

Por este mismo motivo, podrá considerarse también que las gráficas potencia media – tiempo de esfuerzo del apartado anterior, han sido medidas en carrera con un sistema de transmisión optimizado, por lo que el valor donde se estabiliza la potencia media con el tiempo de esfuerzo corresponde al de una circulación a la mejor cadencia posible.

## Ciclo de Pedaleo

Con todo esto, se llega a la interacción principal del ciclista con el vehículo, que es el ciclo de pedaleo. Con el pedaleo se genera el movimiento de la bicicleta a través del sistema de transmisión. Son las bielas, como se ha mencionado ya, las que permiten imprimir un par en el sistema, con la fuerza efectiva que ejerce el ciclista sobre ellas.

Esta fuerza efectiva es siempre normal a un vector que va desde la unión de la biela con el pedalier a la unión de la biela con el pedal. Existe otra componente tangencial de la fuerza en la dirección de este vector. Esta componente no transmite par al sistema, y se traduce únicamente en mayores sollicitaciones en el sistema durante el pedaleo.

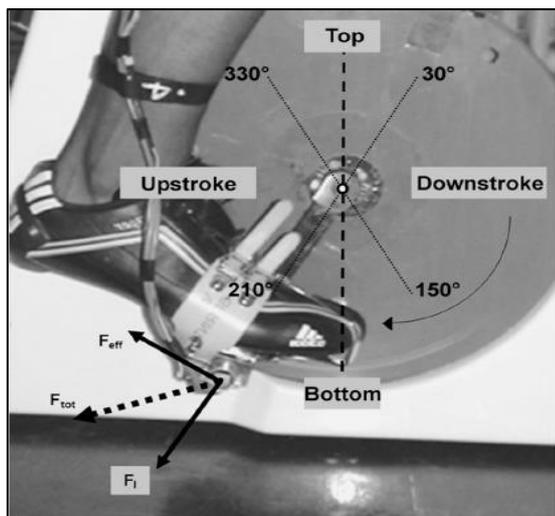


Figura 9. Ensayo del ciclo de pedaleo, con las componentes de la fuerza.

Imagen obtenida de: [10]

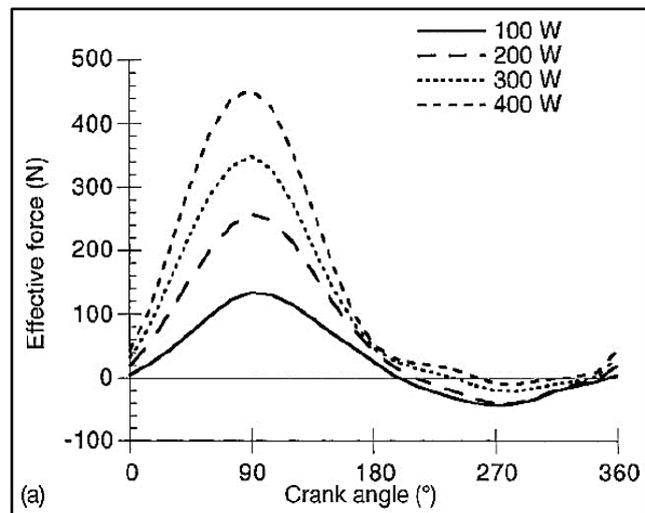


Figura 10. Fuerza efectiva según ángulo en una sola biela.

Imagen obtenida de: [11]

Como se puede observar en la Figura 10, la fuerza normal es mayor cuando la biela se encuentra a  $90^\circ$  de la vertical, por lo que es en este momento cuando el ciclista ejerce mayor par también. Existe una parte del ciclo de pedaleo donde se aplica una fuerza contraria al movimiento deseado, lo que lógicamente resulta perjudicial, consumiendo parte de la energía previamente aportada al sistema.

Este fenómeno ocurre a partir de los  $180^\circ$  recorridos por la biela (parte que es denominada en el mundo anglosajón como “Upstroke”).

La curva representada en la Figura 10 solo representa la fuerza en una biela. Es importante notar que el sistema contiene dos de ellas dispuestas con un desfase de  $180^\circ$ . De esta manera, al considerar la aportación de ambas al movimiento, la curva de fuerza efectiva con respecto al ángulo toma una forma aproximable a una función sinusoidal con mayores valores.

En general, para describir el movimiento del pedalier, se suele definir una coordenada que cuantifica el ángulo de biela con origen en la vertical (véase la Figura 9). Esta definición está muy extendida en el ámbito del estudio dinámico y el estudio biomecánico.

### 3. EL ESTADO DEL ARTE EN LA TRANSMISIÓN

La necesidad de que equipos y corredores tengan a su disponibilidad bicicletas lo más veloces posibles, propicia que se desarrollen continuamente nuevos elementos con la última tecnología. Gran parte de estas mejoras se encuentran ubicadas en el sistema de transmisión, debido a su relevancia en la generación de movimiento.

Los últimos avances en el sistema se centran básicamente en dos aspectos: una mejor adaptación de la biomecánica y una reducción del peso de los componentes. Los siguientes son algunos de los elementos que actualmente han cobrado gran importancia en el mundo de la competición.

#### Platos Ovalados / Platos Excéntricos

Debido a que un pedalier completamente circular no se adapta de la mejor forma posible a la biomecánica del ciclista, se trató de desarrollar un sistema que paliara este problema. Los platos ovalados y, análogamente, los platos excéntricos, son una solución.

No se trata de elementos completamente novedosos. Aparecieron ya en el año 1983, por parte de la marca *Shimano* en su línea de productos *Biopace*. Sin embargo, los primeros platos ovalados diseñados en esta época eran menos eficaces que unos platos circulares convencionales, siendo en los últimos años cuando se ha conseguido realizar diseños que sí resultan beneficiosos para el pedaleo. Son usados cada vez con más frecuencia en bicicletas de carretera, e incluso han ayudado a ciclistas de carretera como Chris Froome a ganar el *Tour* de Francia.

Los platos ovalados son engranajes elípticos integrados en el pedalier, que básicamente se centran en minimizar el paso por ángulos de biela asociados a una mala transmisión de esfuerzo. Los platos excéntricos tienen la misma función que los ovalados y, por el contrario, son circulares, lo que es una ventaja de cara a la fabricación.

De esta manera, cuando engrana la cadena se consigue tener un recorrido más corto cerca del punto muerto superior e inferior, que son los asociados a una fuerza efectiva baja y una alta sollicitación en la biela debido a una fuerza tangencial grande.

Esto se logra acortando el radio de la curva en contacto con la cadena para un ángulo de biela cercano a  $0^\circ$  y  $180^\circ$ , que son su punto muerto superior e inferior. Se aumenta el radio en ángulos cercanos a  $90^\circ$  y  $270^\circ$ , por el contrario, para alargar el arco descrito por el engranaje en la zona de mejor adaptación al pedaleo. De este modo, puede ejercerse la mayor fuerza (ver Figura 10) durante más recorrido.

La velocidad de un punto en el engrane del plato y la cadena no será en este caso constante durante el pedaleo a una cadencia determinada, como sí ocurriría en un plato circular. Esto se da porque la velocidad lineal depende de la distancia del punto al par de rotación.

Esta situación provoca que la velocidad angular en la salida de la transmisión no tenga un valor uniforme con respecto a la velocidad angular de entrada, por lo que no se puede considerar una relación de transmisión constante con el pedaleo. Este fenómeno dificulta el cálculo, aunque que para paliar esta situación puede considerarse una relación de transmisión media durante la circulación.

En la práctica, no es muy notoria esta variabilidad de la relación de transmisión con el pedaleo, no hay gran diferencia de radios en el contorno de los platos. En general, se podría afirmar que no merece la pena invertir dinero en modificar los piñones, cambiando su geometría circular, para mantener la velocidad angular de salida constante.

En la siguiente figura, se muestra un ejemplo de uno de estos sistemas en competición.



Figura 11. Detalle de los platos ovalados de una bicicleta del equipo *Team Sky*.

*Imagen obtenida de:* [14]

También está muy extendido el uso de platos ovalados o platos excéntricos en otras bicicletas que no son de carretera, como las de montaña, con el mismo objetivo de mejorar la transmisión de la fuerza.

### Bielas Huecas

Para reducir la masa rotacional del pedaliar, además de aligerar el peso total de la bicicleta, se ha desarrollado una tecnología de bielas de interior hueco y apariencia maciza. Mantienen elevada, en general, su resistencia mecánica mientras se aligera el componente.

Normalmente esta técnica se emplea en la manufactura de bielas de aluminio u otros metales, que tienen una elevada densidad en comparación con materiales poliméricos o composites. Con el uso de composites en un laminado también puede dejarse hueco el interior de la biela.

Un ejemplo de bielas huecas son las de los pedaliar *Shimano*. Muchos de ellos incorporan lo que denominan tecnología “*Hollowtech*”. Afirman que aligerar las bielas permite no solo aligerar el conjunto, sino disminuir también la fatiga del ciclista al tener que mover una masa rotacional menor [15].

En la próxima figura se muestra el diagrama que ofrece la marca anterior para sus bielas huecas, donde se observa que la unión con el resto del pedaliar se hace mediante un saliente hexagonal (véase las cruces de San Andrés en la parte superior).

En ocasiones, la biela del lado de la bicicleta donde se ubica la transmisión se fabrica de una pieza con el conjunto pedalier, donde se conecta a los platos en la denominada unión en araña. La otra, sin embargo, necesita siempre una junta de este tipo para el desmontaje.

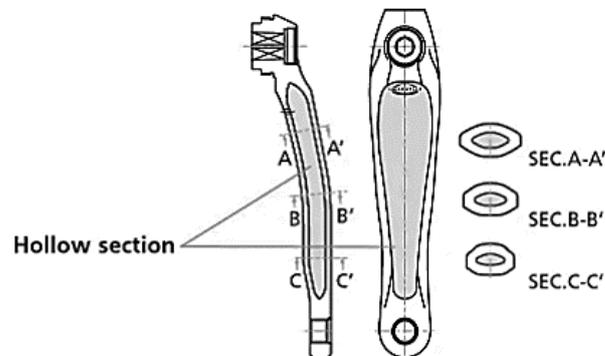


Figura 12. Diagrama de una biela hueca del fabricante *Shimano*.

*Imagen obtenida de:* [15]

Posteriormente al modelado dinámico de una transmisión que se hará para este trabajo, será de interés analizar el comportamiento resistente de uno de estos componentes cerca de su punto de unión, donde se producirá una alta concentración de tensión. Se prefiere, asimismo, que las bielas ubicadas en el lado de la transmisión se conecten con el conjunto de los platos con una unión en araña, como la que se observa en la Figura 11, que ayude a distribuir todavía mejor la fuerza ejercida.

### Transmisión Monoplate

Con el paso de los años y la aparición de componentes más ligeros y precisos, se viene considerando en el mundo de la competición del ciclismo de carretera utilizar transmisiones que solo incorporen un solo plato, también llamadas transmisiones 1x.

En el mundo del ciclismo se suele utilizar la anterior nomenclatura para describir el número de platos y piñones de la transmisión, de modo que es habitual en competición ver transmisiones 2x11 (con 2 platos, 11 piñones y 22 relaciones de transmisión), o 2x12 (2 platos, 12 piñones y 24 relaciones de transmisión). Por tanto, esta nomenclatura 1x simboliza que la transmisión tiene un solo plato.

Contar con un único plato, a priori, no es una ventaja. Estos sistemas pierden unas cuantas relaciones de transmisión en comparación con otros sistemas de dos o más platos. Estos últimos aseguran una mayor combinación entre platos y piñones.

Sin embargo, éste es un sistema bastante más liviano que uno convencional de más de un plato, porque prescinde de elementos que con este sistema no son necesarios, como el desviador delantero y sus cables de accionamiento, o el instrumento en el manillar para el accionamiento de este desviador.

Por lo tanto, si una transmisión monoplate también se combina con materiales muy ligeros, esta pérdida de relaciones de transmisión no supone un gran problema, primando la ligereza del vehículo para alcanzar grandes velocidades.

Las transmisiones monoplato, de hecho, suelen incorporar dientes diferentes según éstos engranen en un eslabón ancho o estrecho de la cadena (véase Figura 2). Esto permite asegurar una buena fijación de la cadena con los cambios de marcha en los piñones. Este mecanismo, en teoría, disminuye la probabilidad de fallo por salida de la cadena en una competición.

Estas transmisiones se empezaron a adoptar en competición de carretera en el equipo *Aqua Blue*, obteniendo buenos resultados con esta transmisión en la Vuelta a España. A pesar de esto, una serie de fallos mecánicos provocó que se abandonara el proyecto.

El sistema ha vuelto a hacer apariciones, cada vez con más frecuencia en competición, sobre todo para etapas de contrarreloj en carreteras de poco desnivel, en las que el rango de la transmisión cobra menos importancia.



Figura 13. Detalle de una transmisión con monoplato en una bicicleta de carretera.

*Imagen obtenida de:* [www.edinburghbicycle.com](http://www.edinburghbicycle.com)

Esta falta de relaciones de transmisión es cada vez un menor problema hoy en día. Se desarrollan transmisiones monoplato de 12 o 13 piñones que, según los fabricantes, pueden suplir los rangos que proporciona una transmisión convencional 2x.

*“Aunque un grupo 1x ofrece menos marchas, uno de los extraños hechos de la configuración de un solo plato es que no limita en exceso, o no limita en absoluto, el rango de marchas.*

*Parece que el miedo a perder el rango completo está reteniendo a los fabricantes a que fomenten el uso de transmisiones 1x en bicicletas de carretera, pero ese sacrificio puede ser más una cuestión de percepción que de realidad.”* (Stuart, 2019) [16]

Los sistemas de varios platos también presentan un inconveniente: suelen tener relaciones de transmisión prácticamente coincidentes que no desarrollan ningún papel para el ciclista, suponiendo además un peso mayor. Por ejemplo, se tendría la misma relación en el engrane de un piñón de 18 dientes con un plato de 36 dientes y en el de un piñón de 24 con un plato de 48 dientes. Para éstos, hay inevitablemente marchas redundantes en el sistema. Puede evitarse este problema con un sistema monoplato si se cree necesario.

A pesar de estas ventajas, las transmisiones 1x sí tienen el inconveniente de que son más bruscas cuando el desviador trasero actúa. Suele darse más diferencia entre el número de dientes de los piñones para lograr cubrir el rango deseado de relaciones de transmisión.

Son recomendables para ciclistas sin tanta experiencia como un corredor profesional por su gran simplicidad. Estos últimos tienden a preferir tener a su disponibilidad un amplio conjunto de marchas, pero como se comenta, esta percepción está cambiando.

Asimismo, son una configuración muy común en bicicletas de montaña por su gran robustez y la menor necesidad de incorporar marchas que permitan una velocidad alta. Aun así, hasta día de hoy habían hecho pocas apariciones en competiciones de carretera.

### *CeramicSpeed Driven*

*Driven* es una transmisión innovadora en el mundo del ciclismo. Desarrollada por la empresa *CeramicSpeed* con la ayuda del departamento de Ingeniería Mecánica de la Universidad de Colorado, es hasta la fecha la transmisión de bicicleta más eficiente. Esta compañía trata de introducir esta tecnología incipiente en el mundo de la competición, sustituyendo al mecanismo típico de transmisión por cadena.

Al igual que una transmisión convencional, este sistema incluye platos y piñones. Estos piñones tienen un dentado perpendicular al plano de la rueda. En esta configuración se realiza la transmisión de potencia entre estos engranajes a través de un eje con una serie de rodamientos en contacto con los dentados.

El fabricante afirma que el sistema *Driven* tiene un 99 % de rendimiento (convierte el 99 % de la potencia suministrada), superando con creces al de la transmisión por cadena. Este conjunto se fabrica con partes cerámicas. Por este motivo, se da un acoplamiento lo suficientemente suave en el contacto de las partes como para no necesitar lubricación. Como se ve en la siguiente figura, tampoco necesita el desviador delantero y trasero para su funcionamiento, sí presentes en la transmisión por cadena.



Figura 14. Transmisión *CeramicSpeed Driven*.

Imagen obtenida de: [18]

Para realizar el cambio de marcha, el conjunto de rodamientos debe poder moverse e igualarse en velocidad con el dentado de los piñones. Esta situación introduce la necesidad de incorporar un actuador interno en el eje. El actuador es eléctrico, lo que aumenta en el peso de esta configuración. Los componentes cerámicos y un eje con cubierta de fibra de carbono permiten, por el contrario, aligerar el conjunto.

El proceso del cambio de marcha es similar al de la transmisión por cadena, donde, cuando se acciona el cambio, el desviador actúa, se produce el engrane, se igualan las velocidades de la cadena y el engranaje y se produce un arrastre hasta la marcha escogida. En este sistema el actuador desacopla el elemento que contiene los rodamientos, de manera que no se transmite par durante el cambio de marcha.

El mecanismo que contiene los rodamientos está dividido en dos partes. Durante el cambio una de ellas avanza hasta la posición de la siguiente marcha con la ayuda del actuador. Es entonces cuando el piñón que está en contacto arrastra la división restante hasta la posición escogida.

No se considerará para este trabajo una transmisión *CeramicSpeed Driven* por no haber sido probada en competición. Además, aunque se afirma que se puede lograr una reducción del peso [19], la compañía todavía no ha aclarado cuál sería el ahorro al librarse de los desviadores, y cambiar la cadena por un eje con un actuador.

#### *Pinion Drive*

Se trata de una transmisión por correa que incorpora un tren planetario de engranajes. Permite escoger entre 18 marchas diferentes desde un accionamiento en el manillar. La marca *Pinion* ofrece una solución al principal problema de la transmisión por correa, que es no poder variar su relación de transmisión. La gran ventaja de las transmisiones por correa, reiterando lo dicho, es su simplicidad y reducido mantenimiento. Este sistema ahorra desviadores y lubricación, lo que aporta ligereza al conjunto.

Se descarta considerar este tipo de sistemas para la transmisión a modelar, que, aunque en este caso permita variar la relación de transmisión, no es constante con la marcha. Además, su rendimiento será menor que si se usara una cadena en su lugar.

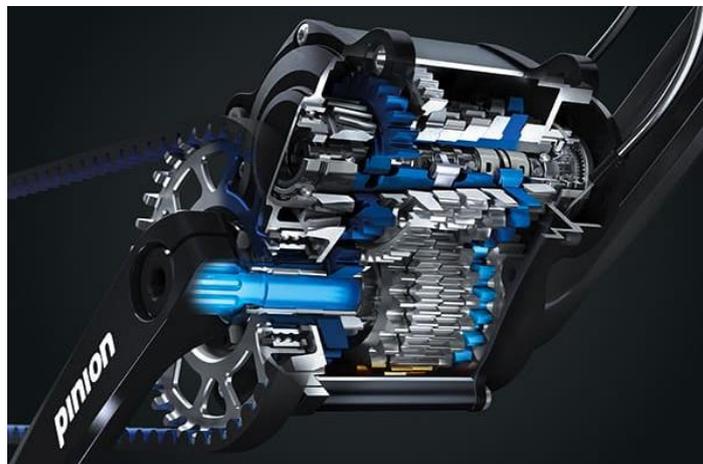


Figura 15. Transmisión *Pinion Drive*.

Imagen obtenida de: [www.pinion.eu](http://www.pinion.eu)

## 4. CONCEPTOS PREVIOS: CINEMÁTICA Y DINÁMICA

Un análisis cinemático y dinámico, basado en la teoría de mecanismos, permitirá resolver inicialmente cuáles son las marchas que incorporar a un sistema de transmisión genérico objeto de diseño en este trabajo. Para determinar las mejores relaciones de transmisión para el conjunto, es necesario considerar también las fuerzas motrices y resistentes que actúan sobre él. Es el sistema de transmisión el que permite, mediante el cambio de marcha, un aporte mayor o menor de fuerza, logrando sobreponerse así a las acciones resistentes.

El mecanismo de la bicicleta únicamente tiene un grado de libertad, con lo que únicamente será necesaria una coordenada para la completa descripción del movimiento del sistema. Aun así, debido a que hay multitud de elementos móviles, puede ser conveniente utilizar otras coordenadas auxiliares durante el proceso. El conjunto se considerará a efectos de cálculo un mecanismo plano, ya que no hay desplazamientos, fuerzas, etc. en una tercera dimensión.

Para la descripción de este grado de libertad, se utilizará una coordenada angular  $q$ . La coordenada  $q$  medirá el ángulo al que están posicionadas las bielas con respecto a la vertical. El valor de  $q$  y sus derivadas temporales será positivo en sentido antihorario de giro, que es la dirección natural del pedaleo.

Para determinar la evolución temporal de la coordenada (su velocidad y aceleración) se considerará, según la teoría de mecanismos, una fuerza generalizada  $Q$  y una inercia generalizada  $I^*$ . La fuerza generalizada es la expresión del conjunto de acciones exteriores actuantes sobre el sistema, compatibles con la coordenada generalizada, que inducen su variación en el tiempo. La inercia generalizada reúne todos los términos de masa e inercia del sistema que se oponen a su aceleración cuando se aplica la fuerza generalizada  $Q$ . Ambos términos pueden ser función de esta posición  $q$  de las bielas.

Una vez descritos estos conceptos iniciales, se muestran las expresiones que, a partir de este punto, tomarán parte en el cálculo del comportamiento de una transmisión.

### Teorema de las Fuerzas Vivas

El Teorema de las Fuerzas Vivas se basa en que el trabajo aportado por la fuerza generalizada debe ser igual al incremento de energía cinética del sistema considerado.

$$\frac{1}{2}I^*(q) \cdot \dot{q}^2 - \frac{1}{2}I^*(q_0)\dot{q}_0^2 = \int_{q_0}^q Q(q) dq \quad (ec. 3)$$

Aquí  $q$  es la coordenada generalizada y  $\dot{q}$  su velocidad instantánea.  $Q$  es la fuerza generalizada e  $I^*$  es la inercia generalizada. El subíndice 0 denota una posición inicial.

De la ecuación 3 se obtiene que la velocidad de la coordenada puede expresarse de la siguiente manera, en función nuevamente la fuerza e inercia generalizadas.

$$\dot{q} = \pm \sqrt{\frac{2}{I^*(q)} \left( \int_{q_0}^q Q(q) dq + \frac{1}{2}I^*(q_0)\dot{q}_0^2 \right)} \quad (ec. 4)$$

### Aceleración de la Coordenada (Ecuación de Eksergian)

También de la ecuación número 3, puede extraerse la aceleración de la coordenada generalizada, derivando con respecto al tiempo.

$$\ddot{q} = \frac{1}{I^*(q)} \left( Q(q) - \frac{1}{2} \frac{d}{dq} I^*(q) \dot{q}^2 \right) \quad (ec. 5)$$

Si la inercia generalizada no varía con la coordenada se simplifica el término derivado, quedando únicamente el cociente de  $Q$  e  $I^*$ . La aceleración aquí se denota como  $\ddot{q}$ .

### Velocidad de un Punto

Se puede expresar la velocidad lineal de un punto  $a$  cualquiera de un mecanismo, a partir de la de un punto  $o$ , a través de la siguiente expresión proveniente de la mecánica clásica:

$$\vec{v}_a = \vec{v}_o + \vec{\omega} \wedge \vec{r}_{oa} + \vec{v}_{a,rel} \quad (ec. 6)$$

En la ecuación  $\vec{v}$  simboliza la velocidad,  $\vec{\omega}$  es la velocidad angular del sólido donde se encuentra el punto  $o$  ( $\omega$  en  $\vec{k}$ ),  $\vec{r}_{oa}$  es un vector de posición desde el punto  $o$  al punto  $a$ . En los elementos móviles de la bicicleta no habrá puntos que presenten velocidad relativa con respecto al sólido considerado, representada aquí como  $\vec{v}_{a,rel}$ .

### Segunda Ley de Newton y Principio de d'Alembert

Es útil para casos como éste la aplicación de la mecánica newtoniana, en concreto la aplicación segunda ley de Newton combinada con el uso del principio de d'Alembert. Este principio establece que el sistema formado por las fuerzas externas y las de inercia estará en equilibrio. Este equilibrio es el denominado equilibrio dinámico.

El equilibrio dinámico, si se dividen las acciones según su tipología, es:

$$\sum \vec{F}_e + \sum \vec{F}_c - \sum \vec{F}_i = \vec{0}$$

Aquí  $-F_i$  son las fuerzas de inercia,  $F_e$  son las acciones exteriores y  $F_c$  son estas fuerzas de reacción. El sumatorio de estas fuerzas de reacción ha de ser nulo al considerar en el sistema una barra fija. En este caso será la calzada.

$$\sum \vec{F}_e = \sum \vec{F}_i \quad (ec. 7)$$

Esta ecuación y la ecuación número 3 son equivalentes, siendo esta última expresada en términos energéticos. De aquí además se deduce que la fuerza generalizada  $Q$ , que provocará una variación temporal de la coordenada considerada, será necesariamente una acción exterior al sistema.

### Método de Potencias Virtuales

El método de potencias virtuales que se muestra a continuación puede obtenerse a través de la mecánica newtoniana, generalizada a través del principio de d'Alembert, presentada en el apartado anterior. También es deducible a partir del principio de mínima acción de la mecánica lagrangiana y similares.

El método se formula a través de la suma de una serie de potencias, llamadas virtuales, ejercidas por las acciones del sistema. Vienen dadas por velocidades infinitesimales y compatibles con los grados de libertad de éste. Estas velocidades no son reales, no tienen lugar en el tiempo. Existe el método de trabajos virtuales, de formulación análoga.

Se usa para conocer cuál es la expresión, en la coordenada generalizada, de las acciones actuantes. Es decir, de él se puede obtener la expresión de la fuerza generalizada. Estas acciones que la componen resultarán lógicamente ser acciones exteriores, no reacciones.

La potencia virtual total  $\delta P$  es el sumatorio de fuerzas por un diferencial de velocidad del punto de su aplicación. Si se tiene un conjunto de  $m$  de estas fuerzas y un sistema de  $n$  grados de libertad (con también  $n$  coordenadas generalizadas), se podrá expresar la potencia total como suma de fuerzas generalizadas  $Q_j$  actuando los grados de libertad  $j$ .

$$\delta P = \sum_{i=1}^m \vec{F}_i^T \delta \vec{v}_i = \sum_{j=1}^n Q_j \delta \dot{q}_j;$$

Por otro lado, si el diferencial de velocidad se desglosa en forma de diferencial total, con la contribución de cada una de las componentes de las coordenadas generalizadas:

$$\delta \vec{v}_i = \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_1} \delta \dot{q}_1 + \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_2} \delta \dot{q}_2 + \dots + \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_n} \delta \dot{q}_n = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_j} \delta \dot{q}_j$$

Sustituyendo en la expresión primera e intercambiando sumatorios con las propiedades del producto escalar queda:

$$\delta P = \sum_{i=1}^m \vec{F}_i^T \delta \vec{v}_i = \sum_{i=1}^m \vec{F}_i^T \left( \sum_{j=1}^n \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_j} \delta \dot{q}_j \right) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m \left( \vec{F}_i^T \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_j} \right) \delta \dot{q}_j = \sum_{j=1}^n Q_j \delta \dot{q}_j$$

De esta manera, se observa que la expresión de la fuerza generalizada para un grado de libertad dado por el índice  $j$  es la siguiente:

$$Q_j = \sum_{i=1}^m \vec{F}_i^T \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_j}$$

Pero, como se tiene únicamente un grado de libertad en la bicicleta de coordenada generalizada  $q$ , no será necesario el sumatorio. Omitiendo por tanto el subíndice:

$$Q = \sum_{i=1}^m \vec{F}_i^T \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}} \quad (ec. 8)$$

### Fuerzas sobre el Conjunto Vehículo-Ciclista

Durante el movimiento vehículo se dan tanto fuerzas motrices como resistentes, cuya influencia es necesaria conocer para el diseño de una transmisión. Con el método de potencias virtuales se obtendrá la expresión de la fuerza generalizada a partir de éstas, contando únicamente con las acciones exteriormente aplicadas.

Para ello se determinará cuáles de las siguientes son reacciones y no contribuyen al movimiento, es decir, no realizan trabajo compatible con el grado de libertad.

En la figura siguiente se ilustra el conjunto de fuerzas que se sabe actúan sobre él. Se ha optado por omitir al ciclista para la representación de las fuerzas, pero hay que tener en cuenta su presencia sobre el vehículo. El ciclista aporta gran cantidad de la masa del conjunto que se ha de tener en cuenta.

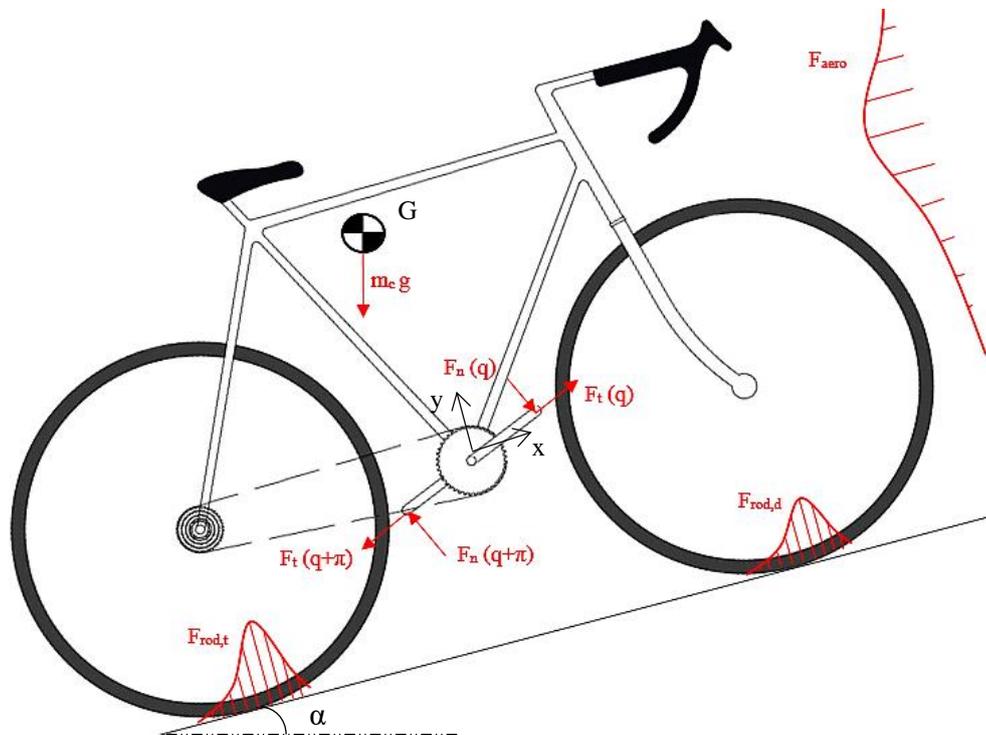


Figura 16. Fuerzas consideradas sobre el vehículo y ciclista.

Cabe destacar que las fuerzas motrices no tienen por qué ser únicamente las aportadas por el ciclista. Si la pendiente es negativa o hay viento de cola puede darse un fenómeno de impulso adicional. Para el cálculo sí se considerarán los efectos positivos de la rodadura en una pendiente negativa. La fuerza aerodinámica de arrastre es, en todo caso, siempre resistente.

Según el origen de las acciones que se experimentan durante la rodadura puede hacerse determinadas distinciones.

#### Fuerzas aplicadas en el pedaliar

En el pedaliar se da la fuerza que mueve el vehículo. Se pueden dividir las fuerzas que ejerce el ciclista sobre las bielas en dos componentes, una normal a éstas y otra tangencial, tal y como se muestra en la Figura 9.

Se sabe que las componentes de las fuerzas son función del ángulo de biela  $q$  (véase el apartado del capítulo 2 de biomecánica sobre el Ciclo de Pedaleo). Ambas bielas se encuentran dispuestas además a  $180^\circ$  una de la otra.

La fuerza normal en las bielas puede ser obtenida, entonces, a partir de una curva del ciclo de pedaleo de un ciclista genérico. Se verá más adelante que la componente tangencial a la biela no tiene ninguna influencia en el movimiento, como intuitivamente cabe esperar.

#### Fuerzas de resistencia a la rodadura

La resistencia a la rodadura es un fenómeno que, como su propio nombre indica, se opone a la rodadura de un sólido. Es nula para sólidos infinitamente rígidos. Esta fuerza resistente es causada por varios motivos, incluyendo la irregularidad del terreno, la irregularidad de la forma del sólido rodante y la histéresis elástica (ver Figura 4), siendo el más importante en la rodadura de un neumático este último. Como en realidad los sólidos son deformables, y no son exactamente circulares o no siempre se comportan ante cargas de modo elástico-lineal, se da el fenómeno de resistencia a la rodadura.

Un sólido real acumula un trabajo en forma de energía potencial elástica al verse sometido a determinadas cargas. Sin embargo, cuando se produce histéresis elástica no se devuelve en forma de energía mecánica todo el trabajo acumulado. Esta energía no se transforma como la misma fuerza y desplazamiento iniciales, sino que una parte se disipa como calor por rozamiento intermolecular. Este fenómeno es común en materiales poliméricos o también materiales poco homogéneos.

Por tanto, este fenómeno ocurre en el caso de un neumático que va rodando y se ve sometido a ciclos de tensión-deformación con la fuerza normal al contacto. Se devuelve menos fuerza en la fase de recuperación, en comparación con la fuerza que causa la deformación inicial de éste. Esta pérdida energética se traduce en una distribución de fuerzas contraria al sentido de giro de la rueda, que se opone a la rodadura.

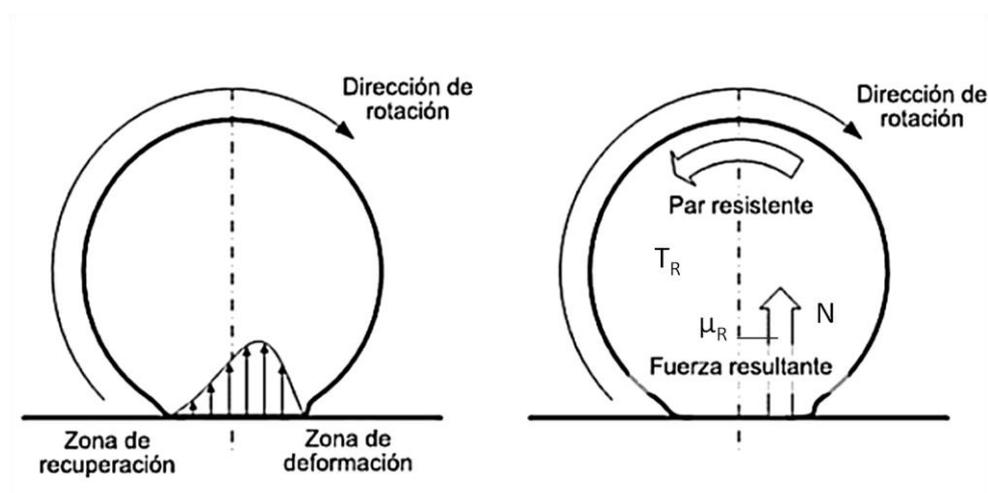


Figura 17. Ilustración de la distribución de presiones en un neumático.

Imagen obtenida de: [www.blogmecanicos.com](http://www.blogmecanicos.com)

La fórmula que describe la resistencia a la rodadura puede ser expresada en forma de par causado por una fuerza puntual.

$$F_R = \frac{T_R}{\left(\frac{D}{2}\right)} = \frac{\mu_R \cdot N}{\left(\frac{D}{2}\right)} = C_{RR} \cdot N \quad (\text{ec. 9})$$

El coeficiente de rodadura  $C_{RR}$  es adimensional y no debe confundirse con el factor  $\mu_R$ , que es la distancia de la resultante  $N$  de la fuerza normal al centro de la rueda. Esta resultante está aplicada en el centro de presiones. El diámetro de la rueda es  $D$ .

Los coeficientes de resistencia a la rodadura en un neumático de bicicleta varían con la presión de inflado, así como con el ancho de neumático, que influye en las tensiones a las que se ve sometido. Normalmente la presión interna de la cámara de aire disminuye el área de contacto con la calzada, aumentando también esta tensión mecánica sobre el componente.

Sin embargo, al aumentar la presión el neumático se rigidiza, lo que disminuye la energía potencial elástica que acumula y, por tanto, ayuda a disminuir también las pérdidas por histéresis, al contrario de lo que se pueda pensar.

En ciclismo de competición se usan en general neumáticos estrechos a altas presiones. Esta estrechez sí aumenta el efecto de resistencia a la rodadura, pero también limita en gran medida la resistencia aerodinámica. Esto induce a que habitualmente se opte por este tipo de configuración en competición, a pesar también de la incomodidad de la conducción con un neumático a altas presiones.

### Fuerza peso

En este caso concreto, la proyección de la fuerza peso de todo el conjunto vehículo-ciclista, en dirección del movimiento es la componente que realiza un trabajo en el grado de libertad considerado. Cuando la pendiente es nula, este peso no afecta apenas al movimiento. Éste es entonces una reacción en el sistema, siendo la resultante normal al contacto la otra componente que conforma su par de fuerzas. Gran parte de la fuerza peso vendrá dada, como se verá a continuación, por la masa del propio ciclista.

### Fuerza aerodinámica de arrastre

El hecho de que el vehículo circule a través de un medio fluido como es el aire, hace que se vea sometido a distintas fuerzas, denominadas aerodinámicas. Puede distinguirse entre una componente vertical de la fuerza, llamada sustentación (*lift* en inglés) y otra horizontal, en dirección del movimiento, llamada arrastre (*drag* en inglés). La primera de ellas será despreciable para el cálculo, ya que no solo no influye de forma directa en el movimiento de la bicicleta (actúa en dirección vertical), sino que tendrá un valor que no merece la pena considerar. Sí tiene gran relevancia la componente de arrastre. De hecho, en general, es la fuerza resistente de mayor valor cuando se circula a altas velocidades.

Cuando el vehículo circula a través del aire, desde un sistema de referencia situado en el mismo, el fluido presenta movimiento relativo. Se establece alrededor de él un campo de velocidades. Las fuerzas aerodinámicas se producen debido a una diferencia de presiones en el vehículo por este motivo, cuantificable conociendo este campo de velocidades. El gradiente de presiones se manifiesta como una fuerza distribuida en dirección horizontal, en el caso de la componente de arrastre. Cuando éste es laminar, la expresión más adecuada para esta fuerza puede darse a través del Teorema de Kutta-Joukowski,

$$F_{aero} = \rho v_{\infty} S \oint_C v \cos\theta ds$$

Donde  $v_{\infty}$  es la velocidad sin perturbar del fluido,  $\rho$  es su densidad y  $S$  es área del contorno  $C$  considerado. El término  $v \cos\theta$  es la proyección de la velocidad en dirección horizontal, integrada a lo largo de este contorno  $C$  de la geometría del conjunto.

Reiterando, esta fórmula únicamente es adecuada para un campo de velocidades laminar, sin apenas disipación viscosa, porque que solo considera que la diferencia de presiones viene dada por diferencias de velocidad (como se establece en el Teorema de Bernouilli). Si el campo es turbulento la velocidad a lo largo del contorno es difícilmente cuantificable y además tiene una componente pulsante con el tiempo. Asimismo, siempre existe una componente de disipación viscosa que también produce un gradiente de presiones, especialmente relevante en sistemas que alcanzan grandes velocidades.

Estos factores llevan a que en la práctica se simplifique la ecuación anterior incluyendo un término determinado en multitud de ocasiones de forma empírica, llamado coeficiente de arrastre:  $C_x$ . De esta forma la fórmula se simplifica como:

$$F_{aero} = \frac{1}{2} \rho S C_x v_{\infty}^2 \quad (ec. 10)$$

Este coeficiente  $C_x$  es constante, aunque su valor en realidad depende del régimen de flujo alrededor del vehículo: laminar o turbulento, cuantificado habitualmente con el número de Reynolds. El tipo de flujo que se experimenta será en general una combinación de ambos a lo largo del contorno de la bicicleta. Su distribución es apenas variable con la velocidad, por lo que es adecuado tomar siempre el mismo valor de  $C_x$  en este trabajo.

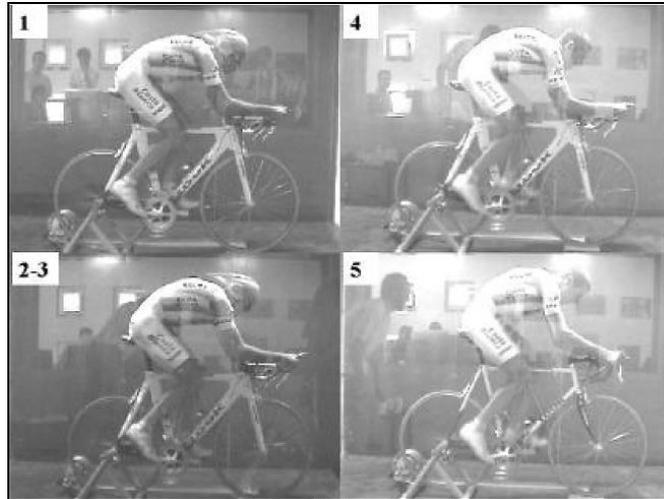


Figura 18. Ensayo en túnel de viento para cuantificar el producto  $S \cdot C_x$ .

*Imagen obtenida de [21]*

Existen estudios en el mundo del ciclismo que se dedican a medir el producto del área considerada (normalmente su proyección horizontal) y su coeficiente  $C_x$ , para calcular la fuerza aerodinámica de arrastre. De este modo proporcionan un valor para el producto de  $S$  y  $C_x$ .

La densidad del aire se tomará preferentemente a temperatura de 25 °C y presión de 1 atm. Se tomará además el producto  $S \cdot C_x$  correspondiente a la media de todas las posiciones sobre la bici que se adoptan en carrera larga.

## 5. CÁLCULO DE LAS RELACIONES DE TRANSMISIÓN

El primer objetivo de este trabajo es determinar qué relaciones de transmisión incorporar a un sistema de transmisión genérico, mediante un método analítico. Se elegirán las que permitan alcanzar una mayor velocidad en régimen permanente, ya que la mayor parte de una competición de ciclismo de carretera discurre en fases de máxima velocidad. Se considerarán diferentes pendientes, oponiendo resistencia o favoreciendo el avance.

Antes de entrar en materia de cálculos, será necesario hacer determinadas suposiciones. El análisis se realizará suponiendo la hipótesis de giro a cadencia constante. Se tendrá por tanto un régimen permanente en el que no solo la variación de energía cinética al final del ciclo es nula, sino que también la velocidad de la coordenada escogida es constante. Esta hipótesis no se aleja excesivamente de la realidad, donde la velocidad angular de las bielas no fluctúa de forma notable. Esta poca variabilidad se debe a una elevada masa del conjunto (o inercia generalizada en este caso), que se opone a grandes aceleraciones durante el ciclo.

Además, la gran mayoría de estudios miden las fuerzas y potencias ejercidas por el ciclista circulando a cadencia constante. Un análisis de este tipo resulta muy útil en competición de ciclismo de carretera, donde se puede suponer que se circula la gran mayoría del tiempo en un régimen permanente, dado a la elevada duración de las carreras. Por el contrario, en bicicletas de montaña sería más necesario enfocarse en la aceleración.

El sistema se diseñará para un corredor de 75 kg de peso. Se supondrá también, viendo la Figura 7, una potencia media de 300 W en su máximo. También un coeficiente de resistencia a la rodadura  $C_{RR} = 0'004$ . Este es un valor típico para neumáticos de alto rendimiento. Se supondrá que el vehículo monta ruedas de aproximadamente 692 mm de diámetro efectivo (35-622 en sistema ISO 5775 y 700 x 35C en sistema “francés”). Éste es un tamaño comúnmente adoptado por las bicicletas de competición. Está cerca del tamaño máximo que la *Union Cycliste Internationale* permite en las bicicletas actuales.

En las partes del sistema se dan distintas velocidades, como se muestra en la figura.

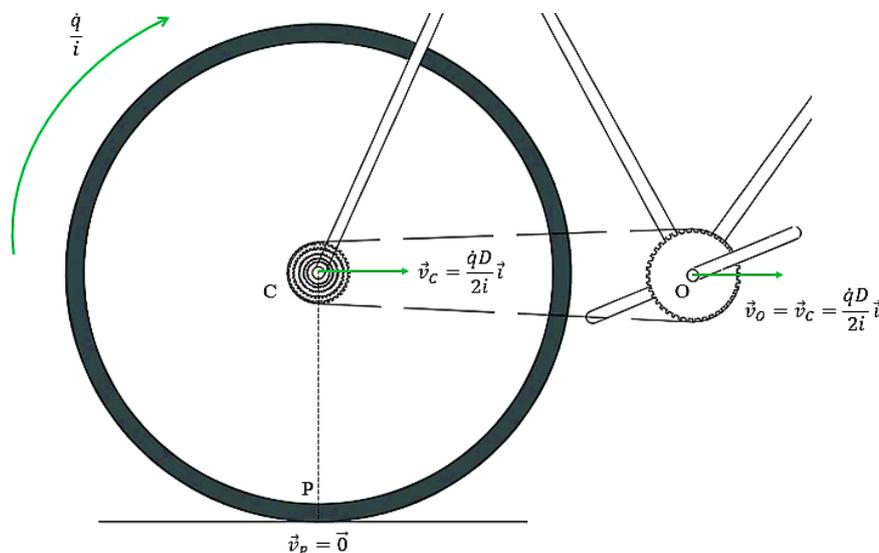


Figura 19. Ilustración de diferentes velocidades en el sistema.

Si la velocidad angular del pedaliar es  $\dot{q}$ , la velocidad angular de salida del sistema de transmisión a la que se mueve la rueda trasera será  $\dot{q}/i$ , usando la definición de la relación de transmisión (velocidad de entrada entre la velocidad de salida del sistema). De este modo con la rodadura, el conjunto tendrá una velocidad de traslación  $\vec{v}_C$ .

$$\vec{v}_C = \vec{v}_P + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & -\frac{\dot{q}}{i} \\ 0 & \frac{D}{2} & 0 \end{vmatrix} = \vec{v}_O = \frac{\dot{q}D}{2i} \vec{i}$$

El punto de contacto de la rueda con la calzada tendrá siempre velocidad nula, es el centro instantáneo de rotación (o CIR). Todo el conjunto tendrá esta velocidad de traslación, aportada a través del movimiento de las bielas.  $D/2$  es el radio de la rueda.

### Determinación de la Fuerza Generalizada

Inicialmente se calcula la fuerza generalizada, componiéndola con las acciones exteriores. Se aplicará para ello el método de potencias virtuales. Atendiendo a las fuerzas conocidas:

### Fuerzas aplicadas en el pedaliar

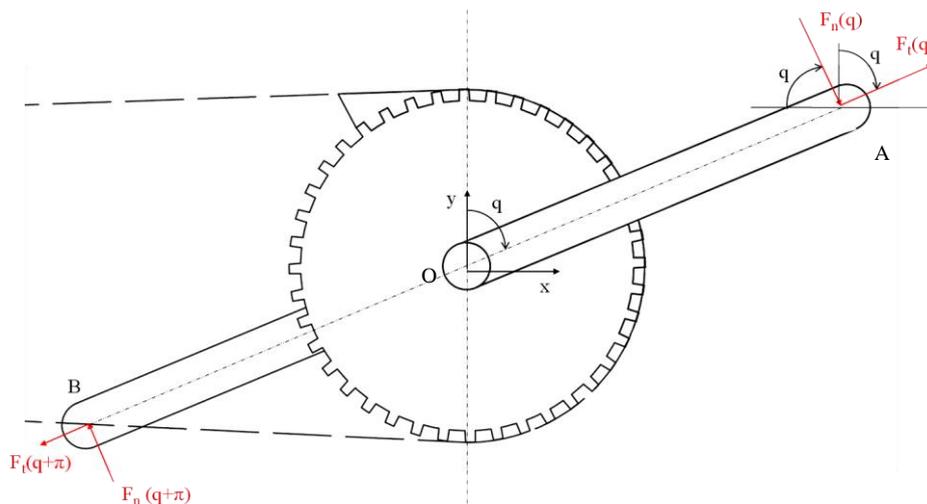


Figura 20. Diagrama de fuerzas en el pedaliar.

Fuerza en A, según ejes x e y, con las componentes conocidas, normal y tangencial:

$$\vec{F}_A = \langle F_{A,x}, F_{A,y} \rangle = \langle F_n(q)\cos q + F_t(q)\sen q, F_t(q)\cos q - F_n(q)\sen q \rangle$$

Velocidad instantánea del punto A, contando con la velocidad de traslación del conjunto:

$$\vec{v}_A = \langle v_{A,x}, v_{A,y} \rangle = \frac{\dot{q}D}{2i} \vec{i} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & -\dot{q} \\ l_B \sen q & l_B \cos q & 0 \end{vmatrix} = \langle \frac{\dot{q}D}{2i} + l_B \cos q \dot{q}, -l_B \sen q \dot{q} \rangle$$

Su derivada para el método de potencias virtuales:

$$\frac{\partial \vec{v}_A}{\partial \dot{q}} = \langle \frac{D}{2i} + l_B \cos q, -l_B \sen q \rangle$$

El producto escalar queda:

$$\begin{aligned}\vec{F}_A^T \left( \frac{\partial \vec{v}_A}{\partial \dot{q}} \right) &= (F_n(q) \cos q + F_t(q) \operatorname{sen} q) \left( \frac{D}{2i} + l_B \cos q \right) \\ &\quad - l_B \operatorname{sen} q (F_t(q) \cos q - F_n(q) \operatorname{sen} q); \\ \vec{F}_A^T \left( \frac{\partial \vec{v}_A}{\partial \dot{q}} \right) &= \frac{D}{2i} (F_n(q) \cos q + F_t(q) \operatorname{sen} q) + F_t(q) l_B \operatorname{sen} q \cos q - F_t(q) l_B \operatorname{sen} q \cos q \\ &\quad + F_n(q) l_B \operatorname{sen} q \cos q - F_n(q) l_B \operatorname{sen} q \cos q + F_n(q) l_B (\cos^2 q + \operatorname{sen}^2 q) \\ &= \boxed{\frac{D}{2i} (F_n(q) \cos q + F_t(q) \operatorname{sen} q) + F_n(q) l_B}\end{aligned}$$

La fuerza marcada en rojo es una reacción, no generará movimiento. Tiene una componente de igual módulo y sentido contrario que no se ha considerado en el diagrama. Es necesaria para que el ciclista se mantenga sobre la bicicleta en equilibrio, le permite apoyarse y ejercer la fuerza efectiva sobre el pedalier.

Esta fuerza de reacción surge al considerarse acciones conocidas ( $F_n(q)$  y  $F_t(q)$ ), y éstas no tienen por qué ser necesariamente acciones exteriores. El par  $F_n(q) l_B$  sí es una acción exterior, compatible con el grado de libertad, que sirve para generar movimiento en el sistema.

Prestando atención a las fuerzas aplicadas en el punto B, aplicadas a un ángulo  $q + \pi$ , según ejes  $x$  e  $y$ :

$$\vec{F}_B = \langle F_{B,x}, F_{B,y} \rangle$$

$$\begin{aligned}\vec{F}_B &= \langle F_n(q + \pi) \cos(q + \pi) + F_t(q + \pi) \operatorname{sen}(q + \pi), F_t(q + \pi) \cos(q + \pi) \\ &\quad - F_n(q + \pi) \operatorname{sen}(q + \pi) \rangle\end{aligned}$$

Con las identidades trigonométricas  $\cos(q + \pi) = -\cos q$  y  $\operatorname{sen}(q + \pi) = -\operatorname{sen} q$ :

$$\vec{F}_B = \langle -F_n(q + \pi) \cos q - F_t(q + \pi) \operatorname{sen} q, -F_t(q + \pi) \cos q + F_n(q + \pi) \operatorname{sen} q \rangle$$

La velocidad del punto B, haciendo uso nuevamente de estas identidades:

$$\vec{v}_B = \langle v_{B,x}, v_{B,y} \rangle = \frac{\dot{q} D}{2i} \vec{i} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & -\dot{q} \\ -l_B \operatorname{sen} q & -l_B \cos q & 0 \end{vmatrix} = \langle \frac{\dot{q} D}{2i} - l_B \cos q \dot{q}, l_B \operatorname{sen} q \dot{q} \rangle$$

Su derivada con respecto a  $\dot{q}$  para el método de potencias virtuales:

$$\frac{\partial \vec{v}_B}{\partial \dot{q}} = \langle \frac{D}{2i} - l_B \cos q, l_B \operatorname{sen} q \rangle$$

El producto escalar:

$$\begin{aligned}\vec{F}_B^T \left( \frac{\partial \vec{v}_B}{\partial \dot{q}} \right) &= -(F_n(q + \pi) \cos q + F_t(q + \pi) \operatorname{sen} q) \left( \frac{D}{2i} - l_B \cos q \right) \\ &\quad + l_B \operatorname{sen} q (-F_t(q + \pi) \cos q + F_n(q + \pi) \operatorname{sen} q)\end{aligned}$$

Finalmente, expandiendo:

$$\vec{F}_B^T \left( \frac{\partial \vec{v}_B}{\partial \dot{q}} \right) = -\frac{D}{2i} (F_n(q + \pi) \cos q + F_t(q + \pi) \operatorname{sen} q) + F_t(q + \pi) \cos q \operatorname{sen} q l_B$$

$$- F_t(q + \pi) l_B \cos q \operatorname{sen} q + F_n(q + \pi) l_B (\cos^2 q + \operatorname{sen}^2 q)$$

$$\vec{F}_B^T \left( \frac{\partial \vec{v}_B}{\partial \dot{q}} \right) = \boxed{-\frac{D}{2i} (F_n(q + \pi) \cos q + F_t(q + \pi) \operatorname{sen} q) + F_n(q + \pi) l_B}$$

Nuevamente la fuerza marcada en rojo es una reacción en el sistema, por los mismos motivos explicados con anterioridad. No se considerará, por tanto, para la fuerza generalizada.

Se tomará una longitud de biela de 175 mm. Esta longitud se adapta a una persona de 1,75 o 1,8 m de altura y es un valor común (ver Figura 6). Para la fuerza normal se realizará un ajuste a partir de un estudio biomecánico, que se detallará más tarde.

#### Fuerzas de resistencia a la rodadura, delantera y trasera

Hay que destacar inicialmente que ambos neumáticos deben tener el mismo diámetro, si se acude nuevamente a la normativa de la UCI como referencia para el diseño. Esta fuerza de resistencia a la rodadura puede calcularse de diferentes maneras. Primero se supondrá la fuerza normal aplicada en el centro de presiones situado en un punto a distancia  $\mu_R$  del centro de la rueda. Este punto estará además a un radio de distancia del centro. El ángulo de este punto en ambas ruedas (si son de igual diámetro) expresado con respecto al ángulo de giro de las bielas será  $q/i$ . Para visualizar el fenómeno se ilustra la rueda con geometría deformada.

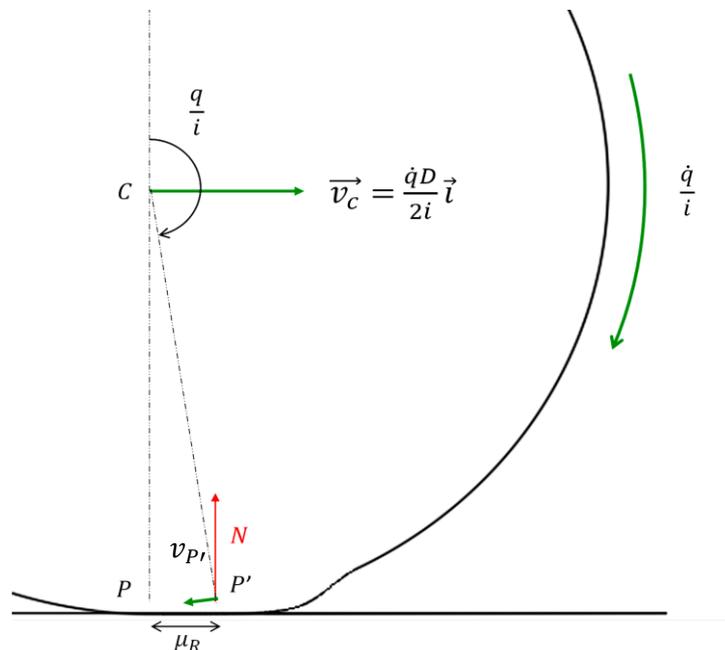


Figura 21. Diagrama de fuerzas en una rueda.

La normal  $N$  tendrá únicamente una componente en  $y$ . Cuando se lleve a cabo el método de potencias virtuales, la fuerza afectará únicamente a la componente vertical la velocidad en el punto de aplicación.

Se procede a calcular la velocidad del punto  $P'$  donde se supone aplicada la normal.

$$\vec{v}_{P'} = \frac{\dot{q}D}{2i} \vec{i} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & -\frac{\dot{q}}{i} \\ \frac{D}{2} \text{sen}\left(\frac{q}{i}\right) & \frac{D}{2} \text{cos}\left(\frac{q}{i}\right) & 0 \end{vmatrix} = \left\langle \frac{\dot{q}D}{2i} + \frac{\dot{q}D}{2i} \text{cos}\left(\frac{q}{i}\right), -\frac{\dot{q}D}{2i} \text{sen}\left(\frac{q}{i}\right) \right\rangle$$

Su derivada con respecto a  $\dot{q}$ :

$$\frac{\partial \vec{v}_{P'}}{\partial \dot{q}} = \left\langle \frac{D}{2i} (1 + \text{cos}\left(\frac{q}{i}\right)), -\frac{D}{2i} \text{sen}\left(\frac{q}{i}\right) \right\rangle$$

Finalmente, para la fuerza generalizada queda un par cuya expresión es:

$$\vec{N}^T \left( \frac{\partial \vec{v}_{P'}}{\partial \dot{q}} \right) = \langle 0, N \rangle \cdot \left\langle \frac{D}{2i} (1 + \text{cos}\left(\frac{q}{i}\right)), -\frac{D}{2i} \text{sen}\left(\frac{q}{i}\right) \right\rangle = -\frac{DN}{2i} \text{sen}\left(\frac{q}{i}\right)$$

Cabe notar que el seno del ángulo puede ser expresado en términos geométricos conocidos. El seno es el cateto opuesto entre la hipotenusa, de la figura se deduce que:

$$\text{sen}\left(\frac{q}{i}\right) = \frac{\mu_R}{\left(\frac{D}{2}\right)}$$

Sustituyendo y poniendo la ecuación en términos del coeficiente de resistencia a la rodadura  $C_{RR}$ , el par de resistencia a la rodadura que se incluirá en la expresión de la fuerza generalizada toma la expresión:

$$-\frac{DN}{2i} \text{sen}\left(\frac{q}{i}\right) = -\frac{\mu_R N}{i} = -\frac{C_{RR} DN}{2i}$$

Se sabe que, debido a la distribución del peso y otras fuerzas, las componentes normales no son las mismas en la rueda delantera que en la trasera. De este modo, los términos de la fuerza generalizada en cada rueda serán distintos.

$$\text{Rueda delantera: } -\frac{C_{RR} DN_D}{2i} \quad \text{Rueda trasera: } -\frac{C_{RR} DN_T}{2i}$$

La rueda delantera y trasera usan el mismo modelo de neumático con su correspondiente  $C_{RR}$ . Se reitera aquí que se estimará un coeficiente  $C_{RR} = 0,004$ .

Si se hace un equilibrio de fuerzas con las resultantes, dado que el vehículo no se acelera en dirección  $y$ , considerando la pendiente con ángulo  $\alpha$  y atendiendo a la Figura 16:

$$\sum F_y = 0 = m_c g \cos \alpha - N_T - N_D$$

$$N_D + N_T = m_c g \cos \alpha$$

Al sumar los términos de la fuerza generalizada debidos a la rueda delantera y trasera puede sustituirse la expresión anterior. Queda finalmente el término debido a la rodadura.

$$-\frac{C_{RR} DN_D}{2i} - \frac{C_{RR} DN_T}{2i} = -\frac{C_{RR} D (N_D + N_T)}{2i} = \boxed{-\frac{C_{RR} D}{2i} m_c g \cos \alpha}$$

La fuerza que ejerce el ciclista sobre los pedales en dirección y nuevamente es una reacción. Tiene una componente de igual módulo y sentido contrario sobre el conjunto que permite el equilibrio del ciclista sobre la bicicleta en esta dirección. Por ello, puede considerarse, al hacer el sumatorio de fuerzas en  $y$ , únicamente el peso y su reacción sobre la calzada, que son las resultantes normales.

### Fuerza peso

Nuevamente se debe atender a la Figura 16 para descomponer el peso. Esta fuerza puede ser expresada con el ángulo de pendiente en  $x$  e  $y$ .

$$\vec{F}_{grav} = \langle -m_c g \operatorname{sen} \alpha, -m_c g \operatorname{cos} \alpha \rangle$$

La velocidad del centro de masas donde se considera aplicada es únicamente de traslación, moviéndose con el conjunto.

$$\vec{v}_G = \frac{\dot{q}D}{2i} \vec{i} = \langle \frac{\dot{q}D}{2i}, 0 \rangle$$

Su derivada para el método de potencias virtuales:

$$\frac{\partial \vec{v}_G}{\partial \dot{q}} = \langle \frac{D}{2i}, 0 \rangle$$

El término de la fuerza generalizada queda:

$$\vec{F}_{grav}^T \left( \frac{\partial \vec{v}_G}{\partial \dot{q}} \right) = \boxed{-\frac{D}{2i} m_c g \operatorname{sen} \alpha}$$

Para el cálculo se tomarán diferentes pendientes y una masa del conjunto de  $75 + 6'8 = 81'8$  kg. Este valor viene de una masa del ciclista de 75 kg y un peso del vehículo de 6'8 kg, que es el mínimo que establece la UCI para que las bicicletas de competición puedan considerarse seguras. Como el sistema a diseñar es de mínimo peso, se tomará que la masa del vehículo es la mínima admitida en competición.

El peso no tiene influencia en el movimiento rotativo de las partes, como por ejemplo el pedalier de la siguiente figura, debido a que en ellos se encuentra equilibrado.

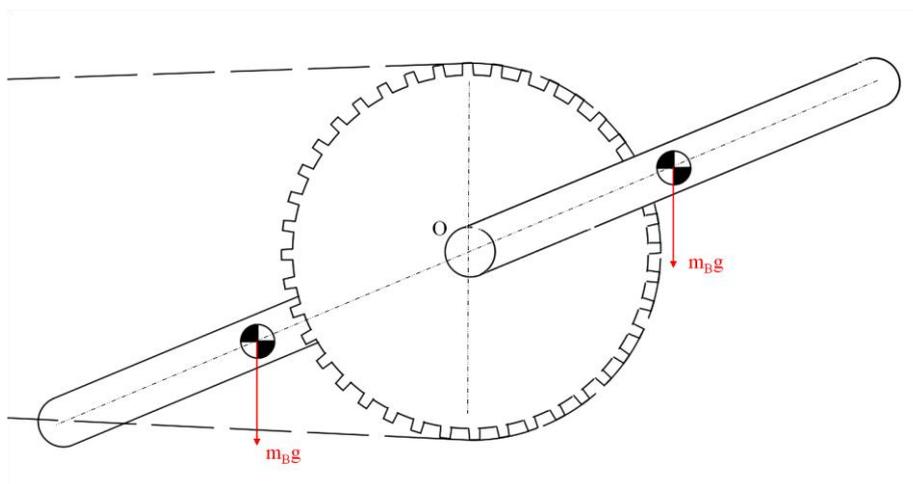


Figura 22. Ejemplo de pesos equilibrados en los componentes rotativos.

## Fuerza aerodinámica de arrastre

Para este cálculo se considera que el conjunto vehículo-ciclista se mueve a través del aire en reposo. Éste, por tanto, tendrá una velocidad relativa desde el sistema de referencia situado en el propio vehículo, con ejes  $x$  e  $y$  marcados anteriormente. El vehículo tiene una velocidad lineal  $\frac{\dot{q}D}{2i} \vec{i}$ .

También, tal y como se ha mencionado, la componente aerodinámica de sustentación, o vertical, será considerada despreciable. Si se tuviera en cuenta tampoco tendría ninguna influencia en el resultado.

La fuerza aerodinámica será una fuerza distribuida de módulo igual al dado por la fórmula de Kutta-Joukowski con término  $\vec{v}_\infty = \frac{\dot{q}D}{2i} (-\vec{i})$ . Esta es la velocidad relativa del fluido sin perturbar y es expresada aquí como vector con respecto a un observador sobre el vehículo. La fuerza es contraria al movimiento, por lo que toma signo negativo.

Será necesaria también la densidad del aire, para lo que se considerarán condiciones normales de 25 °C y 1 atm. Con la ley de los gases perfectos y su peso molecular esta densidad es:

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{P_m n}{\left(\frac{nRT}{P}\right)} = \frac{P_m P}{RT} = \frac{28'84 \cdot 10^{-3} \cdot 101325}{8'314 \cdot (25 + 273'15)} = 1'184 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

Este valor deberá tenerse en cuenta al final del desarrollo, cuando se sustituyan los valores indicados en el apartado de cálculo. Con esto, la fuerza aerodinámica de arrastre se da a continuación.

$$\vec{F}_{aero} = -\frac{1}{2} \rho S C_x \|\vec{v}_\infty\|^2 \vec{i} = -\frac{1}{2} \rho S C_x \left(\frac{\dot{q}D}{2i}\right)^2 \vec{i} = -\frac{1}{2} \rho S C_x \frac{D^2}{4i^2} \dot{q}^2 \vec{i}$$

La velocidad del punto sobre el que actúa la resultante (el centro de presiones, CP) es la propia de traslación del vehículo, por lo que la velocidad para el cálculo del método de potencias virtuales es:

$$\vec{v}_{CP} = \frac{\dot{q}D}{2i} \vec{i} = \left\langle \frac{\dot{q}D}{2i}, 0 \right\rangle$$

Su derivada es entonces:

$$\frac{\partial \vec{v}_{CP}}{\partial \dot{q}} = \left\langle \frac{D}{2i}, 0 \right\rangle$$

El producto escalar queda de la siguiente manera:

$$\vec{F}_{aero}^T \left( \frac{\partial \vec{v}_{CP}}{\partial \dot{q}} \right) = \left\langle -\frac{1}{2} \rho S C_x \frac{D^2}{4i^2} \dot{q}^2, 0 \right\rangle \cdot \left\langle \frac{D}{2i}, 0 \right\rangle = \boxed{-\frac{1}{2} \rho S C_x \frac{D^3}{8i^3} \dot{q}^2}$$

El producto  $S \cdot C_x$  se obtiene a partir del estudio [21], donde se hace una comparativa entre diferentes sujetos de su  $S \cdot C_x$  característico según diferentes posiciones en la bicicleta. Se hará una media de las posiciones que se ilustran en la Figura 18 para cuantificarlo.

Se atiende a la tabla que proporciona el estudio, donde ya se proporciona la media de  $S \cdot C_x$  de los sujetos estudiados.

SCx (m <sup>2</sup> )	Posicion1	Posicion2	Posicion3	Posicion4	Posicion5
Sujeto 1	0,237	0,366	0,292	<b>0,255</b>	0,469
Sujeto 2	0,276	0,307	<b>0,299</b>	0,315	0,521
Sujeto 3	0,291	0,321	<b>0,299</b>	0,306	0,515
Sujeto 4	0,237	0,377	<b>0,293</b>	0,326	0,469
Sujeto 5	0,259	0,333	<b>0,283</b>	<b>0,283</b>	0,428
MEDIA	0,260	0,341	0,293	0,297	0,481

Figura 23. Valores de  $S \cdot C_x$  para las diferentes posiciones y sujetos.

*Imagen obtenida de: [21]*

La media aritmética proporciona el valor que se tomará.

$$S \cdot C_x = \frac{0'260 + 0'341 + 0'293 + 0'297 + 0'481}{5} = 0'3344 \text{ m}^2$$

Finalmente, se tienen todos los términos que compondrán la fuerza generalizada. En la ecuación 8, que permite expresar las acciones actuando en la coordenada  $q$ , se incluye lo calculado.

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m \vec{F}_i^T \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}} &= F_n(q)l_B + F_n(q + \pi)l_B - \frac{C_{RR}D}{2i} m_C g \cos \alpha - \frac{D}{2i} m_C g \sin \alpha \\ &- \frac{1}{2} \rho S C_x \frac{D^3}{8i^3} \dot{q}^2 - \frac{D}{2i} (F_n(q + \pi) \cos q + F_t(q + \pi) \sin q) \\ &+ \frac{D}{2i} (F_n(q) \cos q + F_t(q) \sin q) \quad (\text{ec. 8}) \end{aligned}$$

Tomando únicamente las acciones exteriores que inducen el movimiento, la fuerza generalizada queda:

$$Q = F_n(q)l_B + F_n(q + \pi)l_B - (C_{RR} \cos \alpha + \sin \alpha) \frac{m_C g D}{2i} - \frac{1}{2} \rho S C_x \frac{D^3}{8i^3} \dot{q}^2 \quad (\text{ec. 11})$$

La expresión la componen un par motriz y otro resistente. El par motriz,  $Q_m$ , es el ejercido a través de la fuerza normal en cada una de las bielas, que están desfasadas 180°. Los términos resistentes,  $Q_r$ , son mayores cuanto mayor es la pendiente. La masa del conjunto tiene una gran influencia en la ecuación para ángulos de pendiente  $\alpha$  altos.

La fuerza de arrastre aerodinámico depende de la cadencia de giro  $\dot{q}$  que se considerará constante con la marcha para el cálculo. Este término es el más importante dentro del par resistente a grandes velocidades.

No se han considerado otro tipo de pérdidas menores, como disipación energética en los rodamientos o en la cadena.

Se ha ido detallando el valor numérico que se tomará para todos los parámetros de esta expresión, exceptuando únicamente la función que compone el par motriz, para lo que se realizará un ajuste a partir de determinados estudios.

### Ajuste del Par Motriz

El par motriz  $Q_m$  corresponderá al ejercido en fase anaeróbica (ver Figura 7). Se recurrirá a los estudios [10] y [12]. Se tendrá en cuenta que el ciclista ejerce una potencia media en torno a un máximo de 300 W. Se seguirá la siguiente estrategia:

A partir de las gráficas de par-ángulo de biela del estudio [12] se obtendrán puntos de un par ejercido por un ciclista profesional. Éste circula ejerciendo una potencia desconocida. Los puntos obtenidos son únicamente para una biela, por lo que será necesario sumarle los de la otra, con un desfase angular de  $180^\circ$ . Se realizará un ajuste inicial para este par motriz en función de  $q$ , contando con ambas bielas, y se denominará  $Q_{m,estudio}$ ,

$$Q_{m,estudio} = F_{n,estudio}(q)l_{B,estudio} + F_{n,estudio}(q + \pi)l_{B,estudio} \text{ (ec. 12)}$$

Más tarde, se dividirá la función ajustada por la longitud de biela usada por los investigadores ( $l_{B,estudio} = 170 \text{ mm}$ ) para adaptarla a la de este trabajo, 175 mm.

Se dividirá también por el máximo de la función resultante, haciéndola unitaria en este punto. Se hace para posteriormente hacer un escalado, multiplicando por la amplitud que debe tener esta curva para que se ejerza la potencia media de cálculo. Este escalado implica que la curva de par con respecto al ángulo de biela tome la misma forma y distinta amplitud según determinadas potencias, lo que no es algo para nada alejado de la realidad (ver Figura 10).

Tras todo este proceso, se podrá expresar la fuerza motriz para la potencia media y longitud de biela deseadas.

Comenzando con esta estrategia, se trasladan puntos de la gráfica del estudio [12] a *Microsoft Excel*, tomados con el programa gratuito *Plot Digitizer*.

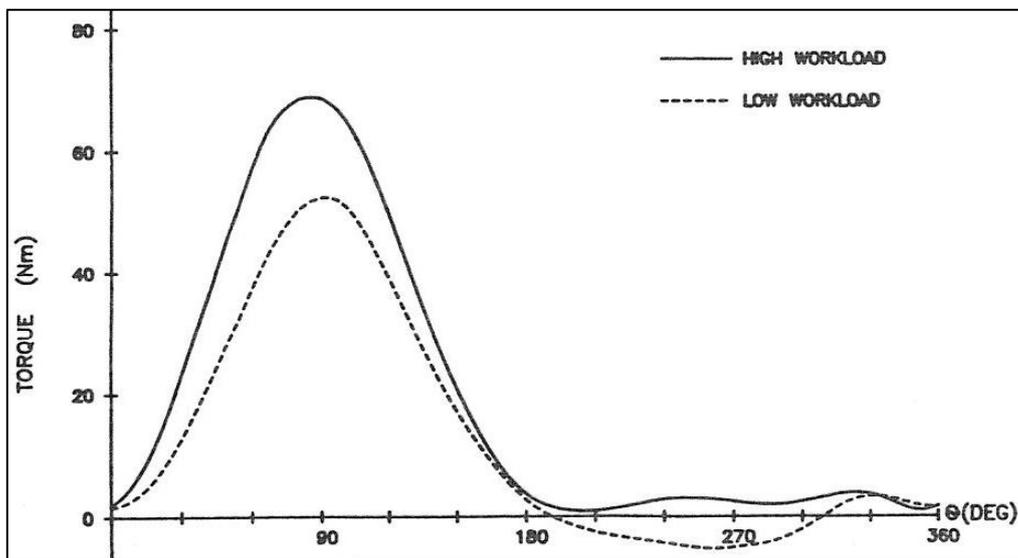


Figura 24. Ensayo del ciclo de pedaleo, par según carga de trabajo.

*Imagen obtenida de:* [12]

Se ha elegido la curva de baja potencia para la representación del ciclo de pedaleo, ya que es la más parecida a la que ofrecen otros estudios. Esta incluye una zona de par negativo para  $q > 180^\circ$ .

Tras tomar puntos se añade la acción de la segunda biela, con un decalaje de la misma gráfica a una coordenada  $q - 180^\circ$ . Finalmente se suman los valores de par entre ambas bielas para obtener el total del conjunto pedalier. El proceso se ilustra en la Figura 25 y Figura 26.

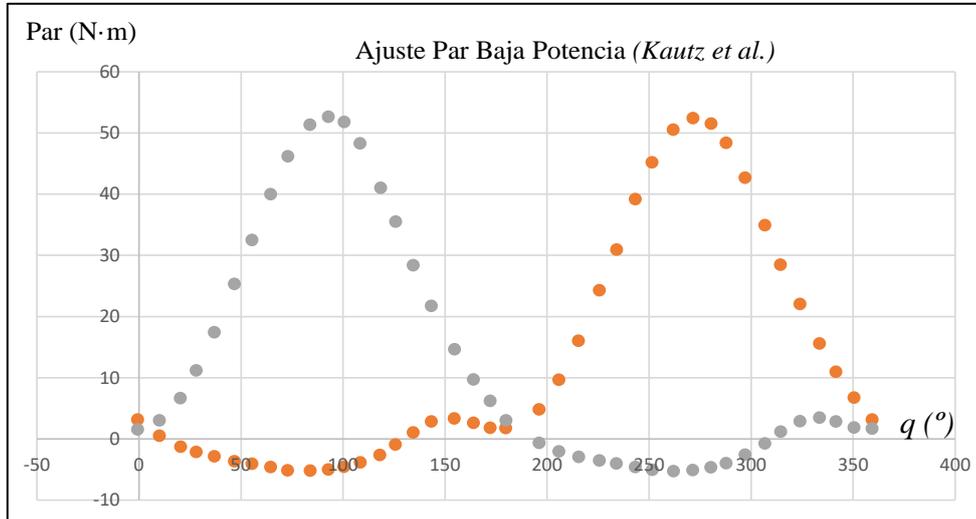


Figura 25. Representación por puntos del par en cada una de las bielas.

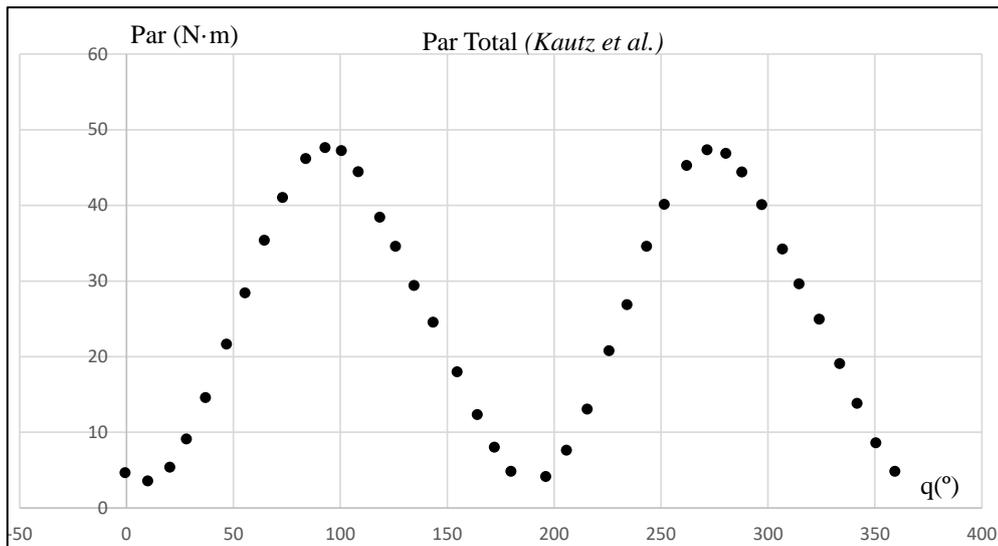


Figura 26. Representación por puntos del par total.

Una vez obtenidos los puntos correspondientes al par total del estudio [12] se requiere realizar el ajuste con respecto a la variable  $q$ . Para ello se ha usado el programa *Wolfram Mathematica 11.3*. Dado que la distribución de puntos es similar a la de una función sinusoidal, se opta por un ajuste del estilo de una Serie de Fourier con 7 frecuencias distintas. La inclusión de senos y cosenos en la función facilitará el cálculo más adelante.

El ajuste correspondiente para este par motriz es:

$$Q_{m,estudio} = a_0 + \sum_{k=1}^7 a_k \cos\left(k \cdot q \frac{\pi}{180}\right) + \sum_{k=1}^7 b_k \sen\left(k \cdot q \frac{\pi}{180}\right) \quad (ec. 13)$$

Aquí  $q$  se introduce en grados, recorriéndose múltiplos de su frecuencia, como se da en una Serie de Fourier. Sin embargo, solo se tomarán hasta 7 múltiplos de la frecuencia fundamental. Con todos los términos se ajusta la función con muy poco error.

Los coeficientes  $a_0$  y los respectivos  $a_k$  y  $b_k$  los determina el programa, minimizando la desviación del ajuste con respecto a los puntos. Obviamente éstos no pueden obtenerse de forma analítica porque se carece de la expresión exacta.

Otra ventaja de este ajuste es que es periódico para  $0 \leq q \leq 360^\circ$ , lo que no se da en un ajuste polinómico. El ciclo de pedaleo es también periódico en el mismo intervalo. Esto significa que la función puede describir correctamente el par total del estudio para cualquier valor del ángulo de biela.

A continuación, se representa cómo se ajusta esta función a los puntos en comparación con un ajuste polinómico de grado 10.

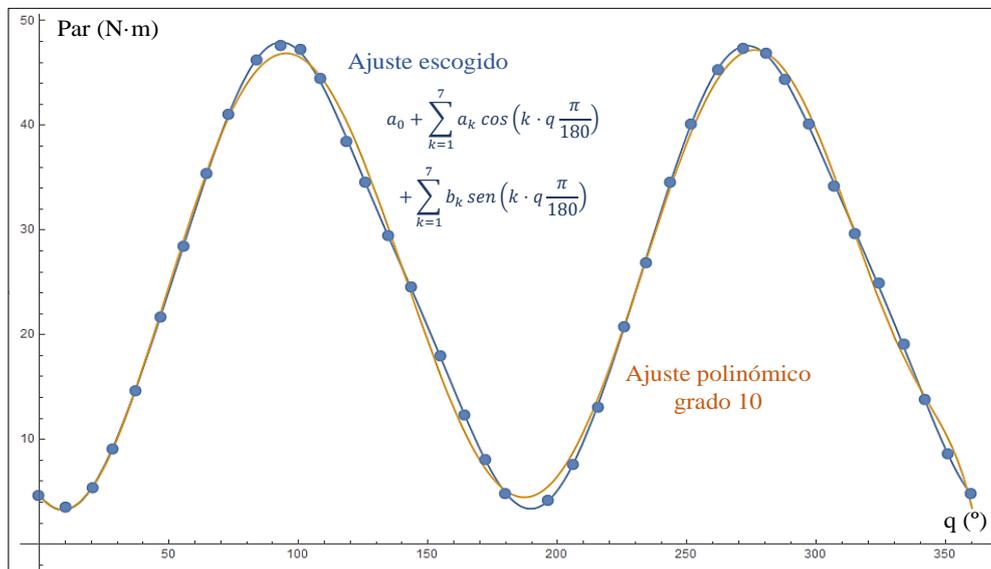


Figura 27. Comparación de la función elegida y un polinomio de grado 10.

Se procede ahora a hacer de esta función ajustada una de amplitud unitaria para escalarla de acuerdo con los parámetros de este trabajo. Con los coeficientes ya dados por *Mathematica*, se divide por la longitud de biela usada por Kautz et al., 0'17 m. Por consiguiente, se obtiene una suma de fuerzas normales (véase ecuación 12). Se divide de inmediato por su máximo, 282 N (proveniente del par máximo 47'94 Nm entre 0'17 m).

De esta forma la ecuación 13 ha sido transformada en un ajuste unitario en su amplitud. Seguirá siendo una suma al estilo Serie de Fourier, con diferentes coeficientes. Estos nuevos coeficientes toman los siguientes valores<sup>1</sup>:

$$\begin{aligned}
 a'_0 &= 0'5327, a'_1 = 0'0024, a'_2 = -0'4335, a'_3 = -0,0021, a'_4 = -0'0133, \\
 a'_5 &= 0'0025, a'_6 = -0'0130, a'_7 = -4 \cdot 10^{-5}, b'_1 = 0'0003, b'_2 = -0'1032, \\
 b'_3 &= -0'0011, b'_4 = -0'0279, b'_5 = 0'0015, b'_6 = -0'0072, b'_7 = -0'0006
 \end{aligned}$$

<sup>1</sup> El símbolo ' representa la diferencia entre los coeficientes del ajuste normalizado y los de la ec. 13.

Resumiendo, el propósito de esta idea es poder expresar el par ejercido con una longitud de biela propia (5 mm superior a la del estudio), además de expresar la fuerza motriz como una función de amplitud variable con la potencia media ejercida.

La función que da el par motriz, relacionado con el ángulo de biela en grados, para los parámetros propios de este trabajo es:

$$Q_m(q) = F_n(q)l_B + F_n(q + \pi)l_B$$

$$= F_{max}l_B \left( a'_0 + \sum_{k=1}^7 a'_k \cos \left( k \cdot q \frac{\pi}{180} \right) + \sum_{k=1}^7 b'_k \sen \left( k \cdot q \frac{\pi}{180} \right) \right) \text{ (ec. 14)}$$

Para hallar el valor de la amplitud  $F_{max}$ , se usa la fórmula de la potencia media en un ciclo, aportada al sistema a través de este par motriz  $Q_m$ . Se calcula, ahora sí, con la longitud de biela deseada  $l_B = 0'175 \text{ m}$ . La potencia media depende directamente de la expresión de la ecuación 14.

$$\bar{P} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} Q_m \dot{q} dq, \quad q \text{ en rad} \text{ (ec. 15)}$$

Obsérvese la gráfica de la Figura 8. La potencia media que puede ejercer un corredor depende de la cadencia a la que gira. Se debe obtener el ajuste para un valor óptimo de 300 W, expresando la cadencia en unidades naturales de rad/s. Para ello, se utiliza el programa *Excel*, trasladando puntos desde *Plot Digitizer* nuevamente. Se conoce que es una expresión cuadrática, cuyo máximo está en 12'25 rad/s (117 rpm). Como la gráfica da el porcentaje de la potencia máxima, únicamente se ha de multiplicar por el valor máximo. La gráfica y el ajuste quedan:

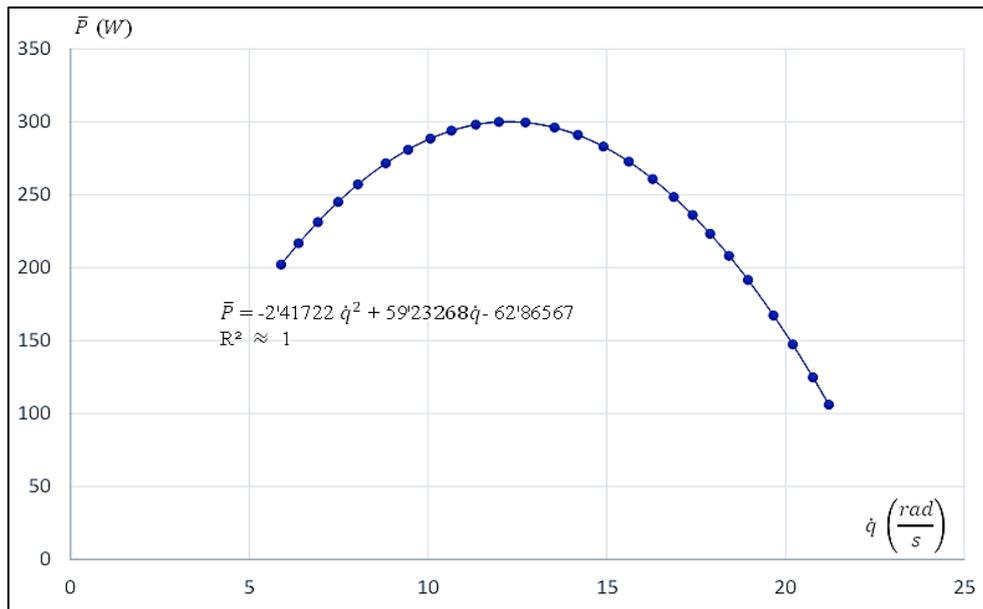


Figura 28. Ajuste de la potencia media con la cadencia.

Si se igualan la ecuación 15 y el ajuste que presenta *Excel*, se obtiene una relación para extraer la amplitud  $F_{max}$ . Ésta sale lógicamente dependiente de la cadencia de giro. Tendrá que expresarse  $q$  en radianes, por lo que se multiplica  $q$  por  $180/\pi$  dentro del ajuste de la ecuación 14.

El ajuste de la Figura 28 únicamente es válido para un determinado rango de cadencias. Esta función debería cortar en 0 el eje de ordenadas, pero no es así. Por tanto, se comprobará que los resultados que se van a obtener en apartados posteriores estén asociados a una cadencia en el rango correcto. Continuando, se igualan las expresiones, para obtener  $F_{max}$ .

$$\bar{P} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} Q_m \dot{q} dq = -2'41722\dot{q}^2 + 59'23268\dot{q} - 62'86567$$

Se sustituye en la igualdad la ecuación 14.

$$\begin{aligned} \bar{P} &= \frac{1}{2\pi} F_{max} l_B \int_0^{2\pi} \left( a'_0 + \sum_{k=1}^7 a'_k \cos(k \cdot q) + \sum_{k=1}^7 b'_k \sen(k \cdot q) \right) \dot{q} dq \\ &= \frac{1}{2\pi} F_{max} l_B \dot{q} \left( \int_0^{2\pi} a'_0 dq + \sum_{k=1}^7 \int_0^{2\pi} a'_k \cos(k \cdot q) dq + \sum_{k=1}^7 \int_0^{2\pi} b'_k \sen(k \cdot q) dq \right) \end{aligned}$$

$\dot{q}$  puede sacarse fuera de la integral, porque se considera constante durante la marcha. Dado que la integral es un operador lineal, puede intercambiarse con los sumatorios. Las integrales de las funciones trigonométricas a lo largo de un período son 0, por lo que únicamente contribuirá el término  $a'_0$  del ajuste, que corresponde al valor medio de la función en una hipotética Serie de Fourier exacta.

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \sum_{k=1}^7 \int_0^{2\pi} a'_k \cos(k \cdot q) dq + \sum_{k=1}^7 \int_0^{2\pi} b'_k \sen(k \cdot q) dq \\ &= \sum_{k=1}^7 a'_k \left( \frac{\sen(2k\pi)}{k} - \frac{\sen(0)}{k} \right) + \sum_{k=1}^7 b'_k \left( -\frac{\cos(2k\pi)}{k} + \frac{\cos(0)}{k} \right) = 0 \end{aligned}$$

Por tanto, la potencia media es, continuando con la igualdad planteada:

$$\bar{P} = \frac{1}{2\pi} F_{max} l_B \dot{q} \int_0^{2\pi} a'_0 dq = a'_0 F_{max} l_B \dot{q} = -2'41722\dot{q}^2 + 59'23268\dot{q} - 62'86567$$

De aquí puede obtenerse ya la relación de la amplitud  $F_{max}$  con la cadencia de giro. Con esto se tendría el ajuste del par motriz de este trabajo definido, con todos los parámetros necesarios para calcular la fuerza generalizada.

Como  $a'_0 = 0'5327$  y  $l_B = 0'175$  m:

$$\begin{aligned} \bar{P} &= 0'5327 \cdot 0'175 \cdot F_{max} \cdot \dot{q} = -2'41722\dot{q}^2 + 59'23268\dot{q} - 62'86567 \\ \Rightarrow F_{max} &= -25'92964\dot{q} + 635'39079 - \frac{674'36196}{\dot{q}}, \quad \dot{q} \text{ en } \frac{\text{rad}}{\text{s}} \text{ (ec. 16)} \end{aligned}$$

Se ha relacionado la amplitud del ajuste con la cadencia, utilizando la potencia media.

De esta manera, si se sustituye en la ecuación 14, ya se tiene todos los parámetros que componen el par motriz de este trabajo, quedando en función de la cadencia, como ocurre con el par resistente.

## Aplicación del Teorema de las Fuerzas Vivas

Con el Teorema de las Fuerzas Vivas podrá relacionarse la cadencia de giro con las relaciones de transmisión del sistema a modelar, atendiendo a diferentes pendientes. El objetivo de este cálculo es ver qué relaciones de transmisión permiten alcanzar una mayor velocidad en régimen permanente, siempre bajo la suposición de cadencia constante.

Como se trata del diseño de una transmisión de mínimo peso, no se incorporarán muchas marchas al sistema, dado que esto aumentaría considerablemente su masa. Para que un corredor tenga un rango adecuado de marchas, las transmisiones monoplato requieren poder cubrir todo tipo de inclinaciones que se encontrará el corredor en la carretera.

Las marchas se adoptarán según las pendientes más habituales que puede encontrarse un corredor en una carretera convencional. Este sistema no se diseñará para puertos de montaña u otro tipo de etapas, que requieren considerar grandes cuestas. Este rango de inclinaciones se encontrará, entre un -15% y 15%, aproximadamente entre -8 y 8°.

El Teorema de las Fuerzas Vivas permite predecir cuándo se da el régimen permanente. Como las incógnitas de la fuerza generalizada son la cadencia y las relaciones de transmisión, este Teorema proporcionará una relación entre ellas.

Aplicando la ecuación 3 en un ciclo, con cadencia constante y considerando las componentes motriz y resistente de la fuerza generalizada:

$$\frac{1}{2}I^*(2\pi)\dot{q}^2 - \frac{1}{2}I^*(0)\dot{q}^2 = \int_0^{2\pi} Q dq = \int_0^{2\pi} (Q_m + Q_r) dq = 0$$

La inercia generalizada no varía a lo largo del ciclo, como se demostrará en el próximo capítulo. Sustituyendo la expresión de la fuerza generalizada queda:

$$\int_0^{2\pi} (F_n(q)l_B + F_n(q + \pi)l_B - (C_{RR}\cos\alpha + \text{sen}\alpha)\frac{m_c g D}{2i} - \frac{1}{2}\rho S C_x \frac{D^3}{8i^3} \dot{q}^2) dq = 0$$

Se hace uso del ajuste obtenido en el apartado anterior para el par motriz de la fuerza generalizada  $Q_m = F_n(q)l_B + F_n(q + \pi)l_B$ . El par resistente es constante con  $q$ , por lo que queda multiplicado por  $2\pi$ .

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} Q dq &= \int_0^{2\pi} Q_m dq - 2\pi((C_{RR}\cos\alpha + \text{sen}\alpha)\frac{m_c g D}{2i} + \frac{1}{2}\rho S C_x \frac{D^3}{8i^3} \dot{q}^2) \\ &= F_{max}l_B \int_0^{2\pi} \left( a'_0 + \sum_{k=1}^7 a'_k \cos(k \cdot q) + \sum_{k=1}^7 b'_k \text{sen}(k \cdot q) \right) dq \\ &\quad - 2\pi((C_{RR}\cos\alpha + \text{sen}\alpha)\frac{m_c g D}{2i} + \frac{1}{2}\rho S C_x \frac{D^3}{8i^3} \dot{q}^2) = 0 \end{aligned}$$

Como se ha demostrado anteriormente, el valor de las integrales de las funciones trigonométricas a lo largo de un ciclo es 0. El régimen permanente queda:

$$\int_0^{2\pi} Q dq = 2\pi \left( F_{max}l_B a'_0 - ((C_{RR}\cos\alpha + \text{sen}\alpha)\frac{m_c g D}{2i} + \frac{1}{2}\rho S C_x \frac{D^3}{8i^3} \dot{q}^2) \right) = 0$$

Cancelando el factor  $2\pi$  se llega a la igualdad 17.

$$F_{max} l_B a'_0 - \left( (C_{RR} \cos \alpha + \operatorname{sen} \alpha) \frac{m_C g D}{2i} + \frac{1}{2} \rho S C_x \frac{D^3}{8i^3} \dot{q}^2 \right) = 0 \quad (ec. 17)$$

Recapitulando, los parámetros que conforman esta expresión son los siguientes:

$$F_{max} = -25'92964 \dot{q} + 635'39079 - \frac{674'36196}{\dot{q}}$$

$$a'_0 = 0'5327, \quad l_B = 0'175 \text{ m}, \quad C_{RR} = 0'004, \quad m_C = 81'8 \text{ kg}, \quad g = 9'81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2},$$

$$D = 0'692 \text{ m}, \quad \rho = 1'184 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}, \quad S C_x = 0'3344 \text{ m}^2$$

Sustituyéndolos en la ecuación 17 queda finalmente una función entre la velocidad angular del pedalier, la relación de transmisión y las pendientes.

$$-0'0082 \dot{q}^3 - 2'41723 i^3 \dot{q}^2 + 59'2327 i^3 \dot{q} - (1'1106 \cos(\alpha) + 277'65 \operatorname{sen}(\alpha)) i^2 \dot{q} - 62'8657 i^3 = 0 \quad (ec. 18)$$

Para este cálculo sería conveniente sustituir la cadencia  $\dot{q}$  de la ecuación anterior por la velocidad de traslación del conjunto vehículo-ciclista  $v_0$ , de esta manera puede visualizarse de manera más intuitiva las velocidades que se puede llegar a alcanzar.

$$\frac{\dot{q} D}{2i} = v_0 \rightarrow \dot{q} = \frac{2i v_0}{D} = \frac{i v_0}{0'346}, \quad v_0 \text{ en } \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

También es más fácil interpretar los resultados con la velocidad en km/h. Si en la ecuación  $v_0$  debe ir en  $\frac{\text{m}}{\text{s}}$ , tendrá que ser dividida por 3'6 para introducirse en km/h.

$$\dot{q} = \frac{1}{3'6} \cdot \frac{i v_0}{0'346} = \frac{i v_0}{1'2456}, \quad v_0 \text{ en } \frac{\text{km}}{\text{h}} \quad (ec. 19)$$

De esta forma queda, al sustituir en la igualdad 18 la ecuación 19:

$$-0'00528517 v_0^3 - 1'94061 i^2 v_0^2 + (59'2327 i - 1'1106 \cos(\alpha) - 277'65 \operatorname{sen}(\alpha)) v_0 - 78'3055 = 0 \quad (ec. 20)$$

Dado que la ecuación en  $i$  es cuadrática, mientras que en  $v_0$  es cúbica, se opta, por simplicidad, por resolver en  $i$  para representar la función resultante.

Se dará valores a las pendientes en el intervalo de -8 a 8 grados. Para cubrir este rango con un sistema monoplato se opta por tomar 9 marchas diferentes. Para eso se escogen valores de pendiente de en intervalos equiespaciados de 2 grados, escogiendo las relaciones de transmisión que mayor velocidad máxima permitan en estas condiciones.

El objetivo del equiespaciado es que pueda cubrirse este rango de pendientes con las 9 marchas sin perder demasiada efectividad entre cambios de inclinación.

Las siguientes curvas son representativas de 9 pendientes diferentes variando en dichos intervalos de 2 grados. Se representan relaciones de transmisión negativas, aunque esto no se puede dar. Se incorporarán de esta forma las relaciones correspondientes al máximo de la función, como se observa gráficamente.

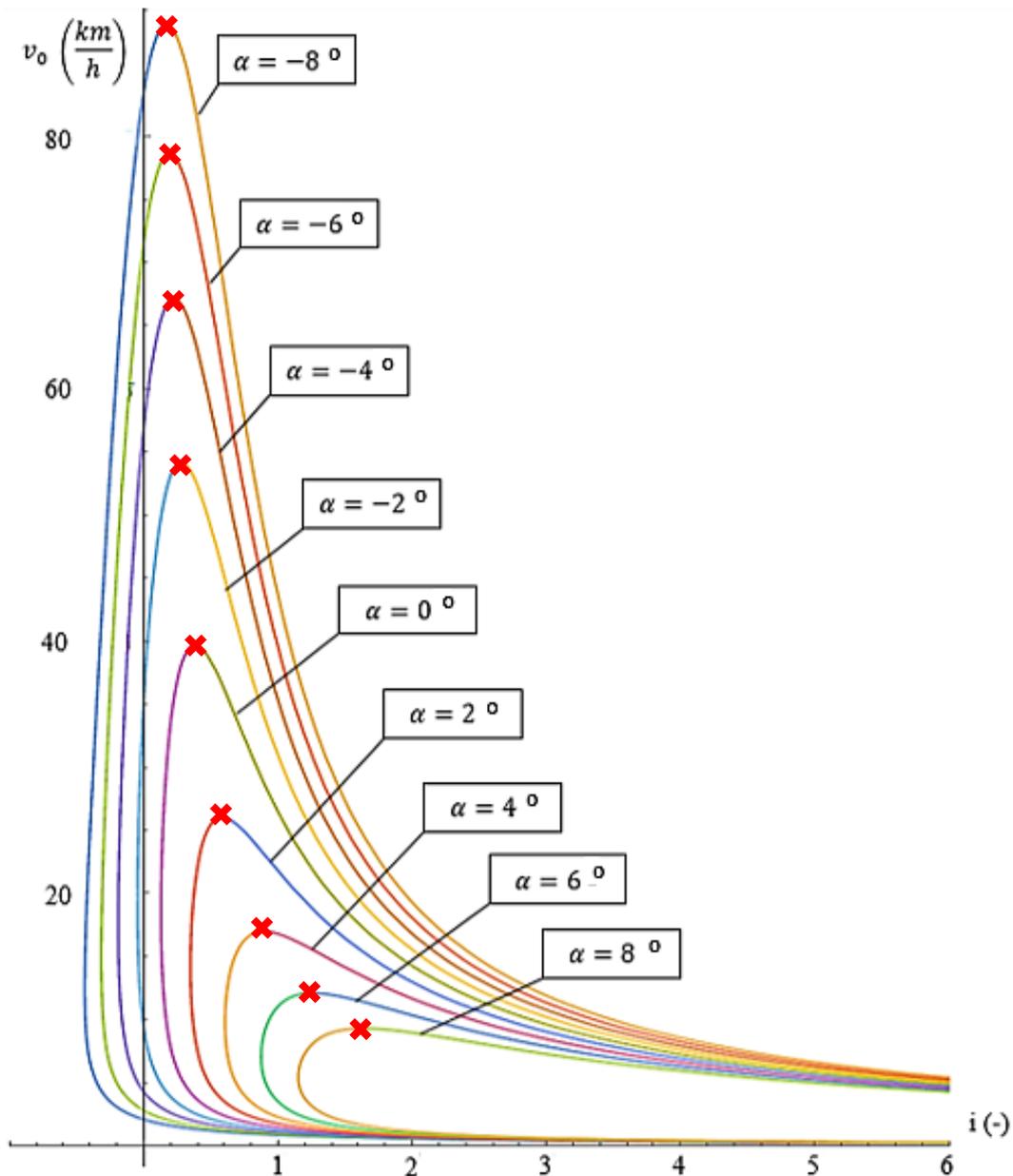


Figura 29. Velocidad en régimen permanente según relación de transmisión.

Se puede observar que, con esta configuración, la velocidad máxima que se podría alcanzar en el régimen permanente es de alrededor de 40 km/h para pendiente nula, con una  $i = 0,3848$ .

Si hay una bajada de  $8^\circ$  de inclinación entonces el vehículo se estabilizaría en torno a los 90 km/h con una marcha de  $i = 0,1717$ . Esta velocidad es muy elevada. En competición puede llegar a alcanzarse incluso los 100 km/h en grandes descensos.

Con una pendiente de 8° la velocidad máxima alcanzable estará en torno a los 10 km/h con una relación de transmisión de reducción de la velocidad ( $i = 1'6417$ ).

Puede comprobarse que los puntos donde la velocidad es máxima corresponden a una relación de transmisión que permite una cadencia cercana a 117 rpm, óptima para sostener una potencia media de 300 W (ver Figura 28).

Haciendo uso del programa *Mathematica*, con el que se ha obtenido las curvas anteriores, puede encontrarse los máximos de velocidad y a qué relación de transmisión corresponden. Éstas serán las marchas que se tomarán para el sistema, pensando en mantener una velocidad lo más alta posible en el régimen permanente.

Marcha	Pendiente (°)	$i$ (-)	$v_{0,max}$ (km/h)
1ª	8	<b>1'6417</b>	9'2960
2ª	6	<b>1'2620</b>	12'0933
3ª	4	<b>0'8985</b>	16'9850
4ª	2	<b>0'5870</b>	25'9997
5ª	0	<b>0'3848</b>	39'6575
6ª	-2	<b>0'2820</b>	54'1264
7ª	-4	<b>0'2273</b>	67'1417
8ª	-6	<b>0'1941</b>	78'6230
9ª	-8	<b>0'1717</b>	88'8749

Tabla 1. Relaciones de transmisión, según criterio de máxima velocidad en régimen permanente.

A continuación, se visualiza el valor del trabajo de la fuerza generalizada para pendiente nula, según las relaciones de transmisión escogidas y la cadencia de giro.

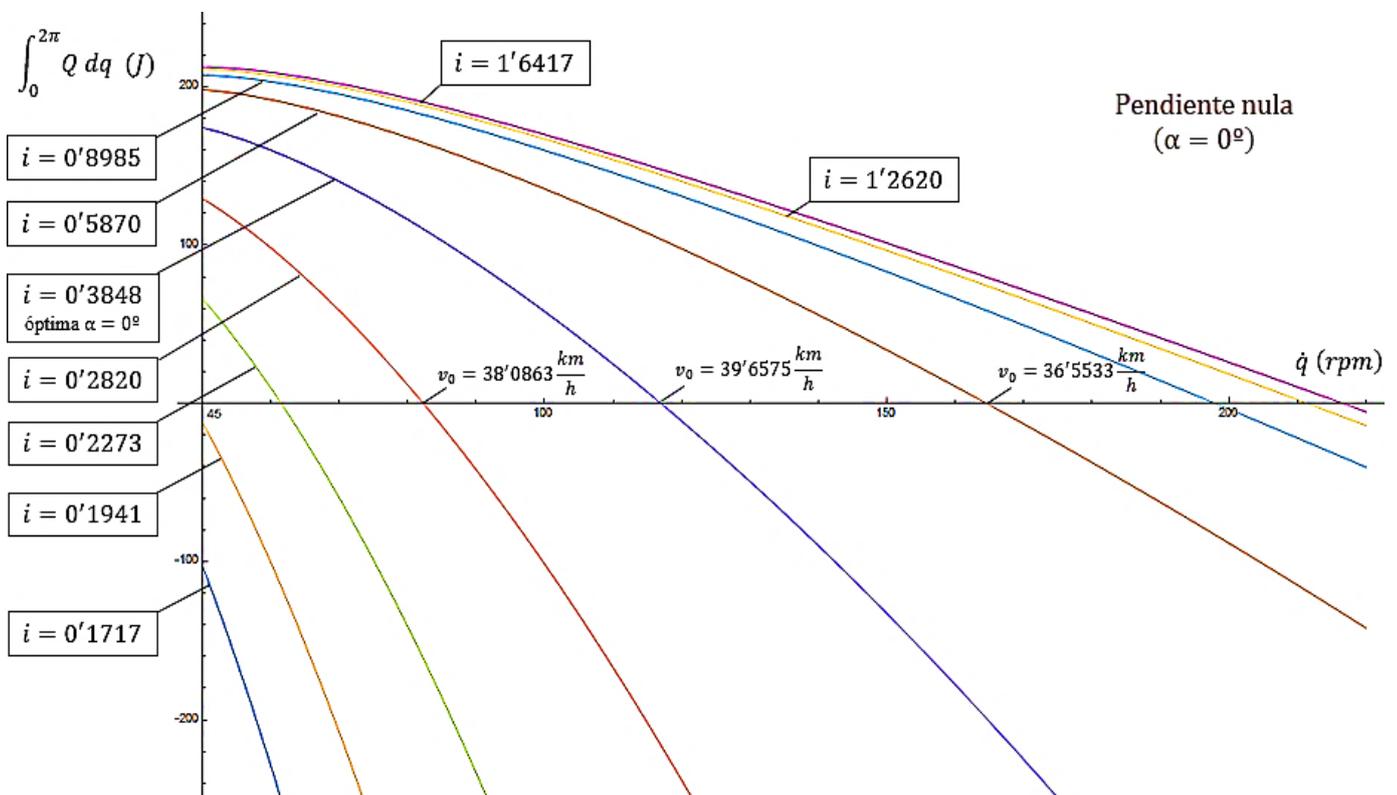


Figura 30. Trabajo de la fuerza generalizada en un ciclo, según cadencia.

La gráfica anterior tiene el origen en 45 rpm y termina en 220 rpm (aproximadamente 5 y 23 rad/s) debido a que el ajuste de la Figura 28 es válido para este rango de cadencia.

Cuando  $\int_0^{2\pi} Q dq = 0$ ; se da la condición de régimen permanente. Los estudios consultados sobre el ciclo de pedaleo y la potencia son medidos a cadencia constante.

Esto implica que las gráficas del ciclo de pedaleo cambien cuando se da aceleración ( $\int_0^{2\pi} Q dq > 0$ ) o deceleración ( $\int_0^{2\pi} Q dq < 0$ ) por posibles motivos biomecánicos. Aunque la figura mostrada no es exacta por esto, es orientativa, mostrando de forma aproximada a qué cadencias se daría la aceleración o deceleración, para pendiente nula.

Puede verse que las marchas de multiplicación permiten la aceleración en un rango más amplio de cadencia. Todas las marchas que no corresponden a la óptima para pendiente nula estabilizan el vehículo en un régimen permanente de menor velocidad. De esta forma, si la marcha óptima para pendiente 0° es  $i = 0'3848$ , la velocidad del régimen permanente será mayor para esta relación de transmisión que para cualquier otra que se ha incorporado al sistema.

Puede representarse también el valor de los términos resistentes de la fuerza generalizada en función de la velocidad del vehículo. Aquí se observa como la fuerza de arrastre aerodinámico toma la mayor relevancia cuanto mayor es la velocidad. Se representa a continuación para pendiente nula ( $\alpha = 0$ ) y 5ª marcha ( $i = 0'3848$ ).

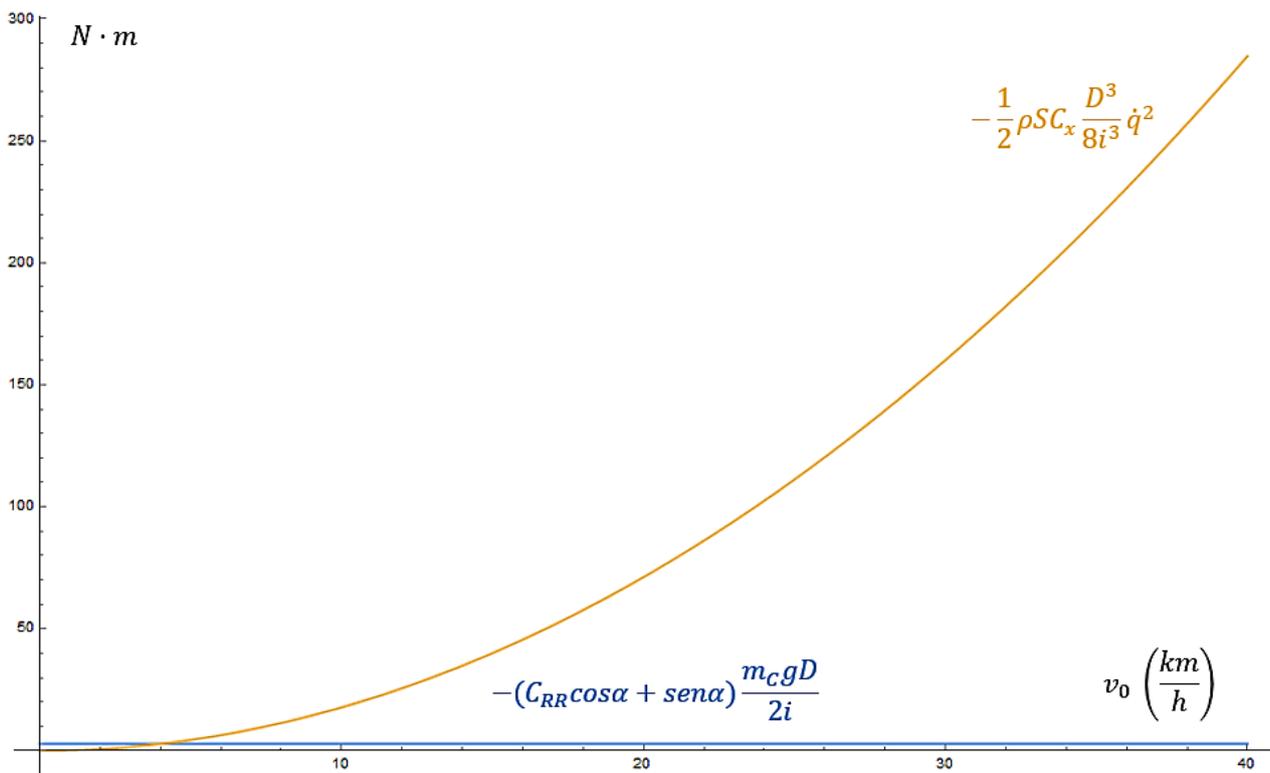


Figura 31. Valores de los términos resistentes con la velocidad.

Con este breve análisis de la fuerza generalizada concluirá este capítulo, cuyo objetivo principal era determinar las marchas óptimas a incorporar al sistema objeto de diseño en este trabajo.

## 6. EXPRESIÓN DE LA ECUACIÓN DEL MOVIMIENTO

La ecuación del movimiento puede proporcionar gran cantidad de datos en un análisis en competición. Relaciona la posición de la coordenada angular  $q$  con el tiempo, conocidas las acciones actuantes. Puede extrapolarse también el desplazamiento del vehículo a través la posición  $q$  de las bielas. Gran parte de su utilidad también radica en el cálculo de velocidades y aceleraciones de distintos componentes, conocida su relación con la coordenada. Para ello, únicamente es necesario derivarla con respecto al tiempo.

Uno de los fines de este trabajo es, asimismo, proporcionar un método de cálculo para estimar el comportamiento de la bicicleta, usando un enfoque en su transmisión. Se hará a través de la ecuación del movimiento. Como se verá, se requieren métodos numéricos para su resolución, ya que no es lineal. La ecuación puede ser introducida en cualquier tipo de software que la compute. Con ella, otros investigadores pueden estimar distintas velocidades y aceleraciones con sus condiciones particulares impuestas.

Se partirá desde a ecuación 5, la ecuación de Eksergian. En ella, únicamente es necesario determinar un valor para la inercia generalizada del conjunto y obtener así la ecuación del movimiento. Se deberá llegar, por tanto, a una expresión para calcular el valor de  $I^*$ . Una vez obtenida la ecuación, se resolverá para el caso del sistema y vehículo modelados, como muestra de funcionamiento del método y para obtención de resultados adicionales.

### Determinación de la Inercia Generalizada

La inercia generalizada toma parte en el Teorema de las Fuerzas Vivas que ha sido usado para calcular las relaciones de transmisión, pero se ha supuesto constante con la coordenada. Hace falta todavía probar por qué esto es así. Por lo tanto, determinar la expresión de la inercia generalizada servirá, no únicamente para poder resolver la ecuación del movimiento, sino también para probar que ésta es realmente constante con el ángulo de biela como se ha supuesto en el capítulo anterior.

Su cálculo partirá de la energía cinética total del vehículo. Se expresarán todas las velocidades según la coordenada  $q$ . De esta forma, reuniendo todos los términos de masa e inercia que tengan influencia en ella se tendrá esta inercia generalizada.

$$\frac{1}{2}I^*\dot{q}^2 = \sum_j \frac{1}{2}m_j v_j^2(\dot{q}) + \sum_j \frac{1}{2}I_j \omega_j^2(\dot{q}) \quad (ec. 21)$$

Los componentes tendrán una cierta energía cinética de traslación, pero si tienen una velocidad angular  $\omega$  también poseen energía cinética de rotación. El subíndice  $j$  que se recorre en el sumatorio hace referencia a cada uno de los componentes.

El propio corredor pone también en movimiento sus extremidades, por lo que será necesaria una simplificación para poder tener una estimación de estas masas en la inercia generalizada.

Se hará un enfoque en cada una de las partes de la bicicleta, para más tarde sumar todos los términos obtenidos. Esto facilitará la comprensión del proceso, debido a la gran cantidad de partes en movimiento que tiene el conjunto.

## Términos del pedalier

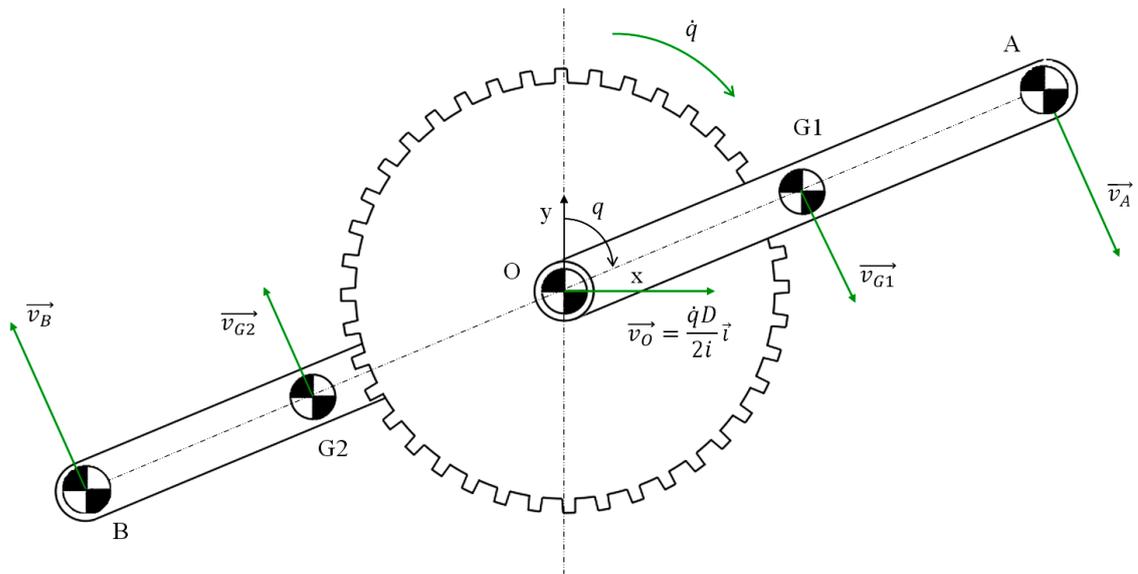


Figura 32. Diagrama de masas en el pedalier.

La energía cinética consistirá tanto en una velocidad lineal del centro de masas de cada elemento, como una componente dependiente de su velocidad angular. Como ambos se mueven conjuntamente esta velocidad de rotación es simplemente  $\dot{q}$ .

Para simplificar las masas corporales que el corredor pone en movimiento (sus piernas) se considerarán dos masas puntuales en los extremos de ambas bielas, junto a la masa de los pedales. Su valor podrá ser estimado en un porcentaje de la masa del corredor.

La expresión de la energía cinética del mecanismo será entonces:

$$\frac{1}{2} m_p v_O^2 + \frac{1}{2} I_p \dot{q}^2 + \frac{1}{2} m_B v_{G1}^2 + \frac{1}{2} I_B \dot{q}^2 + \frac{1}{2} m_B v_{G2}^2 + \frac{1}{2} I_B \dot{q}^2 + \frac{1}{2} m_{punt} v_A^2 + \frac{1}{2} m_{punt} v_B^2$$

(ec. 22)

El subíndice  $p$  denota los términos relativos al plato,  $B$  lo relativo a las bielas y  $punt$  a esta masa puntual que se ha considerado.

Conocida la velocidad de traslación del conjunto puede aplicarse la ecuación 6 para determinar las velocidades lineales de todos los centros de masas. Será necesario entonces calcular el cuadrado del módulo de estas velocidades para la energía cinética.

Se empieza por la velocidad del centro de masas de la primera biela.

$$\vec{v}_{G1} = \frac{\dot{q}D}{2i} \vec{i} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & -\dot{q} \\ \frac{l_B}{2} \text{sen}q & \frac{l_B}{2} \text{cos}q & 0 \end{vmatrix} = \left\langle \frac{\dot{q}D}{2i} + \frac{l_B}{2} \text{cos}q \dot{q}, -\frac{l_B}{2} \text{sen}q \dot{q} \right\rangle$$

Se calcula su módulo al cuadrado.

$$\|\vec{v}_{G1}\|^2 = \left( \frac{\dot{q}D}{2i} + \frac{l_B}{2} \text{cos}q \dot{q} \right)^2 + \left( -\frac{l_B}{2} \text{sen}q \dot{q} \right)^2$$

$$\begin{aligned}\|\vec{v}_{G1}\|^2 &= \left(\frac{\dot{q}D}{2i}\right)^2 + 2\left(\frac{\dot{q}D}{2i}\right)\left(\frac{l_B}{2}\cos q \dot{q}\right) + \frac{l_B^2}{4}(\cos^2 q + \sin^2 q)\dot{q}^2 \\ &= \left(\frac{\dot{q}D}{2i}\right)^2 + \frac{D}{2i}l_B \cos q \dot{q}^2 + \frac{l_B^2}{4}\dot{q}^2\end{aligned}$$

Velocidad del centro de masas de la segunda biela, a 180°:

$$\vec{v}_{G2} = \frac{\dot{q}D}{2i}\vec{i} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & -\dot{q} \\ \frac{l_B}{2}\sin(q+\pi) & \frac{l_B}{2}\cos(q+\pi) & 0 \end{vmatrix} = \left\langle \frac{\dot{q}D}{2i} - \frac{l_B}{2}\cos q \dot{q}, \frac{l_B}{2}\sin q \dot{q} \right\rangle$$

Calculando nuevamente el cuadrado de su módulo:

$$\begin{aligned}\|\vec{v}_{G2}\|^2 &= \left(\frac{\dot{q}D}{2i} - \frac{l_B}{2}\cos q \dot{q}\right)^2 + \left(\frac{l_B}{2}\sin q \dot{q}\right)^2 \\ &= \left(\frac{\dot{q}D}{2i}\right)^2 - 2\left(\frac{\dot{q}D}{2i}\right)\left(\frac{l_B}{2}\cos q \dot{q}\right) + \frac{l_B^2}{4}(\cos^2 q + \sin^2 q)\dot{q}^2 \\ &= \left(\frac{\dot{q}D}{2i}\right)^2 - \frac{D}{2i}l_B \cos q \dot{q}^2 + \frac{l_B^2}{4}\dot{q}^2\end{aligned}$$

La velocidad en el extremo A de la biela fue calculada anteriormente para conocer la fuerza generalizada a través del método de potencias virtuales.

$$\vec{v}_A = \frac{\dot{q}D}{2i}\vec{i} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & -\dot{q} \\ l_B \sin q & l_B \cos q & 0 \end{vmatrix} = \left\langle \frac{\dot{q}D}{2i} + l_B \cos q \dot{q}, -l_B \sin q \dot{q} \right\rangle$$

Su magnitud al cuadrado:

$$\begin{aligned}\|\vec{v}_A\|^2 &= \left(\frac{\dot{q}D}{2i} + l_B \cos q \dot{q}\right)^2 + (-l_B \sin q \dot{q})^2 \\ &= \left(\frac{\dot{q}D}{2i}\right)^2 + 2\left(\frac{\dot{q}D}{2i}\right)(l_B \cos q \dot{q}) + \frac{l_B^2}{4}(\cos^2 q + \sin^2 q)\dot{q}^2 \\ &= \left(\frac{\dot{q}D}{2i}\right)^2 + \frac{D}{i}l_B \cos q \dot{q}^2 + l_B^2 \dot{q}^2\end{aligned}$$

La velocidad en el extremo B, del mismo modo:

$$\vec{v}_B = \frac{\dot{q}D}{2i}\vec{i} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & -\dot{q} \\ -l_B \sin q & -l_B \cos q & 0 \end{vmatrix} = \left\langle \frac{\dot{q}D}{2i} - l_B \cos q \dot{q}, l_B \sin q \dot{q} \right\rangle$$

Su magnitud al cuadrado:

$$\begin{aligned}\|\vec{v}_B\|^2 &= \left(\frac{\dot{q}D}{2i} - l_B \cos q \dot{q}\right)^2 + (l_B \sin q \dot{q})^2 \\ &= \left(\frac{\dot{q}D}{2i}\right)^2 - 2\left(\frac{\dot{q}D}{2i}\right)(l_B \cos q \dot{q}) + \frac{l_B^2}{4}(\cos^2 q + \sin^2 q)\dot{q}^2 \\ &= \left(\frac{\dot{q}D}{2i}\right)^2 - \frac{D}{i}l_B \cos q \dot{q}^2 + l_B^2 \dot{q}^2\end{aligned}$$

Con todo ello ya puede sustituirse en la ecuación 22 para despejar la inercia generalizada en el pedalier, asociada a la coordenada  $q$ .

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2}m_p v_O^2 + \frac{1}{2}I_p \dot{q}^2 + \frac{1}{2}m_B v_{G1}^2 + \frac{1}{2}I_B \dot{q}^2 + \frac{1}{2}m_B v_{G2}^2 + \frac{1}{2}I_B \dot{q}^2 + \frac{1}{2}m_{punt} v_A^2 + \frac{1}{2}m_{punt} v_B^2 \\
&= \frac{1}{2}m_p \left(\frac{\dot{q}D}{2i}\right)^2 + \frac{1}{2}m_B \left(\left(\frac{\dot{q}D}{2i}\right)^2 + \frac{D}{2i}l_B \cos q \dot{q}^2 + \frac{l_B^2}{4}\dot{q}^2\right) \\
&+ \frac{1}{2}m_B \left(\left(\frac{\dot{q}D}{2i}\right)^2 - \frac{D}{2i}l_B \cos q \dot{q}^2 + \frac{l_B^2}{4}\dot{q}^2\right) \\
&+ \frac{1}{2}m_{punt} \left(\left(\frac{\dot{q}D}{2i}\right)^2 + \frac{D}{i}l_B \cos q \dot{q}^2 + l_B^2 \dot{q}^2\right) \\
&+ \frac{1}{2}m_{punt} \left(\left(\frac{\dot{q}D}{2i}\right)^2 - \frac{D}{i}l_B \cos q \dot{q}^2 + l_B^2 \dot{q}^2\right) + \frac{1}{2}I_p \dot{q}^2 + \frac{1}{2}I_B \dot{q}^2 + \frac{1}{2}I_B \dot{q}^2 \\
&= \frac{1}{2}((m_p + 2m_B + 2m_{punt})\frac{D^2}{4i^2} + \frac{m_B l_B^2}{2} + 2m_{punt}l_B^2 + I_p + 2I_B)\dot{q}^2
\end{aligned}$$

Sacando como factor común  $\dot{q}^2$  y cancelando términos queda simplificado.

El término de la inercia generalizada correspondiente únicamente al pedalier es:

$$I_{ped}^* = (m_p + 2m_B + 2m_{punt})\frac{D^2}{4i^2} + \frac{m_B l_B^2}{2} + 2m_{punt}l_B^2 + I_p + 2I_B \quad (ec. 23)$$

Reiterando,  $m_{punt}$  contiene un porcentaje de la masa total del ciclista, correspondiente a la masa de sus piernas en movimiento, así como la masa de los pedales si fuese necesario considerarla. La inercia de las bielas podría aproximarse a la de una barra delgada.

$$I_B \approx \frac{1}{12}m_B l_B^2 \quad (ec. 24)$$

### Términos de la cadena

Si quiere tenerse una expresión lo más rigurosa posible para la ecuación del movimiento hay que considerar cada una de las masas de la bicicleta. Parte de esta masa depende de la cadena. Esta no solo se desplaza con el vehículo, sino que también rota para permitir la transmisión de la potencia en el sistema.

No se considerarán en la expresión otros elementos como ruedas de los desviadores o similares. Se hará también la simplificación de que tanto platos como piñones tienen un diámetro similar, para poder calcular esta contribución a la inercia generalizada. Además, se considerará que los platos y los piñones están alineados horizontalmente en el vehículo.

La cadena se dividirá en 4 tramos para su estudio. Se calculará, por tanto, la energía cinética de todos los tramos, y su suma será la correspondiente al sistema conformado únicamente por la cadena.

Para el cálculo preciso de la energía cinética de los tramos arrollados en plato y piñón se dirá que la cadena tiene una densidad lineal  $\mu$ . Esta densidad representa su masa por unidad de longitud.

De esta forma, si se ilustra la cadena y los tramos:

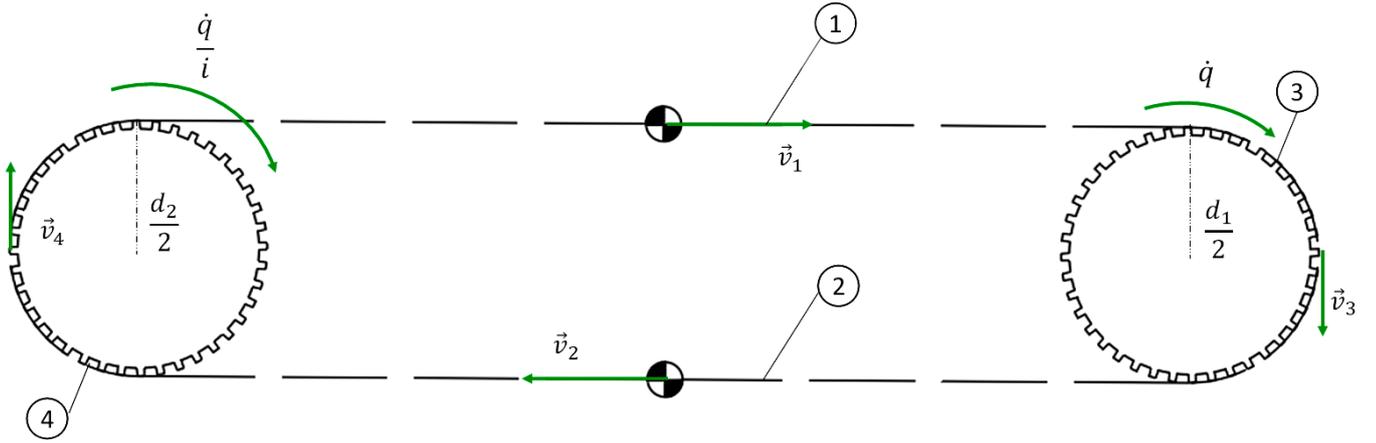


Figura 33. Diagrama de las masas en la cadena

Los tramos 1 y 2 son rectos, al considerarse que coincide la alineación entre ejes y los diámetros de piñón y plato son similares en tamaño. El diámetro del plato será  $d_1$  y el diámetro del piñón será  $d_2$ . La energía cinética en la cadena consiste en la suma de la energía de los tramos.

La velocidad del centro de masas de 1, si este se traslada junto al vehículo y tiene una velocidad igual que el punto del superior del plato al que se ancla:

$$\vec{v}_1 = \frac{\dot{q}D}{2i} \vec{i} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & -\dot{q} \\ 0 & \frac{d_1}{2} & 0 \end{vmatrix} = \left\langle \frac{\dot{q}D}{2i} + \frac{\dot{q}d_1}{2}, 0 \right\rangle$$

Su módulo cuadrado, para la energía cinética de la cadena:

$$\|\vec{v}_1\|^2 = \left( \frac{\dot{q}D}{2i} + \frac{\dot{q}d_1}{2} \right)^2 = \left( \frac{\dot{q}D}{2i} \right)^2 + \frac{Dd_1}{2i} \dot{q}^2 + \frac{d_1^2}{4} \dot{q}^2$$

La velocidad del centro de masas de 2, de la misma forma, con su anclaje inferior:

$$\vec{v}_2 = \frac{\dot{q}D}{2i} \vec{i} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & -\dot{q} \\ 0 & -\frac{d_1}{2} & 0 \end{vmatrix} = \left\langle \frac{\dot{q}D}{2i} - \frac{\dot{q}d_1}{2}, 0 \right\rangle$$

Su módulo cuadrado:

$$\|\vec{v}_2\|^2 = \left( \frac{\dot{q}D}{2i} - \frac{\dot{q}d_1}{2} \right)^2 = \left( \frac{\dot{q}D}{2i} \right)^2 - \frac{Dd_1}{2i} \dot{q}^2 + \frac{d_1^2}{4} \dot{q}^2$$

La energía cinética de estas partes en conjunto es, sustituyendo las velocidades:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} m_{T1} v_1^2 + \frac{1}{2} m_{T2} v_2^2 \\ &= \frac{1}{2} m_{T1} \left( \left( \frac{\dot{q}D}{2i} \right)^2 + \frac{Dd_1}{2i} \dot{q}^2 + \frac{d_1^2}{4} \dot{q}^2 \right) + \frac{1}{2} m_{T2} \left( \left( \frac{\dot{q}D}{2i} \right)^2 - \frac{Dd_1}{2i} \dot{q}^2 + \frac{d_1^2}{4} \dot{q}^2 \right) \end{aligned}$$

Simplificando:

$$\frac{1}{2}(m_{T1} + m_{T2}) \left( \frac{D^2}{4i^2} + \frac{d_1^2}{4} \right) \dot{q}^2 \text{ (ec. 25)}$$

Para los tramos 3 y 4 no puede definirse un centro de masas de forma clara, por lo que la energía cinética se calcula a través de una integral de línea. Se usará una variable de integración  $\theta$  que recorra el ángulo a través del que se distribuye la cadena. Se podría usar la nomenclatura anterior en la que el ángulo es  $q$ , pero es preferente destacar que se está realizando una integración, por lo que este ángulo será denominado  $\theta$ .

Si se ilustra el tramo 3:

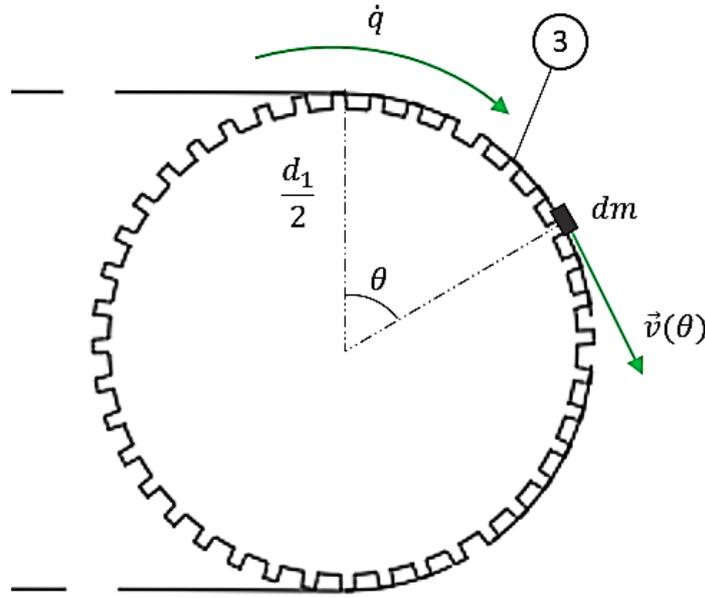


Figura 34. Cálculo de la energía cinética de la cadena en el tramo 3.

Un diferencial de masa puede ser expresado en términos del arco diferencial  $ds$  y su densidad lineal  $\mu$ . Para el tramo 3 esta longitud es el radio  $d_1/2$  multiplicado por el ángulo  $d\theta$  recorrido en el diferencial.

$$dm = \mu ds = \mu \frac{d_1}{2} d\theta$$

La energía cinética de un tramo diferencial situado a un ángulo  $\theta$  es entonces:

$$dEc = \frac{1}{2} v^2(\theta) dm = \frac{1}{2} \mu v^2(\theta) ds = \frac{1}{2} \mu v^2(\theta) \frac{d_1}{2} d\theta \text{ (ec. 26)}$$

Esta velocidad  $v$  en función del ángulo también tiene una componente de arrastre, dado que se mueve con el vehículo.

$$\vec{v}(\theta) = \frac{\dot{q}D}{2i} \vec{i} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & -\dot{q} \\ \frac{d_1}{2} \cos\theta & \frac{d_1}{2} \text{sen}\theta & 0 \end{vmatrix} = \left\langle \frac{\dot{q}D}{2i} + \frac{\dot{q}d_1}{2} \cos\theta, -\frac{\dot{q}d_1}{2} \text{sen}\theta \right\rangle$$

El cuadrado de su módulo:

$$\begin{aligned}\|\vec{v}(\theta)\|^2 &= \left(\frac{\dot{q}D}{2i} + \frac{\dot{q}d_1}{2}\cos\theta\right)^2 + \left(-\frac{\dot{q}d_1}{2}\sen\theta\right)^2 \\ &= \left(\frac{\dot{q}D}{2i}\right)^2 + 2\left(\frac{\dot{q}D}{2i}\right)\left(\frac{\dot{q}d_1}{2}\cos\theta\right) + \frac{d_1^2}{4}\dot{q}^2(\cos^2\theta + \sen^2\theta) \\ &= \left(\frac{\dot{q}D}{2i}\right)^2 + \frac{Dd_1}{2i}\cos\theta\dot{q}^2 + \frac{d_1^2}{4}\dot{q}^2\end{aligned}$$

Una vez conocidos estos parámetros se procede a determinar la energía cinética total de esta parte, integrando la ecuación 26. De esta manera, sobre el tramo 3 ( $T_3$ ), se recorrerá el ángulo desde 0 a  $\pi$ .

$$\frac{1}{2}\int_{T_3} v^2(\theta)dm = \frac{1}{2}\int_0^\pi \mu v^2(\theta)ds = \frac{1}{2}\int_0^\pi \mu v^2(\theta)\frac{d_1}{2}d\theta$$

Sustituyendo la velocidad en cada punto con lo calculado anteriormente:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_{T_3} v^2(\theta)dm &= \frac{1}{2}\int_0^\pi \mu \left(\left(\frac{\dot{q}D}{2i}\right)^2 + \frac{Dd_1}{2i}\cos\theta\dot{q}^2 + \frac{d_1^2}{4}\dot{q}^2\right)\frac{d_1}{2}d\theta \\ &= \frac{1}{2}\int_0^\pi \mu \left(\left(\frac{\dot{q}D}{2i}\right)^2 + \frac{d_1^2}{4}\dot{q}^2\right)\frac{d_1}{2}d\theta + \frac{1}{2}\mu\frac{Dd_1^2}{4i}\dot{q}^2\int_0^\pi \cos\theta d\theta\end{aligned}$$

La integral  $\int_0^\pi \cos\theta d\theta$  vale 0, por lo tanto, si se realiza la integración del primer término:

$$\frac{1}{2}\int_{T_3} v^2(\theta)dm = \frac{1}{2}\mu \left(\left(\frac{\dot{q}D}{2i}\right)^2 + \frac{d_1^2}{4}\dot{q}^2\right)\frac{\pi d_1}{2}$$

Pero  $\pi d_1/2$  es la longitud del arco de cadena arrollado en el plato, si se multiplica por la densidad lineal  $\mu$ , se tiene la masa del tramo 3.

$$\frac{1}{2}\mu\frac{\pi d_1}{2}\left(\left(\frac{\dot{q}D}{2i}\right)^2 + \frac{d_1^2}{4}\dot{q}^2\right) = \frac{1}{2}m_{T_3}\left(\frac{D^2}{4i^2} + \frac{d_1^2}{4}\right)\dot{q}^2 \quad (ec. 27)$$

Este resultado es muy similar al obtenido para 1 y 2.

Hecho esto, se procede a hacer lo mismo con el tramo 4, en el que la velocidad angular es  $\dot{q}/i$  y su diámetro es  $d_2$ . Se usará la misma variable de integración desfasada  $\pi$  radianes con respecto a la anterior. Ahora la longitud del arco  $ds$  se expresará con el radio  $d_2/2$  y el diferencial de ángulo.

$$dm = \mu ds = \mu\frac{d_2}{2}d\theta$$

La energía cinética de un diferencial de masa de esta parte, aplicando la ecuación 26:

$$dEc = \frac{1}{2}v^2(\theta)dm = \frac{1}{2}\mu v^2(\theta)ds = \frac{1}{2}\mu v^2(\theta)\frac{d_2}{2}d\theta$$

Se ilustra esta parte de la cadena.

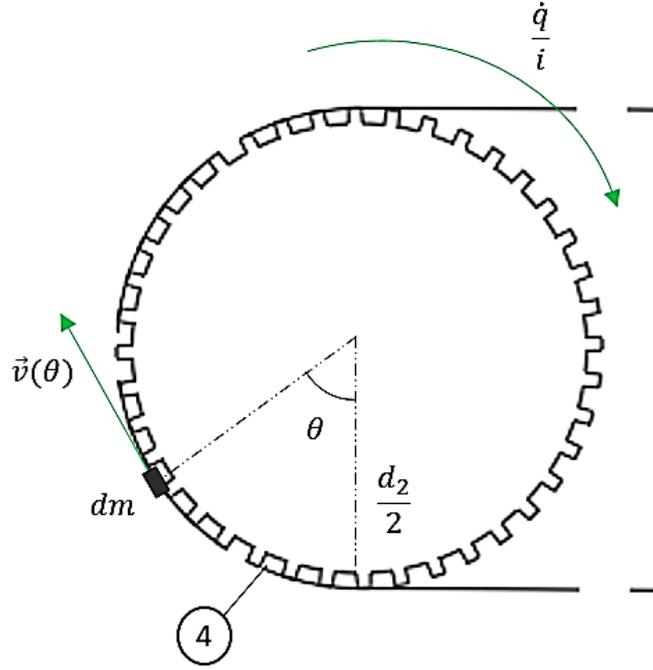


Figura 35. Cálculo de la energía cinética de la cadena en el tramo 4.

La velocidad en función del ángulo, si este está desfasado  $\pi$  radianes:

$$\vec{v}(\theta) = \frac{\dot{q}D}{2i}\vec{i} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & -\frac{\dot{q}}{i} \\ \frac{d_2}{2}\cos(\theta + \pi) & \frac{d_2}{2}\sin(\theta + \pi) & 0 \end{vmatrix} = \left\langle \frac{\dot{q}D}{2i} - \frac{\dot{q}d_2}{2i}\cos\theta, \frac{\dot{q}d_2}{2i}\sin\theta \right\rangle$$

Cabe notar que  $d_2/i$  es  $d_1$ , con la definición de la relación de transmisión (ec. 2).

$$\frac{d_2}{i} = \frac{d_2}{\left(\frac{d_2}{d_1}\right)} = d_1$$

El módulo de la velocidad al cuadrado puede expresarse de otra manera, teniendo en cuenta la expresión anterior.

$$\begin{aligned} \|\vec{v}(\theta)\|^2 &= \left(\frac{\dot{q}D}{2i} - \frac{\dot{q}d_2}{2i}\cos\theta\right)^2 + \left(\frac{\dot{q}d_2}{2i}\sin\theta\right)^2 = \left(\frac{\dot{q}D}{2i} - \frac{\dot{q}d_1}{2}\cos\theta\right)^2 + \left(\frac{\dot{q}d_1}{2}\sin\theta\right)^2 \\ &= \left(\frac{\dot{q}D}{2i}\right)^2 - 2\left(\frac{\dot{q}D}{2i}\right)\left(\frac{\dot{q}d_1}{2}\cos\theta\right) + \frac{d_1^2}{4}\dot{q}^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) \\ &= \left(\frac{\dot{q}D}{2i}\right)^2 - \frac{Dd_1}{2i}\cos\theta\dot{q}^2 + \frac{d_1^2}{4}\dot{q}^2 \end{aligned}$$

La integración resulta:

$$\frac{1}{2} \int_{T_4} v^2(\theta) dm = \frac{1}{2} \int_0^\pi \mu v^2(\theta) \frac{d_2}{2} d\theta = \frac{1}{2} \int_0^\pi \mu \frac{d_2}{2} \left( \left(\frac{\dot{q}D}{2i}\right)^2 - \frac{Dd_1}{2i}\cos\theta\dot{q}^2 + \frac{d_1^2}{4}\dot{q}^2 \right) d\theta$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \int_0^\pi \mu \frac{d_2}{2} \left( \left( \frac{\dot{q}D}{2i} \right)^2 + \frac{d_1^2}{4} \dot{q}^2 \right) d\theta - \frac{Dd_1}{2i} \dot{q}^2 \int_0^\pi \cos\theta d\theta \\
&= \frac{1}{2} \mu \frac{\pi d_2}{2} \left( \frac{D^2}{4i^2} + \frac{d_1^2}{4} \right) \dot{q}^2 = \frac{1}{2} m_{T4} \left( \frac{D^2}{4i^2} + \frac{d_1^2}{4} \right) \dot{q}^2 \quad (ec. 28)
\end{aligned}$$

Nuevamente, se aplica la conclusión de que la integral del coseno de 0 a  $\pi$  es nula. Sabiendo que la masa de este tramo es la densidad lineal multiplicada por la longitud arrollada se llega al resultado deseado.

Sumando la contribución de todo lo calculado desde el tramo 1 al 4 (ecuaciones 25, 27, y 28), puede definirse la energía cinética de toda la cadena, cuya masa viene dada por la suma de todas sus partes.

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2} (m_{T1} + m_{T2}) \left( \frac{D^2}{4i^2} + \frac{d_1^2}{4} \right) \dot{q}^2 + \frac{1}{2} m_{T3} \left( \frac{D^2}{4i^2} + \frac{d_1^2}{4} \right) \dot{q}^2 + \frac{1}{2} m_{T4} \left( \frac{D^2}{4i^2} + \frac{d_1^2}{4} \right) \dot{q}^2 \\
&= \frac{1}{2} (m_{T1} + m_{T2} + m_{T3} + m_{T4}) \left( \frac{D^2}{4i^2} + \frac{d_1^2}{4} \right) \dot{q}^2 = \frac{1}{2} m_{cad} \left( \frac{D^2}{4i^2} + \frac{d_1^2}{4} \right) \dot{q}^2
\end{aligned}$$

Con la ecuación 21, puede verse que su contribución a la inercia generalizada es:

$$I^*_{cad} = m_{cad} \left( \frac{D^2}{4i^2} + \frac{d_1^2}{4} \right) \quad (ec. 29)$$

Esta ecuación se sumará a la contribución del resto de partes del conjunto.

#### Términos de las ruedas y el cassette

La rueda trasera girará a la velocidad impuesta por el sistema de transmisión, cuya salida tiene una velocidad angular  $\dot{q}/i$ . Como ambas ruedas, delantera y trasera, tienen el mismo diámetro  $D$ , rotan a la misma velocidad angular. La rueda trasera, es además solidaria al cassette, que contiene los piñones.

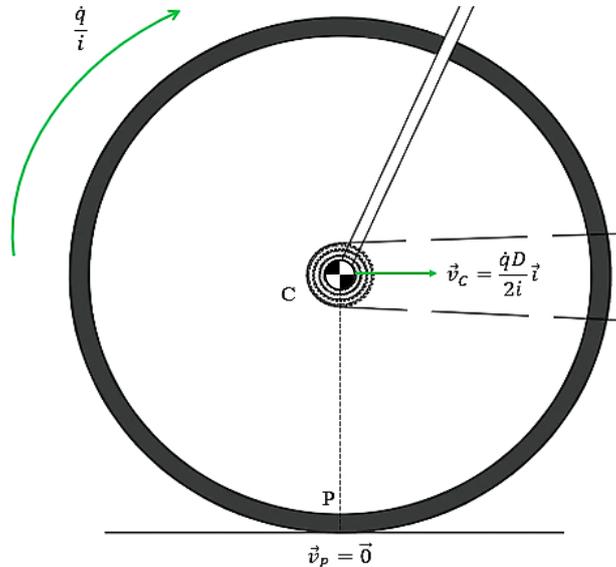


Figura 36. Diagrama de masas en la rueda trasera.

La velocidad del centro de masas de la rueda coincide exactamente con la del punto de unión al vehículo. La velocidad de este punto es la componente lineal que toman todo el resto de las partes que lo conforman. Se ha denominado anteriormente como velocidad de traslación del conjunto. Por lo tanto, la velocidad de su centro de masas coincide con la velocidad  $\vec{v}_c$  de la figura.

Aplicando el mismo razonamiento, ocurre lo mismo con el centro de masas del cassette.

Entonces, si se tiene dos ruedas con el cassette en una de ellas, y ambas tienen una velocidad lineal y angular iguales, la energía cinética de estas partes es:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}(m_R + m_{cas})v_c^2 + \frac{1}{2}(I_R + I_{cas})\left(\frac{\dot{q}}{i}\right)^2 + \frac{1}{2}m_R v_c^2 + \frac{1}{2}I_R\left(\frac{\dot{q}}{i}\right)^2 \\ &= \frac{1}{2}(m_R + m_{cas})\left(\frac{\dot{q}D}{2i}\right)^2 + \frac{1}{2}(I_R + I_{cas})\left(\frac{\dot{q}}{i}\right)^2 + \frac{1}{2}m_R\left(\frac{\dot{q}D}{2i}\right)^2 + \frac{1}{2}I_R\left(\frac{\dot{q}}{i}\right)^2 \end{aligned}$$

Finalmente, simplificando y extrayendo  $\dot{q}^2$ , se obtiene la energía cinética.

$$\frac{1}{2}\left((2m_R + m_{cas})\frac{D^2}{4i^2} + \frac{2I_R + I_{cas}}{i^2}\right)\dot{q}^2$$

Se observa que el término perteneciente a la inercia generalizada del conjunto de las dos ruedas y el cassette es:

$$I_{R,cas}^* = (2m_R + m_{cas})\frac{D^2}{4i^2} + \frac{2I_R + I_{cas}}{i^2} \quad (ec. 30)$$

#### Términos del resto de los elementos

El resto de las partes tiene un movimiento de traslación sobre la calzada a la velocidad ya mencionada del punto C de la Figura 35. No tiene lógicamente ningún tipo de velocidad angular. Por lo tanto, la expresión de la energía cinética de estas partes es muy simple.

$$\frac{1}{2}m_{resto}v_c^2 = \frac{1}{2}m_{resto}\left(\frac{\dot{q}D}{2i}\right)^2 = \frac{1}{2}m_{resto}\frac{D^2}{4i^2}\dot{q}^2$$

El término de la inercia generalizada correspondiente al resto de componentes del vehículo, incluido el ciclista que viaja en él es el siguiente.

$$I_{resto}^* = m_{resto}\frac{D^2}{4i^2} \quad (ec. 31)$$

Ya se tiene todos los términos, obtenidos analizando el movimiento de todos los elementos de la bicicleta. La energía cinética total, calculada de acuerdo con la ecuación 21 corresponde a la suma de todas las partes.

$$\frac{1}{2}I^*\dot{q}^2 = \sum_j \frac{1}{2}m_j v_j(\dot{q})^2 + \sum_j \frac{1}{2}I_j \omega_j(\dot{q})^2 ;$$

$$\frac{1}{2}I^*\dot{q}^2 = \frac{1}{2}(I_{ped}^* + I_{cad}^* + I_R^* + I_{resto}^*)\dot{q}^2$$

Suma de todos los términos

La inercia generalizada finalmente:

$$\begin{aligned}
 I^* &= I^*_{ped} + I^*_{cad} + I^*_{R,cas} + I^*_{resto} \\
 &= (m_p + 2m_B + 2m_{punt}) \frac{D^2}{4i^2} + \frac{m_B l_B^2}{2} + 2m_{punt} l_B^2 + I_p + 2I_B + m_{cad} \left( \frac{D^2}{4i^2} + \frac{d_1^2}{4} \right) \\
 &\quad + (2m_R + m_{cas}) \frac{D^2}{4i^2} + \frac{2I_R + I_{cas}}{i^2} + m_{resto} \frac{D^2}{4i^2}
 \end{aligned}$$

Juntando términos y reorganizando:

$$\begin{aligned}
 I^* &= (m_p + 2m_B + 2m_{punt} + 2m_R + m_{cas} + m_{resto} + m_{cad}) \frac{D^2}{4i^2} + \frac{m_B l_B^2}{2} \\
 &\quad + 2m_{punt} l_B^2 + m_{cad} \frac{d_1^2}{4} + I_p + 2I_B + \frac{2I_R + I_{cas}}{i^2}
 \end{aligned}$$

Se observa que la suma de las masas del primer paréntesis de la ecuación es exactamente la masa total del conjunto  $m_C$ . Esta se ha estimado antes en 81'8 kg, que incluían los 75 kg del corredor y 6'8 kg de mínimo peso del vehículo establecido por la UCI. La inercia generalizada queda:

$$I^* = m_C \frac{D^2}{4i^2} + \frac{m_B l_B^2}{2} + 2m_{punt} l_B^2 + m_{cad} \frac{d_1^2}{4} + I_p + 2I_B + \frac{2I_R + I_{cas}}{i^2}$$

(ec.32)

### Obtención mediante la Ecuación de Eksergian

Únicamente queda sustituir la fuerza e inercia generalizadas en la ecuación de Eksergian (ecuación 5), que las relaciona con la aceleración de la coordenada  $q$ .

Para proporcionar la ecuación del movimiento se dejarán las masas e inercias en forma de parámetro. De esta manera, cualquier persona que resuelva la ecuación del movimiento podrá poner los valores adecuados al estudio que realiza.

Tampoco se sustituirá el ajuste del par motriz realizado específicamente para este trabajo por la misma razón. De este modo se puede poner la función del par motriz adecuada para cada situación que se quiera modelar.

Se aplica directamente la ecuación 5. Como se sabe que la inercia generalizada es constante con el ángulo, y la fuerza generalizada depende tanto de la posición  $q$  como de su velocidad:

$$\ddot{q} = \frac{1}{I^*} \left( Q(q, \dot{q}) - \frac{1}{2} \frac{d}{dq} I^* \dot{q}^2 \right) = \frac{Q(q, \dot{q})}{I^*}$$

Esta es la ecuación del movimiento. No se sustituirá el término de la inercia generalizada, por facilitar la comprensión de la ecuación.

$$\ddot{q} = \frac{1}{I^*} \left( F_n(q) l_B + F_n(q + \pi) l_B - (C_{RR} \cos \alpha + \text{sen} \alpha) \frac{m_C g D}{2i} - \frac{1}{2} \rho S C_x \frac{D^3}{8i^3} \dot{q}^2 \right)$$

Para darse de forma intuitiva, se reorganiza en la variable dependiente:

$$\ddot{q} + \frac{1}{2I^*} \rho S C_x \frac{D^3}{8i^3} \dot{q}^2 - \frac{1}{I^*} (F_n(q)l_B + F_n(q + \pi)l_B) = -(C_{RR} \cos \alpha + \sin \alpha) \frac{m_C g D}{2iI^*};$$

$$\text{con } I^* = m_C \frac{D^2}{4i^2} + \frac{m_B l_B^2}{2} + 2m_{punti} l_B^2 + m_{cad} \frac{d_1^2}{4} + I_p + 2I_B + \frac{2I_R + I_{cas}}{i^2}$$

(ec. 33)

Puede verse que esta ecuación no es ni lineal ni homogénea. La primera derivada con respecto al tiempo está al cuadrado, a pesar de tener un coeficiente constante. Además, si el ajuste para el par motriz contiene funciones no lineales en  $q$ , se complica todavía más su resolución. Como se explica al comienzo del capítulo, existen programas que permiten la resolución de forma numérica de este tipo de ecuaciones.

Su principal aplicación será el modelado de transitorios, donde el vehículo cambia su energía cinética con el tiempo. Por ejemplo, puede estimarse los desplazamientos, velocidades y aceleraciones en un arranque, conociendo aspectos biomecánicos como el ciclo de pedaleo para esta fase, para lo que habría que aplicar un ajuste como el realizado en el anterior capítulo.

Puede estudiarse asimismo el efecto de cada relación  $i$  del sistema de transmisión en la aceleración del vehículo, y cómo las relaciones de transmisión más elevadas permiten una mayor aceleración a baja velocidad. Esto se verá a continuación para el sistema modelado.

También puede ser usada por investigadores del ámbito de la biomecánica para estimar el rendimiento de un corredor sin tener que acudir a un banco de pruebas, únicamente conociendo la curva motriz que es capaz de proporcionar, puede estimarse las velocidades que se alcanza.

#### Aplicación de la Ecuación del Movimiento al Sistema Modelado

A modo demostrativo, se aplicará ahora la ecuación movimiento a un vehículo que incorpora el sistema de transmisión que se ha modelado, para observar su comportamiento en régimen transitorio.

No será una estimación del todo exacta, debido nuevamente a que los estudios que se han consultado para la obtención del par motriz se basan en la circulación a cadencia constante. En un régimen transitorio, por el contrario, se experimenta una variación de la velocidad con el tiempo, por lo que la curva de par se puede ver afectada por razones biomecánicas.

Para la resolución de la ecuación del movimiento se ha usado de nuevo el programa *Mathematica*, usando un comando numérico resolutor de ecuaciones diferenciales. Se dará una solución para cada marcha. Como condiciones iniciales se tomará un ángulo de biela inicial de  $0^\circ$  y una velocidad inicial del vehículo de 5 km/h, que tiene correspondencia con la cadencia inicial en función de la relación de transmisión.

$$q(t = 0) = 0, \quad v_0(t = 0) = \frac{\dot{q}(t = 0) \cdot D}{2i} = 5 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

Se toma una velocidad inicial no nula debido a que la curva de potencia media-cadencia tiene validez únicamente para un rango de cadencias (ver Figura 28). Tomando esta velocidad inicial se asegura estar en este intervalo para todas las marchas proyectadas.

Únicamente queda dar un valor para la inercia generalizada en este caso particular, estimando los siguientes valores de masas e inercias que la componen a partir de los datos consultados en la literatura.

$$m_c = 81'8 \text{ kg}, \quad m_B = 0'2 \text{ kg}, \quad m_{cad} = 0'2 \text{ kg}, \quad m_p = 0'2 \text{ kg},$$

$$d_1 = 0'2 \text{ m}, \quad I_p = \frac{1}{2} m_p \left(\frac{d_1}{2}\right)^2 = 0'004 \text{ kgm}^2, \quad I_B = \frac{1}{12} m_B l_B^2 = 0'0005 \text{ kgm}^2,$$

$$I_R = 0'478864 \text{ kgm}^2, \quad I_{cas} = 0'06 \text{ kgm}^2,$$

$$m_{punt} = 15\% m_{ciclista} = 0'15 \cdot 75 = 11'25 \text{ kg},$$

$$I^* = 0'703229 + \frac{10'8105}{i^2} \text{ (kgm}^2\text{)} \text{ (ec. 34)}$$

De este modo ya se puede representar para cada marcha cuánto tarda en alcanzarse el régimen permanente desde los 5 km/h en función de la marcha. Este régimen transitorio se dará en una pendiente nula:  $\alpha = 0$ . Se representarán las primeras 5 marchas escogidas, debido a que la quinta es la diseñada para alcanzar la máxima velocidad en pendiente

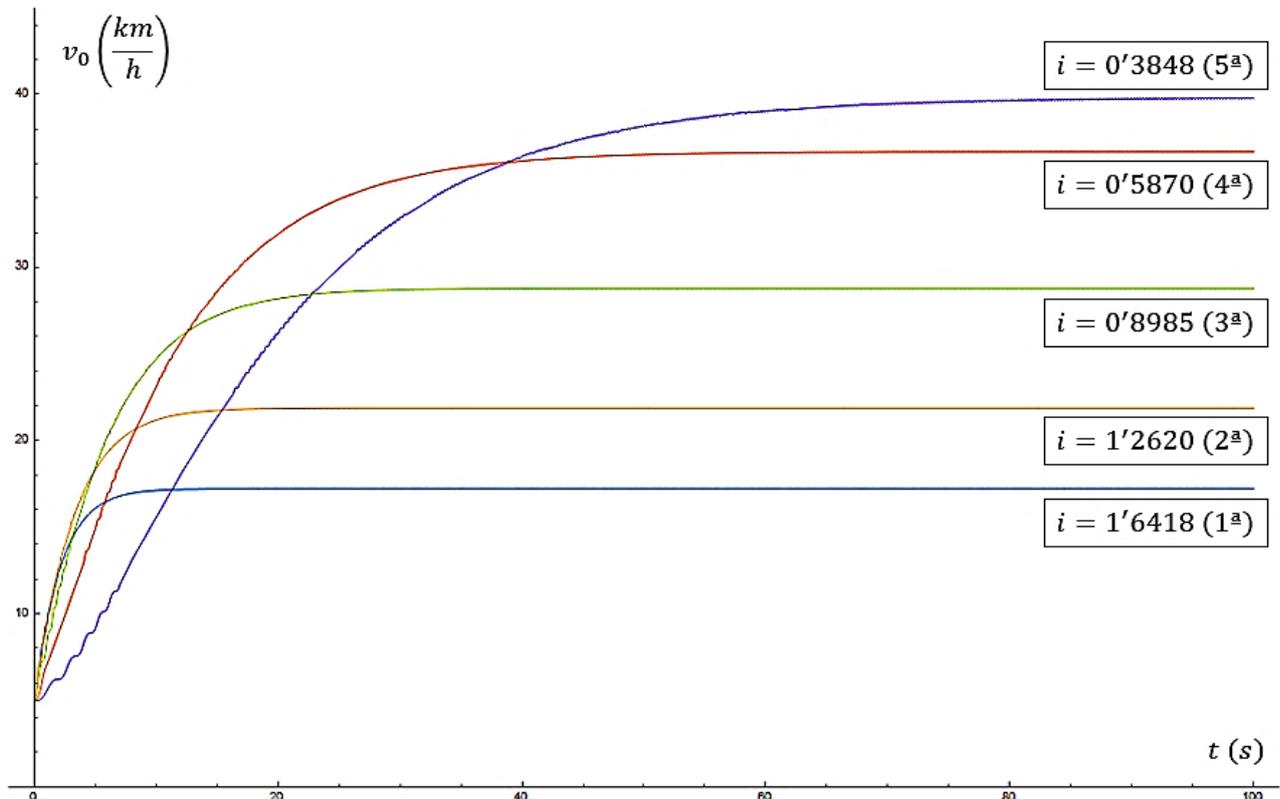


Figura 37. Variación de la velocidad con el tiempo en régimen transitorio.

Puede observarse que las marchas más cortas (1ª, 2ª y 3ª) dan más aceleración que la 4ª y 5ª desde los 5 km/h.

La inercia generalizada influye en este caso en el tiempo en el que se alcanza el régimen permanente, pero no afecta a la velocidad final de éste. Puede observarse que coincide prácticamente con la proyectada en la Figura 29 para  $\alpha = 0$  y las distintas marchas escogidas. Esto da la seguridad de que la hipótesis de cadencia constante que se ha aplicado en el capítulo anterior es razonable, coincidiendo prácticamente en el valor calculado cuando se resuelve la ecuación del movimiento.

Puede ser interesante también dar un ejemplo de progresión de marchas para este sistema, empezando también desde los 5 km/h y pendiente  $\alpha = 0$ . Ahora, sin embargo, tendrá que resolverse la ecuación para cada relación de transmisión con unas condiciones iniciales distintas. Se tomará como velocidad inicial la que ocurre justo en cada cambio de marcha. Se tomará un ángulo de pedaleo inicial siempre desde los  $0^\circ$ .

Un ejemplo de esta progresión puede ser un cambio de 1ª a 2ª a los 5 segundos, cambio de 2ª a 3ª a los 10 segundos, cambio de 3ª a 4ª a los 20 segundos y cambio de 4ª a 5ª a los 40 segundos desde el inicio. Resulta de esta manera:

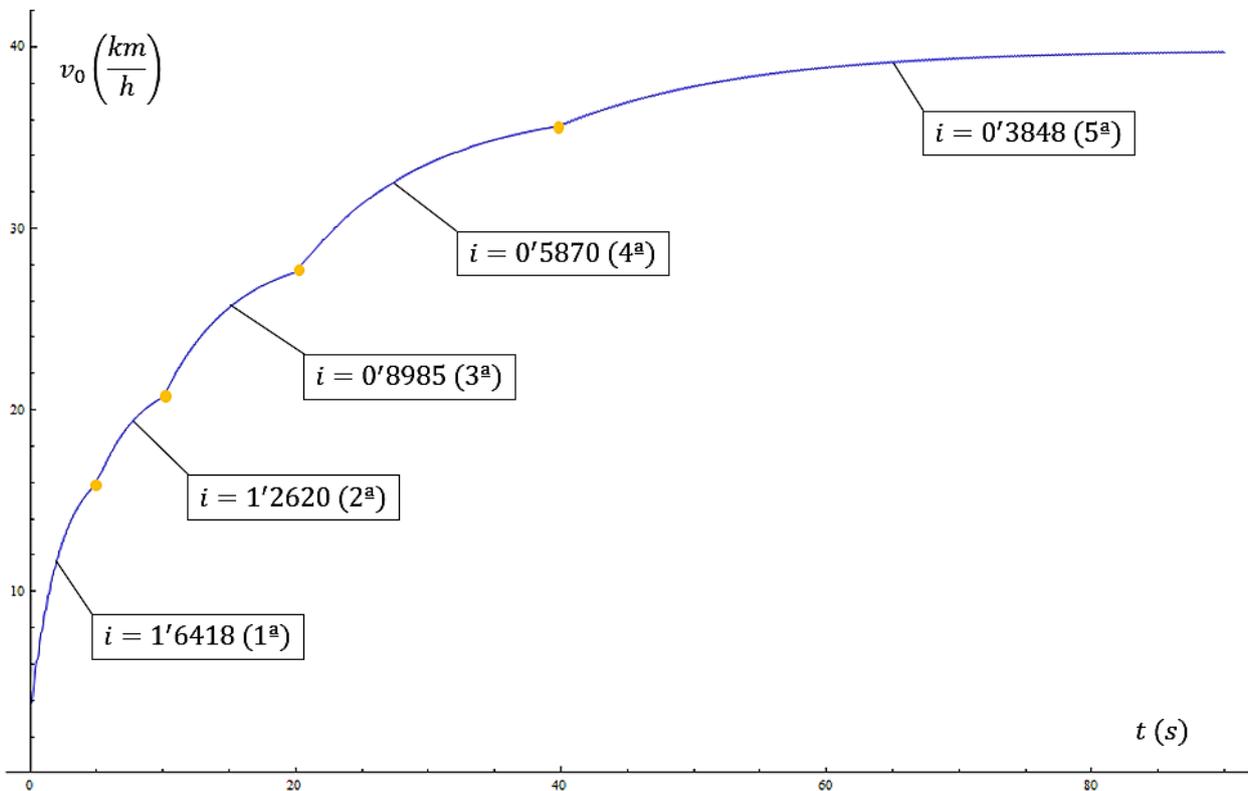


Figura 38. Progresión de marchas en el tiempo.

Debido a la resolución de la representación no puede observarse nítidamente las fluctuaciones en la velocidad que se producen por el pedaleo. A los 20 segundos se habría alcanzado los 30 km/h en esta configuración, mientras que a los 50 segundos casi se estaría en régimen permanente con la marcha óptima para pendiente nula (5ª).

Con esto concluye el análisis dinámico de un sistema de transmisión genérico de longitud de biela 175 mm, habiendo determinado inicialmente sus mejores relaciones de transmisión para vencer ciertas pendientes, y modelado finalmente su comportamiento transitorio. A continuación, se aplicará lo calculado a un pedaliar comercial, a modo demostrativo de cómo lograr las relaciones proyectadas.

## 7. INCORPORACIÓN DE LAS RELACIONES DE TRANSMISIÓN Y OPTIMIZACIÓN CON COMPOSITES, DE UN GRUPO PEDALIER MARCA SRAM

En este capítulo se incluirán las relaciones de transmisión calculadas a un sistema de transmisión del fabricante *SRAM*, incorporándolas en forma de piñones a su cassette. De esta manera se muestra cómo el método de cálculo utilizando es aplicable al diseño de uno de estos sistemas. Como se quiere obtener un sistema de mínimo peso partiendo de la base de este fabricante se recurrirá posteriormente a materiales compuestos para modelar sus bielas. Para verificar su aplicación debe cumplirse el ensayo de resistencia estática propuesto en la norma UNE EN 4210-8.

El pedalier que se usará corresponde, a un sistema monoplato de  $z_1 = 47$  dientes. Su modelo ha sido obtenido desde una base de archivos de *SolidWorks* libre (*GrabCAD*). Su longitud de biela corresponde con la de cálculo anterior: 175 mm. Esto hará que los resultados anteriores sean extrapolables también a este modelo concreto.

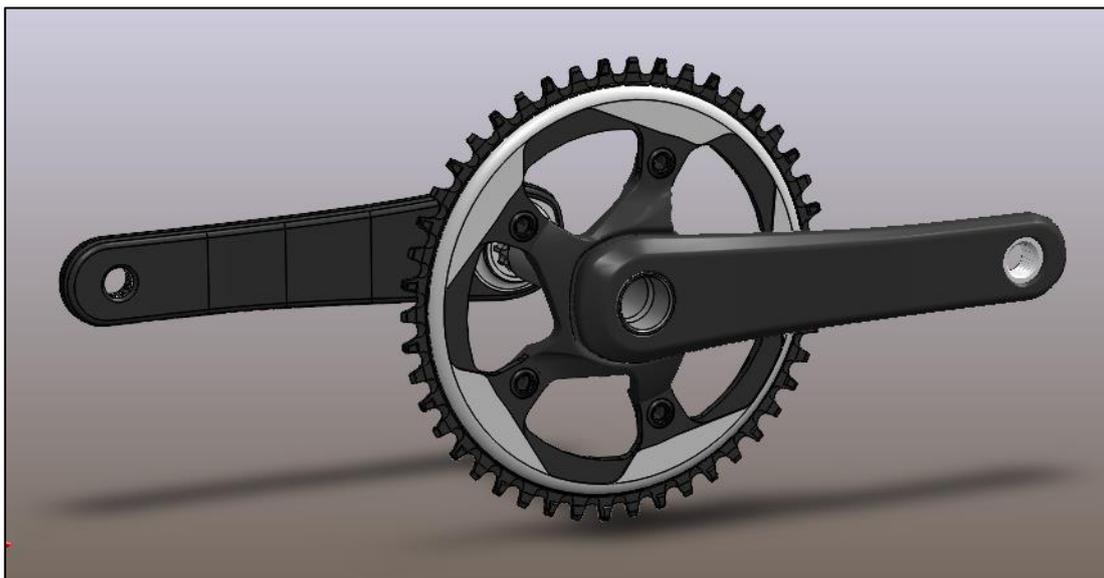


Figura 39. Pedalier *SRAM Force*, modelo en *SolidWorks*.

Se observa que este modelo tiene las características descritas de un monoplato, con dientes de diferente grosor para mejorar el engrane. La fuerza que se ejerce en los extremos de las bielas se transmite a través de éstas a unas piezas metálicas cuya unión roscada permite conectarlas al eje donde se encuentra el plato. Este plato tiene un diámetro primitivo  $d_1$  de aproximadamente 190 mm. También un factor  $Q$  de 146 mm.

En este caso solo se ha representado el pedalier. Para completar el resto del sistema sería necesario incluir la cadena y los piñones, cuyo número de dientes se calculará a continuación. El paso de cadena necesario en éste es un paso normalizado de 12'7 mm.

$$p = \frac{\pi d_1}{z_1} = \frac{\pi \cdot 190}{47} = 12'7 \text{ mm}$$

### Cálculo del Número de Dientes de los Piñones a Incorporar

Teniendo en cuenta los cálculos anteriores para un sistema con la misma longitud de biela, se incorporarán exactamente las 9 marchas que optimizan la transmisión para un rango de pendientes de entre  $-8^\circ$  y  $8^\circ$  en el pedalier *SRAM Force*. Estos cálculos suponían también una masa del corredor de 75 kg de peso.

Este pedalier escogido tiene  $z_1 = 47$  dientes en su plato, por lo que acudiendo a la ecuación número 2, el cálculo de los dientes de los piñones es:

$$z_2 = i \cdot z_1$$

Siempre que se dimensiona una transmisión se debe asegurar que los números de dientes de los engranajes sean coprimos entre sí. Esto implica que su máximo común divisor sea 1:  $mcd(z_1, z_2) = 1$ . De esta manera no siempre coincidirán la misma pareja de dientes, pudiendo producir un desgaste progresivo en zonas localizadas.

Aun así, 47 es un número primo. Esto implica que será, por definición, coprimo con cualquier número inferior. Éste es un número de dientes muy utilizado en la práctica en platos de bicicleta. Esto es debido a que permite muchas combinaciones de dientes y, por tanto, muchas relaciones de transmisión diferentes evitando el problema mencionado.

El número de dientes siempre es un número entero, por lo que las relaciones de transmisión calculadas anteriormente se verán modificadas tras el redondeo. Por ello, estas relaciones se representarán como  $i_{teórica}$ . Haciendo una tabla representativa de cada marcha, el número de dientes de cada piñón será:

Marcha	$i_{teórica} (-)$	$z_2 = i_{teórica} z_1 (-)$	$i_{real} = z_2 / z_1 (-)$
1 <sup>a</sup>	1'6417	77'16 → <b>77</b>	1'6383
2 <sup>a</sup>	1'2620	59'31 → <b>59</b>	1'2553
3 <sup>a</sup>	0'8985	42'23 → <b>42</b>	0'8936
4 <sup>a</sup>	0'5870	27'59 → <b>28</b>	0'5957
5 <sup>a</sup>	0'3848	18'09 → <b>18</b>	0'3830
6 <sup>a</sup>	0'2820	13'25 → <b>13</b>	0'2766
7 <sup>a</sup>	0'2273	10'68 → <b>11</b>	0'2340
8 <sup>a</sup>	0'1941	9'12 → <b>9</b>	0'1915
9 <sup>a</sup>	0'1717	8'07 → <b>8</b>	0'1702

Tabla 2. Cálculo del número de dientes de los piñones.

Se observa que no hay gran diferencia entre las relaciones finales y las calculadas inicialmente con el desarrollo dinámico. Esta diferencia hace que el sistema de transmisión no esté del todo optimizado para cubrir pendientes de  $-8^\circ$  a  $8^\circ$  en intervalos de  $2^\circ$ , aunque sí muy próximo a los resultados de capítulos anteriores.

Aunque los resultados fueran muy dispares siempre existirá un valor de pendiente para el que las marchas funcionan con su cometido principal, que es alcanzar la máxima velocidad de régimen permanente. Con el análisis dinámico, sin embargo, se tiene un control de cuáles son las marchas óptimas para cada inclinación y, por este motivo, se decidió incluirlas en base a un equiespaciado de  $2^\circ$  que cubriera el rango de pendientes deseado. Los piñones con el número de dientes especificados pueden ser adquiridos en el mercado para incorporar directamente a esta transmisión.

## Aplicación y Ensayo de Materiales Compuestos en las Bielas

Para que la transmisión sea propia de una bicicleta de carretera de competición debe ser lo más ligera posible. Se propondrá en este apartado una mejora del producto anterior basada en la aplicación de un laminado en las bielas. Se ensayará en un programa de elementos finitos para cumplir la norma UNE EN 4120-8.

### Resistencia estática según la norma UNE EN 4210-8

Las bielas modeladas deben cumplir lo dispuesto en la norma UNE EN 4210-8 en cuanto a resistencia estática. La norma establece los siguientes ensayos:

- Para sistemas de transmisión multivelocidad debe aplicarse una fuerza denominada  $F_1$  que aumente progresivamente hasta los 1500 N hacia abajo cuando se regla la transmisión en la velocidad más elevada (9ª velocidad en este caso). Debe aplicarse en el centro del pedal de la biela contraria al plato con el sistema fijo y ésta en posición horizontal. Tras esto, debe repetirse el ensayo en la biela adyacente al plato también en horizontal con la fuerza aplicada en el centro de su pedal.
- También deberá reglarse la transmisión en la marcha más baja, pero ajustando la fuerza para corresponder mejor a esta situación. De esta forma la fuerza  $F_1$  debe tomar un valor ajustado con el número de dientes de plato y piñón de esta marcha. Debe aplicarse primero en el centro del pedal de la biela contraria al plato.

$$F_1 \text{ [N]} = \begin{cases} 1500 \cdot \frac{z_{1,min}}{z_{2,max}}, & \frac{z_{1,min}}{z_{2,max}} \leq 1 \\ 1500, & \frac{z_{1,min}}{z_{2,max}} > 1 \end{cases}$$

Debe repetirse la aplicación de la fuerza en el pedal de la biela que se encuentra junto al plato en las mismas condiciones estáticas. En el caso de esta transmisión *SRAM Force*, la marcha más baja (la 1ª velocidad) se da con un número de dientes del piñón  $z_{2,max} = 77$  y un número de dientes del plato  $z_{1,min} = 47$ . Por lo tanto, se tendría que adoptar una fuerza  $F_1$  menor en este segundo ensayo de:

$$F_1 = 1500 \cdot \frac{47}{77} = 915'58 \text{ N}$$

Como solo se testarán las bielas a través del método de los elementos finitos y las dos (la adyacente al plato y la contraria al plato) están conformadas por un cuerpo igual, se considerará que los ensayos producirán los mismos resultados en ambas. De la misma manera, si el cuerpo de la biela es capaz de resistir el primero de los ensayos estáticos, también lo será con el segundo. El segundo se hace para ver la reacción del sistema de transmisión en su conjunto cuando está engranada la menor velocidad, pero al únicamente analizar el comportamiento resistente de las bielas, no será necesario llevarlo a cabo.

Por lo tanto, será preferente cumplir el primero de los ensayos, solo modelándose éste. Se aplicará para ello en el modelo de elementos finitos una fuerza y un momento torsor debido a que ésta se aplica a una distancia de la biela en el pedal. La fuerza es vertical en dirección inferior de valor 1500 N.

Este momento torsor coincide con la dirección  $x$  positiva del modelo que se verá a continuación. Se tomará para su estimación un valor de distancia del centro del pedal hasta el centro de la junta con la biela de 50 mm. Su valor será:

$$M_x = 1500 \cdot 0'05 = 75 \text{ Nm}$$

Las bielas quedarán inmóviles como todo el sistema, tal y como marca la norma. Se modelarán fijas en su junta con la parte metálica que las une al resto del pedalier.

#### Definición del laminado de las bielas

Los materiales compuestos que forman las láminas están conformados por una parte de fibras, que aportan rigidez y resistencia al material, y una parte de aglomerante o matriz, que transmite esfuerzos y sirve de protección a su vez. Se estudiará la aplicación de capas de fibra de carbono unidireccional con resina epoxi. Las fibras tendrán una ordenación cuadrada dentro de la matriz y una fracción en volumen del 55%.

Para definir las propiedades del material compuesto que forma el laminado es necesario un sistema de referencia de cada capa de material, cuya orientación con respecto al global del modelo determine sus propiedades elásticas. Será un sistema cartesiano, con ejes 1, 2 y 3. El eje 1 siempre estará alineado con la fibra, mientras que el 2 y 3 son perpendiculares a éste.

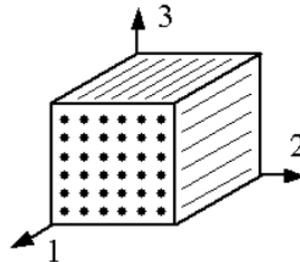


Figura 40. Sistema de referencia del material.

*Imagen obtenida de: de.zxc.wiki*

Debido a la gran cantidad de fibras y su ordenación se considerará que las láminas de fibra unidireccional tienen propiedades transversalmente isotrópicas. Esto quiere decir que su comportamiento elástico no variará ante cualquier rotación en el eje 1 del material. El fenómeno es debido que esta rotación mantiene la simetría del material con cualquier plano perpendicular al plano 2-3. Este plano 2-3 es el considerado plano de isotropía.

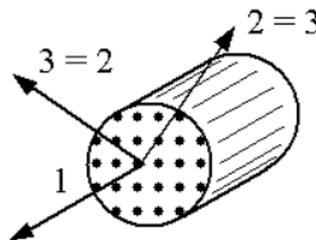


Figura 41. Sistema de referencia en un material transversalmente isotrópico.

*Imagen obtenida de: de.zxc.wiki*

Sus propiedades elásticas en el sistema de referencia mencionado vienen dadas por la generalización de la ley de Hooke, con la matriz de elasticidad  $[S]$ , que relaciona las deformaciones en ejes del material con las tensiones.

$$\{\varepsilon\} = [S]\{\sigma\} \quad (\text{ec. 35})$$

Aquí  $\{\varepsilon\}$  es el vector de deformaciones en los ejes del material y  $\{\sigma\}$  es el vector de tensiones también en este sistema.

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_1 \quad \varepsilon_2 \quad \varepsilon_3 \quad \gamma_{23} \quad \gamma_{13} \quad \gamma_{12}\}^T, \quad \{\sigma\} = \{\sigma_1 \quad \sigma_2 \quad \sigma_3 \quad \tau_{23} \quad \tau_{13} \quad \tau_{12}\}^T$$

Esta matriz está formada por 5 constantes independientes en este caso, módulos de elasticidad  $E$ , módulos de elasticidad transversal  $G$ , y ciertos coeficientes de Poisson  $\nu$  que será necesario aportar al programa de elementos finitos.

$$E_1, E_2 = E_3, \nu_{12} = \nu_{13}, \nu_{23}, G_{12} = G_{13}$$

La matriz de elasticidad es simétrica en banda y toma la siguiente forma para un material transversalmente isótropo:

$$[S] = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & \frac{-\nu_{12}}{E_1} & \frac{-\nu_{12}}{E_1} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & \frac{-\nu_{23}}{E_2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu_{12}}{E_1} & \frac{-\nu_{23}}{E_2} & \frac{1}{E_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2(1+\nu_{23})}{E_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \quad (\text{ec. 36})$$

Puede más tarde extrapolarse las tensiones desde el sistema de referencia del material al global del modelo mediante una matriz de transformación, según los ángulos que forman sus ejes.

Se alinearán algunas capas en el modelo de elementos finitos preferentemente con la dirección longitudinal de las bielas, donde se espera que existan grandes esfuerzos debido a la flexión que producirá la carga del ensayo. Además, se quiere incorporar al laminado una capa a  $90^\circ$  de las primeras capas para absorber otro tipo de esfuerzos.

De este modo, se probará a cumplir el ensayo con un laminado  $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$  con capas de 1,5 mm. Se dejará el interior de la biela hueco. Estas orientaciones cambiarán su comportamiento elástico como se ha visto. Éste es un laminado simétrico y cruzado. Este tipo de laminado evita acoplamientos indeseados, como puede ser el acoplamiento de un esfuerzo normal que produzca flexión o torsión en la biela, o deformaciones angulares como causa de un esfuerzo normal.

Se definen a continuación las características elásticas del material a usar, antes del modelado por elementos finitos del problema.

### Definición del material de la lámina y sus constantes elásticas

Se usará como refuerzo fibra de carbono II. Éste es un material que produce compuestos de elevada resistencia específica (o resistencia por unidad de peso) además de presentar una buena rigidez. Tiene un comportamiento anisótropo, aunque para el cálculo de sus propiedades dentro de un aglomerante se supondrán isotropas. Se empleará una fibra de carbono AS4. Sus propiedades son las siguientes, recurriendo a datos del estudio [24]:

Fibre longitudinal Young's modulus (GPa)	$E_A^f$	225
Fibre transverse Young's modulus (GPa)	$E_T^f$	15
Fibre longitudinal Poisson's ratio	$\nu_A^f$	0.2
Fibre longitudinal shear modulus (GPa)	$\mu_A^f$	15
Fibre transverse shear modulus (GPa)	$\mu_T^f$	7

Figura 42. Propiedades de la fibra de carbono AS4.

*Imagen obtenida de: [24]*

Se ignorará la anisotropía del material, por tanto, y se tomarán sus propiedades en dirección longitudinal como únicas en todas direcciones. De este modo se tiene que:

$$E_f = 225 \text{ GPa}, G_f = 15 \text{ GPa}, \nu_f = 0.2$$

La matriz que aglomera las fibras será resina epoxi, y sí tiene propiedades isotropas, aunque su comportamiento puede ser viscoelástico o viscoplástico en realidad. Se supondrá que trabaja de forma elástica lineal.

<b>Mechanical Properties</b>	<b>Cast Epoxy Resin</b>
Elasticity modulus (GPa)	4
Shear modulus (GPa)	1.50
Poisson's ratio	0.33

Figura 43. Propiedades de la resina epoxi curada.

*Imagen obtenida de: [26]*

Por lo tanto, las propiedades elásticas de la matriz serán las siguientes:

$$E_m = 4 \text{ GPa}, G_m = 1.5 \text{ GPa}, \nu_m = 0.33$$

Con estos datos puede estimarse los parámetros elásticos del comportamiento de una lámina de fibra unidireccional de ordenación cuadrada con una fracción en volumen de fibra  $V_f = 0.55$ . Se usará el modelo de Halpin-Tsai para ello, con las ecuaciones de resistencia de materiales para la estimación del módulo elástico en dirección 1 y el coeficiente de Poisson 1-2.

El módulo elástico del material en dirección de la fibra:

$$E_1 = E_f V_f + E_m (1 - V_f) = 125.55 \text{ GPa}$$

El coeficiente de Poisson mayor 1-2, que coincide con el 1-3:

$$\nu_{12} = \nu_f V_f + \nu_m (1 - V_f) = 0.259$$

Según el modelo de Halpin-Tsai, el módulo de elasticidad en dirección 2 y 3 será:

$$E_2 = E_m \frac{1 + \eta \xi V_f}{1 - \eta V_f} = 17'09 \text{ GPa}, \quad \text{con } \xi = 2 \text{ y } \eta = \frac{\frac{E_f}{E_m} - 1}{\frac{E_f}{E_m} + \xi} = 0'9485.$$

Con el mismo modelo y la estimación de Hewitt y Malherbe para  $\xi$ , el módulo de elasticidad transversal 1-2 y el 1-3 será:

$$G_{12} = G_m \frac{1 + \eta \xi V_f}{1 - \eta V_f} = 7'54 \text{ GPa},$$

$$\text{con } \xi = 1 + 40V_f^{10} = 1'1013 \text{ y } \eta = \frac{\frac{G_f}{G_m} - 1}{\frac{G_f}{G_m} + \xi} = 0'8107.$$

Falta estimar el coeficiente de Poisson 2-3, para lo que se recurre al modelo del estudio [23] y el Principio de Reciprocidad de Maxwell-Betti:

$$\nu_{23} = 1 - \nu_{21} - \frac{E_2}{2K} + \frac{E_2(1 - 2\nu_{12})}{2E_1} = 0'275, \quad \text{con } K = \frac{E_2}{3(1 - 2\nu_{12})} \text{ y } \nu_{21} = \frac{E_2}{E_1} \nu_{12}$$

Para el programa de elementos finitos es necesario especificar el módulo de elasticidad transversal en el plano 2-3, pero éste es simplemente con las ecuaciones de un material transversalmente isótropo:

$$G_{23} = \frac{E_2}{2(1 + \nu_{23})} = 6'70 \text{ GPa}$$

Se tienen las propiedades elásticas que conforman la matriz de elasticidad del material, únicamente es necesario introducirlas en el programa de elementos finitos para modelar el laminado.

Como se querrá analizar el fallo, a través del criterio de Tsai-Wu, para este análisis se tomarán límites resistentes característicos encontrados en la literatura de una lámina unidireccional de fibra de carbono y epoxi.

En la dirección de la fibra, tracción y compresión:

$$S_{1T} = 930 \text{ MPa}, \quad S_{1C} = -850 \text{ MPa}$$

En la dirección 2 y 3, tracción y compresión:

$$S_{2T} = S_{3T} = 35 \text{ MPa}, \quad S_{2C} = S_{3C} = -110 \text{ MPa}$$

En el plano 1-2 y 1-3, a cortante:

$$S_{12,S} = S_{13,S} = 46 \text{ MPa}$$

Para el plano 2-3 se estimará de forma conservadora como la mitad del límite 1-2:

$$S_{23,S} = 23 \text{ MPa}$$

## Modelo de elementos finitos en ANSYS Mechanical APDL

El modelo se centra únicamente en el análisis del cuerpo de las bielas que se va a modelar. Se extrapolará este componente del archivo de *SolidWorks* en forma de archivo *Parasolid* al programa de análisis por elementos finitos *ANSYS Mechanical APDL* para su análisis tensional y de fallo.

Inicialmente se definen dos tipos de elementos que serán de utilidad para el cálculo. Con elementos *Shell 281* triangulares cuadráticos se mallará la superficie de la biela. El programa permite definir en su interfaz las orientaciones del laminado que conforman estos elementos. También se escogerá un elemento tipo *Mass 21* para crear una región rígida asociada a la junta de la biela con el pedal, donde se aplicará la fuerza y el momento torsor.

Primero hace falta definir las propiedades del material a usar en el laminado, con los módulos de Young y coeficientes de Poisson mayores calculados previamente. Se elegirá la opción de material ortótropo. Se crean sus capas y su orientación  $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$  en *Preprocessor>Sections>Shell>Lay-up* con un espesor de capa de 1.5 mm.

T1	
Temperatures	0
EX	1.2555E+11
EY	1.709E+10
EZ	1.709E+10
PRXY	0.259
PRYZ	0.275
PRXZ	0.259
GXY	7.54E+09
GYZ	6.7E+09
GXZ	7.54E+09

Figura 44. Definición de las propiedades del material.

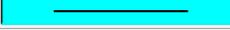
	Thickness	Material ID	Orientation	Integration Pts	Pictorial View
3	0.0015	1	0	3	
2	0.0015	1	90	3	
1	0.0015	1	0	3	

Figura 45. Definición del laminado con los elementos *Shell*.

A continuación, se mallá el componente en toda su superficie con los elementos *Shell*. El mallado tiene un tamaño del elemento uniforme de 2.5 mm, ya que si se refina más el modelo da problemas debido a la proporción del elemento con el espesor del laminado.

La orientación de éstos no está controlada, y se quiere alinear las capas del laminado a  $0^\circ$  con la dirección longitudinal de la biela, para aportar rigidez a flexión al componente. Para ello se crea un sistema de referencia local en *WorkPlane>Local Coordinate Systems>Create Local CS>At WP Origin* y se elige un sistema de referencia cartesiano.

Más tarde, con la opción *Preprocessor>Modeling>Move/Modify>Elements>Modify Attrib* se alinea el sistema de referencia del elemento que aparece automáticamente con el nuevo sistema de referencia creado.

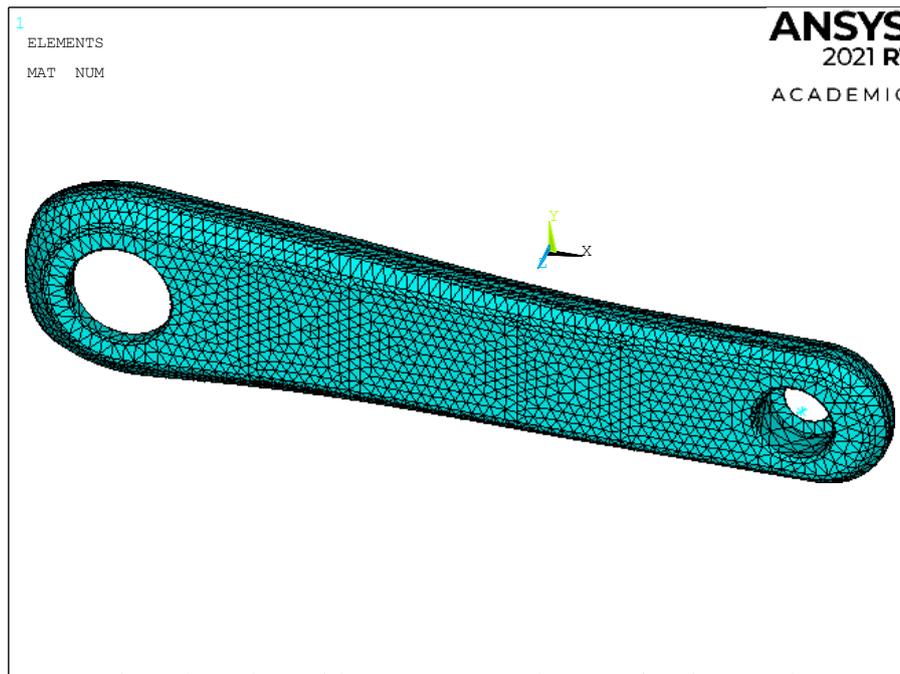


Figura 46. Mallado del cuerpo de la biela.

También se ha creado un *Keypoint* en el centro de la junta del pedal con la biela para mallarlo con el elemento *Mass*. Se ha realizado una medición en el propio programa de dónde estaba el centro de esta junta cilíndrica para colocar el *Keypoint*. Esto sirve para tener un punto controlado donde aplicar una fuerza y momento torsor puntuales como se establece en el primer ensayo de la norma UNE 4210-8.

Ahora, seleccionando los nodos de donde va a apoyar el pedal en la biela se crea una región que se comporte como un sólido rígido para aplicar la fuerza y el momento puntuales en el nodo del *Keypoint* mallado con el elemento *Mass*. Esto se hace en *Preprocessor > Coupling / Ceqn > Rigid Region*. Se selecciona este nodo mencionado como nodo máster y el resto de esta área de apoyo como nodos esclavos.

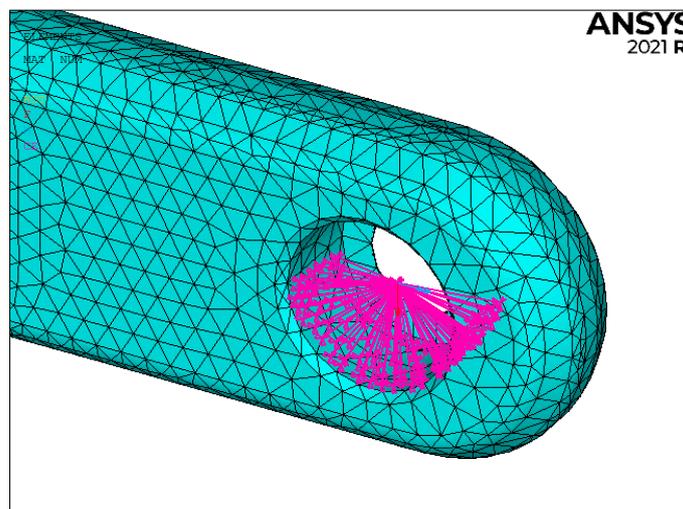


Figura 47. Región rígida y *Keypoint* de aplicación de las cargas.

Más tarde se aplica la fuerza puntual de 1.500 N en dirección vertical hacia abajo y el momento torsor de 75 Nm en dirección positiva del eje  $x$  del modelo. Estas cargas se ven ya aplicadas en la figura anterior.

Únicamente queda establecer las condiciones de contorno de desplazamiento a las que se ve sometido el cuerpo de la biela. Estas se modelarán como un empotramiento en la junta con el resto del pedalier. De esta manera, se seleccionan las áreas pertinentes y se aplican en *Preprocessor>Loads>Define Loads>Apply>Structural>Displacement>On Areas*.

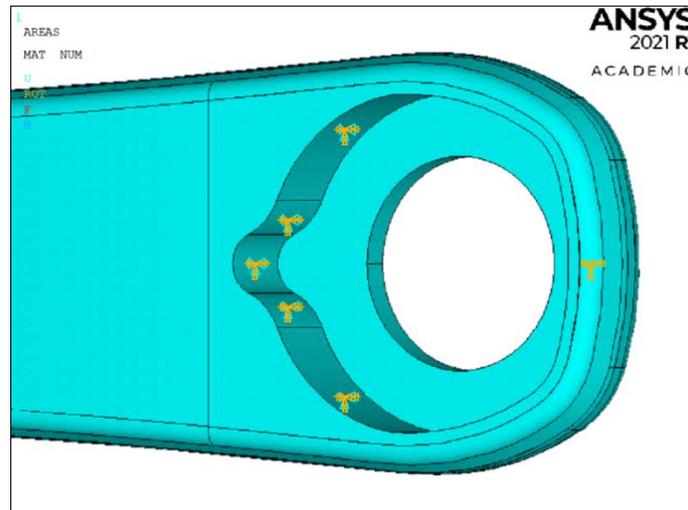


Figura 48. Empotramiento de las áreas en la junta con el resto del pedalier.

Una vez aplicadas todas las condiciones de contorno al modelo, únicamente queda resolver y analizar los resultados tensionales y de criterio de fallo capa por capa. No se considerarán precisos los resultados alrededor de la región rígida definida, ya que la zona se mueve en conjunto, restringiendo la relación entre grados de libertad. Además, no se ha modelado un elemento estructural metálico sobre el que recae la aplicación de la fuerza y el momento. El modelo con todas las condiciones aplicadas es el siguiente:

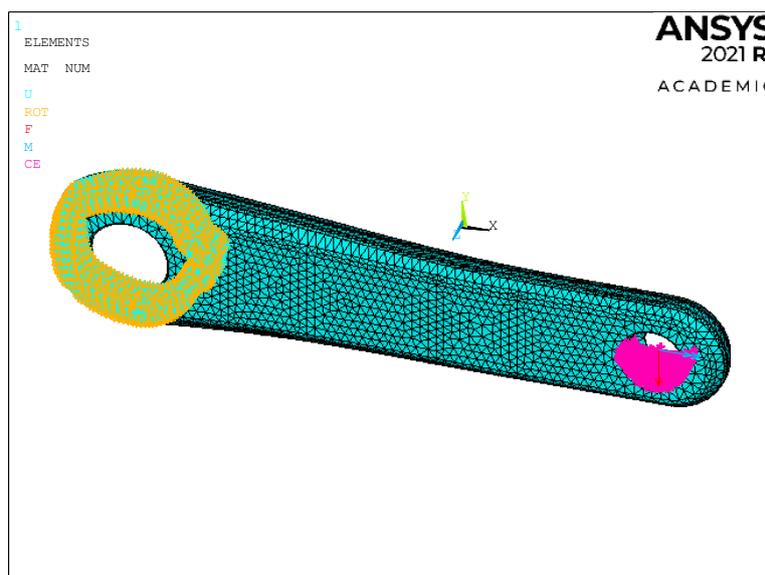


Figura 49. Modelo de elementos finitos.

## Resultados del análisis por elementos finitos

El programa permite ver los resultados de tensión tanto en coordenadas del elemento usado (es decir en coordenadas del material), como en coordenadas globales. Permite también navegar entre capas del laminado para ver resultados en éstas. Primeramente, se visualiza la geometría deformada, que corrobora la correcta aplicación de las cargas en el extremo (ver Figura 50 y Figura 51).

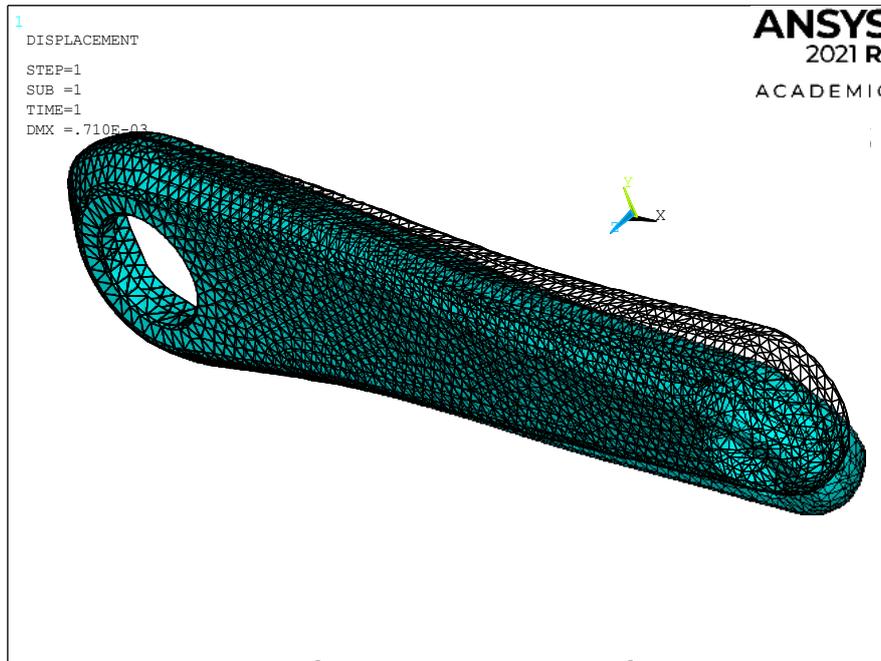


Figura 50. Geometría deformada.

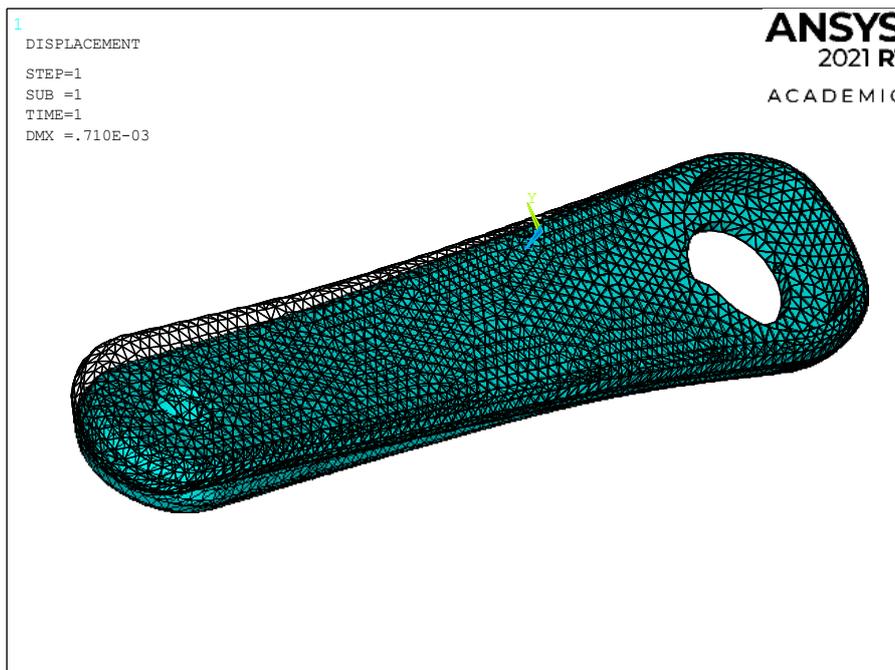


Figura 51. Vista trasera de la geometría deformada.

El resultado de tensión en dirección longitudinal (tensión en  $x$  global) más desfavorable del laminado  $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$  ocurre en la capa tercera (la exterior), donde se llegan a alcanzar los 203 MPa debido a la flexión positiva y los -203 MPa debido a la flexión negativa, como se muestra en la Figura 52.

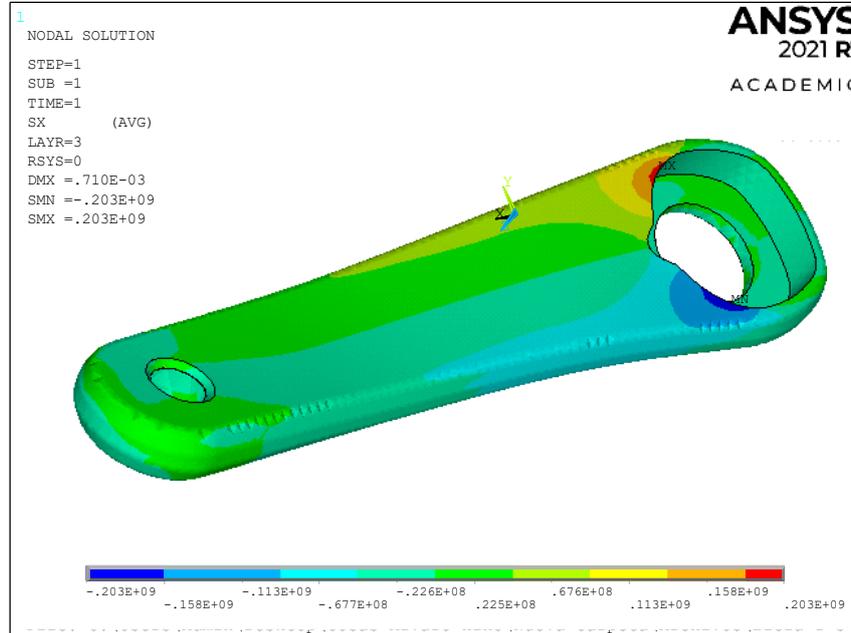


Figura 52. Tensiones en el eje  $x$  global de la parte superior de la tercera capa.

En la capa 1 se dan menores niveles de tensión en dirección  $x$  global que en la capa 3, a pesar de estar ambas a  $0^\circ$  y tener el mismo espesor. La máxima tensión en ésta se da en la parte superior (Top, en el programa) y se distribuye por una mayor área, alcanzando 83'7 MPa y -83'8 MPa (ver Figura 53).

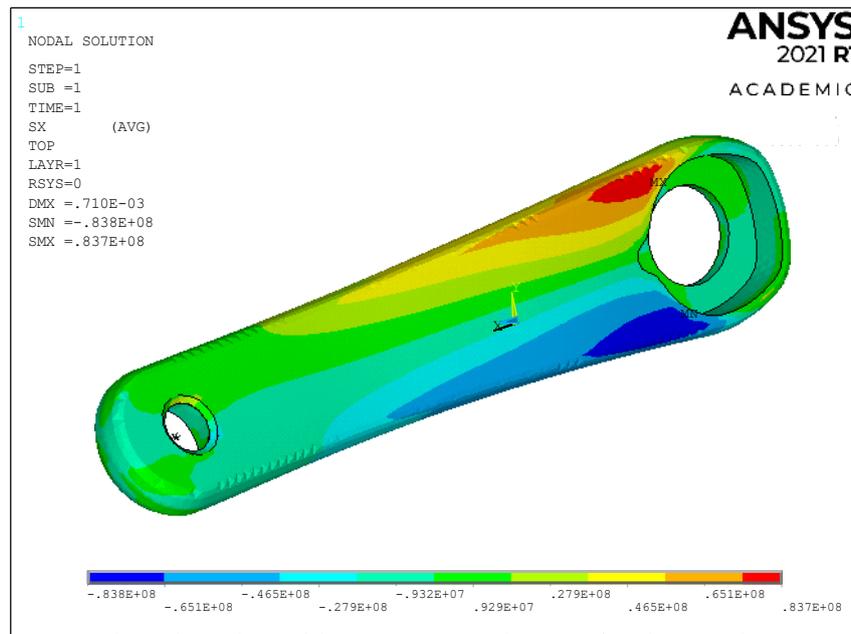


Figura 53. Tensiones en el eje  $x$  global de la parte superior de la primera capa.

En la segunda lámina, orientada a 90°, es interesante ver resultados de tensión en el eje  $x$  global (ver Figura 54). Esta capa será seguramente la más desfavorable de cara al fallo del laminado, especialmente en la zona de flexión positiva. Esto es debido a un bajo límite elástico  $S_{2T} = 35$  MPa, dominado por la matriz en la dirección transversal del material.

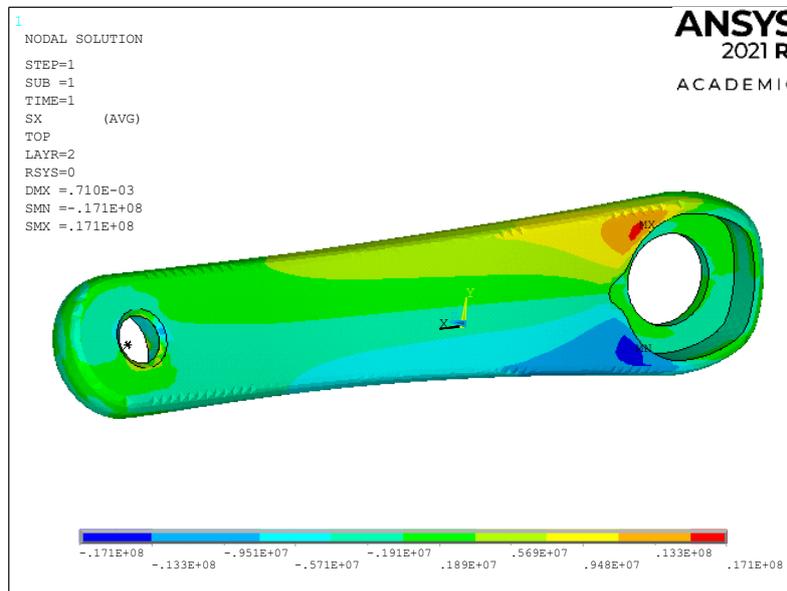


Figura 54. Tensiones en el eje  $x$  global de la parte superior de la capa 2.

Puesto que en el laminado existen dos capas, la 1 y 3 con la fibra a 0°, ante la misma deformación hay mayores niveles de tensión que la capa 2, por su elevada rigidez en la dirección de la fibra. Evitan que ésta se vea muy tensionada, dándose valores de 17'1 y -17'1 MPa, como se aprecia en la figura anterior.

Por otro lado, en el eje  $y$  global, dirección de aplicación de la carga, las tensiones son despreciables en las capas 1 y 3. Para la capa 2, las tensiones en  $y$  van en la dirección de la fibra. Adoptan valores altos, hasta alcanzar los 175 MPa y -186 MPa (ver Figura 55).



Figura 55. Tensiones en el eje  $y$  global de la parte superior de la segunda capa.

Las tensiones en el eje  $z$  global (perpendicular al plano de la biela) son despreciables para todas las capas. La tensión tangencial en el plano  $xy$ , por el contrario, es máxima en la capa 3 cerca del concentrador de tensiones. Llega a alcanzar 51'4 MPa (ver Figura 56).

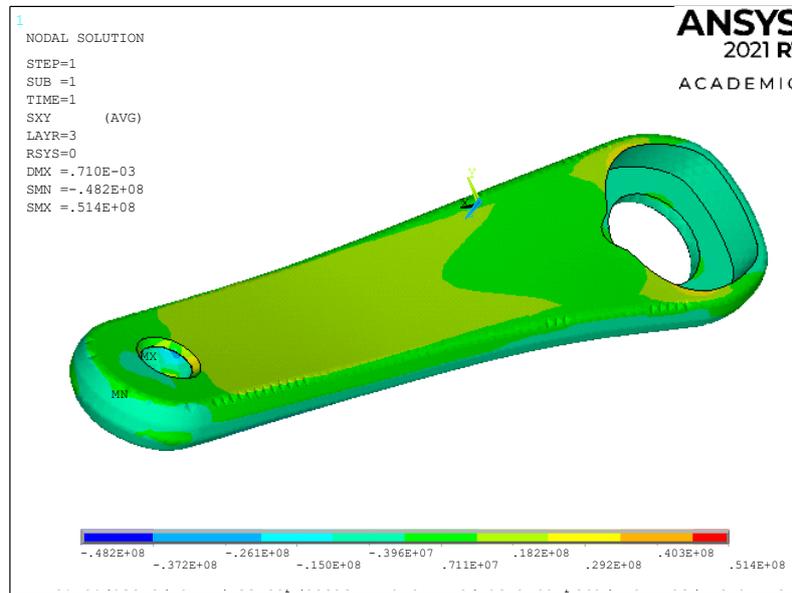


Figura 56. Tensión tangencial  $xy$  global para la parte superior de la capa 3.

Si se representa la tensión en ejes del material de las capas, los resultados son idénticos, debido a la alineación del sistema de referencia material con el global.

Parece obvio que el fallo es más probable en esta zona del cuerpo de la biela, cerca de la junta con el resto del pedalier, que actúa de concentrador de tensiones. Sin embargo, los valores de tensión son bastante inferiores a los límites descritos en el apartado anterior. A priori, no se espera el fallo del componente por haber alcanzado un límite elástico.

Para comprobar esta hipótesis, se recurrirá al criterio de fallo de Tsai-Wu. Éste depende de las tensiones en ejes del material, no las tensiones en ejes globales que se han mostrado. El fallo según este criterio ocurre cuando la siguiente suma toma un valor superior a 1.

$$F_1\sigma_1 + F_2\sigma_2 + F_3\sigma_3 + F_4\tau_{23} + F_5\tau_{13} + F_6\tau_{12} + F_{11}\sigma_1^2 + F_{22}\sigma_2^2 + F_{33}\sigma_3^2 + F_{44}\tau_{23}^2 + F_{55}\tau_{13}^2 + F_{66}\tau_{12}^2 + 2F_{12}\sigma_1\sigma_2 + 2F_{13}\sigma_1\sigma_3 + 2F_{23}\sigma_2\sigma_3 \geq 1 \quad (ec. 37)$$

Los coeficientes para un material ortótropo son:

$$F_1 = \frac{1}{S_{1T}} - \frac{1}{S_{1C}}, F_2 = \frac{1}{S_{2T}} - \frac{1}{S_{2C}}, F_3 = \frac{1}{S_{3T}} - \frac{1}{S_{3C}}, F_4 = F_5 = F_6 = 0,$$

$$F_{11} = \frac{1}{S_{1T}S_{1C}}, F_{22} = \frac{1}{S_{2T}S_{2C}}, F_{33} = \frac{1}{S_{3T}S_{3C}}, F_{44} = \frac{1}{S_{23,S}^2}, F_{55} = \frac{1}{S_{13,S}^2}, F_{66} = \frac{1}{S_{12,S}^2}$$

Los coeficientes de interacción  $F_{12}$ ,  $F_{13}$ ,  $F_{23}$  pueden ser determinados experimentalmente con un ensayo de tensión biaxial. El programa ANSYS realiza el cálculo bajo la hipótesis de tensión plana ( $\sigma_3 = 0$ ), haciendo irrelevantes  $F_{13}$  y  $F_{23}$ . Este programa sí que tiene en cuenta  $F_{12}$  mediante su estimación con un modelo semiempírico.

$$F_{12} = F_{12}^* \sqrt{F_{11}F_{22}}, \text{ con } F_{12}^* = -0'5 \quad (ec. 38)$$

Se deben introducir los valores de los límites elásticos estimados en el apartado anterior en el programa en *General Postproc>Failure Criteria>Add/Edit*.

Si se navega entre las distintas capas del laminado, el valor de la suma de Tsai-Wu es máximo para la capa 2, que es la que tiene las fibras orientadas a 90°. Es un resultado razonable, ya que se ha explicado que límite resistente del material en la dirección perpendicular a la fibra es muy bajo, especialmente a tracción. La flexión positiva produce en este caso una tensión relativamente importante en esta dirección transversal del material de la segunda capa.

Se observa en la Figura 57 que el valor de la suma dada por la ecuación 37 es inferior a 1 cerca del concentrador de tensiones. Nuevamente, se despreciarán los resultados cerca de la región rígida, que proporcionan valores poco fiables, por las razones anteriormente expuestas. El máximo valor es de 0'8. Se puede concluir que un laminado [0°/90°/0°] de espesores de capa 1'5 mm, con fibra de carbono-epoxi (fracción en volumen de fibra  $V_f = 0'55$ , unidireccional, ordenación cuadrada) es capaz de soportar los ensayos de resistencia estática de la norma UNE EN 4210-8. Cumpliendo el primero de ellos, el cuerpo de la biela será capaz de soportar el segundo también. Este laminado es una solución válida para el modelo.

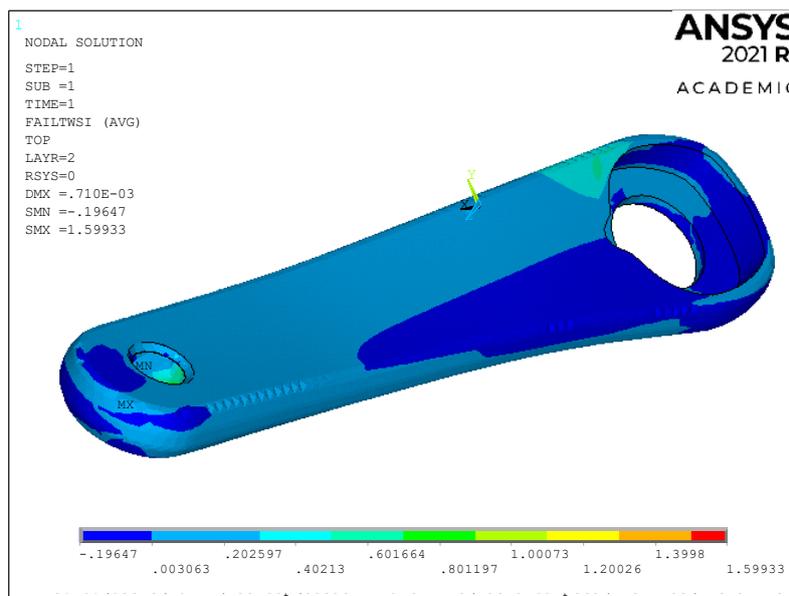


Figura 57. Valor del criterio de fallo de Tsai-Wu

Si se quiere estimar la masa del cuerpo de la biela, puede hacerse a través de la densidad de fibra y matriz. Si se toma un valor estándar para la densidad de la fibra de carbono  $\rho_f = 1'8 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$  y para la resina epoxi de  $\rho_m = 1'16 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$ . Como la fracción en volumen de fibra  $V_f$  del compuesto es de 0'55, su densidad en conjunto es:

$$\rho_{comp} = \rho_f V_f + \rho_m (1 - V_f) = 1'512 \cdot 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

El programa ANSYS proporciona un área del cuerpo de biela de  $0'00244 \text{ m}^2$ , esto junto al espesor total del laminado  $t_{lam} = 4,5 \text{ mm}$  hace estimar una masa de únicamente  $166'02 \text{ g}$ .

$$\rho_{comp} \cdot A_{biela} \cdot t_{lam} = 1'512 \cdot 10^3 \cdot 0'0244 \cdot 4'5 \cdot 10^{-3} = 0'16602 \text{ kg} = 166'02 \text{ g}.$$

## 8. CONCLUSIONES Y PROPUESTAS

En primer lugar, tras haber diseñado una transmisión para una bicicleta de competición mediante un enfoque analítico, y tras haber simulado su influencia en el movimiento del conjunto, puede llegarse a distintas conclusiones en cuanto al método de cálculo y resultados obtenidos. Puede hacerse propuestas para su mejora y uso por otras personas.

Este método no solo debe servir para obtener las marchas adecuadas en unas determinadas pendientes. Este propósito debe ser, sin embargo, su aplicación más útil. El enfoque usado involucra gran cantidad de parámetros, de manera que las combinaciones para el estudio son realmente amplias. Cualquier investigador o profesional que acuda a este trabajo tiene la posibilidad de estudiar la influencia en carrera de la masa del corredor, la longitud de biela, resistencia a la rodadura de los neumáticos, potencia media máxima del ciclista, etc. Para ello es necesario conocer el ciclo de pedaleo del corredor para el que se diseña el sistema de transmisión, pudiendo ser éste un ciclista genérico como el de este proyecto.

Se ha demostrado que es posible simular el comportamiento en régimen estacionario del vehículo con fidelidad. Asimismo, ha podido modelarse el régimen transitorio con la ecuación del movimiento. Todo ello sin necesidad de pasar por un banco de pruebas, o realizar comprobaciones empíricas en simulacro de carrera. Esto permite, en la práctica, ahorrar un tiempo y dinero en este tipo de ensayos. Eso sí, en carrera real se dan muchas condiciones que no han sido tomadas en cuenta durante el proceso de cálculo, como la distribución de pendientes en una etapa, la lluvia, la fatiga, el viento, o similares. La inclusión de estos factores puede ser una mejora adecuada de este método.

En la aplicación de los resultados teóricos a un pedalier comercial, con el fin de conformar la transmisión proyectada, ha podido obtenerse también varias conclusiones relevantes.

El uso de monoplato permite en la actualidad cubrir un gran rango de pendientes sin perder excesiva efectividad entre marchas. Como es una solución muy ligera y con menos probabilidad de fallo que una transmisión convencional, merece la pena considerar su aplicación en el ámbito del ciclismo de carretera de competición. Aun así, por comodidad, muchos corredores prefieren tener a su disposición un mayor rango de marchas, por lo que acaban recurriendo a un sistema convencional, de mayor peso que éste.

Los materiales compuestos usados para modelar las bielas del pedalier escogido son una solución constructiva válida, aunque de elevado precio. Esto en competición no es un gran problema. Podría también estudiarse otro tipo de material, como la fibra de vidrio con poliéster, así como otra disposición de capas en el laminado, u otros espesores de capa que cumplan los ensayos. La aplicación de un laminado en bielas de interior hueco va en consonancia con la última tecnología del sector, descrita en el capítulo 3.

Finalmente, debe remarcarse el hecho de que la movilidad del futuro en grandes ciudades pase por el uso de la bicicleta. Esto dota cada vez de más importancia al estudio y mejora de los sistemas de transmisión. Las alternativas existentes a la transmisión por cadena no han llegado todavía a tener cabida en el mercado, por lo que este sistema prevalece. Tal vez un día, llegue a abandonarse la tradicional transmisión por cadena, pudiendo ser sustituida por sistemas energéticamente más eficientes y silenciosos.



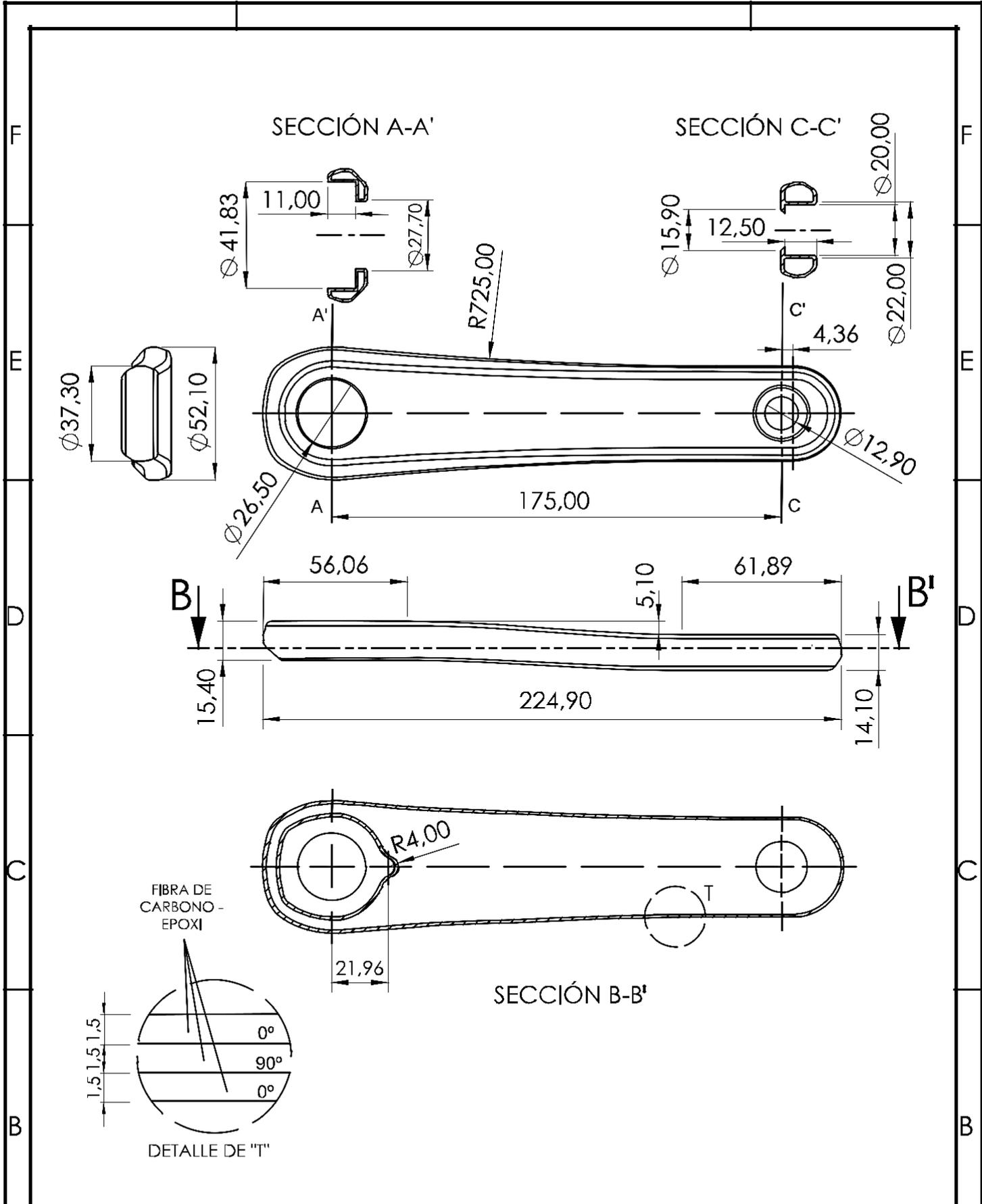
UNIVERSITAT  
POLITÈCNICA  
DE VALÈNCIA



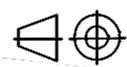
---

**DOCUMENTO**  
**Nº2:**  
**PLANOS DE LOS**  
**COMPONENTES**  
**PROYECTADOS**

---



<b>PROYECTO:</b>		Fecha:26/05/2020
Cuerpo de Biela con Laminado de Fibra de Carbono y Resina Epoxi		Escala: 1:2
Autor: Álvaro del Río Monleón	Plano de vista de alzado, planta y perfil	Nº Plano: 1
Toda la pieza está formada por un laminado de 4'5 mm de espesor		





UNIVERSITAT  
POLITÈCNICA  
DE VALÈNCIA



Escuela Técnica Superior de Ingeniería del Diseño

---

**DOCUMENTO**  
**Nº3:**  
**PLIEGO DE**  
**CONDICIONES**

---

# INTRODUCCIÓN

En este pliego se definirán las condiciones que se ha de seguir para el correcto uso del método de cálculo de este Trabajo de Fin de Grado, así como las condiciones técnicas de uso y de montaje de la transmisión que se ha diseñado siguiendo estas directrices. Cualquier usuario del método propuesto deberá seguir las indicaciones definidas a continuación.

## OBJETO DEL PLIEGO DE CONDICIONES

El objeto de este pliego es, de manera general, asegurar la calidad de los resultados a nivel de cálculo para cualquier persona que quiera hacer uso del enfoque propuesto, así como asegurar la calidad, seguridad y viabilidad de uso de la transmisión que se ha optimizado en base a éste.

## 1. CONDICIONES DE CÁLCULO

### 1.1 Condiciones de Uso del Método Propuesto

- Debe considerarse, siempre que se diseñe una transmisión para un corredor específico, su ciclo de pedaleo particular para que los resultados sean óptimos. Si quiere diseñarse una transmisión de manera genérica como ha sido objeto de este trabajo puede consultarse ciclos de pedaleo de otros ciclistas, tanto profesionales como no profesionales.
- Nuevamente si se quiere diseñar una transmisión específica para un ciclista debe considerarse su masa para la fuerza e inercia generalizadas.
- El ajuste del ciclo de pedaleo debe hacerse preferentemente mediante una función al estilo Serie de Fourier con términos finitos, ya que la curva de par generada entre ambas bielas adopta una forma sinusoidal con respecto su ángulo.
- Debe suponerse que el aire a través del que se mueve el vehículo está en reposo, aunque no siempre se encuentren esas condiciones en la realidad, donde puede haber vientos favorables (viento de cola) o desfavorables (viento de frente).
- Debe considerarse una masa puntual en los pedales para modelar el comportamiento de las extremidades del corredor. Puede ser estimada mediante ensayos experimentales o con un porcentaje de la masa corporal de éste.

### 1.2 Condiciones de Cálculo por Ordenador

- La resolución de la ecuación del movimiento debe realizarse en un programa que permita la resolución mediante métodos numéricos de ecuaciones diferenciales de, al menos, segundo orden. También debe ser posible la inclusión de funciones trigonométricas no lineales en la variable dependiente.

- El análisis por elementos finitos debe realizarse suponiendo una región rígida en el apoyo del pedal en la biela, añadiendo siempre una fuerza y un momento.
- El ordenador usado en un cálculo resistente debe ser capaz de ejecutar un análisis por elementos finitos del cuerpo de las bielas con un tamaño de elemento de 2'5 mm. No debe usarse un tamaño menor por problemas en la definición del elemento tipo *Shell*.
- En este análisis debe hacerse uso del criterio de Tsai-Wu para predecir el fallo en láminas de material compuesto. Debe estimarse  $F_{12}^*$  como - 0'5.

## 2. CONDICIONES TÉCNICAS

### 2.1 Condiciones Técnicas de la Transmisión Diseñada

- El conjunto pedalier debe ser únicamente marca *SRAM Force* monoplate de 47 dientes y longitud de biela 175 mm.
- El laminado debe contener fibra de carbono AS4 larga unidireccional, con ordenación necesariamente cuadrada y matriz epoxi. Debe contener 3 capas de orientación  $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$  con respecto a la dirección longitudinal del cuerpo de biela.
- Deberá suponerse para el cálculo que la lámina de material compuesto se comporta como transversalmente isótropa. Cualquier ortotropía debe despreciarse.
- Si no se realiza ningún tipo de ensayo que aporte otros valores, los límites resistentes que se considerarán para el criterio de fallo de una lámina de fibra de carbono – epoxi son los expuestos en este Trabajo de Fin de Grado.
- La transmisión debe ser probada y cumplir con todos los ensayos dispuestos en la norma UNE EN 4210-2, de restricciones geométricas y UNE EN 4210-8, de ensayos resistentes del sistema de transmisión.
- El pedalier *SRAM Force* se vende de una pieza incluyendo platos, bielas y caja de pedalier. Una vez se tiene las bielas optimizadas con el laminado que se ha diseñado, añadir el resto de sus componentes para conformar el sistema de transmisión. Debe incluirse la cadena, el desviador trasero y la maza con los piñones proyectados, todos con el mínimo peso posible.
- Los piñones de las 9 marchas deben tener el número de dientes calculado para esta transmisión concreta, que la optimizan para ciertos valores de pendiente.
- La cadena a montar debe tener un paso de  $(1/2)''$  (paso normalizado de 12'7 mm), que es lo que requiere el plato del pedalier *SRAM Force*, con un ancho  $(3/32)''$ .



UNIVERSITAT  
POLITÈCNICA  
DE VALÈNCIA



Escuela Técnica Superior de Ingeniería del Diseño

---

**DOCUMENTO  
Nº4:  
PRESUPUESTO**

---

## 1. PRESUPUESTO PARCIAL: HONORARIOS DE INGENIERÍA

Número	Unidades	Concepto	Cantidad	Precio Unitario (€/h)	Precio (€)
1.1	h	Búsqueda bibliográfica	60	27'00	1.620'00
1.2		Desarrollo del método de cálculo	140		3.780'00
1.3		Uso <i>Wolfram Mathematica 11.3</i>	80		2.160'00
1.4		Uso <i>DS SolidWorks 2021</i>	10		270'00
1.5		Uso <i>ANSYS Mechanical APDL 2021</i>	50		1.350'00
1.6		Redacción de resultados	60		1.620'00

TOTAL 1. (€)

10.800'00

## 2. PRESUPUESTO PARCIAL: EQUIPO DE SOFTWARE

Número	Unidades	Concepto	Cantidad	Precio Unitario (€/ud.)	Precio (€)
2.1	ud.	Licencia anual <i>Wolfram Mathematica Desktop 11.3</i>	1	794'00	794'00
2.2		Licencia anual <i>DS SolidWorks Diseño Mecánico CAD 3D Standard 2021</i>	1	3.400'00	3.400'00
2.3		Licencia anual <i>ANSYS Mechanical Pro</i>	1	4.438'39	4.438'39
2.4		Licencia anual paquete <i>Microsoft Office 365 Personal 2020</i>	1	57'02	57'02

TOTAL 2. (€)

8.689'41

### 3. PRESUPUESTO PARCIAL: EQUIPO DE HARDWARE

Número	Unidades	Concepto	Cantidad	Precio Unitario (€/ud.)	Precio (€)
3.1	ud.	Ordenador portátil <i>Acer Aspire V5-552p</i>	1	450'00	450'00

<b>TOTAL 3. (€)</b>	<b>450'00</b>
---------------------	---------------

### PRESUPUESTO DE EJECUCIÓN MATERIAL (PEM)

	<b>Descripción</b>	<b>Precio (€)</b>
1.	Honorarios de Ingeniería	10.800'00
2.	Equipo de Software	8.689'41
3.	Equipo de Hardware	450'00

**PRESUPUESTO DE EJECUCIÓN MATERIAL** 19.939'41

### PRESUPUESTO DE EJECUCIÓN POR CONTRATA (PEC)

<b>PRESUPUESTO DE EJECUCIÓN MATERIAL</b>	19.939'41 €
<b>GASTOS GENERALES (2%)</b>	398'79 €
<b>TOTAL (sin IVA)</b>	20.338'20 €
<b>IVA (21%)</b>	4.271'02 €
<b>TOTAL PRESUPUESTADO</b>	24.609'22 €

*Se ha optado por considerar los honorarios del servicio de ingeniería de cálculo como el Beneficio Industrial del autor de este proyecto.*

El total presupuestado asciende a la cantidad de VEINTICUATRO MIL SEISCIENTOS NUEVE EUROS CON VEINTIDÓS CÉNTIMOS.

## BIBLIOGRAFÍA

- [1] Lacoste, E. (2018) *Desarrollo de una transmisión CVT para una bicicleta*. Trabajo de Fin de Grado. Universidad Carlos III de Madrid. Grado en Ingeniería Mecánica. Recuperado de: <https://core.ac.uk/download/pdf/288502008.pdf>
- [2] (En línea) (2018) *Medidas y estándares de la bicicleta*. Página web: “No sin mi bici”. Consultado el 02/02/2021. Disponible en: <https://nosinmibici.com/2014/02/18/medidas-y-estandares-de-la-bicicleta/>
- [3] Navarro F., Rui-Wamba J., Fernández A., Altisench O., García C., Julià J., Rui-Wamba M.Á. (2010) *La Ingeniería de la Bicicleta*. Editorial Fundación Esteyco. ISBN: 978-84- 933553-5-7.
- [4] (En línea) Foss K. (2020) *La diferencia entre rueda libre y cassette*. Página web: “La Bicikleta”. Consultado el 02/02/2021. Disponible en: <https://labicikleta.com/cual-es-la-diferencia-entre-la-rueda-libre-y-el-cassette/#:~:text=A%20diferencia%20de%20las%20mazas,de%20una%20o%20varias%20velocidades/>
- [5] (En línea) Escotto J.M. (2015) *Grupos de transmisión alternativos*. Página web: “Revista Bikes World”. Consultado el 02/02/2021. Recuperado de: <https://www.bikesworldrevista.es/grupos-de-transmision-alternativos/>
- [6] (En línea) Iriberry J. (2015) *Biomecánica: Distancia entre zapatillas, a vueltas con el factor Q*. Página web: “Ciclismo a fondo”. Disponible en: [https://www.ciclismoafondo.es/preparacion-fisica/biomecanica-ciclismo/biomecanica-distancia-entre-zapatillas-a-vueltas-con-el-factor-q\\_38268\\_102.html](https://www.ciclismoafondo.es/preparacion-fisica/biomecanica-ciclismo/biomecanica-distancia-entre-zapatillas-a-vueltas-con-el-factor-q_38268_102.html)
- [7] (En línea) Tomás I. (2019) *Factor-Q en el ciclismo. Te explicamos por qué es importante*. Página web: “Maillot Magazine”. Disponible en: <https://www.maillotmag.com/afondo/factor-q-en-ciclismo-te-explicamos-por-que-es-importante>
- [8] (En línea) (2019) *Elección del tamaño de biela*. Página web: “Apoyo Científico y Tecnológico para el deporte - Biolaster”. Disponible en: <https://www.biolaster.com/ciclismo/posicion-ciclista-bicicleta/longitud-biela/>
- [9] (En línea) (2021) *Cyclopedia / Crank Length* Página web: “Bike Insights”. Disponible en: <https://bikeinsights.com/cyclopedia/crank-length>
- [10] Dorel S., Couturier A., Lacour J-R., Vandewalle H., Hautier C., Hug F. (2009) *Force–Velocity Relationship in Cycling Revisited: Benefit of Two-Dimensional Pedal Forces Analysis*. Artículo en: *Medicine and Science in Sports and Exercise*. Disponible en : [https://www.researchgate.net/publication/40483832\\_Force-Velocity\\_Relationship\\_in\\_Cycling\\_Revisited/link/5a9be8e5aca2721e3f30e47c/download/](https://www.researchgate.net/publication/40483832_Force-Velocity_Relationship_in_Cycling_Revisited/link/5a9be8e5aca2721e3f30e47c/download/)

- [11] Abiss C., Peiffer J., Laursen P. (2009) *Optimal cadence selection during cycling*. Artículo en: International Sportmed Journal, Vol. 10 No. 1, pp. 1-15. Disponible en: [https://www.researchgate.net/publication/49284193\\_Optimal\\_cadence\\_selection\\_during\\_cycling/link/00463531572305d247000000/download/](https://www.researchgate.net/publication/49284193_Optimal_cadence_selection_during_cycling/link/00463531572305d247000000/download/)
- [12] Kautz S., Feltner M., Coyle E., Baylor A. (1991) *The Pedaling Technique of Elite Endurance Cyclists: Changes with Increasing Workload at Constant Cadence*. Artículo en: International Journal of Sport Biomechanics, 1991, 7, pp. 29-53. Disponible en: [https://www.researchgate.net/publication/291111249\\_The\\_Pedaling\\_Technique\\_of\\_Elite\\_Endurance\\_Cyclists\\_Changes\\_with\\_Increasing\\_Workload\\_at\\_Constant\\_Cadence/](https://www.researchgate.net/publication/291111249_The_Pedaling_Technique_of_Elite_Endurance_Cyclists_Changes_with_Increasing_Workload_at_Constant_Cadence/)
- [13] Osorio J.S., Gómez S., Restrepo S. (2007) *Diseño y construcción de un pedal de bicicleta basado en sensores piezorresistivos para determinar la fuerza resultante*. Artículo en: Revista Ingeniería Biomédica ISSN 1909–9762, número 2, págs. 55-60. Disponible en: [https://www.researchgate.net/publication/242240937\\_Diseño\\_y\\_construcción\\_de\\_un\\_pedal\\_de\\_bicicleta\\_basado\\_en\\_sensores\\_piezorresistivos\\_para\\_determinar\\_la\\_fuerza\\_resultante/link/57a9dc0408ae7a6420bca56a/download/](https://www.researchgate.net/publication/242240937_Diseño_y_construcción_de_un_pedal_de_bicicleta_basado_en_sensores_piezorresistivos_para_determinar_la_fuerza_resultante/link/57a9dc0408ae7a6420bca56a/download/)
- [14] (En línea) Brett M. (2017) *Tour Tech 2017. The kit you're not supposed to see*. Página web: "Road.cc" Disponible en: <https://road.cc/content/tech-news/225423-tour-tech-2017-kit-youre-not-supposed-see/>
- [15] (En línea) *HOLLOWTECH II*. Página web: "Shimano". Disponible en: <https://bike.shimano.com/en-EU/technologies/component/details/hollowtech-2.html#:~:text=Its%20outboard%20bottom%20bracket%20bearing,lightweight%20and%20beautiful%20crankset%20design>
- [16] (En línea) Stuart P. (2019) *Are 1x groupsets the future of road cycling?* Página web: "Cyclist". Disponible en: <https://www.cyclist.co.uk/in-depth/3761/are-1x-groupsets-the-future-for-road-cycling>
- [17] (En línea) Sumner J. (2015) *SRAM expands 1x drivetrain offerings to road bikes*. Página web: "Roadbike Review". Disponible en: <https://www.roadbikereview.com/threads/sram-expands-1x-drivetrain-offerings-to-road-bikes.380529/>
- [18] (En línea) Loveridge M. (2019) *CeramicSpeed's mad chainless Driven drivetrain now changes gear, and it's for mountain bikes too*. Página web: "Bike Radar". Disponible en: <https://www.bikeradar.com/news/ceramicspeed-driven-chainless-shifting/>
- [19] (En línea) Phillips M. (2018) *CeramicSpeed's Driven Concept Might Become the World's Most Efficient Drivetrain*. Página web: "Bicycling". Disponible en: <https://www.bicycling.com/bikes-gear/a22092182/ceramicspeeds-driven-concept-might-become-the-worlds-most-efficient-drivetrain/>

- [20] (En línea) *Which factors affect rolling resistance?*. Página web: Schwalbe. Disponible en: <https://www.schwalbe.com/en/rollwiderstand>
- [21] García-López J., Peleteiro J, Córdova A., Villa-Vicente J.G. *Valoración Biomecánica de la Resistencia Aerodinámica en Ciclistas Profesionales: Aspectos Metodológicos*. Artículo en: Asociación Española de Ciencias del Deporte. Disponible en: <https://www.cienciadeporte.com/images/congresos/madrid/Rendimiento%20Deportivo/Biomecanica%20Deportiva/Valoraci%C3%B3n%20biomec%C3%A1nica%20de%20la%20resistencia.PDF>
- [22] (En línea) Nguyen H.H. *Carbon Fibre Composites*. Chapter 4: *Properties of Carbon Fibers*. Disponible en: [http://nguyen.hong.hai.free.fr/EBOOKS/SCIENCE%20AND%20ENGINEERING/MECANIQUE/MATERIAUX/COMPOSITES/Carbon%20Fiber%20Composites/91697\\_04.pdf](http://nguyen.hong.hai.free.fr/EBOOKS/SCIENCE%20AND%20ENGINEERING/MECANIQUE/MATERIAUX/COMPOSITES/Carbon%20Fiber%20Composites/91697_04.pdf)
- [23] (En línea) Meng, M. *Classical Laminate Theory*. Departamento de ingeniería de la Universidad de Derby. Disponible en: [https://maozhou-3295d.firebaseio.com/CLT\\_with\\_MATLAB/clt.html](https://maozhou-3295d.firebaseio.com/CLT_with_MATLAB/clt.html)
- [24] McCartney L.N. (2017) *The Structural Integrity of Carbon Fibre Composites*. Disponible en: [https://www.researchgate.net/publication/311098965\\_Predicting\\_Properties\\_of\\_Undamaged\\_and\\_Damaged\\_Carbon\\_Fiber\\_Reinforced\\_Composites](https://www.researchgate.net/publication/311098965_Predicting_Properties_of_Undamaged_and_Damaged_Carbon_Fiber_Reinforced_Composites)
- [25] (En línea) El-Wazerya M.S., El-Elamyb M.I. (2017) *Mechanical Properties of Glass Fiber Reinforced Polyester Composites*. Disponible en: <https://www.semanticscholar.org/paper/Mechanical-Properties-Of-Glass-Fiber-Reinforced-EL-Wazerya-EL-Elamyb/9c4108f15ad35ca81f6c604a5d47e1c944fd9161>
- [26] (En línea) Veerappan B. *Numerical Prediction of Interlaminar Stresses in Laminated Composites*. Disponible en: [https://www.researchgate.net/figure/Mechanical-Properties-of-Cast-Epoxy-Resin-and-K-III-resins\\_tbl1\\_327783549](https://www.researchgate.net/figure/Mechanical-Properties-of-Cast-Epoxy-Resin-and-K-III-resins_tbl1_327783549)
- [27] (En línea) Tsai-Wu Failure Criterion. Página web: Wikipedia. [https://en.wikipedia.org/wiki/Tsai%E2%80%93Wu\\_failure\\_criterion](https://en.wikipedia.org/wiki/Tsai%E2%80%93Wu_failure_criterion)
- [28] García A. (2016) *Diseño y Análisis Resistente por el Método de Elementos Finitos de una Tabla de Snowboard de Materiales Compuestos*. Trabajo Fin de Grado. Universidad Politécnica de Valencia. Grado en Ingeniería Mecánica.
- [29] Sánchez M. (2018) *Diseño del Larguero de Ala de Avión con Materiales Compuestos*. Trabajo Fin de Grado. Universidad Politécnica de Valencia. Grado en Ingeniería Mecánica.
- [30] Giner E., Albelda J. (1998) *Análisis y Diseño con Materiales Compuestos*. Editorial Universidad Politécnica de Valencia, Servicio de Publicaciones. Referencia: SPUPV-98.4063.

**[31]** (En línea) *Lista de precios de licencias de paquetes ANSYS*. Página web: “General Services Administration” (Gobierno de los Estados Unidos de América). Disponible en:  
[https://www.gsaadvantage.gov/ref\\_text/GS35F0639N/0VY6MJ.3ROJLA\\_GS-35F-0639N\\_GSASCHEDULEPRICELISTJAN2021.PDF](https://www.gsaadvantage.gov/ref_text/GS35F0639N/0VY6MJ.3ROJLA_GS-35F-0639N_GSASCHEDULEPRICELISTJAN2021.PDF)

**[32]** (En línea) *Lista de precios de licencias de Wolfram Mathematica*. Página web: “Wolfram”. Disponible en:  
<https://www.wolfram.com/mathematica/pricing/colleges-universities/>