



UNIVERSITAT
POLITÈCNICA
DE VALÈNCIA



Máster Universitario en Ingeniería de Análisis de Datos, Mejora de
Procesos y Toma de Decisiones

Trabajo Final de Máster

Diseño Óptimo de Planes de Muestreo Polietápicos
para la Monitorización de la Capacidad de un
Proceso

Autor: Ernesto Arce Romero
Tutores: Vicent Giner Bosch
Andrés Carrión García
Curso: 2020 - 2021

Resumen

En un mundo cada vez más competitivo las empresas y distintas organizaciones buscan mejorar la calidad de los productos y servicios. En virtud de la necesidad de herramientas de monitorización de procesos, se han creado índices para medir la capacidad que tiene un proceso para producir bienes de acuerdo con las especificaciones del cliente o de la industria. Actualmente los índices de capacidad se utilizan como insumo para determinar si fabricar o no un producto, hacer mejoras en los procesos tendientes a reducir la variabilidad, o actualizar los límites de especificación en una relación cliente-proveedor. Entre los índices más utilizados en la industria para medir la capacidad de un proceso se encuentra el conocido como C_{pk} , que es el que se utilizará en el presente trabajo.

Junto con lo anterior, uno de los instrumentos más utilizados en la industria para el control de la calidad es el muestreo de aceptación, donde se toma una muestra de un lote y se evalúa un atributo o un conjunto de variables para determinar si se acepta o rechaza dicho lote.

Dado que ambas herramientas persiguen el mismo objetivo, en este trabajo se aborda el diseño óptimo de planes de muestreo polietápico para evaluar la capacidad de un proceso. En concreto, se implementan técnicas de optimización que permiten obtener planes de muestreo eficientes desde el punto de vista del tamaño muestral, respetando los requerimientos del productor (riesgo de primera especie) y del cliente (riesgo de segunda especie).

Las experiencias numéricas llevadas a cabo permiten concluir que, por término medio, los planes de muestreo en dos etapas permiten alcanzar los mismos resultados utilizando un menor tamaño muestral que los de una etapa. Asimismo, se ilustra mediante un ejemplo numérico concreto cómo aplicar los planes en una y dos etapas obtenidos a través de los procedimientos desarrollados en el presente trabajo.

Palabras clave: muestreo de aceptación, muestreo polietápico, índices de capacidad, índices de Vännman, tamaño muestral, optimización en control de la calidad

Resum

En un món cada volta més competitiu, les empreses i les diferents organitzacions busquen millorar la qualitat dels productes i servicis. En virtut de la necessitat de ferramentes de monitorització de processos, s'han creat índexs de la capacitat que té un procés per a produir béns d'acord amb les especificacions del client o de la indústria. Actualment els índexs de capacitat s'usen com a entrada per a determinar si fabricar o no un producte, fer millores en els processos amb tendència a reduir la variabilitat, o actualitzar els límits d'especificació en una relació client-proveïdor. Entre aquells índexs més utilitzats en la indústria per a mesurar la capacitat d'un procés trobem el conegut com a C_{pk} , que és el que s'emprarà en el present treball.

Juntament amb l'anterior, un dels instruments més usats en la indústria per al control de la qualitat és el mostreig d'acceptació, on es pren una mostra d'un lot i s'avalua un atribut o un conjunt de variables per a determinar si s'accepta o es rebutja eixe lot.

Donat que ambdós eines tenen el mateix objectiu, en este treball s'aborda el disseny òptim de plans de mostreig en etapes múltiples per a avaluar la capacitat d'un procés. En concret, s'implementen tècniques d'optimització que permeten obtindre plans de mostreig eficients des del punt de vista de la grandària mostral, tot respectant-hi els requeriments del productor (risc de primera espècie) i del client (risc de segona espècie).

Les experiències numèriques dutes a terme permeten concloure que, per terme mitjà, els plans de mostreig en dos etapes permeten abastar els mateixos resultats utilitzant una grandària mostral menor que els d'una etapa. Així mateix, s'il·lustra mitjançant un exemple numèric concret el fet de com aplicar els plans en una i dos etapes obtinguts a través dels procediments desenrotllats en el present treball.

Paraules clau: mostreig d'acceptació, mostreig en etapes múltiples, índexs de capacitat, índexs de Vännman, grandària mostral, optimització en control de la qualitat

Abstract

In an increasingly competitive world, companies and organisations are seeking to improve the quality of products and services. Because of the need for process monitoring tools, indices have been created to measure the ability of a process to produce goods according to customer or industry specifications. Today, capability indices are used as an input to determine whether or not to manufacture a product, to make process improvements to reduce variability, or to update specification limits in a customer-supplier relationship. Among the most widely used indices in the industry to measure the capability of a process is the one known as C_{pk} , which is the one that will be used in this work.

Besides, one of the most widely used tools in industry for quality control is acceptance sampling, in which a sample is taken from a batch and an attribute, or a set of variables is evaluated to determine whether to accept or reject the batch.

Since both tools are aimed at the same objective, this paper addresses the optimal design of multistage sampling plans to assess the capability of a process. Specifically, optimisation techniques are implemented to obtain efficient sampling plans from the point of view of sample size, while meeting the requirements of the producer (type-I risk) and the customer (type-II risk).

The numerical experiments carried out show that, on average, two-stage sampling plans achieve the same results than single-stage sampling plans using a smaller sample size. A practical numerical example illustrates how to apply the one-stage and two-stage plans obtained through the procedures developed in this work.

Keywords: acceptance sampling, multistage sampling, capability indices, Vännman indices, sample size, optimisation in quality control.

Agradecimientos

A mis tutores D. Vicent Giner y Andrés Carrión por los consejos y dedicación para guiar la investigación.

A Carlos Sanchis por su disposición a compartir sus conocimientos sobre Matlab.

A la Universitat Politècnica de València por permitirme cursar el Máster en ingeniería de análisis de datos, mejora de procesos y toma de decisiones en modalidad online.

Al profesorado del Máster, que han explicado sus asignaturas con interés en que el alumnado aprenda los contenidos.

Al grupo curso que, pese a la distancia, siempre han estado dispuestos a trabajar conmigo y resolver dudas.

A Randy Soledad, a Bruna, a mis padres y hermanas por el apoyo constante en este período de estudio.

Tabla de Contenido

Resumen.....	1
Resum.....	2
Abstract	3
Agradecimientos	4
Tabla de Contenido	5
Índice de Tablas.....	6
Índice de Figuras	7
1 Introducción	9
1.1 Control de la Calidad	9
1.1.1 Qué es Calidad.....	9
1.1.2 Control Estadístico de la Calidad	9
1.1.3 Indicadores de Capacidad de Proceso.....	11
1.2 Motivación y justificación	11
1.3 Alcance	11
1.4 Objetivos	11
1.5 Estructura de Trabajo.....	12
2 Marco teórico y herramientas.....	13
2.1 Estado de la cuestión	13
2.1.1 Planes de muestreo.....	13
2.1.2 Capacidad de un proceso	14
2.1.3 Índices de Vännman	17
2.1.4 Distribución en el muestreo de los índices de capacidad	18
2.1.5 Medidas de desempeño/rendimiento (performance) de un plan de muestreo de aceptación	20
2.1.6 Optimización en control de la calidad.....	20
2.1.7 Tipos de Problemas de optimización	20
3 Diseño de planes de muestreo en varias etapas para monitorizar la capacidad.....	23
3.1 Diseño de los planes de muestreo	23
3.1.1 Plan de muestreo en una etapa	23
3.1.2 Plan de muestreo en dos etapas	23
3.1.3 Plan de muestreo en tres etapas	24
3.2 Desarrollo de un modelo de optimización	24
3.2.1 Estructura del modelo.....	24
3.2.2 Desarrollo del modelo para una etapa.....	26

3.2.3	Desarrollo para dos etapas.....	26
3.2.4	Desarrollo para tres etapas.....	27
3.3	Algoritmos de resolución	29
3.3.1	Para una etapa	29
3.3.2	Para dos etapas	29
3.3.3	Para tres etapas.....	30
4	Experiencias numéricas.....	31
4.1	Detalles de la implementación.....	31
4.2	Diseño de los experimentos	31
4.3	Descripción de las funciones de Matlab.....	31
4.4	Análisis de los resultados	32
4.4.1	Descripción general de los resultados obtenidos:	32
4.4.2	ANOVA de los resultados	34
5	Ejemplo numérico	45
5.1	Ejemplo numérico de plan de muestreo de una etapa.....	45
5.2	Ejemplo numérico de plan de muestreo de dos etapas.....	46
6	Conclusiones y líneas futuras de investigación	49
7	Bibliografía	50
ANEXOS		52
A.	Funciones Matlab.....	52
B.	Ficheros Excel con planes óptimos.....	52
C.	Ficheros Statgraphics con ANOVA.....	52
D.	Ecuación para hacer simulación de planes de muestreo	52
E.	Gráficos de Interacciones para ANOVA sobre el valor esperado de n.....	54
F.	Gráficos de Interacciones para ANOVA sobre la reducción del valor esperado de n	58

Índice de Tablas

Tabla 2-1	Ventajas y desventajas de muestreo por atributos y muestreo por variables. Creada a partir de Montgomery (2009)	14
Tabla 3-1	Variables de decisión del problema de optimización para los planes en 1, 2 y 3 etapas	24
Tabla 4-1	Factores y niveles utilizados en el trabajo.....	31
Tabla 4-2	Valor esperado de n y planes de 1 y 2 etapas para $Cpk0 = 2, Cpk1 = 1, \alpha = 0.05, \beta = 0.1$	32
Tabla 4-3	Resumen estadístico para E(n) en planes de 1 etapa.....	33
Tabla 4-4	Resumen estadístico para E(n) en planes de 2 etapas	33
Tabla 4-5	ANOVA de los factores estudiados sobre el valor esperado de n.....	34

Tabla 4-6 ANOVA de los factores estudiados sobre la diferencia porcentual del valor esperado de n entre los planes de 1 y 2 etapas.....	39
---	----

Índice de Figuras

Figura 2-1 Comparación de C_p al variar la anchura del proceso. Extraído desde https://www.itl.nist.gov/div898/handbook/pmc/section1/pmc16.htm	16
Figura 3-1 Gráfico de ejemplo de variación de la función de distribución acumulada de C_{pk} muestral para un x , C_{pk} y n fijos, variando el valor de δ	26
Figura 4-1 Gráficos de dispersión por factores (C_{pk0} , C_{pk1}), $Etapas$, δ_0 y δ_1	35
Figura 4-2 Gráficos de dispersión por factores α , β	36
Figura 4-3 Gráficos de medias de Tukey HSD para los factores (C_{pk0} , C_{pk1}), $Etapas$, δ_0 , δ_1 y sus niveles en ANOVA con variable dependiente $E(n)$	38
Figura 4-4 Gráficos de medias de Tukey HSD para los factores α , β y sus niveles en ANOVA con variable dependiente $E(n)$	39
Figura 4-5 Gráficos de dispersión por factores (C_{pk0} , C_{pk1}), δ_0 , δ_1 , α en ANOVA sobre la reducción del valor esperado de n	41
Figura 4-6 Gráficos de dispersión del factor β en ANOVA sobre la reducción del valor esperado de n	42
Figura 4-7 Gráficos de medias de Tukey HSD para los factores (C_{pk0} , C_{pk1}), δ_0 , δ_1 , α y sus niveles en ANOVA con variable dependiente diferencia porcentual de $E(n)$ entre los planes de 1 y 2 etapas	43
Figura 4-8 Gráfico de medias de Tukey HSD para el factor β y sus niveles en ANOVA con variable dependiente diferencia porcentual de $E(n)$ entre los planes de 1 y 2 etapas	44
Figura 5-1 Representación gráfica de la simulación de plan de muestreo de aceptación en 1 etapa para $C_{pk0} = 2$, $\delta = 0$	46
Figura 5-2 Representación gráfica de la simulación de plan de muestreo de aceptación en 1 etapa para $C_{pk1} = 1$, $\delta_1 = 0$	46
Figura 5-3 Representación gráfica de la simulación de plan de muestreo de aceptación en 2 etapas para $C_{pk0} = 2$, $\delta_0 = 0$	47
Figura 5-4 Representación gráfica de la simulación de plan de muestreo de aceptación en 2 etapas para $C_{pk1} = 1$, $\delta_1 = 0$	48
Figura 7-1 Gráfico de interacciones entre los factores (C_{pk0} , C_{pk1}) y δ_0 sobre el valor esperado de n	54
Figura 7-2 Gráfico de interacciones entre los factores (C_{pk0} , C_{pk1}) y δ_1 sobre el valor esperado de n	54
Figura 7-3 Gráfico de interacciones entre los factores (C_{pk0} , C_{pk1}) y α sobre el valor esperado de n	55
Figura 7-4 Gráfico de interacciones entre los factores (C_{pk0} , C_{pk1}) y β sobre el valor esperado de n	55
Figura 7-5 Gráfico de interacciones entre los factores (C_{pk0} , C_{pk1}) y $Etapas$ sobre el valor esperado de n	56
Figura 7-6 Gráfico de interacciones entre los factores α y β sobre el valor esperado de n	56
Figura 7-7 Gráfico de interacciones entre los factores α y $Etapas$ sobre el valor esperado de n	57

Figura 7-8 Gráfico de interacciones entre los factores β y Etapas sobre el valor esperado de n	57
Figura 7-9 Gráfico de interacciones entre los factores ($Cpk0, Cpk1$) y $\delta0$ sobre la reducción del valor esperado de n.....	58
Figura 7-10 Gráfico de interacciones entre los factores ($Cpk0, Cpk1$) y $\delta1$ sobre la reducción del valor esperado de n.....	58
Figura 7-11 Gráfico de interacciones entre los factores ($Cpk0, Cpk1$) y α sobre la reducción del valor esperado de n.....	59
Figura 7-12 Gráfico de interacciones entre los factores ($Cpk0, Cpk1$) y β sobre la reducción del valor esperado de n.....	59
Figura 7-13 Gráfico de interacciones entre los factores $\delta0$ y α sobre la reducción del valor esperado de n.....	60
Figura 7-14 Gráfico de interacciones entre los factores α y β sobre la reducción del valor esperado de n.....	60

1 Introducción

1.1 Control de la Calidad

1.1.1 Qué es Calidad

La palabra calidad cada vez es más utilizada en el mundo de hoy, como por ejemplo en “productos de calidad”, “calidad en el servicio”, o “calidad de diseño”.

De acuerdo con Uribe Macías (2011), Calidad “es un conjunto de propiedades que posee un producto y/o y que son inherentes a él, que garantiza que está bien hecho y que cumple con los estándares exigidos, alcanzando un grado de satisfacción tanto para el fabricante como para el cliente”. Conforme con esta definición es que la Calidad debe ser descrita y evaluada a través de funciones o características del producto o servicio que indiquen su habilidad para satisfacer las necesidades del cliente o alcanzar la aptitud para el uso.

Kaoru Ishikawa (1985) define trabajar en Calidad como diseñar, producir y servir un producto o servicio que sea útil, lo más económico posible y siempre satisfactorio para el usuario.

La Calidad es un concepto que incluye múltiples dimensiones. Montgomery (2009) las resume en 8 puntos:

- Funcionamiento (¿El producto hace el trabajo requerido?)
- Fiabilidad (¿Cuán a menudo falla el producto?)
- Durabilidad (¿Cuánto es la vida de servicio del producto?)
- Mantenibilidad (¿qué tan fácil es reparar el producto?)
- Estética (¿Cómo luce el producto?)
- Características (¿Qué hace el producto?)
- Calidad percibida (¿Cómo es la reputación de la Compañía o su producto?)
- Conformidad a las especificaciones (¿El producto está hecho exactamente como el diseñador lo pensó?)

Montgomery además añade que la Calidad es inversamente proporcional a la variabilidad, dado que en una producción con mucha variabilidad existirá una mayor cantidad de productos cuyas características no sean deseables.

1.1.2 Control Estadístico de la Calidad

Dentro de los enfoques de las actuaciones de Calidad, el primer nivel es el Control estadístico de Calidad, el cual actúa sobre la producción del bien o servicio. Este Control de la Calidad también ha tenido cambios a través del tiempo, donde se pueden indicar tres grandes grupos de técnicas utilizadas:

- Muestreo de aceptación
- Control estadístico de Procesos
- Diseño de experimentos

De estos tres grupos de técnicas, se entregan a continuación breves descripciones, dando especial hincapié al Muestreo de Aceptación, que será la técnica utilizada durante el desarrollo del trabajo

1.1.2.1 Muestreo de aceptación

En relación con el muestreo de aceptación, Montgomery (2009) señala que esta es una de las áreas de control y mejora de la Calidad. Se define como la inspección y clasificación de una muestra aleatoria de unidades de un producto de un lote más grande y se utiliza como insumo de información para tomar la decisión final sobre la disposición de dicho lote, ocurriendo generalmente en dos puntos del proceso: ingreso de materiales o producción final. Los lotes aceptados son puestos en producción, mientras que los lotes rechazados son devueltos al proveedor o sujetos a otra acción de disposición de lote.

El muestreo de aceptación también puede ser utilizado dentro de un proceso que tiene varias etapas de producción, donde los lotes aceptados siguen adelante y los rechazados son ingresados a reproceso o definitivamente descartados.

Según Montgomery, tres aspectos del muestreo son importantes:

- El propósito de esta técnica no es estimar la calidad de un lote, sino proporcionar una ayuda para decidir si se acepta o no dicho lote.
- Los planes de muestreo de aceptación no proporcionan una forma directa de control de calidad, puesto que está midiendo una vez que el producto de interés ya ha sido producido.
- La forma más efectiva de uso del muestreo de aceptación es como una herramienta de auditoría de que el producto se produce conforme a los requerimientos.

Es recomendable la utilización del muestreo de aceptación en los siguientes casos en lugar de hacer una inspección del 100% del producto cuando:

- Se hace un testeo destructivo,
- El costo de inspección es muy alto, ya sea por el valor del producto o por tiempo,
- Existe un error de inspección muy alto,
- El proveedor tiene un historial de calidad tan alto que permite hacer una reducción de la cantidad de unidades del lote que se inspeccionan,
- A pesar de que el proceso del proveedor sea satisfactorio, se requiere una monitorización del producto para reducir riesgos.

1.1.2.2 Control Estadístico de Procesos

El Control Estadístico de Procesos utiliza distintas técnicas estadísticas para medir y analizar las variaciones de los procesos, para reducir la variabilidad evitable y conseguir procesos con mayor calidad. El objetivo de cualquier esquema de control estadístico de procesos (Ferrer-Riquelme, 2009) es monitorizar el desempeño del rendimiento de un proceso a través del tiempo para comprobar que éste se comporta del modo esperado y detectar cualquier evento inusual que pueda ocurrir.

1.1.2.3 Diseño de Experimentos

De acuerdo con Montgomery (2009), el diseño de experimentos es una técnica usada en control estadístico de la calidad para, a propósito, generar cambios a variables del proceso con objeto de estudiar cambios en el resultado; todo esto con el fin de determinar cuáles variables son

influyentes y hacer mejoras al proceso para robustecerlo ante fuentes externas de variabilidad. En este tipo de análisis se utiliza ampliamente la técnica ANOVA.

1.1.3 Indicadores de Capacidad de Proceso

Cuando en la entrega de un producto o servicio se conocen los límites de especificación, es posible trabajar con indicadores de capacidad, es decir, una comparación entre estos límites y la variabilidad natural del proceso. Esta variabilidad natural se entiende como la anchura de un intervalo donde se encuentra la “mayor” parte de la producción.

Montgomery (2009) indica que una condición importante respecto al uso de los indicadores de capacidad y su interpretación está basada en la distribución normal de la producción.

1.2 Motivación y justificación

Dado que la capacidad de un proceso mide la aptitud de éste para generar piezas dentro de especificaciones y, al mismo tiempo, el muestreo de aceptación persigue determinar la conformidad o no conformidad, tiene sentido diseñar planes de muestreo orientados a determinar si la capacidad de un proceso es o no adecuada.

1.3 Alcance

El presente trabajo tiene el siguiente alcance:

- Se estudiarán los planes de muestreo en una, dos y tres etapas.
- Las variables continuas con las que se estudiará siguen una distribución normal.
- El índice de capacidad a estudiar es el C_{pk} .
- En las experiencias numéricas desarrolladas, se trabajará sobre un conjunto reducido de valores del error de tipo I y error de tipo II, si bien la metodología desarrollada puede ser extendida a otros cualesquiera requerimientos finales del usuario.

1.4 Objetivos

- General: **Diseñar de forma óptima e implementar planes de muestreo polietápicos para valorar la capacidad de un proceso.**
- Específicos:
 - Plantear como problema de optimización el diseño de planes de muestreo en una y varias etapas para evaluar la capacidad de un proceso.
 - Diseñar e implementar estrategias de resolución de dichos problemas de optimización.
 - Diseñar y ejecutar experiencias numéricas para evaluar y comparar la eficiencia de los planes óptimos obtenidos.

1.5 Estructura de Trabajo

El presente trabajo consta de un capítulo introductorio, en donde se explican los conceptos básicos que motivan la investigación, para posteriormente ser detallados en el Capítulo de Marco teórico y herramientas, donde se describen los conceptos y ecuaciones que fundamentan las acciones realizadas.

El capítulo 3 trata sobre el Diseño de los planes de muestreo, en el que se explican las características de cada plan, las ecuaciones que los rigen y el valor esperado de la muestra en cada caso. Se describen también los algoritmos de optimización utilizados con las variables de decisión, función objetivo y restricciones.

El capítulo 4 informa los resultados numéricos de la optimización de planes, describiendo las características más llamativas encontradas. Se presentan dos ANOVA, el primero sobre el valor esperado de n y el segundo sobre la reducción porcentual entre el plan a dos etapas respecto del plan a una etapa. Es relevante mencionar que en este análisis no fue considerado el plan a tres etapas puesto que no se pudo completar la totalidad de casos para esta modalidad.

El capítulo 5 muestra ejemplos de simulación para planes óptimos en una y dos etapas, con el valor promedio de n , α y β para corroborar que los resultados de la optimización pueden ser aplicados en la realidad.

El capítulo 6 presenta las principales conclusiones del estudio, junto con líneas futuras de investigación sugeridas.

2 Marco teórico y herramientas

2.1 Estado de la cuestión

2.1.1 Planes de muestreo

El contenido descrito a continuación se basa principalmente en lo descrito por Montgomery (2009) en los capítulos 15 y 16, donde el autor explica en detalle las características de los planes de muestreo de aceptación.

Los planes de muestreo corresponden a técnicas estadísticas utilizadas para asegurar que un insumo, producto semielaborado o un producto terminado se ajusta a determinados criterios que implican la aceptación o el rechazo de este lote.

Los planes de muestreo, al ser comparados con la inspección del 100% del producto tienen las siguientes ventajas:

- Potencialmente más económico.
- Existe menor contacto con las unidades del lote, por lo que hay menor riesgo de daño de la carga.
- Requiere menor cantidad de personal destinado a labores de inspección.
- Al revisar solo una muestra, existe menor riesgo de error de inspección.
- Dado que el rechazo es del lote por completo, este plan da una motivación al proveedor para incrementar la calidad de su proceso.

Por otra parte, los planes de muestreo de aceptación tienen las siguientes desventajas:

- Existe el riesgo de aceptar lotes “malos” y de rechazar lotes “buenos”.
- Los planes de muestreo de aceptación requieren planificación y documentación del procedimiento de muestreo, mientras que la inspección no lo necesita.

2.1.1.1 Tipos de Planes de muestreo

Los planes de muestreo se clasifican principalmente entre los que trabajan por variables y los que se enfocan en atributos. Las variables se refieren a características de calidad que son medidas en una escala numérica, mientras que los atributos son características de calidad que son expresadas en base a si aprueba o no un criterio (conforme-no conforme, no defectuoso-defectuoso).

Los planes de una muestra son procedimientos en los cuales se toma una muestra de n unidades seleccionadas al azar desde un lote, y la disposición del lote está determinada de acuerdo con la información contenida en dicha muestra. Por ejemplo, para un atributo se selecciona n unidades y si hay menos de c unidades defectuosas en el lote éste se acepta. De lo contrario se rechaza. En el caso de las variables se evalúa si el estimador de la variable está por sobre o bajo los límites de decisión, calculados a partir de los límites de especificación definidos con anterioridad entre cliente-industria y el proveedor, y la función de distribución de la variable en cuestión.

Los planes a dos muestras contienen una muestra inicial sobre la cual se pueden tomar tres decisiones: aceptar el lote, rechazar el lote o tomar una segunda muestra. Si se toma esta

segunda muestra, la información de la primera y la segunda es combinada para nuevamente evaluar si se acepta o no.

Los planes multietápicos o polietápicos son una extensión del concepto de doble muestreo, donde cada nueva etapa va incluyendo información de las etapas previas.

Un tema clave en la utilización de este tipo de procedimientos es contar con muestras al azar, representativas del lote en evaluación. Una técnica sugerida para favorecer la aleatoriedad es, primero, asignar un número a cada ítem del lote, para posteriormente seleccionar números aleatorios dentro del rango. Otras técnicas sugeridas por Montgomery (2009) son elegir aleatoriamente a partir del número de serie del producto, o utilizar las dimensiones del contenedor (largo, ancho y alto) del lote para seleccionar productos aleatoriamente de acuerdo con la ubicación del producto.

En la Tabla 2-1 se muestra un resumen de las ventajas y desventajas de aplicar un muestreo de aceptación por atributos o uno por variables.

Tabla 2-1 Ventajas y desventajas de muestreo por atributos y muestreo por variables. Creada a partir de Montgomery (2009)

	Ventajas	Desventajas
Muestreo por atributos	<ul style="list-style-type: none"> - Facilidad de aplicación para inspección visual como manchas o rayas. - Conteo de no conformidades es simple. 	<ul style="list-style-type: none"> - Debe existir un acuerdo claro entre proveedor y cliente respecto al límite de no conformidades toleradas para tomar la decisión de aceptar o rechazar
Muestreo por variables	<ul style="list-style-type: none"> - Requiere de menor tamaño de muestra que el muestreo por atributos. - Entrega más información sobre las características de calidad del producto 	<ul style="list-style-type: none"> - Recolección de los datos es más difícil que para muestreo por atributos. - Se necesita conocer la distribución de la variable de calidad estudiada. - Si se tiene una cantidad q de variables de calidad se requieren q distintos planes de muestreo por separado.

2.1.2 Capacidad de un proceso

El Análisis de capacidad de un proceso corresponde a las técnicas estadísticas que ayudan a cuantificar la variabilidad de un proceso de acuerdo con los requerimientos o especificaciones del cliente. Montgomery (2009) señala que esta capacidad del proceso se relaciona con la uniformidad de éste, ya que tiene en cuenta la variabilidad del proceso respecto a sus características críticas de calidad.

Se puede comprender la variabilidad a través de dos fuentes:

- La natural o inherente de una determinada característica de calidad en un tiempo específico, llamada “Variabilidad instantánea”
- La variabilidad de una característica crítica de calidad a lo largo del tiempo

Lo usual es tomar la longitud 6σ de la distribución de la característica de calidad como una medida de la capacidad del proceso.

Se define el Análisis de Capacidad de Procesos como el estudio formal para estimar la capacidad de un proceso, la cual se expresa en forma de una distribución con una determinada forma, media y desviación típica. En este sentido, el análisis de capacidad de procesos se puede realizar independiente de los valores de especificación de las características de calidad.

Para expresar la capacidad de un proceso se utilizan distintos índices, siendo los más comunes C_p , C_{pk} , C_{pm} , C_{pmk} .

2.1.2.1 Índice C_p

Es el índice más común y simple para comparar los límites de especificación respecto a la producción, introducido por Juran (1974) con el nombre de radio de capacidad, en inglés "*Capability Ratio*". Su ecuación es

$$C_p = \frac{(USL - LSL)}{6\sigma} \quad (2.1)$$

Donde USL es el límite superior de especificación y LSL es el límite inferior de especificación, mientras que sigma es la desviación típica del proceso. Se puede decir que C_p mide la capacidad potencial del proceso, donde se espera que su valor sea lo más alto posible. Por ejemplo, valores de C_p menores a 1 se considerarían inaceptables ya que el rango natural de variabilidad del proceso sería mayor que los límites de especificación del cliente o la industria.

Para tener una idea del valor de C_p dependiendo de la anchura del proceso se puede observar la Figura 2-1.

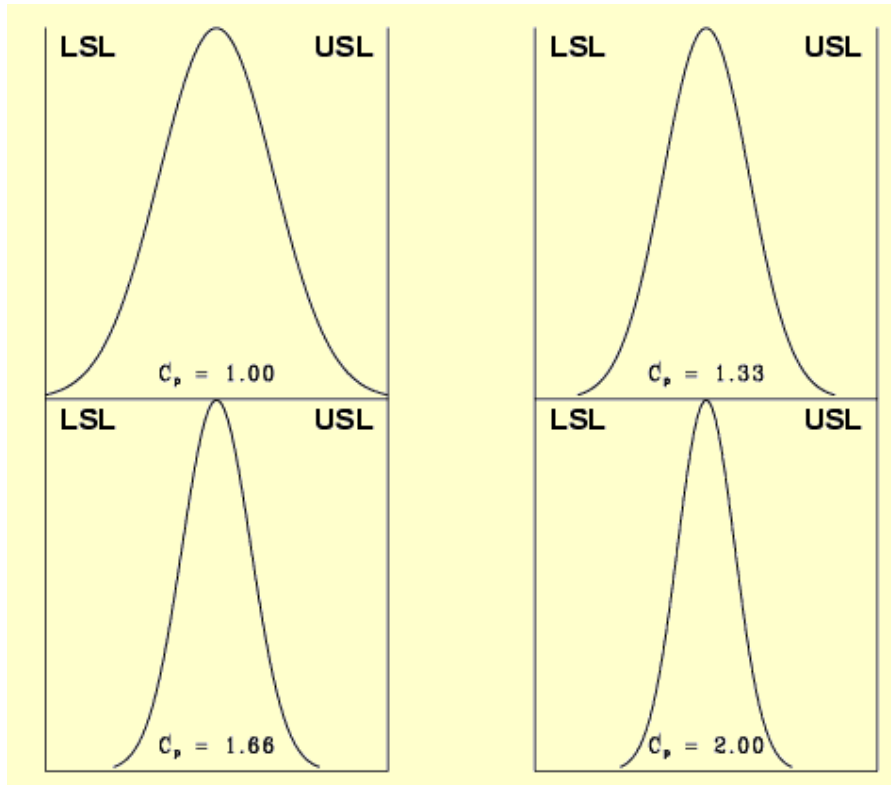


Figura 2-1 Comparación de C_p al variar la anchura del proceso. Extraído desde <https://www.itl.nist.gov/div898/handbook/pmc/section1/pmc16.htm>

2.1.2.2 Índice C_{pk}

El índice anterior tiene como principales críticas el que no considera dentro de su definición a la media del proceso, por lo que no toma información relevante para conocer la ubicación del proceso respecto a los límites de especificación (Kotz & Johnson, 2002)

El índice C_{pk} (Kane, 1986) fue diseñado para considerar la posición del proceso respecto a los límites de especificación, agregando un detalle mayor que el índice C_p .

Su ecuación viene dada por la siguiente expresión,

$$C_{pk} = \frac{\min(USL - \mu, \mu - LSL)}{3\sigma} \quad (2.2)$$

Como se puede apreciar, el índice C_{pk} toma la mínima distancia entre la media del proceso y los límites de especificación para calcular el índice.

2.1.2.3 Índice C_{pm}

Una de las críticas recibidas por los índices anteriores es que no tienen en cuenta el valor objetivo del proceso, asumiendo que se encuentra en el centro de los límites de especificación, lo cual no tiene por qué ser siempre cierto. El índice C_{pm} (Hsiang & Taguchi, 1985) toma este valor objetivo (T) y agrega información respecto a la diferencia entre la media del proceso respecto al objetivo T.

Este índice se le llama de segunda generación

$$C_{pm} = \frac{(USL - LSL)}{6\sqrt{\sigma^2 + (\mu - T)^2}} \quad (2.3)$$

2.1.2.4 Índice C_{pmk}

El llamado índice de tercera generación fue introducido por Pearn, Kotz y Johnson (1992) como una construcción entre C_{pk} y C_{pm} , agregando esta vez la diferencia entre la media del proceso y el punto medio del intervalo de especificación M.

$$C_{pmk} = \frac{\min(USL - \mu, \mu - LSL)}{3\sqrt{\sigma^2 + (\mu - T)^2}} \quad (2.4)$$

La ecuación anterior es posible reescribirla como

$$C_{pmk} = \frac{d - |\mu - M|}{3\sqrt{\sigma^2 + (\mu - T)^2}} \quad (2.5)$$

Donde $d = (USL - LSL)/2$ es la mitad del intervalo de especificación. Este índice tiene la ventaja de ser más sensible respecto a desviaciones sobre el valor objetivo en comparación con C_{pk} y C_{pm} .

2.1.3 Índices de Vännman

Vännman (1995) propuso una nueva familia de índices de capacidad, con el fin de resumir en una expresión todos los indicadores clásicos vistos en el punto 2.1.2 haciéndolos dependientes de dos parámetros no negativos u y v en la ecuación:

$$C_p(u, v) = \frac{(d - u|\mu - M|)}{3\sqrt{\sigma^2 + v(\mu - T)^2}} \quad (2.6)$$

Donde $d = (USL - LSL)/2$ es la mitad del intervalo de especificación, M es el punto medio del intervalo de especificación y T es el valor objetivo. Haciendo $u = 0$ o 1 y $v = 0$ o 1 se forman los cuatro indicadores clásicos.

$$C_p(0,0) = C_p; C_p(1,0) = C_{pk}; C_p(0,1) = C_{pm}; C_p(1,1) = C_{pmk} \quad (2.7)$$

En situaciones prácticas, el valor del objetivo T es igual a M (es decir, se asume que el valor "target" u objetivo está en el centro del rango de especificaciones), por lo que la ecuación general con la cual se trabaja es:

$$C_p(u, v) = \frac{(d - u|\mu - T|)}{3\sqrt{\sigma^2 + v(\mu - T)^2}} \quad (2.8)$$

Vännman (1995) indica además que, cuando las características del proceso están distribuidas normalmente, el estimador del indicador de capacidad está definido como

$$\hat{C}_p(u, v) = \frac{(d - u|\bar{X} - T|)}{3\sqrt{\hat{\sigma}^2 + v(\bar{X} - T)^2}} \quad (2.9)$$

Donde μ es la media de la muestra y la varianza corresponde al estimador de máxima verosimilitud, expresado de la siguiente forma,

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \quad (2.10)$$

Posteriormente, Vännman (1997a) presenta una nueva expresión para el estimador del indicador de capacidad, donde se agrega la siguiente notación

$$\xi = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \quad (2.11)$$

$$\eta = \frac{(\bar{X} - \mu)\sqrt{n}}{\sigma} \quad (2.12)$$

$$g = \frac{(\mu - T)\sqrt{n}}{\sigma} \quad (2.13)$$

$$D = \frac{d\sqrt{n}}{\sigma} \quad (2.14)$$

De esta forma, el estimador del indicador de capacidad se escribe

$$\hat{C}_{p,n}(u, v) = \frac{D - u|\eta - g|}{3\sqrt{\xi + v(\eta + g)^2}} \quad (2.15)$$

De acuerdo con Vännman (1997a), bajo normalidad en el proceso, las variables ξ y η son independientes, donde ξ se distribuye como una chi-cuadrado con n-1 grados de libertad, y η se distribuye como una Normal (0,1).

2.1.4 Distribución en el muestreo de los índices de capacidad

2.1.4.1 Función de distribución acumulada del índice $C_p(u, v)$ muestral

Vännman (1997a) indica que, bajo el supuesto de normalidad de las características del proceso, se puede utilizar la ecuación,

$$h(t) = f_\eta(-t - g) + f_\eta(t - g) = \frac{1}{2\pi} \left(\exp\left(\frac{-(t + g)^2}{2}\right) + \exp\left(\frac{-(t - g)^2}{2}\right) \right) \quad (2.16)$$

Para determinar la expresión de la función de distribución acumulada de $C_p(u, v)$. En el caso particular de $u > 0$ y $v = 0$, esta ecuación se puede escribir de la siguiente forma:

$$F_{\hat{C}_{p,n}(u,0)}(x) \begin{cases} \int_{\frac{D}{u}}^{\infty} F_{\xi} \left(\frac{(D-ut)^2}{9x^2} \right) h(t) dt, x < 0 \\ 1 - \Phi \left(\frac{D}{u} - g \right) + \Phi \left(\frac{-D}{u} - g \right), x = 0 \\ 1 - \int_0^{\frac{D}{u}} F_{\xi} \left(\frac{(D-ut)^2}{9x^2} \right) h(t) dt, x > 0 \end{cases} \quad (2.17)$$

Donde la expresión $F_{\xi} \left(\frac{(D-ut)^2}{9x^2} \right)$ corresponde a la función de distribución de una chi-cuadrado con n-1 grados de libertad.

2.1.4.2 Expresiones derivadas

Vännman (1997b) utilizó una variación de las expresiones anteriores para hacer un gráfico de la capacidad, independiente de los valores de los límites de especificación, introduciendo los conceptos de δ y γ .

$$\delta = \frac{\mu - T}{d}; \gamma = \frac{\sigma}{d} \quad (2.18)$$

Estos parámetros δ y γ pueden ser vistos como una versión estandarizada o relativa del llamado descentrado ($\mu - T$) y de la desviación típica σ , respectivamente.

Utilizando esta notación, Deleryd y Vännman (1999) plantean una ecuación para $C_p(u, v)$

$$C_p(u, v) = \frac{(1 - u|\delta|)}{3\sqrt{\gamma^2 + v\delta^2}} \quad (2.19)$$

Las ecuaciones de Vännman también se pueden expresar en términos de δ y γ para escribir D y g y calcular la función de distribución acumulada de la $C_p(u, v)$ muestral, obteniendo esta última función de forma independiente de los valores de los límites de especificación.

$$D = \frac{\sqrt{n}}{\gamma}; g = \frac{\delta}{\gamma}\sqrt{n} \quad (2.20)$$

2.1.4.3 Expresión para la probabilidad de C_p muestral dentro de un intervalo

Para poder determinar la probabilidad que el $C_p(u, v)$ muestral esté dentro de un intervalo se puede utilizar la ecuación de la función de distribución acumulada. Entendiendo que

$$\Pr(\hat{C}_{p,m}(u, v) \in [LR, LA[) = F_{\hat{C}_{p,n}(u,0)}(LA) - F_{\hat{C}_{p,n}(u,0)}(LR) \quad (2.21)$$

Donde LR y LA son los límites de rechazo y aceptación respectivos de dicho intervalo. Asumiendo $x > 0$; $u > 0$; $v = 0$ se puede escribir esta ecuación de la siguiente forma,

$$\Pr(\hat{C}_{p,m}(u, 0) \in [LR, LA[) = \int_0^{\frac{D}{u}} \left(F_{\xi} \left(\frac{(D-ut)^2}{9LR^2} \right) - F_{\xi} \left(\frac{(D-ut)^2}{9LA^2} \right) \right) h(t) dt \quad (2.22)$$

2.1.5 Medidas de desempeño/rendimiento (performance) de un plan de muestreo de aceptación

Dentro de las medidas que se pueden utilizar para determinar qué tan bueno es un plan de muestreo de aceptación se puede mencionar el Valor Esperado de n , Error Tipo I y Error Tipo II.

2.1.5.1 Valor esperado de n

Es el valor esperado de la muestra utilizada en el plan a lo largo del tiempo. En el caso de un plan a una etapa corresponde al valor de la muestra n_1 , pero en planes polietápicos tiene relación con las funciones de distribución de probabilidad implicadas y el cumplimiento de las restricciones de riesgo de fabricante y del comprador.

2.1.5.2 Error de Tipo I

También llamado riesgo de primera especie (α), es el riesgo del fabricante, o riesgo del productor, entendido como la probabilidad de rechazar un lote que realmente se considera aceptable.

$$\text{Error de tipo I } (\alpha) = Pr (\text{Rechazar} | \text{Lote correcto}) \quad (2.23)$$

2.1.5.3 Error de Tipo II

También llamado riesgo de segunda especie (β), es el riesgo del comprador, consumidor o cliente, entendido como la probabilidad de aceptar un lote que realmente se considera inaceptable.

$$\text{Error de tipo II } (\beta) = Pr (\text{Aceptar} | \text{Lote incorrecto}) \quad (2.24)$$

2.1.6 Optimización en control de la calidad

El enfoque de optimización es útil para problemas de control de la calidad debido a que existen distintas variables como son los límites de aceptación y el tamaño de la muestra, los cuales se requieren optimizar de manera tal que el valor esperado de la muestra sea el menor y que se cumplan los requisitos de error tipo I y tipo II. La optimización permite obtener mejores herramientas de control, mayor conocimiento del sistema y ayuda para la toma de decisiones.

Las técnicas de optimización se han utilizado en el control de calidad para el diseño de herramientas como gráficos de control o planes de aceptación de lotes (Giner Bosch, 2014); (Cheng, Lau, & Duffuaa, 1997); (García-Díaz & Aparisi, 2005); (Tagaras, 1997). Además de las técnicas de optimización, se ha trabajado con metaheurísticas para resolver este tipo de problemas (Chou & Chen, 2006); (Vommi & Seetala, 2007).

2.1.7 Tipos de Problemas de optimización

2.1.7.1 Programación lineal

Es el modelo de programación más popular, utilizado en destinación óptima de recursos bajo supuestos de certeza, linealidad, tecnología fija y beneficio constante por unidad producida (Ramamurthy, 2000).

Es una técnica muy versátil que puede ayudar a resolver problemas de diversos campos, tales como finanzas, marketing, producción, determinación de un *mix* de productos, transporte y muchas otras áreas.

Un problema de programación lineal tiene las siguientes propiedades:

- La relación entre las variables y restricciones debe ser lineal
- El modelo debe tener una función objetivo
- El modelo debe tener restricciones estructurales
- El modelo debe tener restricciones de no negatividad

Este tipo de problemas tiene algunos supuestos básicos como:

- Existen condiciones determinísticas acerca de toda la situación, por ejemplo, disponibilidad de recursos, acciones y consecuencias, beneficios.
- La relación entre las variables del problema y los recursos disponibles es lineal
- La tecnología es fija, es decir, los requerimientos de producción no van a cambiar en el tiempo
- El beneficio del producto permanece constante
- Las variables de decisión son continuas
- Una decisión es requerida por el período de planificación
- Las variables son no negativas

2.1.7.2 Programación entera

Un problema de programación entera es cualquiera en el cual alguna de las variables de decisión asuma valores discretos o no fraccionales (Taha, 1975). En general, un problema de programación entera puede o no tener restricciones, aunque todo problema entero puede ser considerado como un problema no lineal ya que sus funciones solo están definidas para valores discretos de las variables. De esta forma, un problema entero puede ser catalogado como lineal si, al relajar las restricciones enteras, las funciones son lineales.

Si todas las variables del problema son enteras, entonces el problema se conoce como entero puro. Si existen variables enteras y otras continuas se conoce como un problema mixto.

2.1.7.3 Programación no lineal

La programación no lineal es una técnica matemática para determinar la solución óptima de un gran grupo de problemas de negocio. Un problema no lineal es aquel en el cual alguna de las funciones involucradas no es lineal, permitiendo modelar situaciones más complejas y realistas como, por ejemplo, requerimientos de recursos que varían de acuerdo con el nivel de producción, demanda frente al precio, entre otros (Ramamurthy, 2000).

Una dificultad del problema general no lineal es que no existe un método único que sirva para resolver cualquier problema de este grupo, no pudiendo agrupar todos los problemas no lineales en un solo tipo (entendiendo por resolver el hecho de encontrar una solución que verifique todas las restricciones enunciadas y que optimice el valor de la función objetivo del problema). Esta es una de las razones por las cuales, en ocasiones, se opta por trabajar con problemas lineales que aproximan el problema no lineal original.

Algunos factores que hacen a los problemas no lineales más complejos respecto a los lineales son los siguientes:

- El algoritmo que resuelve un problema de programación lineal está basado en la propiedad que la solución óptima está ubicada en alguno de los vértices del poliedro convexo, limitando las iteraciones a un número finito. En los problemas de programación no lineal la solución óptima puede estar en cualquier parte de la región factible.
- Las relaciones no lineales entre variables de decisión son complejas de trabajar.
- Los problemas no lineales tienen óptimos locales y óptimo global, siendo difícil diferenciar entre ambos. Un método puede quedar atrapado en un óptimo local, que cumple todas las condiciones de optimalidad, pero no ser el óptimo que se busca.

Los métodos de punto interior son útiles para resolver este tipo de problemas (Potra & Wright, 2000).

2.1.7.4 Programación no lineal entera-mixta

La Programación no lineal entera mixta, en inglés, *Mixed-Integer Nonlinear Programming* (MINLP), se preocupa de los problemas con funciones no lineales (todas o algunas de ellas) y con la presencia de variables tanto enteras como continuas.

Muchos problemas de ingeniería, operaciones y aplicaciones científicas incluyen una mezcla de variables de decisión discretas y continuas que tienen un importante efecto en el conjunto de soluciones factibles y óptimas (Lee & Leyffer, 2012). Este tipo de problemas combinan la dificultad de trabajar con funciones no lineales con el desafío de optimizar funciones no convexas y variables discretas.

La forma general de un problema de este tipo es la siguiente:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Min} \quad z = f(x) \\ \text{s.a:} \quad g_j(x) \leq 0 \text{ para } j \in J \\ \quad \quad x \in X, \quad x_I \in Z^{|I|} \end{array} \right\} \quad (2.25)$$

Donde f y g tienen (todas o algunas) funciones no lineales, e I corresponde al índice de variables discretas.

La resolución de un problema no lineal entero-mixto no es simple, de hecho, es uno de los problemas más complicados de resolver, perteneciente a la clase de problemas NP-Completo (Leyffer, 1993) (Köppe, 2011) (Belotti, y otros, 2013).

Una forma de abordar este tipo de problemas es a través de métodos de Optimización Global, como la Optimización Sustituta, en inglés, *Surrogate Optimization* (Wang & Shoemaker, 2014) y GlobalSearch (Ugray, y otros, 2007).

3 Diseño de planes de muestreo en varias etapas para monitorizar la capacidad

En este capítulo se desarrolla la propuesta de este trabajo, consistente en el planteamiento de algoritmos para determinar el plan óptimo de muestreo de aceptación para la monitorización de índices de capacidad en una, dos y tres etapas, sujetos a la restricción del error tipo I y del error tipo II.

En concreto, en la sección 3.1 se describen los distintos planes de muestreo, la sección 3.2 detalla el modelo de optimización, con la descripción de las variables de decisión, función objetivo y restricciones, detallando las ecuaciones para cada plan, y la sección 3.3 describe los algoritmos de resolución utilizados en cada plan.

Posteriormente, en el capítulo 4 se presentará el plan de pruebas utilizado para comparar el valor esperado de n y los factores involucrados. Asimismo, se muestra un ejemplo numérico concreto en el capítulo 5.

3.1 Diseño de los planes de muestreo

3.1.1 Plan de muestreo en una etapa

El plan de muestreo en una etapa tiene la siguiente estructura:

1. Tomar una muestra de n_1 unidades y calcular la capacidad estimada de acuerdo con la ecuación 2.15
2. Aceptar el lote si la capacidad estimada es mayor a LD y rechazar en caso contrario

En este tipo de plan el valor estimado de n es igual a la muestra n_1 .

3.1.2 Plan de muestreo en dos etapas

El plan de muestreo en dos etapas tiene la siguiente estructura:

1. Tomar una muestra de n_1 unidades y calcular la capacidad estimada de acuerdo con la ecuación 2.15
2. Aceptar el lote si la capacidad estimada es mayor a LA_1 y rechazar si la capacidad es menor a LR_1
3. Si la capacidad estimada está entre LR_1 y LA_1 tomar una segunda muestra n_2 y calcular la capacidad estimada de acuerdo con la ecuación 2.15
4. Si la capacidad estimada con n_2 es mayor a LD aceptar el lote. Rechazar en caso contrario

Este plan es distinto al descrito en el punto 2.1.1.1, donde la segunda muestra utiliza la información recabada en primera etapa. En el caso de este trabajo no fue posible puesto que no se pudo determinar la probabilidad condicional asociada.

De esta forma, el valor esperado de n puede ser entendido como

$$E(n) = n1 + n2(F_{n1}(LA1) - F_{n1}(LR1)) \quad (3.1)$$

Donde $F_n(x)$ es la Función de distribución acumulada de la $C_p(u, v)$ muestral descrita en la ecuación 2.17.

3.1.3 Plan de muestreo en tres etapas

El plan de muestreo en tres etapas tiene la siguiente estructura:

1. Tomar una muestra de $n1$ unidades y calcular la capacidad estimada de acuerdo con la ecuación 2.15
2. Aceptar el lote si la capacidad estimada es mayor a $LA1$ y rechazar si la capacidad es menor a $LR1$
3. Si la capacidad estimada está entre $LR1$ y $LA1$ tomar una segunda muestra $n2$ y calcular la capacidad estimada de acuerdo con la ecuación 2.15
4. Aceptar el lote si la capacidad estimada es mayor a $LA2$ y rechazar si la capacidad es menor a $LR2$
5. Si la capacidad estimada está entre $LR2$ y $LA2$ tomar una tercera muestra $n3$ y calcular la capacidad estimada de acuerdo con la ecuación 2.15
6. Si la capacidad estimada con $n3$ es mayor a LD aceptar el lote. Rechazar en caso contrario

Debido a que en este trabajo no se dispone de una expresión para la probabilidad condicional asociada, la capacidad estimada en una determinada etapa no utiliza información de las etapas anteriores.

De esta forma, el valor esperado de n puede ser entendido como

$$E(n) = n1(1 - F_{n1}(LA1) + F_{n1}(LR1)) + (n1 + n2)(F_{n1}(LA1) - F_{n1}(LR1))(1 - F_{n2}(LA2) + F_{n2}(LR2)) + (n1 + n2 + n3)(F_{n1}(LA1) - F_{n1}(LR1))(F_{n2}(LA2) - F_{n2}(LR2)) \quad (3.2)$$

3.2 Desarrollo de un modelo de optimización

3.2.1 Estructura del modelo

3.2.1.1 Variables de decisión

Las variables de decisión del modelo corresponden al valor de la muestra y los límites de decisión.

Tabla 3-1 Variables de decisión del problema de optimización para los planes en 1, 2 y 3 etapas

Variable	Descripción	Tipo de Plan		
		1 etapa	2 etapas	3 etapas
$n1$	Tamaño de muestra en etapa 1	X	X	X
$n2$	Tamaño de muestra en etapa 2		X	X
$n3$	Tamaño de muestra en etapa 3			X
LD	Límite de decisión	X	X	X
$LA1$	Límite de aceptación en etapa 1		X	X

Variable	Descripción	Tipo de Plan		
		1 etapa	2 etapas	3 etapas
LA2	Límite de aceptación en etapa 2			X
LR1	Límite de rechazo en etapa 1		X	X
LR2	Límite de rechazo en etapa 2			X

3.2.1.2 Función objetivo y restricciones

La función objetivo trata sobre minimizar el valor esperado de la muestra, sujeto a las restricciones de error Tipo I y Tipo II.

$$\begin{array}{l} \text{Min } z = E(n|C_{pk} = C_{pk0}) \\ \text{s.a: } \left. \begin{array}{l} \alpha = \alpha_0 \\ \beta \leq \beta_0 \end{array} \right\} \end{array} \quad (3.3)$$

Para el desarrollo de los cálculos de optimización se ha decidido trabajar con C_{pk0} descrito a través de (δ_0, γ_0) y C_{pk1} a través de (δ_1, γ_1) para obtener los valores de D, g y aplicarlos a la ecuación (2.17) de la función de distribución acumulada de C_{pk} muestral, que se utilizará en el modelo de optimización para cualesquiera de los planes. La razón de trabajar con esta especificación de (δ, γ) y no solamente con el valor del indicador de capacidad ha sido debido a que, estudiando el comportamiento de la función de distribución acumulada se descubrió que, si el proceso está centrado, el valor de la función para un x dado es mayor que si el proceso no estuviera centrado, manteniendo constante el valor de C_{pk} .

Como se observa en la Figura 3-1, para un valor fijo de x, C_{pk} y n , se genera un gráfico con el valor de la función de distribución acumulada de C_{pk} muestral dependiendo del valor de δ , notando claramente que para un proceso centrado el valor de la CDF es mayor que para el resto de posibles valores de δ . También es necesario comentar que el gráfico presentado toma valores de δ desde -0.99 a 0.99, ya que al acercarse a 1, para mantener un C_{pk} fijo debería reducir su variabilidad a 0, condición que no tiene sentido matemático dentro de la expresión ni tampoco práctico.

Es posible también destacar que los valores la función de distribución acumulada para δ son idénticos que para $-\delta$, junto con el hecho de que gran parte de la región posee el mismo valor de CDF.

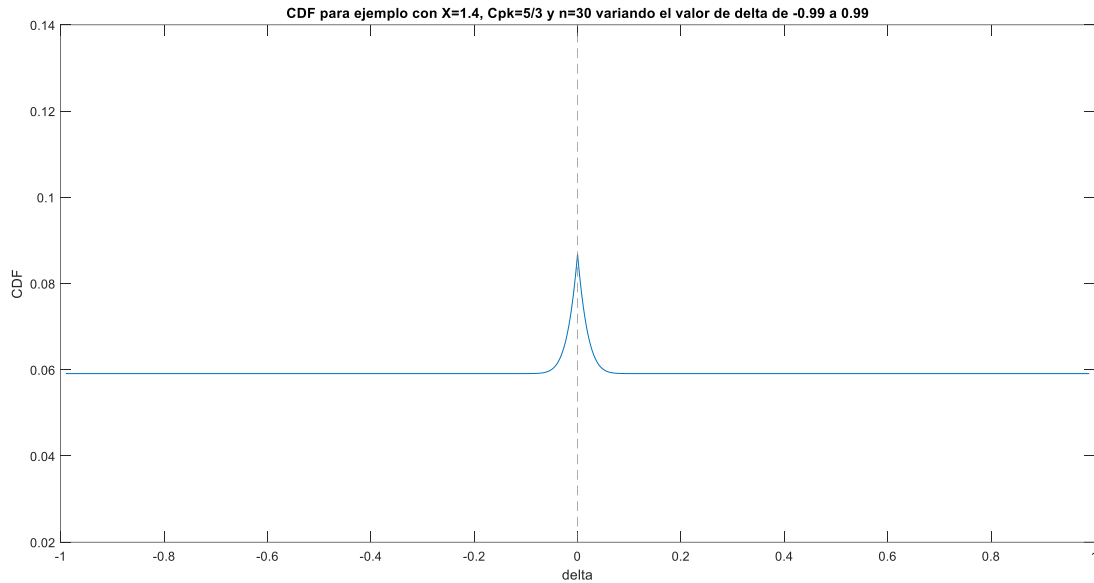


Figura 3-1 Gráfico de ejemplo de variación de la función de distribución acumulada de C_{pk} muestral para un x , C_{pk} y n fijos, variando el valor de δ

3.2.2 Desarrollo del modelo para una etapa

La función objetivo para un plan a 1 etapa es el mismo valor de la muestra.

$$E(n) = n1 \quad (3.4)$$

La restricción de riesgo de primera especie, calculada en base a C_{pk0} ($\delta0, \gamma0$), puede ser escrita como

$$\left(1 - \int_0^{\frac{D}{u}} F_{\xi} \left(\frac{(D - ut)^2}{9LD^2} \right) h(t) dt \right) \leq \alpha \quad (3.5)$$

mientras que, de forma similar la restricción de riesgo de segunda especie es calculada en base a C_{pk1} ($\delta1, \gamma1$) de esta forma

$$1 - \left(1 - \int_0^{\frac{D}{u}} F_{\xi} \left(\frac{(D - ut)^2}{9LD^2} \right) h(t) dt \right) \leq \beta \quad (3.6)$$

Tanto este modelo como los posteriores corresponden a problemas de MINLP, ya que existen variables continuas y discretas, y las funciones involucradas son no lineales.

3.2.3 Desarrollo para dos etapas

Utilizando la ecuación (2.22) se obtiene la expresión para el valor esperado de n en un plan de muestreo a dos etapas.

$$E(n) = n1 + n2 \left(\int_0^{\frac{D}{u}} \left(F_{\xi} \left(\frac{(D-ut)^2}{9LR^2} \right) - F_{\xi} \left(\frac{(D-ut)^2}{9LA^2} \right) \right) h(t) dt \right) \quad (3.7)$$

La restricción del error de tipo I, calculado en base a $C_{pk0}(\delta0, \gamma0)$ se obtiene escribiendo la expresión de la probabilidad de rechazar un lote “bueno”, la que debe ser igual a α . Tanto para el desarrollo en 2 como en 3 etapas se ha usado una notación donde los subíndices indican el tamaño muestral que está siendo considerado en cada cálculo.

$$\begin{aligned} a_{n1} &= 1 - \left(1 - \int_0^{\frac{D}{u}} F_{\xi} \left(\frac{(D-ut)^2}{9LA1^2} \right) h(t) dt \right) \\ b_{n1} &= \left(\int_0^{\frac{D}{u}} \left(F_{\xi} \left(\frac{(D-ut)^2}{9LR1^2} \right) - F_{\xi} \left(\frac{(D-ut)^2}{9LA1^2} \right) \right) h(t) dt \right) \\ c_{n2} &= 1 - \left(1 - \int_0^{\frac{D}{u}} F_{\xi} \left(\frac{(D-ut)^2}{9LD^2} \right) h(t) dt \right) \\ 1 - (a_{n1} + b_{n1}c_{n2}) &= \alpha \end{aligned} \quad (3.8)$$

La restricción del error de Tipo II, calculado en base a $C_{pk1}(\delta1, \gamma1)$ se obtiene escribiendo la expresión de la probabilidad de aceptar un lote “incorrecto”, la que debe ser menor o igual a β .

$$\begin{aligned} d_{n1} &= \left(1 - \int_0^{\frac{D}{u}} F_{\xi} \left(\frac{(D-ut)^2}{9LA1^2} \right) h(t) dt \right) \\ l_{n1} &= \left(\int_0^{\frac{D}{u}} \left(F_{\xi} \left(\frac{(D-ut)^2}{9LR1^2} \right) - F_{\xi} \left(\frac{(D-ut)^2}{9LA1^2} \right) \right) h(t) dt \right) \\ m_{n2} &= \left(1 - \int_0^{\frac{D}{u}} F_{\xi} \left(\frac{(D-ut)^2}{9LD^2} \right) h(t) dt \right) \\ 1 - (d_{n1} + l_{n1}m_{n2}) &\leq \beta \end{aligned} \quad (3.9)$$

3.2.4 Desarrollo para tres etapas

El valor esperado de n para un plan a tres etapas se puede obtener combinando las ecuaciones (3.2) y (2.17).

$$\begin{aligned} a_{n1} &= 1 - \left(1 - \int_0^{\frac{D}{u}} F_{\xi} \left(\frac{(D-ut)^2}{9LA1^2} \right) h(t) dt \right) \\ b_{n1} &= \left(1 - \int_0^{\frac{D}{u}} F_{\xi} \left(\frac{(D-ut)^2}{9LR1^2} \right) h(t) dt \right) \\ c_{n1} &= \left(\int_0^{\frac{D}{u}} \left(F_{\xi} \left(\frac{(D-ut)^2}{9LR1^2} \right) - F_{\xi} \left(\frac{(D-ut)^2}{9LA1^2} \right) \right) h(t) dt \right) \end{aligned} \quad (3.10)$$

$$\begin{aligned}
d_{n2} &= 1 - \left(1 - \int_0^{\frac{D}{u}} F_{\xi} \left(\frac{(D-ut)^2}{9L2^2} \right) h(t) dt \right) \\
e_{n2} &= \left(1 - \int_0^{\frac{D}{u}} F_{\xi} \left(\frac{(D-ut)^2}{9LR2^2} \right) h(t) dt \right) \\
f_{n2} &= \left(\int_0^{\frac{D}{u}} \left(F_{\xi} \left(\frac{(D-ut)^2}{9LR2^2} \right) - F_{\xi} \left(\frac{(D-ut)^2}{9LA2^2} \right) \right) h(t) dt \right) \\
E(n) &= n1(a_{n1} + b_{n1}) + (n1 + n2)(c_{n1})(d_{n2} + e_{n2}) + (n1 + n2 + n3)c_{n1}f_{n2}
\end{aligned}$$

La restricción del error de tipo I, calculado en base a $C_{pk0}(\delta0, \gamma0)$ se obtiene desarrollando una expresión para calcular la probabilidad de rechazar un lote "bueno", la que debe ser igual a α .

$$\begin{aligned}
a_{n1} &= 1 - \left(1 - \int_0^{\frac{D}{u}} F_{\xi} \left(\frac{(D-ut)^2}{9LA1^2} \right) h(t) dt \right) \\
b_{n1} &= \left(\int_0^{\frac{D}{u}} \left(F_{\xi} \left(\frac{(D-ut)^2}{9LR1^2} \right) - F_{\xi} \left(\frac{(D-ut)^2}{9LA1^2} \right) \right) h(t) dt \right) \\
c_{n2} &= 1 - \left(1 - \int_0^{\frac{D}{u}} F_{\xi} \left(\frac{(D-ut)^2}{9LR2^2} \right) h(t) dt \right) \\
d_{n3} &= 1 - \left(1 - \int_0^{\frac{D}{u}} F_{\xi} \left(\frac{(D-ut)^2}{9LD^2} \right) h(t) dt \right) \\
e_{n2} &= \left(\int_0^{\frac{D}{u}} \left(F_{\xi} \left(\frac{(D-ut)^2}{9LR2^2} \right) - F_{\xi} \left(\frac{(D-ut)^2}{9LA2^2} \right) \right) h(t) dt \right) \\
P_a &= a_{n1} + b_{n1}(c_{n2} + d_{n3}e_{n2}) \\
1 - P_a &= \alpha
\end{aligned} \tag{3.11}$$

La restricción del error de Tipo II, calculado en base a $C_{pk1}(\delta1, \gamma1)$ se obtiene desarrollando una expresión para calcular la probabilidad de aceptar un lote "incorrecto", la cual debe ser menor o igual a β .

$$\begin{aligned}
a_{n1} &= 1 - \int_0^{\frac{D}{u}} F_{\xi} \left(\frac{(D-ut)^2}{9LR1^2} \right) h(t) dt \\
b_{n1} &= \left(\int_0^{\frac{D}{u}} \left(F_{\xi} \left(\frac{(D-ut)^2}{9LR1^2} \right) - F_{\xi} \left(\frac{(D-ut)^2}{9LA1^2} \right) \right) h(t) dt \right) \\
c_{n2} &= 1 - \int_0^{\frac{D}{u}} F_{\xi} \left(\frac{(D-ut)^2}{9LR2^2} \right) h(t) dt \\
d_{n3} &= 1 - \int_0^{\frac{D}{u}} F_{\xi} \left(\frac{(D-ut)^2}{9LD^2} \right) h(t) dt
\end{aligned} \tag{3.12}$$

$$e_{n2} = \left(\int_0^{\frac{D}{u}} \left(F_{\xi} \left(\frac{(D-ut)^2}{9LR2^2} \right) - F_{\xi} \left(\frac{(D-ut)^2}{9LA2^2} \right) \right) h(t) dt \right)$$

$$P_r = a_{n1} + b_{n1}(c_{n2} + d_{n3}e_{n2})$$

$$1 - P_r \leq \beta$$

3.3 Algoritmos de resolución

Los modelos desarrollados en el apartado 3.2 permiten, una vez resueltos, obtener la configuración óptima de los planes de muestreo en una, dos y tres etapas, de modo que se satisfagan tanto el riesgo del fabricante (error de tipo I) como el riesgo del comprador (error de tipo II) con un tamaño muestral medio mínimo.

Como se ha comentado en la sección 2.1.7.4 los problemas no lineales enteros mixtos pueden ser realmente complicados de resolver en algunos casos, y la solución habitual suele pasar por recurrir a métodos de resolución específicos o ad-hoc.

En este trabajo, para la resolución de los problemas para una, dos y tres etapas, hemos estudiado el comportamiento de las funciones involucradas en relación con las variables de decisión, y hemos desarrollado a partir de esto estrategias de resolución eficientes, combinando estrategias enumerativas con otras técnicas mencionadas en el apartado 2.1.7.4.

3.3.1 Para una etapa

Para resolver el problema en una etapa lo que se busca es, partiendo desde n igual a 2, resolver la ecuación para obtener el límite de decisión que permita tener un error tipo I igual a α (L_{α}) y el que permita tener un error tipo II igual a β (L_{β}). Si $L_{\beta} \leq L_{\alpha}$ el algoritmo finaliza, mientras que en el caso contrario aumenta el valor de n en una unidad y repite todos los cálculos.

De esta forma al terminar las iteraciones el algoritmo entrega el plan con $n1$ y LD , donde LD es igual al valor de L_{α} .

Esquemáticamente el algoritmo consiste en lo siguiente:

1. Calcular C_{pk0} y C_{pk1}
2. Iniciar $n = 2$
3. Mientras $n < 500$
 - a. Encontrar Límite de decisión L_{α} tal que el error Tipo I es igual a α
 - b. Encontrar Límite de decisión L_{β} tal que el error Tipo II es igual a β
 - c. Si $L_{\beta} \leq L_{\alpha}$ se termina la búsqueda
 - d. Si no se cumple la condición, $n = n + 1$
4. Devolver n, L_{α}

3.3.2 Para dos etapas

En el caso de dos etapas la estrategia utilizada es hacer una minimización de la función del valor esperado de n , sujeto a las restricciones postuladas en el punto 3.2.3 iterando para distintos valores de $n1$ y $n2$ la estrategia de búsqueda de punto interior con el fin de encontrar la

combinación óptima. Para reducir el espacio de soluciones y el tiempo asociado a la búsqueda, se plantea la ejecución previa del algoritmo de optimización global llamado optimización asistida (*surrogate optimization*) para partir desde una buena solución y buscar en las cercanías de dicha combinación.

Una vez que se completa las iteraciones el algoritmo se queda con la combinación de $n1$, $n2$, $LR1$, $LA1$ y LD que minimiza el valor de la función.

Esquemáticamente, el algoritmo consiste en lo siguiente:

1. Calcular C_{pk0} y C_{pk1}
2. Definir la función objetivo y restricciones a utilizar en el método de optimización global
3. Definir las variables que serán consideradas como discretas ($n1$ y $n2$)
4. Definir el límite inferior para cada variable
5. Definir el límite superior para cada variable. Dependiendo de la combinación (C_{pk0} , C_{pk1}), este valor es distinto para las variables discretas
6. Ejecutar el algoritmo de optimización global para obtener una solución buena
7. Escoger la vecindad de acuerdo con el valor de la combinación (C_{pk0} , C_{pk1}) ($n1_{min}$, $n1_{max}$, $n2_{min}$, $n2_{max}$), donde la idea es que para valores de C_{pk0} y C_{pk1} muy cercanos (menor a 0.333) la vecindad sea más amplia que para valores lejanos (mayores a 0.333)
8. For $n1 = n1_{min}: n1_{max}$
 - a. For $n2 = n2_{min}: n2_{max}$
 - i. Determinar los límites $LR1$, $LA1$ y LD que minimizan el valor esperado de n en esta combinación de $n1$ y $n2$
9. Escoger el plan que obtuvo una solución factible con el menor valor esperado de n
10. Devolver $E(n)$, $n1$, $n2$, $LR1$, $LA1$, LD

Para resolver el punto 8 del algoritmo anterior se requiere de otro algoritmo que se describe a continuación:

1. Calcular C_{pk0} y C_{pk1}
2. Definir una solución inicial para $LR1$, $LA1$, LD , basado en los valores de C_{pk0} y C_{pk1} . Se aplican ponderadores para que las variables estén entre los valores del intervalo $[C_{pk0}, C_{pk1}]$
3. Calcular Valor esperado de n utilizando la ecuación 3.7
4. Calcular las restricciones utilizando las ecuaciones 3.8 y 3.9
5. Definir los límites inferiores y superiores de las variables
6. Utilizar el algoritmo de optimización de punto interior para resolver el problema y obtener los valores de $LR1$, $LA1$, LD que minimizan el valor esperado de n dados $n1$ y $n2$.
7. Devolver $E(n)$, $LR1$, $LA1$, LD o indicar que la solución es infactible

3.3.3 Para tres etapas

En el caso de tres etapas se plantea usar una estrategia similar a la explicada para dos etapas, siendo más importante aún el disponer de la obtención de una solución “buena” a partir de la cual buscar en sus proximidades para $n1$, $n2$ y $n3$, donde se itera para distintos valores buscando la combinación óptima.

4 Experiencias numéricas

4.1 Detalles de la implementación

Los cálculos realizados en este trabajo han sido obtenidos mediante el software Matlab, instalado en un ordenador Intel(R) Core(TM) i5-1035G1 CPU @ 1.00GHz 1.19 GHz con 8 GB de memoria RAM.

4.2 Diseño de los experimentos

Se ha realizado un diseño de experimentos tomando los factores y niveles que se presentan en la Tabla 4-1.

Tabla 4-1 Factores y niveles utilizados en el trabajo

Factor	Niveles
(C_{pk0}, C_{pk1})	(2, 1) (2, 5/3) (2, 4/3) (5/3, 1) (5/3, 4/3) (4/3, 1)
δ_0	0 0.25 0.5 0.75
δ_1	0 0.25 0.5 0.75
α	0.05 0.0027
β	0.1 0.05

Con estos valores se obtienen 384 combinaciones sobre un diseño factorial completo, sobre las cuales se ha optimizado en una y dos etapas.

El plan a tres etapas no se ha podido completar durante este período de estudio, aunque sí se ha podido obtener algunas ideas sobre los resultados preliminares.

4.3 Descripción de las funciones de Matlab

Se ha trabajado con Matlab (The Mathworks, Inc., 2021) principalmente debido a que contiene herramientas para trabajar en forma simple con integrales, distribuciones de probabilidad y funciones de optimización, lo cual simplifica el trabajo de codificación. Todas las funciones utilizadas se encuentran en el Anexo A.

4.3.1.1 Funciones comunes a todos los planes

Se han creado funciones comunes a todos los planes:

- `cdf_xi` : Permite obtener la distribución chi-cuadrado
- `hcalc`: Calcula la función $h(t)$ de la ecuación (2.16)

- **totl:** es el producto de **cdf_xi** y **hcalc**
- **CDFdeltagamma:** Es la función de distribución acumulada de $C_p(u, v)$ muestral

4.3.1.2 Funciones para los planes a 1 etapa

- **limite_inf:** evalúa la diferencia entre la CDF en un punto determinado bajo una C_{pk0} y el valor de α con el cual se desea trabajar
- **limite_sup:** evalúa la diferencia de (1-CDF) en un punto determinado bajo una C_{pk1} y el valor de β con el cual se desea trabajar
- **P1etapa:** función que desarrolla el algoritmo descrito en el punto 3.3.1
- **Simul1S:** Simulación de un plan a 1 etapa

4.3.1.3 Funciones para los planes a 2 etapas

- **CDFdeltagamma2:** calcula la diferencia entre CDF de los puntos distintos
- **optimiza2_1:** función que hace una optimización de la función objetivo para $n1$ y $n2$ fijos, utilizando la estrategia de búsqueda de punto interior a través de la rutina **fmincon**
- **optimiza2v2:** función que desarrolla el algoritmo de resolución descrito en el punto 3.3.2
- **Simul2S:** Simulación de un plan de 2 etapas

4.4 Análisis de los resultados

Los resultados de los planes óptimos han sido ingresados en una planilla disponible en el Anexo B. Para ilustrar el contenido de este fichero, en la siguiente tabla se presentan los planes para $C_{pk0} = 2$; $C_{pk1} = 1$; $\alpha = 0.05$; $\beta = 0.1$

Tabla 4-2 Valor esperado de n y planes de 1 y 2 etapas para $C_{pk0} = 2, C_{pk1} = 1, \alpha = 0.05, \beta = 0.1$

Etapas	E(n)	Plan				
		n1	n2	LR1	LA1	LD
1	10	10				1,4653
2	7,9923	7	6	1,3444	1,7095	1,5310

El fichero tiene agrupadas las pruebas por hoja según el plan, además de una hoja resumen donde se puede comparar la reducción del valor esperado a medida que el plan contiene un mayor número de etapas.

4.4.1 Descripción general de los resultados obtenidos:

Como primera aproximación al análisis de los resultados de la optimización de planes de muestreo de aceptación polietápicos es posible notar que al comparar la Tabla 4-3 y la Tabla 4-4 se observa una reducción en el valor medio, mínimo y máximo para cada combinación de α y β evaluada. Este hecho da a entender que efectivamente la aplicación de un plan a dos etapas mejora la situación al obtener un menor valor esperado de la muestra para las mismas restricciones de error de primera y segunda especie.

También es posible apreciar que la habilidad del plan a dos etapas para reducir el valor esperado de n es mayor cuando las condiciones de error tipo I son más estrictas.

En el Anexo B están todos los ficheros Excel que cuentan con la información de los planes óptimos y el valor esperado de n , donde se presentan los resultados de los planes a una etapa, dos etapas y los resultados preliminares de planes en tres etapas. Al observar los promedios del valor esperado de n es posible notar que para una etapa este tamaño muestral es de 91,3802 mientras que para dos etapas es de 57,9346, representando una reducción del 36.6%

Al observar los resultados se puede apreciar que la reducción del plan en tres etapas respecto al plan en dos etapas está entre el 2% y el 10%, lo cual da a entender que al aumentar las etapas el beneficio, entendido como reducción del valor esperado de n , es menor.

Tabla 4-3 Resumen estadístico para $E(n)$ en planes de 1 etapa

	$\alpha=0,05; \beta=0,1$	$\alpha=0,05; \beta=0,05$	$\alpha=0,0027; \beta=0,1$	$\alpha=0,0027; \beta=0,05$
Recuento	96	96	96	96
Promedio	57,9896	74,2396	105,708	127,583
Mediana	38,5	50,5	72	87,5
Desviación Estándar	45,1348	57,6294	84,5778	101,442
Mínimo	9	12	15	19
Máximo	152	193	274	327
Rango	143	181	259	308
Cuartil Inferior	20	26	34	42
Cuartil Superior	95	122	175	211
Rango Intercuartílico	75	96	141	169

Tabla 4-4 Resumen estadístico para $E(n)$ en planes de 2 etapas

	$\alpha=0,05; \beta=0,1$	$\alpha=0,05; \beta=0,05$	$\alpha=0,0027; \beta=0,1$	$\alpha=0,0027; \beta=0,05$
Recuento	96	96	96	96
Promedio	43,3527	56,6786	58,1518	73,5556
Mediana	28,6492	37,9582	38,951	49,7861
Desviación Estándar	33,2867	43,4024	45,2916	57,0457
Mínimo	7,1817	9,42672	9,0745	11,6751
Máximo	116,507	149,824	153,746	191,9
Rango	109,326	140,397	144,672	180,225
Cuartil Inferior	15,6486	20,3986	20,1865	25,5993
Cuartil Superior	70,6411	92,4261	95,4447	120,671
Rango Intercuartílico	54,9926	72,0275	75,2582	95,0716

4.4.2 ANOVA de los resultados

4.4.2.1 ANOVA sobre el valor de n

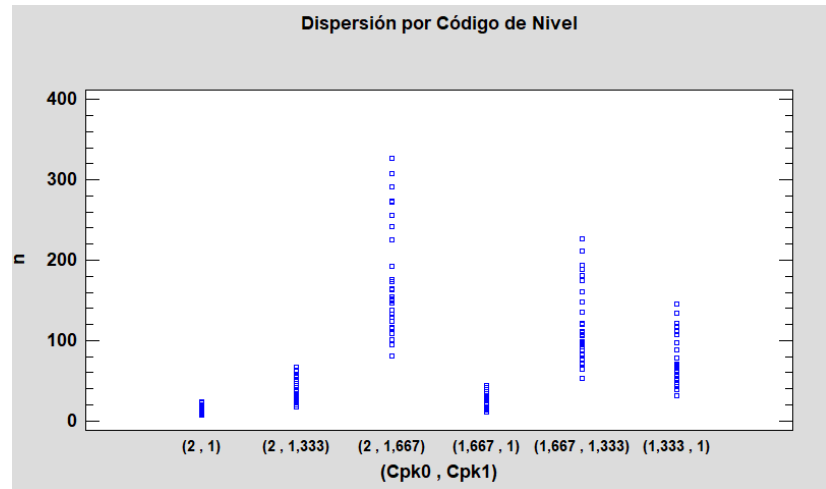
En este análisis ANOVA, disponible en Anexo B se han tomado los factores descritos en Tabla 4-1, añadiendo un factor adicional de las etapas, el cual tiene dos niveles (1 y 2). De esta forma se analizan 768 casos.

Se puede apreciar en la Tabla 4-5 que todos los efectos principales son significativos, así como también las interacciones $((C_{pk0}, C_{pk1}), \delta 0)$, $((C_{pk0}, C_{pk1}), \delta 1)$, $((C_{pk0}, C_{pk1}), \alpha)$, $((C_{pk0}, C_{pk1}), \beta)$, $((C_{pk0}, C_{pk1}), Etapas)$, (α, β) , $(\alpha, Etapas)$, $(\beta, Etapas)$.

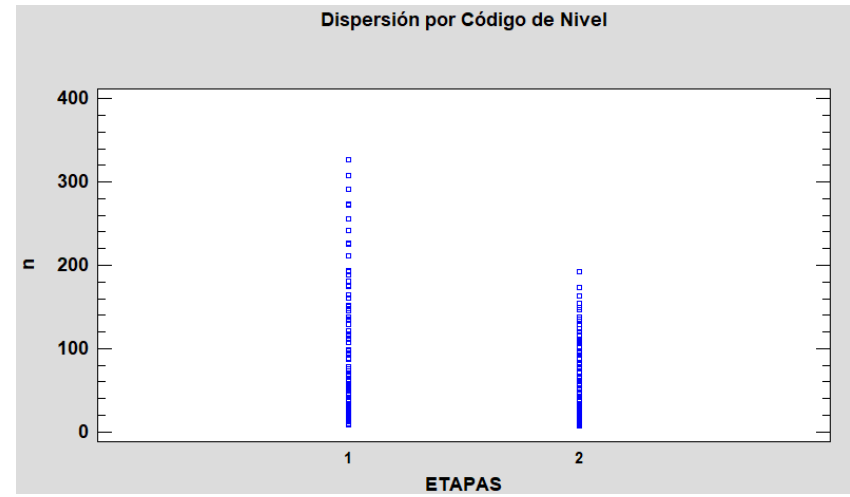
Tabla 4-5 ANOVA de los factores estudiados sobre el valor esperado de n

Fuente	Suma de Cuadrados	Gl	Cuadrado Medio	Razón-F	Valor-P
EFFECTOS PRINCIPALES					
A:(Cpk0 , Cpk1)	2,54E+06	5	508517	8420.64	0
B:Delta0	8249.8	3	2749.93	45.54	0
C:Delta1	28350.9	3	9450.31	156.49	0
D:Alfa	211434	1	211434	3501.18	0
E:Beta	53634.5	1	53634.5	888.14	0
F:ETAPAS	214772	1	214772	3556.45	0
INTERACCIONES					
AB	4871.62	15	324.775	5.38	0
AC	12104	15	806.93	13.36	0
AD	141273	5	28254.5	467.87	0
AE	30985	5	6197.01	102.62	0
AF	144132	5	28826.4	477.34	0
BC	16.5598	9	1.83998	0.03	1
DE	711.997	1	711.997	11.79	0,0006
DF	57773.8	1	57773.8	956.69	0
EF	1059.27	1	1059.27	17.54	0
RESIDUOS	42031	696	60.3894		
TOTAL (CORREGIDO)	3.49E+06	767			

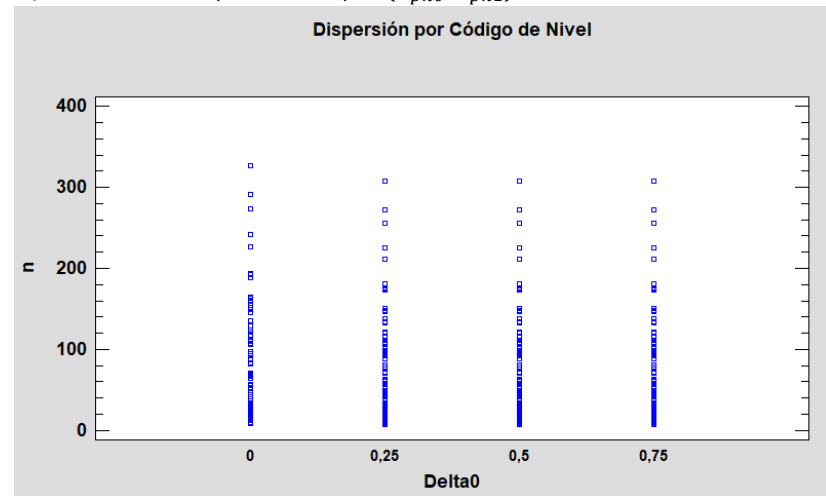
En relación con los gráficos de dispersión por factores, en Figura 4-1 y Figura 4-2 se presentan los gráficos para los efectos en los distintos niveles estudiados. Se pueden observar notorias diferencias entre niveles de los efectos (C_{pk0}, C_{pk1}) , Etapas y α , mientras que en el resto la dispersión es más homogénea entre niveles. Estos gráficos permiten interpretar que los 3 factores con mayor dispersión son los más importantes para caracterizar el valor esperado de n en el plan de muestreo de aceptación. Un detalle a favor de la aplicación de planes polietápicos es que efectivamente al pasar de una etapa a dos la baja en la dispersión y en el valor de n es notoria.



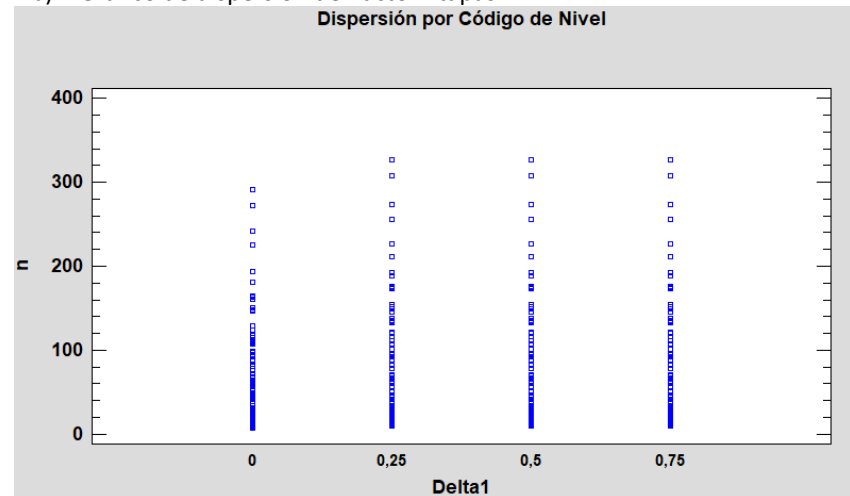
a) Gráfico de dispersión del par (C_{pk0}, C_{pk1})



b) Gráfico de dispersión del factor Etapas

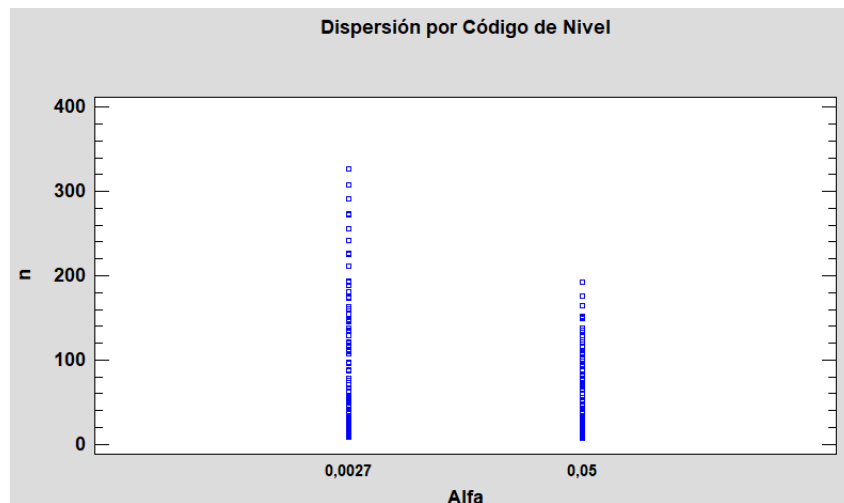


c) Gráfico de dispersión del factor δ_0

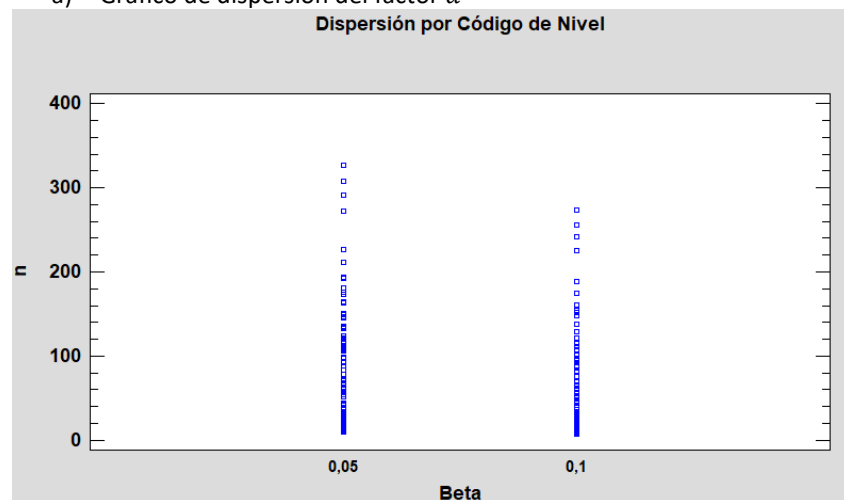


d) Gráfico de dispersión del factor δ_1

Figura 4-1 Gráficos de dispersión por factores (C_{pk0}, C_{pk1}) , Etapas, δ_0 y δ_1



a) Gráfico de dispersión del factor α



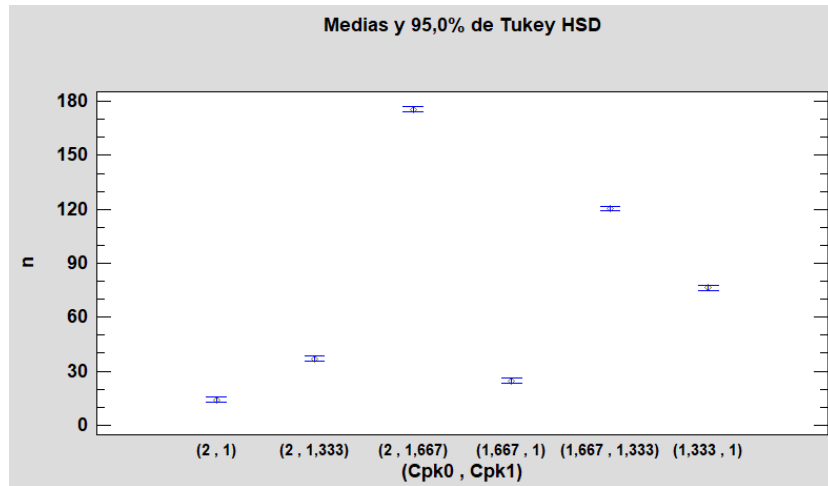
b) Gráfico de dispersión del factor β

Figura 4-2 Gráficos de dispersión por factores α, β

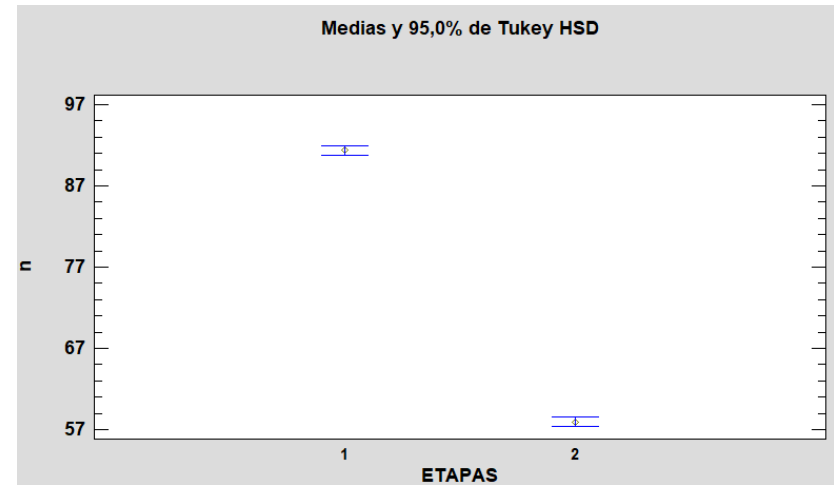
En la Figura 4-3 y Figura 4-4 se presentan gráficos de medias de Tukey para los intervalos HSD de cada factor, donde es posible notar los siguientes hechos:

- Se puede ver que los pares (C_{pk0}, C_{pk1}) donde la diferencia entre el valor de los índices de capacidad es igual o superior a $2/3$ tienen un valor esperado de n mucho menor que los pares donde esta diferencia es menor.
- El aumentar de 1 a 2 etapas genera una reducción en el valor esperado de n
- Para el valor de $\delta_0 = 0$ el valor esperado de n es más alto que para el resto de los niveles evaluados, los cuales presentan prácticamente el mismo intervalo
- Para el valor de $\delta_1 = 0$ el valor esperado de n es más bajo que para el resto de los niveles evaluados, los cuales presentan prácticamente el mismo intervalo

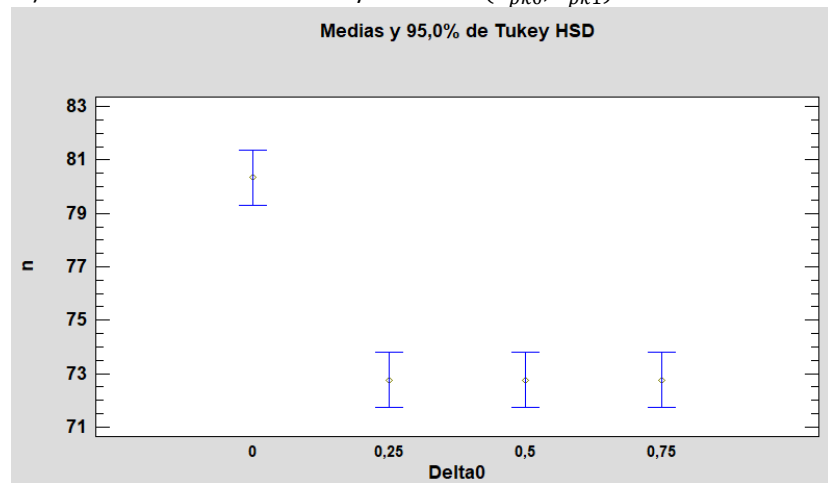
- El valor de α más pequeño (0.0027) tiene un valor esperado de n superior al del nivel más alto (0.05)
- El valor de β más pequeño (0.05) tiene un valor esperado de n superior al del nivel más alto (0.1)



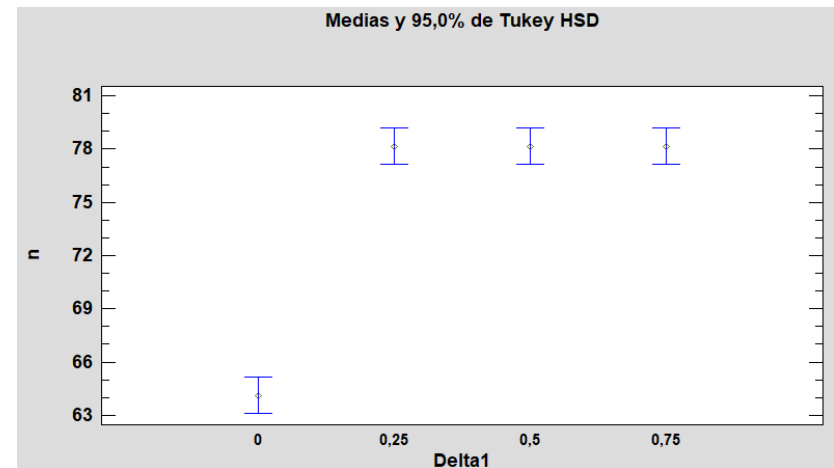
a) Gráfico de medias de Tukey del factor (C_{pk0}, C_{pk1})



b) Gráfico de medias de Tukey del factor Etapas

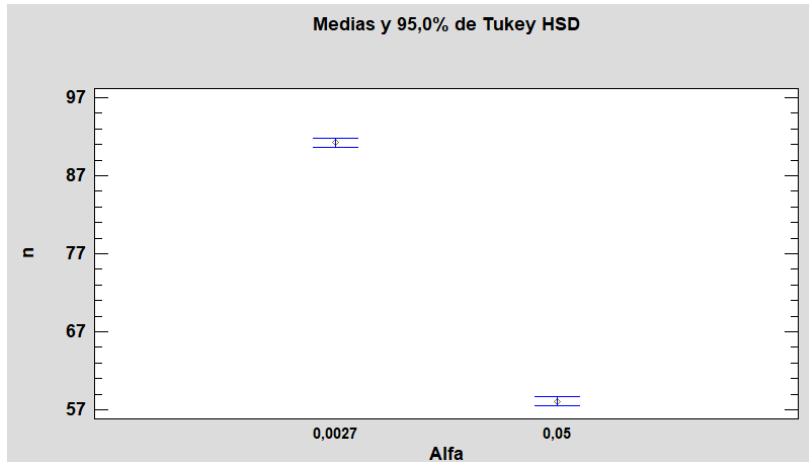


c) Gráfico de medias de Tukey del factor δ_0

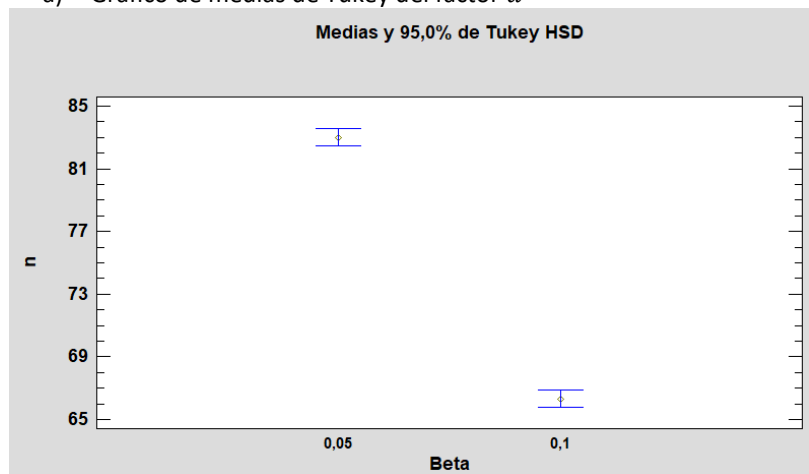


d) Gráfico de medias de Tukey del factor δ_1

Figura 4-3 Gráficos de medias de Tukey HSD para los factores (C_{pk0}, C_{pk1}) , Etapas, δ_0 , δ_1 y sus niveles en ANOVA con variable dependiente $E(n)$



a) Gráfico de medias de Tukey del factor α



b) Gráfico de medias de Tukey del factor β

Figura 4-4 Gráficos de medias de Tukey HSD para los factores α , β y sus niveles en ANOVA con variable dependiente $E(n)$

4.4.2.2 ANOVA sobre la diferencia porcentual del valor esperado entre etapas

Se ha agregado el análisis de varianza de los factores sobre la diferencia porcentual en el valor esperado de n entre el plan a 1 y 2 etapas, por lo que se han considerado solo los factores mencionados en la Tabla 4-1, por lo que se cuenta con 384 casos.

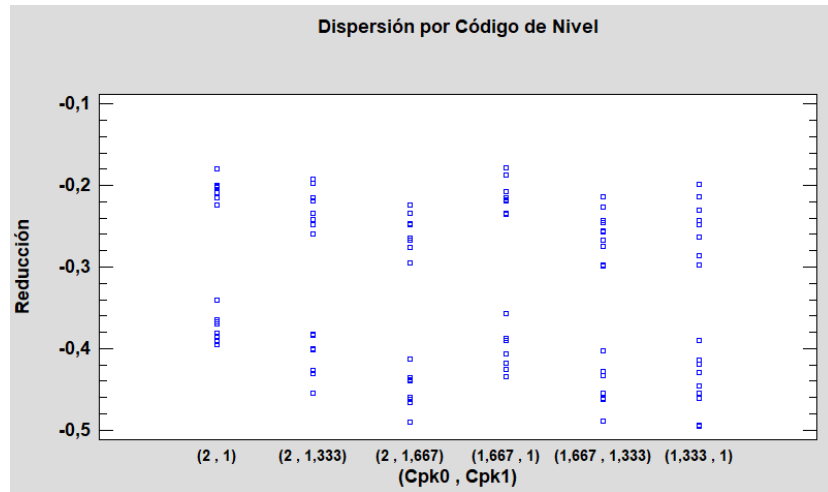
Como se puede ver en la Tabla 4-6, todos los efectos principales son significativos, así como también las interacciones $((C_{pk0}, C_{pk1}), \delta_0)$, $((C_{pk0}, C_{pk1}), \delta_1)$, $((C_{pk0}, C_{pk1}), \alpha)$, $((C_{pk0}, C_{pk1}), \beta)$, (δ_0, α) , (δ_0, β) .

Tabla 4-6 ANOVA de los factores estudiados sobre la diferencia porcentual del valor esperado de n entre los planes de 1 y 2 etapas

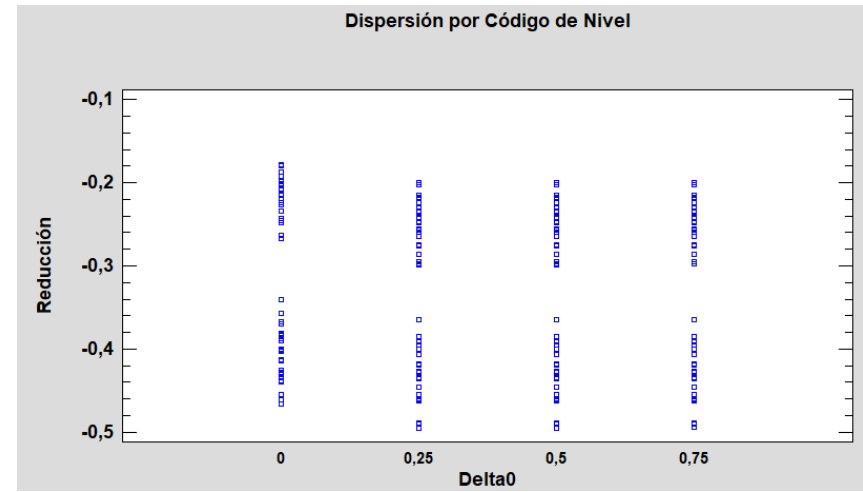
Fuente	Suma de Cuadrados	GI	Cuadrado Medio	Razón-F	Valor-P
EFFECTOS PRINCIPALES					
A:(Cpk0 , Cpk1)	0.190451	5	0.0380902	1805.28	0
B:Delta0	0.0495732	3	0.0165244	783.17	0
C:Delta1	0.0556103	3	0.0185368	878.55	0
D:Alfa	3.34368	1	3.34368	158473.31	0

Fuente	Suma de Cuadrados	Gl	Cuadrado Medio	Razón-F	Valor-P
E:Beta	0.038713	1	0.038713	1834.79	0
INTERACCIONES					
AB	0.00139615	15	9.3076E-05	4.41	0
AC	0.0111765	15	0.0007451	35.31	0
AD	0.00703276	5	0.00140655	66.66	0
AE	0.00131159	5	0.00026232	12.43	0
BC	0.000125708	9	1.3968E-05	0.66	0.7432
BD	0.000196365	3	6.5455E-05	3.1	0.0269
DE	0.00240406	1	0.00240406	113.94	0
RESIDUOS	0.00668849	317	2.1099E-05		
TOTAL (CORREGIDO)	3.70836	383			

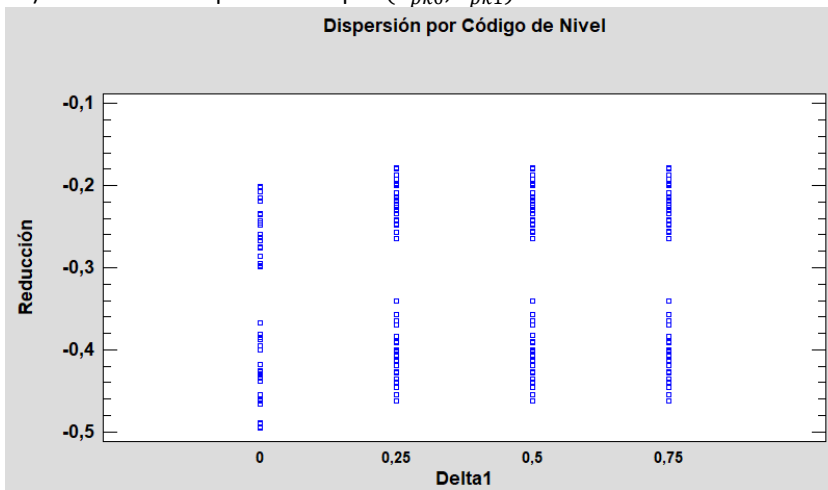
En relación con los gráficos de dispersión por cada nivel de los factores, podemos ver en las Figura 4-5 (a, b y c) y Figura 4-6 que existen dos grupos por cada nivel de cada factor, mientras que para el factor α no existe esta división. Este hecho hace pensar que esta separación se debe a que la dispersión por cada factor de la reducción del valor esperado de n es influenciada por el nivel del factor α .



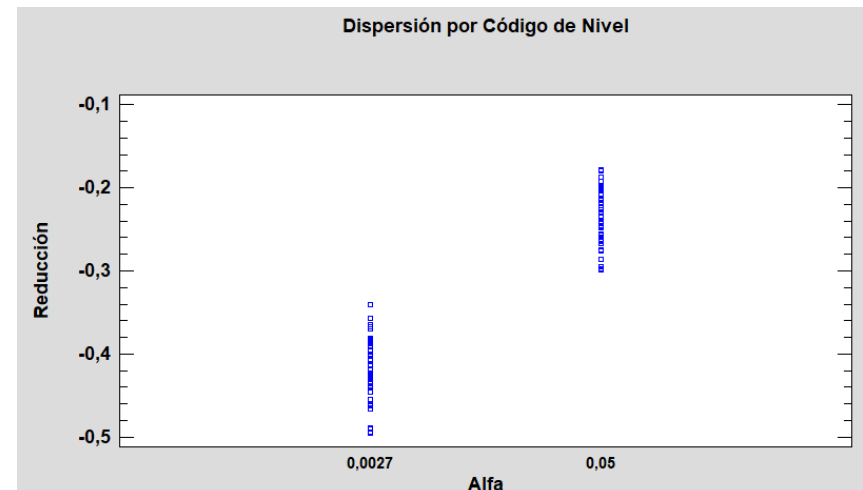
a) Gráfico de dispersión del par (C_{pk0}, C_{pk1})



b) Gráfico de dispersión del factor δ_0



c) Gráfico de dispersión del factor δ_1



d) Gráfico de dispersión del factor α

Figura 4-5 Gráficos de dispersión por factores (C_{pk0}, C_{pk1}) , δ_0 , δ_1 , α en ANOVA sobre la reducción del valor esperado de n

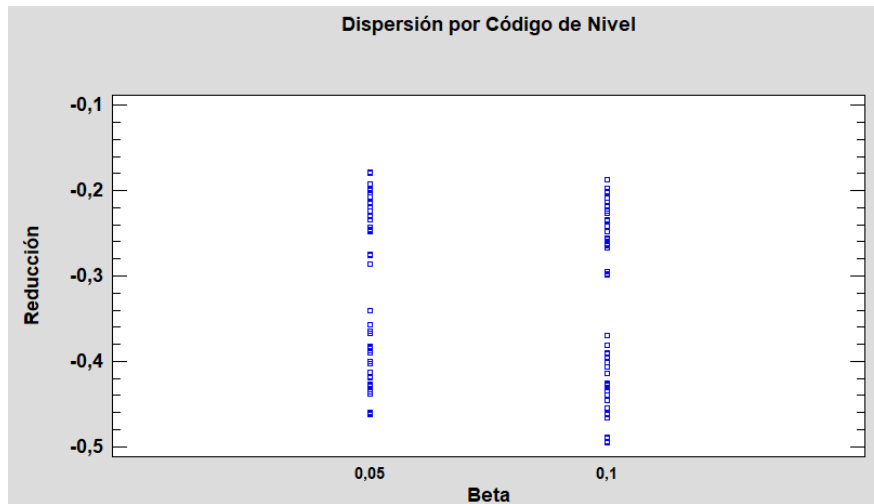
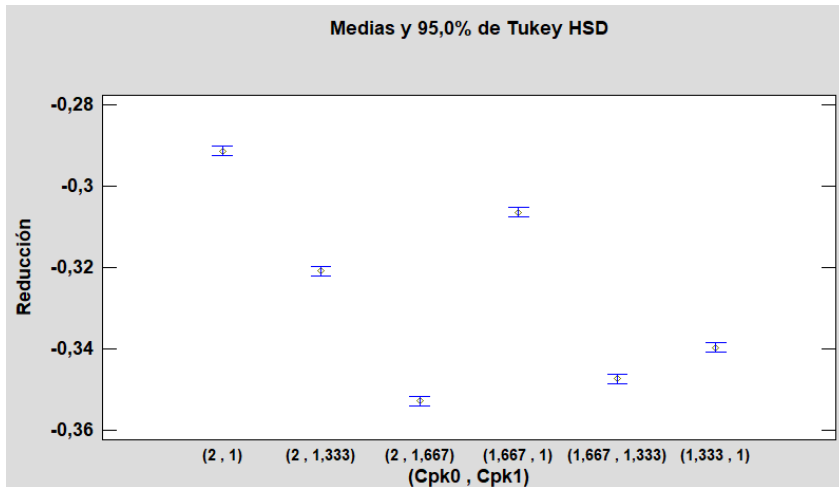


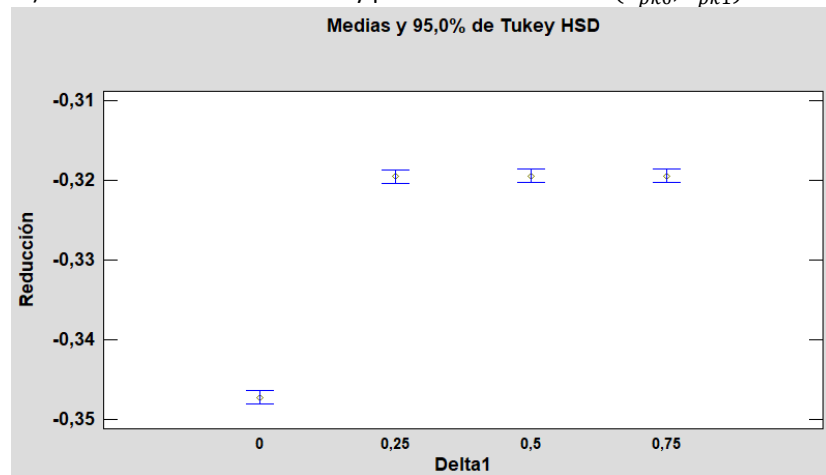
Figura 4-6 Gráficos de dispersión del factor β en ANOVA sobre la reducción del valor esperado de n

Al revisar la Figura 4-7 y Figura 4-8 los gráficos de medias de Tukey para los intervalos HSD de cada factor es posible hacer los siguientes comentarios:

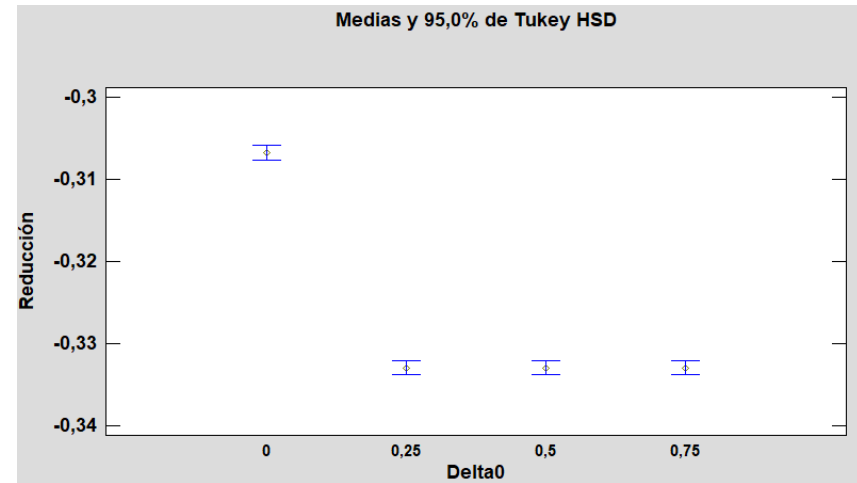
- Las combinaciones (C_{pk0}, C_{pk1}) que tienen las principales reducciones del valor esperado de n entre los planes de 1 y dos etapas son los cuales tienen una diferencia entre C_{pk0} y C_{pk1} de $1/3$, lo que hace notar que el disponer de un plan a dos etapas es conveniente para los casos de detección más exigentes.
- El valor esperado de la reducción para $\delta_0 = 0$ no es tan grande como para el resto de los niveles de este factor, que son prácticamente iguales
- El valor esperado de la reducción para $\delta_1 = 0$ es mayor que el del resto de los niveles de este factor, que son prácticamente iguales
- De la misma forma que se puede ver en la tabla ANOVA, el factor α tiene una importancia gravitante en la reducción del valor esperado de n . Se puede apreciar que para $\alpha=0.05$ la reducción ronda el 23% mientras que para $\alpha=0.0027$ esta reducción es de casi el 43%. Se puede desprender que este método es beneficioso para un valor de α muy estricto.
- Se observa que para un valor de $\beta=0.1$ la reducción es superior que cuando este factor está en el nivel $\beta=0.05$. Si bien la diferencia no es tan alta, sí da a entender que en una condición de β más restrictiva la habilidad del método para reducir el valor esperado de n en dos etapas es menor que si esta restricción fuese más laxa.



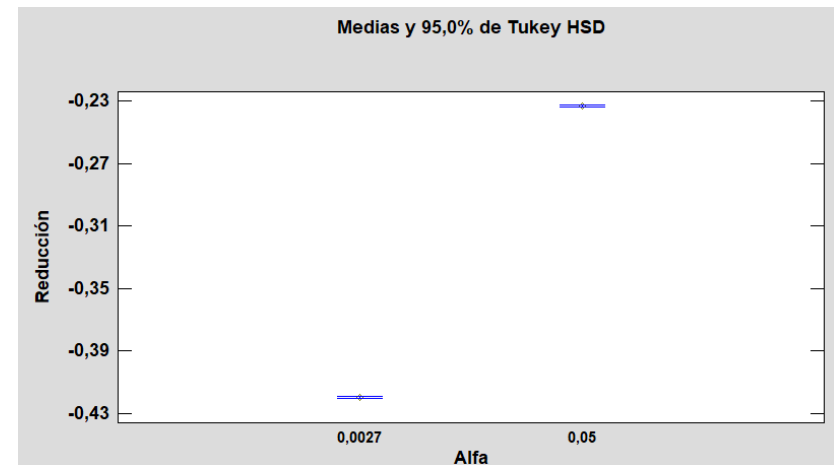
a) Gráfico de medias de Tukey para niveles de factor (C_{pk0}, C_{pk1})



c) Gráfico de medias de Tukey para niveles de factor δ_1



b) Gráfico de medias de Tukey para niveles de factor δ_0



d) Gráfico de medias de Tukey para niveles de factor α

Figura 4-7 Gráficos de medias de Tukey HSD para los factores (C_{pk0}, C_{pk1}), δ_0 , δ_1 , α y sus niveles en ANOVA con variable dependiente diferencia porcentual de $E(n)$ entre los planes de 1 y 2 etapas

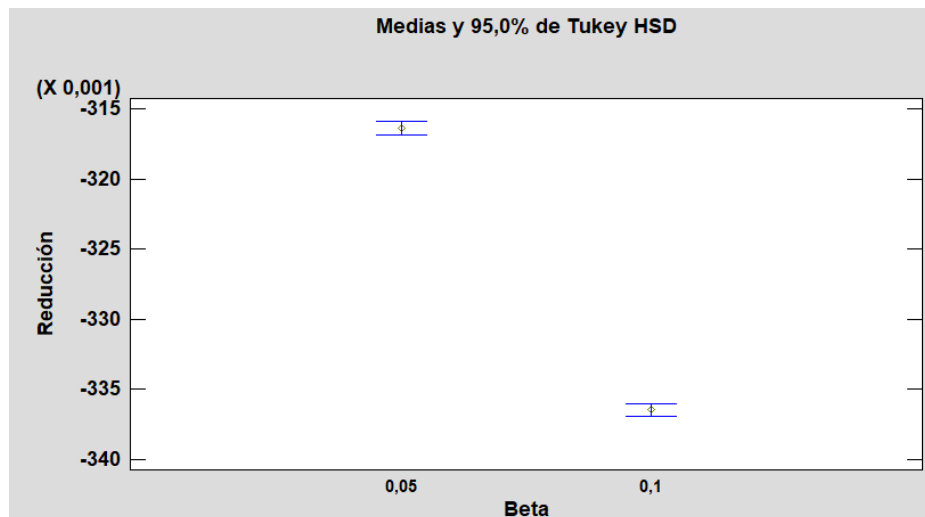


Figura 4-8 Gráfico de medias de Tukey HSD para el factor β y sus niveles en ANOVA con variable dependiente diferencia porcentual de $E(n)$ entre los planes de 1 y 2 etapas

Si bien en todos los casos vistos existe una reducción en el valor esperado de n , a partir de los resultados obtenidos se pueden advertir algunas ideas sobre en qué tipo de casos conviene más la utilización de un plan de muestreo de aceptación en dos etapas:

- Cuando los valores de C_{pk0} y C_{pk1} son cercanos
- Cuando el valor permitido del error de tipo I es pequeño. Por ejemplo, 0.0027
- Cuando el valor permitido del error de tipo II no es tan pequeño. Por ejemplo, 0.1

5 Ejemplo numérico

Para validar que los planes óptimos cumplan realmente con las condiciones requeridas por diseño, se han hecho simulaciones para cada etapa.

Con el objeto de ilustrar el funcionamiento del plan, se ha trabajado con el par ($C_{pk0} = 2$; $C_{pk1} = 1$), $\delta_0=0$, $\delta_1=0$, $\alpha= 0.0027$ y $\beta=0.05$.

En cada caso se han realizado 1000000 simulaciones para obtener el valor esperado de n , α y β . En estas simulaciones se ha utilizado el siguiente procedimiento para calcular la capacidad de una muestra aleatoria

1. Tomar una muestra Y de tamaño n con distribución Normal(δ, γ)
2. Calcular la media muestral \bar{Y}
3. Calcular la desviación típica muestral S_y

$$S_y = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2}{n}} \quad (5.1)$$

4. Calcular C_{pk} muestral

$$\hat{C}_{pk} = \frac{1 - |\bar{Y}|}{3S_y} \quad (5.2)$$

El razonamiento para llegar a esta última ecuación se detalla en el Anexo D.

Posteriormente se aplica el procedimiento asociado a cada plan (de una y dos etapas) descritos en el punto 3.1 y se repite su ejecución un millón de veces para obtener el promedio de los valores de n , α y β .

5.1 Ejemplo numérico de plan de muestreo de una etapa

Se ha replicado la ejecución de un plan de muestreo por lotes a una etapa que tiene las siguientes características:

- Tamaño de muestra (n_1) = 20
- Límite de decisión (LD) = 1.3518

Sobre este plan se ha corrido un proceso con ($C_{pk0} = 2, \delta_0 = 0$) y otro ($C_{pk1} = 1, \delta_1 = 0$) obteniendo los siguientes resultados

- $E(n)=20$
- $\alpha= 0.0027$
- $\beta = 0.0434$

Como se puede ver en la ejecución del ejemplo, los valores de los errores de Tipo I y II respetan las restricciones del modelo de optimización.

En Figura 5-1 se puede ver una gráfica de la simulación de las 100 primeras repeticiones del plan de muestreo con ($C_{pk0} = 2, \delta = 0$), donde la línea roja representa el límite de decisión. Se observa que un lote ha sido rechazado dentro de las primeras 100 repeticiones de la simulación mientras que el resto ha sido aceptado.

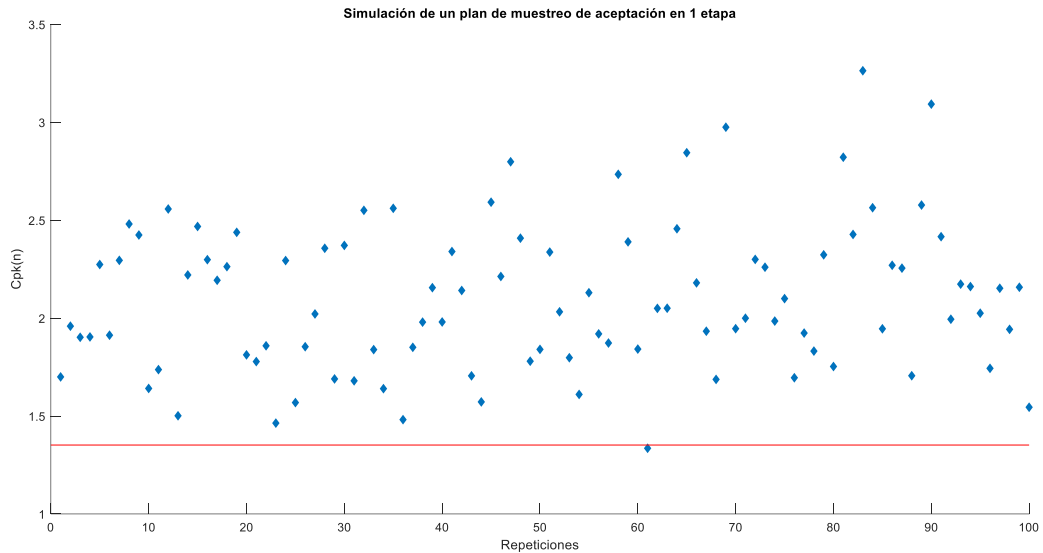


Figura 5-1 Representación gráfica de la simulación de plan de muestreo de aceptación en 1 etapa para $C_{pk0} = 2$, $\delta = 0$

Por otro lado, en la Figura 5-2 se puede apreciar que para un proceso con ($C_{pk1} = 1, \delta_1 = 0$) el plan de muestreo rechaza gran parte de los lotes, quedando 2 por sobre el límite de decisión.

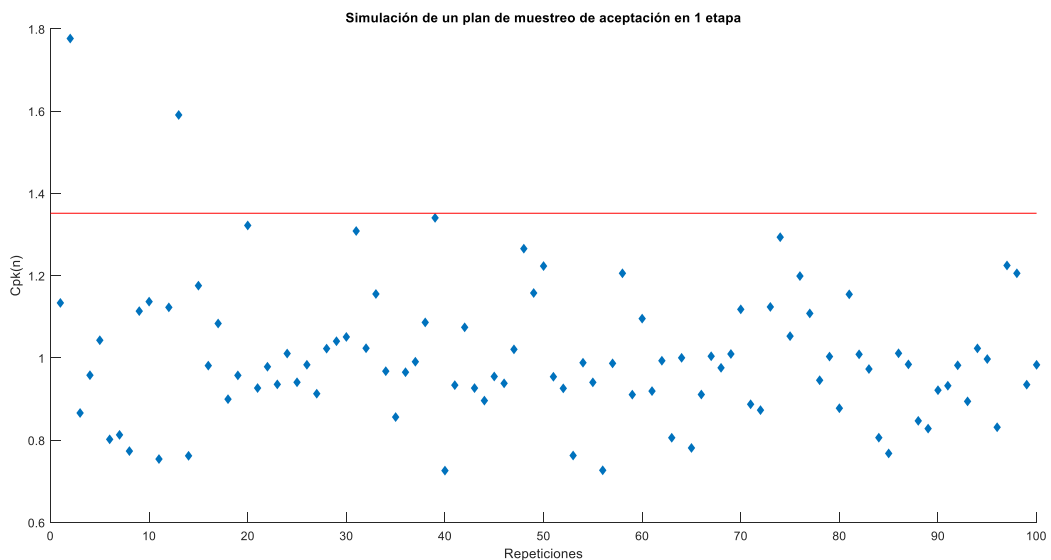


Figura 5-2 Representación gráfica de la simulación de plan de muestreo de aceptación en 1 etapa para $C_{pk1} = 1$, $\delta_1 = 0$

5.2 Ejemplo numérico de plan de muestreo de dos etapas

Se ha replicado la ejecución de un plan de muestreo por lotes a una etapa que tiene las siguientes características:

- Tamaño de muestra en etapa 1 (n_1) = 10
- Tamaño de muestra en etapa 2 (n_2) = 19
- Límite de rechazo en etapa 1 (LR_1) = 1.1212
- Límite de aceptación en etapa 1 (LA_1) = 1.6426
- Límite de decisión (LD) = 1.4470

Sobre este plan se ha corrido un proceso con ($C_{pk0} = 2, \delta_0 = 0$) y otro ($C_{pk1} = 1, \delta_1 = 0$) obteniendo los siguientes resultados:

- $E(n) = 12.6617$
- $\alpha = 0.0027$
- $\beta = 0.0500$

Donde el valor esperado de n calculado por el procedimiento de optimización es de 12.6521. Se puede ver además que los valores del error de tipo I y tipo II respetan las restricciones del modelo.

En la Figura 5-3 se puede ver el plan de muestreo en 2 etapas para un proceso con ($C_{pk0} = 2, \delta_0 = 0$), donde el primer sub gráfico corresponde a la etapa 1, con el límite de aceptación de color magenta y el de rechazo de color amarillo. Es posible notar que el lote número 56 ha sido rechazado, y que los lotes 15, 18, 49, 60, 66, 82, 83, 87, 89 y 91 han sido sometidos a una segunda muestra que corresponde al sub gráfico inferior, de los cuales el número 83 ha sido rechazado.

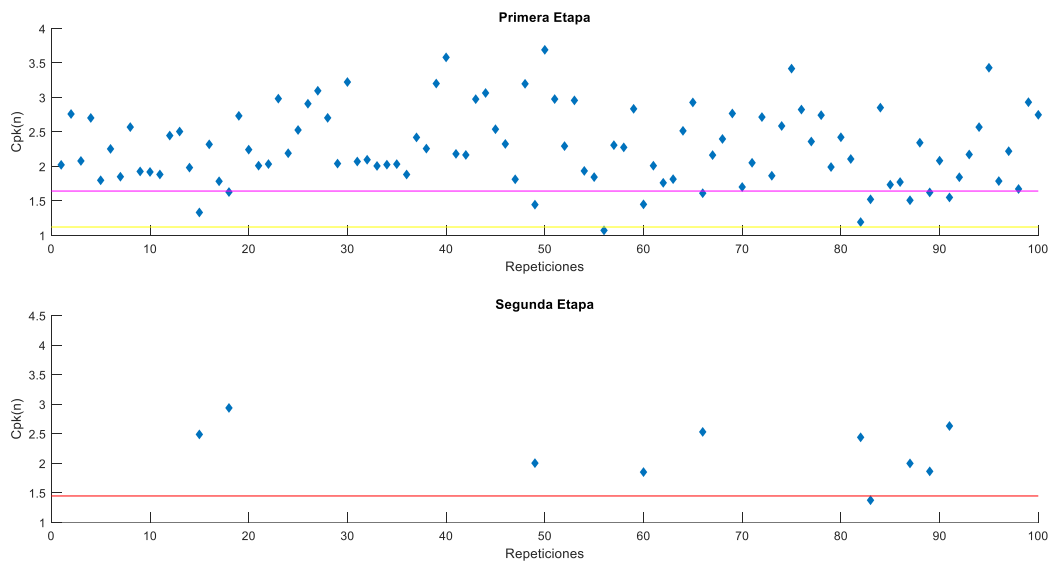


Figura 5-3 Representación gráfica de la simulación de plan de muestreo de aceptación en 2 etapas para $C_{pk0} = 2, \delta_0 = 0$

En la Figura 5-4 se observa que de los 100 primeros lotes correspondientes a un proceso con ($C_{pk1} = 1, \delta = 0$), 3 han sido aceptados en primera etapa, mientras que 19 han sido sometidos a una segunda muestra, de los cuales todos han sido rechazados.

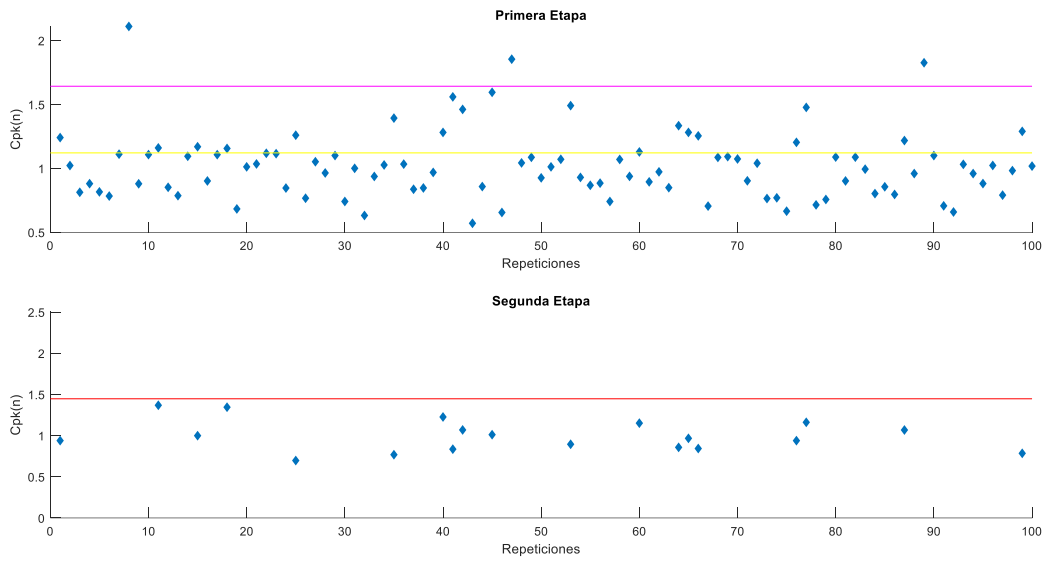


Figura 5-4 Representación gráfica de la simulación de plan de muestreo de aceptación en 2 etapas para $C_{pk1} = 1$, $\delta_1 = 0$

6 Conclusiones y líneas futuras de investigación

En este trabajo se ha estudiado la forma en cómo generar planes óptimos de muestreo de aceptación para monitorizar la capacidad de un proceso, en concreto a través del índice C_{pk} , utilizando las ecuaciones de Vännman para trabajar con la función de distribución acumulada de este índice y poder así determinar las características de cada plan de acuerdo con las condiciones medidas en el diseño experimental presentado en el capítulo 4.

A partir de los resultados es posible determinar que se recomienda la utilización del plan de muestreo de aceptación en dos etapas para la monitorización de la capacidad de un proceso, debido a que tiene una notoria reducción del valor esperado del tamaño muestral bajo todas las condiciones (C_{pk0}, C_{pk1}) evaluadas, mostrando en promedio un valor esperado de n 36% menor respecto al tamaño muestral promedio para 1 etapa.

Dentro de los factores estudiados, el valor de α resulta ser muy importante en la diferencia entre un plan a 1 etapa respecto al plan óptimo en dos etapas, lo cual beneficia su futura aplicación en condiciones industriales donde, entre los niveles estudiados de dicho factor, se prefiere utilizar el valor más exigente de 0.0027. Se ha encontrado que la reducción promedio de un plan de dos etapas respecto al plan en una etapa para un valor de α igual a 0.05 ronda el 23%, mientras que para α igual a 0.0027 es cercano al 43%.

Las pruebas preliminares del plan de muestreo en tres etapas sugieren que a medida que aumentan las etapas la mejora, vista como la reducción en el tamaño muestral esperado, es cada vez más residual, lo que se suma a la generación de un plan cada vez más engorroso para ser llevado a cabo por los operarios.

Además, se ha mostrado mediante un ejemplo numérico concreto la forma en como un usuario final podría llevar a cabo los planes óptimos en una y dos etapas devueltos por los procedimientos desarrollados, y qué tipo de resultados se obtendrían al aplicar dichos planes sobre lotes correctos e incorrectos desde el punto de vista de su capacidad.

En este trabajo no se ha abordado la determinación de una expresión para la probabilidad condicional de la función de distribución de probabilidad del índice de capacidad muestral, por lo que una línea futura de investigación es encontrar esta expresión, ya que podría ayudar a tener un procedimiento donde el valor esperado de n sea menor.

En la misma senda de temas de investigación futura, es interesante evaluar si es posible disponer de una expresión genérica para optimizar teniendo C_{pk0} y C_{pk1} , independiente de los valores de δ_0 y δ_1 .

Junto con las anteriores sugerencias de investigación futura, se propone la mejora en tiempo de computación del algoritmo de optimización, mediante un estudio detallado de las funciones involucradas que permita obtener algoritmos ad-hoc más eficientes.

7 Bibliografía

- Belotti, P., Kirches, C., Leyffer, S., Linderoth, J., Luedtke, J., & Mahajan, A. (2013). Mixed-Integer Nonlinear Optimization. *Acta Numerica*, 22(1), 1–131.
- Cheng, T., Lau, M., & Duffuaa, S. (1997). A Concise Review of Lot-by-lot Acceptance Sampling by Attributes. En K. Al-Sultan , & M. Rahim, *Optimization in Quality Control*. Boston, MA: Kluwer Academic.
- Chou, C., & Chen, C. (2006). Economic design of variable sampling intervals T2 control charts using genetic algorithms. *Expert Systems with Applications*, 30(2), 233–242.
- Deleryd, M., & Vännman, K. (1999). Process Capability tool - A Quality improvement tool. *Quality and Reliability Engineering International*, 15, 213-227.
- Ferrer-Riquelme, A. (2009). Statistical Control of Measures and Processes. En S. Brown, R. Tauler Ferré, & B. Walczak, *Comprehensive Chemometrics. Chemical and Biochemical Data Analysis*. (págs. 97-126). Amsterdam: Elsevier.
- García-Díaz, J., & Aparisi, F. (2005). Economic design of EWMA control charts using regions of maximum and minimum ARL. *IIE Transactions*, 37(11), 1011–1021.
- Giner Bosch, V. (2014). *Precontrol óptimo. Caracterización, análisis y técnicas de resolución. Tesis doctoral. Departamento de Estadística e Investigación Operativa Aplicadas y Calidad, Universitat Politècnica de València*. València.
- Hsiang, T., & Taguchi, G. (1985). A tutorial on quality control and assurance-The Taguchi method. *ASA Annual Meeting, Las Vegas*.
- Ishikawa, K. (1985). *What is Total Quality Control? The Japanese Way*. Englewoods Cliffs, NJ: Prentice Hall.
- Juran, J. (1974). *Juran's Quality Control Handbook, 3rd ed*. New York, N.Y: McGraw-Hill.
- Kane, V. (1986). Process Capability Indices. *Journal of Quality Technology*, 18, 41-52.
- Köppe, M. (2011). On the complexity of nonlinear mixed-integer optimization. En J. Lee, & S. Leyffer, *Mixed-Integer Nonlinear Programming* (págs. 533-558). Berlin: IMA Volumes in Mathematics and its Applications, Springer.
- Kotz, S., & Johnson, N. (2002). Process Capability Indices, A review, 1992-2000. *Journal of Quality Technology*, 34(1), 2-19.
- Lee, J., & Leyffer, S. (2012). *Mixed Integer Nonlinear Programming*. New York, NY : Springer New York : Imprint: Springer.
- Leyffer, S. (1993). *Deterministic Methods for Mixed Integer Nonlinear Programming. PhD Thesis*. Dundee: University of Dundee, Department of Mathematics & Computer Science.
- Montgomery, D. (2009). *Introduction to Statistical Quality Control. 6° ed*. Hoboken, NJ.: John Wiley & Sons.

- Pearn, W., Kotz, S., & Johnson, N. (1992). Distributional and inferential properties of process capability indices. *Journal of Quality Technology*, 24(4), 216-233.
- Potra, F., & Wright, S. J. (2000). Interior-point methods. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 124(1-2), 281-302. doi:[https://doi.org/10.1016/S0377-0427\(00\)00433-7](https://doi.org/10.1016/S0377-0427(00)00433-7)
- Ramamurthy, P. (2000). *Operations Research*. New Age International Ltd.
- Tagaras, G. (1997). Economic Decision of Time-Varying and Adaptative Control charts. En K. Al-Sultan, & M. Rahim, *Optimization in Quality Control*. London: Kluwer Academic Publishers.
- Taha, H. (1975). *Integer programming: theory, applications and computations*. New York: Academic Press, Inc.
- The Mathworks, Inc. (2021). *Matlab version 9.10.0.1710957 (R2021a) Update 4*. Natick, MA.
- Ugray, Z., Lasdon, L., Plummer, J., Glover, F., Kelly, J., & Martí, R. (2007). Scatter Search and Local NLP Solvers: A Multistart Framework for Global Optimization. *INFORMS Journal on Computing*, 19, 328-340.
- Uribe Macías, M. (2011). *Los sistemas de gestión de la calidad: el enfoque teórico y la aplicación empresarial*. Ibagüé: Sello editorial Universidad del Tolima.
- Vännman, K. (1995). A unified approach to Capability indices. *Statistica Sinica*, 5, 805-820.
- Vännman, K. (1997a). Distribution and moments in simplified form for a general class of Capability indices. *Commun. Statist.- Theory Meth.*, 26(1), 159-179.
- Vännman, K. (1997b). Interpreting process capability using graphical methods. Research Report 1997:7. *Division of Quality Technology and Statistics*. Lulea University of Technology.
- Vommi, V., & Seetala, M. (2007). A new approach to robust economic design of control charts. *Applied Soft Computing*, 7(1), 211–228.
- Wang, Y., & Shoemaker, C. (2014). *A General Stochastic Algorithmic Framework for Minimizing Expensive Black Box Objective Functions Based on Surrogate Models and Sensitivity Analysis*. arXiv:1410.6271v1.

ANEXOS

A. Funciones Matlab

Las funciones Matlab utilizadas están disponibles en el enlace <https://bit.ly/397MuUQ>

B. Ficheros Excel con planes óptimos

Los siguientes ficheros Excel están disponibles para consulta:

- Planes óptimos: <https://bit.ly/2XdelRy>
- Resumen para ANOVA sobre valor esperado de n: <https://bit.ly/2WVgyQS>
- Resumen para ANOVA sobre la reducción del valor esperado de n al pasar de un plan de 1 etapa a uno de 2 etapas: <https://bit.ly/2YBbKkj>

C. Ficheros Statgraphics con ANOVA

Los siguientes ficheros Statgraphics están disponibles para consulta

- ANOVA sobre el valor esperado de n: <https://bit.ly/3DULXno>
- ANOVA sobre la reducción del valor esperado de n al pasar de un plan de 1 etapa a uno de 2 etapas: <https://bit.ly/3BP5rle>

D. Ecuación para hacer simulación de planes de muestreo

Sea X una variable aleatoria con distribución Normal, de media μ_0 y desviación típica σ_0

$$X \sim N(\mu_0, \sigma_0) \quad (D.1)$$

Si se trabaja sobre un proceso que tiene unos límites de especificación con semi anchura d y valor objetivo T, se puede utilizar una variable aleatoria Y, relacionada con X de la siguiente forma,

$$Y = \frac{X - T}{d} \sim N\left(\frac{\mu_0 - T}{d}, \frac{\sigma_0}{d}\right) = N(\delta_0, \gamma_0) \quad (D.2)$$

Sabiendo que el Cálculo de C_{pk} muestral en términos de X tiene la siguiente expresión,

$$\hat{C}_{pk} = \frac{d - |\bar{X} - T|}{3S_x} \quad (D.3)$$

La idea es escribir una expresión para C_{pk} muestral en términos de Y

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \quad (D.4)$$

Por lo que se puede entender que,

$$\frac{\bar{X} - T}{d} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - T)/d}{n} = \bar{Y} \quad (D.5)$$

Por otro lado, al buscar una expresión que relacione S_x con S_y tenemos,

$$S_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{X})^2}{n}} \quad (D.6)$$

Elevando al cuadrado la ecuación (D.6) y dividiendo por el cuadrado de la semi anchura d tenemos el siguiente desarrollo

$$\begin{aligned} \frac{S_x^2}{d^2} &= \frac{1}{n} \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{X})^2}{d^2}} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{(x_i - \bar{X})}{d} \right)^2 \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{(x_i - T)}{d} - \frac{(\bar{X} - T)}{d} \right)^2 \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{Y})^2 \end{aligned} \quad (D.7)$$

De esta forma se puede llegar a una ecuación que relaciona S_x y S_y

$$\frac{S_x}{d} = S_y \quad (D.8)$$

Combinando las ecuaciones D.3, D.5 y D.8 se llega a una ecuación para estimar la C_{pk} muestral en términos de la variable aleatoria Y

$$\hat{C}_{pk} = \frac{1 - |\bar{Y}|}{3S_y} \quad (D.9)$$

E. Gráficos de Interacciones para ANOVA sobre el valor esperado de n

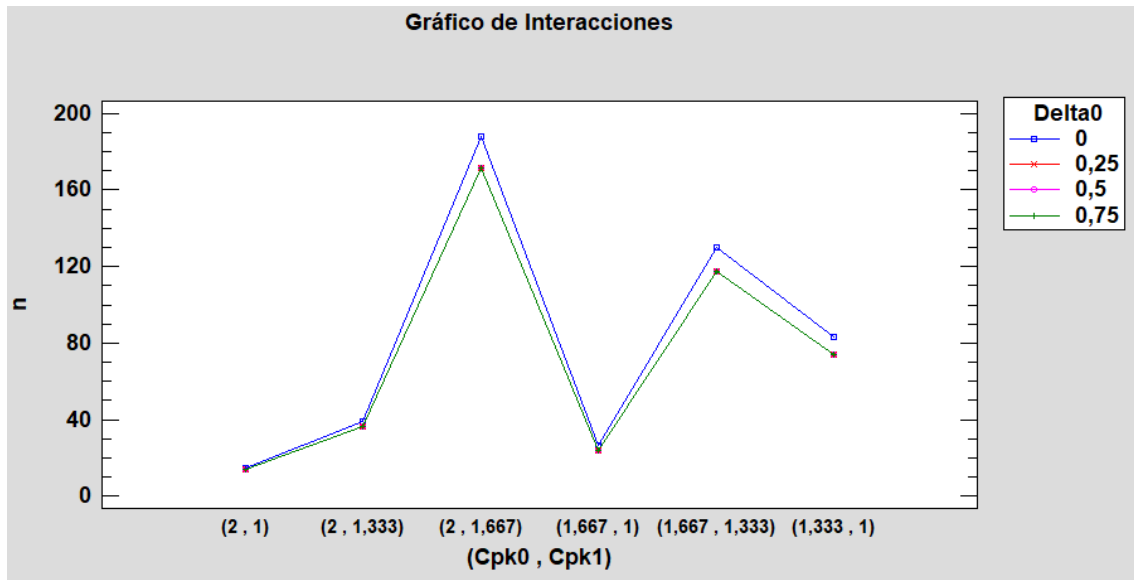


Figura 7-1 Gráfico de interacciones entre los factores (C_{pk0}, C_{pk1}) y δ_0 sobre el valor esperado de n

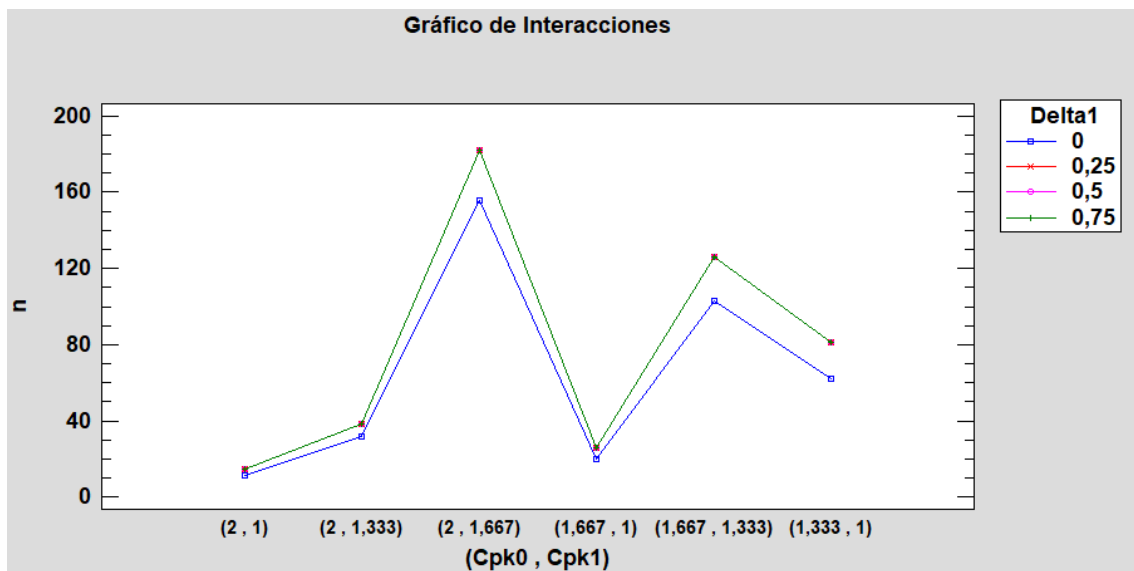


Figura 7-2 Gráfico de interacciones entre los factores (C_{pk0}, C_{pk1}) y δ_1 sobre el valor esperado de n

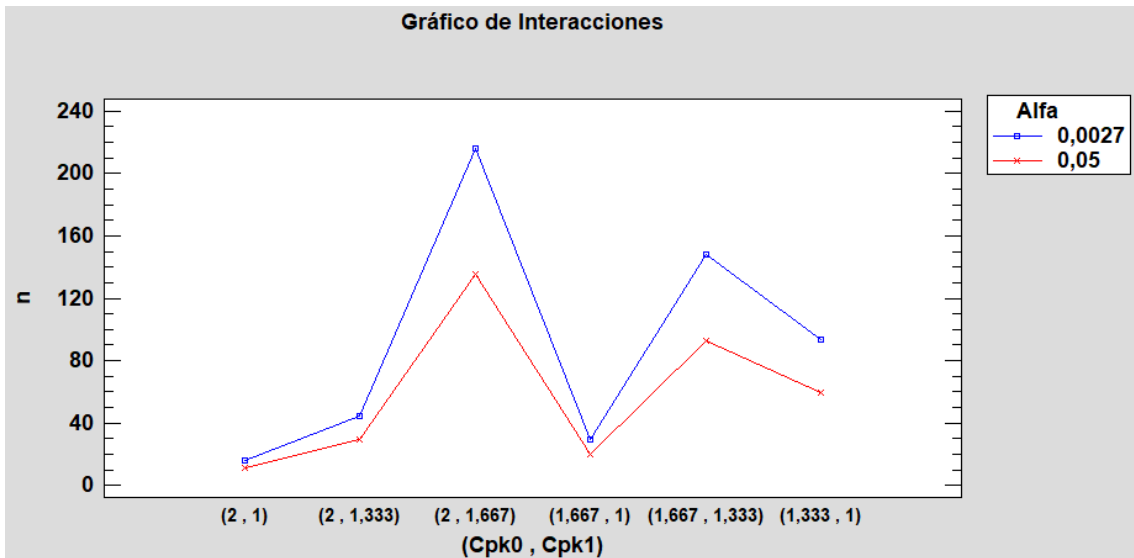


Figura 7-3 Gráfico de interacciones entre los factores (C_{pk0}, C_{pk1}) y α sobre el valor esperado de n

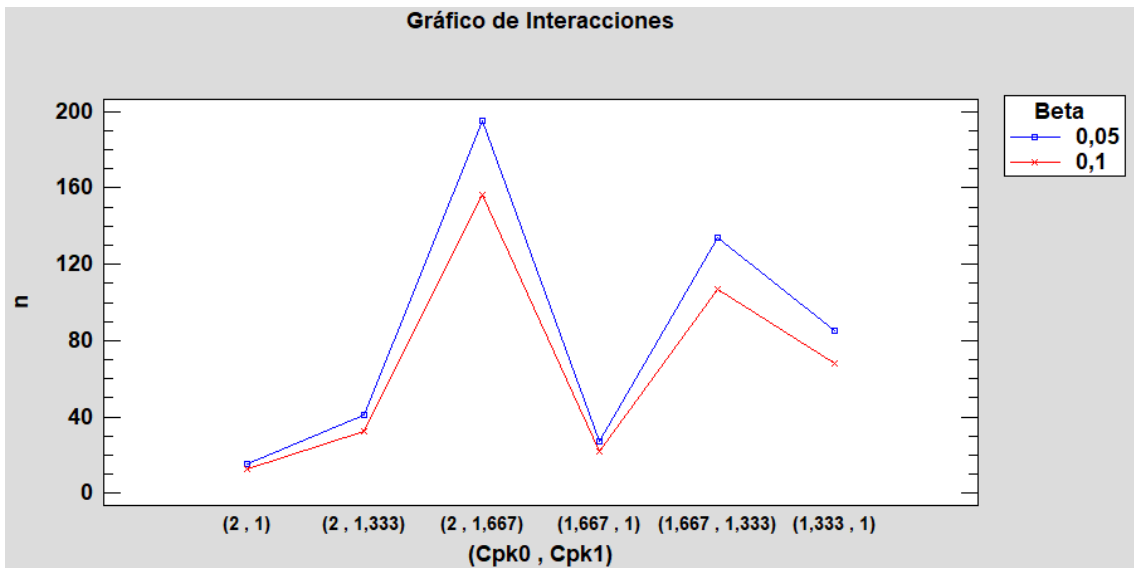


Figura 7-4 Gráfico de interacciones entre los factores (C_{pk0}, C_{pk1}) y β sobre el valor esperado de n

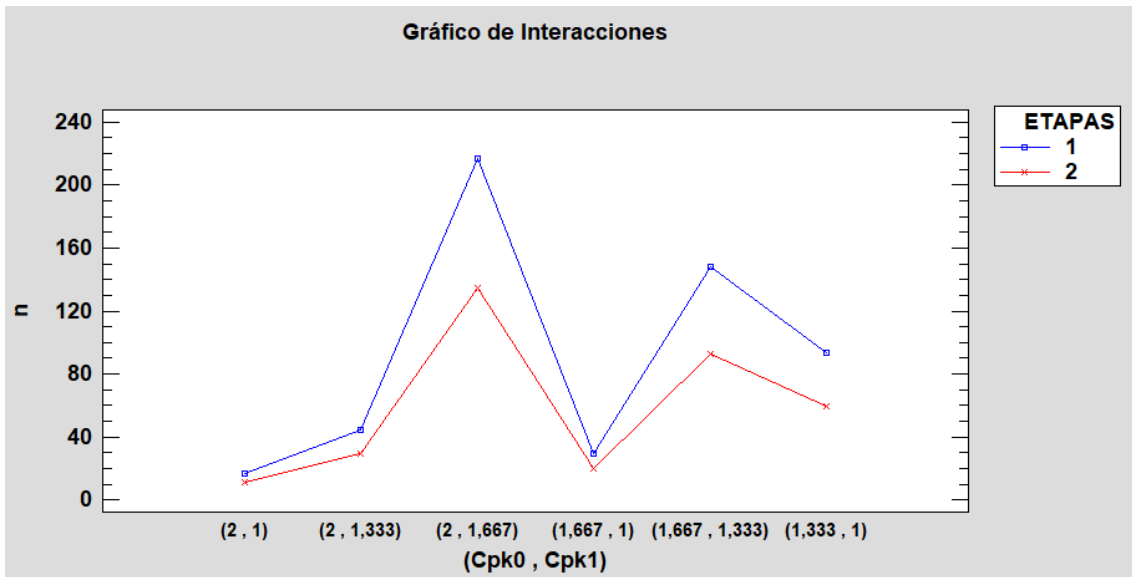


Figura 7-5 Gráfico de interacciones entre los factores (C_{pk0} , C_{pk1}) y Etapas sobre el valor esperado de n

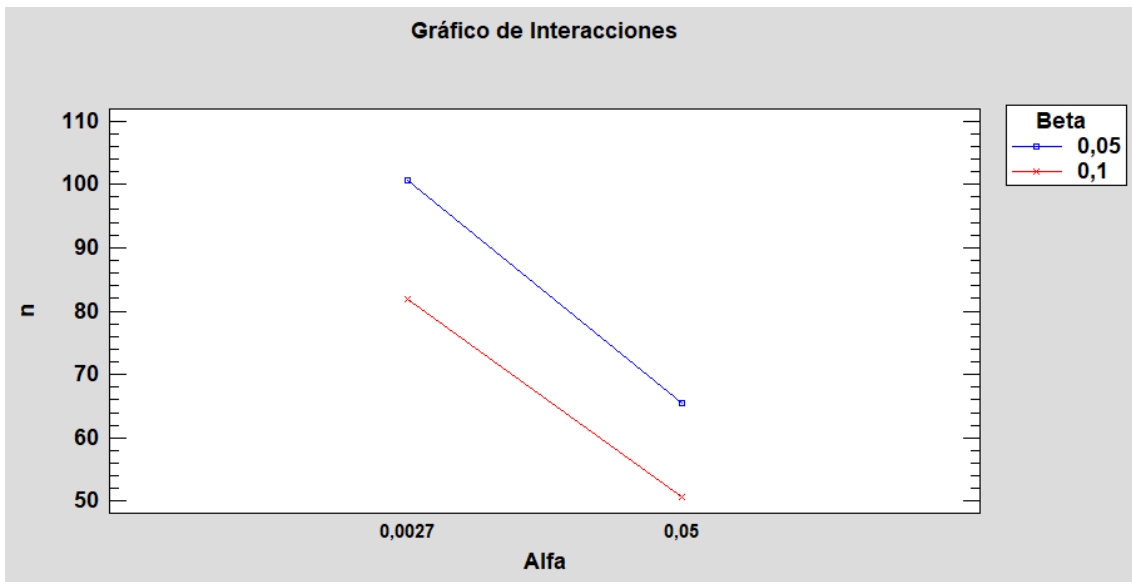


Figura 7-6 Gráfico de interacciones entre los factores α y β sobre el valor esperado de n

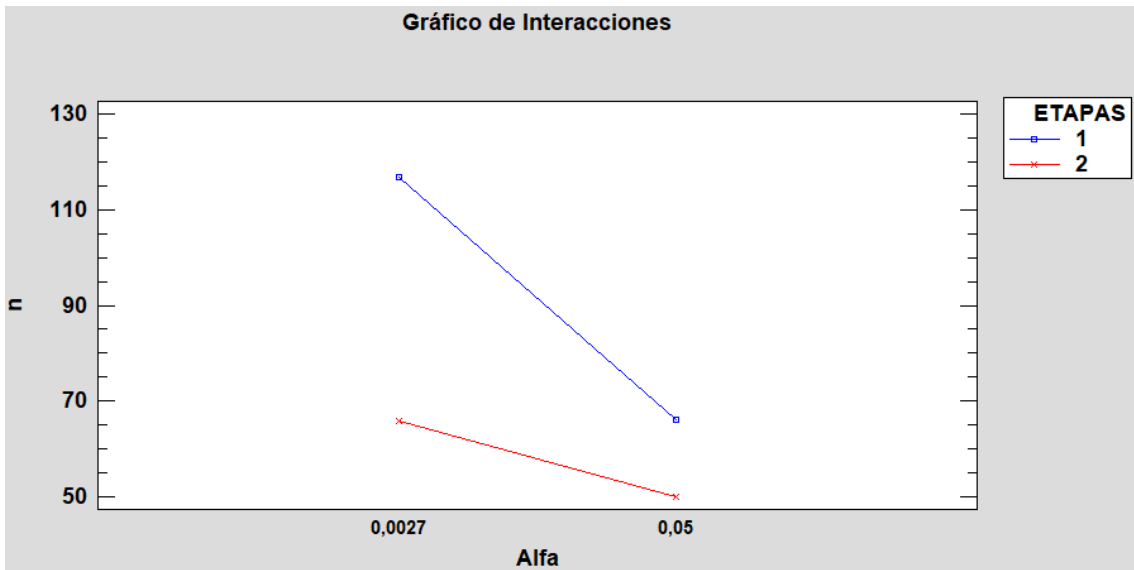


Figura 7-7 Gráfico de interacciones entre los factores α y Etapas sobre el valor esperado de n

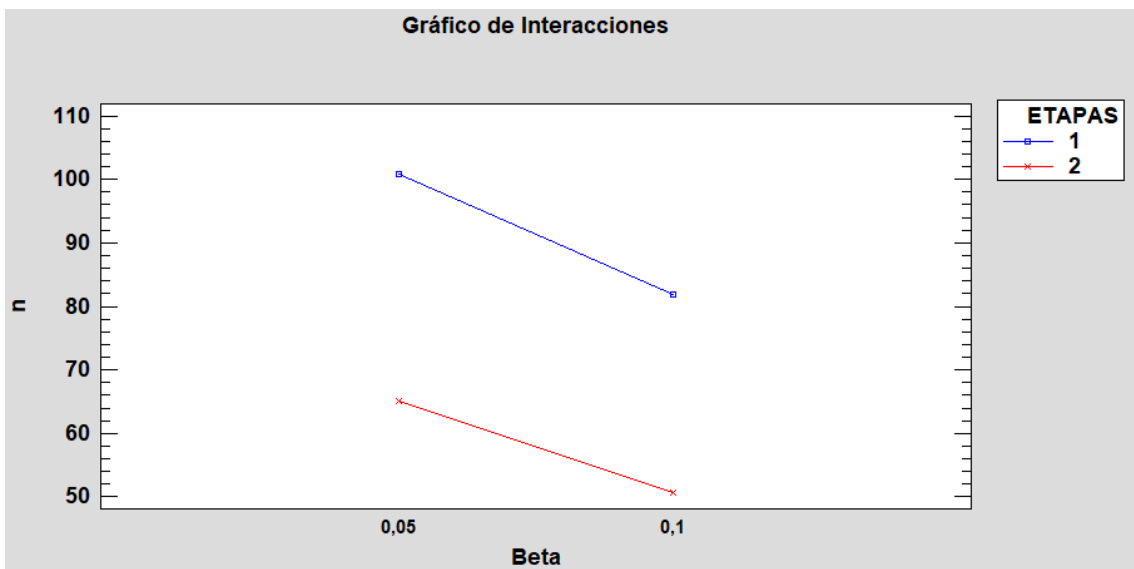


Figura 7-8 Gráfico de interacciones entre los factores β y Etapas sobre el valor esperado de n

F. Gráficos de Interacciones para ANOVA sobre la reducción del valor esperado de n

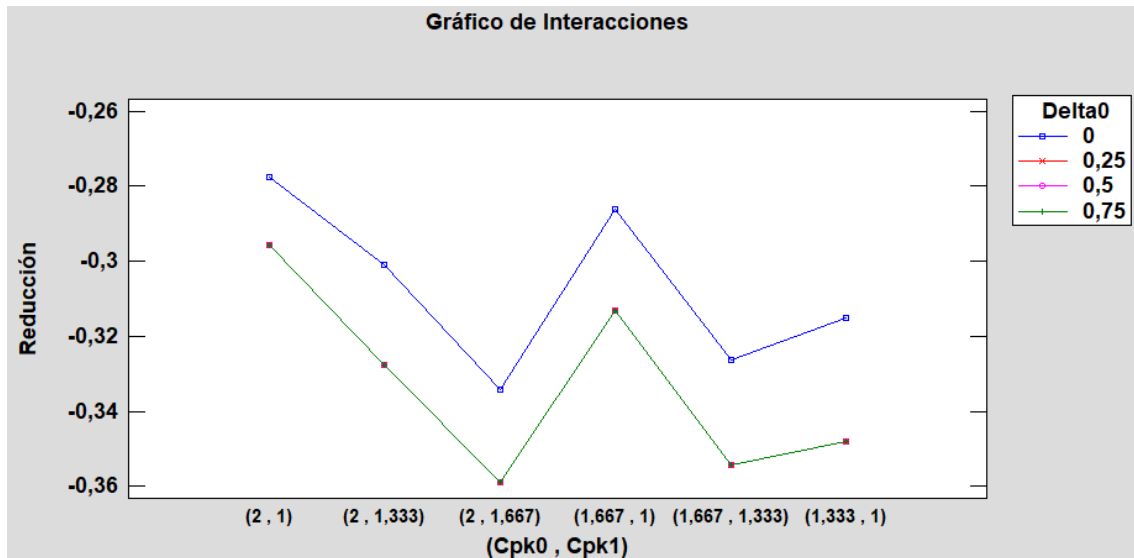


Figura 7-9 Gráfico de interacciones entre los factores (C_{pk0}, C_{pk1}) y δ_0 sobre la reducción del valor esperado de n

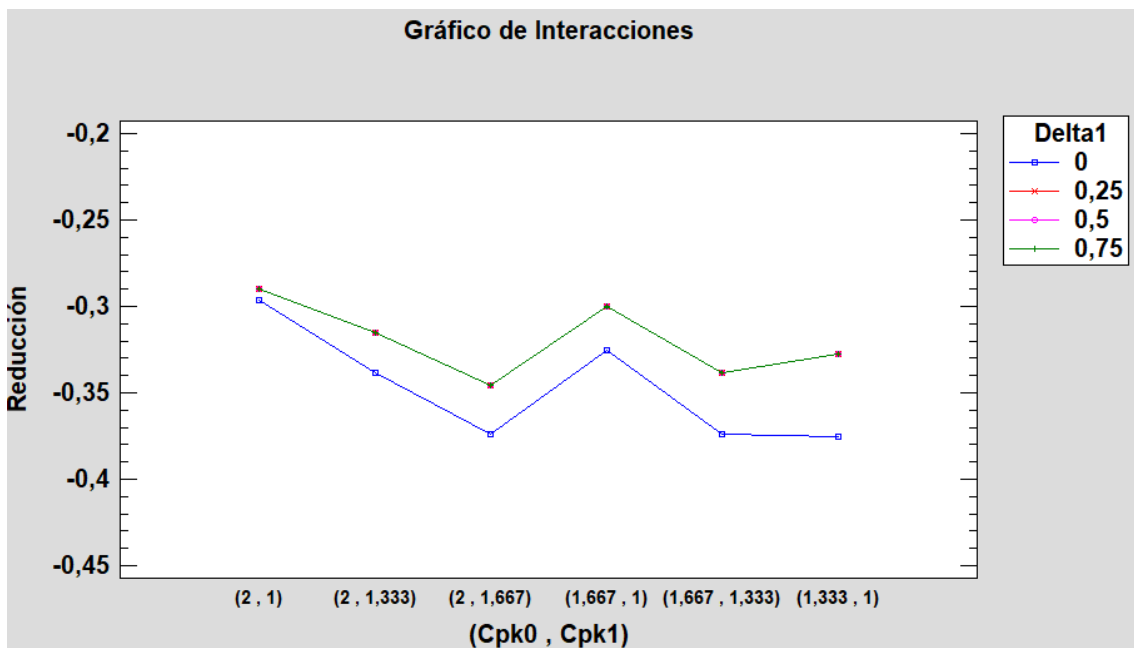


Figura 7-10 Gráfico de interacciones entre los factores (C_{pk0}, C_{pk1}) y δ_1 sobre la reducción del valor esperado de n

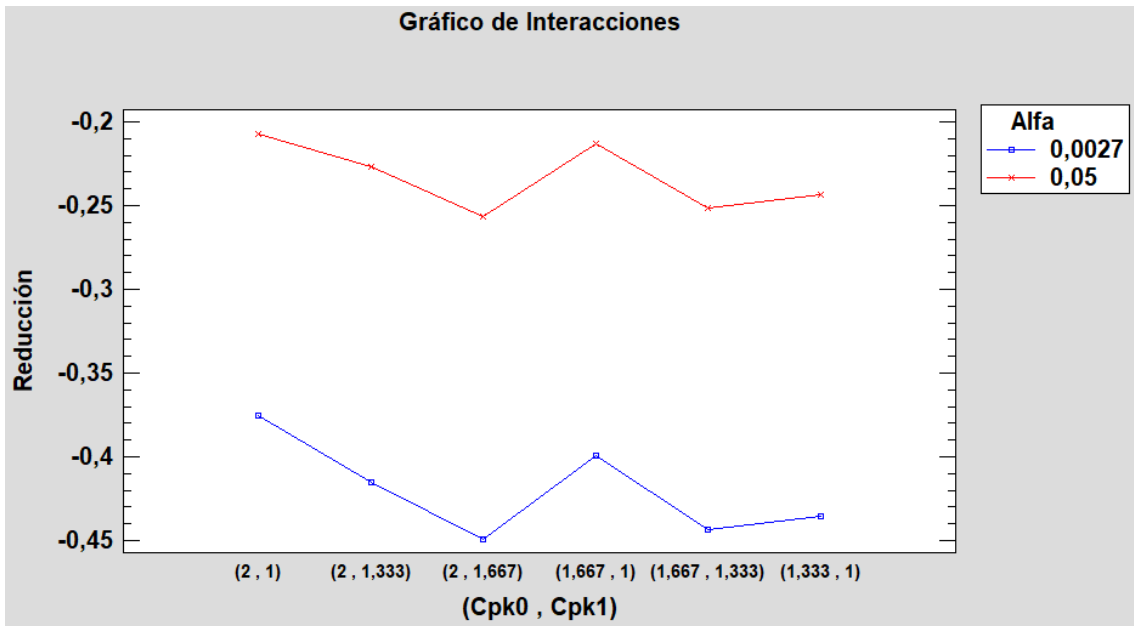


Figura 7-11 Gráfico de interacciones entre los factores (C_{pk0}, C_{pk1}) y α sobre la reducción del valor esperado de n

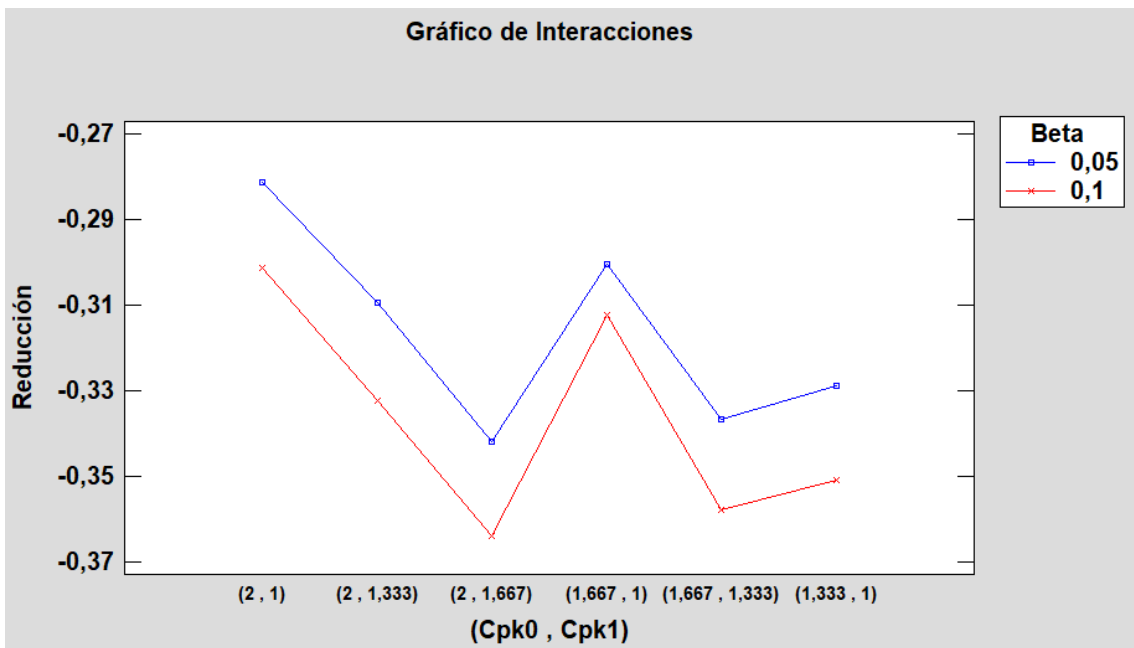


Figura 7-12 Gráfico de interacciones entre los factores (C_{pk0}, C_{pk1}) y β sobre la reducción del valor esperado de n

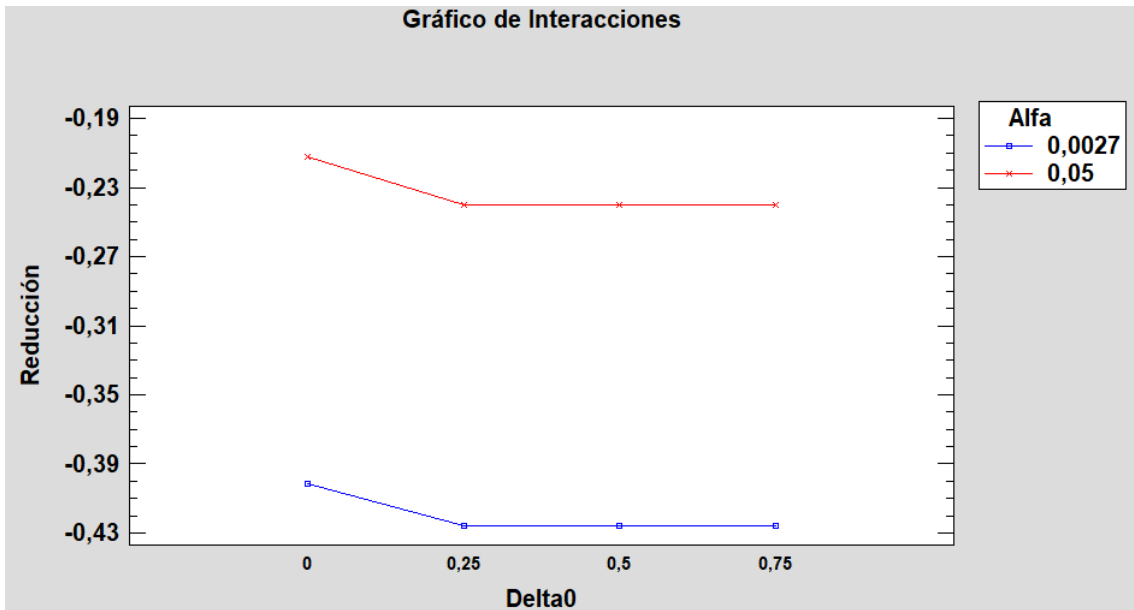


Figura 7-13 Gráfico de interacciones entre los factores δ_0 y α sobre la reducción del valor esperado de n

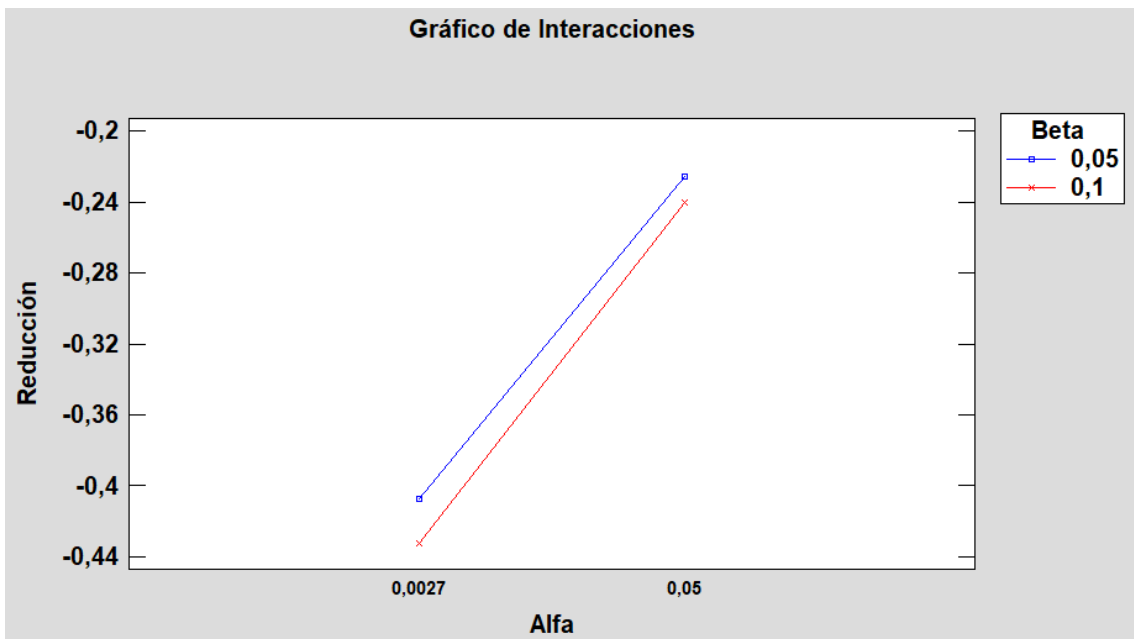


Figura 7-14 Gráfico de interacciones entre los factores α y β sobre la reducción del valor esperado de n