UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA

Aplicación de la Ley de Ampère para la determinación del campo magnético creado por corrientes filiformes

Apellidos, nombre	Gasque Albalate, María (mgasque@fis.upv.es) Martínez Sala, Rosa M. (rmsala@fis.upv.es) Tarrazó Serrano, Daniel (dtarrazo@fis.upv.es) Rubio Michavila, Constanza (crubiom@fis.upv.es)
Departamento	Física Aplicada
Centro	Universitat Politècnica de València

1 Resumen de las ideas clave

Las corrientes eléctricas son una de las causas de todos los fenómenos magnéticos. El estudio de los principios de electromagnetismo tiene gran interés en muchas ramas de la ingeniería, proporcionando una base para el estudio de determinadas materias de carácter tecnológico.

Este artículo se centra en la aplicación de la Ley de Ampère en su caso más sencillo, consistente en la determinación del campo magnético creado por una corriente que atraviesa un conductor filiforme (de sección despreciable), muy largo, vertical. Se expone el enunciado y la resolución paso a paso de un caso práctico.

2 Objetivos

Después de leer detenidamente este documento, el estudiantado será capaz de:

- Plantear la expresión de la Ley de Ampère en casos similares al que se desarrolla para poder determinar el módulo del campo magnético creado por una corriente rectilínea estacionaria.
- Darle carácter vectorial al módulo a partir del vector unitario deducido en base a la Ley de Biot y Savart, y a la dirección y sentido de las líneas de campo magnético.
- Plantear un problema con valores alfanuméricos, lo cual le permite el análisis posterior de distintas hipótesis relativas a la posición de sistema para el modelo propuesto.

3 Introducción

Una corriente eléctrica (movimiento de cargas eléctricas) crea un campo magnético, definido como una magnitud vectorial $\vec{B}$. La unidad de campo magnético en el Sistema Internacional es el tesla (T), y en el Sistema Cegesimal de Unidades es el gauss (G), siendo 1 G = 10^{-4} T. Un tesla se define como la intensidad de un campo magnético que ejerce una fuerza de un newton (N) sobre una carga de un culombio (C) que se mueve a una velocidad de 1 m/s perpendicularmente al campo.

La Ley de Biot y Savart, de carácter experimental, establece la expresión que determina el campo magnético elemental ($d\vec{B}$) creado en un punto cualquiera P_1 por un elemento diferencial de corriente ($Id\vec{\ell}$) de un circuito (Figura 1).

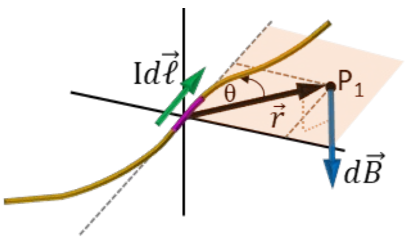


Figura 1. Campo magnético $d\vec{B}$ generado en un punto P_1 por un elemento de corriente $Id\vec{\ell}$ (Fuente: Tipler Mosca, 5ª Edición, Volumen 2).

La expresión matemática de la Ley de Biot y Savart es la siguiente:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{Id\vec{\ell} \wedge \vec{u}_r}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I\, d\ell\, (\vec{u}_I \wedge \vec{u}_r)}{r^2} \quad [1]$$

Donde $Id\vec{\ell} = I\, d\ell\, \vec{u}_I$, $\vec{u}_I$ es un vector unitario tangente al circuito que indica el sentido de la corriente en la posición donde se encuentra el elemento $d\ell$, y $\vec{u}_r$ es un vector unitario que señala la posición del punto P_1 respecto del elemento de corriente.

De [1] se deduce que el vector inducción magnética $\vec{B}$ (o abreviadamente, el campo magnético) generado por un circuito que transporta una corriente continua I en un punto del espacio vendrá dado por:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\,\pi} \oint_C \frac{I\, d\ell}{r^2} (\vec{u}_I \wedge \vec{u}_r) \quad [2]$$

Donde C representa la curva en el espacio (en este caso, cerrada), asociada a la corriente continua I (Figura 2)

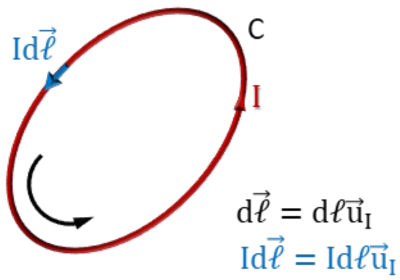


Figura 2. Circuito C, intensidad I y elemento de corriente $Id\vec{\ell}$.

En situaciones que presentan un alto grado de simetría, como es el caso del campo magnético creado por corrientes rectilíneas continuas estacionarias (de características constantes en el tiempo), en conductores de gran longitud, las líneas de campo magnético forman circunferencias con centro en el conductor en planos perpendiculares al eje del mismo, como se verá más adelante. En este caso el módulo del campo magnético (B) puede determinarse, de forma sencilla, mediante la aplicación de la Ley de Ampère.

La Ley de Ampère establece que la circulación del campo magnético $\vec{B}$ a lo largo de una curva cerrada C (es decir, la integral curvilínea del campo magnético a lo largo de C) es proporcional a la intensidad de corriente que atraviesa la superficie delimitada por la línea cerrada (I_C). Su expresión matemática viene dada por la ecuación [3]

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 \cdot I_C \quad [3]$$

Donde:

$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell}$ representa la circulación de $\vec{B}$, es decir, la integral curvilínea del campo magnético $\vec{B}$ a lo largo de la curva cerrada C (C puede ser cualquier curva siempre y cuando sea cerrada).

$d\vec{\ell}$ es un vector tangente a la curva C en cada punto, su sentido indica el sentido de la circulación, el sentido de recorrido de la curva C.

μ_0 (permeabilidad magnética del vacío) es la constante de proporcionalidad. Su valor es

$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\,\frac{N}{A^2}$

I_C es la intensidad de corriente neta que atraviesa la superficie definida por la curva C, y será positiva o negativa según el sentido con el que atraviese a la superficie.

4 Desarrollo

Como aplicación más sencilla de la Ley de Ampère, se propone la determinación del campo magnético creado por una corriente que atraviesa un conductor filiforme (de sección despreciable), muy largo, vertical. Se supone una intensidad de corriente de valor $3I_0$ en sentido descendente. Se determinará el campo magnético en un punto genérico P, situado a una distancia *r* del conductor (Figura 3).

Para la resolución, se adopta el sistema de referencia representado en la Figura 3, en el que el eje OZ coincide con el conductor y la intensidad circula en sentido del vector unitario $-\vec{k}$. Este sistema de referencia permitirá expresar vectorialmente el resultado una vez obtenido el módulo.

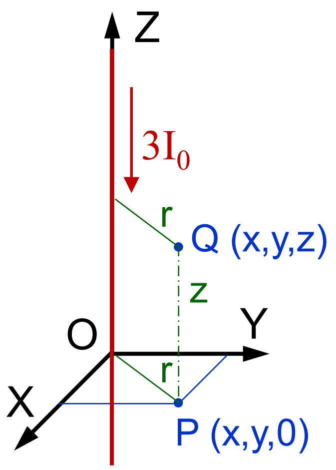


Figura 3. Ejemplo de aplicación. Intensidad de corriente y sistema de referencia adoptado para la resolución del caso. Los puntos P y Q están a la misma distancia r del conductor.

Para justificar la elección de la curva C de Ampère, así como para dar posteriormente carácter vectorial al módulo es necesario saber cómo son las líneas de campo magnético creado por corrientes continuas rectilíneas.

Las líneas de campo magnético (o líneas de fuerza magnética) son líneas imaginarias que nos permiten su representación e indican cómo varía su dirección y sentido al pasar de un punto a otro del espacio. El vector campo magnético es tangente a las líneas de campo magnético en cada punto.

En el caso de estudio, por simetría, las líneas de campo magnético son circunferencias contenidas en planos perpendiculares al eje del conductor y con centro en el mismo, y el sentido del campo viene dado por la regla de la mano derecha, de forma que al apuntar con el dedo pulgar de la mano derecha en el sentido de la corriente, los demás dedos se curvan en el sentido de las líneas de campo magnético (Figura 4 izquierda).

Del análisis de las líneas de campo magnético se concluye que la dirección y sentido de $\vec{B}$ se pueden determinar analíticamente (Figura 4, derecha). Al ser el vector $\vec{B}$ perpendicular tanto al vector $\vec{u}_I$ como al vector $\vec{u}_r$, el vector unitario de $\vec{B}$, $\vec{u}_B$, se obtiene a partir del producto vectorial:

$$\vec{u}_B = (\vec{u}_I \wedge \vec{u}_r) \qquad [4]$$

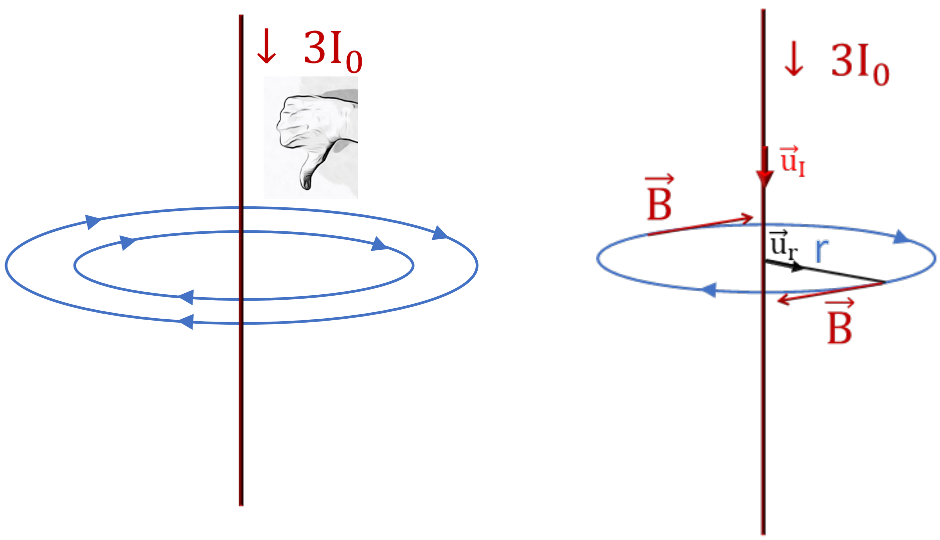


Figura 4. Líneas de campo magnético y vector campo magnético en el caso de estudio

Para realizar la integral curvilínea se utilizará, como curva de Ampère, C (curva que ha de ser cerrada), la línea de campo magnético de radio *r* que pase por el punto en el que nos interesa calcular el valor de $\vec{B}$. Se elige como sentido para la integración (sentido de $d\vec{\ell}$), el mismo que el de la línea de campo magnético (Figura 5).

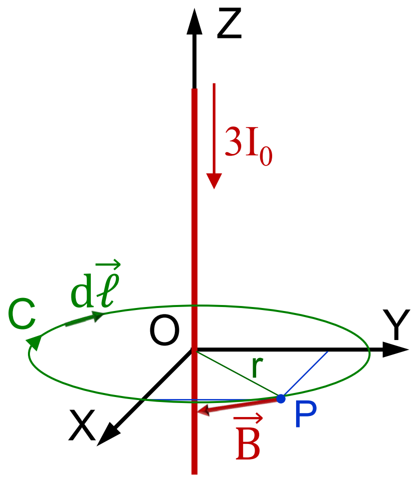


Figura 5. Curva de Ampère, distancia r al conductor, sentido de los vectores $\vec{B}$ y $d\vec{\ell}$.

Con estas premisas se puede comprobar que los vectores $\vec{B}$ y $d\vec{\ell}$ son paralelos en todos los puntos de C (ambos vectores son tangentes a la curva de Ampère). Al sustituir en [3] y realizar el producto escalar resulta:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \oint_C B \cdot d\ell \cdot \cos 0° = \oint_C B \cdot d\ell \qquad [5]$$

De la expresión [2] se deduce, además, que el campo magnético depende de la intensidad de corriente que atraviesa el conductor y de la distancia del conductor al punto en el que determinamos el campo magnético.

En el caso analizado en este artículo, como la corriente $3I_0$ es estacionaria y todos los puntos de la curva de Ampère están a la misma distancia *r* del conductor, el módulo B es constante, por lo que:

$$\oint_C B \cdot d\ell = B \oint_C d\ell \qquad [6]$$

La curva de Ampère seleccionada, tiene una longitud $\oint_C d\ell = \ell_C$ conocida, siendo $\ell_C = 2\,\pi\,r$, resultando:

$$B \oint_C d\ell = B\,2\,\pi\,r \qquad [7]$$

Sustituyendo el resultado de la integral en la expresión de la Ley de Ampère [3]:

$$B\,2\,\pi\,r = \mu_0\,I_C \qquad [8]$$

Despejando el módulo del campo:

$$B = \frac{\mu_0\,I_C}{2\,\pi\,r} \qquad [9]$$

El término I_C hace referencia a la intensidad de corriente neta que atraviesa el contorno limitado por C. En el caso de que haya varias intensidades de corriente I_i (varios conductores), las corrientes pueden tener distintos sentidos (Figura 6, izquierda), por lo que unas se considerarán positivas y otras negativas.

Para determinar el signo de la intensidad de corriente al atravesar la curva C, se puede utilizar la regla de la mano derecha (Figura 6, derecha). Suponiendo por ejemplo que el sentido de recorrido de la curva C es el sentido antihorario (el establecido para $d\vec{\ell}$), al orientar los 4 dedos de la mano derecha opuestos al pulgar en este sentido, el pulgar indica el sentido de la corriente positiva. De esta forma, en el caso representado en la Figura 6, el sentido positivo sería el ascendente, por lo que $I_C = I_1 - I_2$ (I_1 tendrá signo positivo, I_2 signo negativo, e I_3 no se tiene en cuenta dado que no atraviesa la superficie definida por C).

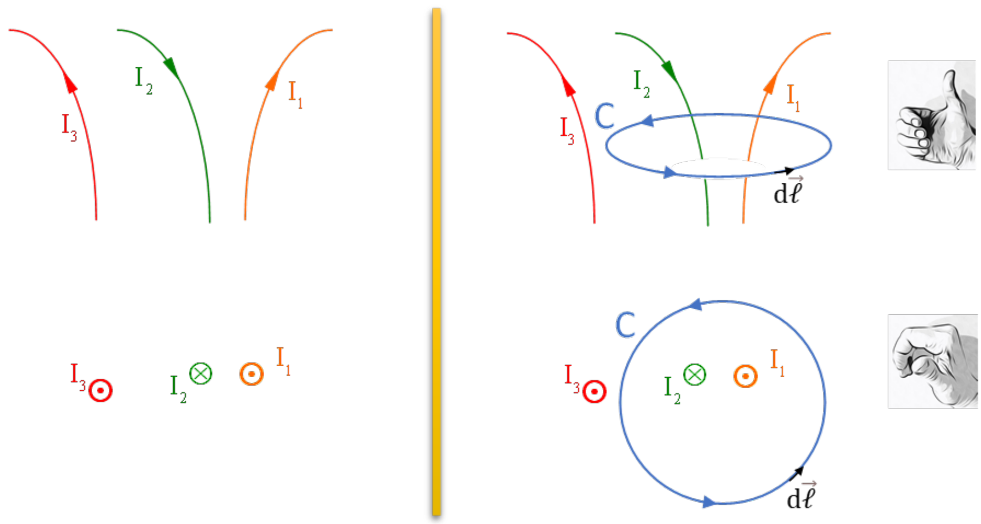
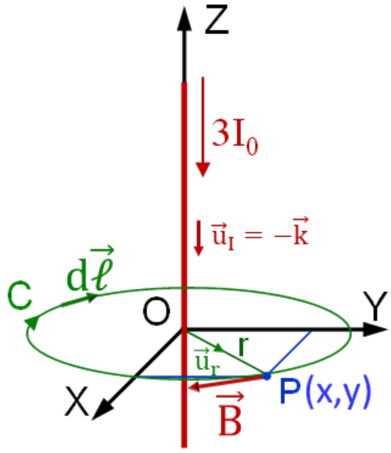


Figura 6. Pautas para determinar con la regla de la mano derecha el signo de las intensidades que atraviesan la curva C al aplicar la ley de Ampère.



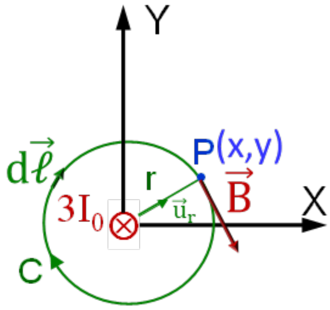


Figura 7. Determinación de I_C

A partir de la Figura 7 se puede comprobar que en este caso $I_C = 3I_0$, por lo que el módulo del campo magnético en el punto P es:

$$B = \frac{3\,\mu_0 I_0}{2\,\pi\,r} \qquad [10]$$

Siendo

$$\vec{B} = B \cdot \vec{u}_B = B \cdot (\vec{u}_I \wedge \vec{u}_r) = \frac{3\,\mu_0 I_0}{2\,\pi\,r} \cdot \vec{u}_B = \frac{3\,\mu_0 I_0}{2\,\pi\,r} \cdot (\vec{u}_I \wedge \vec{u}_r) \qquad [11]$$

En este caso:

$\vec{u}_I = -\vec{k}$ (unitario en la dirección y sentido de la corriente)

$\vec{u}_r = \frac{\vec{r}}{r} = \frac{x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x}{r}\vec{\imath} + \frac{y}{r}\vec{\jmath}$ unitario del vector posición del punto en el que se calcula $\vec{B}$

Al hacer el producto vectorial:

$$\vec{u}_B = \vec{u}_I \wedge \vec{u}_r = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 0 & 0 & -1 \\ \frac{x}{r} & \frac{y}{r} & 0 \end{vmatrix} = \frac{y}{r}\vec{\imath} - \frac{x}{r}\vec{\jmath} \qquad [12]$$

Y al multiplicar el módulo [10] por el unitario [12], se obtiene el vector campo magnético que crea la corriente en un punto genérico P(x,y) situado a una distancia r del conductor:

$$\vec{B} = B\,\vec{u}_B = \frac{3\,\mu_0 I_0}{2\,\pi\,r}\,\vec{u}_B = \frac{3\,\mu_0 I_0}{2\,\pi\,r}\left(\frac{y}{r}\vec{\imath} - \frac{x}{r}\vec{\jmath}\right) \qquad [13]$$

Simplificando [13], resulta:

$$\vec{B} = \frac{3\,\mu_0 I_0}{2\,\pi\,r^2}\,(y\vec{\imath} - x\vec{\jmath}) \qquad [14]$$

que representa el valor del campo magnético en un punto de coordenadas (x,y), situado a una distancia r del conductor.

5 Cierre

Tal y como se ha indicado en los objetivos, una vez resuelto el problema con valores alfanuméricos, si se quisiera particularizar la expresión a un punto determinado, por ejemplo al punto Q, de coordenadas Q(a, 2a,0), habría que sustituir en [13] los valores

$x = a; \quad y = 2a;$

$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{5a^2} = a\sqrt{5}$, siendo por tanto $r^2 = 5a^2$

Resultando:

$$\vec{B}_Q = \frac{3\,\mu_0 I_0}{10\,\pi a}\,(2\vec{\imath} - \vec{\jmath})$$

Para repasar los conceptos aquí tratados se propone como ejercicio adicional la determinación, en el punto P(2R,0,R), del campo magnético creado por una intensidad de corriente continua $2I_0$ que atraviesa un conductor rectilíneo, filiforme, de gran longitud, y coincidente con el eje OY siendo el sentido de la corriente el del vector unitario $\vec{\jmath}$. $\left[SOLUCIÓN:\ \vec{B}_P = \frac{\mu_0 I_0}{5\,\pi R}\,(\vec{\imath} - 2\vec{k})\right]$

6 Bibliografía

6.1 Libros:

Llinares, J.; Page, A.: “Electromagnetismo y Semiconductores”. Ed. SPUPV 97.331, Valencia, 1997.

Serway, R. Física: Electricidad y magnetismo (9ª ed.). Ed. México Cengage Learning, 2016.

Tipler Mosca: “Física para la Ciencia y la Tecnología”, 5ª Edición, Volumen 2. Editorial Reverté.