Flujo magnético y fuerza electromotriz inducida en una espira

Apellidos, nombre	Gasque Albalate, María (mgasque@fis.upv.es) Martínez Sala, Rosa M. (rmsala@fis.upv.es) Tarrazó Serrano, Daniel (dtarrazo@fis.upv.es) Rubio Michavila, Constanza (crubiom@fis.upv.es)
Departamento	Física Aplicada
Centro	Universitat Politècnica de València

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA

1 Resumen de las ideas clave

El electromagnetismo es la rama de la Física que estudia las relaciones entre los fenómenos eléctricos y magnéticos. Dado que muchas aplicaciones tecnológicas están basadas en las reglas que rigen los fenómenos electromagnéticos, resulta fundamental incluir el estudio de los principios, conceptos y principales aplicaciones del electromagnetismo en el programa académico de muchas ingenierías.

Los fenómenos de inducción electromagnética fueron descritos de forma simultánea e independiente por Michael Faraday (1791-1867) y Joseph Henry (1797-1878) hacia 1830, poniendo de manifiesto que un campo magnético variable que atraviesa la superficie delimitada por una espira da lugar a la aparición de una corriente eléctrica en dicha espira. Los fenómenos de inducción electromagnética constituyen en la actualidad las bases del funcionamiento de numerosos dispositivos eléctricos de uso cotidiano (generador, transformador, motor eléctrico, horno de inducción, cargadores inalámbricos para terminales móviles, etc.).

Este artículo se centra en la resolución de un caso práctico, exponiendo el procedimiento para determinar la corriente eléctrica inducida a partir de un flujo magnético variable. Asimismo, se revisan las leyes cuantitativas que relacionan el campo magnético variable con la existencia de una fuerza electromotriz inducida.

2 Objetivos

Después de leer detenidamente este documento, el estudiantado será capaz de analizar casos similares al que se desarrolla en este artículo docente, que le permitirán:

- Emplear la expresión que permite el cálculo del flujo del campo magnético.
- Determinar la intensidad de corriente inducida razonando su sentido a partir de la Ley de Lenz.
- Aplicar la Ley de Faraday para deducir el valor de la fuerza electromotriz inducida.
- Plantear un problema con valores alfanuméricos, y analizar posteriormente los resultados obtenidos para valores numéricos concretos.

Conocimientos previos.

Para abordar la lectura de este artículo son recomendables conocimientos previos de cálculo vectorial, derivación e integración, órdenes de magnitud, y homogeneidad de fórmulas y ecuaciones.

Además, se precisan conocimientos básicos de electromagnetismo. Es recomendable revisar previamente el cálculo del campo magnético creado por corrientes filiformes aplicando la Ley de Ampère. Con esta finalidad, se han incluido referencias bibliográficas complementarias de carácter general en el apartado de Bibliografía.

3 Introducción

Una corriente eléctrica (movimiento de cargas eléctricas) es una de las causas que originan un campo magnético, definido como una magnitud vectorial $\vec{B}$. La unidad de campo magnético en el Sistema Internacional es el tesla (T).

El flujo magnético es una medida del campo magnético $\vec{B}$ que atraviesa una superficie S. Es una magnitud escalar que resulta proporcional al número de líneas de campo magnético que atraviesan la superficie S, y se define a partir de la expresión:

$$\Phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{s} \qquad [1]$$

Su unidad en el S.I es el weber (Wb) siendo 1 Wb = 1T·m^2.

A partir de la expresión [1], se deduce que el flujo del campo magnético a través de una superficie puede variar con el tiempo cuando se dé una de las siguientes circunstancias:

- Si el campo magnético cambia con el tiempo $\vec{B}(t)$
- Si el área de la superficie varía con el tiempo S(t)
- O bien si el ángulo α entre el vector campo $\vec{B}$ y el vector diferencial de superficie $d\vec{s}$ cambia con el tiempo $\vec{\alpha}(t)$.

En cualquiera de estos casos, la variación de flujo magnético que atraviesa un circuito da lugar a la aparición de una corriente eléctrica inducida (I_{ind}).

Según la Ley de Lenz, el sentido de la corriente inducida es tal que tiende a oponerse a la variación de flujo magnético que la ha producido, de modo que, si se produce un aumento de flujo, el campo creado por la corriente inducida creará un flujo en sentido contrario para compensar dicho aumento.

Por otra parte, la aparición de corrientes inducidas en los circuitos exige la existencia de una fuerza electromotriz (f.e.m.) a la que se denomina f.e.m. inducida (ε_{ind}).

La Ley de Faraday [2] establece que la ε_{ind} en un circuito es igual y de signo opuesto a la rapidez con la que varíe el flujo magnético que atraviese el circuito, por unidad de tiempo.

$$\varepsilon_{ind} = -\frac{d\Phi}{dt} \qquad [2]$$

El signo negativo en [2] viene dado por la ley de Lenz, e indica el sentido de la fuerza electromotriz inducida y causa de la corriente inducida.

4 Desarrollo

4.1 Enunciado del problema

En la Figura 1 se representa un conductor rectilíneo, de gran longitud, recorrido por una intensidad $2\mathbf{I_0}$ vertical y ascendente. El conductor es una superficie cilíndrica de radio **R** coaxial con el eje OZ.

En el plano x=0, a una distancia y del eje del conductor, se encuentra la espira rectangular ABCDA, de lados 2**a** y **a** y resistencia **r**, que se desplaza hacia la derecha con velocidad **v**.

Se pide calcular, en función de los datos ($\mathbf{I_0}$, **R**, **a**, **v**, **r**, y la permeabilidad magnética del vacío $\boldsymbol{\mu_0}$):

a) Flujo magnético a través de la espira, Φ.
b) Fuerza electromotriz (f.e.m) inducida en la espira, ε_{ind}.
c) Intensidad inducida en la espira razonando su sentido, I_{ind}.

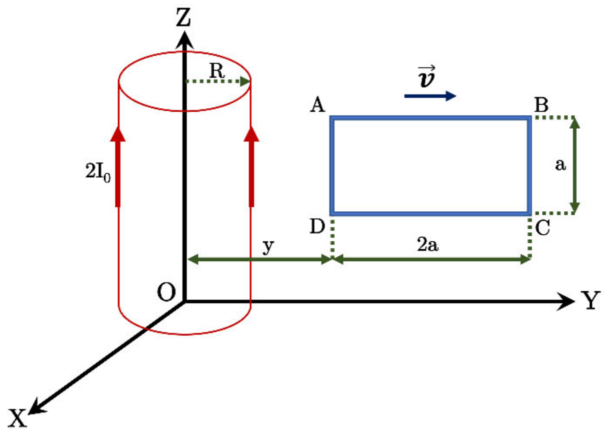

Figura 1. Conductores y datos iniciales del caso práctico.

4.2 Flujo magnético a través de la espira

Tal como se ha expuesto en la introducción, el flujo (Φ) del campo magnético $(\vec{\text{B}})$ creado por la intensidad $\mathbf{2I_0}$ a través de la superficie delimitada por la espira (S = 2a x a), viene dado a partir de la ecuación [1].

Por lo tanto, previamente habrá que determinar el campo magnético $\vec{\text{B}}$ creado por el conductor de radio R en un punto genérico del plano x = 0 en el que se encuentra la espira.

También es necesario definir el vector $\text{d}\vec{\text{s}}$ para poder calcular el flujo conforme a [1].

Para el cálculo del campo magnético $\vec{B}$ creado por una superficie cilíndrica de radio **R** y gran longitud, recorrido por una corriente $\mathbf{2I_0}$, se puede aplicar la Ley de Ampère.

Por razones de simetría, las líneas del campo magnético creado por esta distribución de corriente son circunferencias perpendiculares al eje del conductor, con centro situado sobre dicho eje. El módulo del campo magnético (B), dependerá de la intensidad de corriente que atraviesa el conductor y de la distancia y a éste, siendo:

$$\mathrm{B} = \frac{\mu_0\, \mathrm{I}_0}{\pi\, y} \qquad [3]$$

El vector unitario $\vec{u}_B$, se calcula a partir del producto vectorial $\vec{u}_I \wedge \vec{u}_r$, siendo en este caso:

$\vec{u}_I = \vec{k}$ (unitario en la dirección y sentido de la corriente $2I_0$)

$\vec{u}_r = \vec{j}$ (unitario que señala la posición de un punto del plano x = 0 respecto del conductor)

Al hacer el producto vectorial:

$$\vec{u}_B = \vec{u}_I \wedge \vec{u}_r = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -\vec{i} \qquad [4]$$

Y al multiplicar el módulo [3] por el unitario [4], se obtiene el vector campo magnético que crea la corriente en un punto genérico P(0,y,z) situado en el plano x = 0 a una distancia y del conductor:

$$\vec{B} = \mathrm{B}\,\vec{u}_B = \frac{\mu_0 \mathrm{I}_0}{\pi\, \mathrm{y}}\,(-\vec{i}) \qquad [5]$$

Este resultado se admitirá aquí sin más justificación dado que el objetivo de este trabajo es el estudio de los fenómenos de inducción magnética asociados al campo magnético.

El vector $d\vec{s}$ es un segmento orientado cuyo módulo es el área de un elemento de superficie (ds) y cuya dirección es normal al plano tangente al elemento ds en el punto en el que se encuentre. Por tanto, $d\vec{s} = ds\,\vec{u}$, siendo $\vec{u}$ un vector unitario.

En el caso que se propone, la superficie S es plana (la superficie de la espira está contenida en el plano x = 0), y el plano tangente en todos los puntos de S es el mismo (el plano x = 0) por lo que el vector $\vec{u}$ puede ser indistintamente el vector unitario $+\vec{i}$, o bien $-\vec{i}$.

De las dos opciones se elige la que hace que el flujo sea positivo y en este caso $\vec{u} = -\vec{i}$, de modo que los vectores $\vec{B}$ y $d\vec{s}$ sean paralelos y del mismo sentido.

Así pues: $d\vec{s} = ds\,(-\vec{i})$.

Al tratarse de una superficie plana, es conveniente elegir un ds de primer orden (elemento de superficie que sea función de una sola variable), que permita realizar una integral simple. En este caso se tomará un rectángulo de base dy y altura a (Figura 2), siendo entonces:

$$\mathrm{ds} = \mathrm{a\,dy} \qquad [6]$$

Por lo que finalmente el vector $\mathrm{d}\vec{s}$ es:

$$\mathrm{d}\vec{s} = \mathrm{a\,dy}\,(-\vec{\imath}) \qquad [7]$$

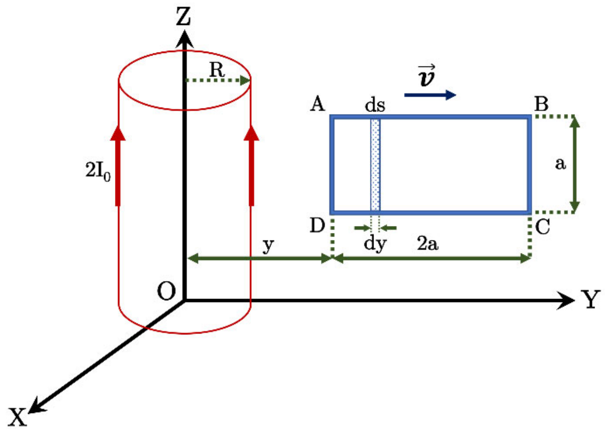

Figura 2. Elemento ds que facilita realizar una integral simple.

Al sustituir los vectores $\vec{B}$ [5] y $\mathrm{d}\vec{s}$ [7] en el producto escalar:

$$\vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{s} = \left[\frac{\mu_0 I_0}{\pi\, y}\,(-\vec{\imath})\right]\cdot\left[\mathrm{a\,dy}\,(-\vec{\imath})\right] \qquad [8]$$

Agrupando los términos constantes:

$$\vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{s} = \frac{\mu_0 I_0\, a}{\pi\, y}\,\mathrm{dy}\left((-\vec{\imath})\cdot(-\vec{\imath})\right) \qquad [9]$$

Al ser el producto escalar de los vectores unitarios: $(-\vec{\imath})\cdot(-\vec{\imath}) = 1\cdot 1\cdot \cos 0 = 1$

Queda finalmente:

$$\vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{s} = \frac{\mu_0 I_0\, a}{\pi\, y}\,\mathrm{dy} \qquad [10]$$

Reemplazando este resultado en [1] y sustituyendo los límites de integración:

$$\Phi = \int_S \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{s} = \int_y^{y+2a} \frac{\mu_0 I_0 a}{\pi\, y}\,\mathrm{dy} \qquad [11]$$

Al ser constantes μ_0, I_0, a, π, resulta una integral inmediata tipo logaritmo neperiano:

$$\Phi = \frac{\mu_0 I_0 a}{\pi}\int_y^{y+2a} \frac{1}{y}\,\mathrm{dy} \qquad [12]$$

Resolviendo la integral:

$$\Phi = \frac{\mu_0 I_0 a}{\pi} \ln[y]_y^{y+2a} \qquad [13]$$

Sustituyendo los límites de integración resulta:

$$\Phi = \frac{\mu_0 I_0 a}{\pi} \ln\left[\frac{y+2a}{y}\right] \qquad [14]$$

Obteniendo así el valor del flujo magnético a través de la espira.

4.3 Fuerza electromotriz (f.e.m.) inducida en la espira, ε_{ind}

Para calcular ε_{ind} a partir de la Ley de Faraday [2], se ha de derivar la expresión obtenida para el flujo magnético respecto del tiempo:

$$\varepsilon_{ind} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt}\left(\frac{\mu_0 I_0 a}{\pi} \ln\left[\frac{y+2a}{y}\right]\right) \qquad [15]$$

Al ser constantes μ_0, I_0, a, π, se ha de resolver la derivada respecto del tiempo del logaritmo neperiano.

Dado que la espira se mueve en la dirección del eje OY con velocidad v constante, la derivada de y respecto del tiempo es, por tanto, igual a la velocidad v.

$$\frac{d}{dt}\left(\ln\left[\frac{y+2a}{y}\right]\right) = \frac{d}{dt}(\ln[y+2a] - \ln y) = \frac{v}{y+2a} - \frac{v}{y} = \frac{-2av}{y(y+2a)}$$

Sustituyendo la derivada en [15]:

$$\varepsilon_{ind} = -\frac{d\Phi}{dt} = \frac{2\,\mu_0\, I_0\, a^2\, v}{\pi\, y\,(y+2a)} \qquad [16]$$

Obteniendo así el valor de la fuerza electromotriz inducida en la espira en función de los datos de partida.

4.4 Intensidad inducida en la espira razonando su sentido, I_{ind}

La intensidad inducida (I_{ind}) se determina a partir de la Ley de Ohm, siendo **r** la resistencia de la espira:

$$I_{ind} = \frac{\varepsilon_{ind}}{r} = \frac{2\,\mu_0\, I_0\, a^2\, v}{\pi\, y\,(y+2a) r} \qquad [17]$$

I_{ind} circulará en sentido horario por la Ley de Lenz (Figura 3), dado que, como se ha expuesto en la introducción, tiende a oponerse a la variación de flujo magnético que la ha producido. En este caso, al alejarse la espira se produce una disminución de flujo, como se observa en la ecuación [14], y el campo magnético creado por la corriente inducida creará un flujo en el mismo sentido para compensar dicha disminución.

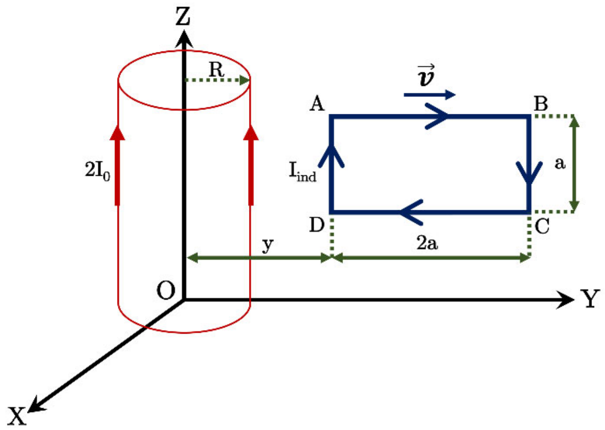

Figura 3. Intensidad inducida en la espira. Sentido horario (Ley de Lenz)

5 Cierre

El contenido presentado en este documento puede ser de gran utilidad dado que la resolución de un problema concreto proporciona la metodología general para la resolución de otros casos con planteamientos similares, favoreciendo la motivación y el aprendizaje del estudiantado.

Para repasar los conceptos aquí tratados se propone la resolución del ejercicio que se plantea a continuación.

Una espira cuadrada de lado **L** y resistencia **R**, y un conductor rectilíneo, filiforme, de gran longitud y recorrido por una intensidad $\mathbf{I_0}$ en el sentido vertical descendente, se encuentran en el plano z = 0 y situados según se indica en la Figura 4. La espira se mueve con velocidad $\vec{\mathbf{v}}$ constante.

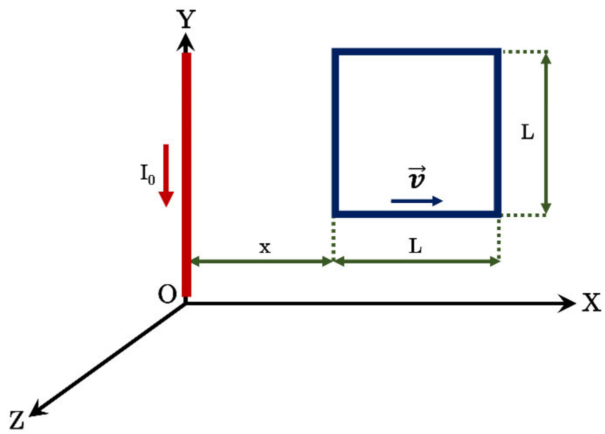

Figura 4. Ejercicio propuesto

Se pide calcular, en función de los datos ($\mathbf{I_0}$, **R**, **L**, **v**, y la permeabilidad magnética del vacío $\boldsymbol{\mu_0}$):

a) Flujo magnético a través de la espira, Φ. $\left(SOLUCIÓN: \Phi = \frac{\mu_0 I_0 L}{2\pi} \ln\left[\frac{x+L}{x}\right]\right)$

b) Fuerza electromotriz (f.e.m) inducida en la espira, ε_{ind}.

$\left(SOLUCIÓN: \varepsilon_{ind} = \frac{\mu_0\, I_0\, L^2\, v}{2\pi\, x\,(x+L)}\right)$

c) Intensidad inducida en la espira razonando su sentido, I_{ind}.

$\left(SOLUCIÓN: I_{ind} = \frac{\mu_0\, I_0\, L^2\, v}{2\pi\, x\,(x+L)R} \text{ y sentido antihorario}\right)$

6 Bibliografía

6.1 Libros:

Llinares, J.; Page, A.: “Electromagnetismo y Semiconductores”. Ed. SPUPV 97.331, Valencia, 1997.

Serway, R. “Física: Electricidad y magnetismo” (9ª ed.). Ed. México Cengage Learning, 2016.

Tipler Mosca: “Física para la Ciencia y la Tecnología”, 6ª Edición, Volumen 2. Editorial Reverté. 2010.

Kistner, A.“Historia de la física”. Labor.

6.2 Referencias de fuentes electrónicas:

Gasque Albalate, M.; Martínez Sala, R.M.; Tarrazó Serrano, D.; Rubio Michavila, C. “Aplicación de la Ley de Ampère para la determinación del campo magnético creado por corrientes filiformes”, 2022, Disponible en: http://hdl.handle.net/10251/182399