



UNIVERSITAT
POLITÈCNICA
DE VALÈNCIA



Escuela Técnica Superior de Ingeniería del Diseño

— Trabajo de Fin de Máster —
MÁSTER EN INGENIERÍA AERONÁUTICA

**ESTUDIO DE LA ESTABILIDAD EN FLUJOS
TERMOCONVECTIVOS: PROBLEMA DE CONVECCIÓN DE
BÉNARD-MARANGONI**



UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA

ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIERÍA DEL DISEÑO

AUTORA:

LUCAS GUTIÉRREZ, SILVIA

TUTOR:

HOYAS CALVO, SERGIO

SEPTIEMBRE DE 2021

VALENCIA, ESPAÑA

Resumen

Este Trabajo de Fin de Máster estudia la estabilidad lineal de un problema termoconvectivo en un dominio anular frente a variaciones en el campo de temperaturas y gravitatorio (efectos termocapilares y de flotabilidad), y para tres conjuntos de números de Prandtl (difusividad térmica), para comprender los efectos provocados por los términos no lineales de las ecuaciones de gobierno.

El fluido es calentado por abajo inhomogéneamente con un gradiente horizontal que decrece linealmente desde la parte interna a la externa. La parte superior está abierta a la atmósfera, y para las paredes laterales se consideran dos escenarios bien diferenciados: aislante y conductivo. En el primero de estos, las paredes tienen condición adiabática, y en el segundo se les impondrá una temperatura constante.

El flujo se puede caracterizar por múltiples números adimensionales. Entre ellos, destacan los números de Rayleigh, indicativo de los efectos termoconvectivos, el de Marangoni, que determina los efectos termocapilares, y por último, su ratio, el número de Bond.

Aparecen diferentes tipos de soluciones que compiten en zonas localizadas del plano formado por el número de Bond y el gradiente de temperatura horizontal. Los límites de estas zonas están formados por puntos de codimensión dos, aunque también se ha observado la existencia de puntos de codimensión 3. Entre los resultados, es destacable que a bajos números de Bond, condiciones de baja gravedad, las fuerzas de capilaridad controlan las inestabilidades del flujo, independientemente del número de Prandtl. Por otra parte, en el caso conductivo, con gradientes tan grandes se estabiliza mucho el fluido, y por tanto, sería necesario un gran aporte de energía para desestabilizarlo. Además, éste no potencia ondas móviles, solo hay presencia de ondas estacionarias.

El análisis de la dinámica del fluido se ha realizado a través de un conjunto de simulaciones DNS a muy bajo número de Reynolds. El código computacional de este trabajo ha sido implementado en Fortran90. También ha sido utilizados una serie de softwares como Microsoft Excel, MATLAB y ParaView, para recoger los datos obtenidos y facilitar el post-procesado de los mismos.

Abstract

This Final Project studies the linear stability of a thermo-convective problem in an annular domain against variations in the temperature and gravity field (thermocapillary and buoyancy effects, respectively), and for three sets of Prandtl numbers (thermal diffusivity), in order to understand the effects caused by the non-linear terms of the governing equations.

The fluid is inhomogeneously heated from below with a horizontal gradient decreasing linearly from the inner to the outer part. The upper part is open to the atmosphere, and for the side walls two distinct scenarios are considered: insulating and conductive. In the first case, the walls have an adiabatic condition, and in the latter, a constant temperature will be imposed on them.

The flow can be characterised by multiple dimensionless numbers. Among them, the Rayleigh numbers, indicative of the thermo-convective effects, the Marangoni number, which determines the thermocapillary effects, and finally its ratio the Bond number.

Different types of competing solutions appear in localised zones of the plane formed by the Bond number and the horizontal temperature gradient. The boundaries of these zones are formed by points of codimension two, although the existence of points of codimension 3 has also been observed. Among the results, it is noteworthy that at low Bond numbers, low gravity conditions, capillary forces control the flow instabilities, independently of the Prandtl number. On the other hand, in the conductive case, at such large gradients the fluid is highly stabilised, and therefore a large energy input would be necessary to destabilise it. In addition, it does not produce any moving waves, only standing waves are present.

The analysis of the fluid dynamics has been carried out through a set of DNS simulations at very low Reynolds numbers. The computational code of this work has been implemented in Fortran90. A series of software such as Microsoft Excel, MATLAB and Paraview have also been used to collect the data obtained and to facilitate the post-processing of the data.

Resum

Aquest Treball de Fi de Màster estudia l'estabilitat lineal d'un problema termo-convectiu en un domini anular enfront de variacions en el camp de temperatures i gravitatori (efectes termo-capil·lars i de flotabilitat), i per a tres conjunts de números de Prandtl (difusivitat tèrmica), per a comprendre els efectes provocats pels termes no lineals de les equacions de govern.

El fluid és calfat per baix inhomogèniament amb un gradient horitzontal que decreix linealment des de la part interna a l'externa. La part superior està oberta a l'atmosfera, i per a les parets laterals es consideren dos escenaris ben diferenciats: aïllant i conductiu. En el primer d'aquests, les parets tenen condició adiabàtica, i en el segon se'ls imposarà una temperatura constant.

El flux es pot caracteritzar per múltiples números adimensionals. Entre ells, destaquen els números de Rayleigh, indicatiu dels efectes termo-convectius, el de Marangoni, que determina els efectes termo-capil·lars, i finalment, la seua ràtio, el número de Bond.

Apareixen diferents tipus de solucions que competeixen en zones localitzades del pla format pel número de Bond i el gradient de temperatura horitzontal. Els límits d'aquestes zones estan formats per punts de codimensió dos, encara que també s'ha observat l'existència de punts de codimensió 3. Entre els resultats, és destacable que a baixos números de Bond, condicions de baixa gravetat, les forces de capil·laritat controlen les inestabilitats del flux, independentment del número de Prandtl. D'altra banda, en el cas conductiu, amb gradients tan grans s'estabilitza molt el fluid, i per tant, seria necessari una gran aportació d'energia per a desestabilitzar-lo. A més, aquest no potencia ones mòbils, només hi ha presència d'ones estacionàries.

L'anàlisi de la dinàmica del fluid s'ha realitzat a través d'un conjunt de simulacions DNS a molt baix número de Reynolds. El codi computacional d'aquest treball ha sigut implementat en Fortran90. També ha sigut utilitzats una sèrie de softwares com Microsoft Excel, MATLAB i Paraview, per a recollir les dades obtingudes i facilitar el postprocessament d'aquests.

Índice

Introducción	1
Objetivos	5
1 Estudios previos	7
1.1 Estudios teóricos	8
1.2 Estudios experimentales	8
2 Descripción del sistema	11
2.1 Casos de estudio	11
2.2 Ecuaciones de gobierno	13
2.2.1 Aproximación de Oberbeck-Boussinesq	14
2.2.2 Reformulación de las ecuaciones	15
2.3 Condiciones de contorno	17
2.4 Parámetros de control	19
3 Análisis numérico	22
3.1 Análisis CFD. DNS (Direct numerical simulation)	22
3.2 Métodos espectrales	25
3.2.1 Método de colocación	26
3.3 Estado básico	27
3.4 Estabilidad lineal	29
3.4.1 Estudio de la estabilidad	30
3.4.2 Planteamiento numérico del problema	31
3.4.3 Cálculo de la temperatura y número de onda críticos	33
3.4.4 Bifurcaciones de codimensión dos	34
4 Resultados	37
4.1 Bifurcaciones	37
4.2 Influencia de los parámetros	40
5 Conclusiones	47
6 Pliego de condiciones	50
6.1 Derechos y obligaciones de los trabajadores	50
6.2 Condiciones del puesto de trabajo	51
6.2.1 Seguridad estructural	51
6.2.2 Superficie y espacio de trabajo	51

6.2.3	Disposiciones mínimas del equipo	52
6.2.4	Iluminación	53
6.2.5	Ventilación, temperatura y humedad	53
6.2.6	Ruido, vibraciones y trepidaciones	54
6.2.7	Medidas de emergencia: iluminación de emergencia, vías y salida de evacuación	54
6.2.8	Protección contra contactos en equipo eléctricos	54
6.2.9	Electricidad estática	55
6.2.10	Prevención y extinción de incendios	55
6.3	Condiciones de los recursos informáticos	56
6.3.1	Condiciones de hardware	56
6.3.2	Condiciones de software	57
7	Presupuesto	60
7.1	Costes referidos a recursos humanos	60
7.2	Costes referidos al equipo utilizado	61
7.3	Costes indirectos	62
7.4	Coste total	63
	Referencias	65
A	Algoritmo del código	69
A.1	Parámetros de entrada y salida	69
A.2	Estructura	71
A.3	Esquema de funcionamiento	72

Lista de Figuras

1	Transición de un flujo laminar a flujo turbulento [5]	2
2.1	Boceto de la geometría de estudio [23]	12
2.2	Corte radial de los dos casos de estudio [23]	13
2.3	Definición de las fronteras del sistema	17
3.1	Modelos de turbulencia típicos en CFD. Desde RANS hasta DNS [5]	23
3.2	Modelización CFD de un chorro turbulento mediante diferentes aproximaciones [5]	24
4.1	Ejemplos de distribuciones de temperatura típicas de algunas de las bifurcaciones del problema [31]	38
4.2	Diagramas de estabilidad marginal: Caso aislante para $Pr = 50$. Se muestra un caso de codimensión 1 (a) y otro de codimensión 2 (b). Los asteriscos denotan los valores propios complejos, mientras que los símbolos vacíos representan valores reales.	39
4.3	Número de onda crítico en el plano $Bo-\Delta T_h$. Para las condiciones de $Pr = 50$, $Bi = 0.7$, y $\Gamma = 4$. Arriba se muestran los resultados del caso aislante, y abajo del conductivo	40
4.4	Número de onda crítico en el plano $Bo-\Delta T_h$. Los resultados están divididos en soluciones estacionarias, $Im(\lambda) = 0$; y casos oscilatorios, $Im(\lambda) \neq 0$. A izquierda se muestran los resultados para el caso aislante, a derecha los del conductivo	41
4.5	Número de Marangoni a temperatura crítica. A izquierda se muestran los resultados para el caso aislante, a derecha los del conductivo	42
4.6	Número de Rayleigh a temperatura crítica. A izquierda se muestran los resultados para el caso aislante, a derecha los del conductivo	43
4.7	Gráfico tridimensional del campo de temperaturas de las perturbaciones crecientes del sistema	44
4.8	Gráfico tridimensional del campo de temperaturas de las perturbaciones crecientes del sistema. Coexistiendo dos estados, por lo que es bifurcación de codimensión dos	45
A.1	Parámetros de entrada en el algoritmo de búsqueda para el par $\mu(k_c, \Delta T_c)$ en las simulaciones del problema	70
A.2	Búsqueda del mínimo ΔT para cada valor de k . Caso conductivo para $Pr = 1$, $\Delta T_h = 5.9$ y $g = 7.6$	72
A.3	Esquema de los programas involucrados en la resolución del problema	73

Lista de Tablas

2.1	Condiciones de contorno del problema	19
3.1	Tabla de resultados para $N = 23$ y $M = 13$. En ella se recogen los pares críticos $(k_c, \Delta T_c)$, en los que se producen inestabilidades para diferentes números de Bond y ΔT_h . Cuando el número de onda es imaginario y contiene la i , se trata de bifurcaciones de Hopf.	33
7.1	Coste medio del personal	61
7.2	Presupuesto referido al personal técnico	61
7.3	Presupuesto referido al equipo	62
7.4	Presupuesto referido a imprevistos	63
7.5	Presupuesto total	63

Introducción

Cuando hablamos de la turbulencia, es un término que todo el mundo puede reconocer fácilmente pero que poca gente sabría definir. Simplificando se podría definir como: *el fenómeno en el que un flujo de cualquier naturaleza adquiere un comportamiento de aleatoriedad*. Más técnicamente, esta podría considerarse como un movimiento tridimensional y dependiente del tiempo caracterizado por su gran vorticidad, debido a un efecto denominado *vortex stretching*, generando de esta forma fluctuaciones de velocidad alrededor del flujo. La importancia en el estudio de la turbulencia radica en la poca comprensión sobre la materia, ya que su característica irregularidad hace prácticamente imposible encontrar un método de resolución determinista. Hay innumerables ejemplos de flujos turbulentos presentes en la naturaleza: la capa límite de la atmósfera de la tierra, las corrientes de agua en los océanos, e incluso ejemplos astronómicos, como la fotosfera del Sol o nebulosas interestelares gaseosas. En sus comienzos como tema de investigación pueden mencionarse a autores como Reynolds, Taylor, Prandtl, Von Karman y Kolmogorov, que proporcionaron algunos de los trabajos más relevantes en la década de los 50 [1].

Desde el punto de vista de la mecánica de fluidos, el objetivo de este trabajo se centra en el fenómeno de la convección. Para ello, se diseñará un modelo de un fluido confinado en un recinto anular, donde se desarrollarán y resolverán numéricamente las ecuaciones, y de esta forma lograr entender un poco más la dinámica de los flujos termoconvectivos y las transiciones que tienen lugar de las fases laminares a turbulentas.

El término convección fue utilizado por primera vez en 1934 por W. Prout [2], quién lo utilizó para denotar un modo de propagación del calor, a través del movimiento del fluido, que había sido previamente descrito por Bumford cuarenta años antes, para explicar el transporte de calor en una tarta de manzana caliente [3]. En la actualidad este concepto abarca un espectro más amplio, en el que tanto la masa, el momento o la energía pueden ser objeto de transporte sin tener que ser en forma de calor [4].

Este fenómeno está presente en innumerables ocasiones en la vida cotidiana, pudiendo observarse en casos tan simples como en el agua hirviendo o incluso cuando un hielo se derrite en una taza de café caliente. También es culpable de sucesos en la naturaleza, como las corrientes marinas, la lluvia y las tormentas eléctricas. Y aunque suene sorprendente, gracias a ella es posible la regulación de la temperatura del cuerpo, aunque se trate de un proceso de convección forzada, ya que es el propio corazón quien fuerza el movimiento de la sangre (fluido), actuando como una bomba.

Normalmente la turbulencia se origina cuando el flujo laminar pasa a ser turbulento por

presencia de alguna inestabilidad. Una de las principales consecuencias de estas inestabilidades es la interacción entre los términos viscosos y los inerciales presentes en la ecuación del movimiento. Para conocer el origen de este movimiento se supone un fluido en reposo sometido a la fuerza gravitatoria. Al calentar este fluido se producen fluctuaciones en el campo de temperaturas, lo cuál puede desembocar en inestabilidades térmicas. Además, al considerar que la superficie superior del recinto estará abierta a la atmósfera, habrá efectos termocapilares que también influyen en el desarrollo de las perturbaciones. Por tanto, se puede decir que el inicio del movimiento se ha producido por dos mecanismos diferentes: la gravedad y la tensión superficial. En los problemas en los que únicamente se estudia el efecto gravitatorio, o también definido como empuje de Arquímedes, son conocidos como problemas de convección de Rayleigh-Bénard; cuando además se incluye el efecto de la variación de la tensión superficial, se le conoce como un problema de convección de Bénard-Marangoni. En contraposición a estos dos efectos desestabilizantes, encontramos otros dos que contribuyen a la estabilización, que son: la difusión del calor y la viscosidad del fluido. Con todo ello, tras alcanzar un umbral de temperatura, hay una re-organización de los campos de temperatura y velocidades. Junto con la manipulación de diversos parámetros de control, aparecen una serie de estructuras espacio-temporales, las cuales presentan pautas relativamente organizadas y que constituyen etapas previas al estado de turbulencia. A continuación se muestra un ejemplo real de la transición de un flujo laminar a turbulento.

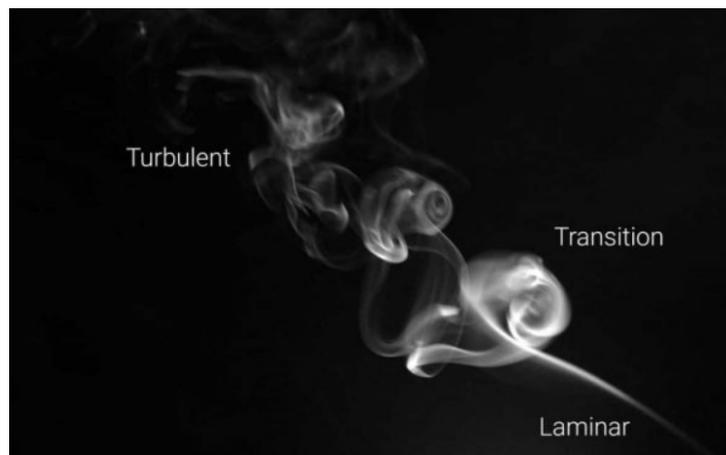


Figura 1: Transición de un flujo laminar a flujo turbulento [5]

El caso de estudio es un fluido encerrado en una geometría anular cuya superficie superior está abierta a la atmósfera. Este fluido será calentado lateralmente o inhomogéneamente. A través de él se estudiará el comportamiento del fluido y la influencia de los parámetros de control con los que se trabaja en este proyecto. Entre los mismos, se encuentran el gradiente de temperatura impuesto para calentar el fluido y el campo gravitatorio, los cuáles se adimensionalizarán, y serán presentados en capítulos posteriores.

Debido al rango de parámetros de control con los que se trabaja el interés reside en el estudio de entornos de microgravedad. En estos entornos se ha estudiado que los efectos de Marangoni son muchos más significativos [6], encontrándose comportamientos completamente distintos a los que se dan bajo condiciones terrestres. Actualmente, el interés en

este tipo de dominios reside en su aplicación en diverso campos, como la solidificación de cristales sin efectos gravitatorios [7], lentes líquidas [8], e incluso aplicado a tubos de termosifón bifásicos (TTB) [9], se trata de tubos de alta conductividad que son utilizados para la transferencia de calor, su uso está muy extendido en sistemas solares de calefacción.

En este trabajo se van a estudiar dos escenarios distintos, diferenciándose únicamente en la selección de las condiciones de contorno para las paredes verticales de los cilindros, definiéndose como: un caso aislante y un caso conductivo. En el primero de estos las paredes serán adiabáticas, y por tanto, no tendrán ningún intercambio de calor con el entorno, de esta forma se podrá controlar en cierta medida el calor del sistema. En el segundo, el conductivo, se impondrá una temperatura constante en los cilindros, estando de esta forma sometida la pared más interna a la T_{max} , y la exterior a T_{min} . Refiriéndonos con estos términos a los extremos de temperatura que se alcanzan en el gradiente de temperatura que se aplicará en la parte inferior.

El desarrollo del trabajo será tal y como se expone previamente en el índice: en el primer capítulo se describen una serie de estudios, tanto teóricos como experimentales de gran relevancia para el problema. En el segundo capítulo se presenta el dominio y situación física que se estudiará a lo largo del mismo. Donde también se describirán las ecuaciones de gobierno de las que se hace uso, asociadas al comportamiento del fluido, junto con las condiciones de contorno impuestas para caso. El tercer capítulo se utilizará para explicar más ampliamente las técnicas numéricas que se emplean para la resolución del problema, con una breve introducción de forma generalizada de los métodos de colocación y las condiciones que han de cumplir para su aplicación. Posteriormente, esta sección se enfocará en las particularidades del problema considerado. Para finalmente, en el capítulo cuatro, exponer las soluciones de estas ecuaciones y los diagramas de bifurcaciones, así como, la influencia de los distintos parámetros de control en el comportamiento del sistema. Otra parte clave de los resultados obtenidos, será realizar un análisis de la estabilidad y definir las fronteras de los distintos comportamientos del fluido. Por último, se presentarán las conclusiones obtenidas y una serie de ideas que puedan dar pie a trabajos futuros. Además se incluirá el pliego de condiciones más adecuado para el desarrollo, donde se presentará la normativa vigente sobre derechos, obligaciones y recomendaciones. Finalmente, se realiza una breve aproximación del coste que implica este estudio.

Objetivos

La finalidad principal de este trabajo reside, dentro del amplio campo de la mecánica de fluidos, en entender con mayor claridad una ínfima parte de la naturaleza del mundo que nos rodea. Más concretamente, enfocándose en el problema del fenómeno de la convección.

Para ello, el objetivo general de este trabajo radica en el estudio de las etapas previas al estado de turbulencia. Éste, a su vez, puede dividirse en tres sub-objetivos más simples, que ayudarán a lograr el propósito primordial de esta memoria.

En primer lugar, se estudiará la estabilidad lineal, a través de la cual se definirán los umbrales de la misma. Con ello, se pretende analizar la reacción de las soluciones estacionarias ante perturbaciones infinitesimales. Tomándose como estado estacionario de referencia al que llamaremos *estado básico*, y será la solución estacionaria obtenida una vez se imponga el gradiente de temperatura en la parte inferior y se estabilice el sistema.

Tras, lo que se procederá a observar cómo es la forma de la perturbación que rompe la laminarización del fluido. Pudiendo dividir estas bifurcaciones entre estacionas u oscilatorias, también llamada bifurcación de Hopf. La diferencia entre ellas depende de la amplitud de la perturbación, siendo en la primera de estas constante, y en la segunda periódica.

Por último, se localizarán las inestabilidades para así obtener diagramas con bifurcaciones de codimensión dos. Estas perturbaciones se caracterizan por la existencia de dos comportamientos del sistema que suceden simultáneamente. De esta forma, se pretende tener la posibilidad de obtener una ecuación que describa fenomenológicamente la inestabilidad.

Entre los objetivos personales de este trabajo, cabría mencionar la mejora de los conocimientos en MATLAB. Entre las actividades desarrolladas a través del mismo, se pueden destacar: interactuar con funciones de la biblioteca HDF5, uso de herramientas que permiten una interdependencia con otros softwares (MATLAB-Excel), y la gestión de distintos tipos de archivos, como archivos de texto plano (.txt), archivos binarios, etc.

Capítulo 1

Estudios previos

Este tipo de problemas, en donde las inestabilidades termoconvectivas son generadas tras la aplicación de un gradiente de temperatura, se ha convertido en un problema clásico de la mecánica de fluidos desde el siglo XIX [3], habiéndose desarrollado numerosos trabajos desde entonces.

El primer trabajo experimental del que se tiene constancia sobre el tema relaciona la viscosidad y el umbral entre el período transitorio una vez generadas las inestabilidades y la re-organización del campo de temperaturas [10]. No fue hasta años después, cuando apareció el primer estudio teórico, de la mano de Rayleigh en 1917 [11]. A partir de entonces, numerosos ensayos se llevaron a cabo sobre el fenómeno de la convección [12]. En los problemas clásicos de convección de Bénard-Marangoni, es aplicado un gradiente inhomogéneo en la parte inferior del recinto [10]. Existen otras configuraciones que abarcan inestabilidades termoconvectivas a través de un fluido dinámico, también a través de un gradiente horizontal de temperatura.

Entre los estudios realizados sobre este campo se ha jugado con diversos fluidos, diferentes condiciones de contorno, e incluso, distintas geometrías del recinto donde se aloja el fluido. En algunos se han considerado cajas rectangulares [13, 14, 15], donde uno de los lados es infinito. En este proyecto, al igual que en algunos previamente realizados [16, 17, 18, 19, 20], se sustituye esta geometría teóricamente infinita por un dominio anular. Consiguiendo de este modo un volumen finito con el que será más fácil trabajar, ya sea experimental o teóricamente.

En cuanto al estudio del análisis numérico, en el capítulo 3 se mostrará una aplicación de uno de los muchos métodos presentados dentro del campo de la mecánica de fluidos para encontrar solución a las ecuaciones de Navier-Stokes, indispensables para conocer la dinámica del fluido en este tipo de problemas. También se introducirán los conocidos como *métodos espectrales*, herramienta empleada para la discretización de las ecuaciones de Navier-Stokes.

El estudio teórico implica lidiar con dos problemas, que cuentan con una estrecha dependencia entre sí, que son la estabilidad lineal del problema y la aparición de bifurcaciones. En este caso, siguiendo la línea de uno de los trabajos de S. Hoyas [21], las bases para el es-

tudio de la estabilidad lineal se basan en distintos trabajos dados por M. G. Crandall y P. H. Rabinowitz, donde también se plantean los principios para el problema de la bifurcación con autovalores simples [22].

1.1 Estudios teóricos

Entre los estudios teóricos, se destaca el de Smith y Davis (1983) [13]. En él se analiza de forma teórica cómo al imponer un gradiente de temperatura en la pared rígida inferior surgen dos tipos de inestabilidades, una en forma de rollos longitudinales estacionaria, que supone la clásica inestabilidad estudiada por Marangoni; y ondas hidrotermales no estacionarias, un nuevo mecanismo de inestabilidad cuya energía deriva de los gradientes de temperatura horizontales. Los términos de estabilidad térmica son presentados en función del número de Prandtl del fluido y del número de Biot.

Otros muchos estudios de los que se parte y que suponen un precedente para el desarrollo del mismo, vienen mayoritariamente de la mano de S. Hoyas, P. Fajardo y M. J. Pérez-Quiles. La importancia de la relación entre los efectos térmicos y las inestabilidades han sido analizados previamente en [17, 18]. En estos primeros trabajos ya se han modelizado este estado convectivo alcanzado una vez se introduce un gradiente horizontal, viendo en qué medida influye el número de Prandtl y Biot en el tipo de bifurcaciones que aparecen, por tanto, observando a su vez cómo es la forma de la inestabilidad en distintas zonas del plano Prandtl-Biot [18]. Otro de los artículos a destacar se basa en el estudio del número de Biot para $Pr = \infty$ [20], que posteriormente el método desarrollado para la resolución del problema fue implementado para número de Prandtl cercanos a la unidad [18]. También en otros artículos relacionados se observó la influencia de la geometría en este tipo de entornos, valorando una geometría anular con distintos *aspect ratios*, es decir, variando la relación entre la distancia entre cilindros y la profundidad del recinto [23].

En este trabajo se parte del estado básico, primera solución estacionaria del sistema, y se supone simetría radial, que junto a la modificación de parámetros térmicos y gravitatorios, se logra la transición entre los rollos longitudinales y las ondas hidrotermales.

1.2 Estudios experimentales

El interés en el fenómeno de la convección, y la continua evolución científica, han permitido poder llevar a la realidad estas situaciones de condiciones tan extremas. Consiguiendo de esta forma, resultados experimentales con los que poder contrastar las hipótesis teóricas formuladas.

Uno de los primeros experimentos de convección de Bénard-Marangoni que se han realizado estuvo basado en los efectos termocapilares entre dos líquidos inmiscibles, donde se observó una inestabilidad de forma cuadrada que deriva en una bifurcación secundaria conforme se aumenta la diferencia de temperatura [24].

Otros estudios más recientes se embarcan en la interacción entre la mezcla de un soluto y disolvente [25]. En él, se observan la existencia de las estructuras de convección de Rayleigh-Bénard-Marangoni (RBM), determinadas por la correlación entre las fuerzas de flotabilidad y la termocapilaridad, y el gradiente de temperatura durante la transferencia de masa.

El último artículo que se va a mencionar, puesto que la descripción de todos y cada uno de ellos sería una tarea demasiado ardua e innecesaria para la finalidad de este proyecto, observa el patrón de fluctuaciones generado a un número de Prandtl intermedio ($Pr = 6.7 - 25.2$) en un piscina anular con diferentes profundidades cuyo calentamiento se realiza a través del cilindro interno [26]. Entre los resultados más relevantes de este estudio, se observa que al aumentar el número de Marangoni el flujo pasa a ser oscilatorio con presencia de perturbaciones térmicas inducidas por los efectos termocapilares. En cuanto al empuje de Arquímedes, este se ve reforzado al aumentar la profundidad del recinto que alberga el fluido. También puede afirmarse que el número de onda disminuye a medida que aumenta la profundidad.

Capítulo 2

Descripción del sistema

En este apartado se describirán con mayor detalle los casos de estudio, presentando el dominio y situación física con la que se ha trabajado en esta situación. Así como las condiciones de contornos específicas del problema, así como las características específicas que definen un problema clásico de convección de Bénard-Marangoni.

Este proyecto se basa en el análisis de la estabilidad lineal de un fluido contenido en un recinto anular (formado por dos cilindros) sometido a un gradiente de temperatura en la pared inferior, en este caso, de carácter no uniforme, y cuya superficie superior está abierta a la atmósfera, lo que conllevará por esa parte un cierto intercambio de calor con el entorno. A mayores, también se examinará la forma de estas perturbaciones que rompen la laminarización del sistema, junto con los estados en los que coexisten diferentes comportamientos simultáneos en el dominio. En este tipo de problemas de convección los causantes de las inestabilidades son el empuje de Arquímedes, efecto debido a la fuerza gravitatoria y la existencia del gradiente de temperatura; y el conocido como efecto de Marangoni, basado en la variación de la tensión superficial con la temperatura.

2.1 Casos de estudio

El caso de estudio es un fluido confinado en una geometría anular con superficie libre, que cuenta con una relación entre coronas de los cilindros de 1 milímetro ($\delta = 0.01 \text{ m}$) y una profundidad del fluido de 2.5 milímetros ($d = 0.0025 \text{ m}$). Como consecuencia de la superficie libre encontramos efectos de capilaridad y de transmisión de calor. Además, en la parte inferior de este recipiente se impone un gradiente de temperatura que decrece linealmente conforme hay mayor proximidad al cilindro externo, encontrándose, por tanto, a mayor temperatura en la pared interna.

El dominio Ω utilizado durante la simulación numérica se compone de dos cilindros concéntricos. El radio del cilindro interno es designado como a , y el externo como $a + \delta$, dándose una diferencia δ entre ambos. Que alberga un fluido con una profundidad d . Esta geometría viene recogida en la figura 2.1.

Partiendo de que el recinto es anular, de forma que está compuesto por una geometría cilíndrica, una vez definidas sus variables, se puede precisar la expresión analítica del sis-

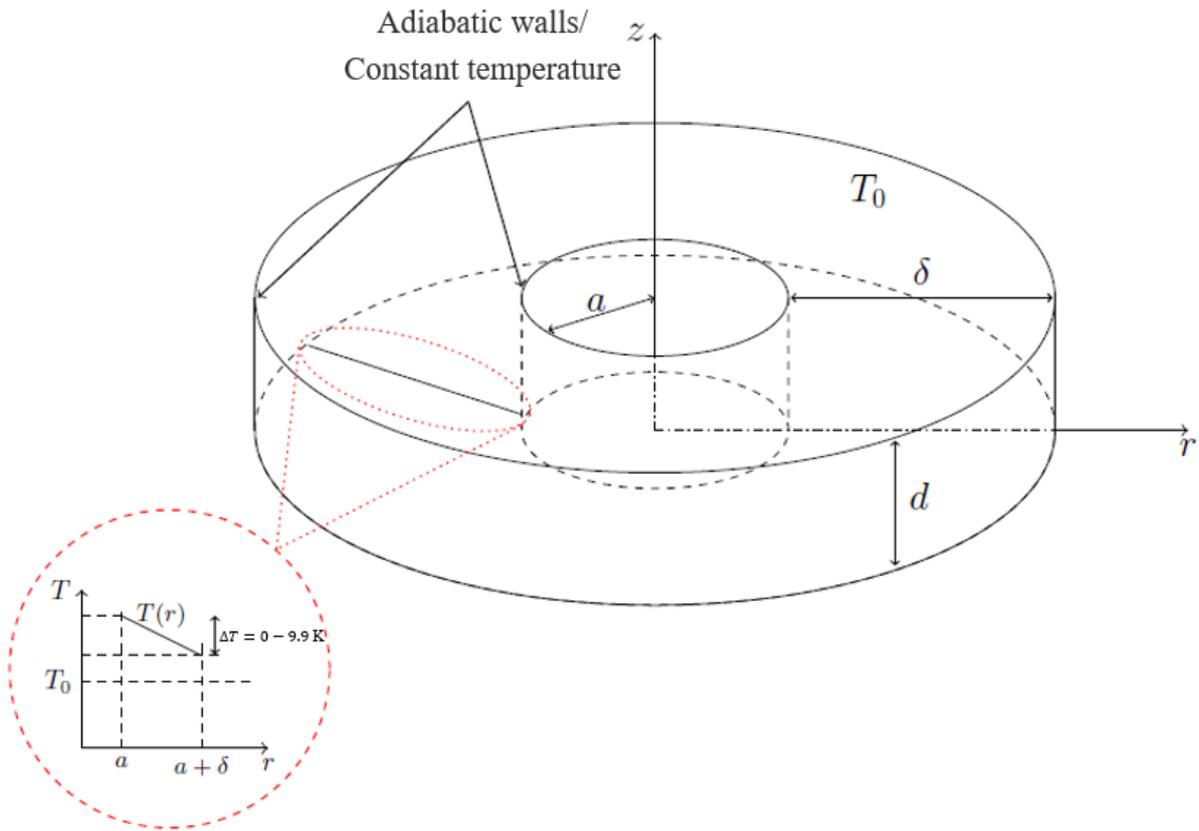


Figura 2.1: Boceto de la geometría de estudio [23]

tema tal y como viene recogido en la ecuación 2.1

$$\Omega = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid a < \sqrt{x^2 + y^2} < a + \delta \mid 0 < z < d \right\} \quad (2.1)$$

Tal y como se ha mencionado se impone un gradiente de temperatura no uniforme en la pared inferior, considerada rígida. Este decrece linealmente desde la parte externa a la interna, alcanza por tanto la máxima temperatura en la parte más cercana al cilindro interno y la mínima en el exterior. De esta forma, la distribución de temperatura en la superficie inferior queda perfectamente descrita de forma radial con la siguiente expresión:

$$T(r) = \frac{T_{min} - T_{max}}{\delta} (r - a) + T_{max} \quad (2.2)$$

Así, cuando $r = a$, en el cilindro de menor diámetro, se consigue T_{max} ; y a la altura de la pared externa, a $r = a + \delta$, se obtiene T_{min} .

En la superficie superior se considerará fluido libre, estando abierto a la atmósfera. Esto se traducirá en dos principales efectos que influirán en el comportamiento del fluido: efectos de capilaridad y transmisión de calor con el entorno.

Respecto a las paredes laterales, se va a considerar dos tipos de escenarios. En el primer caso, el *aislante*, que con el objetivo de controlar el calor a través de las paredes, se ha fijado la derivada normal de la temperatura igual a cero, es decir, se han considerado condiciones de contorno Neumann homogéneas. Consiguiendo de esta forma idealmente aislar las paredes al no producirse ningún trasvase de calor con el entorno. El segundo caso, el *conductivo*, se considera que los cilindros presentan una temperatura homogénea y constante, siendo esta máxima en el cilindro interior y mínima en el exterior.

Dentro del campo de la mecánica de fluidos, al igual que muchos otros, es usual facilitar la comprensión del problema, con la adimensionalización de las variables, definiéndose de este modo dos variables: la diferencia de la temperatura máxima alcanza con respecto a la ambiente, $\Delta T = T_{max} - T_0$; y el incremento de temperatura horizontal impuesto en el fondo, $\Delta T_h = T_{max} - T_{min}$.

En la figura 2.2 se muestra un corte radial del recinto para ambos casos de estudios, facilitando de esta manera la comprensión de las diferencias entre ambos.

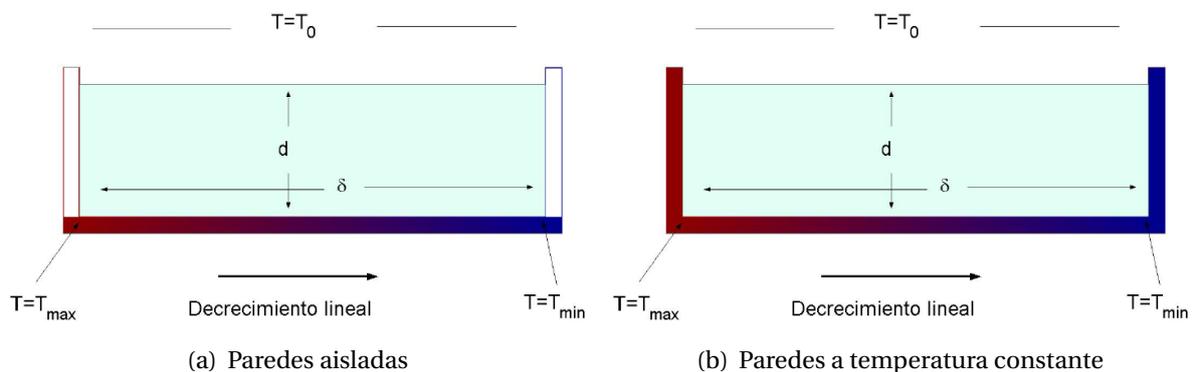


Figura 2.2: Corte radial de los dos casos de estudio [23]

2.2 Ecuaciones de gobierno

Para describir el comportamiento del sistema se partirá de las ecuaciones que gobiernan el fluido viscoso con densidad y temperatura variables. Estas expresiones relacionan el campo de velocidades del fluido $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ de viscosidad μ , con las variables propias del fluido: presión p , densidad ρ . Todas ellas son definidas en el espacio $\vec{x} = (x, y, z)$. El desarrollo de las ecuaciones viene recogido en [27], donde siguiendo los pasos de este autor, considerando $i, j, k = 1, 2, 3$, se obtiene la siguiente formulación de las mismas:

- Ecuaciones de Navier-Stokes:

$$\rho \partial_t u_i + \rho u_j \partial_{x_j} u_i = \rho F_i - \partial_{x_i} p + \partial_{x_j} \left[\mu \left(\partial_{x_j} u_i + \partial_{x_i} u_j - \frac{2}{3} \mu \partial_{x_k} u_k \right) \right] \quad (2.3)$$

siendo F_i componente del campo $\vec{F} = (F_i, F_j, F_k)$, resultante de las fuerzas provocadas, en este caso por la gravedad y la termocapilaridad. Este conjunto de ecuaciones de derivadas parciales expresan matemáticamente la conservación del momento.

- Ecuación de continuidad:

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) = 0 \quad (2.4)$$

a través de la cuál se manifiesta la conservación de la masa del sistema.

- Ecuación de calor:

$$\rho \partial_t (c_V T) + \rho \vec{u} (c_V T) = \partial_{x_j} \bar{\kappa} \partial_{x_j} T - p \partial_{x_j} u_j + \Phi \quad (2.5)$$

La última ecuación que es utilizada para determinar la dinámica del fluido es la ecuación de calor, con la que se consigue describir la distribución del mismo. La misma, depende de la temperatura T , de la conductividad térmica, designada por $\bar{\kappa}$; Φ representa la disipación de energía debida a la viscosidad. El segundo término de la izquierda, parte no lineal de la ecuación, indica el transporte de energía del sistema.

2.2.1 Aproximación de Oberbeck-Boussinesq

Las ecuaciones presentadas en el apartado anterior son generalizadas para cualquier problema que involucre flujos termoconvectivos. Además, encontrar una solución para las mismas resulta de gran complejidad, al contar con términos no lineales. La primera simplificación que se considerará viene dada por la *aproximación de Oberbeck-Boussinesq*, comúnmente utilizada en problemas de convección, y cuyo uso en esta situación no supone perder información de gran relevancia. Independientemente, Oberbeck [28] y Boussinesq [29], llegaron a simplificar estas ecuaciones formulando una dependencia lineal de la densidad con el gradiente de temperatura. Inicialmente esta expresión parte de la ecuación de estado del fluido donde la densidad depende tanto de la presión como de la temperatura $\rho = \rho(p, T)$, pero se asume que cuando en el movimiento del fluido juegan un papel importante las variaciones de temperatura, como en los problemas de convección de Rayleigh-Bénard y Marangoni-Bénard, y por tanto, aplicable en este caso, puede despreciarse la influencia de presión frente a la de temperatura. Resultando:

$$\rho = \rho_0 [1 - \alpha(T - T_0)] \quad (2.6)$$

Donde α es el coeficiente de expansión térmica, ρ_0 corresponde a la densidad media del fluido a temperatura ambiente T_0 . Continuando con el trabajo de Sergio Hoyas en [21], se trabaja con fluidos en los que α es del orden de 10^{-4} . La hipótesis recogida en la ecuación 2.6 será válida siempre que se cumpla los criterios recogidos en los estudios llevados a cabo por Gray y Giorgini [30], en los que se especifica limitaciones, según el tipo de fluido, de la diferencia de temperatura máxima que debe haber entre el dominio y el entorno, y la profundidad máxima que puede alcanzar el fluido.

Una de las consecuencias de aplicar esta aproximación es la condición de incompresibilidad, que se consigue a través de la siguiente reformulación de la ecuación de continuidad:

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0 \quad (2.7)$$

En cuanto a las ecuaciones de Navier-Stokes, considerando la viscosidad dinámica μ como constante y teniendo en cuenta el estado de incompresibilidad de la ecuación 2.7:

$$\rho_0 \partial_t u_i + \rho_0 u_j \partial_{x_j} u_i = \rho F_i - \partial_{x_i} p + \mu \partial_{x_j} \partial_{x_j} u_i \quad (2.8)$$

Por último, la ecuación de calor obtenida será

$$\partial_t T + \vec{u} \cdot \nabla T = \kappa \Delta T \quad (2.9)$$

siendo $\kappa = \bar{\kappa}/(\rho_0 c_V)$ el coeficiente de conductividad térmica y considerando c_V constante. La disipación de energía Φ ha sido despreciable frente al resto de términos de la ecuación, puesto que es de dos órdenes inferior al resto de variables.

2.2.2 Reformulación de las ecuaciones

Una vez obtenidas las nuevas ecuaciones (2.7, 2.8, 2.9), es necesario analizar un poco más en profundidad estas expresiones. Y de esta forma, lograr simplificar en mayor medida las mismas para facilitar su posterior análisis.

Con el objetivo de caracterizar los diferentes efectos responsables del comportamiento del fluido, el siguiente conjunto de números adimensionales ha de ser definido:

1. Número de Rayleigh, $Ra = g\alpha\Delta T d^4 / \kappa\nu$: Representa el efecto del empuje de Arquímedes.
2. Número de Marangoni, $Ma = \gamma\Delta T d^2 / \rho\kappa\nu$: Caracteriza el impacto de la tensión superficial.

3. Número de Bond, $Bo = Ra/Ma = g\alpha\rho d^2/\gamma$: Relación entre el número de Rayleigh y Marangoni, que es el parámetro de control, que adquiere valores desde $g = 0 \rightarrow Bo = 0$ hasta $g = 9.9 \rightarrow Bo \approx 70$.
4. Número de Prandtl, $Pr = \nu/\kappa$: Relación entre la difusividad impulso (viscosidad cinemática) y la difusividad térmica. Este número ayuda a describir la viscosidad del fluido. En este proyecto, en las simulaciones realizadas son utilizados tres rangos diferentes: $Pr = 1$, $Pr = 5$ y $Pr = 50$. Para valores de $Pr > 10$, las soluciones se consideran idénticas a la situación de $Pr = \infty$ [13].
5. Número de Biot, Bi : Representa la transmisión de calor entre el fluido y la atmósfera. En este trabajo el valor del mismo permanecerá constante, y será $Bi = 0.7$.
6. Relación geométrica característica, $\Gamma = \delta/d$: Parámetro geométrico que caracteriza el dominio de trabajo. En este caso, esta se fijará en un valor de $\Gamma = 4$.

En estas definiciones δ y d son las longitudes características del dominio que se recogen en la figura 2.1; γ representa la relación entre la variación de la tensión superficial con la temperatura; ΔT es el incremento de temperatura entre el sistema y la atmósfera; ρ , κ , α y ν son la densidad, el coeficiente de conductividad térmica, coeficiente de expansión térmica y la viscosidad cinemática del fluido, respectivamente; y g es la aceleración debida a la gravedad.

Tras la adimensionalización, las ecuaciones de gobierno obtenidas serán

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0 \quad (2.10)$$

$$\partial_t \vec{u} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} = Pr (-\nabla p + \Delta \vec{u} + Ra\Theta \vec{e}_z) \quad (2.11)$$

$$\partial_t \Theta + \vec{u} \cdot \nabla \Theta = \Delta \Theta \quad (2.12)$$

El campo de velocidades \vec{u} ahora pasará a expresarse en coordenadas cilíndricas, definiendo sus componentes como $\vec{u} = (u_r, u_\theta, u_z)$ y \vec{e}_z es el vector unitario en la dirección z . En estas expresiones (2.11) también aparecen algunos de los números adimensionales ya descrito, como el número de Rayleigh Ra y el número de Prandtl Pr . En este trabajo son analizados tres números de Prandtl, que varían desde un problema dominado por la viscosidad, a $Pr = \infty$, que en este caso es lo mismo que $Pr = 50$, hasta $Pr = 1$ donde predominan los efectos provocados por los términos no lineales; adoptando también una cifra intermedia en ambos casos, para $Pr = 5$. Por último, Θ es un cambio de variable para expresar la temperatura

$$\Theta = \frac{T - T_0}{\Delta T}$$

Cuando el fluido se estabiliza al imponer el gradiente de temperatura, es decir, una vez alcanza un estado estacionario tras ponerse en movimiento, se le conoce generalmente como *estado básico* y se le dedicará todo un apartado en el capítulo 3. Como consecuencia del carácter laminar del flujo y debido a la simetría radial del dominio, el estado básico puede

ser aproximado por un planteamiento bidimensional axisimétrico. De esta forma, las ecuaciones se transforman en

$$r^{-1}\partial_r(ru_r) + \partial_z u_z = 0 \quad (2.13)$$

$$Pr^{-1}(u_r\partial_r u_r + u_z\partial_z u_r) = -\partial_r p + \Delta_c u_r - \frac{u_r}{r^2} \quad (2.14)$$

$$Pr^{-1}(u_r\partial_r u_z + u_z\partial_z u_z) = -\partial_z p + \Delta_c u_z + Ra\Theta \quad (2.15)$$

$$u_r\partial_r \Theta + u_z\partial_z \Theta = \Delta_c \Theta \quad (2.16)$$

donde

$$\Delta_c = r^{-1}\partial_r(r\partial_r) + \partial_z^2$$

es el operador Laplaciano en coordenadas cilíndricas, simplificado también por la simetría.

2.3 Condiciones de contorno

El sistema se basa en un fluido confinado en un recipiente. En el que se consideran que las paredes laterales y la inferior son rígidas, y la parte superior está abierta a las condiciones atmosféricas. Para mayor facilidad, se ha definido una región para cada una de estas partes, tal y como se muestra en la figura 2.3: Γ_1 corresponde a la pared superior, Γ_4 y Γ_2 se designa a la superficie lateral interna y externa, respectivamente, por último, Γ_3 se utiliza para denominar la parte inferior. El vector unitario normal a la superficie Γ se designa por \vec{n} , siendo su derivada ∂_n , ambos con dirección hacia afuera.

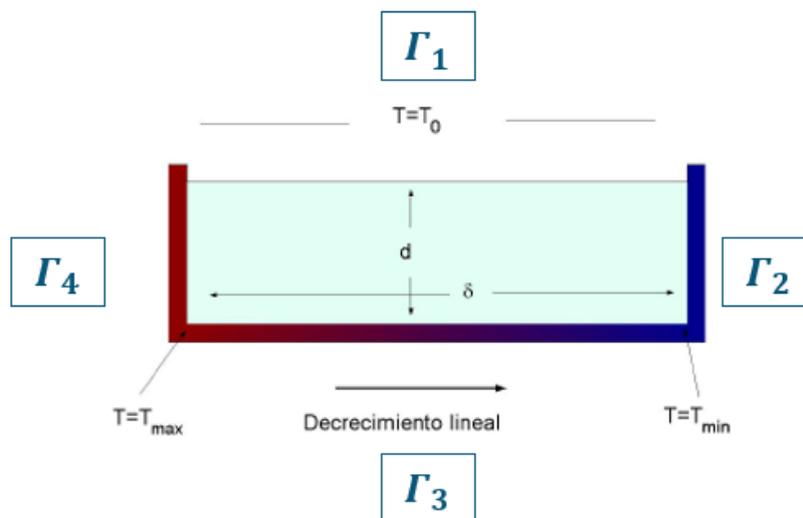


Figura 2.3: Definición de las fronteras del sistema

En las paredes del recinto, el fluido está en reposo, es decir, se impone condiciones de no deslizamiento en las paredes laterales e inferior, por lo que las velocidades en esas fronteras serán nulas, de forma que:

$$u_r = u_\theta = u_z = 0 \text{ para } \Gamma_i, \quad i = 2, 3, 4$$

En cuanto a la temperatura, en la capa inferior es por donde es calentado el fluido con un gradiente que decrece linealmente, definido como

$$\Theta = \frac{T_{min} - T_{max}}{\Delta T \Gamma} \left(r - \frac{a}{d} \right) + 1$$

Donde Γ en este caso es el parámetro geométrico descrito previamente. Al igual que este, el radio del cilindro interno a también es adimensionalizado a través de la profundidad del fluido d .

Hay dos casos de estudios bien diferenciados, en los que las condiciones de contorno de temperatura en las paredes de los cilindros son dispares. Considerando una situación en la que estas son adiabáticas y otras en las que son calentadas a una temperatura constante, coincidiendo este gradiente con el que se implanta en la capa inferior en cada una de las paredes, respectivamente. Por tanto, para el caso conductivo, se tendrá

$$\begin{aligned} \Theta &= 1, \quad \Gamma_4 \\ \Theta &= \frac{T_{min} - T_0}{\Delta T}, \quad \Gamma_2 \end{aligned}$$

Por el contrario, en el caso aislante, se cumplirán las siguientes condiciones:

$$\begin{aligned} \partial_n \Theta &= 0, \quad \Gamma_4 \\ \partial_n \Theta &= 0, \quad \Gamma_2 \end{aligned}$$

En la pared superior, las fuerzas de termocapilaridad son precisadas a través de la condición de Marangoni. Además, como previamente se ha comentado, esta se encuentra abierta a la atmósfera. Esto implica, que cuanto sea calentado el fluido con el gradiente inferior, se producirá un trasvase de calor con el entorno, que se describirá con la siguiente ley de Newton

$$\partial_n \Theta + Bi \Theta = 0$$

Como puede observarse, el número de Biot Bi es utilizado para caracterizar el calor transferido a la atmósfera. Este se define como

$$Bi = H \frac{d}{\kappa}$$

siendo H el coeficiente de transferencia de calor de la superficie, un parámetro muy complejo de controlar experimentalmente. Como puede verse en trabajos previos [31], pequeñas variaciones en el número de Biot Bi producen comportamiento totalmente distintos del sistema.

En la tabla 2.1 se recogen de forma resumida las condiciones de contorno anteriormente descritas del dominio, delimitando al mismo por $\Omega = (a, a + \delta) \times (0, d) \times (a, a + \delta)$:

Tabla 2.1: Condiciones de contorno del problema

$z = 0$	$z = d$	$r = a, a + \delta$
$u_r = 0$	$\partial_z u_r + Ma \partial_r \Theta = 0$	$u_r = 0$
$u_\theta = 0$	$r \partial_z u_\theta + Ma \partial_\theta \Theta = 0$	$u_\theta = 0$
$u_z = 0$	$u_z = 0$	$u_z = 0$
$\Theta = \Delta T - \frac{T_G}{\delta - a}(r - a)$	$\partial_z \Theta + Bi \Theta = 0$	$\partial_n \Theta = 0$ $\Theta = 0, T_G$

Donde, en la capa superior ($z = d$) se alcanza la condición de contorno de Marangoni $\partial_{x_3} u_{1/2} + Ma \partial_{x_{1/2}} \Theta = 0$. La misma se modela a través de las ecuaciones de equilibrio de los esfuerzos tangenciales

$$\partial_{x_i} \sigma = \nu (\partial_{x_3} u_i + \partial_{x_i} u_3), \quad i = 1, 2 \quad (2.17)$$

Se considera que esta superficie es indeformable a esfuerzos verticales, cumpliéndose la condición de $u_3 = 0$. Para la tensión superficial σ se supone, al igual que para la densidad, dependencia lineal con la temperatura, de forma que

$$\sigma(T) = \sigma_0 - \gamma(T - T_0) \quad (2.18)$$

Designando a γ como la variable que indica el cambio de la tensión superficial con la temperatura, y σ_0 la tensión superficial obtenida a la temperatura ambiente T_0 .

2.4 Parámetros de control

En este apartado se describirán los parámetros modificados para las simulaciones que se han realizado. Recordando, que la finalidad del proyecto es la del estudio de la estabilidad lineal del sistema y la generación de perturbaciones en el dominio Ω . El comportamiento de la celda viene descrito por las expresiones anteriormente descritas (2.13, 2.14, 2.15, 2.16), junto con las condiciones de contorno brevemente recogidas en la tabla 2.1. Numerosos parámetros intervienen en el mismo, controlando la pérdida de temperatura por la parte superior y las paredes del cilindro, introducir más o menos calor en el fondo, las fuerzas de flotabilidad, el efecto de las fuerzas generadas por la tensión superficial, y muchos otros factores que habría que considerar.

El fluido de trabajo se mantiene en todas las simulaciones realizadas. Puesto que la importancia en este estudio reside en qué medida influyen las variables térmicas y el efecto

gravitatorio. Siguiendo el trabajo de Hoyas [21], las características del fluido utilizado son:

$$\begin{aligned} \rho_0 &= 885 \text{ kg/m}^3, & \nu &= 3.2 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s} \\ \kappa &= 7 \cdot 10^{-8} \text{ m}^2/\text{s}^{-1}, & \gamma &= 8 \cdot 10^{-7} \text{ N}/(\text{m } ^\circ\text{C}) \end{aligned} \quad (2.19)$$

Donde ρ_0 es la densidad del fluido medida a la temperatura ambiente T_0 , que en este caso será de 20°C . La viscosidad cinemática se denomina por $\nu = \mu/\rho_0$, κ es la conductividad térmica, y γ la variación de tensión superficial.

En cuanto a las variables del problema, podemos considerar a priori un total de tres. El primer parámetro de control para las inestabilidades considerado, será la diferencia entre la temperatura máxima y mínima alcanzada en la celda ΔT_h , de esta forma se controla el gradiente impuesto en la superficie inferior ΔT , diferencia entre la temperatura máxima alcanzada en la celda y el entorno, esta característica es esencial para determinar la influencia del empuje hidrodinámico y las fuerzas termocapilares. Este variará de 0.1 K a 9.9 K . En último lugar, se variará el término gravitatorio g , cuyo rango será el mismo que para el gradiente térmico, de 0 m/s^2 a 9.9 m/s^2 , valores típicos de entornos de ingravidez. Cambios en la gravedad influyen en el número de Bond, influyendo de esta forma en la relación entre las fuerzas termocapilares y las de flotabilidad. También, se puede considerar como variable el número de Prandtl Pr , en el que, como se ha comentado, se evalúa el efecto de los términos viscosos que describen la conducta del fluido. Recapitulando, los parámetros de control son: ΔT_h , ΔT , Bo y Pr .

Capítulo 3

Análisis numérico

Con el fin de alcanzar los objetivos, se estudiarán en primer lugar las soluciones estacionarias alcanzadas, una vez se introduce el gradiente horizontal de temperatura, a través de las ecuaciones de gobierno (2.13 - 2.16), con las condiciones de contorno resumidas en la tabla 2.1 y los parámetros de control descritos en el capítulo anterior.

En el presente documento no ha sido desarrollado el código base utilizado en la resolución del problema. Este ha sido proporcionado por Sergio Hoyas, y presentado en [21]. En este capítulo se pretende describir brevemente en qué consiste el análisis numérico y las herramientas desempeñadas para la determinación de la solución más óptima.

A lo largo de esta sección se describirán los métodos numéricos utilizados para la resolución de las ecuaciones de gobierno del problema clásico de convección de Bénard-Marangoni. También se planteará cómo será estudiada la estabilidad lineal del fluido, tras alcanzar el estado básico del mismo, el cuál también será explicado con más detalle en los próximos apartados.

3.1 Análisis CFD. DNS (Direct numerical simulation)

Generalmente en la naturaleza, la mayoría de fluidos son turbulentos, y, por tanto, caracterizados por sus propiedades irregulares y difusivas. Como consecuencia de esta aleatoriedad, es necesario recurrir a métodos estadísticos para el estudio del comportamiento turbulento.

Las ecuaciones de Navier-Stokes, que son el conjunto de ecuaciones que permiten describir el movimiento del fluido, de carácter no lineal, no poseen actualmente una solución general analítica desde el punto de vista matemático, lo que hace que sea uno de los principales problemas de la física aún sin resolver. Por lo que es necesario recurrir a métodos para obtener una solución numérica a estas expresiones. En mecánica de fluido, a la parte encargada de encontrar soluciones mediante métodos numéricos se la conoce como *Computational Fluid Dynamics* (CFD). Cabe destacar, que la importancia en resolver estas ecuaciones es tan alto que es considerado uno de los problemas del milenio del *Clay Mathematics Institute* (CMI).

En este trabajo, se ha optado por aplicar *Direct Numerical Simulation* para la turbulencia,

es decir, las ecuaciones de Navier-Stokes sin ningún modelo de turbulencia. Esto significa que hay que resolver las mismas explícitamente en todas las escalas de disipación de energía. Todas las escalas espaciales tienen que ser resueltas, desde las escalas disipativas más pequeñas (microescalas e Kolmogorov), hasta las escalas de mayor tamaño, pasando por las escalas integrales \mathcal{L} , asociada a los movimientos que contienen la mayor parte de la energía cinética. La solución directa de las ecuaciones (DNS) supone el método de mayor coste computacional dentro de la dinámica de fluidos computacional, por contra, es la que mejor resultados arroja, aunque no siempre es posible su aplicación por limitaciones tecnológicas. Y es esta, la principal razón por la que se ha seguido estudiando y desarrollando otra serie de técnicas para modelar la turbulencia. La figura 3.1 muestra los enfoques más utilizados actualmente para resolver flujos turbulentos.

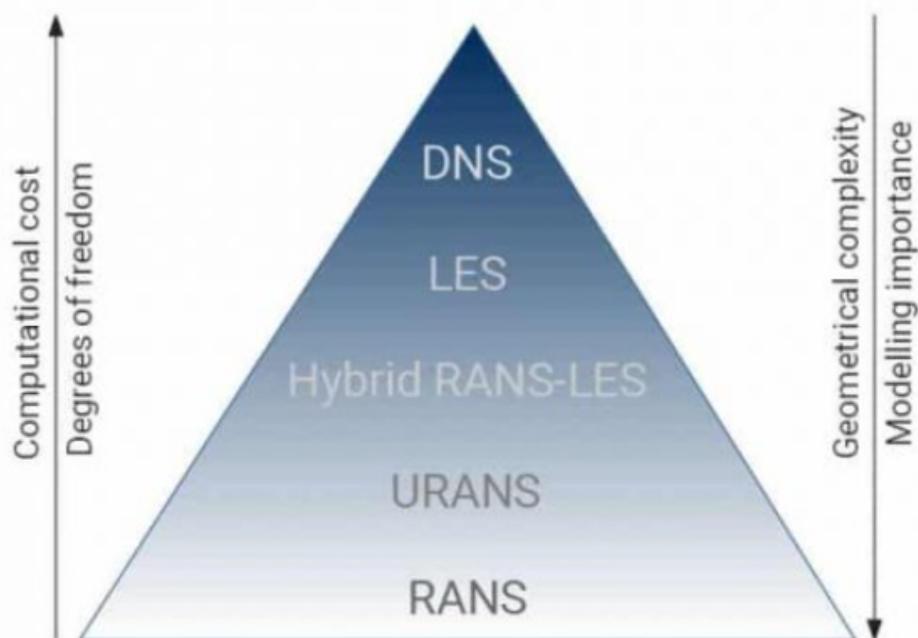


Figura 3.1: Modelos de turbulencia típicos en CFD. Desde RANS hasta DNS [5]

El coste computacional aumenta de RANS a DNS a medida que aumenta los grados de libertad necesarios para resolver el problema. Como consecuencia del coste computacional, los enfoques de resolución de escala como DNS y LES se aplican generalmente a geometrías simples, mientras que los híbridos RANS-LES, URANS y RANS pueden aplicarse a problemas industriales complejos.

Es posible realizar un promediado de las ecuaciones de Navier-Stokes, de esta forma se obtienen las conocidas como *Reynolds Average Navier-Stokes* (RANS) *equations*. Éstas son muy similares a las ecuaciones originales, pero se introducen una serie de términos adicionales recogidos en un tensor de esfuerzo, al que se le denomina comúnmente como tensor de esfuerzos de Reynolds, cuyo valor es desconocido y ha de ser modelado. La modelización RANS es el enfoque más común y extendido en aplicaciones industriales. Si el flujo de interés presenta partes móviles o características periódicas, estas pueden resolverse mediante el modelo no estacionario URANS.

En el modelo LES (*Large-eddy simulation*) las escalas más pequeñas de la turbulencia se filtran espacialmente mientras que las escalas más grandes y que contienen más energía se resuelven directamente. Este ofrece un mayor rango de aplicación y una mayor exactitud en los resultados, pero todo ello acompañado de un mayor coste computacional, debido a los requisitos de los pasos temporales.

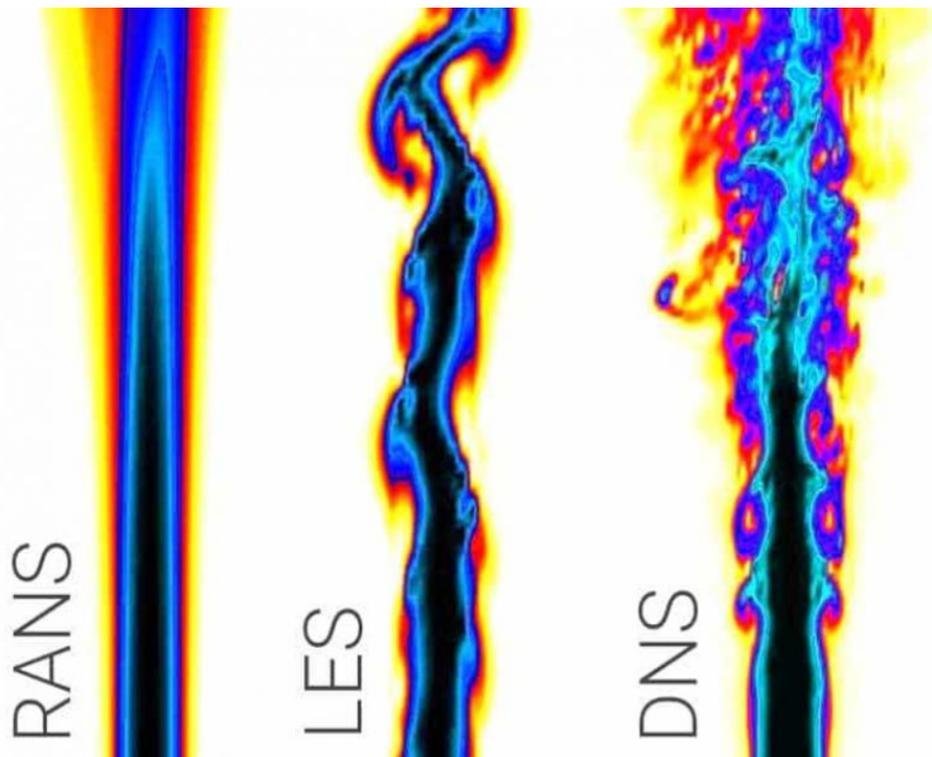


Figura 3.2: Modelización CFD de un chorro turbulento mediante diferentes aproximaciones [5]

En la figura 3.2 se observa las diferencias entre los modelos. Se puede resumir, en que todos los modelos de turbulencias tienen tanto ventajas como limitaciones debido a la naturaleza de estas modelizaciones. No existe un modelo único que pueda aplicarse fácilmente a todos los problemas que involucran flujos turbulentos sin un cierto grado de ajuste y conocimiento de los modelos para seleccionar el más apropiado. Además, el ajuste de los coeficientes del modelo es de suma importancia para obtener simulaciones precisas, coherentes y sólidas.

Es por esto, que se concluye, que debido a la simplicidad de la geometría con la que se trabaja en este proyecto (simetría radial) y con las consideraciones y técnicas que van utilizarse en el análisis numérico para la discretización y obtención de los coeficientes de las ecuaciones diferenciales, que es posible aplicar la resolución completa (DNS) de las expresiones de Navier-Stokes.

3.2 Métodos espectrales

A lo largo de los años y tras multitud de estudios, se han desarrollado y utilizado métodos de diferencias finitas para resolver las ecuaciones de Navier-Stokes, y más comúnmente, el empleo de métodos basados en elementos finitos, ya que estos últimos permiten trabajar con geometrías de gran complejidad. No obstante, en este proyecto, el recinto escogido permite aplicar otro tipo de discretización como los *métodos espectrales* [32].

Los métodos espectrales son una serie de esquemas de discretización para ecuaciones diferenciales, comúnmente conocido por método de residuos ponderados (MWR, *method of weighted residuals*). Los elementos clave del MWR son las funciones de prueba o funciones de peso, estas son utilizadas como funciones base para una expansión truncada en serie de la solución. De esta forma se asegura que, al utilizar la aproximación a través de estas funciones, las ecuaciones diferenciales obtenidas respecto a la solución exacta satisfacen la norma establecida adecuada al problema [32].

Para facilitar este concepto se explicará con una serie de ecuaciones tipo. El problema viene definido por una ecuación diferencial con unas condiciones contorno, la aplicación de los métodos espectrales consiste en aproximar la solución exacta, a la que denominaremos $u(x)$, mediante una suma finita $v(x) = \sum_{k=0}^N a_k \phi_k(x)$. Para la aplicación de los mismo se han de cumplir las siguientes características [33]:

1. Se ha de dar una convergencia rápida de las aproximaciones de $v(x)$ a la solución exacta $u(x)$ en términos matemáticos, al menos si las soluciones son regulares.
2. Las funciones empleadas deben de ser derivables, de forma que, dados los coeficientes a_k , los nuevos coeficientes b_k han de ser

$$\frac{d}{dx} \left(\sum_{k=0}^N a_k \phi_k(x) \right) = \sum_{k=0}^N b_k \phi_k(x)$$

3. Al discretizar el dominio en una malla de $N + 1$ nodos en los puntos x_i con $i = 0, \dots, N$, deberá existir algún algoritmo capaz de transformar los coeficientes a_k a los valores de $v(x)$ en dicho conjunto de nodos, y viceversa.

Hay dos cuestiones fundamentales que han de ser consideradas a la hora de continuar con este método, y son: la técnica para determinar los coeficientes a_k , y la elección de las funciones base $\phi_k(x)$. Para las funciones base, hay que valorar el carácter del problema [33]:

- Si el problema es periódico, se aconseja utilizar *funciones trigonométricas*.
- Por el contrario, si el problema no es periódico, se aplican *polinomios ortogonales tipo Jacobi*: polinomios de Chebyshev, Legendre, Hermite, etc.

En cuanto a la selección del método para obtener los coeficientes, hay tres principales técnicas [33]:

- **Método Tau.** Requiere que la función $v(x)$ verifique las condiciones de contorno especificadas del problema. Además, el residuo $R(x)$ (error obtenido al utilizar la aproximación, en vez de la ecuación diferencial original) debe ser ortogonal al máximo número de funciones base posibles.
- **Método Galerkin.** Combina las funciones base en un nuevo conjunto en el que se cumplen las condiciones de fronteras. También se impone que el residuo $R(x)$, sea ortogonal al mayor número de funciones posibles.
- **Método de colocación.** Similar al método de Tau, con la salvedad de que los residuos son anulados en ciertos puntos.

En este caso, por las condiciones del problema se ha optado por un método de colocación con polinomios de Chebyshev, asignando puntos de Gauss-Lobatto como puntos de colocación. Las principales ventajas que supone el empleo de este método, son [21]:

1. Alto orden de convergencia, llegando a ser prácticamente exponencial, por lo que con pocos puntos de discretización se puede conseguir la convergencia de la solución.
2. Expresión explícita de los puntos de colocación con los puntos de Gauss-Lobatto, gracias a la aplicación de los polinomios de Chebyshev.
3. Posibilidad de utilizar la transformada rápida de Fourier (FFT).
4. Fácil implementación y versatilidad para cambiar las condiciones de contorno.

3.2.1 Método de colocación

Las primeras referencias a estos métodos de discretización para ecuaciones diferenciales datan de 1972 de la mano de Kreiss y Oliger y a los que denominaron métodos de Fourier [34]; y de Orszag, que les asignó el nombre de métodos pseudoespectral [35].

Este método está tan extendido en la resolución de problemas de estas características por una clara ventaja: su gran precisión con pocos puntos de colocación. De esta forma permite obtener matrices de discretización más reducidas, evitando problemas de memoria y menores gastos computacionales.

Tal y como se ha comentado al inicio del capítulo, existe un total de 3 métodos para la resolución del problema, más concretamente de los coeficientes presentes en las aproximaciones a la solución exacta, a través del sumatorio:

$$v_N = \sum_{k=0}^N a_k \phi_k \quad (3.1)$$

Siendo $\{\phi_k\}_{0 \leq i \leq N}$ la función base del espacio discretizado. En cuanto a la razón de seleccionar el método de colocación frente al resto, radica en las diferencias entre sendas técnicas, escogiendo la más adecuada para las características del problema. En el método de Galerkin, las funciones ϕ_k se escogen de forma que verifiquen las condiciones de frontera del problema, recomendándose cuando las mismas son homogéneas o periódicas. Al contrario, en el método de tau, no se requiere que las funciones cumplan las condiciones de contorno, estas se imponen durante la obtención de las aproximaciones v_N . Finalmente, el método de colocación es similar al de tau, con la salvedad de que mientras el segundo de estos se basa en una aproximación global, el de colocación utiliza una local: la función v_N verifica la discretización únicamente en los puntos que se quiera.

Aunque no se entre en detalle, para la resolución del problema se ha seguido el desarrollo presentado en [21]. Donde se expone el potencial del método para un problema de carácter más sencillo, para encontrar un polinomio de grado N en el que se verifica la ecuación diferencial en $N - 1$ puntos interiores y las condiciones de contorno en los nodos restantes.

Además, siguiendo con el método de [21], también se plantea el problema de Stokes, un modelo presente en todos los problemas basados en las ecuaciones de Navier-Stokes para fluidos lineales. Durante el desarrollo del problema surge la complicación de que existe solución única para la velocidad pero no para la presión, por lo que aparecen modos espúreos, funciones de la presión pertenecientes al espacio discretizado que son no nulas. Para la eliminación de estos modos se hace uso de las condiciones de contorno para la presión planteadas en [36], y que se ha demostrado que su utilización en problemas termoconvectivos elimina los modos espúreos en problemas de Stokes con condiciones homogéneas tipo Dirichlet para la velocidad.

3.3 Estado básico

Una vez impuesto el gradiente de temperatura, el movimiento del fluido comienza y se deja evolucionar hasta alcanzar una solución estacionaria. A esta solución estacionaria con simetría azimutal se la conoce como *estado básico* del sistema generado por las ecuaciones 2.13-2.16 junto con las condiciones de contorno, aislantes o conductivas, recogidas en la tabla 2.1.

Una vez obtenido ya un sistema lineal, a través de las ecuaciones 2.13-2.16, que se resolverán a través del método de colocación detallado en [35]. Este se basa en expandir las variables del fluido, como la presión, la velocidad y la temperatura en series truncadas de polinomios ortonormales de Chebyshev. Por lo que, para cada iteración en búsqueda de la solución $U = (p, u_r, u_z, \Theta)$, se utilizarán las expresiones

$$p(r, z) \simeq \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^M a_{nm} T_n(r) T_m(z) \quad (3.2)$$

$$u_r(r, z) \simeq \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^M b_{nm} T_n(r) T_m(z) \quad (3.3)$$

$$u_z(r, z) \simeq \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^M c_{nm} T_n(r) T_m(z) \quad (3.4)$$

$$\Theta(r, z) \simeq \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^M d_{nm} T_n(r) T_m(z) \quad (3.5)$$

Las incógnitas del problema son ahora los coeficientes a_{nm} , b_{nm} , c_{nm} y d_{nm} de la serie de polinomios. Estos desarrollos son sustituidos en las ecuaciones 2.10-2.12 junto con las condiciones de contorno de la tabla 2.1.

La parte no lineal de este problema es resuelta a través del método iterativo de Newton. Por lo que ha de partir de un estado, al que denominaremos por U^0 , para asegurar la convergencia del método. En este caso se han considerado dos tipos de soluciones iniciales. La primera de ellas, y la más común, es estimar una solución (estado básico) a partir de las ecuaciones no lineales a partir de parámetros físicos próximos a los que se quieren utilizar. La segunda, es resolver el sistema despreciando los términos no lineales de las ecuaciones 2.14 y 2.15. Generalmente, la convergencia se da en menos de 20 iteraciones [18]. Para resolver el sistema, se siguen los siguientes pasos [21]:

1. Los polinomios (3.2-3.5) son evaluados en los puntos de Chebyshev-Gauss-Lobatto (CGL), definidos como r_i y z_j :

$$r_i = \cos\left(\pi \frac{i}{N}\right), \quad i = 0, 1, \dots, N, \quad (3.6)$$

$$z_j = \cos\left(\pi \frac{j}{M}\right), \quad j = 0, 1, \dots, M, \quad (3.7)$$

donde N y M corresponden al orden del método en cada dirección, en dirección radial y axial, respectivamente. El uso de puntos CGL es especialmente interesante cuando se trata de efectos de frontera [37], ya que los puntos de colocación tienden a concentrarse cerca de las fronteras.

2. Se sustituyen las discretizaciones de las variables (3.2-3.5) para el estado U^0 en las ecuaciones generales, evaluando los puntos interiores de la malla. De esta forma, se obtienen $4(N-1)(M-1)$ ecuaciones linealmente independientes.
3. Son evaluadas las condiciones de contorno en $r = a$ y $r = a + \delta$ en los nodos en z_j . A lo que se le suma $6(M+1)$ ecuaciones.

4. De igual forma, se evalúan las condiciones de frontera en $z = 0$ y $z = d$ en los nodos internos en r_i . Ahora, con $6(N - 1)$ ecuaciones más.
5. Como condición de contorno para la presión con el fin de evitar los modos espúreos, se evalúa la proyección de la ecuación del momento sobre la normal de cada frontera, en $z = d$ y $r = a, a + \delta$. Este procedimiento se propone en [38]. Con esto, el número de ecuaciones aumenta en $2(M + N)$.
6. Para determinar adecuadamente la presión, es necesario precisar su valor en un punto concreto de la frontera. De forma que se ha sustituido la evaluación de la proyección de la ecuación por la evaluación de sí misma. En este caso, fijando el valor de $p = 0$ en un punto arbitrario de la frontera, escogiendo el nodo $(1, z_4)$.
7. El número total de ecuaciones será de: $N^\circ \text{ ecs.} = 4(N - 1)(M - 1) + 6(M + 1) + 6(N - 1) + 2(M + 1) + 2(N - 1) = 4(N + 1)(M + 1)$

Finalmente, se tendrá un sistema de $4(N + 1)(M + 1)$ ecuaciones lineales, que podrá ser resuelto, ya que se tiene el mismo número de incógnitas. Las matrices para este proyecto serán de un tamaño de $4(23 + 1)(13 + 1) = 1\ 344$ ecuaciones, relativamente pequeño, comparando con trabajos similares. Sin embargo, estas matrices no tienen ningún tipo de simetría, ni son dispersas. Para resolver el sistema se ha hecho uso de un método de Gauss [21].

3.4 Estabilidad lineal

Conocido el estado básico, se procede a estudiar la estabilidad lineal del sistema, o dicho de otra forma, analizar la reacción de las soluciones estacionarias ante perturbaciones infinitesimales. Se considerará que el comportamiento es inestable si la amplitud de la perturbación crece exponencialmente. Si por el contrario, se amortigua exponencialmente, será estable.

En todas las simulaciones realizadas, el estado básico se alcanza para números de Rayleigh bajos. Conforme este número incrementa, y de igual forma, aumenta el de Marangoni, el estado básico se convierte en inestable y aparecen una serie de perturbaciones. El propósito es determinar los números críticos de Ra y Ma , para definir las fronteras de la estabilidad del sistema; y a su vez, la forma de las inestabilidades que son generadas para números de Biot y Prandtl constantes, y Bond variable.

Se denominará con X_1, \dots, X_n a las variables físicas que caracterizan al sistema, tomando como referencia [27]. Por lo que la ecuación obtenida para determinar las fronteras de las regiones de estabilidad e inestabilidad, será de la forma

$$\mathfrak{E}(X_1, \dots, X_n) = 0$$

Los parámetros que cumplen esta condición son denominados estados de estabilidad marginal, y entre ellos se pueden diferenciar dos tipos de los mismos, dependiendo de la periodicidad de las perturbaciones obtenidas. En función de la amplitud de la perturbación,

se pueden observar dos casos bien diferenciados. Si la amplitud de la misma crece de forma constante, el cambio de la situación de estabilidad a la de inestabilidad ocurre mediante un comportamiento estacionario, y por tanto, se dice que se ha producido una bifurcación estacionaria. Por el contrario, si la amplitud de la perturbación es periódica, la transición viene dada por un movimiento oscilatorio con una frecuencia característica, obteniendo una bifurcación oscilatoria, a la que también se conoce como bifurcación de Hopf [21].

3.4.1 Estudio de la estabilidad

En esta sección se pretende describir el método numérico utilizado para analizar la estabilidad del sistema y los estados marginales asociados a ella. Los resultados serán recogidos y discutidos en el capítulo 4.

La estabilidad es analizada a través de la perturbación del estado básico con campos que dependen de las tres coordenadas del espacio r , ϕ y z , tal y como se recoge en [18]. Además, como el problema es axisimétrico, y por tanto, hay periodicidad de las condiciones de contorno en ϕ , y la perturbación puede expandirse en modos de Fourier en la coordenada ϕ como $X(r, \phi, z, t) = X_b(r, z) + X_p(r, z)e^{ik\phi + \lambda t}$. El desarrollo de las magnitudes del fluido será entonces tal y como se muestra:

$$u_r(r, \phi, z, t) = u_r^b(r, z) + u_r^p(r, z)e^{ik\phi + \lambda t} \quad (3.8)$$

$$u_\phi(r, \phi, z, t) = u_\phi^b(r, z) + u_\phi^p(r, z)e^{ik\phi + \lambda t} \quad (3.9)$$

$$u_z(r, \phi, z, t) = u_z^b(r, z) + u_z^p(r, z)e^{ik\phi + \lambda t} \quad (3.10)$$

$$\Theta(r, \phi, z, t) = \Theta^b(r, z) + \Theta^p(r, z)e^{ik\phi + \lambda t} \quad (3.11)$$

$$p(r, \phi, z, t) = p^b(r, z) + p^p(r, z)e^{ik\phi + \lambda t} \quad (3.12)$$

En estas expresiones se designa con el superíndice b el estado básico, y p denota la perturbación inducida. En el exponente del número de e aparece el número de onda, designado por la letra k .

Introduciendo estos desarrollos en las ecuaciones que gobiernan el problema (2.13-2.16), se obtendrá un problema de autovalores generalizado. Su resolución permitirá saber si existe una determinada solución para $\lambda = \lambda(k, \Delta T, \Delta T_h, B, \Gamma_r)$. La principal importancia de la solución reside en el signo de la parte real del valor propio, λ . Ya que λ caracteriza la estabilidad. Para $Re(\lambda) < 0$ la solución es estable, por el contrario, cuando $Re(\lambda) > 0$ es inestable. La parte imaginaria de λ designa el tipo de bifurcación, siendo estacionaria cuando es cero u oscilante si es distinta de cero.

3.4.2 Planteamiento numérico del problema

El problema de autovalores se discretizará de igual forma que para resolver el estado básico, con el método de colocación haciendo uso de los polinomios de Chebyshev. Su aplicación, supone que habrá un nuevo campo para la velocidad angular:

$$u_\phi(r, z) = \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^M e_{nm} T_n(r) T_m(z) \quad (3.13)$$

Los autovalores y funciones propias del problema se calculan sustituyendo las expansiones de Fourier (3.8-3.12) en las ecuaciones generales que describen el comportamiento del sistema (2.10-2.12), incluyendo las condiciones de contorno reunidas en la tabla 2.1. Obteniendo un total de $5(N + 1)(M + 1)$ ecuaciones, e igual número de incógnitas. Después de linealizar el problema, despreciando el término no lineal, como se muestra en [39], el sistema puede resumirse con la siguiente expresión

$$A\bar{X} = \lambda B\bar{X} \quad (3.14)$$

La matriz B es singular, debido a las condiciones de contorno, y por tanto, no todos los autovalores tienen que ser finitos. Esta problemática es resuelta mediante una técnica computacional específicamente diseñada para problemas termoconvectivos, desarrollada por Navarro en [40]. Esta transformación permite convertir valores infinitos en finitos. El mayor autovalor obtenido mediante esta transformación corresponde con el mayor valor propio finito del problema original.

La matriz A es la que contiene los términos que multiplican al vector de incógnitas formado por los coeficientes de los polinomios: $\bar{X} = (a_{nm}, b_{nm}, c_{nm}, d_{nm}, e_{nm})^T$; excepto los multiplicados por λ , que se encuentran en la matriz B . El problema de autovalores (ecuación 3.14) se resuelve a través de su determinante, como $\det(A - \lambda B) = 0$, buscando una solución no trivial. Lo que equivale a buscar los autovalores directamente del sistema, es decir, se obtendrá los valores de λ con las siguientes características

$$\lambda = \lambda(k, \Delta T, \Delta T_h, Bo, Pr)$$

Como se ha comentado previamente, la estabilidad lineal del estado básico la determina el signo de la parte real de los autovalores del sistema de ecuaciones, y al que se le va a denominar de ahora en adelante como

$$\mu := \max(Re(\lambda)) \quad (3.15)$$

Por lo que para cumplir con los objetivos, se analizará el signo de μ : cuando μ es negativo, la solución del sistema será estable; cuando éste es positivo será inestable. Como la estabilidad del estado básico depende del signo de μ , que denota el signo de la parte real de los autovalores λ del problema, por ende, dependerá de los mismos parámetros de control

$$\mu = \mu(k, \Delta T, \Delta T_h, Bo, Pr)$$

Para considerar el signo, positivo o negativo, habrá que buscar los ceros de esta función, para conocer si realmente hay un cambio en la estabilidad. La complejidad reside en buscar ceros en una función que depende de 5 parámetros. Es por eso, por lo que se han de eliminar grados de libertad para facilitar el proceso. Como este trabajo se centra en la influencia de los términos gravitatorios y parámetros térmicos, se fija el número de Prandtl para cada caso (aislante y conductivo) en $Pr = 1$, $Pr = 5$ y $Pr = 50$, y así analizar los efectos de los términos no lineales para cada escenario. Así, para distintos valores de la diferencia de temperatura entre los dos cilindros ΔT_h y del número de Bond Bo (a través de la aceleración gravitatoria), se buscan los resultados de número de onda y relación de la temperatura máxima alcanzada en la celda con la del entorno $(k, \Delta T)$, que generan cero en la función

$$\mu(k, \Delta T, \Delta T_h, Bo, Pr) = 0$$

definiendo entonces el par $(k_c, \Delta T_c)$, número de onda y temperatura crítica, por la relación

$$\Delta T_c = \min_{k \in \mathcal{N}} \left\{ \Delta T_c^k : \mu(k, \Delta T_c^k, \Delta T_h, Bo, Pr) = 0 \right\}$$

donde \mathcal{N} corresponde a un intervalo de números naturales, que estará en entorno a los valores de $\mathcal{N} = [0, 35]$. A continuación se muestra la tabla 3.1 para $Pr = 1$ en el caso aislante.

Tabla 3.1: Tabla de resultados para $N = 23$ y $M = 13$. En ella se recogen los pares críticos $(k_c, \Delta T_c)$, en los que se producen inestabilidades para diferentes números de Bond y ΔT_h . Cuando el número de onda es imaginario y contiene la i , se trata de bifurcaciones de Hopf.

	$\Delta T_h = 0.1$		$\Delta T_h = 2.5$		$\Delta T_h = 5.1$		$\Delta T_h = 7.5$		$\Delta T_h = 9.9$	
Bo = 68.45	2.4711	13	4.6153	0i	9.5413	1i	16.1539	34	21.6434	23i
Bo = 58.77	2,8316	13	4.8277	0i	8.9217	11	15.3862	33	22.7061	22i
Bo = 49.09	3.3174	13	5.1716	0i	8.5018	11	14.1791	11	21.3266	34
Bo = 39.41	4.0075	13	5.7362	0i	8.6047	11	12.2808	11	18.4890	12
Bo = 29.73	5.0644	13	6.6811	9i	9.3385	11	11.8186	11	15.3525	11
Bo = 20.05	6.8834	14	8.3885	9i	10.7559	0i	12.8859	11	15.0116	11
Bo = 10.37	10.7269	15	12.1744	10i	14.1296	7i	16.4529	0i	18.1920	12
Bo = 0.69	23.6301	15	25.2029	11i	26.8158	9i	28.5611	8i	30.5654	6i

3.4.3 Cálculo de la temperatura y número de onda críticos

Para el cálculo de la temperatura y número de onda crítico, es decir, la búsqueda del par $(k_c, \Delta T_c)$, se han analizado tres técnicas, propuestas en [21] y que serán descritas a lo largo de esta sección.

Método exhaustivo

Este método busca, para una serie de números de onda k pertenecientes al intervalo \mathcal{N} , el valor de μ para un ΔT fijo. Su funcionamiento se basa en aplicar pequeños incrementos de ΔT , hasta alcanzar un valor de ΔT^+ , para el que se cumple que $\mu(k^+, \Delta T^+) > 0$, y cuyo valor de $k^+ \in \mathcal{N}$. Se define el número de onda crítico como k_c , que corresponderá al valor de k^+ que maximiza el par $\mu(k^+, \Delta T^+)$. Se buscarán los ceros de la función $\mu_{k_c}(\Delta T)$, obteniendo de esta forma los valores de ΔT_c . Se comprueba el valor de ΔT_c calculando la curva $c(k) = \mu(k, \Delta T_c)$. Se debería refinar la búsqueda en caso de que ΔT_c no fuese el valor buscado.

Se utilizará un método iterativo de extrapolación de cuatro puntos para buscar los ceros de la función $\mu_{k_c}(\Delta T)$. Dada la función $\mu_{k_c}(\Delta T)$, son conocidos los valores de la misma en dos puntos, que se denotarán como ΔT_1 y ΔT^+ , siendo positivo en alguno de estos dos valores. Con estos dos puntos, se calculará un tercer punto por interpolación lineal, y hasta un cuarto punto con interpolación de los otros tres. Una vez se tienen los cuatro puntos, se calcula el polinomio de interpolación y se busca el cero del mismo. El resultado obtenido sustituye al de mayor valor absoluto de los cuatro puntos. Se sigue un proceso iterativo, hasta que se alcanza $|\mu_{k_c}(\Delta T_c)| \leq 10^{-6}$. La convergencia se suele alcanzar rápidamente, en una o dos iteraciones.

La principal desventaja de este método es que computacionalmente es muy costoso, debido a que se deben calcular el resultado de numerosos puntos, de los cuáles la mayoría van a ser prescindibles. También tiene el inconveniente, de que al inicio de la búsqueda, los primeros valores de onda crítico no suelen ser válidos. Sin embargo, sí que es un método muy apropiado para disminuir el rango de k_c y ΔT_c y encontrar la solución correcta. Tam-

bién proporciona una mejor idea de la estabilidad global del sistema.

Método directo

El método directo se basa en calcular un número de onda $k \in \mathcal{N}$, hallando un $\Delta T'$ para el que se cumple $\mu(k, \Delta T') = 0$. El intervalo del número de onda, \mathcal{N} , se supone conocido, por lo que se define la relación

$$\Delta T_c = \min_{k \in \mathcal{N}} \left\{ \Delta T'_k : \mu(k, \Delta T'_k) = 0 \right\} \quad (3.16)$$

Para calcular el cero de la función μ para cada par de $(k, \Delta T'_k)$, se hace uso del método de la secante, cuya convergencia es también bastante rápida. Se utiliza la iteración mostrada en la ecuación 3.17, con la que se alcanza $|\mu_{k_c}(\Delta T_c)| \leq 10^{-6}$ en cuatro o cinco iteraciones.

$$(\Delta T_c)^{i+1} = (\Delta T_c)^i - \frac{\mu_k((\Delta T_c)^i) \left((\Delta T_c)^i - (\Delta T_c)^{i-1} \right)}{\mu_k((\Delta T_c)^i) - \mu_k((\Delta T_c)^{i-1})} \quad (3.17)$$

La utilidad de este método reside en que se calcula exactamente los resultados de $(k_c, \Delta T_c)$. El problema surge cuando el sistema no es monótono, algo bastante usual en el escenario conductivo, o en caso de que las variaciones de la función μ son muy bruscas.

Método mixto

Este último método, es una mezcla entre los dos algoritmos anteriores. Una vez definidos los límites del intervalo \mathcal{N} , se ha de refinar la malla y lanzar este tercer método. Primero, es aplicado el método exhaustivo en el intervalo \mathcal{N} , tras lo que se construye un nuevo intervalo, denominado \mathcal{N}_c , un subconjunto de \mathcal{N} , éste incluye los números de onda que cumplen la condición $\mu(k, \Delta T^+) > 0$. Conocido \mathcal{N}_c , es utilizado el método directo para obtener la temperatura crítica para cada valor de k , a través de un método iterativo que combina la extrapolación y secante. Por último, se selecciona el par crítico más restrictivo, con el menor valor de ΔT .

Este método, aunque presenta una clara desventaja frente a los otros dos, debido a que es el más lento de los tres, es el algoritmo más estable y fiable.

3.4.4 Bifurcaciones de codimensión dos

Se considera una bifurcación de codimensión dos cuando coexisten dos comportamientos distintos simultáneamente en el mismo dominio. Matemáticamente, esto se traduce en que,

para una misma temperatura ΔT , hay dos números de onda críticos, k_c^1 y k_c^2 , por lo que se cumple la condición

$$\mu(k_c^1, \Delta T) = \mu(k_c^2, \Delta T) = 0 \quad (3.18)$$

Es necesario para poder hallar los parámetros críticos definir una nueva función, a la que se denominará por la letra ν

$$\nu := \nu(k_c^1, k_c^2, Bo) = \Delta T_c^1 - \Delta T_c^2 \quad (3.19)$$

Obteniendo finalmente las funciones

$$\mu(k_c^1, \Delta T_c^1, Bo) = \mu(k_c^2, \Delta T_c^2, Bo) \quad (3.20)$$

Debido a que la búsqueda de los resultados de las funciones 3.20 es muy costosa computacionalmente, se debe optimizar todo lo posible el método para la búsqueda de ceros en ν , minimizando de esta forma el número de iteraciones. En este estudio, para la resolución del problema, siguiendo la referencia [21], se ha hecho uso de un método que combina tres técnicas: extrapolación, secante y bisección. Con ello, se logra conseguir una precisión para ν de 10^{-5} con solo 4 o 5 iteraciones. Primero, se basa en encontrar el valor de ν del punto medio del intervalo de los números de Bond (equivale a decir término gravitatorio g), donde se encuentra el cero, mediante la técnica de bisección, y se repite el proceso para un segundo punto. Tras ello, se utiliza el método de la secante para conocer un punto en el que ν cambie de signo. Una vez se obtenga, se aplicará la extrapolación para llegar mucho más rápido a la solución.

El código computacional del presente estudio ha sido implementado en Fortran90 y validado experimentalmente en [20]. La estructura del algoritmo aplicado mediante el método mixto descrito se presenta en el anexo A.

Capítulo 4

Resultados

La evolución de un sistema físico como el presentado en este proyecto, con cuatro parámetros variables (ΔT_h , ΔT , Bo , Pr), genera una gran cantidad y variedad de resultados, por lo que su análisis no será sencillo.

El primero de los parámetros de control fundamentales para la generación de inestabilidades es el parámetro térmico ΔT , que recordando, se trata de la diferencia entre la temperatura máxima del dominio y la temperatura ambiente. Éste es controlado a través del gradiente horizontal impuesto en el fondo, y que varía de 0.1 a 9.9 K. Los efectos térmicos originarán inestabilidades para el mismo término gravitatorio. El segundo, será el término gravitatorio, que como el proyecto se centra en entornos de ingravidez, oscilará de 0 a 9.9 m/s^2 , que se traduce en una variación del número de Bond, de 0 a 70, respectivamente. Mostrándose inestabilidades para un mismo gradiente térmico.

En esta sección primero se presentarán las posibles bifurcaciones en las que pueden ramificar los estados básicos. Tras ello, se mostrarán los resultados obtenidos, junto con su análisis y la discusión de los mismos. Entre los resultados habrá tanto gráficas bidimensionales para un análisis más profundo como figuras tridimensionales para visualizar la forma de algunas perturbaciones crecientes y, asimismo, facilitar la comprensión de las bifurcaciones de codimensión dos.

4.1 Bifurcaciones

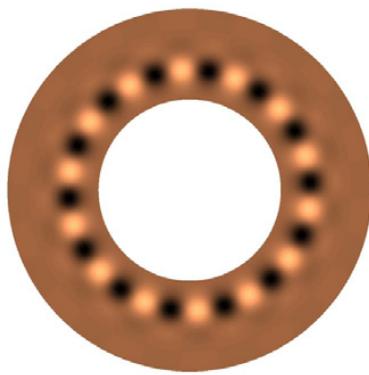
Las soluciones estacionarias que son alcanzadas, es decir, los distintos estados básicos se vuelven inestables conforme aumenta el valor de ΔT y Bo . En cuanto a su significado matemático, esto se traduce en que el signo de la parte real de los autovalores del problema para una temperatura dada $\mu(\Delta T)$ cambia de signo para el par $(k_c, \Delta T_c)$: siendo para $Re(\lambda) < 0$ la solución estable, y para $Re(\lambda) > 0$ inestable. Será el valor de la parte imaginaria de los autovalores λ los que definirán el tipo de bifurcación originada:

- Bifurcación oscilatoria (de Hopf): $Im(\lambda) \neq 0$
- Bifurcación estacionaria: $Im(\lambda) = 0$

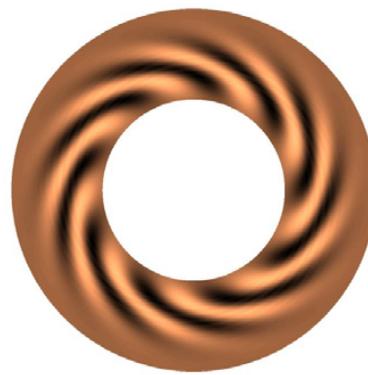
Además de estos dos casos, se podrán localizar otro tipo de bifurcaciones, conocidas como bifurcaciones de codimensión dos. Su interpretación física es una situación en la que coexisten dos comportamientos distintos en el sistema. Las bifurcaciones de codimensión dos que se han encontrado son las siguientes:

- Bifurcación estacionaria-estacionaria: Los dos autovalores del problema son reales.
- Bifurcación estacionaria-oscilatoria: Uno de los autovalores es real y el otro complejo.

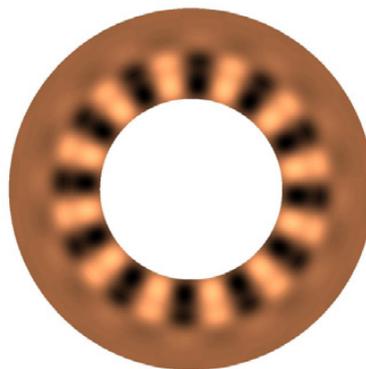
A continuación, en la figura 4.1 se muestran algunos ejemplos de los tipos de bifurcaciones nombrados.



(a) Bifurcación estacionaria



(b) Bifurcación de Hopf (oscilatoria)

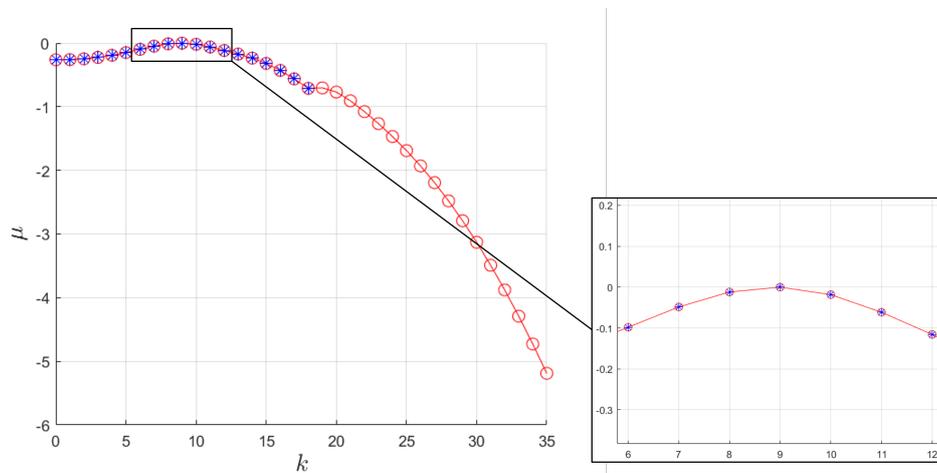


(c) Bifurcación de codimensión dos (Estacionaria-Oscilatoria)

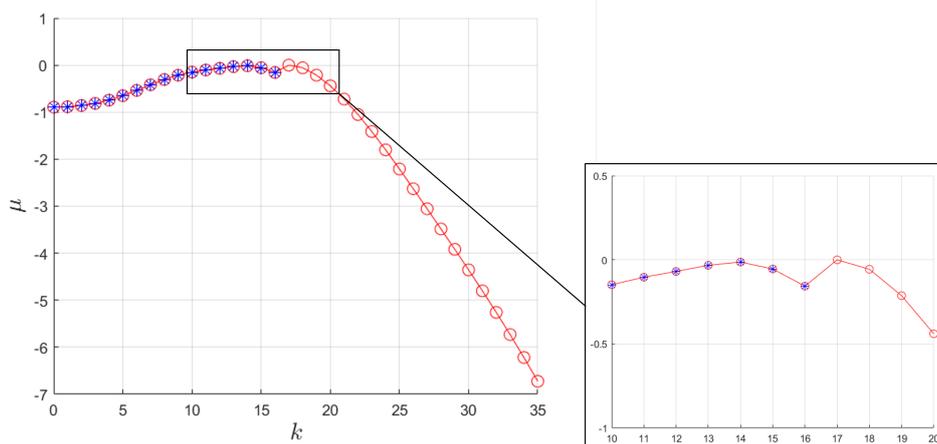
Figura 4.1: Ejemplos de distribuciones de temperatura típicas de algunas de las bifurcaciones del problema [31]

El análisis de la estabilidad, como bien se ha mencionado anteriormente, se basa en la búsqueda del par crítico $(k_c, \Delta T_c)$ asociado al autovalor máximo del estado básico. Esto se realiza a través del algoritmo descrito en el anexo A, y resuelto mediante el método mixto

explicado en el apartado 3.4.3. De esta forma se hallará el tipo de bifurcaciones que tienen lugar con la ayuda de los diagramas de estabilidad lineal que se muestran en la figura 4.2.



(a) $Bo = 2.7656$ ($g = 0.4 \text{ m/s}^2$), $\Delta T_h = 8.7 \text{ K}$



(b) $Bo = 44.25$ ($g = 6.4 \text{ m/s}^2$), $\Delta T_h = 3.1 \text{ K}$

Figura 4.2: Diagramas de estabilidad marginal: Caso aislante para $Pr = 50$. Se muestra un caso de codimensión 1 (a) y otro de codimensión 2 (b). Los asteriscos denotan los valores propios complejos, mientras que los símbolos vacíos representan valores reales.

Los diagramas de la figura 4.2 muestran la estabilidad marginal para dos casos bien diferenciados. En la figura 4.2(a) se presenta un caso de codimensión 1 para el escenario aislante para $Pr = 50$, en 4.2(b) es de situación análoga de codimensión 2. Se representa el valor de μ frente al número de onda, en ambas aparecen dos ramas de soluciones compitiendo, una estacionaria y otra oscilante. Los valores propios complejos se denotan por asteriscos, los reales simplemente con circunferencias. Para este caso, en el diagrama superior se observa como se obtiene un cero de la rama para $\Delta T_h = 8.7 \text{ K}$ y $k_c = 9i$, y por tanto, tratándose de una bifurcación oscilatoria. Sin embargo, en la figura inferior, de codimensión dos, se tiene que para el mismo valor de $\Delta T_h = 3.1 \text{ K}$, hay dos pares $\mu(14i, \Delta T_h) = \mu(17, \Delta T_h) = 0$, con presencia de una perturbación móvil y una estacionaria, respectivamente.

4.2 Influencia de los parámetros

En este apartado se muestran los resultados que se han considerado de mayor relevancia e importancia para conocer el producto de la variación de los distintos parámetros de control:

- Parámetros térmicos: $\Delta T_h \in [0.1, 9.9]$
- Término gravitatorio: $Bo \in [0, 70]$
- Efectos viscosos: $Pr = [1, 5, 50]$

Como el interés de este trabajo reside en el parámetro de control de las distintas bifurcaciones ΔT , se fija el número de Prandtl, a partir del cuál se estudia la influencia de Bo y ΔT_h en el tipo de bifurcación. En publicaciones recientes de Hoyas se mostró que ni la variación de los números de Biot ni de Prandtl afecta en gran medida a la forma del estado básico, para un valor constante de Γ . Se descubrió que el número de Bond es el parámetro más significativo que influye en la aparición de inestabilidades.

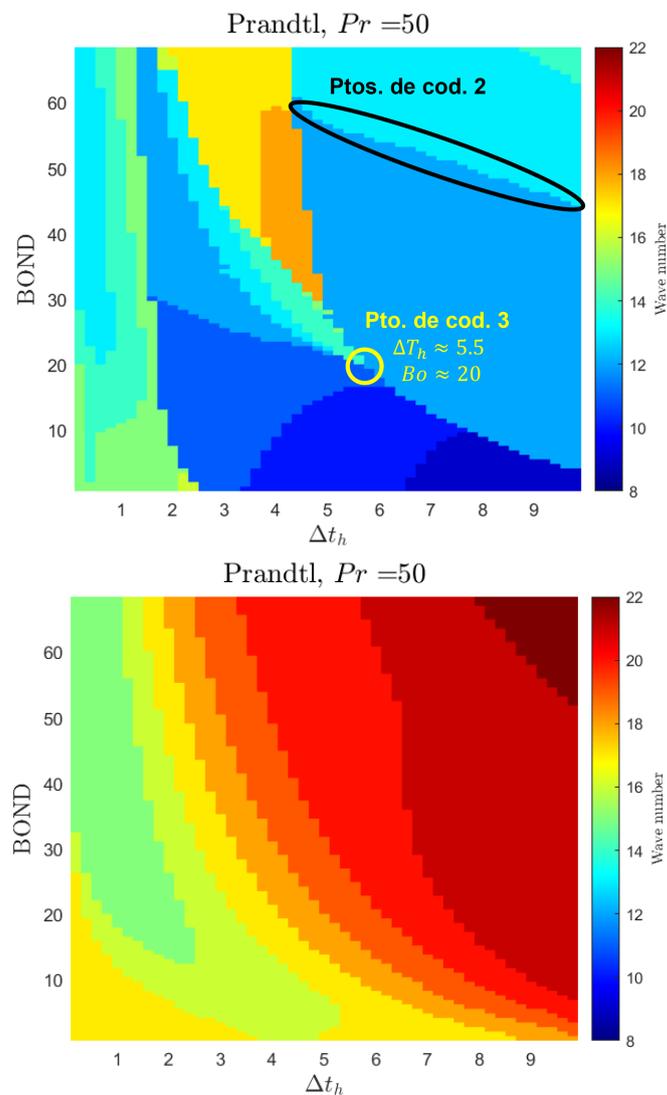


Figura 4.3: Número de onda crítica en el plano $Bo-\Delta T_h$. Para las condiciones de $Pr = 50$, $Bi = 0.7$, y $\Gamma = 4$. Arriba se muestran los resultados del caso aislante, y abajo del conductivo

En la figura 4.3 se muestran en la parte superior los resultados del número de onda crítico para Prandtl igual a 50 para el caso aislante, y en la parte inferior los resultados equivalentes para el conductivo. En ambas se observan las diferentes regiones encontradas en el plano formado por el número de Bond y el gradiente horizontal. Indicando también el valor del número de onda crítico de la perturbación. Las curvas que separan las distintas regiones, están formadas por puntos de codimensión dos, en los que, para un mismo valor de los distintos parámetros (señalados en los ejes), hay al menos dos números de onda críticos y, por tanto, aparecen distintos tipos de perturbación simultáneas. Incluso se contemplan puntos de codimensión tres, el punto donde dos de estas curvas se cruzan: un ejemplo es visible en la gráfica superior, a un gradiente de 5.5 y número de Bond de 20.

Con respecto a la diferencia entre aislante y conductivo, vemos más aleatoriedad en el comportamiento del fluido en el caso aislante. En el caso conductivo podemos hablar de que sigue una tendencia progresiva, aumentando el valor del número de onda conforme lo van haciendo el de Bond y el gradiente de temperatura. Cabe mencionar, que en las gráficas se muestra el número de onda k , independientemente de si este es un valor real o imaginario. Se observa como se alcanzan mayores valores para el caso conductivo.

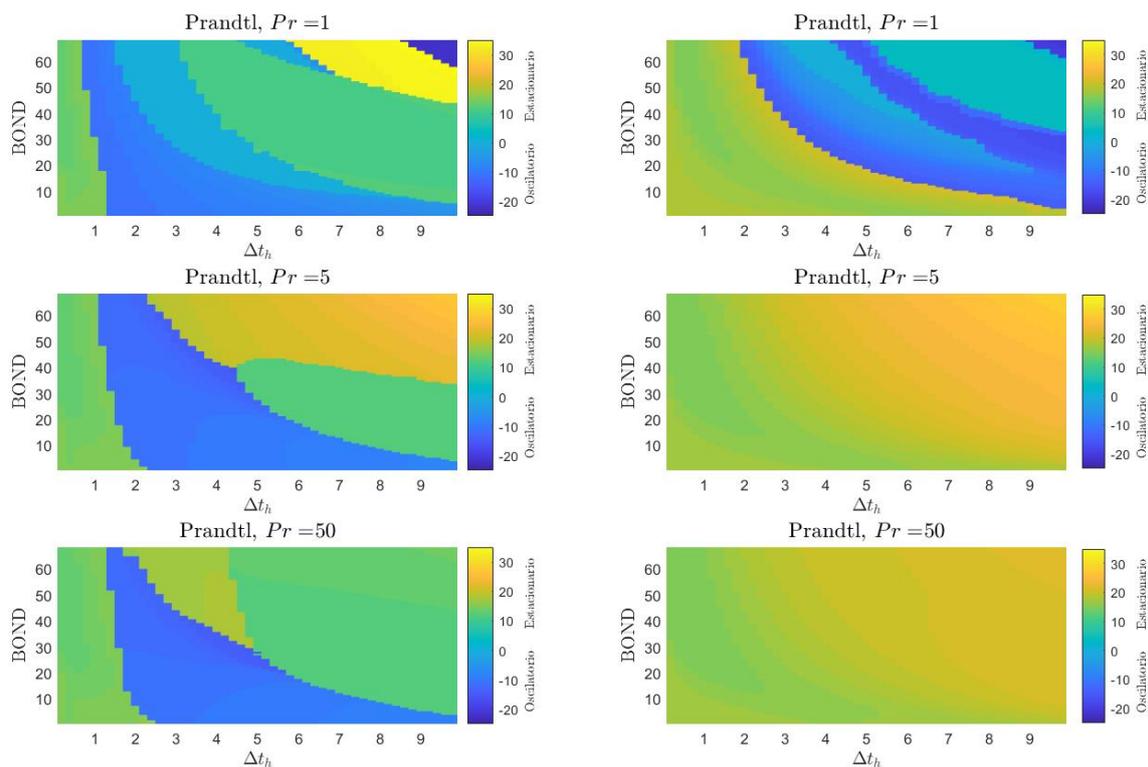


Figura 4.4: Número de onda crítico en el plano $Bo-\Delta T_h$. Los resultados están divididos en soluciones estacionarias, $Im(\lambda) = 0$; y casos oscilatorios, $Im(\lambda) \neq 0$. A izquierda se muestran los resultados para el caso aislante, a derecha los del conductivo

En la figura 4.4 se muestra de nuevo el número de onda para ambos escenarios, aislante

y conductivo, representando cada número de Prandtl analizado. En la misma, igual que las anteriores gráficas, se presentan gráficos de contorno del número de onda para la variación del número de Bond y ΔT_h . Se presentan dos paletas de colores bien diferenciadas: una de gama de azules, para representar los modos oscilatorios ($Im(\lambda) \neq 0$); y otra de verde a amarillo para los casos estacionarios ($Im(\lambda) = 0$).

En los resultados obtenidos del caso aislante, gráficas de la izquierda, siguiendo una línea horizontal, es decir, a número de Bond constante aumentando el gradiente ΔT_h , se observa como a bajos gradientes de temperatura la solución es estacionario, conforme va aumentando la relación hay una zona de modos oscilatorios, y finalmente cuando se alcanza los mayores gradientes el sistema se vuelve de nuevo estacionario. Conforme se aumenta el número de Prandtl y el de Bond, el rango de ΔT_h en el que se originan modos oscilatorios se ve reducido. El efecto del número de Prandtl puede explicarse con el aumento del amortiguamiento debido a las fuerzas viscosas, mientras que el efecto de Bo está relacionado con la disminución de las fuerzas de termocapilaridad a un número de Rayleigh dado. En cuanto al escenario con condiciones conductivas, presentan una estabilización del sistema en Pr igual a 5, donde los efectos viscosos empiezan a cobrar importancia, y para Prandtl igual a 50, en el que la solución del sistema está completamente dominada por la viscosidad.

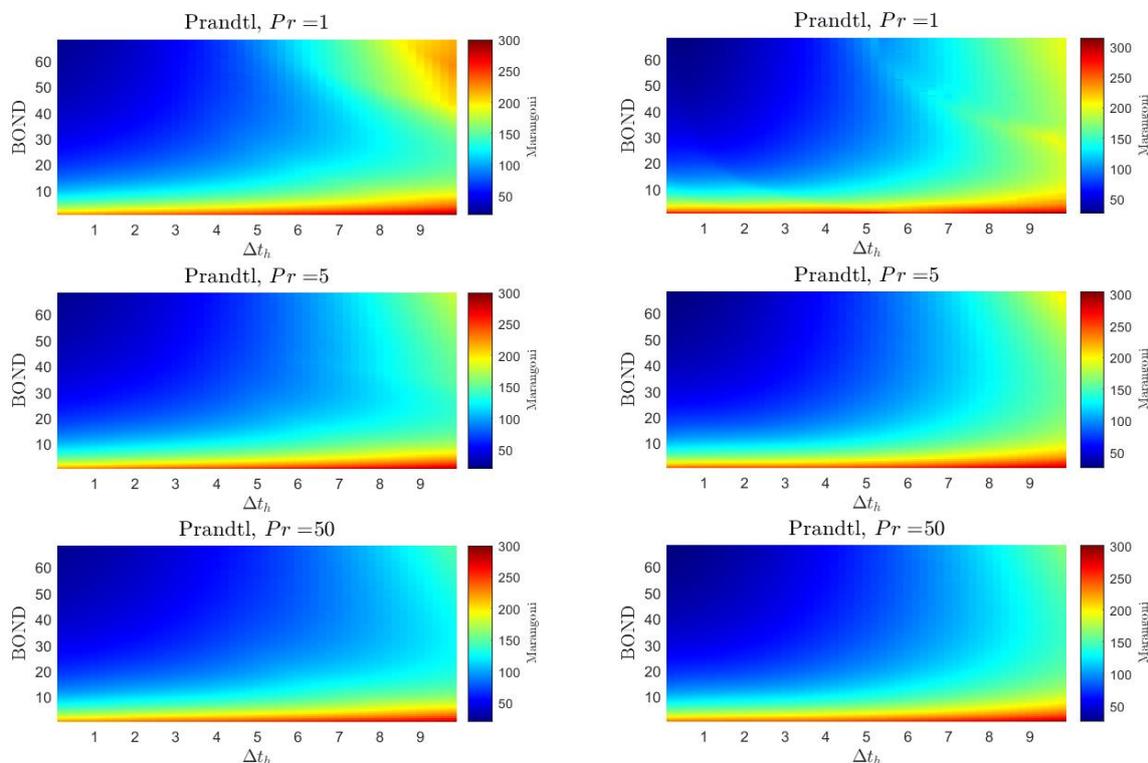


Figura 4.5: Número de Marangoni a temperatura crítica. A izquierda se muestran los resultados para el caso aislante, a derecha los del conductivo

En la figura 4.5 se muestra la evolución del número crítico de Marangoni para todos los escenarios de estudio. Aunque muy similares, se observa en las gráficas que a bajos números de Bond, condiciones de baja gravedad, las fuerzas de capilaridad controlan las inestabilidades del flujo, independientemente del número de Prandtl. Por el contrario, a mayor número de Bond, el número crítico de Marangoni es menor, prácticamente constante y ligeramente mayor en las zonas de mayor gradiente, debido a que las inestabilidades son provocadas principalmente por los efectos de flotación.

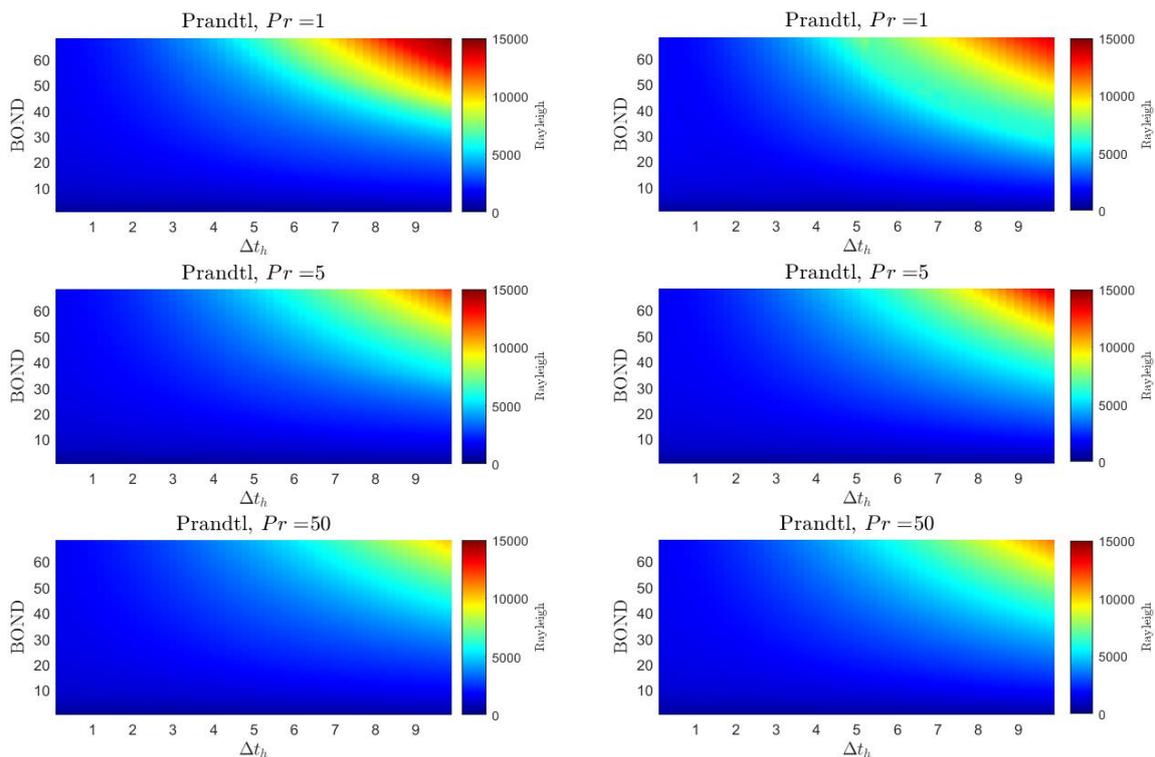


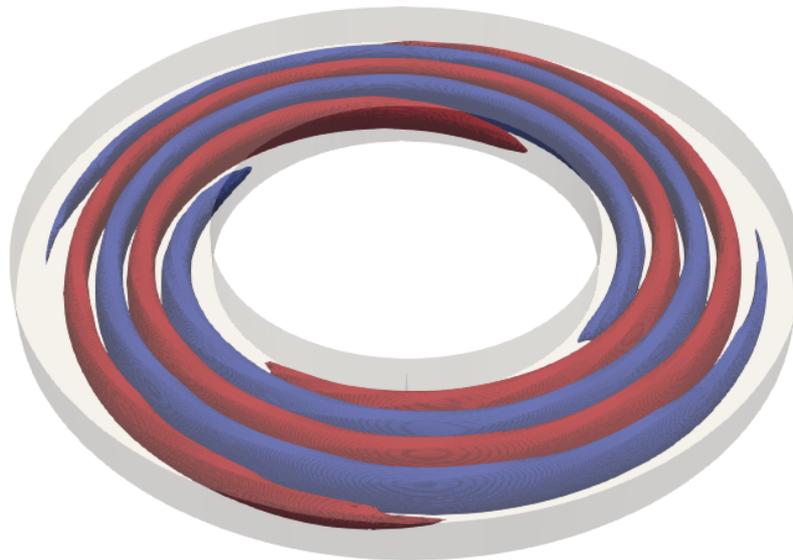
Figura 4.6: Número de Rayleigh a temperatura crítica. A izquierda se muestran los resultados para el caso aislante, a derecha los del conductivo

La figura 4.6 proporciona información de los valores del número crítico de Rayleigh frente a la relación de Bo con el gradiente de temperatura horizontal. Entre la solución de paredes adiabáticas y la de temperatura constante no se advierte grandes diferencias. El número de Rayleigh se dispara en más de dos órdenes de magnitud en una zona localizada a altos Bo y ΔT_h , fuera de ella los valores de Ra decrecen drásticamente a dos órdenes por debajo.

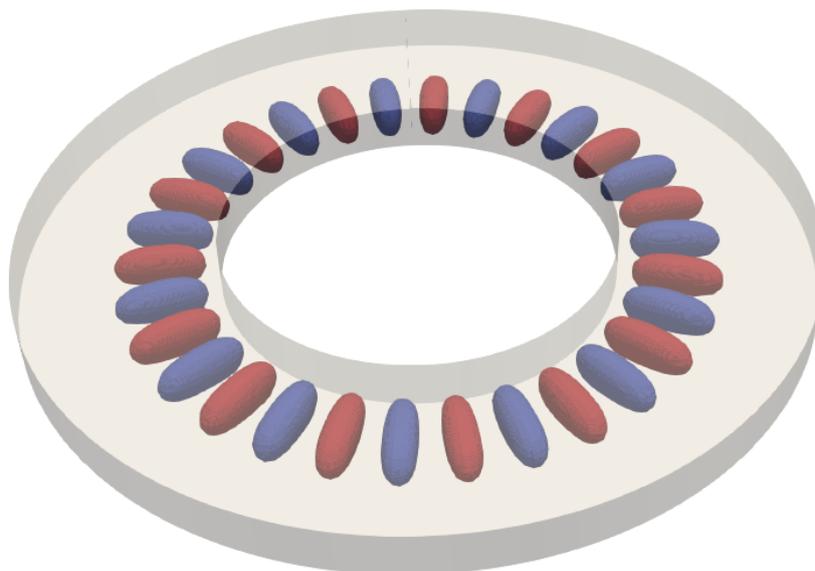
Por último, se presenta unos gráficos tridimensionales (figuras 4.7 y 4.8) del campo de temperatura de las perturbaciones. En la figura 4.7 se muestran dos estados de codimensión uno, en concreto:

- En la figura 4.7(a): Ondas hidrotermales de primer tipo u ondas viajeras oblicuas (HWI).

- En la figura 4.7(b): Rollos longitudinales (LR)



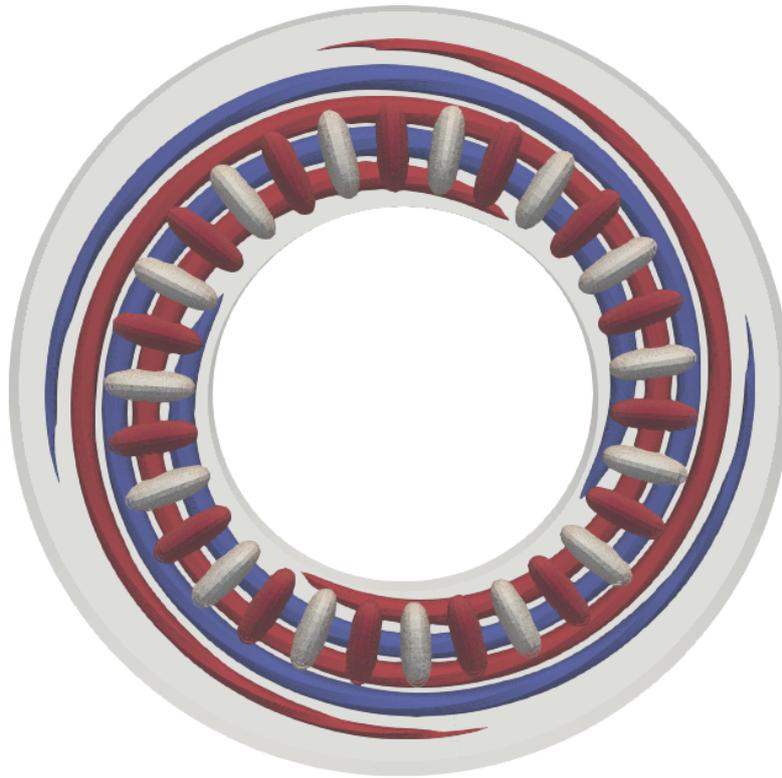
(a) Ondas hidrotermales de primer tipo (HWI)



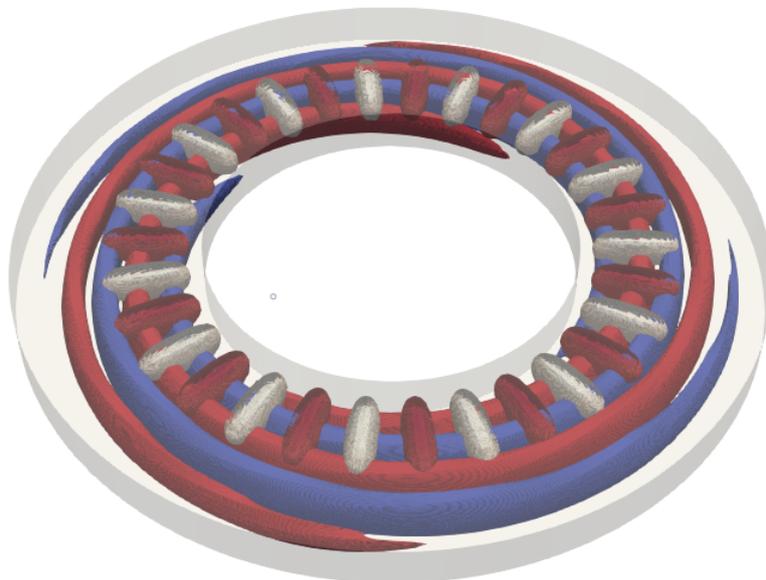
(b) Rollos longitudinales (LR)

Figura 4.7: Gráfico tridimensional del campo de temperaturas de las perturbaciones crecientes del sistema

La suma de estos dos estados, da como resultado el caso de codimensión dos presentado en la figura 4.7, en la que como se muestra, tienen lugar dos comportamientos simultáneamente.



(a) Vista en planta



(b) Vista en perspectiva

Figura 4.8: Gráfico tridimensional del campo de temperaturas de las perturbaciones crecientes del sistema. Coexistiendo dos estados, por lo que es bifurcación de codimensión dos

Capítulo 5

Conclusiones

En este trabajo se evalúa la influencia de las fuerzas gravitatorias y de capilaridad en la aparición de inestabilidades de un fluido en un problema de convección de Bénard-Marangoni. Se han realizado simulaciones numéricas en un dominio anular con un gradiente de temperatura impuesto en su pared inferior. Partiendo de esta situación general, se han analizado dos escenarios distintos, uno con las paredes verticales de los cilindros adiabáticas para controlar el trasvase de calor con el entorno; y otro en el que se les aplica una temperatura constante. El gradiente inferior induce un campo de velocidades en el sistema, que evoluciona hasta alcanzar un estado básico. El análisis se realiza para 3 valores diferentes de los números de Prandtl, que van desde un problema dominado por la viscosidad ($Pr = 50$) hasta problemas en los que los efectos del flujo no lineal son importantes ($Pr = 1$), pasando por un problema intermedio representativo de las condiciones del agua en condiciones ambientales ($Pr = 5$). Este trabajo también aborda la influencia de la tensión superficial y la termocapilaridad en la perturbación de las inestabilidades calculadas, analizando un rango de los números de Bond, desde 0 a 70, a través de la variación del término gravitatorio.

Se ha estudiado el número de onda crítico y la temperatura crítica para cada combinación del número de Bond y el gradiente horizontal del dominio ΔT_h . Las perturbaciones se dividen en estacionarias y oscilatorias en función de la parte imaginaria del valor propio. El aumento de ΔT_h permite pasar de un modo inestable estacionario a uno oscilatorio, y luego aumentando ΔT_h a estacionario de nuevo.

Se ha demostrado que los diferentes tipos de perturbación comparten una frontera común en el plano Bond- ΔT_h , estos puntos donde se encuentran dos soluciones en competencia se conocen como puntos de co-dimensión dos.

Se encuentran diferentes inestabilidades a lo largo de la línea de Bo constante, mezclando tanto las oscilatorias como las estacionarias. Para condiciones de paredes adiabáticas, el aumento de Pr tiene un efecto estabilizador en el flujo que se vuelve inestable; así mismo el aumento de Bo tiene un efecto desestabilizador, resultando en números de onda más altos. Conforme se aumenta el número de Prandtl y el de Bond, el rango de ΔT_h en el que se originan modos oscilatorios se ve reducido. El efecto del número de Prandtl puede explicarse con el aumento del amortiguamiento debido a las fuerzas viscosas, mientras que el efecto de Bo está relacionado con la disminución de las fuerzas de termocapilaridad a un

número de Rayleigh dado.

En el caso conductivo, con gradientes tan grandes, se estabiliza mucho el fluido, se necesita mucha energía para desestabilizarlo. Además, no potencia ondas móviles, y solo hay presencia de ondas estacionarias. En el momento en el que las fuerzas viscosas empiezan a cobrar importancia ($Pr = 5, 50$), ya no hay presencia de ondas oscilatorias.

Independientemente del número de Prandtl y de las condiciones de las paredes verticales, a bajos números de Bond, condiciones de baja gravedad, las fuerzas de capilaridad controlan las inestabilidades del flujo. Por el contrario, hay una zona localizada en la que las fuerzas de flotabilidad controlan las inestabilidades del flujo, a altos números de Bond y mayores gradientes de temperatura. El número de Rayleigh se ve disparado en dos o más órdenes de magnitud por encima del resto de zonas en el plano $Bo-\Delta T_h$.

Capítulo 6

Pliego de condiciones

En este capítulo se pretende exponer de forma resumida la normativa vigente de las ordenanzas sobre la situación de seguridad, mantenimiento e higiene que han de llevarse a cabo en el puesto de trabajo. En concreto, se considerarán aquellos referentes al presente Trabajo de Fin de Máster.

6.1 Derechos y obligaciones de los trabajadores

Recae en la responsabilidad de cada trabajador el obligado cumplimiento de colaborar en toda tarea o actividad relacionada con la prevención de riesgos y el mantenimiento de una situación de higiene adecuada, para cuyos fines han de cumplirse textualmente todos los preceptos según las ordenanzas junto con sus directrices complementarias, así como las reglas e instrucciones que sean dadas convenientemente por el personal de mayor autoridad.

Los derechos y obligaciones de los trabajadores recogidas en el Real Decreto 2/2015 del 23 de octubre. A continuación, se resumen en:

- Recibir formación sobre seguridad e higiene, salvamento y socorrismo, que será facilitada por el centro de trabajo.
- Correcto uso de los medios de protección facilitados para el personal. Garantizar su perfecto estado en todo momento.
- Informar de averías o posibles riesgos que puedan originar situación de peligro en el puesto de trabajo al personal competente designado para esta tarea.
- Mantener la higiene personal e individual para evitar molestias en el entorno de trabajo y evitar propagación de enfermedades.
- Ofrecerse receptivo a todo tipo de reconocimiento médico, vacunación o cualquier medida que sea ordenada por las autoridades sanitarias responsables.
- Prohibido introducir cualquier tipo de bebida o comida no autorizada por el centro de trabajo. También se prohíbe presentarse en el puesto de trabajo bajo cualquier estado de intoxicación.

- Cooperar para evitar cualquier tipo de accidente, ya sea por causa medioambiental o factor humano, y en la evacuación y salvamento de las víctimas accidentadas, bajo condiciones de seguridad.
- Todo trabajador tiene derecho a solicitar a su superior cualquier medio u objeto de protección personal en su puesto de trabajo, al que a su vez han de ser facilitados los medios para la ejecución de éste.

6.2 Condiciones del puesto de trabajo

La normativa que más se adapta al tipo de actividad desarrollada a lo largo de este trabajo es la recogida en el Real Decreto 488/1997 del 14 de abril, sobre disposiciones mínimas de seguridad y salud relativas al trabajo con equipos que incluyen pantallas de visualización. En donde se recoge por propia definición, que un puesto de trabajo con pantallas de visualización es el constituido por un equipo con pantalla de visualización provisto, en su caso, de un teclado o dispositivo de adquisición de datos, de un programa para la interconexión persona/máquina, de accesorios ofimáticos y de un asiento y mesa o superficie de trabajo, así como el entorno laboral inmediato.

6.2.1 Seguridad estructural

Todos los edificios permanentes o temporales que hayan sido necesarios a lo largo de este proyecto, serán de construcción segura y firme para evitar su hundimiento o desplome, y aguantar aquellos fenómenos de índole medioambiental.

Con los objetivos de mejorar la calidad de la edificación, y de promover la innovación y la sostenibilidad, el Gobierno aprueba el Código Técnico de la Edificación. Se trata de un instrumento normativo que fija las exigencias básicas de calidad de los edificios y sus instalaciones. A través de esta normativa se da satisfacción a ciertos requisitos básicos de la edificación relacionados con la seguridad y el bienestar de las personas, que se refieren, tanto a la seguridad estructural y de protección contra incendios, como a la salubridad, la protección contra el ruido, el ahorro energético o la accesibilidad para personas con movilidad reducida.

6.2.2 Superficie y espacio de trabajo

La superficie y espacio de trabajo donde se desarrolla la totalidad de este estudio deberán atenerse a lo establecido en el Real Decreto 486/1997, de 14 de abril, por el que se establecen las disposiciones mínimas de seguridad y salud en los lugares de trabajo.

Entre las condiciones mínimas especificadas del espacio de trabajo pueden destacarse:

- 3 metros de altura desde el piso al techo.
- 2 metros cuadrados de superficie libre por trabajador.
- 10 metros cúbicos, no ocupados, por trabajador.

- Los suelos deberán de ser fijos, estables y no resbaladizos, sin irregularidades ni pendientes peligrosas.
- Las rampas tendrán una pendiente máxima del 12 por 100 cuando su longitud sea menor que 3 metros, del 10 por 100 cuando su longitud sea menor que 10 metros o del 8 por 100 en el resto de los casos.
- Las escaleras tendrán una anchura mínima de 1 metro, excepto en las de servicio, que será de 55 centímetros.

6.2.3 Disposiciones mínimas del equipo

En un puesto de trabajo con pantallas de visualización, es de vital importancia poner atención en el diseño de la disposición del material y la ergonomía del equipo del que se va a hacer uso a lo largo del mismo. Tal y como recoge el Real Decreto 488/1997, la utilización en sí misma del equipo no debe ser una fuente de riesgo para los trabajadores.

Pantalla

La imagen de la pantalla deberá ser estable, sin fenómenos de destellos, centelleos u otras formas de inestabilidad. El usuario podrá ajustar fácilmente la luminosidad y el contraste entre los caracteres y el fondo de la pantalla, y adaptarlos fácilmente a las condiciones del entorno. De igual modo, la pantalla deberá ser orientable e inclinable a voluntad.

Teclado

El teclado deberá ser inclinable e independiente de la pantalla para permitir que el trabajador adopte una postura cómoda que no provoque cansancio en los brazos o las manos. De forma que, deberá haber espacio suficiente delante del teclado para que el usuario pueda apoyar los brazos y las manos.

Mesa o superficie de trabajo

La mesa o superficie de trabajo deberán ser poco reflectantes, tener dimensiones suficientes y permitir una colocación flexible de la pantalla, del teclado, de los documentos y del material accesorio.

Posicionamiento correcto

Las muñecas no han de doblarse, han de permanecer paralelas en todo momento. El borde superior de la pantalla debe estar ligeramente por debajo de la línea horizontal de visión, manteniendo una distancia con respecto a él de entre 45 y 70 centímetros. Se definen tres zonas de trabajo:

- Zona poco común (más de 50 cm): Para los objetos menos utilizados.
- Zona ocasional (entre 25 y 50 cm): Para los objetos que son utilizados habitualmente.
- Zona usual (hasta 25 cm): Para los objetos más frecuentes.

Asiento de trabajo

El asiento de trabajo deberá ser estable, proporcionando al usuario libertad de movimiento y procurándole una postura confortable. El respaldo deberá ser reclinable y su altura ajustable.

6.2.4 Iluminación

Siempre que sea posible, los lugares de trabajo tendrán una iluminación natural, que deberá complementarse con una iluminación artificial cuando la primera, por sí sola, no garantice las condiciones de visibilidad adecuadas. En tales casos se utilizará preferentemente la iluminación artificial general, complementada a su vez con una localizada cuando en zonas concretas se requieran niveles de iluminación elevados.

La iluminación natural o artificial, cuando sea necesaria, deberá garantizar unos niveles adecuados de iluminación y unas relaciones adecuadas de luminancias entre la pantalla y su entorno, habida cuenta del carácter del trabajo, de las necesidades visuales del usuario y del tipo de pantalla utilizado.

El acondicionamiento del lugar de trabajo y del puesto de trabajo, así como la situación y las características técnicas de las fuentes de luz artificial, deberán coordinarse de tal manera que se eviten los deslumbramientos y los reflejos molestos en la pantalla u otras partes del equipo.

6.2.5 Ventilación, temperatura y humedad

La exposición a las condiciones ambientales de los lugares de trabajo no debe suponer un riesgo para la seguridad y la salud de los trabajadores, según lo establecido en el Real Decreto 486/1997. En ningún momento, conforme se recoge en la Orden de 9 del marzo de 1971 por la que se aprueba la Ordenanza General de Seguridad e Higiene en el Trabajo, el anhídrido carbónico ambiental podrá sobrepasar la proporción de 50/10000, y el monóxido de carbono la de 1/10000. En los locales de trabajo cerrados, la renovación mínima del aire será de 30 metros cúbicos de aire limpio por hora y trabajador, en el caso de trabajos sedentarios en ambientes no calurosos ni contaminados por humo. En los centros de trabajo expuestos a altas o bajas temperaturas, serán suavizadas o evitadas las variaciones bruscas por el medio que se considere más eficaz para cada situación. La temperatura deberá estar comprendida entre 17 y 27 °C. La humedad relativa estará comprendida entre el 30 y el 70 por 100, excepto en los locales donde existan riesgos por electricidad estática en los que el límite inferior será el 50 por 100. Los trabajadores no deberán estar expuestos de forma frecuente o continuada a corrientes de aire cuya velocidad exceda los siguientes límites:

- Trabajos en ambientes no calurosos: 0.25 m/s
- Trabajos sedentarios en ambientes calurosos: 0.5 m/s
- Trabajos no sedentarios en ambiente calurosos: 0.75 m/s

A efectos de la aplicación de lo establecido en el apartado deberán tenerse en cuenta las limitaciones o condicionantes que puedan imponer, en cada caso, las características particulares del propio lugar de trabajo, de los procesos u operaciones que se desarrollen en él y

del clima de la zona en la que esté ubicado. En cualquier caso, el aislamiento térmico de los locales cerrados debe adecuarse a las condiciones climáticas propias del lugar.

6.2.6 Ruido, vibraciones y trepidaciones

En el Real decreto 1316/1989, de 27 de octubre, sobre protección de los trabajadores frente a los riesgos derivados de la exposición al ruido durante el trabajo, establece que el empresario deberá evaluar la exposición de los trabajadores al ruido con el objeto de determinar si se superan los límites o niveles fijados en la presente norma y de aplicar, en tal caso, las medidas preventivas procedentes. Generalmente, en este tipo de trabajos sedentarios donde únicamente se emplean pantallas de visualización no suele existir altos niveles sonoros, aunque sí suele haber presencia de un ruido medio y constante, que puede ocasionar molestias, influir en la atención de los trabajadores, e incluso ser perjudicial para la salud. El control de ruidos agresivos en los centros de trabajo no se limitará al aislamiento del foco que los produce, sino que también deberán adoptarse las prevenciones técnicas necesarias para evitar que los fenómenos de reflexión y resonancia alcancen niveles peligrosos para la salud de los trabajadores.

El empresario deberá evaluar la exposición de los trabajadores al ruido con el objeto de determinar si se superan los límites o niveles fijados por la normativa. Se llevarán a cabo evaluaciones periódicas, como mínimo, anualmente, en los puestos de trabajo en que el nivel diario equivalente o el nivel de pico superen 85 dBA o 140 dB, respectivamente, o cada tres años, si no se sobrepasan dichos límites, pero el nivel diario equivalente supera 80 dBA.

6.2.7 Medidas de emergencia: iluminación de emergencia, vías y salida de evacuación

En todos los centros de trabajo, se dispondrá de medios de iluminación de emergencia adecuados a las dimensiones de los locales y al número de trabajadores presentes. El sistema de iluminación deberá ser capaz de mantenerse activo durante al menos una hora, con una intensidad mínima de cinco lux, cuyo funcionamiento dependerá de una fuente de energía independiente del sistema principal de iluminación.

Las vías y salidas de evacuación deberán permanecer expeditas y desembocar lo más directamente posible en el exterior o en una zona de seguridad. El número, la distribución y las dimensiones de las vías y salidas de evacuación dependerán del uso, de los equipos y de las dimensiones de los lugares de trabajo, así como del número máximo de personas que puedan estar presentes en los mismos. Las vías y salidas específicas de evacuación deberán señalizarse conforme a lo establecido en el Real Decreto 485/1997, de 14 de abril, sobre disposiciones mínimas de señalización de seguridad y salud en el trabajo. Esta señalización deberá fijarse en los lugares adecuados y ser duradera.

6.2.8 Protección contra contactos en equipo eléctricos

La instalación eléctrica de los lugares de trabajo deberá ajustarse a lo dispuesto en su normativa específica. En todo caso, y a salvo de disposiciones específicas de la normativa citada,

dicha instalación deberá satisfacer las condiciones que se señalan en el Real Decreto 486/1997:

- La instalación eléctrica no deberá entrañar riesgos de incendio o explosión. Los trabajadores deberán estar debidamente protegidos contra los riesgos de accidente causados por contactos directos o indirectos.
- La instalación eléctrica y los dispositivos de protección deberán tener en cuenta la tensión, los factores externos condicionantes y la competencia de las personas que tengan acceso a partes de la instalación.

6.2.9 Electricidad estática

Para evitar riesgos o situaciones de peligro por la acumulación de electricidad estática, en especial, aquellos derivados de la generación de una chispa en entornos inflamables, se adoptarán una serie de medidas:

- La humedad relativa del aire se mantendrá en todo momento por debajo del 50 %.
- En los cuerpos metálicos existe el riesgo de acumulación de carga eléctrica, será neutralizada por medio de la conexión de conductores a tierra.

6.2.10 Prevención y extinción de incendios

Todas las instalaciones deberán ajustarse a lo dispuesto en la normativa que resulte de aplicación sobre condiciones de protección contra incendios. Estas medidas deben estar proyectadas, implantadas y mantenidas por empresas debidamente autorizadas por el organismo competente.

Según la Orden de 9 de marzo de 1971 por la que se aprueba la Ordenanza General de Seguridad e Higiene en el Trabajo, en los centros de trabajo que ofrezcan peligro de incendios, con o sin explosión, se adoptarán las prevenciones que se indican a continuación, combinando su empleo, en su caso, con la protección general más próxima que puedan prestar los servicios públicos contra incendios.

- Donde existan conducciones de agua a presión, se instalarán suficientes tomas o bocas de agua a distancia conveniente entre sí y cercanas a los puestos fijos de trabajo y lugares de paso del personal, colocando junto a tales tomas las correspondientes mangueras, que tendrán la sección y resistencia adecuada.
- Cuando se carezca normalmente de agua a presión o ésta sea insuficiente, se instalarán depósitos con agua suficiente para combatir los posibles incendios.
- En los incendios provocados por líquidos, grasas o pinturas inflamables o polvos orgánicos, sólo deberá emplearse agua muy pulverizada.
- No se empleará agua para extinguir fuegos en polvos de aluminio o magnesio o en presencia de carburo de calcio u otras sustancias que al contacto con el agua produzcan explosiones, gases inflamables o nocivos.

- En incendios que afecten a instalaciones eléctricas con tensión, se prohibirá el empleo de extintores de espuma química, soda ácida o agua.
- En la proximidad a los puestos de trabajo con mayor riesgo de incendio, colocados en sitio visible y accesible fácilmente, se dispondrán extintores portátiles o móviles sobre ruedas, de espuma física o química, mezcla de ambas o polvos secos, anhídrido carbónico o agua, según convenga a la causa determinante del fuego a extinguir.
- Cuando se empleen distintos tipos de extintores serán rotulados con carteles indicadores del lugar y clase de incendio en que deban emplearse.
- Se instruirá al personal, cuando sea necesario, del peligro que presenta el empleo de tetracloruro de carbono, y cloruro de metilo en atmósferas cerradas y de las reacciones químicas peligrosas que puedan producirse en los locales de trabajo entre los líquidos extintores y las materias sobre las que puedan proyectarse.
- Los extintores serán revisados periódicamente y cargados según las normas de las casas constructoras inmediatamente después de usarlos.
- En las dependencias con alto riesgo de incendio, queda terminantemente prohibido fumar o introducir cerillas, mecheros o útiles de ignición. Está prohibición se indicará con carteles visibles a la entrada y en los espacios libres de las paredes de tales dependencias.
- Se prohíbe igualmente al personal introducir o emplear útiles de trabajo, no autorizados por la Empresa, que puedan ocasionar chispas por contacto o proximidad a sustancias inflamables.
- Es obligatorio el uso de guantes, manoplas, mandiles o trajes ignífugos, y de calzado especial contra incendios que las Empresas faciliten a los trabajadores para uso individual.

6.3 Condiciones de los recursos informáticos

Para poder llevar a cabo los cálculos y la resolución de las simulaciones de este estudio, se debe hacer uso de sistemas informáticos de altas prestaciones, los cuáles pueden dividirse en hardwares y softwares.

6.3.1 Condiciones de hardware

Como hardware, se han utilizado un total de dos equipos informáticos: un ordenador portátil y el cluster de cálculo de la UPV. El equipo portátil ha sido necesario para el desempeño de múltiples actividades, entre las que se destaca la de utilizarse como servidor local para la conexión remota con el cluster, donde únicamente han sido realizadas las simulaciones del proyecto. La interconexión entre los dos equipos ha sido posible gracias a una conexión VPN a través de la plataforma Bitvise SSH Client. En el ordenador portátil, además, se ha realizado todo el tratamiento y postprocesado de los resultados proporcionados por la máquina remota, además de ser la herramienta clave para el desarrollo de esta memoria.

Ordenador Portátil

Un ordenador portátil de marca MSI Creator 15, con las siguientes características:

- Procesador: Intel Core i7-10875H, 2.30 GHz. Cantidad de núcleos: 8, Cantidad de subprocesos: 16
- Memoria RAM: 32.0 GB
- Almacenamiento: 1 TB SSD
- Controlador gráfico: GeForce ®GTX 1660
- Sistema operativo: Windows 10 Pro, sistema operativo de 64 bits, procesador basado en x64

Clúster de cálculo: Rigel

El cluster para proceso paralelo masivo de la Universitat Politècnica de València (UPV), cuenta actualmente con una potencia de cálculo total de 50 TFLOPS, proporcionada por los siguientes nodos:

- 72 nodos BX920S3 de Fujitsu sobre chasis blade BX900S2. Este modelo de blade incorpora 18 servidores por chasis. El cluster está formado por un total de 4 chasis. Cada nodo del chasis tiene las siguientes características:
 - 2 procesadores de 8 cores
 - 64 GB de RAM DDR3
- 56 nodos R424E4 de Bull, con las siguientes características:
 - 48 nodos, con:
 - * 2 procesadores de 8 cores, 2.4 GHz, 20 MB de caché L3
 - * 64 GB de memoria DDR4 DE 2133 MHz
 - 8 nodos, con:
 - * 2 procesadores de 12 cores, 2.5 GHz, 30 MB de caché L3
 - * 128 GB de memoria DDR4 DE 2133 MHz
- 27 nodos de la marca Dell Power Edge R640, con las características:
 - 2 procesadores de 12 cores, 3 GHz, 25 MB de caché
 - 24 nodos con 192 Gb de memoria 2666MT/s DDR
 - 5 nodos con 768 Gb de memoria 2666MT/s DDR

6.3.2 Condiciones de software

En este apartado se presentan los principales softwares utilizados a lo largo de este estudio.

MATLAB

MATLAB es un sistema de cómputo numérico que ofrece un entorno de desarrollo integrado con un lenguaje de programación propio.

Gracias a este software, ha sido posible realizar diversas tareas monótonas, y que exigen cierta dedicación. Esta herramienta es compatible con otros programas, de esta forma es posible generar archivos de texto en la que se recogerán los parámetros de entrada necesarios para las simulaciones a través de la lectura de datos de las hojas de Excel, de esta forma se conocerán los casos no resueltos. Asimismo, permite clasificar los datos válidos en carpetas, y escribirlos en las celdas y hojas correspondientes. También ha sido utilizado para el postprocesado de los datos y elaboración de gráficas.

Microsoft Excel

Microsoft Excel es el programa de software de hojas de cálculo líder en el sector y una herramienta avanzada de análisis y visualización de datos.

Su utilización ha sido básicamente almacenar los resultados válidos que se han obtenido de las simulaciones. Esta herramienta ha sido de gran utilidad debido al alto número de datos con los que se ha tenido que lidiar: 5 000 simulaciones \times 3 casos para distintos Prandtl ($Pr = 1$, $Pr = 5$, $Pr = 50$) \times 2 escenarios (aislante y conductivo) = 30 000 datos. A través de ella ha sido posible facilitar la visualización y tratamiento de los mismos a posteriori.

ParaView

ParaView es una aplicación multiplataforma de código abierto para visualización interactiva y científica.

Este programa ha sido utilizado para el postprocesado de diversos archivos y lograr así imágenes tridimensionales de las perturbaciones.

Capítulo 7

Presupuesto

En este capítulo se va a detallar el valor económico del presente trabajo. Para ello, van a considerarse el número de horas invertidas en el mismo por el personal involucrado en el mismo, junto con el material necesario para su desarrollo. Para evaluar el esfuerzo dedicado se ha utilizado la hora de trabajo. En cuanto a la estimación del coste, se emplea una tasa por hora, con el euro como moneda.

El presupuesto será desglosado en las siguientes tres partes:

- **Costes referidos a recursos humanos:** Se tendrá en cuenta la intervención de una ingeniera en calidad de autora de este trabajo, y la colaboración de un doctor que ejerce como tutor.
- **Costes referidos al equipo:** Se considerará el equipo personal y el equipo perteneciente a la universidad, facilitado por el tutor.
- **Costes indirectos:** Permiten incluir todas los costes relacionados con la gestión e imprevistos.

Atendiendo a todo ello, hay que considerar que este Trabajo de Fin de Máster se basa en un estudio computacional, del cuál se realizará tanto un presupuesto parcial como el presupuesto total. Asimismo, se aplicarán las tasas correspondientes a la tarifa vigente, que en caso de no ser conocida se hará una estimación de las mismas. El presupuesto total será fruto de la suma de presupuestos parciales más un porcentaje destinado a actividades auxiliares e imprevistos más el IVA vigente.

7.1 Costes referidos a recursos humanos

A lo largo de esta investigación han estado involucradas un total de dos profesionales:

- **Ingeniera Aeronáutica:** Responsable del lanzamiento de las simulaciones. Programación de archivos para el postprocesado de datos. Análisis y conclusiones de los resultados.
- **Doctor en Matemáticas Aplicadas:** Ha desempeñado la labor de supervisar todo el proyecto, junto con la resolución ante cualquier duda. Adicionalmente, ha proporcionado las indicaciones y la línea general de este estudio.

En la tabla 7.1, se muestra los costes anuales junto con la tasa de coste del personal involucrado para estimar el presupuesto referente a recursos humanos. Para el presupuesto del doctor, como en la universidad ejerce como catedrático de la universidad, se ha recogido el sueldo publicado por la misma para ese puesto, excluyendo las pagas extras. Para el presupuesto del ingeniero se ha tomado la media de sueldo para este cargo en España. Se han considerado 220 días laborales a lo largo de un año y una jornada laboral de 40 horas semanales, es decir, 8 horas diarias.

Tabla 7.1: Coste medio del personal

	Coste anual [€]	Tasa de coste [€/h]
Ingeniera Aeronáutica	26 040	14.80
Doctor en Matemáticas Aplicadas	38 863.44	22.08

Tras conocer las tasas de coste por hora del personal, recogidas en la tabla 7.1, y considerando las horas de trabajo por persona se obtendrá la cuantía total del coste por persona en la tabla 7.2.

Tabla 7.2: Presupuesto referido al personal técnico

	Horas de trabajo [h]	Tasa de coste [€/h]	Coste [€]
Ingeniero Aeronáutico	700	14.80	10 360
Doctor en Matemáticas Aplicadas	200	22.08	4 416
		Coste Total	14 776 €

El presupuesto dedicado al personal se estima en **catorce mil setecientos setenta y seis euros**.

7.2 Costes referidos al equipo utilizado

En este apartado se desglosará el coste derivado al material técnico utilizado, incluyendo tanto el equipo informático como el material de oficina necesario.

- **Ordenador portátil:** El ordenador portátil que ha sido utilizado como servidor remoto ha sido comprado este mismo año, considerando su amortización de 5 años, por lo que su precio deberá considerarse en el presupuesto, siendo su coste de 1 399 euros.

Junto con él se estimará el consumo energético asociado a las horas de uso, considerando que el precio medio de la luz en España en 2021 es de 0.1127 €/kWh.

$$\text{Consumo energético} = 0.109 [kW] \times 700 [h] = 76.3 kW \cdot h$$

$$\text{Coste energético} = 76.3 [kW \cdot h] \times 0.1127 \left[\frac{\text{€}}{(kW \cdot h)} \right] = 8.60 \text{ €}$$

- **Cluster de cálculo:** Se ha utilizado una cuenta de RIGEL, en la que de media se lanzaban 5 simulaciones simultáneas con 16 procesadores durante aproximadamente 6 meses. Considerando todo ello, se obtendría:

– Tiempo simulación:

$$\text{Tiempo simulaciones} = 6 [\text{meses}] \times 30 [\text{días}] \times 24 [\text{h/días}] = 4320 \text{ h}$$

$$\text{Coste computacional} = 4320 [\text{h}] \times 5 [\text{simulaciones}] \times 16 [\text{cores}] = 345600 \text{ core}\cdot\text{h}$$

– Coste simulación:

$$\text{Coste simulaciones} = 0.01 \left[\frac{\text{€}}{\text{core}\cdot\text{h}} \right] \times 345600 [\text{core}\cdot\text{h}] = 3456 \text{ €}$$

– Consumo energético:

$$\text{Consumo energético} = 0.09 [\text{kW}] \times 4320 [\text{h}] = 388.8 \text{ kW}\cdot\text{h}$$

$$\text{Coste energético} = 388.8 [\text{kW}\cdot\text{h}] \times 0.1127 \left[\frac{\text{€}}{\text{kW}\cdot\text{h}} \right] = 43.82 \text{ €}$$

- **Licencias:** En cuanto a las licencias, en la tabla 7.3 se desglosa el precio para cada una de ellas. Contando con una licencia anual de MATLAB, y considerando que ParaView es un software libre sin coste alguno.
- **Material de oficina:** Entre el material utilizado se encuentra una libreta de anotaciones, precio aproximado de 2 €; dos bolígrafos, con un coste de 0.50 € por unidad, y un pendrive de 32 GB de 7 €. La cuantía del material asciende a 10 €.

Tabla 7.3: Presupuesto referido al equipo

	Horas de uso [h]	Coste [€]
Ordenador portátil	700	1 399
Cluster de cálculo	4 320	3 456
Consumo energético	5 020	52.42
Material de oficina	-	10
Licencia paquete Microsoft Office	60	155
Licencia de MATLAB	50	800
Licencia de ParaView	30	0
Coste Total		5 872.42 €

El coste total estimado para el equipo utilizado es de **cinco mil ochocientos setenta y dos euros y cuarenta y dos céntimos**.

7.3 Costes indirectos

Los costes indirectos son aquellos que abarcan actividades auxiliares que no se han considerado en ninguno de los anteriores apartados, y posibles incrementos en el precio debido a imprevistos. Suponen un 5 % de la suma de los salarios del personal técnico y el equipo, tal y como se expone a continuación en la tabla 7.4:

Tabla 7.4: Presupuesto referido a imprevistos

	Coste [€]
Coste de personal	14 776
Coste de equipos	5 872.42
Subtotal	20 648.42
Costes indirectos (5%)	1 032.42 €

El coste indirecto supone **mil treinta y dos euros y cuarenta y dos céntimos**.

7.4 Coste total

Por último, para la estimación del presupuesto final habrá que aplicarle el IVA correspondiente. Éste se detalla en la tabla 7.5

Tabla 7.5: Presupuesto total

	Coste [€]
Coste de personal	14 776
Coste de equipos	5 872.42
Costes indirectos	1 032.42
Subtotal	21 680.84
IVA (21%)	4 552.98
TOTAL	26 233.82 €

Por tanto, el coste total del análisis de un problema termoconvectivo con estas características asciende a **VEINTE Y SEIS MIL DOSCIENTOS TREINTA Y TRES EUROS Y OCHENTA Y DOS CÉNTIMOS**.

Referencias

- [1] J. Mathieu and J. Scott. An introduction to turbulent flow. *Cambridge University Press*, pages VII–IX, 2000.
- [2] W. Prout. Bridgewater treatises, 1933–1936.
- [3] Graf von Rumford, Benjamin, American Academy of Arts, and Science. *The complete works of Count Rumford.*, volume 1. Boston, 1870. <https://www.biodiversitylibrary.org/bibliography/38141>.
- [4] Christiane Normand, Yves Pomeau, and Manuel G. Velarde. Convective instability: A physicist's approach. *Rev. Mod. Phys.*, 49:581–624, Jul 1977.
- [5] IdealSimulations. Turbulence models in cfd - rans, des, les and dns. <https://www.idealsimulations.com/resources/turbulence-models-in-cfd/>, 2020.
- [6] Yan Yang, Liang ming Pan, and Jian jun Xu. Effects of microgravity on marangoni convection and growth characteristic of a single bubble. *Acta Astronautica*, 100:129–139, 2014.
- [7] Henri Nguyen-Thi, Guillaume Reinhart, and Bernard Billia. On the interest of microgravity experimentation for studying convective effects during the directional solidification of metal alloys. *Comptes Rendus Mécanique*, 345(1):66–77, 2017. Basic and applied researches in microgravity – A tribute to Bernard Zappoli's contribution.
- [8] A. Yu. Malyuk and N.A. Ivanova. Optofluidic lens actuated by laser-induced solutocapillary forces. *Optics Communications*, 392:123–127, 2017.
- [9] Raffaele Savino, Nicola di Franciscantonio, Raimondo Fortezza, and Yoshiyuki Abe. Heat pipes with binary mixtures and inverse marangoni effects for microgravity applications. *Acta Astronautica*, 61(1):16–26, 2007. Bringing Space Closer to People, Selected Proceedings of the 57th IAF Congress, Valencia, Spain, 2-6 October, 2006.
- [10] Henri Bénard. Les tourbillons cellulaires dans une nappe liquide. - Méthodes optiques d'observation et d'enregistrement. *J. Phys. Theor. Appl.*, 10(1):254–266, 1901.
- [11] Lord Rayleigh O.M. F.R.S. Lix. on convection currents in a horizontal layer of fluid, when the higher temperature is on the under side. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 32(192):529–546, 1916.
- [12] Wen-Rui Hu. The influence of buoyancy on the oscillatory thermocapillary convection with small bond number. *Acta Astronautica*, 19(6):593–596, 1989.

- [13] Marc K. Smith and Stephen H. Davis. Instabilities of dynamic thermocapillary liquid layers. part 1. convective instabilities. *Journal of Fluid Mechanics*, 132:119–144, 1983.
- [14] H. Herrero and A.M. Mancho. Influence of aspect ratio in convection due to nonuniform heating. *Physical Review E - Statistical Physics, Plasmas, Fluids, and Related Interdisciplinary Topics*, 57(6):7336–7339, 1998.
- [15] R.J. Riley and G.P. Neitzel. Instability of thermocapillary-buoyancy convection in shallow layers. Part 1. Characterization of steady and oscillatory instabilities. *Journal of Fluid Mechanics*, 359:143–164, 1998.
- [16] N. Garnier and A. Chiffaudel. Two dimensional hydrothermal waves in an extended cylindrical vessel. *European Physical Journal B*, 19(1):87–95, 2001.
- [17] S. Hoyas, H. Herrero, and A.M. Mancho. Thermal convection in a cylindrical annulus heated laterally. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 35(18):4067–4083, 2002.
- [18] S. Hoyas, H. Herrero, and A.M. Mancho. Bifurcation diversity of dynamic thermocapillary liquid layers. *Physical Review E - Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics*, 66(5):057301/1–057301/4, 2002.
- [19] D. Schwabe, A. Zebib, and B.-C. Sim. Oscillatory thermocapillary convection in open cylindrical annuli. part 1. experiments under microgravity. *Journal of Fluid Mechanics*, 491(491):239–258, 2003.
- [20] S. Hoyas, H. Herrero, A.M. Mancho, N. Garnier, and A. Chiffaudel. Bénard-Marangoni convection in a differentially heated cylindrical cavity. *Phys. Fluids*, 1(7):054104, 2005.
- [21] S. Hoyas. *Estudio teórico y numérico de un problema de Bénard-Marangoni*. PhD thesis, Universidad Complutense de Madrid (UCM), Departamento de Matemáticas Aplicadas, 2003.
- [22] Michael G Crandall and Paul H Rabinowitz. Bifurcation, perturbation of simple eigenvalues and linearized stability. 1973.
- [23] S. Hoyas, P. Fajardo, and M.J. Pérez-Quiles. Influence of geometrical parameters on the linear stability of a Bénard-Marangoni problem. *Physical Review E*, 93(4), 2016.
- [24] Wayne A. Tokaruk, T. C. A. Molteno, and Stephen W. Morris. Bénard-Marangoni convection in two-layered liquids. *Phys. Rev. Lett.*, 84:3590–3593, Apr 2000.
- [25] Jun Chen, Jixiang Wang, Zilong Deng, Xiangdong Liu, and Yongping Chen. Experimental study on rayleigh-Bénard-Marangoni convection characteristics in a droplet during mass transfer. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 172:121214, 2021.
- [26] Qin Shu, Li Zhang, Dong-Ming Mo, and You-Rong Li. Experiments on thermocapillary-buoyancy convection of medium Prandtl number liquids in annular pools heated from inner cylinder. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 179:121719, 2021.

-
- [27] S. Chandrasekhar. *Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability*. Dover Books on Physics Series. Dover Publications, 1981.
- [28] A. Oberbeck. Ueber die Wärmeleitung der Flüssigkeiten bei Berücksichtigung der Strömungen infolge von Temperaturdifferenzen. *Annalen der Physik*, 243(6):271–292, January 1879.
- [29] J. Boussinesq. *Theorie analytique de la Chaleur*, volume 2. Gauthier-Villars, 1903.
- [30] Donald D. Gray and Aldo Giorgini. The validity of the boussinesq approximation for liquids and gases. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 19(5):545–551, 1976.
- [31] S Hoyas, P Fajardo, A Gil, and MJ Perez-Quiles. Analysis of bifurcations in a benard-marangoni problem: Gravitational effects. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 73:33–41, 2014.
- [32] M Y Hussaini and T A Zang. Spectral methods in fluid dynamics. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 19(1):339–367, 1987.
- [33] F. Vardillo. *Una introducción a los métodos espectrales*. Departamento Matemática Aplicada y Estadística, Universidad del País Vasco/ Euskal Herriko Unibertsitatea (UPV/EHU).
- [34] Heinz-Otto Kreiss and Joseph Olinger. Comparison of accurate methods for the integration of hyperbolic equations. *Tellus*, 24(3):199–215, 1972.
- [35] Steven A. Orszag. Comparison of pseudospectral and spectral approximation. *Studies in Applied Mathematics*, 51(3):253–259, 1972.
- [36] Henar Herrero and A. Mancho. On pressure boundary conditions for thermoconvective problems.”int. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 39, 06 2002.
- [37] J. Jiménez and S. Hoyas. Turbulent fluctuations above the buffer layer of wall-bounded flows. *Journal of Fluid Mechanics*, 611:215–236, 09 2008.
- [38] A.M. Mancho and H. Herrero. Instabilities in a laterally heated liquid layer. *Physics of Fluids*, 12(5):1044–1051, 2000.
- [39] S. Hoyas, A. Gil, P. Fajardo, and M.J. Pérez-Quiles. Co-dimension Three Bifurcations in a Bénard-Marangoni Problem. *Physical Review E*, 88(015001), 2013.
- [40] M.C. Navarro, H. Herrero, and S. Hoyas. Chebyshev collocation for optimal control in a thermoconvective flow. *Communications in Computational Physics*, 5(2-4):649–666, 2009.

Anexo A

Algoritmo del código

En esta sección se pretende mostrar la estructura del principal algoritmo que es usado para las simulaciones del problema, basado en el método mixto descrito en el capítulo 3.

A.1 Parámetros de entrada y salida

El algoritmo, a excepción de los parámetros enumerados a continuación, mantiene el resto de datos fijos.

- **n**: Número de polinomios en la dirección radial r . Hay $n + 1$ puntos de colocación.
- **m**: Número de polinomios en la dirección axial z . Hay $m + 1$ puntos de colocación.
- **flageig**: Toma un valor constante de 0.
- **hh**: Profundidad del líquido. En este caso este parámetro no varía, y será de $hh = 0.0025m$.
- σ : Número de Prandtl. Adquiere tres valores distintos: $Pr = 1$, $Pr = 5$ y $Pr = 50$.
- **grav**: Término gravitatorio. Va desde 0 m/s^2 a 9.9 m/s^2 , con incremento de 0.1.
- **aa**: Es la relación entre cilindros. Toma un valor constante de $aa = 0.01 \text{ m}$.
- **dif**: Temperatura a partir de la cual se empezará a buscar el par crítico $(k_c, \Delta T_c)$.
- **deltat**: Temperatura a la que se buscará la aproximación lineal al estado básico. Punto medio del intervalo de términos gravitatorios g , entre los que se encuentra el cero de la función μ .
- **deltat0**: Toma un valor constante de 0.25.
- **dt**: Toma un valor constante de 0.1.

- k_{init} : Valor de número de onda del límite inferior del intervalo de términos gravitatorios.
- k_{out} : Valor de número de onda del límite superior del intervalo de términos gravitatorios.
- k_{c1} : Valor inicial de búsqueda del número de onda crítico. El intervalo comienza en 0.
- k_{c2} : Valor final de búsqueda del número de onda crítico. El intervalo finaliza en 35.
- k_{int} : Toma un valor constante de $k_{int} = -3$.
- k_{comp} : Toma un valor constante de $k_{comp} = 4$.
- b_{init} : Inicio de número de Biot. Es contante, de valor $Bi = 0.7$.
- b_{out} : Final de número de Biot. Es contante, de valor $Bi = 0.7$.
- btt : Toma un valor constante de 0.1d0 (número de doble precisión para Fortran90).

Estos datos, son los parámetros de entrada, que se recogen en una hoja de texto y son tomados al inicio de cada simulación.

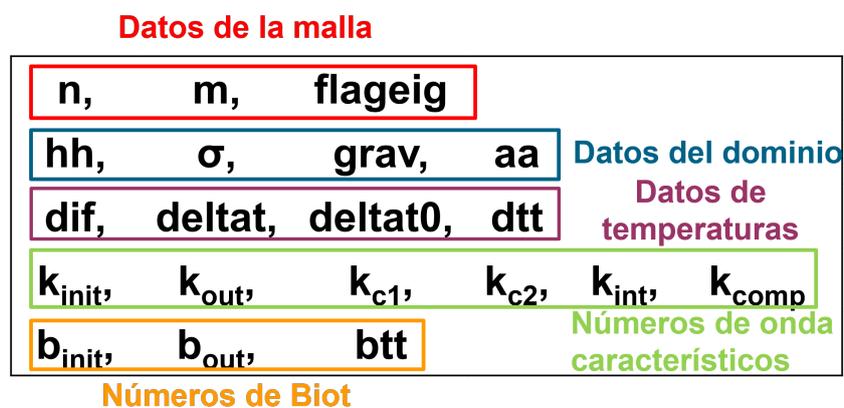


Figura A.1: Parámetros de entrada en el algoritmo de búsqueda para el par $\mu(k_c, \Delta T_c)$ en las simulaciones del problema

Respecto a los parámetros de salida, se recoge una serie de datos entre los que se pueden destacar:

- Temperatura crítica, t_c .
- Número de onda crítico, k_c .
- Autovalor correspondiente al par (k_c, t_c) , tanto parte real como imaginaria.

A.2 Estructura

La estructura del algoritmo se puede resumir en cinco partes bien diferenciadas: creación de los datos, elaboración del estado básico, búsqueda del autovalor máximo del estado básico, cálculo del par crítico y comprobación de los resultados.

Primero, es imprescindible la creación de los datos. Han de ser introducidos en memoria todos los datos necesarios para las distintas rutinas de las que se compone el programa. Para ello, se ha elaborado una subrutina que construye estos datos y los almacena en una *cell array* en MATLAB.

Seguidamente, una vez se han obtenido todos los datos, y conocido el estado básico inicial, se calcula el nuevo estado básico a través del siguiente método iterativo:

- Inicialización del bucle.
- Evaluación de las ecuaciones de gobierno.
- Evaluar las condiciones de contorno.
- Determinar el término independiente del problema de autovalores. Este proceso se realiza en paralelo a los anteriores.
- Búsqueda de la solución del sistema. Se utiliza un método exacto.
- Evaluar el sistema en los puntos de colocación. Se sale del bucle en caso de que el sumatorio de las normas l^2 de las inestabilidades sea menor que la tolerancia, en caso contrario, se vuelve a iniciar el bucle.

A continuación, se resuelve el problema para conocer los autovalores del sistema. Una vez se obtiene el nuevo estado básico son resueltas las ecuaciones de gobierno, calculando el autovalor de mayor valor absoluto.

Tras ello, se calcula el par crítico. Esto involucra pasar por los pasos anteriores: construir el estado básico y calcular los autovalores del problema. Las pautas que se siguen son:

- Inicialización del bucle.
- Los autovalores se empiezan a calcular a partir de la temperatura de inicio designada como "dif" para todos los valores de k . El valor de temperatura es aumentado hasta alcanzar un valor positivo para el autovalor, tras lo que se sale del bucle.
- Alcanzada una solución inestable, es calculada la temperatura crítica para todos los números de onda para los que el fluido se haya desestabilizado mediante el método mixto descrito con anterioridad.
- Se selecciona el mínimo valor de temperatura, junto con el número de onda correspondiente, como par crítico.

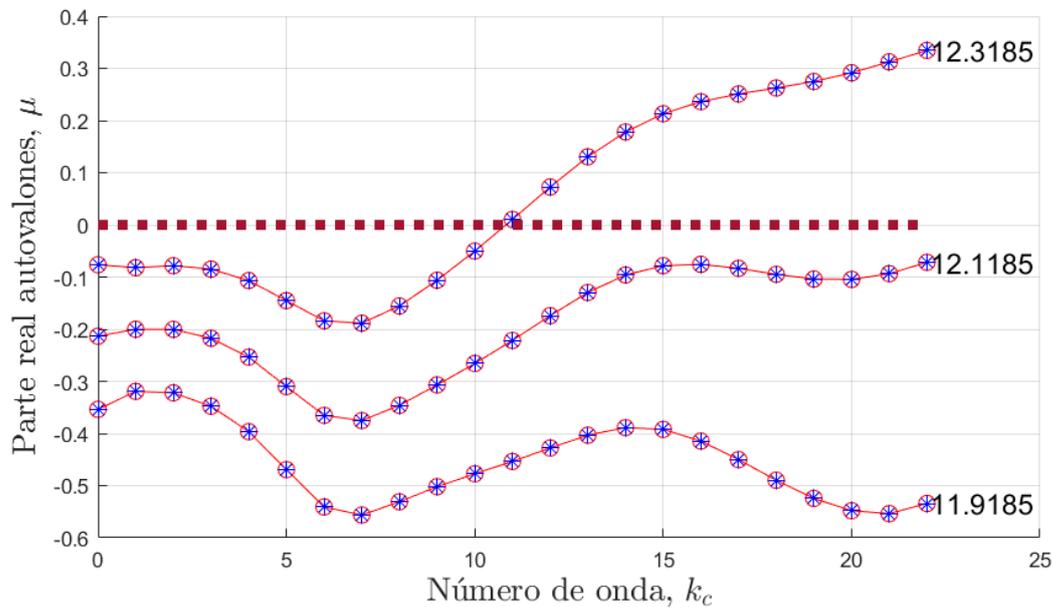


Figura A.2: Búsqueda del mínimo ΔT para cada valor de k . Caso conductivo para $Pr = 1$, $\Delta T_h = 5.9$ y $g = 7.6$

Por último, se efectúa una serie de comprobaciones, verificando que la solución es correcta. Una vez más, son utilizados el segundo y tercer paso: obtener el nuevo estado básico y la búsqueda de los autovalores para todos los números de onda evaluados para la temperatura crítica t_c . Este desarrollo proporciona como solución una curva, a partir de la cual se hará la comprobación visual.

A.3 Esquema de funcionamiento

En cuanto a este trabajo, el código utilizado es fruto de un desarrollo en paralelo de diversos programas. Con el siguiente esquema se mostrará su funcionamiento de forma resumida y los programas que involucra:

1. En primer lugar, a través de MATLAB son generados los datos para la simulación.
2. Estos datos de partida son recogidos en una hoja de texto (sección A.1).
3. Una vez generados los parámetros de entrada, son mandado al ordenador remoto, en concreto, al sistema de cálculo Rigel, y son resueltas a través del código implementado en Fortran90 las ecuaciones que definen el comportamiento del sistema.
4. Obtenidos los resultados, son transferidos al ordenador local, para su tratamiento a través del software MATLAB.
5. Por último, seleccionados los resultados válidos, son recogidos en una hoja de Excel, facilitando su post-procesado.

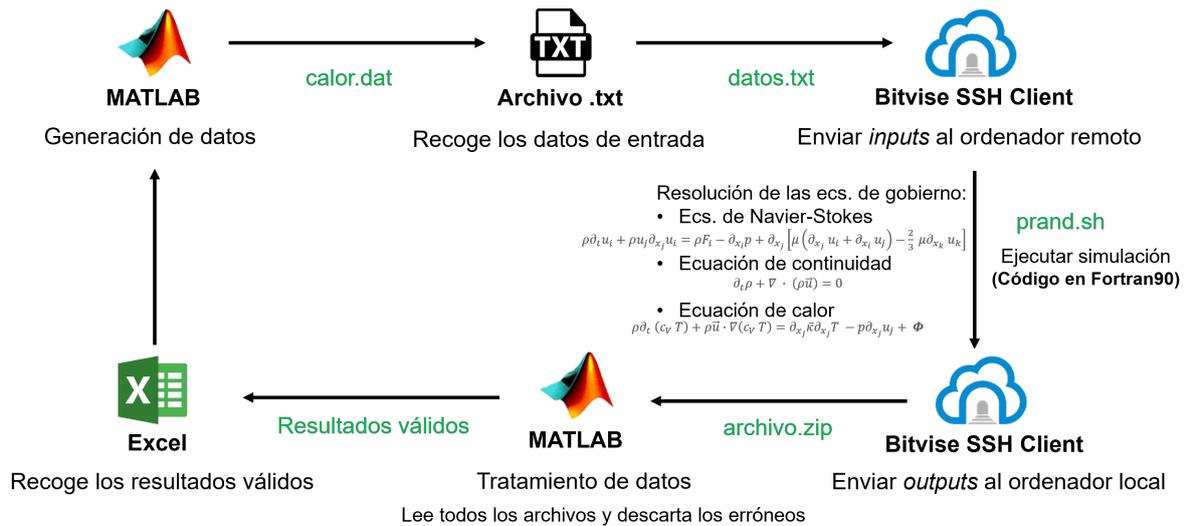


Figura A.3: Esquema de los programas involucrados en la resolución del problema

6. Volvemos al punto 1 con los datos de entrada de los casos aún no simulados o sin resultados apropiados.

Cabe destacar, que en el post-procesado de los resultados no solo interviene el software MATLAB. También se ha utilizado el software libre de ParaView para visualizar los distintos estados de las perturbaciones en el dominio (figuras 4.7 y 4.8).