

## Sintonía de controladores PID: un enfoque analítico basado en el moldeo de la función de sensibilidad

Vilanova, R. \*, Alcántara, S., Pedret, C.

*Departamento de Telecomunicaciones e Ingeniería de Sistemas, Escuela de Ingeniería, Edificio Q, Campus UAB, 08193, Bellaterra, Barcelona, España.*

**To cite this article:** Vilanova, R., Alcántara, S., Pedret, C. 2021. PID Tuning: Analytical approach based on the weighted Sensitivity problem. Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial 18, 313-326. <https://doi.org/10.4995/riai.2021.15422>

### Resumen

El controlador PID es la opción más común en el ámbito de las aplicaciones de control, siendo la opción predominante en el control de procesos industriales. Entre los métodos analíticos más usuales utilizados para su diseño, el Control por Modelo Interno (IMC) ha ganado una notable aceptación industrial debido a su naturaleza robusta y buenas respuestas ante cambios de consigna. Sin embargo, la aplicación tradicional del IMC da como resultado un bajo rendimiento para el rechazo de perturbaciones en carga para plantas integradoras y/o con largas constantes de tiempo. Este trabajo presenta un método de diseño, basado en IMC, que evita esta deficiencia y está diseñado para funcionar bien en plantas de complejidad moderada para las cuales, por otro lado, el ajuste analítico de un controlador PID es plausible. Por simplicidad, el diseño sólo se centra en la función de sensibilidad en lazo cerrado. El enfoque proporciona un ajuste basado en modelo en términos de los compromisos robustez/rendimiento y de servo/regulación. Aunque comúnmente se considera el compromiso robustez/rendimiento, no es tan común tener en cuenta también, por ejemplo, el conflicto entre las perturbaciones de entrada y salida, también conocido como el compromiso servo/regulación. Con el objetivo de proporcionar un enfoque de ajuste unificado, se muestra cómo la metodología propuesta permite tratar diferentes dinámicas de proceso de manera unificada.

*Palabras clave:* PID, control de procesos, análisis de robustez, rechazo de perturbaciones, seguimiento.

### PID Tuning: Analytical approach based on the weighted Sensitivity problem

#### Abstract

The PID controller is the most common option in the realm of control applications and is dominant in the process control industry. Among the related analytical methods, Internal Model Control (IMC) has gained remarkable industrial acceptance due to its robust nature and good set-point responses. However, the traditional application of IMC results in poor load disturbance rejection for lag-dominant and integrating plants. This work presents an IMC-like design method which avoids this common pitfall and is devised to work well for plants of modest complexity, for which analytical PID tuning is plausible. For simplicity, the design only focuses on the closed-loop sensitivity function. The approach provides model-based tuning of single-loop PID controllers in terms of the robustness/performance and servo/regulator trade-offs. Although the robustness/performance compromise is commonly considered, it is not so common to also take into account, for example, the conflict between input and output disturbances, referred also as the servo/regulator trade-off. As interested in providing a unified tuning approach, it is shown how the proposed methodology allows to deal with different process dynamics in a unified way.

*Keywords:* PID, process control, robustness analysis, disturbance rejection, tracking.

\*Autor para correspondencia: Ramon.Vilanova@uab.cat

## 1. Introducción

A pesar del avanzado estado de la teoría de control moderna, los controladores PID continúan siendo la opción más común en el ámbito de las aplicaciones de control, con un dominio absoluto dentro de la industria del control de procesos (Astrom and Hagglund, 2004), (Astrom and Hagglund, 2005), (Shamsuzzohaa and Skogestad, 2010), (Vilanova and Visioli, 2012). De hecho, como confirmó una encuesta publicada en Control System Magazine (Samad, 2017), los controladores PID se confirman de manera indiscutible como la tecnología de control que tiene más impacto en la industria. Por lo tanto, es de esperar que los resultados que estén alineados con la mejora de las prestaciones así como de facilidad de implantación y diseño del control basado en PID tengan más repercusión en la industria. Este hecho se explica por su sencillez tanto en la implementación como en su estructura, aspecto que facilita la comprensión de sus parámetros de ajuste. De hecho, en la mayor parte de las situaciones un PID puede funcionar razonablemente bien y de hecho es todo lo que se requiere.

Los avances recientes en métodos y algoritmos de optimización han impulsado la formulación de soluciones de control basadas en problemas de optimización. En particular, una amplia variedad de diseños basados en optimización directa se han formulado en la literatura. Ver por ejemplo el reciente libro de (Meza et al., 2016). Recientes planteamientos, han considerado de manera explícita el diseño de controladores de tipo PI/PID, introduciendo consideraciones acerca de la robustez ya sea mediante el uso de funciones de sensibilidad como en Arrieta et al. (2016), Sato et al. (2018, 2019), para sistemas discretos en Kurokawa et al. (2019) y considerando sistemas de segundo orden en Kurokawa et al. (2020). La inclusión de la función de sensibilidad complementaria se puede encontrar en Mercader et al. (2017c), mientras que otras formulaciones diferentes de la incertidumbre en Mercader et al. (2017b,a). Sin embargo, muchos de ellos, aunque eficaces, se basan en complejos algoritmos de optimización numéricos que proporcionan la solución específica al problema formulado, pero que no proporcionan reglas de ajuste. Un enfoque diferente es derivar soluciones analíticas para los parámetros del controlador PID basadas en un modelo simplificado (usualmente de primer o segundo orden) de la planta. Reglas de sintonía, obtenidas de esta forma mediante optimización numérica se pueden consultar en (Visioli, 2001), (Astrom and Hagglund, 2004), Mercader and Baños (2017), Sanchez et al. (2017a,b) mientras que un enfoque analítico se sigue en otros trabajos como (Rivera et al., 1986), (Skogestad, 2003), (Vilanova, 2008). Optimizaciones basadas en familias de modelos simples, pueden encontrarse en (Alfaro and Vilanova, 2013b), (Alfaro and Vilanova, 2013a), Alfaro and Vilanova (2013c) y Alfaro and Vilanova (2016). Se desprende que incluso para una estrategia de control simple, como podríamos catalogar al controlador PID, no es fácil encontrar buenos ajustes sin un procedimiento sistemático (Pedret et al., 2002), (Skogestad, 2003), (Arrieta and Vilanova, 2012).

Sin lugar a dudas, dentro de los métodos analíticos, el control por modelo interno (IMC), (Morari and Zafiriou, 1989) ha ganado notable aceptación industrial debido a su simple, pero eficaz, procedimiento (Skogestad, 2003), (Dehghani et al., 2006). La metodología IMC se aplicó por primera vez al ajuste

de controladores PID, considerando procesos estables en (Rivera et al., 1986), planteando soluciones a problemas de robustez asociados con algunas estrategias de sintonías anteriores, como (Ziegler and Nichols, 1942).

Aunque los ajustes IMC-PID (Rivera et al., 1986) son robustos y producen buenas respuestas respecto al seguimiento de consigna, dan como resultado un rendimiento en general deficiente respecto al rechazo de perturbaciones en carga tanto para procesos integradores como con retardos y/o constantes de tiempo largas (Chien and Fruehauf, 1990), (Horn et al., 1996). Reglas de sintonía de PID alternativas, destinadas a mejorar el rendimiento en la operación en regulación pueden consultarse en (Horn et al., 1996), (Shamsuzzoha and Lee, 2007). Aunque no estrictamente basado en IMC, pero en síntesis directa, en Vilanova et al. (2018) se puede encontrar un enfoque que cubre las diferentes dinámicas usuales a la vez que incluye la asignación de un cierto nivel de robustez.

En (Skogestad, 2003), se presentan reglas de sintonía notablemente simples que proporcionan un rendimiento con un compromiso aceptable de servo/regulador basándose en una modificación de los ajustes propuestos en (Rivera et al., 1986). Es importante darse cuenta de que los problemas con las sintonías originales basadas en IMC vienen generadas, de hecho, como herencia de las deficiencias inherentes al procedimiento IMC, revisado a fondo en (Dehghani et al., 2006). En este trabajo se presenta un enfoque basado en diseño  $\mathcal{H}_\infty$  que plantea soluciones a alguna de estas limitaciones inherentes a la formulación IMC usual, a la vez que intenta conservar su simplicidad de planteamiento. En particular, el método está pensado para ofrecer un funcionamiento aceptable para plantas de complejidad modesta para las cuales, es plausible plantear un diseño PID analítico.

En términos generales, el procedimiento de diseño asociado con la teoría de control  $\mathcal{H}_\infty$  implica la selección de funciones de peso en el dominio de la frecuencia que se utilizan para dar forma a las funciones de transferencia en lazo cerrado deseadas. Desde un punto de vista más aplicado, muchos practicantes se resisten a utilizar esta metodología, puesto que generalmente resulta difícil diseñar correctamente estas funciones de peso. Esta dificultad va asociada a una teoría matemáticamente no trivial y difícil de comprender por parte de los ingenieros de control. Por otro lado, al final, mediante estos procedimientos, es usual obtener controladores de orden elevado, complejos, que para su implementación pueden requerir la aplicación de técnicas de reducción de orden.

Para tratar estas dificultades, el enfoque que se presenta en este tutorial, se basa en la formulación de un simple problema de moldeo de la función de sensibilidad basándonos en una optimización  $\mathcal{H}_\infty$ . Al investigar su solución analítica, se elige la función de peso involucrada, de una manera sistemática, con el objetivo de generar un diseño orientado a ofrecer soluciones que permitan gestionar los objetivos de control conflictivos entre sí. Los principales aspectos del enfoque presentado son:

1. La selección de la función de peso es *sistemática* (esto no es demasiado común en los diseños  $\mathcal{H}_\infty$ ) y *simple*, dependiendo tan sólo de dos parámetros: uno que ajuste el compromiso entre robustez y rendimiento (al estilo del enfoque IMC), mientras que el otro permite gestionar el balance entre el rendimiento en servo y en regulación.

2. El método es *general*: procesos estables e inestables pueden tratarse bajo la misma formulación. Este es un hecho diferencial frente a otras formulaciones analíticas basadas en  $\mathcal{H}_\infty$ .
3. La derivación del controlador es completamente *analítica*. Para modelos simples, esta derivación lleva a unas reglas de sintonía para controladores PID, bien motivadas y justificadas que consideran, de manera simultánea, los casos estable e inestable.

Podríamos decir que el enfoque que aquí se presenta, permite la integración de la teoría de control moderna (en términos de un diseño  $\mathcal{H}_\infty$ ) dentro del mundo del control PID. Esto puede también, obviamente, interpretarse en la dirección opuesta, mostrando que es posible plantear de una manera analítica el diseño de controladores industriales de tipo PID utilizando planteamientos modernos cómo puede ser  $\mathcal{H}_\infty$ . En este punto, merece especial atención el enfoque alternativo de (Panagopoulos and Astrom, 2000) al aquí presentado, basado en optimización convexa para la obtención de un controlador PID en base a solucionar, también, pero de manera numérica, un problema de optimización  $\mathcal{H}_\infty$ .

Esta metodología se basa en un conjunto de resultados previos, cuyas primeras formulaciones han sido presentadas en (Vilanova, 2008), (Alcántara et al., 2010), (Alcántara et al., 2012), (Alcántara et al., 2011b), (Alcántara et al., 2011a), (Alcántara et al., 2013), (Arrieta et al., 2010) y que ha sido objeto de un libro en el que se expone de manera completa y unificada (Alcántara et al., 2020). En este sentido, con el objetivo de enfatizar la presentación del enfoque y poner de relieve el tratamiento unificado de procesos con diferentes características dinámicas desde la misma perspectiva, no se presentan respuestas comparativas con métodos existentes en la literatura. En caso de precisar más detalles y comparativas, se pueden consultar estos otros trabajos.

## 2. Formulaciones iniciales

En esta sección presentamos la formulación inicial del problema de diseño de controladores PI/PID mediante la aplicación de un problema de optimización  $\mathcal{H}_\infty$ . Tal como se ha comentado en la introducción, el objetivo del trabajo que se presenta es conseguir un planteamiento unificado en que poder balancear el comportamiento del sistema de control ante un problema de seguimiento y uno de regulación. Este balanceo se conseguirá mediante la introducción apropiada de la función de peso en el problema de moldeo de la función de sensibilidad. No obstante, es ilustrativo ver las formulaciones originales, distintas, para cada uno de los dos problemas. De esta forma, apreciamos luego cómo ambos parámetros intervienen de manera conjunta en el ajuste de un mismo controlador.

Las dos formulaciones que se presentan a continuación, se basan en la idea presentada en (Vilanova, 2008), en la que se considera el problema

$$\min_{C \in \mathcal{C}} \|W(T_d - T)\|_\infty \quad (1)$$

donde  $T$  y  $T_d$  representan, respectivamente, la función de sensibilidad complementaria (la respuesta entrada-salida) y el valor

deseado para la misma,  $W$  es una función de peso en frecuencia y donde  $\mathcal{C}$  representa el conjunto de controladores estabilizantes. La idea en (Vilanova, 2008) es la de utilizar unas asignaciones muy simples para estas componentes de manera que la solución pueda obedecer a la de un controlador PID:

- $T_d = \frac{1}{T_M s + 1}$ , donde el parámetro  $T_M$  especifica la *velocidad de respuesta* deseada del lazo cerrado.
- $W = \frac{z s + 1}{s}$ . El polo en el origen fuerza la acción integral al requerir una coincidencia exacta entre  $T$  y  $T_d$  a frecuencia cero. El parámetro  $z$  se utiliza para ajustar los márgenes de robustez: cuánto mayor el valor de  $z$ , más robusto el sistema resultante.
- $P = k \frac{e^{-s\theta}}{\tau s + 1}$ . No obstante, en las derivaciones, se asume una aproximación de Taylor de primer orden para el retardo ( $e^{-s\theta} \approx -s\theta + 1$ ).

Para este escenario, el problema se soluciona de forma analítica, como se expone en (Vilanova, 2008), reescribiéndolo basándonos en la formulación de control por modelo interno (IMC) y obteniendo como solución final un controlador por realimentación que obedece a:

$$C = \frac{1}{k(\rho + T_M)} \frac{(1 + \tau s)(1 + \chi s)}{s(1 + \frac{z T_M + \theta \chi}{\rho + T_M} s)} \quad (2)$$

que se corresponde a un controlador PID en la formulación ISA (Astrom and Hagglund, 2005)

$$C = K_c \left( 1 + \frac{1}{s \tau_i} + \frac{s \tau_d}{1 + s \tau_d / N} \right) \quad (3)$$

con:

$$\begin{aligned} K_c &= \frac{\tau_i}{k(\rho + T_M)} & \tau_i &= \tau + \chi - T_M \frac{\rho + z}{\rho + T_M} \\ \frac{\tau_d}{N} &= T_M \frac{\rho + z}{\rho + T_M} & N + 1 &= \frac{\tau}{\tau_i} \frac{\chi}{T_M} \frac{\rho + T_M}{\rho + z} \end{aligned} \quad (4)$$

donde

$$\rho = \frac{\theta + z}{\theta + T_M} \theta \quad \chi = \theta + z - \rho \quad (5)$$

Los parámetros de diseño  $T_m, z$  pueden a su vez fijarse ( $T_M = 2\theta$   $z = \sqrt{2}\theta$ ) con el propósito de generar una regla de autoajuste:

$$\begin{aligned} K_c &= \frac{\tau_i}{k\theta 2,65} & \tau_i &= \tau + 0,03\theta \\ \frac{\tau_d}{N} &= 1,72\theta & N + 1 &= \frac{\tau}{\tau_i} \end{aligned} \quad (6)$$

### 2.1. Formulación inicial para control de seguimiento

En referencia al enfoque de diseño presentado, cabe notar que los dos parámetros de sintonía que incluye, acaban teniendo un papel muy similar en el controlador final que se obtiene y, por tanto, se consideran, en cierto modo, redundantes. Esto indica que la formulación presentada para la derivación analítica puede simplificarse más de manera que la solución acabe dependiendo de un solo parámetro. En esta alternativa, los elementos se toman como:

- $T_d = 1$ . Para este modelo de referencia el problema resultante es un problema de ajuste de sensibilidad.

- $W = \frac{1}{s}$ . Esta función de peso se utiliza para forzar acción integral. De esta forma, la función objetivo resultante obedece, en términos de la función de sensibilidad  $S = 1 - T$ , de forma muy simple, a:

$$\min \left\| S \frac{1}{s} \right\|_{\infty} = \min \max_{\omega} \left| S(j\omega) \frac{1}{j\omega} \right| \quad (7)$$

- $P = k \frac{-\frac{\theta}{2}s+1}{(\tau s+1)(\frac{\theta}{2}s+1)}$ , que resulta de aplicar una aproximación de Padé de primer orden para el retardo.

A pesar de que el criterio (7) se utiliza a menudo como criterio de rendimiento genérico para diseño de sistemas de control, es particularmente apropiado para diseños de seguimiento. Esto se desprende de la relación entre  $S$  y la señal de error. La relación entre la referencia  $r$  y el error  $e = r - y$ ,  $T_{er}$ , viene dada por  $T_{er} = S = \frac{1}{1+PC}$ . De esta forma, a bajas frecuencias, (donde la realimentación es realmente efectiva),  $|L| = |PC| \gg 1$ , y  $S \approx P^{-1}C^{-1}(j\omega) \approx P^{-1}(j\omega) \frac{1}{k_i} j\omega$ , donde  $k_i$  representa la ganancia integral del controlador (en el caso de un controlador de tipo PID,  $k_i = \frac{K_c}{\tau_i}$ ). Por tanto, cuando  $\omega \rightarrow 0$  en (7),  $S(j\omega) \frac{1}{j\omega} \rightarrow P^{-1}(j\omega) \frac{1}{k_i}$ .

Apreciamos que en ninguno de los elementos descritos, se introduce ningún parámetro de diseño ajustable. Este parámetro se introduce al resolver el problema mediante el enfoque IMC. Este escenario nos conduce a una solución óptima que no es propia, lo que nos lleva a aumentarla con un filtro de la forma  $f = \frac{1}{(\lambda s+1)^2}$ . Incrementando  $\lambda$  se reduce el ancho de banda y se contribuye a la robustez en la zona media-alta de frecuencias. A su vez, de esta forma, con  $|T|$  bajo a altas frecuencias, se atenúa el ruido de medida. En términos de  $\lambda$ , el controlador resultante viene dado por

$$C = \frac{1}{k \left( 2\lambda + \frac{\theta}{2} \right)} \frac{\left( \frac{\theta}{2}s + 1 \right) (\tau s + 1)}{s \left( \frac{\lambda^2}{2\lambda + \frac{\theta}{2}} s + 1 \right)} \quad (8)$$

El parámetro  $\lambda$  puede también ser fijado para obtener una regla de ajuste automática que nos proporcione los parámetros del controlador directamente en términos de los parámetros del modelo del proceso. La elección  $\lambda = \theta$ , que resulta en el siguiente ajuste para un PID-ISA:

$$\begin{aligned} K_c &= \frac{0,4\tau_i}{k\theta} & \tau_i &= \tau + 0,1\theta \\ \frac{\tau_d}{N} &= 0,4\theta & N + 1 &= 1,25 \frac{\tau}{\tau_i} \end{aligned} \quad (9)$$

que proporciona un comportamiento muy similar a (6). Ambos ajustes, (6) y (9) están orientados a generar una respuesta *sua-ve* ante cambios en referencia, proporcionando  $M_S \approx 1,42$ , por tanto, un buen nivel de robustez.

## 2.2. Diseño alternativo para rechazo de perturbaciones

Un problema con los ajustes tanto de (Vilanova, 2008) como del enfoque propuesto anteriormente, es el bajo rendimiento para rechazo de perturbaciones cuando el proceso es dominado por la constante de tiempo (en el fondo procesos lentos). Esto es debido a la cancelación de polo-cero que ocurre entre la planta y el controlador. Efectivamente, ambos diseños presentan un cero en el polo de la planta  $s = -1/\tau$ . Con el fin de prevenir

esta cancelación, en (Vilanova and Arrieta, 2007) se presenta una modificación que consiste en especificar un lazo cerrado deseado diferente:

$$T_d = \frac{(T_M - \gamma)s + 1}{1 + T_M s} \quad (10)$$

Con este cambio, la solución al problema (1) es:

$$C = \frac{1}{k(\rho + \gamma)} \frac{(1 + \tau s)(1 + \chi s)}{s(1 + \frac{zT_M + \theta\chi}{\rho + \gamma} s)} \quad (11)$$

donde

$$\rho = \frac{\theta + z}{\theta + T_M} (\theta + T_M - \gamma) \quad \chi = \theta + z - \rho + T_M - \gamma \quad (12)$$

En este diseño, cuando  $\gamma = T_M$ , el diseño coincide con la revisión presentada en el apartado anterior. En concreto, (11) y (12) simplifican a (2) y (5). Si ahora fijamos  $z, T_m$  como se ha sugerido anteriormente,  $\gamma$  resulta el único parámetro de diseño ajustable. El papel que introduce  $\gamma$  es el de balancear el rendimiento entre las especificaciones de seguimiento y regulación. En este caso, se analiza el compromiso *servo/regulación* para delimitar el intervalo de diseño para  $\gamma$ , el cual se obtiene como:

$$\sqrt{2}\theta \leq \gamma \leq \frac{12,36\theta(\tau - \sqrt{2}\theta)}{\theta + \tau} \quad (13)$$

donde se supone que  $\tau \geq 1,7262\theta$  de manera que (13) tenga sentido.

## 2.3. Diseño unificado mediante función de peso generalizada

Los enfoques anteriores conducen en (Alcántara et al., 2011b) y (Alcántara et al., 2011a) a la formulación de funciones de peso generalizadas para poder plantear el problema de moldeo de la función de sensibilidad, tanto para el caso de una función de coste  $\mathcal{H}_{\infty}$  como  $\mathcal{H}_2$ . Esta función de peso, para el caso de un diseño  $\mathcal{H}_{\infty}$  generalizado obedece a la forma:

$$W = \frac{(\lambda s + 1)(\gamma_1 s + 1) \cdots (\gamma_k s + 1)}{s(\tau_1 s + 1) \cdots (\tau_k s + 1)} \quad (14)$$

donde  $\tau_1, \dots, \tau_k$  son las constantes de tiempo inestables o aquellas correspondientes a modos muy lentos de  $P$ ,  $\lambda > 0$ , y

$$\gamma_i \in [\lambda, |\tau_i|] \quad (15)$$

Al igual que antes,  $\lambda$  se utiliza para ajustar el compromiso robustez/rendimiento, mientras que los  $\gamma_i$  permiten balancear el rendimiento entre los modos *servo/regulación* (Alcántara et al., 2011b). Tal como se ha comentado, este enfoque puede, a su vez, formularse en términos de la norma  $\mathcal{H}_2$  de manera que el diseño resulta más alineado con la formulación IMC convencional. De esta forma, el problema de optimización se formula como

$$\min_{C \in \mathcal{C}} \|WS\|_2 \quad (16)$$

En este caso hay alguna diferencia respecto al caso  $\mathcal{H}_{\infty}$ . Por ejemplo, aquí el compromiso *servo/regulador* se formula en términos de las perturbaciones a la salida/entrada de la planta respectivamente. El peso que se formula, depende del tipo de las entradas externas consideradas (saltos, rampas, etc). Este caso facilita la posible extensión a considerar la posibilidad de polos complejos conjugados, pudiendo por tanto incorporar

plantas con modos oscilatorios (Kristiansson and Lennartson, 1998),(Alcántara et al., 2011a). A efectos de ilustrar estas eventuales diferencias, si suponemos que las entradas externas son de tipo salto, y denotamos por  $s = -1/\tau_1, \dots, -1/\tau_k$  los polos inestables/lentos de  $P$  (restringiéndolos ahora a polos reales no repetidos). Entonces, la propuesta en (Alcántara et al., 2011a) es la de ajustar el peso en (16) a:

$$W = \frac{(\lambda s + 1)^n (\gamma_1 s + 1) \cdots (\gamma_k s + 1)}{s(\tau_1 s + 1) \cdots (\tau_k s + 1)} \quad (17)$$

La diferencia esencial respecto a (14) es el término  $(\lambda s + 1)^n$ , donde  $n$  se utiliza para asegurar que el controlador final sea propio,  $n$  debe ser, al menos, igual al grado relativo de  $P$  (Alcántara et al., 2011a). Los otros parámetros:  $\lambda > 0$  y  $\gamma_1, \dots, \gamma_k \in [\lambda, |\tau_i|]$ , obedecen al mismo significado que en el caso anterior.

### 3. Plantamiento del problema

Consideremos el problema de control estándar, de una entrada y una salida (SISO), mostrado en la Figura 1, donde  $P$  y  $C$  representan la planta y el controlador, mientras que  $r, d_i, d_o, u$  y  $y$  denotan la referencia (o set-point), perturbación a la entrada (o en carga), perturbación a la salida, señales de control y salida, respectivamente. En este trabajo vamos a centrarnos en el caso correspondiente a un controlador  $C$  de tipo PID, y se utilizará la formulación ideal (18)<sup>1</sup>. Esta elección del controlador PID, obedece a razones puramente académicas con el objetivo de poder derivar la equivalencia entre la solución analítica al problema planteado y una estructura PID. Este hecho no debe hacernos olvidar, aunque aquí no se ha considerado, que el controlador PID se implementa, usualmente, juntamente con filtros para tener en cuenta consideraciones respecto a la amplificación del ruido de medida, cambios bruscos en las señales etc. Se pueden encontrar formulaciones donde se considera de manera explícita este tratamiento adicional de la referencia en Alfaro and Vilanova (2013c) y Alfaro and Vilanova (2016), mientras que en Rodríguez (2020) se presenta un enfoque centrado en diseños IMC:

$$C = K_c \left( 1 + \frac{1}{\tau_I s} + \tau_D s \right) \quad (18)$$

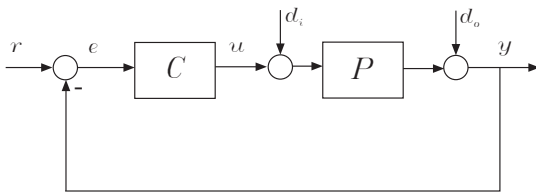


Figura 1: Esquema de realimentación unitaria. Las perturbaciones a la salida ( $d_o$ ) pueden ser interpretadas como cambios en consigna no medibles. ( $r = -d_o$ ).

donde  $K_c$  es la ganancia del controlador,  $\tau_I$  el tiempo integral, y  $\tau_D$  el tiempo derivativo. Por otro lado para la mayoría de procesos industriales, sin características resonantes, las dinámicas

dominantes pueden usualmente representarse mediante un modelo de segundo orden en base a modos reales de la forma:

$$P = \frac{k e^{-\theta s}}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)} \quad (19)$$

donde  $k$  es la ganancia del proceso,  $\tau_1$  la constante de tiempo dominante,  $\tau_2$  es la segunda constante de tiempo y  $\theta$  el retardo (efectivo) del sistema. Con el fin de incorporar en la descripción plantas inestables,  $\tau_1$  y/o  $\tau_2$  pueden tomar valores negativos. Finalmente, las señales exógenas  $r, d_i, d_o$  se suponen señales tipo salto tal como es usual en la mayor parte de la literatura acerca de diseño de controladores PID.

A efectos de plantear el problema de diseño, nos basaremos en el conocido y ya establecido problema de moldeo de la función de sensibilidad (Skogestad and Postlethwaite, 2005, Section 2.8.2):

$$\min_{C \in \mathcal{C}} \|WS\|_\infty \quad (20)$$

donde  $\|WS\|_\infty \doteq \max_{\omega} |W(j\omega)S(j\omega)|$  (el pico de magnitud de la respuesta en frecuencia de la función de sensibilidad) y  $W$  es la función de peso responsable de moldear y dar forma a la función de sensibilidad  $S$ . Más concretamente, para esta función de peso, se adopta la siguiente estructura tal como se propone en (Alcántara et al., 2011b) y (Alcantara et al., 2013):

$$W = \left( \frac{(\lambda s + 1)}{s} \right) \left( \frac{(\gamma_1 s + 1)(\gamma_2 s + 1)}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)} \right) \quad (21)$$

donde  $\lambda > 0, \gamma_i \in [\lambda, |\tau_i|], i = 1, 2$ . El integrador  $1/s$  se incluye en  $W$  para proporcionar acción integral en el lazo. Aparte de esto, es importante resaltar que el peso (21) es inestable cuando  $\tau_1 < 0$  o  $\tau_2 < 0$ , es decir, cuando la planta misma es inestable. Si bien es cierto que no es una situación usual en el control  $\mathcal{H}_\infty$  el uso de funciones de peso inestables. No obstante, como se muestra en (Alcántara et al., 2011b) y (Alcantara et al., 2013), incluir los (eventualmente inestables) polos de la planta en  $W$  constituye una buena estrategia que evita la necesidad de usar factorizaciones coprimas, por tanto permitiendo unificar el tratamiento de plantas estables e inestables.

#### 3.1. Los compromisos Servo/Regulación y Robustez/Rendimiento

La idea que se propone respecto a la elección de los parámetros  $\lambda$  y  $\gamma$  puede ser expuesta, de manera heurística, como sigue. Empecemos considerando que  $\lambda \approx 0$ , entonces:

- Si  $\gamma_i = |\tau_i|, i = 1, 2$ , el peso  $W$  se asemeja a  $\frac{1}{s}$ , de ahí que  $|W| \approx \left| \frac{1}{s} \right|$ , y lo que obtenemos es que el problema de optimización (20) se corresponde a minimizar  $\left\| \frac{1}{s} S \right\|_\infty$  (sujeto a estabilidad interna, por supuesto). Esto corresponde a una especificación de tipo *servo* o seguimiento.
- Si  $\gamma_i = \lambda \approx 0, i = 1, 2$ , el peso  $W$  se asemeja a  $\frac{1}{s} P$  debido a la inclusión de los polos de  $P$  en  $W$ , en particular  $|W| \approx \left| \frac{1}{s} P \right|$  (aquí suponemos  $k = 1$  en (19) sin pérdida de generalidad) y, por tanto, el problema de optimización (20) básicamente minimiza  $\left\| \frac{1}{s} S \right\|_\infty$ . Esto se corresponde a una especificación de tipo *regulación*.

<sup>1</sup>A efectos de simulación, no obstante, la versión industrial  $C = K_c \left( 1 + \frac{1}{\tau_I s} + \frac{\tau_D s}{\alpha \tau_D s + 1} \right)$  es la que se utiliza. Con el fin de que los resultados sean lo más próximos posibles respecto a la formulación ideal (no-realizable) (18), se selecciona  $\alpha = 0,001$ .

Obviamente, valores intermedios de  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$  proporcionarán un balance entre los problemas puros de servo y regulación. Finalmente, si incrementamos el valor de  $\lambda$  (antes hemos supuesto que  $\lambda \approx 0$ ), la función de peso irá incorporando, progresivamente, modos que generarán un lazo cerrado más lento. Por tanto, una vez tengamos fijadas  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$ ,  $\lambda$  se puede utilizar para conseguir un buen balance entre robustez y rendimiento. Sintetizando, el peso seleccionado nos permite gestionar ambos compromisos: robustez/rendimiento (vía  $\lambda$ ) y servo/regulación (vía  $\gamma_1, \gamma_2$ ).

Como puede apreciarse, se ha presentado el compromiso servo/regulación. Si bien es cierto que, en cierta medida, estos modos de operación pueden tratarse de manera separada en caso que el controlador incluya la posibilidad de un segundo grado de libertad. El controlador presentado no incluye esta opción y esto conlleva considerar el tratamiento de ambos problemas desde una perspectiva de lazo de realimentación. El motivo que justifica esta elección es la consideración de potenciales perturbaciones a la salida en tanto que problema de regulación equivalente a uno de cambio en referencia pero que, a diferencia de este último, tan solo puede tratarse mediante realimentación. En última instancia, la posibilidad de aplicar un segundo grado de libertad y en que forma, ya dependerá de las posibilidades de la implementación que se disponga.

### 3.2. Regla de sintonía PID unificada

A efectos de desarrollo analítico, en primer lugar aproximamos el tiempo muerto en el modelo (19). Por simplicidad, tomamos  $e^{-\theta s} \approx -\theta s + 1$ , resultando en el siguiente modelo aproximado:

$$P \approx \frac{k(-\theta s + 1)}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 + 1)} \quad (22)$$

Como es bien sabido, la aproximación de Taylor de primer orden no es una buena aproximación del retardo, a efectos de modelo reducido del mismo. En este caso, es usada por facilitar una representación racional del problema a resolver que nos posibilite obtener una solución analítica. A su vez, esta solución es conforme a la complejidad y estructura requerida desde el punto de vista de la obtención de un controlador PID como solución. Obviamente, mediante este enfoque se está solucionando un problema alternativo, cercano en cierto sentido, al original planteado mediante (20). Ahora, a partir de (Alcántara et al., 2011b, Teorema 3.1) (o, alternativamente, por aplicación del principio del módulo máximo (Skogestad and Postlethwaite, 2005, pág. 173)), resulta que la función de sensibilidad óptima, en (20) es constante en la frecuencia. Esto es, tenemos que  $WS^o = \rho$ . Es más,  $\rho$  viene dada por

$$\rho = |W|_{s=\frac{1}{\theta}} = \frac{(\lambda + \theta)(\gamma_1 + \theta)(\gamma_2 + \theta)}{(\tau_1 + \theta)(\tau_2 + \theta)} \quad (23)$$

Manipulaciones algebraicas adicionales nos llevan a la siguiente expresión para el controlador óptimo:

$$C^o = P^{-1}(\rho^{-1}W - 1) = \frac{\chi}{\rho k s} = \frac{\zeta_2 s^2 + \zeta_1 s + 1}{\rho k s} \quad (24)$$

Comparando (24) con (18), podemos observar que  $C^o$  resulta de hecho un controlador PID sintonizado basándose en  $\zeta_1$  y  $\zeta_2$ :

$$K_c = \frac{\zeta_1}{\rho k} \quad \tau_I = \zeta_1 \quad \tau_D = \frac{\zeta_2}{\zeta_1} \quad (25)$$

y donde  $\zeta_1$  y  $\zeta_2$  obedecen a las siguientes expresiones:

$$\zeta_1 = \frac{\theta((\tau_1 + \tau_2 - \lambda)(\gamma_1 + \gamma_2) + \lambda(\tau_1 + \tau_2)) + \tau_1 \tau_2 (\gamma_1 + \gamma_2 + \lambda + \theta) - \gamma_1 \gamma_2 (\lambda + \theta) + \theta^2 (\tau_1 + \tau_2)}{(\tau_1 + \theta)(\tau_2 + \theta)} \quad (26)$$

$$\zeta_2 = \frac{\tau_1 \tau_2 ((\lambda + \theta)(\gamma_1 + \gamma_2) + \gamma_1 \gamma_2 + \lambda \theta + \theta^2) - \gamma_1 \gamma_2 \lambda (\theta + \tau_1 + \tau_2)}{(\tau_1 + \theta)(\tau_2 + \theta)} \quad (27)$$

En estas fórmulas, se han cambiado los parámetros de sintonía del controlador, en términos de  $K_C, \tau_I, \tau_D$  a otros tres parámetros de ajuste en términos de  $\lambda, \gamma_1, \gamma_2$ . El punto interesante al respecto de estos tres nuevos parámetros es en relación a la gestión de los dos compromisos de diseño anteriormente comentados. No obstante, es posible formular el análisis de los diseños resultantes, después de una simplificación respecto a los  $\gamma$ 's. De hecho, lo que es estrictamente necesario en la definición de la función de peso (21) es tener un cero por cada polo de la planta.

Si disponemos de dos  $\gamma$ 's diferentes, obviamente, dispondremos de un mayor grado de libertad. No obstante, como se apreciará más adelante, no es estrictamente necesario. Por tanto, con el objetivo de simplificar (26) y (27), podemos asignar  $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$ , lo que nos genera las siguientes expresiones para los tres parámetros del controlador, con  $\lambda > 0$  y  $\gamma \in [\lambda, \tau]$ , donde hemos definido:

$$\tau \doteq \max(|\tau_1|, |\tau_2|) = |\tau_1|. \quad (28)$$

$$\begin{aligned} K_c &= \frac{\theta(2\gamma(\tau_1 + \tau_2 - \lambda) + \lambda(\tau_1 + \tau_2)) + \tau_1 \tau_2 (2\gamma + \lambda + \theta) - \gamma^2 (\lambda + \theta) + \theta^2 (\tau_1 + \tau_2)}{k(\lambda + \theta)(\gamma + \theta)^2} \\ \tau_I &= \frac{\theta(2\gamma(\tau_1 + \tau_2 - \lambda) + \lambda(\tau_1 + \tau_2)) + \tau_1 \tau_2 (2\gamma + \lambda + \theta) - \gamma^2 (\lambda + \theta) + \theta^2 (\tau_1 + \tau_2)}{(\tau_1 + \theta)(\tau_2 + \theta)} \\ \tau_D &= \frac{\tau_1 \tau_2 (2\gamma(\lambda + \theta) + \gamma^2 + \lambda \theta + \theta^2) - \gamma^2 \lambda (\theta + \tau_1 + \tau_2)}{\theta(2\gamma(\tau_1 + \tau_2 - \lambda) + \lambda(\tau_1 + \tau_2)) + \tau_1 \tau_2 (2\gamma + \lambda + \theta) - \gamma^2 (\lambda + \theta) + \theta^2 (\tau_1 + \tau_2)} \end{aligned} \quad (29)$$

En este punto, merece la pena resaltar que, la sintonía expresada en (29) constituye la regla de ajuste genérica para un controlador PID basándose en un modelo de segundo orden con retardo originada como solución analítica al problema de moldeo de la función de sensibilidad. Este es, por tanto, en sí mismo un resultado que ofrece un conjunto de posibilidades en lo que concierne a la elección de los parámetros de ajuste y su traslado directo de la formulación inicial del problema (20) y su traslado directo a los parámetros del controlador.

## 4. Reglas específicas para ajuste de controladores PI/PID

Con el objetivo de particularizar la regla de ajuste genérica obtenida, procedemos prestando especial atención a casos concretos del modelo (19) que, por otra parte, son de usual consideración en aplicaciones de control industrial. A continuación detallamos las reglas de sintonía específicas para estos casos.<sup>2</sup>

<sup>2</sup>Para cada caso se utilizan los acrónimos usuales en inglés por facilidad de referencia con la literatura existente

**Primer orden con tiempo muerto (FOPTD)**

Muchas de las reglas de sintonía existentes, necesitan únicamente de tres parámetros del modelo: ganancia  $k$ , tiempo muerto  $\theta$  y constante de tiempo  $\tau_1$  (Smuts, 2011). El modelo función de transferencia correspondiente, en este caso, es:

$$P = \frac{ke^{-\theta s}}{\tau_1 s + 1} \tag{30}$$

Notamos que el modelo de primer orden con tiempo muerto (FOPTD) (30) es un caso especial de (19) cuando  $\tau_2 = 0$ . Para esta descripción del proceso, podemos tomar  $\gamma = \gamma_1, \gamma_2 = 0$  de manera que resulta un ajuste de controlador PI ( $\tau_D = 0$ ) a partir de (29):

$$K_c = \frac{\tau_1(\gamma + \lambda + \theta) - \lambda\gamma}{k(\lambda + \theta)(\gamma + \theta)} \quad \tau_I = \frac{\tau_1(\gamma + \lambda + \theta) - \lambda\gamma}{\tau_1 + \theta} \tag{31}$$

donde  $\lambda > 0, \gamma \in [\lambda, |\tau_1|]$ .

**Integrador con tiempo muerto (IPTD)**

Un caso particular de (30) surge cuando se consideran plantas dominadas por la constante de tiempo ( $|\tau_1| \gg \theta$ ). Entonces tenemos que

$$P = \frac{ke^{-\theta s}}{\tau_1 s + 1} = \frac{k'e^{-\theta s}}{(s + 1/\tau_1)} \approx \frac{k'}{s} e^{-\theta s} \tag{32}$$

donde  $k' = \frac{k}{\tau_1}$  es la denominada relación de integración o ganancia de velocidad. Esta aproximación toma más sentido a medida que  $|\tau_1| \rightarrow \infty$ , correspondiendo a procesos integradores con tiempo muerto (IPTD). En este caso, la regla de sintonía (31) se simplifica a:

$$K_c = \frac{\gamma + \lambda + \theta}{k'(\lambda + \theta)(\gamma + \theta)} \quad \tau_I = \gamma + \lambda + \theta \tag{33}$$

donde  $\lambda > 0, \gamma \in [\lambda, \infty)$ . Concretamente, a la que hacemos  $\gamma \rightarrow \infty$  en (33), se obtiene un controlador proporcional con  $K_c = \frac{1}{k'(\lambda + \theta)}$ . Este controlador resulta excelente para control en modo servo, pero genera errores en estado estacionario para perturbaciones en carga. Claramente, es en el caso de sistemas integrantes cuando surge la situación más conflictiva de compromiso entre seguimiento y regulación (este hecho viene también indicado por el amplio rango de variación para  $\gamma$ ).

**Segundo orden con tiempo muerto (SOPTD)**

Para un modelo de segundo orden, las ecuaciones generales (29) presentadas en la sección anterior son las que aplican. No obstante, hay una situación donde la simplificación presentada  $\gamma = \gamma_1 = \gamma_2$  aplica y resulta especialmente bien motivada. Este caso es cuando  $\tau_1 = \tau_2$ , es decir, cuando (19) tiene un polo doble real. Las reglas de sintonía resultantes en este caso son:

$$\begin{aligned} K_c &= \frac{2\theta(\gamma(2\tau_1 - \lambda) + \lambda\tau_1) + \tau_1^2(2\gamma + \lambda + \theta) - \gamma^2(\lambda + \theta) + 2\theta^2\tau_1}{k(\lambda + \theta)(\gamma + \theta)^2} \\ \tau_I &= \frac{2\theta(\gamma(2\tau_1 - \lambda) + \lambda\tau_1) + \tau_1^2(2\gamma + \lambda + \theta) - \gamma^2(\lambda + \theta) + 2\theta^2\tau_1}{(\tau_1 + \theta)^2} \\ \tau_D &= \frac{\tau_1^2(2\gamma(\lambda + \theta) + \gamma^2 + \lambda\theta + \theta^2) - \gamma^2\lambda(\theta + 2\tau_1)}{2\theta(\gamma(2\tau_1 - \lambda) + \lambda\tau_1) + \tau_1^2(2\gamma + \lambda + \theta) - \gamma^2(\lambda + \theta) + 2\theta^2\tau_1} \end{aligned} \tag{34}$$

**Integrador de segundo orden con tiempo muerto (SOIPTD)**

Consideramos ahora el caso en que  $|\tau_1| \gg \theta$  en (19), entonces tenemos que:

$$P = \frac{ke^{-\theta s}}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)} = \frac{k'e^{-\theta s}}{(s + 1/\tau_1)(\tau_2 s + 1)} \approx \frac{k'e^{-\theta s}}{s(\tau_2 s + 1)} \tag{35}$$

donde  $k' = \frac{k}{\tau_1}$ . Entonces, si hacemos  $|\tau_1| \rightarrow \infty$ , podemos particularizar los ajustes (29) para procesos con un integrador y una constante de tiempo o integrador de segundo orden más tiempo muerto (SOIPTD), resultando en:

$$\begin{aligned} K_c &= \frac{(\tau_2 + \theta)(\theta + 2\gamma + \lambda)}{k'(\lambda + \theta)(\gamma + \theta)^2} \\ \tau_I &= \theta + 2\gamma + \lambda \\ \tau_D &= \frac{\tau_2((\gamma + \theta)^2 + \lambda(2\gamma + \theta)) - \gamma^2\lambda}{(\tau_2 + \theta)(\theta + 2\gamma + \lambda)} \end{aligned} \tag{36}$$

donde  $\lambda > 0, \gamma \in [\lambda, \infty)$ .

**Doble integrador con tiempo muerto (SODIPTD)**

De manera similar al caso anterior, si, además, hacemos,  $|\tau_2| \gg \theta$ , entonces

$$P \approx \frac{k'e^{-\theta s}}{s(\tau_2 s + 1)} = \frac{k''e^{-\theta s}}{s(s + 1/\tau_2)} \approx k'' \frac{e^{-\theta s}}{s^2} \tag{37}$$

donde  $k'' = \frac{k'}{\tau_2}$ . Entonces, si hacemos  $|\tau_2| \rightarrow \infty$  en (36) o, de forma equivalente,  $|\tau_1| \rightarrow \infty$  en (34), obtenemos las reglas de ajuste para procesos que obedecen a un Doble integrador más tiempo muerto (SODIPTD):

$$\begin{aligned} K_c &= \frac{\theta + 2\gamma + \lambda}{k''(\lambda + \theta)(\gamma + \theta)^2} \\ \tau_I &= \theta + 2\gamma + \lambda \\ \tau_D &= \frac{(\gamma + \theta)^2 + \lambda(2\gamma + \theta)}{\theta + 2\gamma + \lambda} \end{aligned} \tag{38}$$

donde  $\lambda > 0, \gamma \in [\lambda, \infty)$ . Es fácil observar que, si hacemos  $\gamma \rightarrow \infty$  en (38), obtenemos un controlador que obedece a un derivador puro cuya ganancia derivativa es  $K_D = K_c\tau_D = \frac{1}{k''(\lambda + \theta)}$ . Un valor alto para  $\gamma$  nos proporcionaría resultados aceptables para un control de seguimiento, pero por otro lado, la respuesta que nos ofrecerá atenuando una perturbación en carga, resulta en una rampa. Nuevamente, es para este caso que encontramos la gestión más compleja respecto al compromiso servo/regulación.

**5. Evaluación de robustez y rendimiento**

Las reglas de sintonía que se han presentado en la sección anterior, están todas expresadas en términos de los nuevos parámetros  $\lambda$  y  $\gamma$ , ambos introducidos mediante la función de peso. Al respecto de los roles asociados a estos parámetros, en una primera aproximación, podríamos decir que, mientras que con  $\lambda$  podemos determinar la robustez del diseño, mediante el ajuste de  $\gamma$  consideraremos el grado de compromiso respecto al rendimiento en seguimiento y regulación. A pesar de que esta primera aproximación ya nos podría servir como guía de ajuste o sintonía, sería deseable, si lo que deseamos es generar guías para la selección de estos parámetros a la vez que sugerir valores concretos para los mismos, poder realizar una evaluación cuantitativa. De esta forma, nos encontramos con el problema de tener que comparar diseños diferentes con el propósito de

establecer cual es mejor. Para esto, primero estableceremos el escenario de referencia para poder trabajar con diseños comparables. Esto nos permitirá establecer la evaluación de la robustez. A partir de aquí, en una segunda fase, podemos abordar el problema de analizar el rendimiento (siempre desde el punto de vista del compromiso servo/regulación).

5.1. Robustez y diseños comparables

A partir de los resultados presentados en (Middleton and Graebe, 1999, Sección 4), podemos decir que un diseño para control regulatorio se basa en un desplazamiento - *shifting* - de los polos lentos de la planta, mientras que un diseño para seguimiento en referencia, acostumbra a basarse en la cancelación de estos polos (siempre que sea posible, claro) con el fin de obtener una respuesta en frecuencia lo más plana posible. Cuando, mediante la realimentación desplazamos un polo lento de la planta, resulta que, en la función de transferencia de lazo cerrado,  $T$ , aparece un cero más lento que todos los polos. Este cero causará que el valor de  $M_T$  (valor máximo de  $|T|$ ) sea mayor que uno, lo cual afectará el ancho de banda en lazo cerrado y, por tanto, contribuirá a la velocidad de respuesta del mismo. Por tanto, la comparación entre un diseño orientado a control regulatorio y uno de seguimiento descansa en comparar un diseño más rápido pero menos robusto, con otro más lento pero más robusto.

Con el fin de establecer un marco de comparación apropiado, (Middleton and Graebe, 1999) introduce el concepto de *equivalencia en frecuencias extremas* con el fin de caracterizar funciones de transferencia con el mismo grado relativo, ganancia estática y comportamiento en alta frecuencia. En particular, funciones de sensibilidad complementarias que son equivalentes en frecuencias extremas, poseen similar tiempo de subida así como la misma sensibilidad a componentes de alta frecuencia como el ruido y los errores de modelado. Partiendo de esta idea, en Figura 2b se ha ido incrementando el valor de  $\lambda$  en el diseño para control regulatorio hasta conseguir que ambos diseños, servo y regulador, sean *comparables* en el sentido establecido por la equivalencia en frecuencias extremas.

En general se observa que, imponiendo el mismo valor de  $M_S$  ( $\approx 1,6$  en el ejemplo) obtenemos, aproximadamente, el mismo ancho de banda en lazo cerrado y tiempo de subida, independientemente del valor de  $\gamma$ . Como conclusión, en la Figura 2b, se observa que, básicamente, el compromiso entre los diseños de un control para seguimiento o servo ( $\gamma = \tau$ ) y para regulación ( $\gamma = \lambda$ ) son esencialmente un problema de ajustar el pico de  $|T|$ , es decir  $M_T$ . De esta forma, el control para regulación conlleva valores más altos de  $M_T$ , lo cual genera que los diseños orientados a control regulatorio, sean más sensibles a errores de modelado que los diseños orientados a un buen seguimiento en referencia (Middleton and Graebe, 1999). Esta situación es acorde con el hecho conocido de que los diseños para control regulatorio tienen, inherentemente, peores condiciones de robustez que los diseños planteados para un problema de seguimiento.

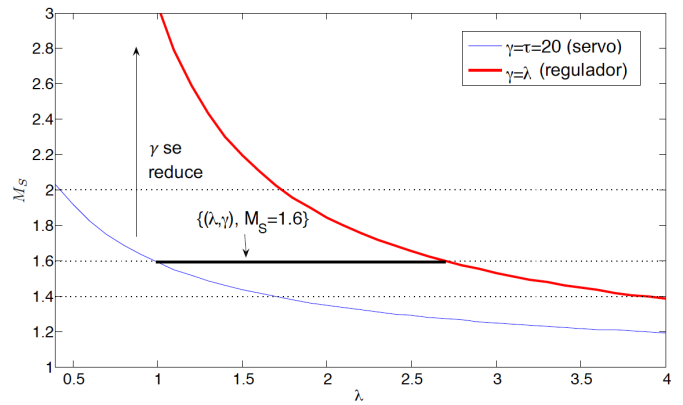


Figura 3:  $M_S$  vs.  $\lambda$  para valores extremos de  $\gamma$  y  $P = \frac{5e^{-s}}{20s+1}$ . Si  $\gamma$  se reduce con el fin de mejorar el rendimiento en control regulatorio,  $\lambda$  debe incrementarse de manera acorde para mantener el nivel de  $M_S$  constante.

De esta forma, a partir de este punto, queda claro que cuantificaremos la robustez mediante el pico de la función de sensibilidad  $M_S$ . Fijando  $M_S$  generaremos diseños comparables para diferentes ajustes del compromiso servo/regulación, es decir, para diferentes valores del parámetro  $\gamma$ . La idea en la elección de  $\gamma$  es que si lo reducimos para mejorar el rendimiento en regulación,  $\lambda$  debe incrementarse para compensar la robustez que podemos perder, tal como se ilustra en la Figura 3. De esta forma, para cada nivel de robustez,  $k$ , que se pueda especificar, podemos definir el siguiente conjunto asociado:

$$\Delta\Gamma_k \doteq \{(\lambda, \gamma); M_S = k, \lambda > 0, \gamma \in [\lambda, \tau]\} \quad (39)$$

El uso de  $M_S$  como medida de robustez supone una manera de entender la tolerancia a variaciones en el lazo de control. En concreto, asegurando una zona de seguridad alrededor del punto crítico en el plano de Nyquist. Obviamente esta es sólo una de las muchas acepciones en que se puede formular el problema de la robustez. La aquí escogida, a parte de la amplia aceptación que tiene en el ámbito del control de procesos industriales; por su relación con los clásicos márgenes de ganancia y fase; permite un tratamiento uniparamétrico muy apropiado para el ajuste posterior en aras de obtener una sintonía balanceada.

5.2. Evaluación del rendimiento servo/regulación

Llegados a este punto, el problema a considerar es cómo escoger  $\gamma$  para obtener un buen balance entre los rendimientos para servo y regulación. Para este propósito, consideraremos la minimización de los dos índices de rendimiento alternativos siguientes:

$$J_{\max} = \max(\Delta_s, \Delta_r) \quad (40)$$

$$J_{\text{avg}} = 0,5(\Delta_s + \Delta_r) \quad (41)$$

donde

$$\Delta_s = \frac{\text{IAE}_s}{\text{IAE}_s^o}, \quad \Delta_r = \frac{\text{IAE}_r}{\text{IAE}_r^o} \quad (42)$$

y

$$\text{IAE} = \int_0^\infty |r(t) - y(t)| dt = \int_0^\infty |e(t)| dt \quad (43)$$

<sup>3</sup>Puesto que las perturbaciones a la salida  $d_o$  pueden tratarse como un caso especial de cambio en referencia  $r$ , aquí se considera únicamente el caso de cambios en  $r$  desde el punto de vista de seguimiento.



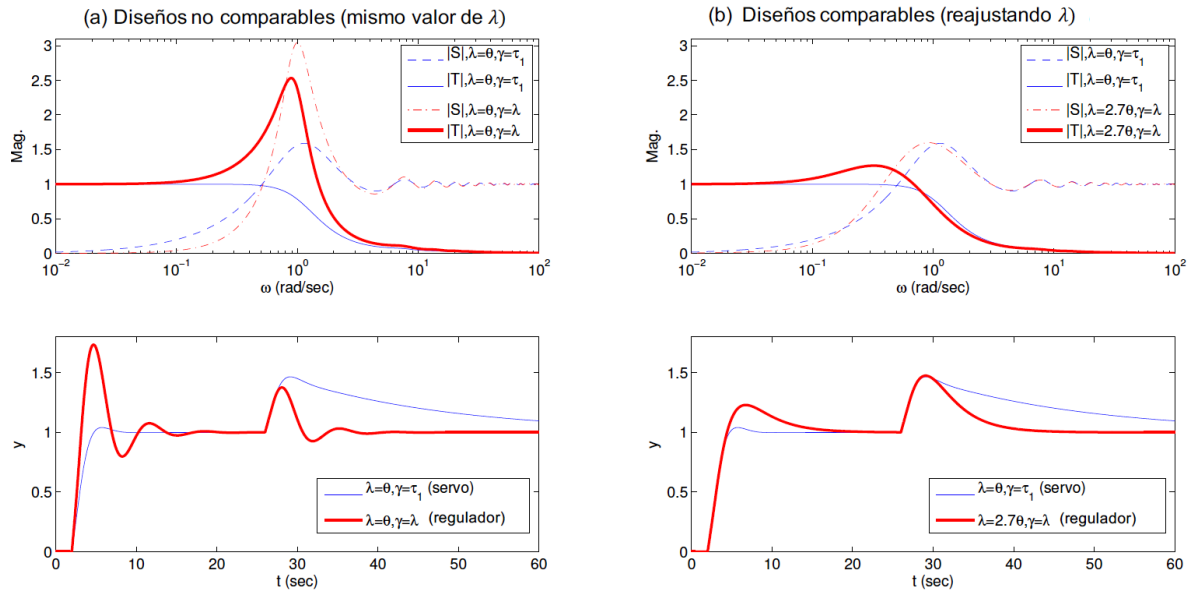


Figura 2: Influencia de los parámetros  $\lambda$  y  $\gamma$  en las propiedades de lazo cerrado para  $P = \frac{5e^{-s}}{20s+1}$  ( $k = 5, \tau = \tau_1 = 20, \theta = 1$ ): dominio de la frecuencia (arriba) y dominio del tiempo (abajo) ante entradas salto unitarias para la consigna ( $r$ ) y perturbación en carga ( $d_t$ ) en los instantes  $t = 1$  y  $t = 25$ , respectivamente (abajo). Los diseños de servo y regulación se han hecho comparables en b) imponiendo un mismo valor de  $M_S$ . De esta forma, se obtienen valores similares de tiempo de subida en la respuesta así como de ancho de banda.

En (42), el subíndice  $s(r)$  denota servo (regulación), e indica que el valor del IAE se calcula sobre el conjunto  $\Lambda\Gamma_k$  con respecto a un cambio en consigna (entrada en perturbación)<sup>3</sup>. Finalmente, el superíndice  $o$  se utiliza para denotar el valor óptimo del índice IAE asociado a  $\Lambda\Gamma_k$ . El índice (41) se utiliza en (Skogestad and Grimholt, 2012), (Grimholt and Skogestad, 2012) para evaluar el método de ajuste SIMC-PI. Este índice introduce los comportamientos en servo y regulación con idéntica importancia. Por otro lado, el índice (40), se considera en (Alcántara et al., 2012), (Alcantara et al., 2013), y obedece a la estrategia de minimizar el peor caso. En cualquier caso, ambos índices, (40) y (41) son alternativas coherentes y factibles, independientes de la ganancia del proceso, las magnitudes de las señales de consigna y perturbación así como de las unidades de tiempo utilizadas. Idealmente, lo que desearíamos es que  $J_{m\acute{a}x} = J_{avg} = 1$ ; que se correspondería con el caso en que ambos comportamientos óptimos, para servo y regulación, se consiguen. De esta forma, para un nivel de robustez determinado ( $M_S = k$ ), podemos considerar el siguiente problema de optimización:

$$\min_{(\lambda, \gamma) \in \Lambda\Gamma_k} J \quad (44)$$

donde  $J = J_{m\acute{a}x}$  o  $J = J_{avg}$ . Notar que, en (42), la pérdida de rendimiento se mide respecto al valor óptimo del IAE, restringido a  $\Lambda\Gamma_k$  ( $M_S = k$ ). De esta forma, con el fin de analizar el compromiso entre robustez y rendimiento en términos absolutos, resulta más apropiado considerar, en (42), el valor óptimo IAE global. Esto lo conseguimos considerando los valores óptimos sobre  $\bigcup_k \Lambda\Gamma_k$ , para  $k$  variando sobre todos los niveles de robustez a considerar.

En esta situación, los índices de pérdida (degradación) de rendimiento los redefinimos como:

$$\Delta_s^* = \frac{IAE_s}{IAE_s^{go}}, \quad \Delta_r^* = \frac{IAE_r}{IAE_r^{go}} \quad (45)$$

donde el superíndice  $go$  indica globalmente óptimo y  $IAE_s, IAE_r$  se calculan sobre  $\Lambda\Gamma_k$  al igual que antes, para un valor concreto de  $k$ . De manera consiguiente, los índices de rendimiento (40) y (41) los denotaremos como  $J_{m\acute{a}x}^*$  y  $J_{avg}^*$  cuando la pérdida de rendimiento se toma basándonos en (45).

## 6. Ajuste de controladores PI/PID para una operación (Servo/Regulación)-Robustez balanceada

Llegados a este punto, estamos en disposición de analizar la selección de los dos parámetros de sintonía  $\lambda, \gamma$  con el objetivo de ofrecer guías de ajuste las cuales, a su vez, serán guías de sintonía del correspondiente controlador PI/PID. El objetivo final con estas guías de ajuste es conseguir un lazo cerrado balanceado, esto es, por un lado, un rendimiento balanceado respecto a las operaciones de regulación y seguimiento y, por otro, entre la robustez y este rendimiento combinado. El procedimiento a seguir para conseguir esto empieza considerando el compromiso entre robustez y rendimiento para ver si se puede especificar un nivel de robustez de referencia constante. Una vez establecida esta robustez objetivo, el siguiente paso será el ajuste de los parámetros  $\lambda$  y  $\gamma$  a partir de la solución del problema (44) para este nivel de robustez objetivo  $k = M_S^*$ . Los valores resultantes de  $\lambda$  y  $\gamma$  como soluciones de este problema se analizarán y, a partir de estos valores se generarán las sugerencias de ajuste. Se considerarán de manera separada las diferentes dinámicas del proceso controlado ya vistas en la sección anterior al particularizar la solución al problema de moldeo de la función de sensibilidad.

El resultado final de esta sección nos proporcionará un ajuste de los parámetros del controlador PI/PID en base a la elección de  $\lambda$  y  $\gamma$  y cómo estos determinan los parámetros finales del controlador. Esta elección, por supuesto, supone realizar una búsqueda en un espacio de parámetros más restringido que

si nos basáramos directamente en los parámetros iniciales del controlador. El resultado será, en este sentido, subóptimo. No obstante, esta suboptimalidad se ve compensada por el beneficio de la interpretación de los parámetros por su relación/interpretación directa con el problema del balanceo a considerar.

6.1. Procesos estables de primer orden y con acción integral

Empezamos considerando el compromiso entre robustez y rendimiento (servo/regulación) para diferentes valores del retardo normalizado. Este compromiso se muestra en la Figura 4. Para las diferentes curvas en que se muestra la evolución de  $(J_{m\acute{a}x}^*, J_{avg}^*, \Delta_s^*, \Delta_r^*)$ , lo primero a notar es que estamos interesados, únicamente, en la región que presentan una pendiente negativa o nula. Esta región corresponde a la parte izquierda en las curvas mostradas en la Figura 4. Esta zona cubre, aproximadamente, el rango  $M_S \leq 2$ .

En los otros casos, no estaríamos realmente considerando un compromiso entre rendimiento y robustez, puesto que tendríamos la posibilidad de mejorar ambos aspectos de forma simultánea. Esto indica, que el compromiso entre servo y regulación es relevante para procesos dominados por el retardo y, en especial, para los procesos integrantes. Tal como ya se comentó anteriormente, esto era de esperar en base al intervalo de selección que resulta para el parámetro  $\gamma$  en la regla de sintonía (31):  $\gamma \in [\lambda, \tau_1]$ , el cual crece con  $\tau_1$  y que, de hecho, resulta infinito para procesos IPTD, esto es, cuando  $\tau_1 = \infty$ . La Figura 4 también nos revela que los diseños orientados a seguimiento son inherentemente más robustos que los orientados a regulación. En efecto, mientras que  $\Delta_s^*$  alcanza su mínimo aproximadamente en  $M_S = 1,75$ ,  $\Delta_r^*$  lo alcanza alrededor de  $M_S \approx 2,15$  para procesos con un retardo y constante de tiempo balanceados y cerca de  $M_S = 3$  para  $\theta/\tau_1 < 1$ .

Tal como se muestra en la Figura 4, las figuras obedecen a una forma similar en la región interesante de la gráfica. En general, podemos decir que, tanto para el criterio  $J_{m\acute{a}x}^*$  como  $J_{avg}^*$ , un nivel de robustez objetivo de  $M_S^t \approx 1,6$  nos proporciona un buen compromiso entre robustez y rendimiento, correspondiéndose en las gráficas, a los círculos ubicados en la zona deseada, con pendiente negativa, a la izquierda de los puntos mínimos. En base a esto, seleccionamos  $M_S^t = 1,6$  como nuestra robustez objetivo y abordamos el problema de obtener las soluciones a (44) para  $k = 1,6$  en  $J = J_{m\acute{a}x}$  y  $J = J_{avg}$ .

Tabla 1: Valores óptimos de  $\lambda, \gamma$  para el problema (44) tomando  $k = 1,6$  y considerando procesos FOPTD estables.

$J = J_{m\acute{a}x}$			$J = J_{avg}$		
$\theta/\tau_1$	$\lambda/\theta$	$\gamma/\lambda$	$\theta/\tau_1$	$\lambda/\theta$	$\gamma/\lambda$
1	1	1	1	1	1
0.2	1.188	3.112	0.2	2	1
0.1	1.240	4.594	0.1	2.4	1
0.05	1.271	6.132	0.05	2.693	1.0026
0.02	1.284	7.943	0.02	2.9	1
$\tau_1 = \infty$	1.308	9.170	$\tau_1 = \infty$	3.0213	1.026

Los resultados de esta optimización se recogen en la Tabla 1. La columna correspondiente a  $\gamma/\lambda$  proporciona el valor sugerido para el compromiso robustez/rendimiento. En este caso, para  $J = J_{m\acute{a}x}$ ,  $\gamma/\lambda$  este compromiso puede ajustarse de una

manera bastante buena escogiendo  $\gamma/\lambda = \frac{0,2\theta/\tau_1+0,9}{\theta/\tau_1+0,1}$ . Además, para plantas dominadas por la constante de tiempo, el valor de  $\lambda$  se mantiene aproximadamente constante dentro del intervalo  $[1,1887\theta, 1,3085\theta]$ . Esto nos lleva a escoger de manera simple,  $\lambda$  como  $\lambda = 1,25\theta$ . En el caso que se abogue por una sintonía basada en  $J = J_{avg}$ , a partir de los resultados de la tabla observamos que resulta en un ajuste orientado a regulación ( $\gamma \approx \lambda$ ). Por tanto, en base al criterio  $J_{avg}$ , el ajuste de  $\gamma$  resulta sencillo; se debe optar, simplemente, por opciones de control regulatorio. Por lo que respecta al valor de  $\lambda$ , notar a partir de la tabla 1 que está comprendido entre  $2\theta$  y  $3,1\theta$  para  $\theta/\tau_1 \leq 0,2$ . De esta forma, y para optar por una elección lo más simple posible, optamos por escoger  $\lambda = 2,5\theta$ . De esta forma, la regla de ajuste sugerida para procesos del tipo FOPTD es:

$$J_{m\acute{a}x} : \gamma = \min\left(\frac{0,2\frac{\theta}{\tau_1} + 0,9}{\frac{\theta}{\tau_1} + 0,1}\lambda, \tau_1\right) \quad \lambda = 1,25\theta \quad (46)$$

$$J_{avg} : \gamma = \lambda \quad \lambda = 2,5\theta \quad (47)$$

Respecto al caso de procesos con acción integral, para el caso  $J = J_{m\acute{a}x}$ ,  $\gamma$  se debe seleccionar como  $\gamma \approx 9\lambda$  y, para el otro parámetro, escoger  $\lambda = 1,25\theta$  como se ha recomendado anteriormente. Para el caso  $J = J_{avg}$ , substituyendo (47) en (33), obtenemos las siguientes expresiones para la regla de ajuste sugerida:

$$J_{m\acute{a}x} : K_c \approx \frac{1}{k'} \frac{0,5}{\theta} \quad \tau_I = 13,5\theta \quad (48)$$

$$J_{avg} : K_c \approx \frac{1}{k'} \frac{0,5}{\theta} \quad \tau_I = 6\theta \quad (49)$$

6.2. Procesos de primer orden inestables

El compromiso robustez/rendimiento en el caso de procesos inestables ( $\tau_1 < 0$ ) se muestra en la Figura 5. Comparado con el caso estable, la pérdida de rendimiento para la operación de seguimiento ( $\Delta_s^*$ ) es considerablemente mayor. A su vez, en general, la diferencia entre las pérdidas de rendimiento en servo ( $\Delta_s^*$ ) y regulación ( $\Delta_r^*$ ) queda en general reducida. La diferencia principal respecto al caso estable, como vemos en la Figura 4, es que no podemos especificar un valor constante para la robustez objetivo. Por ejemplo, con el fin de obtener un buen compromiso robustez/rendimiento,  $M_S^t$  se debe escoger aproximadamente igual a 1,6 para plantas integrantes,  $\approx 1,8$  para  $\theta/\tau_1 = -0,1$ ,  $\approx 2,2$  para  $\theta/\tau_1 = -0,2$  y  $\approx 2,9$  para  $\theta/\tau_1 = -0,33$  (ver los círculos indicativos en Figura 5). Por tanto, para plantas inestables, cuanto más alto sea el valor de  $\theta/|\tau_1|$ , mayor el valor a especificar de  $M_S^t$ .

Para el caso inestable, las soluciones al problema (44) para diferentes valores del retardo normalizado e índices  $J = J_{m\acute{a}x}, J_{avg}$  se muestran en la tabla 2. Al contrario que para el caso estable, ahora para ambos casos  $J_{m\acute{a}x}$  y  $J_{avg}$  resultan las mismas sugerencias de sintonía. El punto interesante para este caso es que se sugiere  $\gamma = \lambda$  independientemente del índice que se escoja. Este hecho muestra que, para procesos inestables, siempre es más deseable optar por un control regulatorio. Por tanto, las elecciones para los parámetros  $\lambda$  y  $\gamma$  son  $\lambda = 3\theta$  y  $\gamma = \lambda$ . Substituyendo estos valores en (31), la sintonía sugerida para controladores PI aplicados a procesos UFOPTD resulta en:

$$K_c = \frac{7\tau_1 - 9\theta}{k16\theta} \quad \tau_I = \frac{7\tau_1 - 9\theta}{\frac{\tau_1}{\theta} + 1} \quad (50)$$

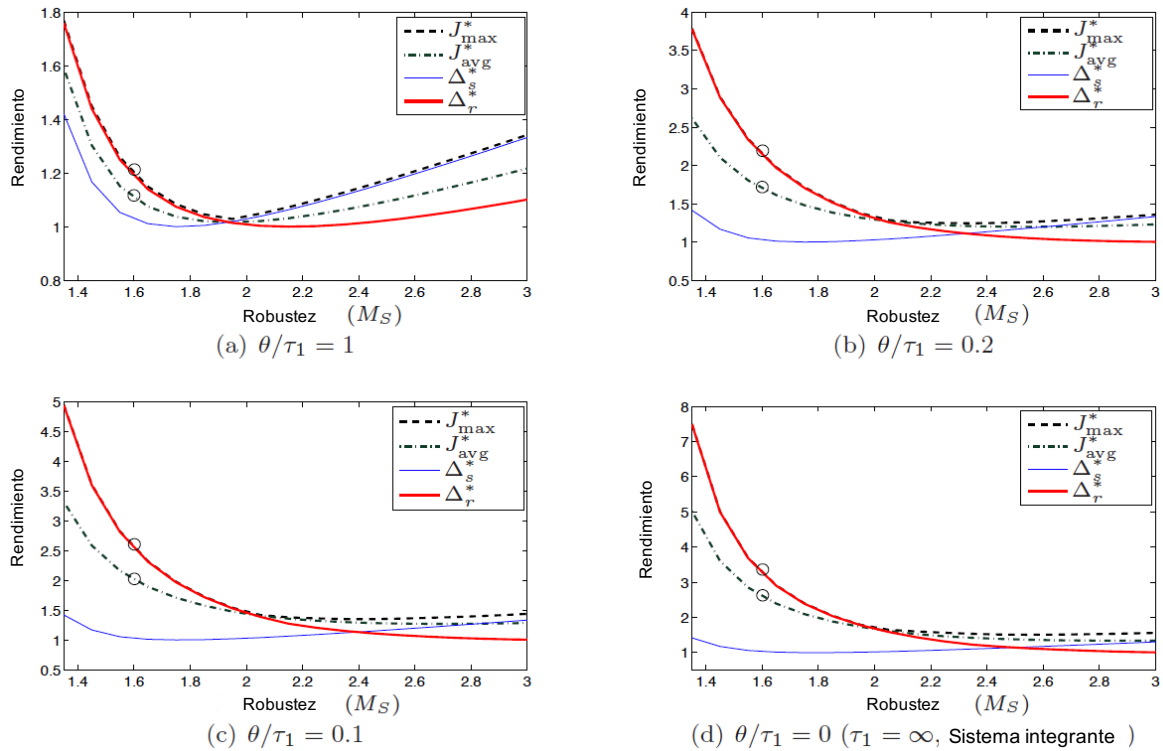


Figura 4: Robustez vs Rendimiento para procesos FOPTD (curvas pareto-óptimas en el espacio  $\lambda\gamma$ ).

Tabla 2: Valores óptimos de  $\lambda, \gamma$  para el problema (44) en el caso FOPTD inestable.

$\theta/\tau_1$	$k$	$J = J_{\text{máx}}$		$J = J_{\text{avg}}$	
		$\lambda/\theta$	$\gamma/\lambda$	$\lambda/\theta$	$\gamma/\lambda$
-0,33	2,9	3	1	3	1
-0,2	2,2	2,9	1	2,9	1
-0,1	1,8	3,1	1	3,1	1
-0,05	1,7	3	1	3	1
-0,02	1,6	3,2	1,03	3,2	1

6.3. Procesos estables de segundo orden y con acción integral

En este caso nos centramos en las reglas de sintonía orientadas a controladores tipo PID (34) y (38), las cuales fueron derivadas en base a procesos que obedecen a un modelo SOPTD y SODIPTD, respectivamente. Recordamos en primer lugar que, en (34), se partió del supuesto que el modelo tenía un polo real doble, es decir:

$$P = \frac{ke^{-\theta s}}{(\tau_1 s + 1)^2} \tag{51}$$

Este caso es particularmente simple de analizar, puesto que, al igual que en el caso de modelos FOPTD, el análisis únicamente depende del retardo normalizado  $\theta/\tau_1$ . Si se consideran dos constantes de tiempo diferentes,  $\tau_1, \tau_2$ , aparece un nuevo parámetro que debe tomarse en cuenta. Este puede tomar la forma de la razón entre las dos constantes de tiempo  $\tau_1$  y  $\tau_2$ . Además, para el caso inestable, se tienen que considerar dos situaciones extra posibles:  $\tau_1 < 0, \tau_2 > 0$  y  $\tau_1 < 0, \tau_2 < 0$ , generando un análisis bastante más largo y tedioso. Por tanto, en aras de la brevedad de exposición, y a modo de ejemplo de como se conduce el análisis, consideramos solamente el caso de polo real doble. En cualquier caso, puesto que los resultados

dependen básicamente de la constante de tiempo dominante, la regla de sintonía resultante es, en general, también aplicable al caso completo de un modelo SOPTD en el cual  $\tau_1 \neq \tau_2$ .

Al igual que antes, empezamos considerando el compromiso entre robustez/rendimiento para ver la factibilidad de plantear un nivel objetivo para la robustez. En este caso, las correspondientes curvas de compromiso no se muestran, puesto que son patrones similares al caso de los modelos FOPTD. Seleccionamos pues  $M_S^t = 1,6$ . El siguiente paso sería al respecto de la selección de los parámetros  $\lambda$  y  $\gamma$  mediante la solución de (44) para  $k = M_S^t = 1,6$ . Los valores solución que resultan para  $\lambda$  y  $\gamma$  se recogen en la tabla 3.

Tabla 3: Valores óptimos de  $\lambda, \gamma$  para el problema (44), tomando  $k = 1,6$  en el caso FOPTD estable.

$J = J_{\text{máx}}$			$J = J_{\text{avg}}$		
$\theta/\tau_1$	$\lambda/\theta$	$\gamma/\lambda$	$\theta/\tau_1$	$\lambda/\theta$	$\gamma/\lambda$
1	1	1	1	1	1
0.2	1.347	2.8954	0.2	2.65	1
0.1	1.4594	4.2483	0.1	3.3957	1.0307
0.05	1.5755	5.3952	0.05	4.15	1
0.02	1.6747	6.4488	0.02	4.72	1
0 ( $\tau = \infty$ )	1.8542	6.5256	0 ( $\tau = \infty$ )	5.2	1

Por lo que respecta a las soluciones para  $J = J_{\text{máx}}$ , para la relación  $\gamma/\lambda$ , un buen ajuste que representa los datos obtenidos se obtiene seleccionando  $\gamma/\lambda = \frac{1,05}{\theta/\tau_1 + 0,15}$ . Puesto que  $\gamma \in [\lambda, \tau_1]$ , la selección final que se propone de  $\gamma$  es:

$$\gamma = \min\left(\frac{1,05}{\frac{\theta}{\tau_1} + 0,15}\lambda, \tau_1\right) \tag{52}$$

Al respecto del parámetro  $\lambda$ , la selección sugiere valores alrededor de  $\theta$  para modelos con valores similares de retardo y constante de tiempo, mientras que, si domina la constante de tiempo,  $(0,02 \leq \theta/\tau_1 \leq 0,2)$  se sugiere  $1,5\theta$ . Por otra parte, el valor sugerido en el caso de un modelo de segundo orden con doble integrador se situaría en  $1,9\theta$ . Para este último caso, podemos substituir  $\gamma = 6,5256\lambda$  y  $\lambda = 1,8542\theta$  (directamente a partir de la tabla 3) en (38) para obtener la siguiente regla de sintonía automática:

$$K_c = \frac{0,055}{k''\theta^2} \quad \tau_I = 27\theta \quad \tau_D = 8\theta \quad (53)$$

A partir de la tabla 3, la sintonía de  $\gamma$  basada en el criterio  $J_{avg}$  resulta sencilla:

$$\gamma = \lambda \quad (54)$$

Por tanto, al igual que en el caso de modelos FOPTD, el uso del índice  $J_{avg}$  resulta en ajustes orientados a regulación. Por otro lado, el ajuste de  $\lambda$  no resulta tan directo y no podemos especificar un único valor. Un ajuste razonable en base a los datos resultado de la optimización se consigue mediante la selección:

$$\lambda = \left( \frac{0,2 \frac{\theta}{\tau_1} + 1}{\frac{\theta}{\tau_1} + 0,2} \right) \theta \quad (55)$$

Para el caso de una doble integración, podemos substituir  $\gamma = \lambda = 5,2\theta$  (directamente de la tabla 3) en (38), lo que resulta, de forma aproximada, en:

$$K_c = \frac{0,07}{k''\theta^2} \quad \tau_I = 16,6\theta \quad \tau_D = 5,9\theta \quad (56)$$

#### 6.4. Sistemas de segundo orden inestables

En este caso, el análisis del compromiso robustez/rendimiento nos lleva a una situación paralela a la conducida para el caso de un modelo FOPTD inestable. En este caso, notamos que el valor requerido de la robustez,  $M_S^t$ , debe ser más alto (por tanto menos robustez) cuanto más alto sea el valor de la relación  $\theta/|\tau_1|$ . Para ambos índices la conclusión global que se obtiene es que se debe seleccionar  $\gamma \approx \lambda$ , es decir, nuevamente, optar por un control en modo regulación. Este hecho obedece a la misma razón que para el caso de un proceso FOPTD inestable: la sintonía del controlador para seguimiento, ( $\gamma = |\tau_1|$ ), reducirá el sobrepico en la respuesta a un cambio en la referencia pero a expensas de incrementar el tiempo de establecimiento. Por tanto, debido a este compromiso entre sobrepico y tiempo de asentamiento, la respuesta a un cambio en consigna no se consigue mejorar de forma significativa comparada con la que obtenemos en base a un ajuste para regulación ( $\gamma = \lambda$ ). No obstante, la respuesta que ofrece la sintonía para regulación es mejor que la que se obtiene si se ajusta para seguimiento, facilitando la decisión a tomar. Ver Figura 6.

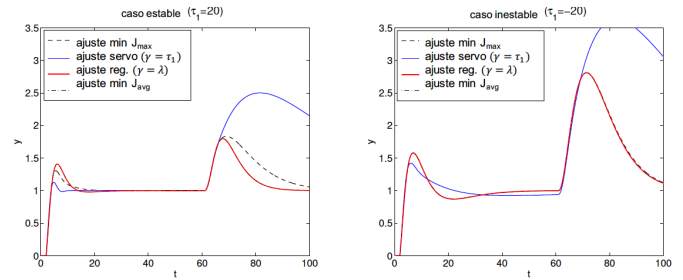


Figura 6: Respuestas a cambios en referencia ( $r$ ) y perturbación en carga ( $d_i$ ) para  $P = \frac{50e^{-s}}{(\tau_1 s + 1)^2}$  y  $M_S = 1,8$ .

A partir de los datos obtenidos resultado de los problemas de optimización planteados, se ha observado que  $\gamma \approx 5,2\theta$ . Por tanto, sintetizando, la regla de sintonía para el caso de un proceso de SOPTD inestable, resulta como:

$$\gamma = \lambda = 5,2\theta \quad (57)$$

Debido a los valores elevados que resultan de  $M_S$ , se debería limitar la aplicabilidad de la misma, aproximadamente al caso  $\theta/|\tau_1| \leq 0,2$ .

## 7. Comentarios finales

Desde el punto de vista del uso de herramientas de optimización numérica, muchos trabajos en la literatura se han ocupado de la sintonización separada para el seguimiento de la referencia (modo servo) y para el rechazo de perturbaciones en carga (modo regulador) (Leva and Maggio, 2012), (Alfaro et al., 2010). Algunos de ellos (los primeros), p. ej. (Zhuang and Atherton, 1993) (caso de planta estable) y (Visioli, 2001) (caso de planta inestable), no imponen ninguna restricción de robustez, lo que resulta en respuestas demasiado agresivas y oscilatorias. Tomando como base y punto de partida estos enfoques y planteamientos, algunos autores han considerado el compromiso entre los modos de servo y regulador. Este es el caso, por ejemplo, de (Arrieta et al., 2010). Un problema con este método es que la robustez no se considera explícitamente, sino que depende de los ajustes extremos utilizados para el servo y la regulación. (Huba, 2012) proporciona una metodología diferente basada en el *retrato de fase*, que utiliza el siguiente índice de rendimiento ponderado:

$$J_{wavg} = w\Delta_s + (1 - w)\Delta_r \quad (58)$$

donde  $w \in [0, 1]$ . La idea de considerar diferentes pesos para el rendimiento en regulación y seguimiento también aparece en (Arrieta et al., 2010) y (Grimholt and Skogestad, 2012), entre otros. Sin embargo, en la práctica, la elección  $w = 0,5$  se sugiere en (Huba, 2012), y básicamente se llega a la misma conclusión en (Grimholt and Skogestad, 2012). Entonces, con  $w = 0,5$ , (58) se simplifica al índice  $J_{avg}$  considerado a lo largo de este trabajo. Un defecto de (Huba, 2012) es que solo se ocupa de modelos IPTD y control PI. Además, finalmente no se proporcionan reglas de ajuste. De lo contrario, el método de (Huba, 2012) ofrece resultados prometedores.

El compromiso servo/regulador también se ha abordado analíticamente, especialmente utilizando el método IMC de

(Morari and Zafiriou, 1989). Algunos ejemplos incluyen el método SIMC (Skogestad, 2003), (Skogestad and Grimholt, 2012) y (J.Shi and W.S.Lee, 2004), (Ruscio, 2010), (Alcántara et al., 2010). Una limitación de los trabajos basados en IMC antes mencionados es que se limitan a los casos estables/integradores. Superando este inconveniente, las reglas de ajuste derivadas mediante el enfoque aquí presentado, basadas en el trabajo anterior (Alcántara et al., 2011b), y que se presenta de manera más amplia en (Alcántara et al., 2020) también son válidas en el caso inestable.

Finalmente, no se puede dejar de enfatizar que lo aquí presentado, supone la resolución del problema (44) con respecto a los parámetros  $\lambda, \gamma$ , en lugar de plantear directamente la optimización en el espacio real de parámetros del PID, es decir, en términos de  $K_c, \tau_I, \tau_D$ . Este hecho implica que las soluciones encontradas no son las verdaderamente óptimas. No obstante, se ha verificado que las soluciones sub-óptimas suelen estar cerca de las óptimas. Además, observamos aquí que nuestro objetivo en este documento no era tanto la pura optimización, sino la obtención de pautas de ajuste basadas en los compromisos entre robustez/rendimiento y servo/regulación. Para ello, trabajar con los parámetros  $\lambda, \gamma$  resulta más fácil porque, además de su clara interpretación de control, su uso permite pasar del espacio PID tridimensional a uno bidimensional, simplificando así el procedimiento de búsqueda.

## Agradecimientos

Los autores desean agradecer al Ministerio de Economía y Competitividad bajo las subvenciones DPI-2016-77271-R y PID2019-105434RB-C33 por la ayuda que han supuesto en la elaboración de los trabajos que han conducido a los desarrollos aquí presentados.

## Referencias

- Alcantara, S., Vilanova, R., Pedret, C., 2013. {PID} control in terms of robustness/performance and servo/regulator trade-offs: A unifying approach to balanced autotuning. *Journal of Process Control* 23 (4), 527 – 542.
- Alcántara, S., Pedret, C., Vilanova, R., 2010. On the model matching approach to PID design: Analytical perspective for robust Servo/Regulator tradeoff tuning. *Journal of Process Control* 20 (5), 596 – 608.
- Alcántara, S., Pedret, C., Vilanova, R., Skogestad, S., 2011a. Generalized Internal Model Control for balancing input/output disturbance response. *Industrial & Engineering Chemistry Research* 50 (19), 11170–11180.
- Alcántara, S., Vilanova, R., Pedret, C., 2020. PID Tuning: A Modern Approach via the Weighted Sensitivity Problem (1st ed.). CRC Press.
- Alcántara, S., Vilanova, R., Pedret, C., Skogestad, S., 2012. A look into robustness/performance and servo/regulation issues in PI tuning. In: Proc. of the IFAC Conf. on Advances in PID Control PID'12.
- Alcántara, S., Zhang, W., Pedret, C., Vilanova, R., Skogestad, S., 2011b. IMC-like analytical  $\mathcal{H}_\infty$  design with S/SP mixed sensitivity consideration: Utility in PID tuning guidance. *Journal of Process Control* 21 (6), 976 – 985.
- Alfaro, V. M., Vilanova, R., 2013a. Performance and Robustness Considerations for Tuning of Proportional Integral/Proportional Integral Derivative Controllers with Two Input Filters. *Industrial & Engineering Chemistry Research* 52, 18287–18302.
- Alfaro, V. M., Vilanova, R., 2013b. Robust tuning of 2DoF five-parameters PID controllers for inverse response controlled processes. *Journal of Process Control* 23, 453–462.
- Alfaro, V. M., Vilanova, R., September 2013c. Simple robust tuning of 2DoF PID controllers from a performance/robustness trade-off analysis. *Asian Journal of Control* 15 (5), 1–14.
- Alfaro, V. M., Vilanova, R., 2016. Model-Reference Robust Tuning of PID Controllers. Springer International Publishing AG, Gewerbestrasse 11, 6330 Cham, Switzerland, ISBN 978-3-319-28213-8.
- Alfaro, V. M., Vilanova, R., Méndez, R., Lafuente, J., 2010. Performance/Robustness Tradeoff Analysis of PI/PID Servo and Regulatory Control Systems. In: Proc. of the IEEE International Conference on Industrial Technology.
- Arrieta, O., Vilanova, R., 2012. Simple servo/regulation proportional-integral-derivative (pid) tuning rules for arbitrary ms-based robustness achievement. *Industrial & Engineering Chemistry Research* 51 (6), 2666–2674.
- Arrieta, O., Vilanova, R., Rojas, J. D., Meneses, M., 2016. Improved pid controller tuning rules for performance degradation/robustness increase trade-off. *Electrical Engineering* 98 (3), 233–243.
- Arrieta, O., Visioli, A., Vilanova, R., 2010. PID autotuning for weighted servo/regulation control operation. *Journal of Process Control* 20 (4), 472 – 480.
- Astrom, K., Hagglund, T., 2004. Revisiting the Ziegler-Nichols step response method for PID control. *J. Process Control* 14, 635–650.
- Astrom, K., Hagglund, T., 2005. Advanced PID control. ISA - The Instrumentation, Systems, and Automation Society.
- Chien, I. L., Fruehauf, P. S., 1990. Consider IMC tuning to improve controller performance. *Chemical Engineering Progress* 86 (10), 33 – 41.
- Dehghani, A., Lanzon, A., Anderson, B., 2006.  $\mathcal{H}_\infty$  design to generalize internal model control. *Automatica* 42 (11), 1959 – 1968.
- Grimholt, C., Skogestad, S., 2012. Optimal PI Control and Verification of the SIMC Tuning Rule. In: Proc. of the IFAC Conf. on Advances in PID Control PID'12.
- Horn, I. G., Arulandu, J. R., Gombas, C. J., VanAntwerp, J. G., Braatz, R. D., 1996. Improved Filter Design in Internal Model Control. *Industrial & Engineering Chemistry Research* 35 (10), 3437 – 3441.
- Huba, M., 2012. Setpoint Versus Disturbance Responses of the IPDT Plant. In: Proc. of the IFAC Conf. on Advances in PID Control PID'12.
- J.Shi, W.S.Lee, 2004. Set Point Response and Disturbance Rejection Tradeoff for Second-Order Plus Dead Time Processes. In: Asian Control Conference.
- Kristiansson, B., Lennartson, B., 1998. Optimal PID controllers for unstable and resonant plants. In: Proc. of the IEEE Conference on Decision and Control. pp. 4380–4381.
- Kurokawa, R., Sato, T., Vilanova, R., Konishi, Y., 2019. Discrete-time first-order plus dead-time model-reference trade-off pid control design. *Applied Sciences* 9 (16).
- Kurokawa, R., Sato, T., Vilanova, R., Konishi, Y., 2020. Design of optimal pid control with a sensitivity function for resonance phenomenon-involved second-order plus dead-time system. *Journal of the Franklin Institute* 357 (7), 4187–4211.
- Leva, A., Maggio, M., 2012. Model-Based PI(D) Autotuning. In: PID Control in the Third Millennium. Lessons Learned and New Approaches. Springer.
- Mercader, P., Astrom, K. J., Baños, A., Hagglund, T., 2017a. Robust pid design based on qft and convex/concave optimization. *IEEE Transactions on Control Systems Technology* 25 (2), 441–452.
- Mercader, P., Baños, A., 2017. A pi tuning rule for integrating plus dead time processes with parametric uncertainty. *ISA Transactions* 67, 246–255.
- Mercader, P., Baños, A., Vilanova, R., 2017b. Robust proportional-integral-derivative design for processes with interval parametric uncertainty. *IET Control Theory & Applications* 11 (7), 1016–1023.
- Mercader, P., Soltesz, K., Baños, A., 2017c. Robust pid design by chance-constrained optimization. *Journal of the Franklin Institute* 354 (18), 8217–8231.
- Meza, G. R., Ferragud, X. B., Saez, J. S., Dur, J. M. H., 2016. Controller Tuning with Evolutionary Multiobjective Optimization: A Holistic Multiobjective Optimization Design Procedure, 1st Edition. Springer Publishing Company, Incorporated.
- Middleton, R. H., Graebe, S. F., 1999. Slow stable open-loop poles: to cancel or not to cancel. *Automatica* 35 (5), 877–886.
- Morari, M., Zafiriou, E., 1989. Robust Process Control. Prentice-Hall International.
- Panagopoulos, H., Astrom, K. J., 2000. PID control design and  $\mathcal{H}_\infty$  loop shaping. *International Journal of Robust and Nonlinear Control* 10 (15), 1249–1261.
- Pedret, C., Vilanova, R., Moreno, R., Serra, I., 2002. A refinement procedure for PID controller tuning. *Computers & Chemical Engineering* 26 (6), 903 – 908.
- Rivera, D. E., Morari, M., Skogestad, S., 1986. Internal model control: PID controller design. *Industrial & Engineering Chemistry Process Design and Development* 25 (1), 252 – 265.

- Rodriguez, C., September 2020. Revisiting the simplified imc tuning rules for low-order controllers: Novel 2dof feedback controller. *IET Control Theory & Applications* 14, 1700–1710(10).
- Ruscio, D. D., 2010. On Tuning PI Controllers for Integrating Plus Time Delay Systems. *Modeling, Identification and Control* 31 (4), 145 – 164.
- Samad, T., Feb 2017. A survey on industry impact and challenges thereof [technical activities]. *CSM* 37 (1), 17–18.
- Sanchez, H. S., Padula, F., Visioli, A., Vilanova, R., 2017a. Tuning rules for robust fopid controllers based on multi-objective optimization with fopdt models. *ISA Transactions* 66, 344–361.
- Sanchez, H. S., Visioli, A., Vilanova, R., 2017b. Optimal nash tuning rules for robust pid controllers. *Journal of the Franklin Institute* 354 (10), 3945–3970.
- Sato, T., Hayashi, I., Horibe, Y., Vilanova, R., Konishi, Y., 2019. Optimal robust pid control for first- and second-order plus dead-time processes. *Applied Sciences* 9 (9).
- Sato, T., Tajika, H., Vilanova, R., Konishi, Y., 2018. Adaptive pid control system with assigned robust stability. *IEEE Transactions on Electrical and Electronic Engineering* 13 (8), 1169–1181.
- Shamsuzzoha, M., Lee, M., 2007. IMC-PID Controller Design for Improved Disturbance Rejection of Time-Delayed Processes. *Industrial & Engineering Chemistry Research* 46 (7), 2077 – 2091.
- Shamsuzzohaa, M., Skogestad, S., 2010. The setpoint overshoot method: A simple and fast closed-loop approach for PID tuning. *Journal of Process Control* 20 (10), 1220 – 1234.
- Skogestad, S., 2003. Simple analytic rules for model reduction and PID controller tuning. *J. Process Control* 13, 291–309.
- Skogestad, S., Grimholt, C., 2012. PID Tuning for Smooth Control. In: *PID Control in the Third Millennium. Lessons Learned and New Approaches*. Springer.
- Skogestad, S., Postlethwaite, I., 2005. *Multivariable Feedback Control*. Wiley.
- Smuts, J. F., 2011. *Process Control for Practitioners: How to Tune PID Controllers and Optimize Control Loops*. OptiControls.
- Vilanova, R., 2008. IMC based Robust PID design: Tuning guidelines and automatic tuning. *Journal of Process Control* 18, 61–70.
- Vilanova, R., Arrieta, O., 2007. PID design for improved disturbance attenuation: min max Sensitivity matching approach. *IAENG International Journal of Applied Mathematics* 37 (1).
- Vilanova, R., Arrieta, O., Ponsa, P., 2018. Robust pi/pid controllers for load disturbance based on direct synthesis. *ISA Transactions* 81, 177–196.
- Vilanova, R., Visioli, A., 2012. *PID Control in the Third Millennium - Lessons Learned and New Approaches*. Springer-Verlag London Limited.
- Visioli, A., 2001. Optimal tuning of PID controllers for integral and unstable processes. *IEE Proceedings. Part D* 148 (2), 180 – 184.
- Zhuang, M., Atherton, D. P., 1993. Automatic tuning of optimum PID controllers. *IEE Proc. Part D* 140 (3), 216–224.
- Ziegler, J. G., Nichols, N. B., 1942. Optimum settings for automatic controllers. *Trans. Am. Soc. Mech. Eng.* 64, 759–768.