UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA

Sistemas dinámicos lineales discretos. Una primera pincelada

Apellidos, nombre	Carpitella, Silvia[1] (carpitella@utia.cas.cz) Izquierdo Sebastián, Joaquín[2] (jizquier@upv.es)
Departamento	[1] Department of Decision-Making Theory [2] Departamento de Matemática Aplicada
Centro	[1] Institute of Information Theory and Automation, Praga [2] Universitat Politècnica de València

1 Resumen

Uno de los aspectos fundamentales de la educación universitaria es la motivación. En algunos elementos básicos de primeros cursos de Escuelas Técnicas, tales como el Álgebra Matricial, puede resultar difícil captar la atención del alumnado y crear una motivación suficiente hacia una asignatura que, en principio, puede parecer alejada de los aspectos prácticos que el alumno espera en una carrera técnica. Se hace, pues, necesario disponer de recursos eficientes de motivación. Dado el reducido bagaje formativo del alumno, se debe proponer problemas de relevancia que: i) le puedan interesar y ii) utilicen técnicas algebraicas sencillas. Este artículo presenta el contenido de una posible primera clase para un curso de Álgebra Matricial, perfectamente apta en diversas Escuelas y Facultades universitarias. Aquí, se ha aplicado en la asignatura Álgebra del Grado en Ingeniería Física de la UPV. El problema, centrado en sistemas dinámicos sencillos, es conceptualmente asequible para los alumnos. No obstante, en el desarrollo, se muestra la necesidad de determinadas herramientas avanzadas (que forman parte esencial en la asignatura), lo que estimula el interés de aprender tales herramientas.

2 Introducción

Los ejemplos de sistemas en los que sus elementos interactúan y evolucionan en el tiempo – sistemas dinámicos – son abundantes:

- un sistema celeste y/o planetario,
- un circuito eléctrico compuesto,
- la estructura atómica,
- el clima en una región,
- una pandemia,
- la economía de una nación,
- la relación política internacional,
- la diversidad de un ecosistema,
- una cadena de suministro,
- etc.

Ejercicio 0. Para los sistemas anteriores enumera algunos de sus elementos que interactúan entre sí en el sistema, y expresa algunas de sus interdependencias.

Describir tales sistemas es difícil en general y se han desarrollado varios métodos para distintos casos especiales. En este documento abordamos esta tarea para el caso de sistemas lineales discretos, es decir, sistemas

- para los que consideramos solo una **cantidad discreta de instantes de tiempo** (no el tiempo como continuo), y
- tales que las interacciones entre sus elementos son de **carácter lineal** (sumas de múltiplos de las magnitudes protagonistas).

Y el objetivo del artículo es introducir un método basado en la teoría de los **valores y vectores propios**, específicamente, en la **diagonalización de una matriz**, que se estudia en Álgebra.

3 Objetivos

Tras concluir con la lectura de este documento, serás capaz de:

- Describir con facilidad algunos sistemas dinámicos lineales discretos sencillos obteniendo las matrices de transición correspondientes.
- Explicar con detalle los elementos del funcionamiento de tales sistemas.
- Obtener soluciones de los sistemas planteados.

4 Desarrollo

Para leer este artículo deberás tener nociones de:

Requisitos
1. Álgebra matricial elemental (operaciones con matrices) y Cálculo diferencial básico (concepto de derivada).
2. Solución de sistemas de ecuaciones lineales.
3. Operaciones simples en algún entorno computacional.

Tabla 1. Requisitos básicos

INTERACCIÓN EN UN MODELO DE DOS COMPARTIMENTOS

Empecemos con un ejemplo asequible.

Ejemplo 1. Consideremos un sistema dinámico de dos componentes, T y P, que interactúan entre sí y están caracterizados por sendas **magnitudes que evolucionan en el tiempo de manera discreta**, unidad de tiempo (UT) a UT. (Por ejemplo, los volúmenes de negocio de dos empresas que interactúan (mes a mes), o las poblaciones de dos especies que compiten en un mismo entorno (año a año), o los números de partículas de dos especies atómicas que interactúan (medidos de UT en UT), etc.). Consideremos aquí (hipotéticamente) que T es una especie atómica pasiva que se nutre de otra especie activadora, P, y supongamos que T_k y P_k, sus **magnitudes características**, son sus números respectivos de partículas activas en la **k-ésima UT** (referidos a ciertos valores fijos de equilibrio entre las especies; de esta forma centramos el problema en el origen de coordenadas, por simplicidad). Considera la siguiente situación hipotética, que describe la dinámica entre tales especies (compartimentos).

> Sin la actividad de P, la especie T ve reducido su número a la mitad cada UT. Sin embargo, con la actividad de P, el número de partículas de T aumenta cada UT según un 40% del número de partículas activas de P. Por otra parte, la especie P es capaz de multiplicar por 1.1 su número de partículas activas cada UT. Y, finalmente, P reduce cada UT su número de partículas activas al activar en T una cantidad de partículas proporcional al número actual de partículas de T, siendo $p > 0$ la constante de proporcionalidad.

Este comportamiento puede expresarse mediante las ecuaciones:

$$\begin{cases} T_{k+1} = 0.5T_k + 0.4P_k \\ P_{k+1} = -pT_k + 1.1P_k \end{cases}. \tag{1}$$

(No dejes de razonar con detalle la validez de estas ecuaciones para la dinámica descrita).

El objetivo es conocer cómo van a evolucionar en el tiempo, UT a UT, o a medio/largo plazo, los números de partículas activas en cada especie atómica.

Habitualmente, para abordar este tipo de problemas, se define un denominado **vector de estado** $\mathbf{u}_k = \begin{pmatrix} T_k \\ P_k \end{pmatrix}$, siendo k el tiempo dado en UTs, y, entonces, el problema se puede representar por

$$\mathbf{u}_{k+1} = A\mathbf{u}_k \equiv \begin{pmatrix} T_{k+1} \\ P_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.4 \\ -p & 1.1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_k \\ P_k \end{pmatrix}. \qquad (2)$$

Supongo aquí que conoces la operación de **multiplicar una matriz por un vector**. Si no lo recuerdas, en esta asignatura se va a recordar.

Visto así el problema, se observa que, para pasar de un estado, $\mathbf{u}_k$, al siguiente, $\mathbf{u}_{k+1}$, basta multiplicar la denominada **matriz de transición**, $A = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.4 \\ -p & 1.1 \end{pmatrix}$, por el vector de estado $\mathbf{u}_k$, tal como expresa (2).

Si se parte de un vector de estado inicial $\mathbf{u}_0 = \begin{pmatrix} T_0 \\ P_0 \end{pmatrix}$, podremos conocer $\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} T_1 \\ P_1 \end{pmatrix}$ mediante

$$\mathbf{u}_1 = A\mathbf{u}_0 = \begin{pmatrix} 0.5T_0 + 0.4P_0 \\ -pT_0 + 1.1P_0 \end{pmatrix}.$$

Fíjate que las dos componentes de este vector responden a las expresiones dadas en (1).

Análogamente, conociendo $\mathbf{u}_1$ se puede conocer $\mathbf{u}_2 = A\mathbf{u}_1$, y así sucesivamente.

Ejercicio 1. Obtén tú las componentes de $\mathbf{u}_2$ multiplicando adecuadamente.

Si lo has hecho, podrás imaginar que realizar estas operaciones va a ser cada vez más largo, tedioso y complicado.

Pero observa que puedes escribir $\mathbf{u}_2 = A\mathbf{u}_1 = A(A\mathbf{u}_0) = (AA)\mathbf{u}_0 = A^2\mathbf{u}_0$.

Fíjate que hemos utilizado la **propiedad asociativa del producto de matrices** y hemos denotado el producto de AA como A^2. Seguro que sabes **multiplicar dos matrices**. Quizá no recuerdes bien las **propiedades del producto de matrices** y/o no te hayan contado el concepto de **potencia de una matriz cuadrada**. Se ve en la asignatura de Álgebra.

Ejercicio 2. Puedes empezar a probar calculando A^2 (multiplicar matrices de este tamaño seguro que lo recuerdas).

Pero no solo eso, también veremos el concepto de **potencia n-ésima de una matriz cuadrada**. Te cuento esto porque, como posiblemente estás imaginando, se puede obtener

$$\mathbf{u}_3 = A\mathbf{u}_2 = A(A^2\mathbf{u}_0) = A^3\mathbf{u}_0.$$

Y, de manera general, se puede escribir

$$\mathbf{u}_n = A\mathbf{u}_{n-1} = A(A^{n-1}\mathbf{u}_0) = A^n\mathbf{u}_0.$$

Así que saber multiplicar matrices y obtener potencias de matrices cuadradas son operaciones que pueden tener interés y quizá nos ayude a encontrar el vector de estado para cualquier tiempo k, y también el comportamiento del sistema a largo plazo, es decir cuando $k \to +\infty$.

No obstante, no te propongo como ejercicio que sigas elevando A a potencias mayores, ni que obtengas la potencia k-ésima de la matriz A. De nuevo, te resultará tedioso, largo y complicado.

En Álgebra se ve cómo (para ciertos casos que especificaremos) es muy fácil obtener la potencia n-ésima de una matriz. Será una consecuencia simple de la denominada **diagonalizabilidad matricial**, concepto que se obtiene dentro de la **teoría espectral** (una parte básica del Álgebra) que estudia los denominados **problemas de valor y vector propios**.

Ejercicio 3. Para completar la presentación de los sistemas dinámicos lineales utiliza este objeto de aprendizaje, con el que podrás experimentar con distintos valores de p y observar comportamientos distintos en la dinámica lineal discreta de estos sistemas. Lee con detalle la descripción y las instrucciones del objeto de aprendizaje. Y, específicamente, te propongo que des a p valores dentro de los siguientes rangos:

1. $0 \leq p < 0.125$
2. $0.125 \leq p \leq 0.225$
3. $0.225 < p \leq 1$.

Describe los comportamientos que has observado según los valores de p. Habrás visto situaciones en que las trayectorias, que arrancan desde cierto estado inicial,

a) unas se dirigen hacia algún punto (¿lo has identificado?); se trata de un sumidero, es decir de un punto de atracción (un atractor) hacia el que se dirigen todas esas trayectorias; observa que hay atracciones muy potentes (las trayectorias van directas al sumidero) y otras que no lo son tanto (trayectorias que se enroscan sobre sí mismas yendo al sumidero de manera espiral); y

b) otras se alejan hacia el exterior, en una especie de repulsión; también hay distintas formas de alejarse.

En otro orden de cosas, observando las magnitudes de los dos compartimentos podrás comprobar cómo

- en algunas ocasiones las trayectorias tienden a 0;
- en otras tienden a $+\infty$;
- finalmente, también existe alguna situación estacionaria: ¡identifícala!

Ejercicio 4. Este otro objeto de aprendizaje, en donde puedes variar los cuatro elementos de la matriz de transición, te permitirá, a su vez, observar los casos anteriores y completar (para el caso bidimensional, bicompartimental) algún comportamiento que no se observa en el ejemplo visto.

DISCRETIZACIÓN DE UN MODELO CONTINUO

También los sistemas dinámicos lineales permiten simular (aproximadamente) el movimiento en diversos sistemas mecánicos y el comportamiento de circuitos eléctricos. La condición es, en general, que el sistema no experimente cambios bruscos (vuelo suave de un avión, edificios ante temblores ligeros, etc.).

Ejemplo 2. En este ejemplo vemos el caso de una masa que se mueve en una dimensión (es decir, en una línea), debido a una fuerza externa, $f(t)$, (posiblemente variable en el tiempo), y un rozamiento proporcional a la velocidad. De manera estándar, denotemos por: $x = x(t)$ la posición de la masa a lo largo del tiempo; $v = v(t)$ su velocidad; y $a = a(t)$ su aceleración. Entonces, la segunda ley de Newton permite escribir

$$ma = -cv + f,$$

donde m es la masa y c es el coeficiente de rozamiento. Observa que el lado derecho de esta ecuación es la resultante de las fuerzas que actúan sobre la masa (obviamente, el rozamiento se opone al movimiento, por eso el signo menos).

Teniendo en cuenta que $v(t) = x'(t), a(t) = x''(t)$, esta ecuación se puede escribir como

$$mx'' = -cx' + f,$$

donde, por comodidad, omitimos el paréntesis que expresa la dependencia del tiempo.

Teniendo en cuenta que $v = x'$, esta ecuación se puede escribir mediante el sistema

$$\begin{aligned} x' &= \quad v \\ v' &= -\tfrac{c}{m}v + \tfrac{1}{m}f \end{aligned}. \tag{3}$$

Para desarrollar un modelo lineal discreto a partir de este sistema de ecuaciones diferenciales (así se llaman las ecuaciones en las que aparecen derivadas), hay que discretizar (es decir, elegir solo un número de puntos donde muestrear y estudiar las funciones de interés, en vez de considerarlas continuas). Así, hay que discretizar:

- el tiempo, considerando solo un conjunto de momentos concretos (no el tiempo como una variable continua);

  por ejemplo, tomemos tiempos separados por un cierto intervalo constante, $h > 0$, es decir, $t = 0, h, 2h, \cdots$;

  h debe ser un intervalo suficientemente pequeño como para las variables del sistema no cambien demasiado en esos h segundos;

  entonces, las variables (las que nos interesan aquí) discretizadas van a ser

  $$x_k = x(kh),\ \ v_k = v(kh)\ \text{ y }\ f_k = f(kh), k = 0,1, \cdots,$$

  que son las funciones de interés muestreadas cada h segundos;

- las derivadas de las funciones, considerándolas aproximadamente iguales a sus cocientes incrementales:

  $$x'(kh) \approx \frac{x_{k+1} - x_k}{h};\ \ v'(kh) \approx \frac{v_{k+1} - v_k}{h},$$

  expresiones asumibles ya que h es muy pequeño.

Así, las ecuaciones del sistema (3) se pueden aproximar mediante

$$\frac{x_{k+1} - x_k}{h} = v_k;$$

$$\frac{v_{k+1} - v_k}{h} = -\frac{c}{m}v_k + \frac{1}{m}f_k.$$

Finalmente, si definimos el vector de estado $\mathbf{u}_k = \begin{pmatrix} x_k \\ v_k \end{pmatrix}$, se puede escribir matricialmente

$$\mathbf{u}_{k+1} = \begin{pmatrix} 1 & h \\ 0 & 1 - ch/m \end{pmatrix}\mathbf{u}_k + \begin{pmatrix} 0 \\ h/m \end{pmatrix}f_k,\ \ k = 1,2, \cdots, \tag{4}$$

que es un sistema dinámico lineal con un input externo dado por f_k.

Este sistema proporciona una solución aproximada del movimiento real, dadas las discretizaciones realizadas. No obstante, para h suficientemente pequeño, la solución puede ser suficientemente precisa.

Por concretar, consideremos el caso sencillo de una masa de $m = 1K$, un coeficiente de rozamiento $c = 1N/ms$, un intervalo de muestreado $h = 0.01s$ y un forzamiento dado por

$$f(t) = \begin{cases} 0.0 & 0.0 \le t < 0.5 \\ 1.0 & 0.5 \le t < 1.0 \\ -1.0 & 1.0 \le t < 1.5 \\ 0.0 & 1.4 \le t \end{cases},$$

que representamos en la Figura 1.

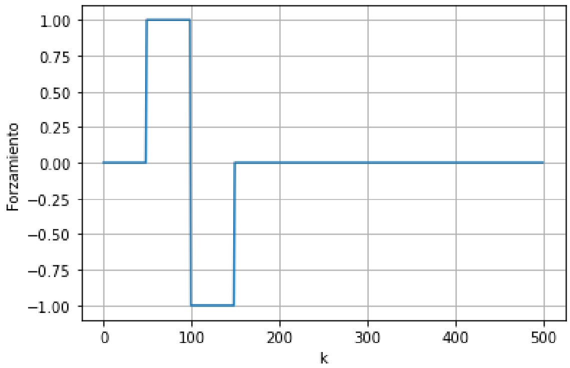

Figura 1. Forzamiento exterior para el sistema dinámico

Simulamos este sistema durante un período de T segundos, empezando con la masa en reposo, $v(0) = 0$, desde la posición inicial, que tomamos como $x(0) = 0$; es decir, consideramos la condición inicial $\mathbf{u}(0) = \begin{pmatrix} x(0) \\ v(0) \end{pmatrix} = \mathbf{0}$.

La simulación consiste en iterar la ecuación dinámica (4) desde $k = 1$ hasta $k = 100T$.

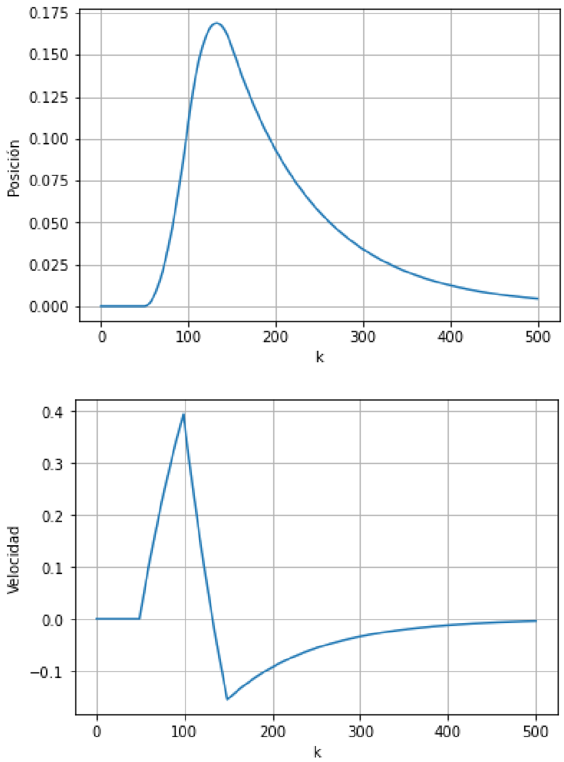

Figura 2. Posición y velocidad del móvil sometido al forzamiento dado

El siguiente *snippet* en Python permite realizar la simulación:

```python
import numpy as np

#datos iniciales
h = 0.01                                #discretización temporal
T = 5                                   #tiempo de simulación
K = int(T/h)                            #simula durante K*h = 5 segundos
m = 1                                   #masa
eta = 1                                 #coeficiente de rozamiento
f = np.zeros((K));                      #define el forzamiento
f[49:99] = 1
f[99:149] = -1
#elementos de cálculo
A = np.block([[1,h],[0, 1-h*eta/m]])    #matriz de transición
B = np.vstack([0,h/m])                  #coeficiente del forzamiento
x1 = np.array([0,0])                    #estado incial (reposo en el origen)

X = np.column_stack([x1, np.zeros((2, K))])   #inicializa historial de estados
for k in range(K):                            #calcula estados sucesivos
    X[:, k+1] = A @ X[:, k] + f[k]*B.T
```

Discusión y trabajo a desarrollar

Los sistemas dinámicos son esenciales en prácticamente todas las ramas de las Ciencias y la Técnica. En este artículo te he presentado dos ejemplos (no triviales), aunque de tamaño reducido. En el primer ejemplo, hemos visto un modelo de dos compartimentos en el que interaccionan dos magnitudes. Aunque la palabra compartimento se utiliza mayormente en Ciencias de la Salud (por ejemplo, al tomar medicación vía oral, la medicina pasa primero al aparato digestivo, que se comunica con el circulatorio), existen múltiples modelos semejantes en diversas ramas de la Ciencia. El segundo ejemplo, presenta un problema de carácter físico –habitualmente descrito mediante variables continuas– que, al discretizarlo, se puede estudiar de manera discreta, lo que proporciona una aproximación de la solución continua, que se puede obtener por métodos más avanzados.

Además de haber practicado con los dos objetos de aprendizaje sugeridos más arriba, aquí te propongo la siguiente Tarea. Si no te sientes capaz ahora, espera a haber adquirido los conocimientos necesarios sobre programación (por ejemplo, en Python), pero no dejes de realizarla en cuanto te sientas con fuerza.

Tarea

1. Realiza la programación y puesta a punto de un programa semejante personalizado por ti (posiblemente utilizando funciones de programación).
2. Considera el problema más general, en el que exista, además, una fuerza restauradora proporcional al desplazamiento de la masa (donde el coeficiente de proporcionalidad, w, es un número real), es decir, considera la ecuación

$$ma = -cv - w^2x + f,$$

   y resuelve los casos de interés que se te ocurran (te doy aquí algunas pistas: movimientos sin forzamiento: armónico simple (sin amortiguamiento) y movimiento amortiguado –con distintos tipos de amortiguación–; movimientos con forzamiento (para los casos anteriores). Observa los comportamientos.

   En tus gráficas, representa no solo la evolución temporal de las magnitudes, sino también las trayectorias o diagrama de fases (es decir, velocidad frente a posición). Por supuesto, haz interpretaciones adecuadas de ida y vuelta entre los diagramas de fases y los gráficos temporales obtenidos.

5 Cierre

Este artículo presenta una motivación útil para un curso de Álgebra Matricial que permite atraer el interés del alumno, motivándole para la asignatura. A través de problemas sencillos de comportamientos dinámicos (lineales), se consiguen anticipar herramientas basadas en técnicas que se estudian en la asignatura, algunas conocidas por el alumno de cursos anteriores, lo que también permite dar cierta continuidad en la vida formativa del alumno. Los ejercicios propuestos constituyen una tarea académica para el alumno. Con su realización, acaba sumergiéndose mucho más motivado en la asignatura. Esta motivación ha sido impartida en una clase inicial en la asignatura Álgebra del Grado en Ingeniería Física de la Universitat Politècnica de València en el curso 2021/2022, proponiendo, a su vez, un trabajo académico con valor evaluativo, que ha producido excelentes resultados, como muestra la calidad de los trabajos presentados y el interés despertado.

6 Bibliografía

Asignaturas (upv.es)

Izquierdo Sebastián, Joaquín, Torregrosa Sánchez, Juan Ramón, Álgebra y ecuaciones diferenciales. Tomos I y II. Universitat Politècnica de València, Valencia, 1997, SPUPV 97.669.