

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA

Departamento de Ingeniería Mecánica y de Materiales



TESIS DOCTORAL

Estudio de las singularidades de
frente de grieta y de esquina
en grietas tridimensionales
mediante el método de los elementos finitos
extendido

Presentada por: D. Vicente Francisco González Albuixech

Dirigida por: Dr. D. Eugenio Giner Maravilla

Dr. D. José Enrique Tarancón Caro

Valencia, Mayo 2012

TESIS DOCTORAL

**Estudio de las singularidades de
frente de grieta y de esquina
en grietas tridimensionales
mediante el método de los elementos finitos
extendido**

que para la obtención
del grado de
Doctor en Ingeniería y Producción Industrial

presenta

D. Vicente Francisco González Albuixech

en el

Departamento de Ingeniería Mecánica y de Materiales
de la Universitat Politècnica de València

Dirigida por

Dr. D. Eugenio Giner Maravilla
Dr. D. José Enrique Tarancón Caro

Valencia, Mayo 2012

TESIS DOCTORAL

**ESTUDIO DE LAS SINGULARIDADES
DE FRENTE DE GRIETA Y DE ESQUINA
EN GRIETAS TRIDIMENSIONALES MEDIANTE
EL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS EXTENDIDO.**

Presentada por: D. Vicente Francisco González Albuixech

Dirigida por: Dr. D. Eugenio Giner Maravilla

Dr. D. José Enrique Tarancón Caro

TRIBUNAL CALIFICADOR

PRESIDENTE: Dr. D. _____

VOCALES: Dr. D. _____

Dr. D. _____

Dr. D. _____

SECRETARIO: Dr. D. _____

En Valencia, a ____ de _____ de 2012.

Resumen

En esta tesis se aborda primeramente el estudio de las grietas tridimensionales partiendo de las premisas de la Mecánica de la Fractura Elástica Lineal —MFEL— y considerando la importancia de los términos de segundo orden del desarrollo de Williams para la correcta descripción del campo de tensiones en problemas tridimensionales. El estudio de las grietas tridimensionales se realiza mediante una extensión de los resultados bidimensionales en los que se suponen conceptos que en un estado tridimensional no pueden ser admitidos directamente. En la tesis se hace un análisis del efecto de la triaxialidad sobre estos resultados, poniéndose de manifiesto que no basta con aceptar los términos singulares, sino que al menos se deben incluir los términos constantes del desarrollo de Williams.

El segundo punto lo constituye una introducción al método de los elementos finitos extendido —XFEM, del inglés *Extended Finite Element Method*— para grietas tridimensionales, incluyendo algunos de los avances desarrollados en los últimos años. A continuación se aborda el cálculo de los Factor de Intensidad de Tensiones —FIT— en grietas genéricas tridimensionales con curvatura. Para ello se proponen mejoras en la formulación de las integrales de dominio y se realizan verificaciones numéricas y estudios de convergencia. El cálculo de los FIT en grietas que presentan curvatura es el objetivo principal de la tesis. La formulación de la integral de interacción ha sido modificada para mejorar su eficacia. Además se ha introducido el efecto de la curvatura en los gradientes, para lo cual se han usado conceptos de geometría diferencial aprovechando la formulación mediante la función distancia o de nivel —LS, del inglés *Level Set*—. Esta propuesta mejora apreciablemente los resultados obtenidos mediante las integrales de dominio.

El último punto es el estudio y propuesta de un enriquecimiento para mejorar la descripción del estado existente en las cercanías de la singularidad de esquina —o de borde libre—. Además de una revisión bibliográfica del problema de esta singularidad, se ha introducido parte del efecto local de esta singularidad en la formulación de XFEM mediante una propuesta de enriquecimiento basado en armónicos esféricos. Este enriquecimiento utiliza las funciones armónicos esféricos que constituyen una base para la descripción de fenómenos con simetría esférica, justificada en grietas tridimensionales debido al comportamiento esférico de esta singularidad.

Abstract

The first objective of the thesis is the review of the analysis of three-dimensional cracks starting from the premises of the Linear Elastic Fracture Mechanics (LEFM). The importance of second-order terms of the Williams' series expansion is considered for the correct description of the stress field in three-dimensional problems. The study of three-dimensional cracks is usually performed using an extension of two-dimensional concepts that cannot be done in a straightforward manner. An analysis of the effect of triaxiality is done in this thesis, concluding that singular terms are not enough to achieve the desired description and, at least, constant terms of Williams' series expansion have to be considered.

The second point is an introduction to the Extended Finite Element Method (XFEM) for three-dimensional crack modelling, including some of the developments carried out in the last years. The main goal of the thesis is the computation of the Stress Intensity Factors (SIF) for generic three-dimensional cracks with curvature. Some improvements in the formulation are introduced and numerical verification and convergence studies are performed. The SIF computation in cracks that exhibit curvature is a challenging issue. The formulation of the interaction integral has been modified to improve efficiency and the effect of curvature in the gradient has been also introduced. For the gradient formulation the differential geometry theory has been applied using the LS description. This proposal significantly improves the performance of the domain integrals for curved and non-planar crack studies.

The last point is the study and introduction of an enrichment to improve the description of the existing state close to the corner singularity (or free border singularity). In addition to a review of the state of the art, the spherical behavior of the free border singularity has been considered using a set of functions known as spherical harmonics that constitute a basis for the description of phenomena with spherical symmetry. An enrichment based on these functions has been introduced in the formulation of XFEM to reproduce the local singularity effect.

Resum

En esta tesi s'aborda primerament l'estudi de les clivelles tridimensionals partint de les premisses de la Mecànica de la Fractura Elàstica Lineal —MFEL— i considerant la importància dels termes de segon orde de la serie de Williams per a la correcta descripció del camp de tensions en problemes tridimensionals. L'estudi dels clavills tridimensionals es realitza per mitjà d'una extensió dels resultats bidimensionals en que se suposen conceptes que en un estat tridimensional no poden ser admesos directament. En la tesi es fa una anàlisi de l'efecte de la triaxialidad sobre estos resultats, posant-se de manifest que no n'hi ha prou amb acceptar els termes singulars, sinó que almenys s'han d'incloure els termes constants de la serie de Williams.

El segon punt ho constituïx una introducció al Mètode dels elements finits esteso —XFEM, de l'anglès *Extended Finite Element Method*— per a clivelles tridimensionals, incloent alguns dels diferents avanços desenvolupats en els últims anys. A continuació s'aborda el càlcul dels Factor d'Intensitat de Tensions —FIT— en clavills tridimensionals amb curvatura. Per a això es proposen millores en la formulació de les integrals de domini i es realitzen verificacions numèriques i estudis de convergència. El càlcul dels FIT en clavills que presenten curvatura és l'objectiu principal de la tesi. La formulació de la integral d'interacció ha sigut modificada per a millorar la seua eficàcia. A més s'ha introduït l'efecte de la curvatura en els gradients, per a la qual cosa s'han usat conceptes de geometria diferencial aprofitant la formulació per mitjà de la funció de distància o de nivell—LS, de l'anglès *Level Set*—. Esta proposta millora apreciablement els resultats obtinguts per mitjà de les integrals de domini.

L'últim punt és l'estudi i introducció d'un enriquiment per a millorar la descripció de l'estat existent en les proximitats de la singularitat de cantó —o de bord lliure—. A més d'una revisió bibliogràfica del problema d'esta singularitat, s'ha introduït part de l'efecte local d'esta singularitat en la formulació de XFEM per mitjà d'una proposta d'enriquiment basat en harmònics esfèrics. Este enriquiment utilitza les funcions harmònics esfèrics que constituïxen una base per a la descripció de fenòmens amb simetria esfèrica, justificada en clavills tridimensionals a causa del comportament esfèric d'esta singularitat.

A todos los que sueñan despiertos

Agradecimientos

Esta tesis ha sido fruto de varios años de esfuerzo y sacrificios. Esta época ha estado plagada de sinsabores y satisfacciones pero no habría sido posible sin el apoyo y guía de mis directores de tesis, José Enrique y Eugenio. Gracias a los dos por vuestra paciencia y enseñanzas. Entre la gente que ha colaborado en las cuestiones técnicas relacionados con esta etapa, he de destacar las contribuciones de los profesores Juan José Ródenas y Javier Fuenmayor, así como durante la estancia que disfruté en el grupo en Lyon, las contribuciones y sabios consejos de Anthony Gravouil.

Sin embargo, este esfuerzo no habría sido posible sin el apoyo y esfuerzo que, en mi formación y educación, han invertido mis queridos padres Vicente y María del Carmen y el cariño de mi hermana, María del Rosario. He de recordar también al resto de mi familia, los que están y los que ya no me acompañan.

Quiero especialmente reconocer el aporte y cariño de mi mujer, Eva María. Sin su compañía, sacrificios y comprensión, sinceramente, no podría haber terminado esta tarea. Experiencia, espero, que nos ayude a mirar hacia delante con esa sonrisa tan típica suya.

Todo podría haber sido más difícil sin mis amigos y compañeros Andrés Rovira, Manolo Bordes, Justo, Alberto Garrido, Ismael, Virginio y Luis que me han ayudado a superar las frustraciones acumuladas. Por no hablar de Kazan, Eldora y Blaqui, esos monstruos peludos que en ocasiones no me han dejado trabajar y, en otras, me han arrancado sonrisas que me han hecho seguir con renovadas fuerzas.

A todos ellos, y a todos los que quiero y aprecio, de todo corazón... Gracias.

Índice general

Resumen	I
Abstract	III
Resum	V
Agradecimientos	IX
Índice general	XI
Índice de siglas y acrónimos	XV
Índice de nomenclatura	XVII
Índice de figuras	XXIX
Índice de cuadros y tablas	XXXV
1. Introducción	1
1.1. Motivación	1
1.2. Objetivos	3
1.3. Organización de la tesis	4
2. Problema mecánico de la fractura elástico lineal	5
2.1. Repaso histórico del problema tridimensional	5
2.2. Formulación en 3D. Serie de Williams	8
2.3. Situaciones triaxiales. Estudio del efecto de la constricción	10
2.3.1. Análisis mediante t_{ij}	11
2.3.2. Factor T_z	13
2.4. Ejemplos numéricos	14
2.4.1. Placa finita	14
2.4.2. Grieta de un cuarto de elipse en esquina	22

3. Aproximación numérica mediante elementos finitos extendidos	37
3.1. Motivación y antecedentes	37
3.2. XFEM en grietas tridimensionales	40
3.2.1. Descripción de la grieta tridimensional mediante <i>level sets</i> . . .	40
3.2.2. Implementación de <i>level sets</i> en elementos finitos	44
3.2.3. Funciones de enriquecimiento para grietas tridimensionales . .	45
3.2.4. Subdivisión e integración numérica	47
3.2.5. Error y convergencia	50
3.3. Verificación numérica	53
4. Métodos para el cálculo de los FIT en XFEM	57
4.1. Motivación y antecedentes	57
4.2. Integral J	58
4.2.1. Formulación en integral de contorno e independencia del camino	58
4.2.2. Formulación en integral de dominio	60
4.2.3. Relación con los factores de intensidad de tensiones	62
4.3. Integral de interacción	63
4.3.1. Campos auxiliares	64
4.3.2. Relación con los factores de intensidad de tensiones	66
4.4. Integrales de dominio en grietas con curvatura	67
4.4.1. Problemática en grietas con curvatura	67
4.4.2. Modificaciones a la integral de interacción en grietas con curvatura	68
4.4.3. Gradiente en curvilíneas. Derivadas de los campos auxiliares en la base de coordenadas curvilíneas	70
4.5. Definición del dominio de extracción	73
5. Ejemplos numéricos de cálculo de los FIT en XFEM	79
5.1. Ejemplos numéricos en 2-D	79
5.1.1. Introducción y caso de referencia grieta curva	79
5.1.2. Análisis de grieta curva	80
5.2. Ejemplos numéricos en 3-D	88
5.2.1. Problema de Westergaard	88
5.2.2. Problema de grieta-arco	93
5.2.3. Problema aproximado a grieta circular	101
5.2.4. Problema aproximado a grieta elíptica	110
6. Singularidad de esquina	119
6.1. Motivación y antecedentes	119
6.2. Breve revisión de teorías sobre la singularidad de esquina	120
6.3. Enriquecimiento para la singularidad del borde libre	127
6.3.1. Breve introducción a los armónicos esféricos	127
6.3.2. Armónicos esféricos como enriquecimiento para la singularidad de borde libre	128
6.4. Verificación numérica	130
6.4.1. Modelo geométrico y problema de referencia	130

6.4.2.	Modelos de elementos finitos	131
6.4.3.	Resultados para los factores de intensidad de tensiones	132
6.4.4.	Resultados en los campos de tensiones	135
7.	Conclusiones, aportaciones y trabajos futuros	139
7.1.	Conclusiones y aportaciones	139
7.1.1.	Estudio de los campos asintóticos en la grieta tridimensional	139
7.1.2.	Adaptación del método de los elementos finitos extendido al estudio de grietas tridimensionales	140
7.1.3.	Cálculo de los factores de intensidad de tensiones	140
7.1.4.	Estudio y enriquecimiento de la singularidad en el borde libre	141
7.2.	Trabajos futuros	142
7.2.1.	Trabajos relacionados con la malla de elementos finitos	142
7.2.2.	Trabajos relacionados con las integrales de dominio	145
7.2.3.	Trabajos relacionados con otro tipo de singularidades	146
Bibliografía		149

Índice de siglas y acrónimos

MFEL	Mécanica de la Fractura Elástica Lineal. 1–6, 8, 10, 14, 37, 38, 45, 46, 51, 57, 58, 64, 67, 119, 139
XFEM	Método de los elementos finitos extendidos, del inglés <i>Extended Finite Element Method</i> . 2–4, 14, 39, 40, 44–48, 50, 52, 53, 58, 62, 67, 68, 70, 72, 73, 79, 88, 93, 118, 120, 127, 130–133, 135, 140–147
FIT	Factor de Intensidad de Tensiones. 1–4, 7, 9, 11, 14, 18, 23, 31, 57, 58, 60–68, 75, 79, 85, 87, 88, 93, 101, 106, 107, 110, 121, 124, 125, 131–135, 140, 141, 144–147
LS	Función de distancia o de nivel, del inglés <i>Level Set</i> . 4, 40–45, 47, 58, 62, 65, 67, 68, 70, 72, 73, 76, 80–82, 97, 118, 123, 140–146
MEF	Método de los Elementos Finitos. 2, 10, 37–40, 45, 47, 50–53, 57, 58, 60, 62, 67, 69, 72, 93, 118, 135, 140, 142, 143
PUM	Método de la partición de la unidad, del inglés <i>Partition of Unity Method</i> . 2, 38–40
MFEP	Mecánica de la Fractura Elasto-Plástica. 5
GDL	Grados De Libertad. 38, 39, 45–47, 51, 52, 79, 122, 130
PUFEM	Método de elementos finitos con partición de la unidad, del inglés <i>Partition of Unity Finite Element Method</i> . 38
EFG	Método de Galerkin libre de elementos, del inglés <i>Element Free-Galerkin</i> . 38
GFEM	Método generalizado de los elementos finitos, del inglés <i>Generalized Finite Element Method</i> . 39
LSM	Método de las funciones distancia o de nivel, del inglés <i>Level Set Method</i> . 39–41, 58
FMM	Método de avance rápido, del inglés <i>Fast Marching Method</i> . 41

EDI	Integral equivalente de dominio, del inglés Equivalent Domain Integral. 58
-----	----------------------------------------------------------------------------

Índice de nomenclatura

t_{11}	Término de tensiones de segundo orden en el desarrollo de Williams en la dirección 1. También <i>T-stress</i> . 9–14, 18–20, 23, 30, 139, 146
T_z	Factor de constricción T_z . 13, 14, 22, 30–32, 139
θ	Coordenada angular polar, θ . 7–9, 11, 13, 31, 32, 44, 46, 47, 65, 135
F_α	Funciones de enriquecimiento correspondientes a la singularidad de frente de grieta. 46, 47, 130
ε_{33}	Componente 33 del tensor de deformaciones. 11, 12, 16, 17, 23, 26, 27, 30
B	Espesor de la placa. 14–21
a	Longitud de grieta. 14, 15, 17–19, 21, 53, 88, 101, 102, 106, 130–132, 135
W	Anchura de la placa. 14–19, 21
t_{33}	Término 33 de tensiones de segundo orden en el desarrollo de Williams. 9–14, 18–20, 22, 23, 29–32, 139, 146
ν	Coefficiente de Poisson. 9, 12, 13, 15, 18, 19, 23, 31, 32, 63, 65–67, 80, 101, 110, 111, 121, 122, 124–126
K_{local}	Valor local de los FIT. 18, 21, 24, 25, 30
$K_{Newman-Raju}$	Valor de los FIT para grieta de cuarto de elipse. 24, 25
a	Semieje menor de la elipse para grieta elíptica. 23–31, 33–35, 110, 111, 115
c	Semieje mayor de la elipse para grieta elíptica. 23–31, 33–35, 110, 111
<i>T-stress</i>	Término <i>T-stress</i> . Tensiones de segundo orden en el desarrollo de Williams, componente 11. También t_{11} . 9–11, 13, 27, 28
r	Radio de la circunferencia para el cálculo de componente de tensiones. 30, 31, 33–35, 135

K_I	FIT modo I. 9, 11, 12, 21, 23, 31, 53–55, 63, 66, 67, 82–84, 88–90, 93–95, 97–99, 101–103, 107, 112, 115, 119, 124, 125
K_{II}	FIT modo II. 9, 53–55, 63, 66, 67, 82–84, 88, 91–94, 96–98, 100, 102, 104, 106–108, 112, 113, 115, 116
J	Integral J . 4, 14, 58–61, 63, 66, 80, 82, 84, 85, 87–93, 95–97, 99, 100, 102, 104, 105, 107–109, 112–117, 132, 140, 145
Γ	Contorno que encierra un dominio que incluye el extremo de la grieta. 59–61, 73
Γ_{gr}	Contorno de la grieta. 59, 60
Γ^*	Contorno que encierra un dominio que no incluye términos singulares correspondiente a la grieta. 59–61
Γ^1	Camino arbitrario 1 que encierra la grieta. 59–61
Γ^2	Camino 2 que coincide con la parte superior de la grieta y une Γ^1 y Γ^3 . 59, 61
Γ^3	Camino arbitrario 3 que encierra la grieta. 59–61
Γ^4	Camino 4 que coincide con la parte inferior de la grieta y une Γ^3 y Γ^1 . 59, 61
q_i	Vector de velocidad de crecimiento virtual de grieta. 59–64, 67, 69, 71, 73–76, 80
\vec{e}_1	Vector de la base local en dirección 1. 42, 43, 45, 59, 62, 70, 71, 73–75
P	Punto P del frente de grieta. 61–63, 66, 67, 73, 76, 106, 123
R_{int}	Radio interior que define el subdominio interno de integración circular para la integral. 74, 75, 84–86
R_{ext}	Radio exterior que define un dominio de integración circular para la integral. 73–76, 80, 81, 84–86
h	Tamaño de elemento, longitud de lado del hexaedro. 80, 88, 90, 92, 93, 97, 102, 106, 107, 111, 115
R_q	Radio del cilindro para el dominio de integración en tres dimensiones. 77, 88, 93–95, 97, 102, 106, 111, 132
K_{III}	FIT modo III. 9, 63, 66, 67, 102, 105–107, 109, 112, 114, 115, 117
φ	Ángulo polar de definición de la posición en la elipse. 23, 31, 32, 110, 111

σ_{ij}	Tensor de tensiones. 7, 8, 13, 59, 64, 69, 121, 126, 136, 137, 139
t	Espesor de la placa. 23, 88, 93, 101, 111, 130, 132, 135–137
x_3	Coordenada dirección 3. 9, 12, 13, 21, 121
s	Velocidad de convergencia. 51, 52
λ	Orden de la singularidad originada en el <i>vertex</i> . 121–126, 128, 130
K	FIT genérico. 7, 8, 11, 13, 14, 139
r	Coordenada radial polar, r . 7–13, 44, 46, 47, 65, 135, 139
f_{ij}	Funciones trigonométricas en el desarrollo de tensiones de Williams. 7, 8, 13, 31
t_{ij}	Términos de tensiones de segundo orden en el desarrollo de Williams. 8–11, 14, 139, 140, 146
t_{13}	Término 13 de tensiones de segundo orden en el desarrollo de Williams. 9
σ_{11}	Componente 11 del tensor de tensiones. 9, 11–13, 65, 126, 135
s	Coordenada 3 a lo largo del frente de grieta. 9, 65, 72, 121
σ_{22}	Componente 22 del tensor de tensiones. 9, 11–13, 65, 126, 135
σ_{33}	Componente 33 del tensor de tensiones. 9, 11–13, 31, 32, 126, 135
σ_{12}	Componente 12, o 21, del tensor de tensiones. Tensor simétrico. 9, 135
σ_{13}	Componente 13, o 31, del tensor de tensiones. Tensor simétrico. 9
σ_{23}	Componente 23, o 32, del tensor de tensiones. Tensor simétrico. 9
u_1	Componente 1 del vector de desplazamientos. 9, 53
μ	Módulo de rigidez a cizalladura del material. 9, 53, 65–67
κ	Constante de Kolosov del material. 9, 53, 65
u_2	Componente 2 del vector de desplazamientos. 9, 53
u_3	Componente 3 del vector de desplazamientos. 9, 12
E	Módulo elástico o de Young. 9, 12, 15, 30, 63, 66, 67, 80, 101, 111
σ_{ii}	Tensor de tensiones, componentes en la diagonal. 11, 31

T	Término T -stress, componente 11, de tensiones de segundo orden en el desarrollo de Williams. También t_{11} . 13
f_{33}	Funciones trigonométricas de la componente 33 del tensor de tensiones en el desarrollo de Williams. 13, 31, 32
f_{33,T_z}	Funciones trigonométricas de la componente 33 del tensor de tensiones de acuerdo a la definición de T_z . 13, 31
f_{11}	Funciones trigonométricas de la componente 11 del tensor de tensiones en el desarrollo de Williams. 13, 31, 32
f_{22}	Funciones trigonométricas de la componente 22 del tensor de tensiones en el desarrollo de Williams. 13, 31, 32
H	Altura de la placa. 15
σ	Tensión aplicada. 15
K_I^{2D}	Valor de los FIT en el problema de dos dimensiones. 18, 21
σ_∞	Tensión de tracción remota en el infinito. 23, 53, 79, 80, 101, 110
w	Anchura de la placa. 23, 79, 101, 111, 130
h	Altura de la placa. 23, 79, 101, 111, 130
t_{ij}	Términos diagonales de tensiones de segundo orden en el desarrollo de Williams, t_{11} y t_{33} . 31
f_{ii}	Funciones trigonométricas en el desarrollo de tensiones de Williams, términos principales. 31
t_{22}	Término 22 de tensiones de segundo orden en el desarrollo de Williams. Si la cara de grietas está libre de fuerzas es 0. 31
$T_z(\theta=0)$	Factor de constricción T_z en $\theta = 0$. 31
ϕ	<i>Level set</i> ϕ o de la superficie de grieta. 41–44, 47, 72, 73, 75, 76, 144
ψ	<i>Level set</i> ψ o del frente de grieta. 41–44, 72, 73, 75, 76
\vec{e}_2	Vector de la base local en dirección 2. 42, 43, 45, 70, 71
\vec{e}_3	Vector de la base local en dirección 3. 42, 43, 45, 70, 71
\vec{N}	Vector normal en el triedro de Frenet-Serrat. 42, 43
\vec{B}	Vector binormal en el triedro de Frenet-Serrat. 42, 43
\vec{T}	Vector tangente en el triedro de Frenet-Serrat. 42, 43

I^{el}	Conjunto de nodos del elemento. 44, 45, 47, 130
ϕ_i	<i>Level set</i> ϕ , o de la superficie de grieta, evaluado en el nodo i . 44
ψ_i	<i>Level set</i> ψ , o del frente de grieta, evaluado en el nodo i . 44
N_i	Función de forma del elemento en el punto correspondiente al nodo i . 45, 47, 73, 130
$\nabla\psi _i$	Gradiente del <i>level set</i> ψ promediado en el nodo i , a partir de los valores en los elementos que lo contienen. 45
$\nabla\phi _i$	Gradiente del <i>level set</i> ϕ promediado en el nodo i , a partir de los valores en los elementos que lo contienen. 45
H	Función de Heaviside. 46–48, 130
\vec{r}	Vector de posición del punto. 46–48, 130
F_1	Función de enriquecimiento correspondiente a la singularidad de frente de grieta que incluye la discontinuidad. 46
\mathbf{u}_{xfem}	Desplazamientos calculados a partir de la aproximación por XFEM. 47, 130
u_i	Grados de libertad asociados a desplazamientos nodales. 47, 130
\mathcal{J}	Conjunto de nodos del elemento enriquecido con función de Heaviside. 47, 130
\vec{r}_i	Vector de posición del nodo i . 47, 130
\mathbf{a}_i	Desplazamientos del grado de libertad correspondiente al enriquecimiento de la función de Heaviside. 47, 130
\mathcal{K}	Conjunto de nodos del elemento enriquecido con funciones de extremo de grieta. 47, 130
$\mathbf{b}_{i\alpha}$	Desplazamientos del grado de libertad correspondiente al enriquecimiento de la función de extremo de grieta, F_α . 47, 130
\mathbf{u}_{mef}	Desplazamientos calculados a partir de la aproximación por MEF. 47, 51
T_q	Transformación del prisma de referencia en un tetraedro para integración «casi polar». 49
\bar{r}	Coordenada local \bar{r} del tetraedro con integración «casi polar». 50
$\bar{\rho}$	Coordenada local $\bar{\rho}$ del tetraedro con integración «casi polar». 50
$\bar{\theta}$	Coordenada local $\bar{\theta}$ del tetraedro con integración «casi polar». 50
\bar{s}	Coordenada local \bar{s} del tetraedro con integración «casi polar». 50

\bar{t}	Coordenada local \bar{t} del tetraedro con integración «casi polar». 50
\bar{t}'	Coordenada local \bar{t}' del tetraedro con integración «casi polar». 50
Ω_{mef}	Dominio de cálculo mediante MEF. 50, 51
\mathbf{u}_{ex}	Desplazamientos exactos del problema. 51
\mathbf{e}_u	Error local en desplazamientos. 51, 52
L^2	Norma L^2 , norma clásica asociada a distancia euclídea. 51, 52
$ e _E$	Error global de la norma L^2 de energía. 51, 52
ε_{mef}	Deformaciones calculadas a partir de la aproximación por MEF. 51
ε_{ex}	Deformaciones exactas del problema. 51
σ_{mef}	Tensiones calculadas a partir de la aproximación por MEF. 51
σ_{ex}	Tensiones exactas del problema. 51
$ e _E^e$	Error en elemento e de norma L^2 de energía. 51
h	Tamaño de elemento de los elementos finitos. 51, 52
p	Orden del tipo de elemento finito empleado. 51
λ	Orden de intensidad de la singularidad, en grietas según la MFEL 0,5. 51
x_2	Coordenada dirección 2. 53
x_1	Coordenada dirección 1. 53
τ_∞	Tensión de cortante remota en el infinito. 53, 101, 110
I	Integral de interacción. 58, 63, 64, 66, 68, 69
Π	Energía de potencial total de un cuerpo elástico. 58, 59
U	Energía de deformación elástica. 58, 59
G	Tasa de liberación de energía por unidad de área en la formación de la grieta. 59, 60, 63, 66, 145
A	Área formada de grieta. 59
P_{ij}	Tensor energía-momento de Eshelby. 59–61, 64
n_j	Vector normal al contorno que encierra un dominio de la grieta. 59, 60
W	Energía de deformación elástica por unidad de volumen. 59
δ_{ij}	Tensor delta de Kronecker. 59, 64, 69
σ_{jk}	Tensor de tensiones. 59, 64
u_k	Vector de desplazamientos. 59, 64, 69
ε_{ij}	Tensor de deformaciones. 59, 64, 69
Ω	Dominio de integración para la integral, se corresponde con un área en 2D y con un volumen en 3D. 61–64, 69, 73

α	Función de peso de ponderación para la definición del campo virtual q_i . 62, 63, 66, 67, 73–77, 80, 81, 84, 85, 146
E'	Módulo elástico o de Young generalizado para estados de deformación y tensión planas. 63, 66
L^{gr}	Punto P del frente de grieta de cálculo de la integral de dominio. 63, 66, 67, 145
J^{tot}	Integral J total en el problema de interacción. 63
J^{aux}	Integral J correspondiente a los campos auxiliares. 63
P_{ij}^{aux}	Tensor energía momento de Eshelby para el campo auxiliar de interacción. 63, 64, 68, 69, 75, 83
W^{aux}	Energía de deformación elástica por unidad de volumen en los campos en interacción. 64, 69, 82, 83
σ_{jk}^{aux}	Tensor de tensiones del campo auxiliar. 64, 71
u_k^{aux}	Vector de desplazamientos del campo auxiliar. 64, 69, 71
ε_{ij}^{aux}	Tensor de deformaciones del campo auxiliar. 64, 65, 69, 82, 83
σ_{ij}^{aux}	Tensor de tensiones del campo auxiliar. 64, 69, 83
u_j^{aux}	Vector de desplazamientos del campo auxiliar. 64, 65, 69, 71
C_{ijkl}	Tensor constitutivo del material. 64, 65, 69
ε_{kl}	Tensor de deformaciones. 64, 69
C_{klij}	Tensor constitutivo del material. 64
σ_{kl}^{aux}	Tensor de tensiones del campo auxiliar. 64, 65, 69
u_1^{aux}	Componente 1 del vector de desplazamientos auxiliar. 65
K_1^{aux}	FIT modo I. 65, 66
K_{II}^{aux}	FIT modo II. 65, 66
u_2^{aux}	Componente 2 del vector de desplazamientos auxiliar. 65
u_3^{aux}	Componente 3 del vector de desplazamientos auxiliar. 65
K_{III}^{aux}	FIT modo III. 65, 66
σ_{11}^{aux}	Componente 11 del tensor de tensiones auxiliar. 65
σ_{22}^{aux}	Componente 22 del tensor de tensiones auxiliar. 65

σ_{33}^{aux}	Componente 33 del tensor de tensiones auxiliar. 65
σ_{12}^{aux}	Componente 12, o 21, del tensor de tensiones auxiliar. Tensor simétrico. 65
σ_{13}^{aux}	Componente 13, o 31, del tensor de tensiones auxiliar. Tensor simétrico. 65
σ_{23}^{aux}	Componente 23, o 32, del tensor de tensiones auxiliar. Tensor simétrico. 65
u_i^{aux}	Vector de desplazamientos del campo auxiliar. 65, 69
G^{aux}	Tasa de liberación de energía por unidad de área en la formación de una grieta virtual, originada por el término de interacción del efecto conjunto de un campo auxiliar y un campo problema. 66
I^I	Integral de interacción particularizada para modo I. 66, 67
I^{II}	Integral de interacción particularizada para modo II. 66, 67
I^{III}	Integral de interacción particularizada para modo III. 66, 67
σ_{kl}	Tensor de tensiones. 69
\vec{e}_i	Vector de la base local en dirección i . 70–72
h_i	Factor de escala en la derivada curvilínea coordenada local i . 70–72
ξ_i	Coordenada local curvilínea en dirección \vec{e}_i . 70–72
f_j	Componente j del campo tensorial \vec{f} . 70, 71
\vec{f}	Campo tensorial. 70
h_1	Factor de escala en la derivada curvilínea coordenada local 1. 70, 71
h_2	Factor de escala en la derivada curvilínea coordenada local 2. 70, 71
ξ_2	Coordenada local curvilínea en dirección \vec{e}_2 , coincide con el <i>level set</i> ϕ . 70–72, 76, 77
h_3	Factor de escala en la derivada curvilínea coordenada local 3. 70, 71
ξ_3	Coordenada local curvilínea en dirección \vec{e}_3 . 70–72, 76, 77
f_1	Componente 1 del campo tensorial \vec{f} . 70, 71
f_2	Componente 2 del campo tensorial \vec{f} . 70, 71
f_3	Componente 3 del campo tensorial \vec{f} . 70, 71
ξ_1	Coordenada local curvilínea en dirección \vec{e}_1 , coincide con el <i>level set</i> ψ . 71, 72, 76, 77
f_m	Componente m del campo tensorial \vec{f} . 71

\vec{e}_m	Vector de la base local en dirección m . 71, 72
\vec{e}_j	Vector de la base local en dirección j . 71–73
Γ_{ij}^m	Símbolos de Christoffel del gradiente en coordenadas curvilíneas. 71
f_k	Componente k del campo tensorial \vec{f} . 71
\vec{e}_k	Vector de la base local en dirección k . 71, 72
h_j	Factor de escala en la derivada curvilínea coordenada local j . 71, 73
ξ_j	Coordenada local curvilínea en dirección \vec{e}_j . 71, 72
h_m	Factor de escala en la derivada curvilínea coordenada local m . 71
ξ_m	Coordenada local curvilínea en dirección \vec{e}_m . 71
ξ_l	Coordenada local curvilínea en dirección \vec{e}_l . 71
\vec{e}_l	Vector de la base local en dirección l . 71
f_{jk}	Componente jk del campo tensorial f . 71, 72
f_{mk}	Componente mk del campo tensorial f . 72
f_{jm}	Componente jm del campo tensorial f . 72
J_{ij}	Matriz jacobiana de la transformación entre el sistema de referencia cartesiano y el local de la grieta. 72
x_j	Coordenada cartesiana en dirección j . 72
J_{ki}	Componente ki de la matriz jacobiana de la transformación entre el sistema de referencia cartesiano y el local de la grieta. 72
x_k	Coordenada cartesiana en dirección k . 72, 73
J_{kj}	Componente kj de la matriz jacobiana de la transformación entre el sistema de referencia cartesiano y el local de la grieta. 72
S_q	Distancia del punto central a una de las bases cilíndricas del dominio de interacción tridimensional. 77, 88, 93, 102, 106, 111, 132
R_c	Radio de la grieta arco. 79–81, 84–86, 93, 97, 107
β	Ángulo de definición de geometría de la grieta arco. 79, 80
K_I^{ex}	Valor exacto del FIT modo I. 79, 101, 110
K_{II}^{ex}	Valor exacto del FIT modo II. 79, 101, 110
θ	Ángulo definición del punto a lo largo del frente de grieta. 101
K_{III}^{ex}	Valor exacto del FIT modo III. 101, 110
$f(\tau)$	Función que multiplica los FIT para incluir el efecto de la singularidad en el borde libre. 121
ρ	Coordenada radial del sistema de referencia esférico. 121, 123, 125–127, 130

f_{ij}	Función que describe el comportamiento angular para las distintas componentes singulares de tensiones en el borde libre. 121, 122, 126
θ	Coordenada angular de colatitud, de 0 a π , del sistema de referencia esférico. 121–123, 125–128, 130
ϕ	Coordenada angular azimutal, de 0 a 2π del sistema de referencia esférico. 121–123, 125–128, 130, 144
u_i	Vector de desplazamientos. 123
g_i	Función que describe el comportamiento angular para las distintas componentes singulares de desplazamientos en el borde libre. 123, 128
r	Coordenada radial polar, r . 123–126
θ	Coordenada angular polar, θ . 123, 124, 127
t	Coordenada a lo largo del eje del cilindro, t . Indica que el origen del sistema de coordenadas está en el <i>vertex</i> . 123, 124
z	Coordenada a lo largo del eje del cilindro, z . 123
P^+	Punto P^+ del frente de grieta donde está la singularidad de borde libre. 123
σ_{rr}	Componente rr del tensor de tensiones en el sistema de referencia asociado a las coordenadas cilíndricas. 124, 125
$\sigma_{\theta\theta}$	Componente $\theta\theta$ del tensor de tensiones en el sistema de referencia asociado a las coordenadas cilíndricas. 124
σ_{tt}	Componente tt del tensor de tensiones en el sistema de referencia asociado a las coordenadas cilíndricas, formulación para el estudio de las singularidad del borde libre. 124
$\sigma_{r\theta}$	Componente $r\theta$ del tensor de tensiones en el sistema de referencia asociado a las coordenadas cilíndricas. 124
u_r	Componente r del vector de desplazamientos en cilíndricas. 124
u_θ	Componente θ del vector de desplazamientos en cilíndricas. 124
β	Ángulo entre la superficie libre y la grieta en el punto de <i>vertex</i> . 124
β_c	Ángulo entre la superficie libre y la grieta en el punto de <i>vertex</i> . Valor crítico en el que la singularidad coincide con la singularidad de grieta. 124, 126, 127, 130

K_λ	Valor análogo a la definición de FIT para la singularidad del borde libre. 125, 126
$D_{p\epsilon}$	Factor que controla la transición entre un estado de tensión plana, $D_{p\epsilon} = 0$, y un estado de deformación plana, $D_{p\epsilon} = 1$. 126
σ_{ij}^{gr}	Tensor de tensiones asociado al estado provocado por la existencia de un frente de grieta. 126
σ_{ij}^{bl}	Tensor de tensiones asociado al estado provocado por la existencia del borde libre. 126
$f(\theta)$	Función aproximada a dos dimensiones de la descripción angular del comportamiento de los campos de borde libre, valida para ángulos θ pequeños. 126
Y_m^l	Función armónico esférico de Laplace, término lm . 127
P_l^m	Polinomio de Legendre, término lm . 127
Y_{lm}	Función armónico esférico de Laplace normalizado, término lm . 127, 128
$Y_{l'm'}$	Función armónico esférico de Laplace normalizado, término $l'm'$. 128
$\delta_{ll'}$	Tensor delta de Kronecker. 128
$\delta_{mm'}$	Tensor delta de Kronecker. 128
δ	Función delta de Dirac. 128
y_{lm}	Función armónico esférico real de Laplace, término lm . 128, 130
Y_{l0}	Función armónico esférico de Laplace normalizado, término $l0$. 128
$y_{l'm'}$	Función armónico esférico real de Laplace, término $l'm'$. 128
a_{lm}	Componente de la expansión en la base de armónico esféricos, término y_{lm} . 128
G_{lm}	Funciones de enriquecimiento correspondiente a la singularidad de borde libre. 130
\mathcal{V}	Conjunto de nodos del elemento con enriquecimiento con funciones armónicos esféricos. 130
L	Número de orden máximo de los armónicos esféricos usados como enriquecimiento. 130, 132
c_{ilm}	Desplazamientos del grado de libertad correspondiente al enriquecimiento por la función armónico esférico, y_{lm} . 130
z	Coordenada dirección z . 132, 135
σ_{ABAQUS}	Campos de tensiones de la solución de elementos finitos. 135
κ	Curvatura. 144
J_i	Integral J en el punto i del frente de grieta. 145

A_{ij}	Matriz que introduce la dependencia entre la integral J y la tasa de liberación de energía de la grieta G para suponiendo variación entre puntos cercanos. 145
G_j	Tasa de liberación de energía por unidad de área en la formación de la grieta, G , en el punto j del frente de grieta. 145
α_j	Función de peso de ponderación para la definición de q_i en el punto de cálculo j . 145
N_i^G	Función de forma de apoyo a lo largo de la grieta en el cálculo de G correspondiente al punto de grieta i . 145

Índice de figuras

2.1. Sistema local de coordenadas para el frente de grieta.	8
2.2. Diagrama de modos de apertura de grieta.	10
2.3. Modelo geométrico de la placa.	15
2.4. Ejemplo de malla del análisis de la placa.	16
2.5. Variación de ε_{33} en el frente de grieta de la placa para distintos espesores B —en mm—.	17
2.6. Variación de ε_{33} en el frente de grieta de la placa para distintas relaciones a/W	17
2.7. Variación de t_{11} y t_{33} en el plano medio de la grieta para distintos B y a/W	19
2.8. Variación de t_{11} y t_{33} en el plano medio de la grieta para distintos B y ν	19
2.9. Variación de t_{11} en el frente de grieta de la placa para distintos B —en mm—.	20
2.10. Variación de t_{33} en el frente de grieta de la placa para distintos B —en mm—.	20
2.11. Descripción esquemática de la geometría y cargas de la grieta de esquina.	22
2.12. Vista de la malla con detalle de los elementos hexaedros en las cercanías del frente de grieta.	23
2.13. Detalle del ángulo de definición de la posición a lo largo del frente de grieta y de la circunferencia centrada en un punto dado del frente de grieta usado para el estudio del estado tensional de la grieta.	24
2.14. K_{local} y $K_{Newman-Raju}$. Variación a lo largo del frente de grieta. $a/c = 1,0$	24
2.15. K_{local} y $K_{Newman-Raju}$. Variación a lo largo del frente de grieta. $a/c = 0,5$	25
2.16. K_{local} y $K_{Newman-Raju}$. Variación a lo largo del frente de grieta. $a/c = 0,2$	25
2.17. Variación de ε_{33} a lo largo del frente de grieta. $a/c = 1,0$	26
2.18. Variación de ε_{33} a lo largo del frente de grieta. $a/c = 0,5$	26
2.19. Variación de ε_{33} a lo largo del frente de grieta. $a/c = 0,2$	27
2.20. Variación de T -stress a lo largo del frente de grieta. $a/c = 1,0$	27
2.21. Variación de T -stress a lo largo del frente de grieta. $a/c = 0,5$	28
2.22. Variación de T -stress a lo largo del frente de grieta. $a/c = 0,2$	28
2.23. Variación de t_{33} a lo largo del frente de grieta. $a/c = 1,0$	29
2.24. Variación de t_{33} a lo largo del frente de grieta. $a/c = 0,5$	29
2.25. Variación de t_{33} a lo largo del frente de grieta. $a/c = 0,2$	30

2.26. Estado de tensiones en el camino circular cercano al frente de grieta. Ejemplo $a/c = 0,2$ y $r/a = 0,010$	33
2.27. Estado de tensiones en el camino circular cercano al frente de grieta. Ejemplo $a/c = 0,5$ y $r/a = 0,002$	34
2.28. Estado de tensiones en el camino circular cercano al frente de grieta. Ejemplo $a/c = 1,0$ y $r/a = 0,004$	35
3.1. Ejemplo de <i>level sets</i> para la descripción genérica de una grieta.	41
3.2. Triedro de Frenet-Serrat para una curva.	43
3.3. Nodos enriquecidos en el método de los elementos finitos extendido — XFEM, del inglés <i>Extended Finite Element Method</i> —. Círculos: nodos enriquecidos con la función de Heaviside. Elementos afectados directamente por este enriquecimiento en amarillo. Cuadrados: nodos con función de enriquecimiento de extremo de grieta. Elementos afectados por el enriquecimiento en azul.	46
3.4. Ejemplo de subdivisión de elementos.	49
3.5. Distribución de los puntos de cuadraturas de Stroud.	49
3.6. Transformación de dominios para la integración «casi-polar» de Park.	50
3.7. Ejemplo de distribución de los puntos de cuadraturas «casi-polar» de Park.	50
3.8. Definición geométrica del problema de Westergaard en dos dimensiones.	54
3.9. Convergencia en energía para el problema Westergaard con solo K_I	55
3.10. Convergencia en energía para el problema Westergaard con solo K_{II}	55
4.1. Entalla en un dominio bidimensional para cálculo de J . Γ es cualquier camino que contenga el fondo de entalla Γ_{gr}	60
4.2. Dominio cerrado $\Gamma^* = \Gamma^1 + \Gamma^2 + \Gamma^3 + \Gamma^4$ usado para la demostración de la independencia de camino en la integral J	61
4.3. Dominio de integración para 2D.	62
4.4. Significado de q_i en el esquema del dominio de extracción. Campo de extensión virtual de crecimiento de la grieta.	74
4.5. Representación de la dirección del campo virtual de velocidades q_i respecto a la grieta. Izquierda: como extensión en el extremo de grieta. Derecha: como vector tangente a \vec{e}_1 en el dominio.	74
4.6. Representación de q_i como <i>plateau</i>	75
4.7. Representación de q_i con dos regiones, una rampa con una <i>plateau</i> en la zona central.	75
4.8. Representación de q_i como rampa.	76
4.9. Representación esquemática de un cilindro como dominio de integración en tres dimensiones alrededor de un punto P del frente de grieta	76
5.1. Problema de una grieta con forma de arco en una placa infinita sometida a tensión biaxial	80
5.2. Esquema del proceso de refinamiento y creación de la secuencia de mallas.	81

5.3. Estudio en la definición de la base local a partir de los función distancia o de nivel —LS, del inglés *Level Set*—. Estudio en la convergencia del error para la integral J 82

5.4. Resultados del estudio en velocidad de convergencia para las definiciones de la integral de interacción en grietas curvas. Convergencia en error para K_I 83

5.5. Resultados del estudio en velocidad de convergencia para las definiciones de la integral de interacción en grietas curvas. Convergencia en error para K_{II} 84

5.6. Resultados del estudio de convergencia para distintas relaciones $\frac{R_{int}}{R_{ext}}$ para definición del dominio de extracción. 85

5.7. Mínimo error obtenido en los estudios de convergencia para distintas relaciones $\frac{R_{int}}{R_{ext}}$ para definición del dominio de extracción. 86

5.8. Velocidad de convergencia del error en los Factor de Intensidad de Tensiones —FIT— y J para varios radios de extracción. 87

5.9. Resultados en el valor absoluto del mínimo error (%) alcanzado en los estudios de convergencia para varios radios de extracción de los FIT y J . 87

5.10. Resultados de K_I en el frente de grieta para el problema de Westergaard tridimensional en modo I puro. Integral de interacción. 89

5.11. Resultados de J en el frente de grieta para el problema de Westergaard tridimensional en modo I puro. 89

5.12. Error de K_I medio respecto a h para el problema de Westergaard tridimensional en modo I puro. Velocidad de convergencia. 90

5.13. Error de J medio respecto a h para el problema de Westergaard tridimensional en modo I puro. Velocidad de convergencia. 90

5.14. Resultados de K_{II} en el frente de grieta para el problema de Westergaard tridimensional en modo II puro. 91

5.15. Resultados de J en el frente de grieta para el problema de Westergaard tridimensional en modo II puro. 91

5.16. Error de K_{II} medio respecto a h para el problema de Westergaard tridimensional con modo II puro. Velocidad de convergencia. 92

5.17. Error de J medio respecto a h para el problema de Westergaard tridimensional con modo II puro. Velocidad de convergencia. 92

5.18. Valor medio normalizado de K_I a lo largo del frente de grieta respecto a R_q para el problema de grieta arco extruido en 3D. 94

5.19. Valor medio normalizado de K_{II} a lo largo del frente de grieta respecto a R_q para el problema de grieta arco extruido en 3D. 94

5.20. Valor medio normalizado de J a lo largo del frente de grieta respecto a R_q para el problema de grieta arco extruido en 3D. 95

5.21. Distribución de K_I a lo largo del frente de grieta para el problema de grieta arco extruido en 3D. 95

5.22. Distribución de K_{II} a lo largo del frente de grieta para el problema de grieta arco extruido en 3D. 96

5.23. Distribución de J a lo largo del frente de grieta para el problema de grieta arco extruido en 3D. 96

5.24. Oscilaciones en el radio de extracción, R_q , debido a la malla. Aparición de convexidades.	97
5.25. Resultados del estudio de convergencia de error medio para K_I en el problema de grieta arco extruido 3D.	98
5.26. Resultados del estudio de convergencia de error medio para K_{II} en el problema de grieta arco extruido 3D.	98
5.27. Resultados del estudio de convergencia de error medio para J en el problema de grieta arco extruido 3D.	99
5.28. Estudio del efecto por la curvatura en los gradientes para la integral de interacción. K_I en el problema de grieta arco extruido 3D.	99
5.29. Estudio del efecto por la curvatura en los gradientes para la integral de interacción. K_{II} en el problema de grieta arco extruido 3D.	100
5.30. Estudio del efecto por la curvatura en los gradientes para la integral de dominio. J en el problema de grieta arco extruido 3D.	100
5.31. Distribución de K_I a lo largo del frente de grieta para el problema de grieta arco extruido 3D. No se incluye la corrección en los gradientes debido al uso de coordenadas curvilíneas.	101
5.32. Esquema de la grieta circular en dominio infinito.	102
5.33. Esquema del modelo usado para simular la grieta circular en dominio infinito.	103
5.34. Resultados de la distribución de K_I a lo largo del frente en el problema de grieta circular bajo tracción remota.	103
5.35. Resultados de la distribución de J a lo largo del frente en el problema de grieta circular bajo tracción remota.	104
5.36. Resultados de la distribución K_{II} a lo largo del frente en el problema de grieta circular bajo cortante remoto.	104
5.37. Resultados de la distribución K_{III} a lo largo del frente en el problema de grieta circular bajo cortante remoto.	105
5.38. Resultados de la distribución J a lo largo del frente en el problema de grieta circular bajo cortante remoto.	105
5.39. Oscilaciones del tamaño de extracción y longitud de grieta considerada debido a que la malla no es paralela al frente de grieta.	106
5.40. Resultados de la comparación entre incluir el ajuste para el gradiente en curvilíneas o no. Distribución de K_I a lo largo del frente en el problema de grieta circular bajo tracción remota.	107
5.41. Resultados de la comparación entre incluir el ajuste para el gradiente en curvilíneas o no. Distribución de J a lo largo del frente en el problema de grieta circular bajo tracción remota.	108
5.42. Resultados de la comparación entre incluir el ajuste para el gradiente en curvilíneas o no. Distribución de K_{II} a lo largo del frente en el problema de grieta circular bajo cortante remoto.	108
5.43. Resultados de la comparación entre incluir el ajuste para el gradiente en curvilíneas o no. Distribución de K_{III} a lo largo del frente en el problema de grieta circular bajo cortante remoto.	109

5.44. Resultados de la comparación entre incluir el ajuste para el gradiente en curvilíneas o no. Distribución de J a lo largo del frente en el problema de grieta circular bajo cortante remoto. 109

5.45. Esquema de la grieta elíptica en dominio infinito. Detalle de definición del ángulo φ 110

5.46. Esquema del modelo usado para simular la grieta elíptica en dominio infinito. 111

5.47. Evolución de K_I a lo largo del frente de grieta para distintos tamaños de elemento en el problema de grieta elíptica bajo tracción remota. . . 112

5.48. Evolución de J a lo largo del frente de grieta para distintos tamaños de elemento en el problema de grieta elíptica bajo tracción remota. . . 113

5.49. Evolución de los K_{II} a lo largo del frente de grieta para distintos tamaños de elemento en el problema de grieta elíptica bajo cortante remoto. 113

5.50. Evolución de los K_{III} a lo largo del frente de grieta para distintos tamaños de elemento en el problema de grieta elíptica bajo cortante remoto. 114

5.51. Evolución de J a lo largo del frente de grieta para distintos tamaños de elemento en el problema de grieta elíptica bajo cortante remoto. . . 114

5.52. Resultados de la comparación entre incluir el ajuste para el gradiente en curvilíneas o no. Distribución de K_I a lo largo del frente en el problema de grieta elíptica bajo tracción remota. 115

5.53. Resultados de la comparación entre incluir el ajuste para el gradiente en curvilíneas o no. Distribución de J a lo largo del frente en el problema de grieta elíptica bajo tracción remota. 116

5.54. Resultados de la comparación entre incluir el ajuste para el gradiente en curvilíneas o no. Distribución de K_{II} a lo largo del frente en el problema de grieta elíptica bajo cortante remoto. 116

5.55. Resultados de la comparación entre usar el ajuste para el gradiente en curvilíneas o no. Distribución de K_{III} a lo largo del frente en el problema de grieta elíptica bajo cortante remoto. 117

5.56. Resultados de la comparación entre incluir el ajuste para el gradiente en curvilíneas o no. Distribución de J a lo largo del frente en el problema de grieta elíptica bajo cortante remoto. 117

6.1. Ejemplo de configuración de grieta tridimensional donde se indica la intersección de borde libre. 120

6.2. Sistema esférico de coordenadas definido en el punto de intersección de la grieta con la superficie libre. 122

6.3. Esquema de la definición del ángulo entre la superficie libre y la grieta. 125

6.4. Ilustración que muestra la forma de los primeros armónicos esféricos $l = 0,1,2,3,4$ 129

6.5. Esquema geométrico. 131

6.6. Malla adaptada al problema en ABAQUS. Se puede observar el refinamiento concentrado hacia el *vertex*. 132

6.7. Ejemplo de una de las mallas para el análisis con XFEM. Se pueden observar las regiones enriquecidas. 133

6.8. Resultados en los FIT para un tamaño de elemento mayor que la región afectada.	133
6.9. Resultados en los FIT para un tamaño de elemento similar a la región afectada.	134
6.10. Resultados en los FIT para un tamaño de elemento inferior a la región afectada.	134
6.11. Distribución de tensiones σ_{ij} en un camino circular cercano al frente de grieta a $0,03t$ de la superficie libre.	136
6.12. Distribución de tensiones σ_{ij} en un camino circular cercano al frente de grieta a $0,2t$ de la superficie libre.	137
7.1. Error en la subdivisión del elemento con la técnica usada.	142
7.2. Estrategia de doble subdivisión del elemento.	143
7.3. Ejemplo de malla no conforme resultado de refinar mediante la técnica de <i>hanging nodes</i>	144

Índice de cuadros y tablas

2.1. Variación de K_{local} (K_1) en el plano medio $x_3 = 0$ con B y a/W	21
3.1. Valores asintóticos para la velocidad de convergencia s en el XFEM con enriquecimiento topológico.	52
6.1. Valores de λ . Orden de singularidad de esquina dependiente del coeficiente de Poisson ν	122

Capítulo 1

Introducción

*Sé breve en tus razonamientos,
que ninguno hay gustoso si es largo.
Miguel de Cervantes y Saavedra*

1.1. Motivación

Uno de los puntos más importantes en el diseño mecánico de componentes de máquinas es la identificación del modo de fallo más probable y la elaboración de un criterio para su detección. Estos fallos ocurren, incluso cuando la estructura o pieza en servicio se halla sobredimensionada respecto a la teoría de la resistencia de materiales, debido a procesos de fatiga y fractura. La fractura es un proceso de fallo mecánico que, a nivel muy básico, puede definirse como la consecuencia de la rotura de los enlaces interatómicos existentes en los sólidos. Desde un punto de vista macromecánico puede verse como la separación de un componente por ruptura en dos o más piezas debido a la propagación de grietas. El estudio del efecto de la existencia de grietas y defectos en las estructuras, usando la aproximación de la Mecánica de la Fractura Elástica Lineal —MFEL—, es una de las herramientas de las que se dispone para evitar fallos prematuros y catastróficos. Una breve introducción y repaso histórico al nacimiento de la teoría de la MFEL, así como algunos de los accidentes y catástrofes que han demostrado su importancia, se puede encontrar en [1].

A pesar de que existen observaciones en trabajos anteriores tan antiguos como los tratados de Galileo, todo el desarrollo teórico de la MFEL puede fijar su origen en los trabajos de Griffith, [2, 3], sobre todo a partir de las interpretaciones realizadas en [4, 5]. El comportamiento asintótico de los campos presentes en la cercanía de la grieta para un problema plano y el caso de grieta circular fue establecido en [6] a partir del campo de soluciones de Westergaard para problemas planos. Irwin, [7], generalizó esta expresión, estando entre sus contribuciones: la expresión genérica para el campo asintótico de tensiones a cortas distancias al frente de grieta y la introducción del concepto de Factor de Intensidad de Tensiones —FIT—. Los FIT constituyen los parámetros caracterizadores de la intensidad de los campos de tensiones en puntos

cercanos a los frentes de grieta y por tanto se convierten en las magnitudes que se deben calcular para establecer un criterio de fallo.

Estudios posteriores aplicados a tres dimensiones como [8–10] ponen de manifiesto las diferencias entre los campos singulares existentes en grietas tridimensionales y las expresiones de [7], así como la aparición de nuevos tipos de singularidades, resultados que motivan un estudio más profundo. Sin embargo, el estudio analítico de problemas reales es inviable, debido a la dificultad que conlleva la resolución del sistema de ecuaciones diferenciales asociado, por lo que se siguen aceptando aproximaciones bidimensionales. Además se hace necesario la utilización de métodos y herramientas numéricas para obtener soluciones aproximadas.

El estudio de los diversos fenómenos naturales, como el comportamiento mecánico de los sólidos elásticos, suele modelarse de forma matemática mediante el uso de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales aplicadas al estudio de problemas de contorno. La resolución analítica de dichos problemas de contorno es habitualmente irrealizable por lo que diversas técnicas numéricas se han desarrollado para lograr un resultado aproximado. Una introducción a las técnicas numéricas más usadas en mecánica computacional puede consultarse en [11]. El Método de los Elementos Finitos —MEF— constituye una de las herramientas numéricas más potentes de las que se dispone. Una buena introducción a los fundamentos del MEF se puede encontrar en muchos libros, por ejemplo en [12–14].

El MEF converge asintóticamente a la solución exacta, si el término correcto puede expresarse usando un desarrollo polinómico, pero una singularidad, o comportamiento descrito por gradientes muy elevados, no puede describirse usando este desarrollo y, por tanto, aparecen complicaciones para obtener una aproximación numérica. El método de los elementos finitos extendido —XFEM, del inglés *Extended Finite Element Method*— introducido en [15–18] es una alternativa eficaz para el modelado de este tipo de problemas. Esta técnica constituye una modificación de la expresión básica del MEF de forma que incluye un enriquecimiento local del espacio de aproximación mediante conceptos del método de partición de la unidad—PUM, del inglés *Partition of Unity Method*— y va a constituir la herramienta básica de modelado para los problemas relacionados con la MFEL en esta tesis, lo que justifica que se haga una revisión de su formulación tridimensional.

En el estudio del efecto mecánico de la presencia de grietas, una de las magnitudes usadas para evaluar su influencia son los FIT, parámetros que caracterizan los campos asintóticos cerca de la singularidad. Para su obtención a partir de un modelo numérico se suelen emplear técnicas de postproceso basadas en métodos energéticos, [19, 20]. Estos métodos energéticos pueden utilizar la solución aproximada de elementos finitos en puntos alejados de la singularidad y, por lo tanto, evitar la zona de mayor error en los resultados, o pueden utilizar algún tipo de solución mejorada para reducir el error y, además, son relativamente simples de implementar.

Hay que comentar que la mayoría de estos métodos han sido desarrollados para estudios en dos dimensiones con grietas rectas. Es decir, en su desarrollo teórico se aceptan las hipótesis asociadas a estados bidimensionales de grietas. Por tanto, para los casos tridimensionales se acepta el comportamiento correspondiente a una grieta plana de frente recto, que es similar al caso 2-D. Aunque existen algunas modifica-

ciones para su implementación genérica tridimensional, incluyendo la influencia del resto de la grieta en el punto de evaluación, [21, 22] y configuraciones no planas y de frente curvo, [23–25], el cálculo de los FIT es un problema aún no totalmente resuelto en casos genéricos tridimensionales, grietas no planas y frentes curvos. Estas configuraciones de geometría compleja son las que suelen aparecer en la realidad.

En el estudio de grietas reales tridimensionales no solo se puede identificar el estado singular asociado al frente de grieta y estudiado por la MFEL. Otros tipos de singularidades también existen. Una de ellas, conocida como singularidad del borde libre, se origina en la intersección del frente de grieta con una superficie libre, [10, 26, 27]. Este efecto es totalmente tridimensional y por tanto no admite una aproximación bidimensional. Existen algunos estudios sobre el desarrollo teórico para esta singularidad, pero no se dispone de una expresión analítica. Sin embargo es conocido que presenta un comportamiento con cierta simetría esférica y un orden de singularidad, no igual, pero cercano al asociado al frente de grieta. Aunque en su proximidad los conceptos asociados al frente de grieta no pueden ser rigurosamente aceptados, es habitual aplicarlos, como por ejemplo el concepto y valor de los FIT. A pesar de su influencia en el comportamiento a fatiga y debido a su pequeña región de influencia, suele ignorarse en los estudios de grietas tridimensionales. Sin embargo para obtener conclusiones correctas debe ser tenido en cuenta, ya que influye sobre la morfología de propagación de la grieta.

1.2. Objetivos

El objetivo principal de esta tesis es la mejora del modelado numérico de grietas tridimensionales en el ámbito de la MFEL, siendo la herramienta principal del análisis el XFEM. Sin embargo, el formalismo utilizado la hace susceptible de generalización.

Se ha tenido que profundizar en la descripción del campo asintótico y modificar la implementación de una herramienta numérica disponible para los cálculos con XFEM. Dicha herramienta está implementada en el código abierto de elementos finitos FEAP, [28–30], usándose MATLAB como aplicación auxiliar. Es un programa con fines académicos lo que facilita cambios, pero presenta ciertas restricciones en la gestión de memoria, cuya optimización, escapa de los objetivos de esta tesis.

Los puntos que se han seguido para la realización de la tesis son:

1. Estudio del estado tridimensional de campo asintótico singular asociado al frente de la grieta.
2. Mejora y adaptación de un programa basado en XFEM para el estudio de grietas tridimensionales.
3. Modificación de las herramientas de postproceso para el cálculo y obtención de los FIT en grietas curvas bidimensionales.
4. Elaboración de herramientas de postproceso para el cálculo y obtención de los FIT en grietas tridimensionales genéricas.

5. Estudio de la singularidad de borde libre y desarrollo de un enriquecimiento para su introducción en el método XFEM.

1.3. Organización de la tesis

La tesis se organiza en una memoria compuesta por siete capítulos. El segundo capítulo es una introducción teórica al problema de la MFEL tridimensional, donde se establece el marco teórico del problema mecánico seguido en el resto de la tesis. Es decir, presentamos el desarrollo en serie para el comportamiento asintótico de los campos cercanos a la singularidad del frente de grieta. El tercer capítulo constituye el marco teórico del XFEM, se repasa brevemente la formulación tridimensional incluyendo la descripción de la grieta mediante función distancia o de nivel —LS, del inglés *Level Set*—. El cuarto capítulo trata sobre las integrales de dominio y su aplicación para la extracción de los FIT en grietas tridimensionales. El capítulo está constituido por una introducción teórica sobre las dos integrales de dominio que son utilizadas en nuestro estudio, la integral J y la integral de interacción. Se incluye una revisión de su uso en tres dimensiones con modificaciones para la introducción de coordenadas curvilíneas. El capítulo quinto es el análisis de los ejemplos numéricos de cálculo de los FIT. Se realiza un estudio de diversos parámetros tanto para dos como para tres dimensiones que permite establecer la aplicabilidad de cada integral. En el capítulo sexto se introduce un breve repaso histórico de los trabajos existentes sobre la singularidad de borde libre. Se introduce también un posible enriquecimiento para su modelado en XFEM. Finalmente en el último y séptimo capítulo se resumen las aportaciones, conclusiones y futuros trabajos que surgen de forma natural a partir de esta Tesis.

Capítulo 2

Problema mecánico de la fractura elástico lineal

Una sola piedra puede desmoronar un edificio.

Francisco de Quevedo

2.1. Repaso histórico del problema tridimensional

Uno de los puntos críticos en el diseño mecánico de componentes de máquinas es la identificación del modo de fallo más probable, lo cual permite elaborar un criterio de detección de fallo. Como se ha mencionado, la fractura es un proceso que puede definirse como la consecuencia de la rotura de los enlaces interatómicos existentes en los sólidos. Desde un punto de vista macromecánico puede considerarse como la separación de un componente por ruptura, en dos o más piezas, debido a la propagación de las grietas, a partir de defectos previos.

Cuando aparece el fallo por un proceso asociado a la fractura, éste ocurre aún cuando la estructura o pieza en servicio se halle sobredimensionada respecto a los criterios de la resistencia de materiales, ya que su comportamiento debe estudiarse en el campo de la micromecánica, mecánica de los enlaces atómicos. El enfoque desde una teoría atomística no es de utilidad práctica por su dificultad y complicada interpretabilidad, por lo que, desde un punto de vista de diseño, se suelen usar teorías macromecánicas conocidas como teorías de la mecánica de la fractura.

La razón que explica la divergencia entre los resultados obtenidos al usar teorías de mecánica de la fractura, respecto de los de otras teorías que no tienen en cuenta la presencia de defectos, es que la distribución de tensiones en la sección plana que contiene la fisura no es uniforme. El efecto que introduce la grieta es equivalente al originado por concentradores de tensiones, como agujeros o entallas, pero mucho más acusado. Considerando que en el material solo existe comportamiento elástico, se desarrolla la MFEL. Sin embargo, el comportamiento real cerca del extremo de grieta necesita la introducción de comportamiento plástico que se estudia dentro de la Mecánica de la Fractura ElastoPlástica —MFEP—. Existen problemas que presentan

rotura esencialmente frágil y en los que la zona plástica, aunque importante conceptualmente, es de poca relevancia práctica. En consecuencia la tesis se limita al estudio del caso elástico.

La MFEL es una de las herramientas más importantes de las que se dispone para evitar fallos prematuros y catastróficos. Una breve introducción y repaso histórico al nacimiento de la teoría de la MFEL, así como algunos de los accidentes y catástrofes que la motivaron, puede encontrarse en artículos de revisión sobre el estado del arte, [1], o en monografías específicas, [31–40].

El efecto dañino de la presencia de grietas en las estructuras ha sido observado en trabajos tan antiguos como los tratados de Galileo, [1], pero el desarrollo teórico de la MFEL puede fijar su origen en los trabajos de Griffith, [2, 3]. Griffith basó sus estudios en las diferencias de casi dos órdenes de magnitud observadas entre el límite de rotura teórico y real en cristales y cables de metal. La razón de esta diferencia, según las observaciones, se debe al efecto de la existencia de fallos, defectos, imperfecciones y muescas en las piezas reales.

El estudio de las observaciones experimentales le lleva a modelar los defectos como un agujero elíptico, siendo su efecto independiente del tamaño global pero dependiente de la proporción relativa entre los semiejes. Abandona el criterio de fallo de tensión máxima e intenta establecer una nueva teoría de criterio de fallo, teoría que es el germen de la teoría actual de mecánica de la fractura. El principio básico sobre el que edificó esta nueva teoría es que, de forma análoga a los líquidos, los sólidos también tienen energía superficial. Por tanto, para aumentar la superficie de un defecto o grieta se necesita una cantidad de energía, que debe provenir de una fuente externa o de una liberación de energía interna. Un resultado de sus trabajos fue la detección de un comportamiento singular cerca del extremo de grieta, que en su formulación, origina una solución infinita en ese punto. La aparición de una singularidad difícilmente interpretable, motivó que la comunidad científica ignorara el resultado de forma práctica durante casi tres décadas.

El físico alemán Wieghardt, anteriormente a Griffith y casi 50 años antes de los primeros estudios en los que se basa la mecánica de la fractura actual, ya consideró en [41] —reeditado y traducido al inglés en [42]— el estudio de una grieta seminfinite, siendo el primero en llegar a las expresiones asintóticas del campo de tensiones, con el término singular correcto. Sin embargo, en dicho trabajo no abandonó el criterio de fallo basado en la tensión máxima, por lo que, aunque clarificador, no se considera como el origen de la mecánica de la fractura.

La formulación actual proviene de las interpretaciones realizadas en [4, 5]. Irwin consigue dar una interpretación a los trabajos de Griffith, incluyendo un comportamiento plástico en las cercanías del frente de fisura, de forma que el campo de tensiones mantenía valores finitos en el extremo de grieta. En la MFEL esta zona plástica, sin embargo, es muy pequeña en comparación con el tamaño de la región donde el comportamiento elástico asociado a la grieta domina, y en conclusión se puede aceptar que la energía correspondiente a la creación de las nuevas superficies de grieta está dominada por el comportamiento elástico.

El comportamiento asintótico del campo de tensiones en grietas con simetría axial es presentado por Sneddon en [6], desarrollado a partir del campo de soluciones de

Westergaard para problemas planos. Sneddon no consigue obtener una expresión general para el campo de tensiones asintótico, detectando que la diferencia entre el caso plano y el caso axisimétrico es un factor constante. Irwin, [7], identifica el factor y obtiene una expresión genérica para el campo de tensiones asintótico en puntos cercanos al frente, que se puede enunciar como

$$\sigma_{ij} \approx \left(\frac{K}{\sqrt{2\pi r}} \right) f_{ij}(\theta) \quad (2.1)$$

donde $f_{ij}(\theta)$ es una función angular independiente del problema y que también aparece en [6, 41]. La geometría del problema y el efecto de las cargas está contenido en el factor K , es decir, introduce el concepto de los FIT, que contienen toda la información necesaria para reconstruir el campo asintótico. Los FIT son, así, los parámetros caracterizadores de la intensidad de los campos de tensiones en puntos cercanos a las grietas y, por tanto, se convierten en las magnitudes a calcular para establecer un criterio de fallo.

El desarrollo en serie de campos asintóticos se asocia a la solución de Williams, [43], pero estudios posteriores como [8–10] ponen de manifiesto las diferencias entre los campos singulares existentes en grietas tridimensionales y las expresiones de [7, 43], así como la aparición de nuevos tipos de singularidades.

Hartranft aborda en [9] el estudio de la solución tridimensional. Para ello considera que el caso tridimensional puede aproximarse por una grieta infinita donde los estados tensionales en los puntos cercanos al frente de grieta pueden asimilarse a estados de deformación plana. Supone, además, que la solución tridimensional puede ser obtenida mediante separación de variables y un desarrollo en serie. El resultado es el mismo desarrollo en serie que Irwin y Williams.

Sih argumenta en [8] que los estados de tensión plana generalizada no pueden usarse como aproximación bidimensional a los casos tridimensionales, ya que con esta aproximación no se satisfacen las condiciones asociadas a las ecuaciones de la elasticidad en tres dimensiones. Sin embargo, la consideración de deformación plana bidimensional puede utilizarse como caso límite del estudio tridimensional. Además, el estado de deformación plana es muy próximo al estado tensional que se encuentra en los puntos cercanos a la grieta en el interior de material. No obstante, la intensidad del campo de tensiones puede depender del espesor de la placa que contiene a la grieta, y a pesar de que el estado de tensión plana no es rigurosamente aplicable, introduce el efecto del espesor como un cambio en el estado tensional desde un estado de deformación plana a un estado de tensión plana, junto con una dependencia funcional en los valores de los FIT.

Otros estudios que abordan el cálculo de los campos de tensiones en grietas tridimensionales son: Olasebikan que en [44] usa un desarrollo que se basa en derivar el campo de tensiones de un potencial complejo, Gray que en [45] parte de las ecuaciones de la elasticidad y Leung que en [46] realiza un estudio de la determinación del campo de desplazamientos y tensiones para grietas tipo «penique» y circunferenciales, mediante un desarrollo en autofunciones.

A partir de estos estudios sobre los campos de tensiones se aborda el cálculo de los FIT en casos tridimensionales, como por ejemplo en grietas curvas, [47–50]. Resultados

interesantes en estudios de este tipo son [51], donde se hace una breve discusión acerca de la divergencia de los FIT, obtenidos en tres dimensiones, respecto a los que se obtienen al considerar la aproximación de estado de deformación plana y en [52] que también encuentra divergencias respecto a la aproximación usando deformación plana.

Se puede concluir que muchos avances en este campo aún se basan en conceptos y resultados que provienen de los estudios bidimensionales, como son las suposiciones de estados de deformación y tensión plana. Sin embargo, actualmente es cuestionado por algunos autores que dichas suposiciones puedan ser directamente extrapoladas a estudios de mecánica de la fractura en tres dimensiones [53]. No obstante, en la tesis se consideran los campos asintóticos como válidos, y por tanto se aceptan las hipótesis de comportamiento elástico y estado de deformación plana y, en una primera aproximación, se ignora la existencia de otro tipo de singularidad.

2.2. Formulación en 3D. Serie de Williams

El estado de tensiones de la grieta tridimensional se suele describir mediante un sistema de referencia local similar al usado en [9] y que se muestra en la Fig. 2.1, donde la dirección 1 es la normal al frente de grieta, contenida en el plano de la grieta, la dirección 2 es la normal a la superficie de la grieta y la dirección 3 es la tangente al frente de grieta. Se aceptan las hipótesis de la MFEL y se considera estado de deformación plana para la descripción del estado tridimensional. Por tanto, se utiliza la serie de Irwin y Williams [7, 43] para realizar la descripción asintótica de los campos singulares en las cercanías del frente de grieta. Los términos de segundo orden se incluirán en la descripción analítica, ya que generalmente no pueden ser ignorados en la región cercana al frente de grieta. De forma genérica se tendrá una expresión del tipo

$$\sigma_{ij} = \frac{K}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}(\theta) + t_{ij} + O(r^{1/2}) \quad (2.2)$$

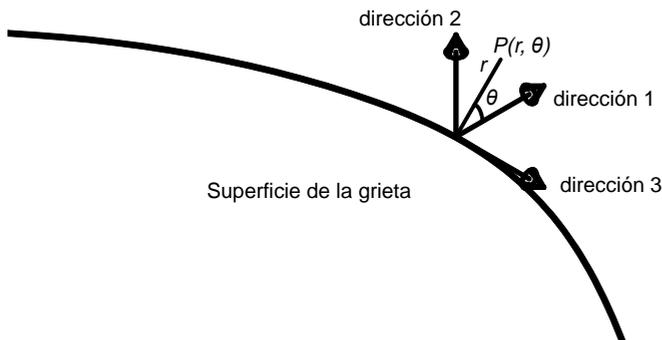


Figura 2.1. Sistema local de coordenadas para el frente de grieta.

Debido a razones de simetría y condiciones de contorno —como la hipótesis de caras de grieta libres de tensiones de tracción— se pueden anular algunos términos de segundo orden, t_{ij} . Los términos de segundo orden en general no nulos son t_{11} —comúnmente conocido como *T-stress*—, t_{13} y t_{33} . Sin considerar efectos de mayor orden, las expresiones analíticas para los campos de tensiones en el sistema de referencia local son

$$\begin{aligned}
 \sigma_{11} &= \frac{K_I(s)}{\sqrt{2\pi r}} \left[1 - \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \operatorname{sen} \frac{3\theta}{2} \right] \cos \frac{\theta}{2} - \frac{K_{II}(s)}{\sqrt{2\pi r}} \left[2 + \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \right] \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} + t_{11}(s) \\
 \sigma_{22} &= \frac{K_I(s)}{\sqrt{2\pi r}} \left[1 + \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \operatorname{sen} \frac{3\theta}{2} \right] \cos \frac{\theta}{2} + \frac{K_{II}(s)}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \\
 \sigma_{33} &= \nu (\sigma_{11} + \sigma_{22}) \\
 \sigma_{12} &= \frac{K_I(s)}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} + \frac{K_{II}(s)}{\sqrt{2\pi r}} \left[1 - \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \operatorname{sen} \frac{3\theta}{2} \right] \cos \frac{\theta}{2} \\
 \sigma_{13} &= - \frac{K_{III}(s)}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} + t_{13}(s) \\
 \sigma_{23} &= \frac{K_{III}(s)}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2}
 \end{aligned} \tag{2.3}$$

Para los campos de desplazamiento se tiene

$$\begin{aligned}
 u_1 &= \frac{1}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \left\{ K_I(s) \cos \frac{\theta}{2} (\kappa - \cos \theta) + K_{II}(s) \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} (\kappa + 2 + \cos \theta) \right\} \\
 u_2 &= \frac{1}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \left\{ K_I(s) \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} (\kappa - \operatorname{sen} \theta) + K_{II}(s) \cos \frac{\theta}{2} (\kappa - 2 + \cos \theta) \right\} \\
 u_3 &= \frac{2}{\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} K_{III}(s) \operatorname{sen} \frac{\theta}{2}
 \end{aligned} \tag{2.4}$$

donde

$$\mu = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad \kappa = 3 - 4\nu \tag{2.5}$$

Los términos $K_I(s)$, $K_{II}(s)$ y $K_{III}(s)$ son los FIT para los tres posibles modos de crecimiento de la grieta, véase Fig. 2.2. Hay que destacar que los FIT y los términos $t_{ij}(s)$ dependen funcionalmente de la coordenada local del frente de grieta en dirección 3, es decir de la posición s a lo largo del frente de grieta —se usa s en vez de x_3 para indicar explícitamente que es la coordenada de la longitud en el frente de grieta—.

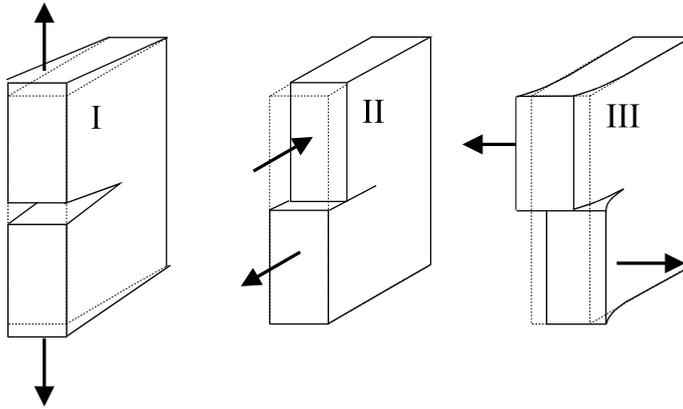


Figura 2.2. Diagrama de modos de apertura de grieta.

2.3. Situaciones triaxiales. Estudio del efecto de la constricción

Cuando se realizan análisis del comportamiento tridimensional de las grietas usando MFEL, solo se suele tener en cuenta el primer término en el desarrollo en serie de Williams, término que se corresponde con la singularidad $r^{-\frac{1}{2}}$. Eso es así, a pesar de que se conoce que los términos de segundo orden, tensiones t_{ij} , tienen influencia sobre el estado triaxial. Incluso cuando se tienen en cuenta los términos de segundo orden, habitualmente se incluye únicamente el conocido como *T-stress*, t_{11} . En esta sección se expone que si se quiere hacer un estudio correcto del estado triaxial hay que tener en cuenta el resto de los términos t_{ij} [53, 54], especialmente t_{33} .

En general, aparecen efectos triaxiales debidos a las constricciones. Ejemplos típicos de este estado son una grieta que atraviesa de lado a lado una placa —donde el espesor de la placa es del mismo orden de magnitud que la longitud característica de la grieta— o grietas situadas en las esquinas. En estas situaciones, la triaxialidad que aparece en los campos de tensiones en los puntos cercanos al frente de grieta, tiene gran influencia sobre los resultados obtenidos en los estudios de mecánica de la fractura [33, 55–60].

Las constricciones triaxiales que aparecen son, básicamente, la coplanaria y transversal, cuyos valores dependen de la geometría y las cargas aplicadas en la estructura. La constricción coplanaria es esencialmente provocada por las magnitudes en el plano normal al frente de grieta. La constricción transversal se debe, principalmente, a las dimensiones paralelas al frente de grieta —espesor— junto con las condiciones de contorno. Estas magnitudes afectan a la resistencia observada de los componentes estructurales, como se demuestra en [61] a partir de estudios mediante el MEF, en los análisis de barras redondas realizados en [62] o mediante el estudio estadístico de su

efecto en probetas normalizadas [58]. En consecuencia, es importante conseguir una mejor comprensión de su descripción a partir de los campos de tensiones. Para realizar el análisis se consideran casos bajo tracción pura que provocan crecimiento de grieta en modo I. Esta restricción, a pesar de simplificar los cálculos no supone ningún tipo de pérdida de generalidad conceptual para la deducción de las conclusiones.

2.3.1. Análisis mediante t_{ij}

Las expresiones de los valores normales de los campos de tensiones para una carga simétrica —modo I— expresados en un sistema de referencia cilíndrico local 2.1, que se pueden encontrar por ejemplo en [53, 63] son las Ecs. (2.6), donde se consideran puntos suficientemente cercanos al frente de grieta para poder despreciar términos de mayor orden. Solo aparecen los términos t_{11} y t_{33} en las Ec. (2.6), ya que las otras componentes t_{ij} se anulan por razones de simetría y la condición de caras de grieta libres de tensiones de tracción.

$$\begin{aligned}\sigma_{11}(r,\theta) &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \operatorname{sen} \frac{3\theta}{2} \right) + t_{11} \\ \sigma_{22}(r,\theta) &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \operatorname{sen} \frac{3\theta}{2} \right) \\ \sigma_{33}(r,\theta) &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} 2\nu \cos \frac{\theta}{2} + t_{33}\end{aligned}\tag{2.6}$$

El término t_{11} —*T-stress*— puede obtenerse utilizando la integral de interacción presentada en [63]. El término de tensión t_{33} puede deducirse a partir del valor de t_{11} y las relaciones entre los campos elásticos, tal y como se detalla en este subapartado. Estos términos afectan la triaxialidad en las cercanías del frente de grieta y se relacionan directamente con las constricciones coplanarias y transversal: t_{11} está relacionado directamente con la constricción coplanaria y t_{33} con la transversal. Por tanto, los términos de tensiones t_{ij} , junto con los FIT, proveen un conjunto de parámetros que permiten caracterizar los campos de tensiones en las cercanías de un frente de grieta tridimensional, esto es K - t_{ij} , véase [53, 54, 64, 65]. Es bien conocido que K_I varía a lo largo de la coordenada local 3, e igualmente varían t_{11} y t_{33} , tal como se muestra en [53, 66–68].

Deformación transversal ε_{33} y cálculo de t_{33}

Una expresión para el cálculo de t_{33} puede obtenerse directamente a partir del estudio de ε_{33} , como en [53, 54, 65]. Para ello se acepta la serie de Williams para la componente transversal, Ec. (2.6), en la dirección tangencial al frente. Las tensiones σ_{ii} en las cercanías del frente de grieta particularizadas para el ángulo polar $\theta = 0$ son

$$\begin{aligned}
\sigma_{11}(r,0) &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} + t_{11} \\
\sigma_{22}(r,0) &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \\
\sigma_{33}(r,0) &= 2\nu \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} + t_{33}
\end{aligned} \tag{2.7}$$

Al aplicar la ley de Hooke generalizada para un material isótropo se puede obtener la deformación transversal, ε_{33} , como

$$\varepsilon_{33} = \frac{1}{E} [\sigma_{33} - \nu (\sigma_{11} + \sigma_{22})] \tag{2.8}$$

Después de sustituir (2.7) en (2.8) se consigue

$$\varepsilon_{33} = \frac{1}{E} \left[2\nu \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} + t_{33} - \nu \left(\frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} + t_{11} + \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \right) \right] \tag{2.9}$$

Dado que $\varepsilon_{33} = \partial u_3 / \partial x_3$, el desplazamiento transversal u_3 en el frente de grieta es

$$u_3|_{r=0} = \int \varepsilon_{33}|_{r=0} dx_3 \tag{2.10}$$

Puesto que u_3 tiene que tener valor finito, ε_{33} no puede presentar un comportamiento singular con r y por tanto los términos $\frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}}$ se cancelan en la Ec. (2.9). Consecuentemente se obtiene

$$\varepsilon_{33} = \frac{1}{E} [t_{33} - \nu t_{11}] \tag{2.11}$$

Se puede observar que, en el frente de grieta, el comportamiento de ε_{33} se halla dominado por términos de segundo orden que no pueden ser ignorados. En consecuencia, ε_{33} es, en general, no nulo y estrictamente hablando no se alcanza un verdadero estado de deformación plana con $\varepsilon_{33} = 0$, [53].

La última expresión es de aplicación práctica ya que permite el cálculo de t_{33} como

$$t_{33} = E\varepsilon_{33} + \nu t_{11} \tag{2.12}$$

Notar que los valores de ε_{33} y t_{11} deben ser conocidos con antelación para poder calcular t_{33} . Estos valores pueden ser obtenidos a partir de la aproximación de elementos finitos: ε_{33} se corresponde directamente con la solución de elementos finitos para deformaciones en el punto dado del frente y t_{11} puede obtenerse mediante extrapolación [53] o usando la integral de interacción propuesta por Nakamura y Parks en [63]. Esta integral de interacción utiliza los campos elásticos asociados a una carga lineal unitaria tangente al frente de grieta como campos auxiliares.

2.3.2. Factor T_z

Otra aproximación para caracterizar la constricción transversal es el factor T_z , propuesto por Guo en [69–71]. Este factor T_z es un término que se utiliza en la definición del campo de tensiones σ_{33} para describir el efecto de la constricción transversal en el campo de tensiones tridimensional. Esta propuesta no utiliza el concepto de t_{33} y se verá más adelante que no describe correctamente el estado tensional tridimensional. En este caso, el conjunto de parámetros que se utilizan para caracterizar el estado tensional es K - T - T_z [72]. Guo acepta la siguiente aproximación para el campo de tensiones en modo I puro:

$$\sigma_{ij}(r, \theta) = \frac{K}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}(\theta) + T\delta_{1i}\delta_{1j} \quad (2.13)$$

donde $T\delta_{1i}\delta_{1j}$ se usa para identificar el término T -stress o t_{11} . La definición del factor T_z es

$$T_z = \frac{\sigma_{33}}{\sigma_{11} + \sigma_{22}} \quad (2.14)$$

Hay que remarcar que T_z es función de las coordenadas del punto. Así para un plano normal al frente de grieta y usando coordenadas polares es $T_z(r, \theta)$. Para un material isótropo lineal, se tienen los siguientes valores límite: $T_z = 0$ en condiciones de tensión plana y $T_z = \nu$ en condiciones de deformación plana¹. Por tanto, el factor T_z proporciona una medida del grado de triaxialidad de los estados tensionales a lo largo del frente de grieta. Los términos f_{ij} que aparecen en las Ec. (2.13) son las funciones trigonométricas del desarrollo tridimensional de la serie de Williams. Se puede observar que el término t_{33} no aparece y, para ser consistente con la definición de T_z , $f_{33}(\theta)$ se expresa como

$$f_{33, T_z}(\theta) = T_z(\theta) (f_{11}(\theta) + f_{22}(\theta)) \quad (2.15)$$

donde el término T -stress se desprecia en comparación con los términos singulares.

En [73], la forma funcional de T_z , como función de la coordenada tangencial x_3 y la distancia radial, r , al frente de grieta en el plano normal, es construida como una variación continua desde un estado teórico de tensión plana en la superficie libre a un estado de comportamiento teórico correspondiente a deformación plana en puntos suficientemente alejados de las fronteras. Por tanto, T_z debe satisfacer las siguientes condiciones de contorno en las superficies libres

$$T_z = 0, \quad \frac{\partial T_z}{\partial x_3} = 0 \quad (2.16)$$

Y además, la distribución de T_z dentro del frente de grieta tiene un valor límite de ν en elasticidad isótropa, que se corresponde con la zona donde se acepta estado de deformación plana. Así, la forma funcional exacta de T_z viene determinada por la geometría del problema considerado.

¹Los términos tensión plana y deformación plana son usados aquí como aproximaciones conceptuales, ya que los estados de tensión y deformación plana no pueden estrictamente usarse en grietas tridimensionales tal y como se demuestra en [53, 65].

La principal dificultad de esta aproximación se encuentra en la estimación de T_z , que tiene que ser ajustada a partir de una solución numérica. Como no se dispone de una solución analítica, el criterio general es aplicar una aproximación usando métodos de mínimos cuadrados para obtener coeficientes *ad hoc* para diversas distribuciones de T_z que cumplan las condiciones de contorno y simetría, como por ejemplo en el caso particular de una grieta con forma de cuarto de elipse situada en una esquina, realizado en [73].

2.4. Ejemplos numéricos

Si se realiza un estudio exhaustivo del comportamiento elástico en presencia de grietas, los términos t_{ij} tienen que incluirse en la descripción del campo de tensiones cercano al frente de grieta. Por otra parte los FIT siguen siendo los parámetros fundamentales para la caracterización del estado tensional en MFEL. Los valores de los FIT se suelen extraer a partir de las soluciones numéricas usando integrales de contorno, como la integral J [19] o su formulación equivalente en dominio [21]. Sin embargo, es conocido que en problemas tridimensionales como en el caso de grietas en placas de espesor finito la formulación bidimensional de dichas integrales no es estrictamente aplicable, ya que el estado encontrado no se corresponde con un caso de deformación o tensión plana pura. Existen modificaciones para su uso mediante dominios tridimensionales, como [21, 23], y su estudio detallado en el ámbito de XFEM se realizará en el Cap. 4.

Para validar la importancia de la triaxialidad, se consideran dos problemas estudiados mediante aproximaciones de elementos finitos. Primero, se reproduce parte del trabajo en [53], donde se considera una placa finita con una grieta plana sometida a tracción pura, que es un caso de modo I puro. En este ejemplo se varía el espesor de la placa y el tamaño de la grieta presentándose los efectos de la constricción en los términos t_{ij} y en los FIT. Con estos resultados numéricos se pone de manifiesto la divergencia del caso tridimensional respecto a la aproximación bidimensional correspondiente a un estado de deformación o tensión plana.

El segundo ejemplo, publicado en [54], se corresponde con el estudio de una grieta de cuarto de elipse situada en una esquina. El efecto de la constricción en esta configuración de grieta fue estudiada en [73, 74] aplicando T_z , lo cual ha permitido realizar una comparación entre las dos aproximaciones.

2.4.1. Placa finita

Para verificar la validez de la disertación teórica, se considera parte del análisis publicado en [53], para placas de distinto espesor B , y anchura W , con una grieta de longitud a . La longitud de la grieta se hace variar en proporción a la anchura, esto es a/W . El objetivo es demostrar la influencia de B y de a/W en K , t_{11} y t_{33} .

Debido a la geometría y condiciones de carga impuestas solo se necesita considerar la mitad del dominio geométrico, como se muestra en la Fig. 2.3. Todas las placas tienen la mismas dimensiones coplanarias, es decir, anchura $W = 50$ mm y altura

$H = W$. Para estudiar el efecto de la variación en la relación a/B , se han considerado los espesores

$$B = 0,1, 0,2, 0,5, 1, 2, 5, 10, 20, 35, 50, 75, 100, 200, 400 \text{ mm}$$

Esta serie de espesores se ha combinado con cuatro proporciones entre la grieta y la anchura de la placa:

$$a/W = 0,1, 0,3, 0,5, 0,7$$

Se asume que la placa está compuesta de un material que presenta propiedades de elasticidad lineal, es decir, material elástico, homogéneo e isótropo. El módulo de Young es $E = 207 \text{ GPa}$, con un coeficiente de Poisson $\nu = 0,3$. La tensión de tracción aplicada es $\sigma = 1 \text{ MPa}$. En la Fig. 2.4 se presenta la malla para el caso de $B = 1 \text{ mm}$, pudiéndose observar la estructura de malla usada en el análisis. Los elementos usados son del tipo isoparamétrico de 20 nodos con $3 \times 3 \times 3$ puntos de integración. La discretización en B es de 50 elementos. Para espesores superiores a $B = 1 \text{ mm}$, la malla no está tan concentrada en las cercanías de la grieta como en la Fig. 2.4 para poder describir mejor el comportamiento de la región afectada por constricción en la dirección radial.

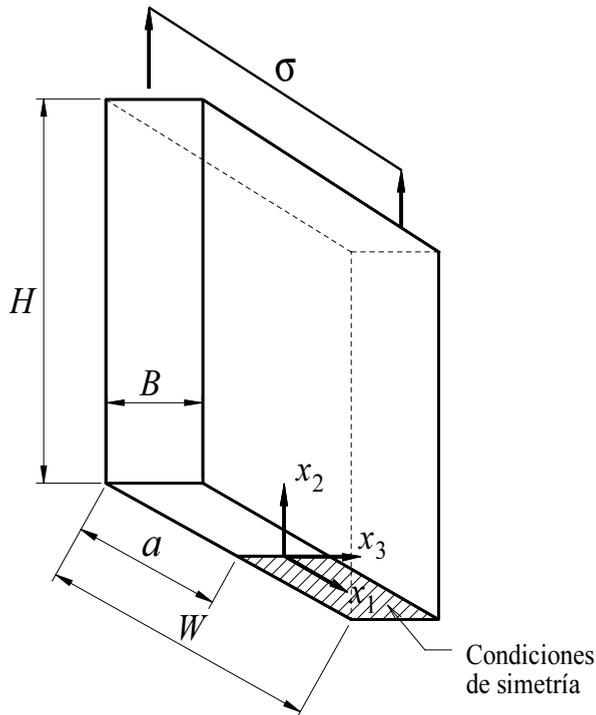


Figura 2.3. Modelo geométrico de la placa.

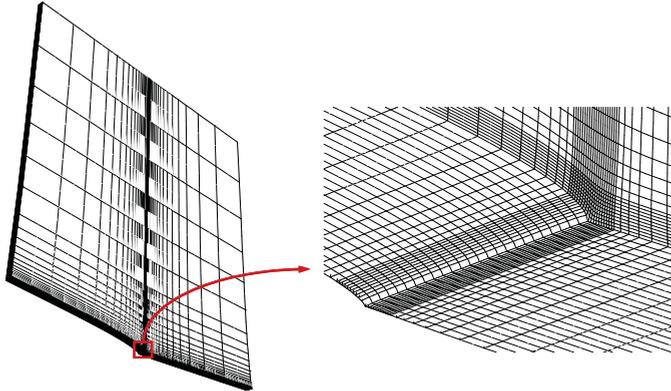


Figura 2.4. Ejemplo de malla del análisis de la placa.

Se puede observar la variación de ε_{33} a lo largo del frente de grieta para diversos espesores en la Fig. 2.5. Los resultados confirman que ε_{33} es no nulo a lo largo del frente de grieta para placas de espesor finito. Para espesores grandes, ε_{33} , disminuye en el frente de grieta —en puntos alejados de las superficies frontera—. Sin embargo su valor sigue sin ser nulo en contra de lo que se supone en un estado de deformación plana teórico.

Normalmente se acepta que en el frente de grieta existe un estado de deformación plana para puntos alejados de las fronteras, lo cual lleva a la suposición de que $\varepsilon_{33} = 0$ en el frente de grieta para una placa suficientemente gruesa. En la Fig. 2.6 se representa la variación de ε_{33} a lo largo del frente de grieta para un espesor elevado — $B = 200$ mm— en comparación con el resto de dimensiones — $W = 50$ mm—, pudiéndose aceptar en la práctica como un ejemplo de placa de espesor infinito. El resultado es que ε_{33} en vez de tender a cero, converge al valor de ε_{33} correspondiente a la misma configuración pero sin grieta, valor que se obtiene a partir de la ley de Hooke. La conclusión directa es que un estado de deformación o tensión plana puro no existe en la grieta tridimensional.

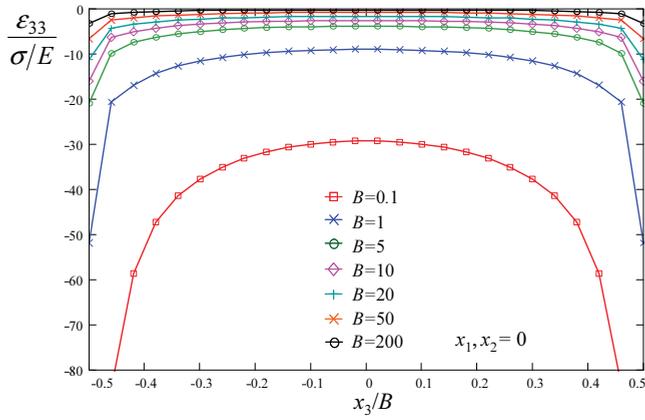


Figura 2.5. Variación de ε_{33} en el frente de grieta de la placa para distintos espesores B —en mm—. $x_1, x_2 = 0$.

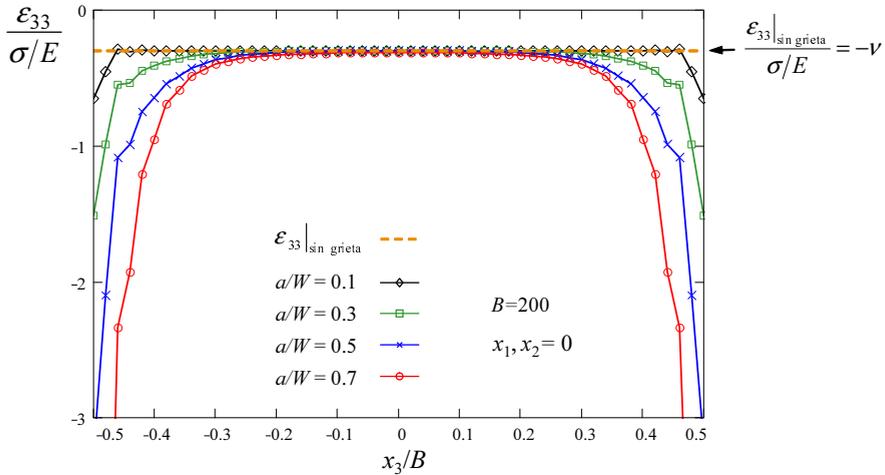


Figura 2.6. Variación de ε_{33} en el frente de grieta de la placa para distintas relaciones a/W . $B = 200$, $x_1, x_2 = 0$.

A continuación se considera el comportamiento de los términos t_{11} y t_{33} . Primeramente se considera el plano medio de la placa. En esa zona es posible observar la variación para distintos espesores B y relaciones entre el ancho y longitud de grieta a/W , véase Fig. 2.7. Merece la pena comentar que t_{33} es una tensión de compresión —es decir es siempre negativa— mientras que t_{11} puede cambiar de signo para valores pequeños de a/W , como se puede observar en la Fig. 2.7, donde t_{11} tiende a ser negativo para a/W y gran B , tal como ya apuntaron Nakamura y Parks en [63]. El uso de K_{local} en la adimensionalización —recordemos que para problemas tridimensionales varía con ν — permite su comparación con problemas de placas finitas que presenten otras geometrías o cargas.

En la Fig. 2.8 se puede observar la dependencia de t_{11} y t_{33} con el espesor para cuatro valores distintos del coeficiente de Poisson $\nu = (0, 0,15, 0,3, 0,45)$. Debido a que los efectos de la constricción de la grieta tridimensional en una placa se deben en última instancia al efecto del coeficiente de Poisson, éste tiene mucha influencia en los resultados [55, 63]. Está claro que si $\nu = 0$, no hay efecto de constricción y la placa no presenta variación a lo largo del espesor. En este caso $t_{33} = 0$ y t_{11} coincide con el valor correspondiente al problema análogo en dos dimensiones. Hay que poner de manifiesto que en el estudio bidimensional tanto t_{11} como los FIT son independientes del coeficiente de Poisson, indiferentemente de si se asume tensión o deformación plana. Para valores realistas de ν , se verifica que a mayor ν mayor efecto en t_{11} y t_{33} . Igualmente la influencia de B se acentúa a un mayor valor de ν , siguiendo así la misma tendencia.

La variación de t_{11} y t_{33} a lo largo del espesor para distintos B se puede ver respectivamente en las Figs. 2.9 y 2.10. Se puede observar que t_{11} y t_{33} aumentan claramente para valores bajos de B en todo el frente de la grieta. En general, la magnitud de t_{11} y t_{33} en el frente de grieta tiene un mínimo en el plano medio. Como es de esperar, t_{11} converge al valor correspondiente a un caso bidimensional cuando B tiende a infinito. Hay que comentar que en estas últimas gráficas los valores en los puntos cercanos a la frontera tienen una validez cuestionable debido a los campos auxiliares de deformación plana utilizados en la integral de interacción para el cálculo de t_{11} .

Finalmente, en el cuadro 2.1, se presenta una lista con la variación de los valores del FIT de modo I —único que aparece en la grieta— para distintos espesores B y relaciones a/W . En este cuadro se puede apreciar claramente el efecto de la constricción también en los FIT y su divergencia respecto a los valores que aceptan las aproximaciones bidimensionales de deformación y tensión plana, valores que se pueden observar en K_I^{2D} .

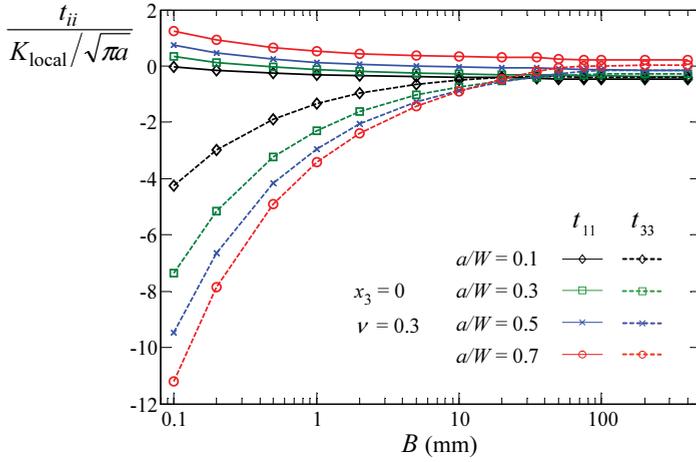


Figura 2.7. Variación de t_{11} y t_{33} en el plano medio de la grieta para distintos B y a/W .

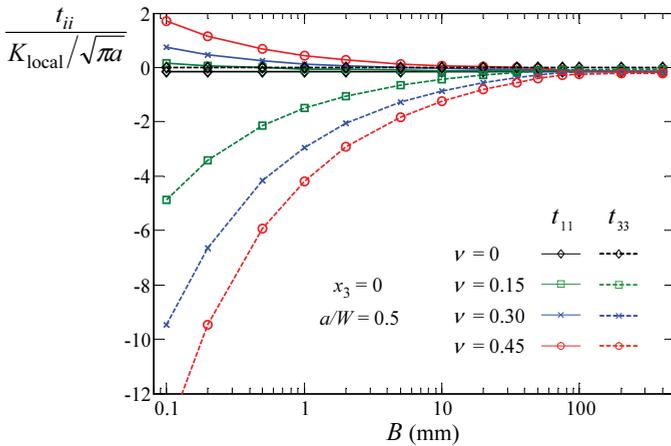


Figura 2.8. Variación de t_{11} y t_{33} en el plano medio de la grieta para distintos B y ν .

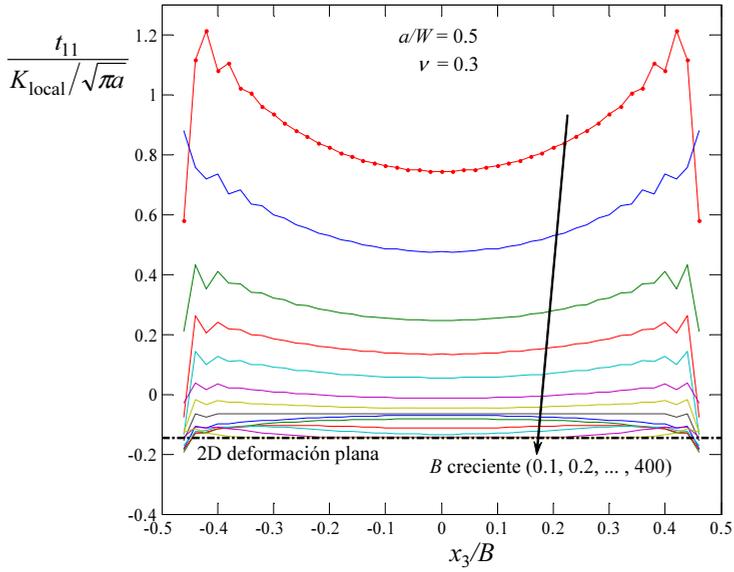


Figura 2.9. Variación de t_{11} en el frente de grieta de la placa para distintos B —en mm—.

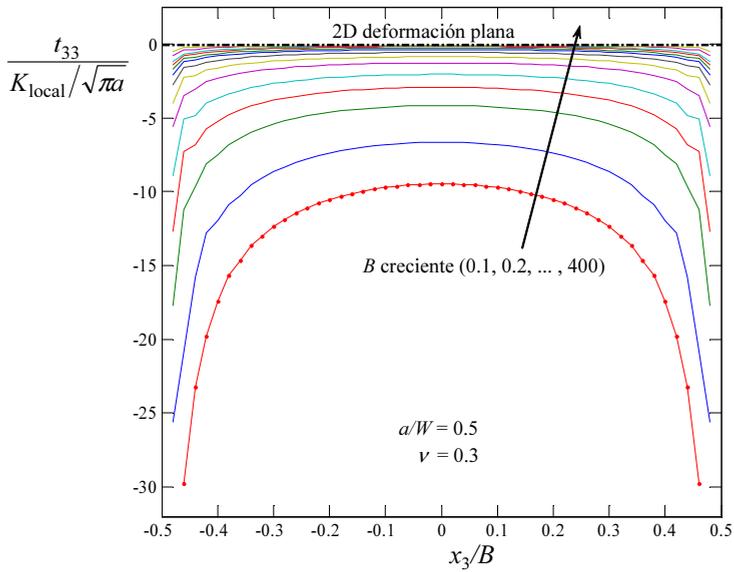


Figura 2.10. Variación de t_{33} en el frente de grieta de la placa para distintos B —en mm—.

K_{local} en $x_3 = 0$ ($\sqrt{\text{MPa}/\text{mm}}$)				
$B(\text{mm})$	$a/W = 0,1$	$a/W = 0,3$	$a/W = 0,5$	$a/W = 0,7$
0,1	5,03	12,16	26,71	71,10
0,2	5,03	12,16	26,71	71,10
0,5	5,03	12,16	26,71	71,11
1	5,02	12,16	26,71	71,12
2	5,01	12,15	26,71	71,14
5	4,99	12,13	26,67	71,08
10	4,98	12,10	26,64	71,02
20	4,91	12,05	26,54	70,57
35	4,82	11,95	26,32	69,67
50	4,77	11,84	26,09	68,98
75	4,73	11,68	25,79	68,27
100	4,72	11,58	25,60	67,88
200	4,71	11,43	25,23	67,19
400	4,71	11,40	25,04	66,72
K_I^{2D}	4,71	11,40	25,03	66,60

Cuadro 2.1. Variación de K_{local} (K_I) en el plano medio $x_3 = 0$ con B y a/W .

2.4.2. Grieta de un cuarto de elipse en esquina

Las grietas de esquina tridimensionales suelen aparecer en los concentradores de tensiones, como superficies de uniones atornilladas o remachadas. Existen estudios sobre la aplicación del factor T_z en grietas con forma de cuarto o de media elipse, [73, 74]. La aproximación usada para el factor T_z en dichos trabajos ignora la existencia de t_{33} . T_z es estimado a partir de una aproximación de mínimos cuadrados a partir de los resultados numéricos. A continuación se muestra la influencia de t_{33} en la triaxialidad considerando su efecto en comparación con la aproximación usando T_z , llegándose a la conclusión de que el término t_{33} es necesario para conseguir la descripción del campo de tensiones de las grietas tridimensionales.

La geometría del problema numérico seleccionado coincide con el estudiado en [73] y por tanto es posible hacer una comparación exhaustiva entre los resultados obtenidos usando t_{33} y los obtenidos a partir de T_z , que se ha publicado en [54] y se reproduce aquí. La grieta considerada se corresponde con una grieta de esquina de un cuarto de elipse contenida en una placa elástica isotrópica, sometida a carga uniforme constante que provoca un estado de tracción. Un esquema de las cargas y geometría del problema puede observarse en la Fig. 2.11.

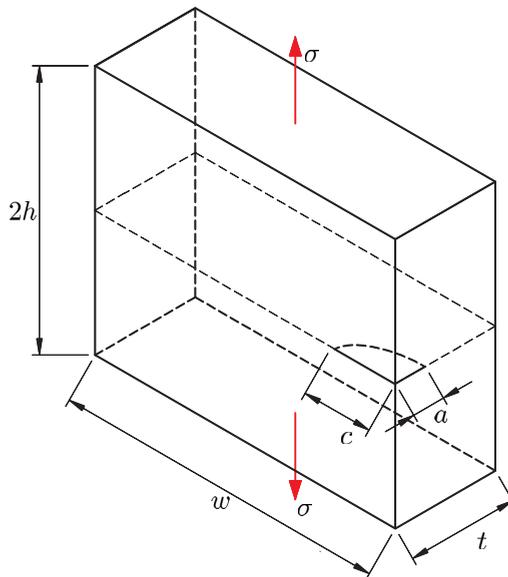


Figura 2.11. Descripción esquemática de la geometría y cargas de la grieta de esquina.

Las propiedades del material se corresponden con 200 GPa para el módulo elástico y $\nu = 0,3$ para el coeficiente de Poisson. La tensión aplicada es $\sigma_\infty = 1000$ Pa. Las dimensiones de la placa en relación al semieje mayor de la elipse son: para la anchura, $w/c = 30$, para el espesor $t/c = 7,5$ y para la altura $h/c = 15$. El cuarto de elipse viene definido por su semieje mayor c y su semieje menor a . Se han establecido tres relaciones $a/c = 1,0, 0,5, 0,2$. Utilizamos una malla de elementos finitos con una distribución estructurada de elementos en las cercanías del frente de grieta. La zona estructurada se ha construido usando elementos de tipo hexaedro con 20 nodos. El resto del dominio se ha mallado con tetraedros cuadráticos. Una perspectiva general de la malla puede observarse en la Fig. 2.12.

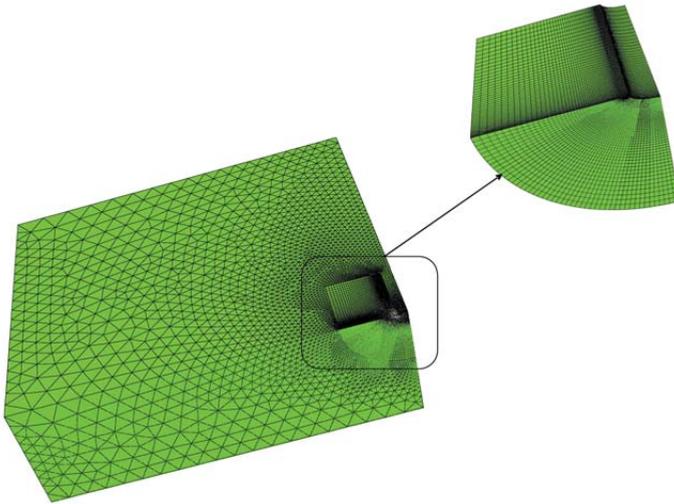


Figura 2.12. Vista de la malla con detalle de los elementos hexaedros en las cercanías del frente de grieta.

Primeramente se evalúan K_I , la deformación ε_{33} y los términos de segundo orden de tensiones t_{11} y t_{33} a lo largo del frente de grieta. La posición a lo largo del frente de grieta se define mediante el ángulo φ , que puede observarse en la Fig. 2.13. Para ello se han utilizado las herramientas disponibles en el programa de elementos finitos ABAQUS, excepto t_{33} que se evalúa a través de la Ec. (2.12). Todas estas magnitudes, adimensionalizadas convenientemente, y para distintas proporciones a/c , se pueden observar de la Fig. 2.14 a la Fig. 2.25. El FIT obtenido es comparado además con la solución de referencia de Newman y Raju, [47, 50]. Las diferencias mostradas en los resultados de los FIT se encuentran también en el estudio por elementos finitos de [47] y pueden deberse a la presencia de contorno finito. Más aún, otra fuente de discrepancia proviene de la naturaleza aproximada de la propia solución de referencia —que solo garantiza menos de un 5% de error—.

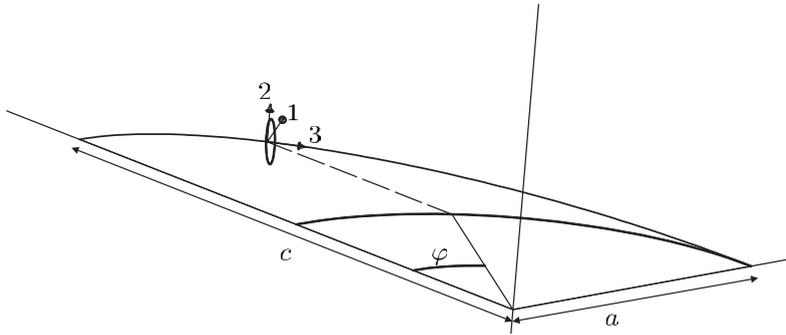


Figura 2.13. Detalle del ángulo de definición de la posición a lo largo del frente de grieta y de la circunferencia centrada en un punto dado del frente de grieta usado para el estudio del estado tensional de la grieta.

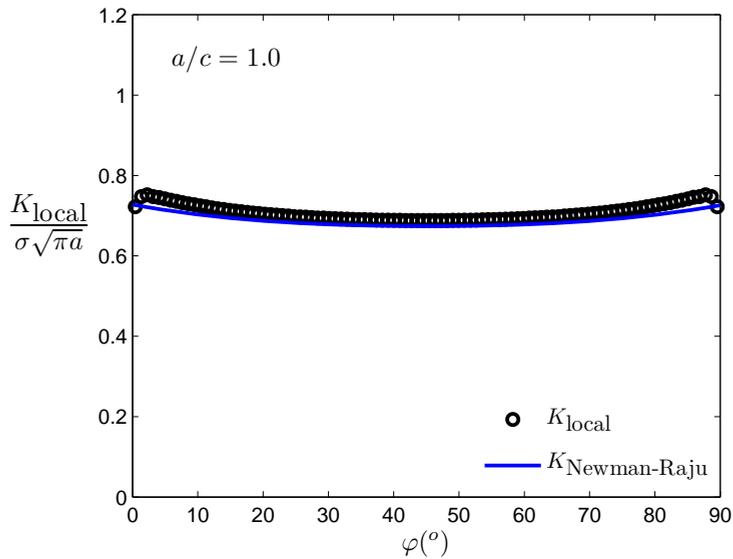


Figura 2.14. K_{local} y $K_{Newman-Raju}$. Variación a lo largo del frente de grieta. $a/c = 1,0$.

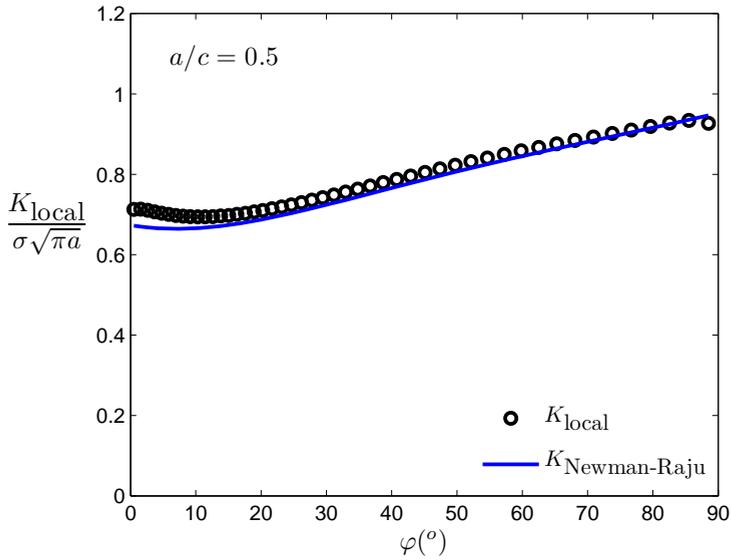


Figura 2.15. K_{local} y $K_{Newman-Raju}$. Variación a lo largo del frente de grieta. $a/c = 0,5$.

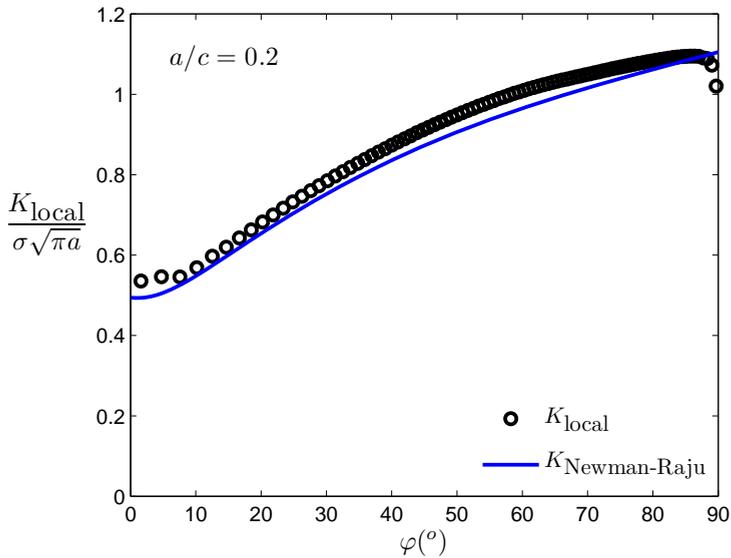


Figura 2.16. K_{local} y $K_{Newman-Raju}$. Variación a lo largo del frente de grieta. $a/c = 0,2$.

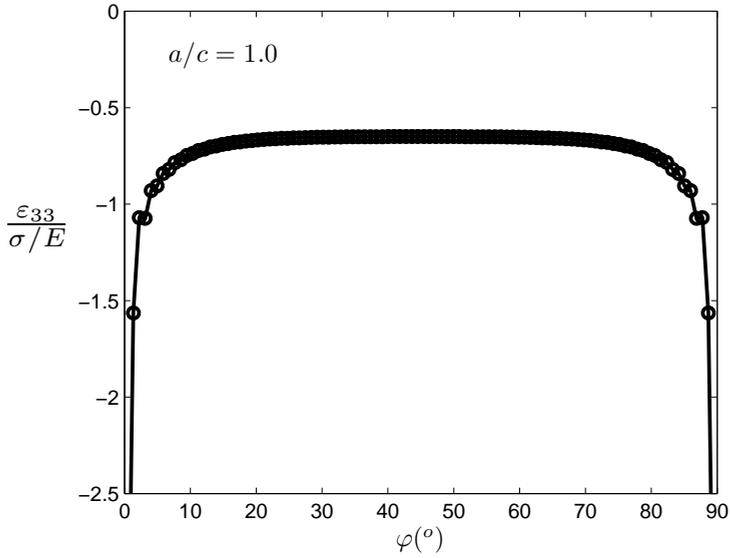


Figura 2.17. Variación de ε_{33} a lo largo del frente de grieta. $a/c = 1,0$.

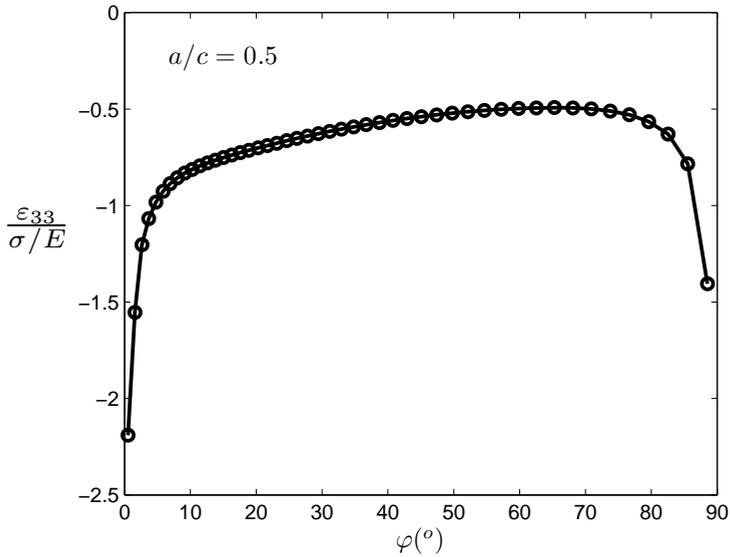


Figura 2.18. Variación de ε_{33} a lo largo del frente de grieta. $a/c = 0,5$.

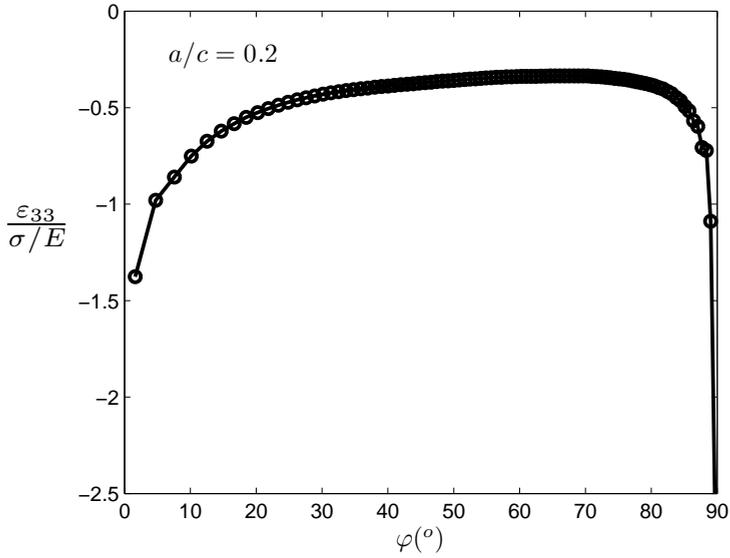


Figura 2.19. Variación de ϵ_{33} a lo largo del frente de grieta. $a/c = 0,2$.

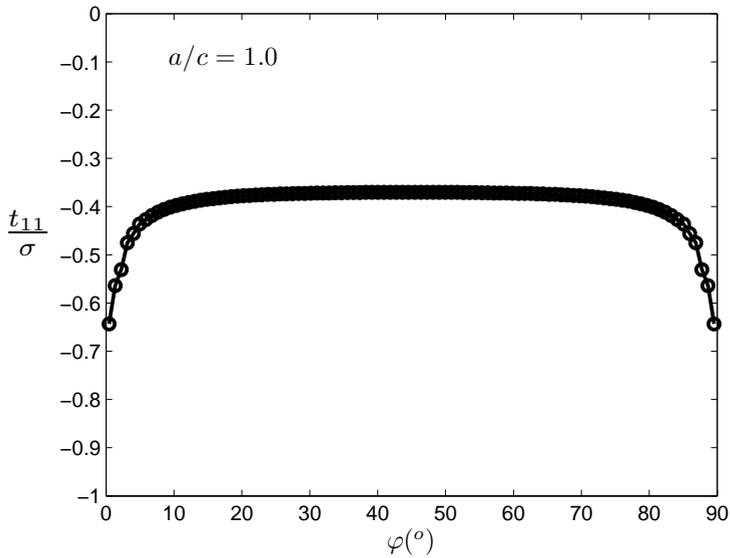


Figura 2.20. Variación de T -stress a lo largo del frente de grieta. $a/c = 1,0$.

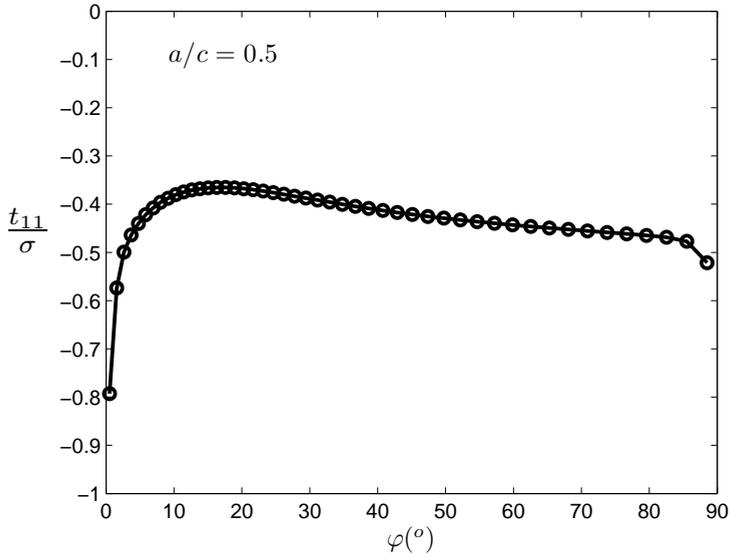


Figura 2.21. Variación de T -stress a lo largo del frente de grieta. $a/c = 0,5$.

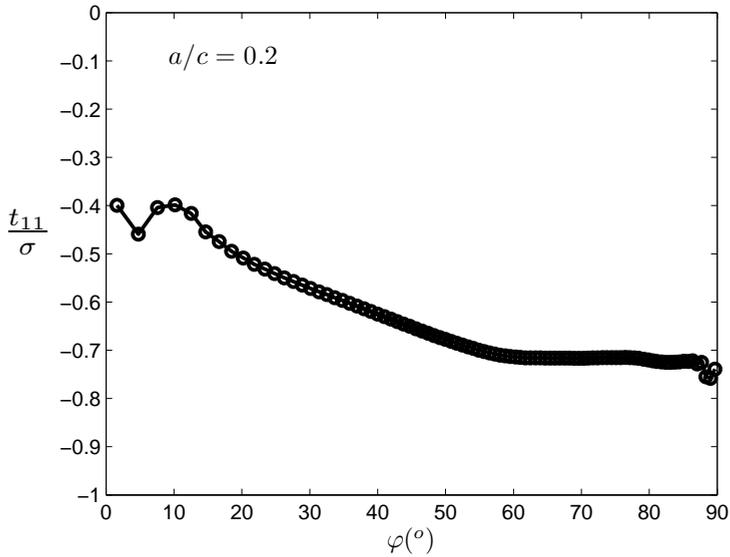


Figura 2.22. Variación de T -stress a lo largo del frente de grieta. $a/c = 0,2$.

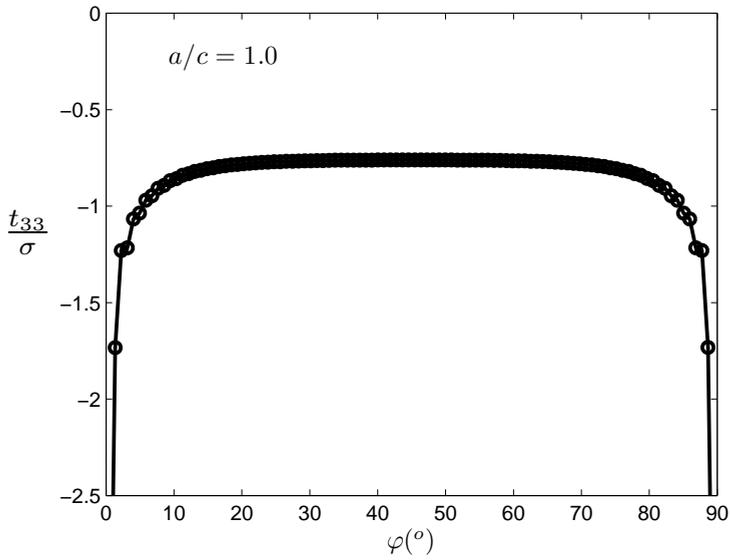


Figura 2.23. Variación de t_{33} a lo largo del frente de grieta. $a/c = 1,0$.

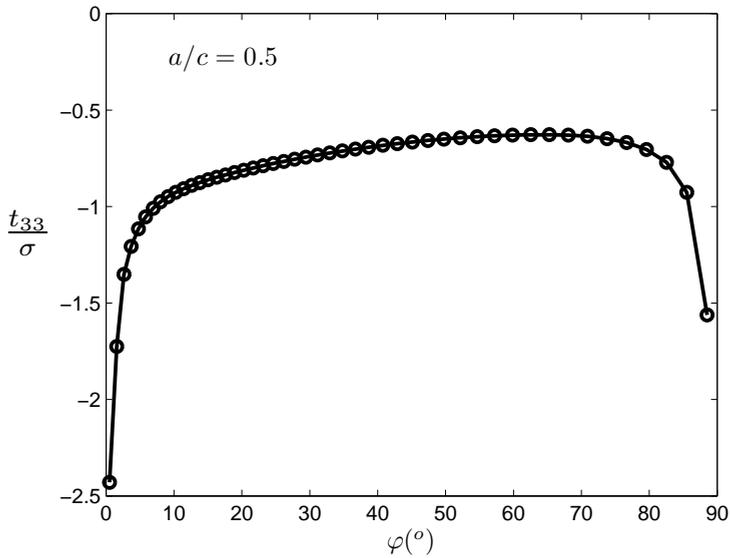


Figura 2.24. Variación de t_{33} a lo largo del frente de grieta. $a/c = 0,5$.

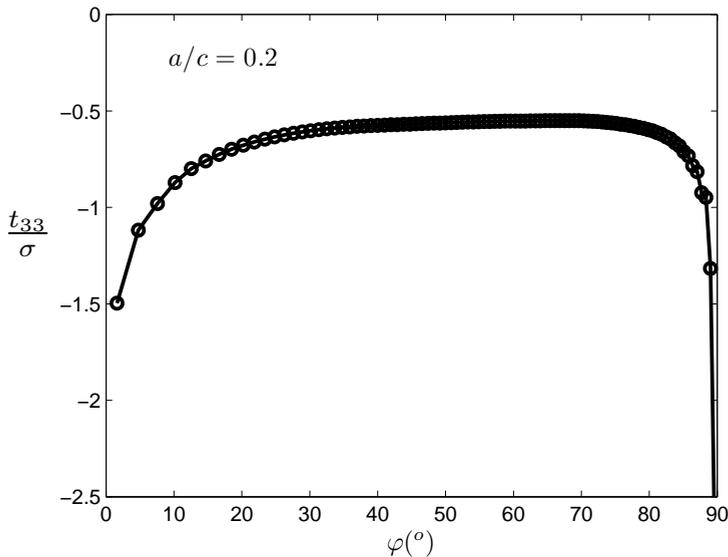


Figura 2.25. Variación de t_{33} a lo largo del frente de grieta. $a/c = 0,2$.

Hay que notar ciertos comportamientos que son mostrados en las gráficas, como que ε_{33} , t_{11} y t_{33} presentan un comportamiento singular cerca de las esquinas y que K_{local} es mayor en el semieje menor. Las mismas conclusiones obtenidas en el caso de una placa finita con grieta recta son extrapolables a la discusión de la grieta esquina de cuarto de elipse. Es interesante señalar que el valor de t_{33} es mayor que t_{11} , debido a que domina la contribución del término $E\varepsilon_{33}$ en la Ec. (2.12) —nótese que ε_{33} y t_{33} tienden al mismo comportamiento a lo largo del frente de grieta, como puede observarse para $a/c = 1,0$ en las Figs. 2.17 y 2.23, para $a/c = 0,5$ en las Figs. 2.18 y 2.24 y finalmente para $a/c = 0,2$ en las Figs. 2.19 y 2.25—. La precisión obtenida cerca de la superficie es discutible, tanto por la solución de elementos finitos, como por suponer estado de deformación plana en la integral de interacción empleada para el cálculo de t_{11} . Además, las distorsiones de la malla, debidas a la curvatura de la grieta, introducen dificultades para el cálculo de una solución suave para t_{11} a través de la integral de interacción. Sin embargo el comportamiento encontrado es similar al presentado en [66]. Un mayor detalle sobre el comportamiento y cálculo de t_{11} para grietas semi-elípticas y de un cuarto de elipse puede encontrarse en [66–68].

Finalmente, se realiza una comparación de la descripción del estado de tensiones usando T_z y t_{33} , tal y como se recoge en [73]. El estado tensional se estudia en puntos situados a una distancia radial muy pequeña —aunque finita— al frente de grieta. Se emplea una pequeña circunferencia radial centrada en un punto determinado del frente de grieta —véase Fig. 2.13— como camino para comparar la descripción tensional dada por T_z y por t_{33} . El radio de la circunferencia es r y el ángulo polar varía entre 0° y 180° .

Se han representado las componentes principales del tensor de tensiones de cada caso a lo largo del camino circular para cinco posiciones definidas por el ángulo —véase Fig. 2.1—. Las tensiones se presentan convenientemente adimensionalizadas mediante el valor de la tensión asociado al valor local del FIT en la posición φ . Estas posiciones son aproximadamente $\varphi = 0,9^\circ, 22,5^\circ, 45^\circ, 67,5^\circ$ y 88° —nótese que la primera y última posición se corresponden con localizaciones muy cercanas a las superficies libres—. La distancia radial r/a se ha variado para las distintas relaciones a/c con el fin de enfatizar la generalidad de la aproximación. Las gráficas se pueden observar de la Fig. 2.26 a la Fig. 2.28 respectivamente para las proporciones $a/c = 0,2, 0,5$ y 1 .

Las funciones $f_{ij}(\theta)$ son las funciones trigonométricas de la expansión de Williams, Ec. (2.6), donde los términos de orden superior al segundo se ignoran debido a que el camino circular es muy próximo al frente de grieta. En estos puntos se deben verificar las siguientes relaciones:

$$\frac{\sigma_{ii} - t_{ij}}{K_1/\sqrt{2\pi r}} = f_{ii}(\theta) \quad (2.17)$$

donde

$$\begin{aligned} f_{11}(\theta) &= \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \operatorname{sen} \frac{3\theta}{2} \right) \\ f_{22}(\theta) &= \cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \operatorname{sen} \frac{3\theta}{2} \right) \\ f_{33}(\theta) &= \nu (f_{11}(\theta) + f_{22}(\theta)) = 2\nu \cos \frac{\theta}{2} \end{aligned} \quad (2.18)$$

Como ya se ha comentado, por razones de simetría y la hipótesis de carga nula en la caras de grieta, se tiene que $t_{22} = 0$. De la Fig. 2.26 a la Fig. 2.28, la función f_{33, T_z} se corresponde con la expresión estimada en [73] usando el factor T_z , es decir $f_{33, T_z} = T_{z(\theta=0)}(f_{11} + f_{22})$ como en la Ec. (2.15).

Con T_z , en [73], se busca hacer coincidir $\frac{\sigma_{33}}{K_1/\sqrt{2\pi r}}$ con f_{33, T_z} y los resultados que se obtuvieron no son satisfactorios. Nótese que en [73], el término t_{33} no se tiene en cuenta y la coincidencia con $f_{33} = \nu(f_{11} + f_{22})$ no se plantea para todo el rango de θ . En vez de ello, T_z se calcula fijando el valor $T_{z(\theta=0)}$ y calculando, para los otros θ , a través de $f_{33, T_z} = T_{z(\theta=0)}(f_{11} + f_{22})$, reduciendo su aplicabilidad al rango $\theta = [0^\circ, 90^\circ]$ —aproximadamente—. Se observa que la aproximación proporcionada por T_z es muy mala en el rango $\theta = [90^\circ, 180^\circ]$. La razón es que las funciones trigonométricas ($f_{11} + f_{22}$) son cero en $\theta = 180^\circ$ y f_{33, T_z} se separa necesariamente de la solución esperada ya que, equivocadamente, no se resta el término t_{33} . En las referencias [73, 74] se dice que las diferencias en el rango $90^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ son poco importantes, ya que esta región tiene poca influencia en la propagación de la grieta. En las figuras de la Fig. 2.26 a la Fig. 2.28, la representación de σ_{33} y $\sigma_{33} - t_{33}$ está desplazada un valor constante que se corresponde, obviamente, con el valor t_{33} en la posición del frente bajo estudio.

Por otra parte, se observa que la introducción de t_{33} lleva a una descripción correcta de la tensión transversal para todo el rango de θ y virtualmente cualquier posición φ a lo largo del frente de grieta —exceptuando zonas cercanas al borde libre—. La

concordancia entre $\sigma_{33} - t_{33}$ y $f_{33} = \nu(f_{11} + f_{22})$ es francamente buena en las posiciones φ analizadas en todo el rango de θ . Las únicas discrepancias aparecen en puntos cercanos al borde libre o donde el cambio brusco de curvatura afecta a la calidad de la discretización. Esto demuestra la necesidad de incluir t_{33} en la descripción tensorial de los estudios tridimensionales, mejorando así claramente otros planteamientos, como el basado en T_z .

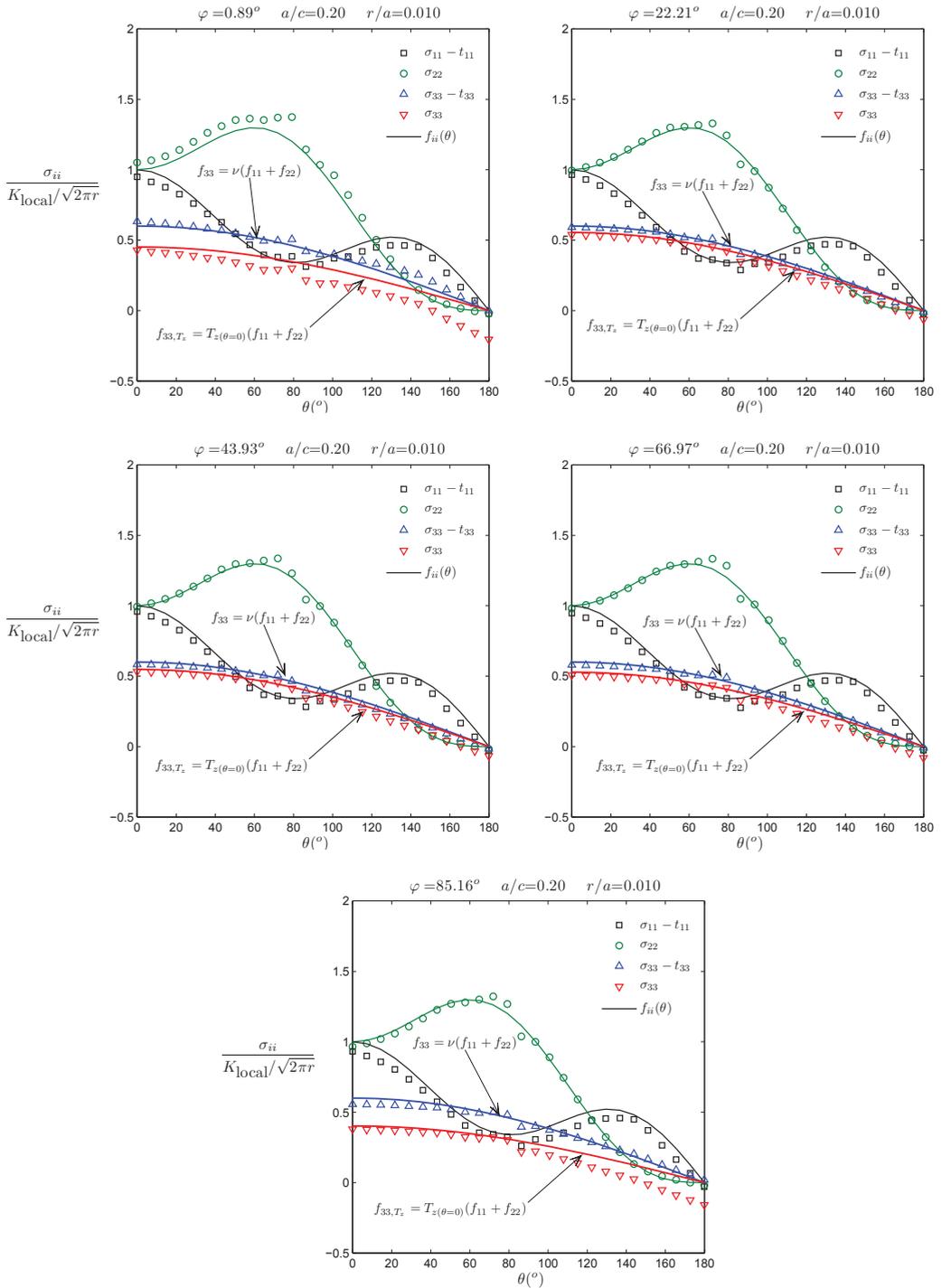


Figura 2.26. Estado de tensiones en el camino circular cercano al frente de grieta. Ejemplo $a/c = 0,2$ y $r/a = 0,010$.

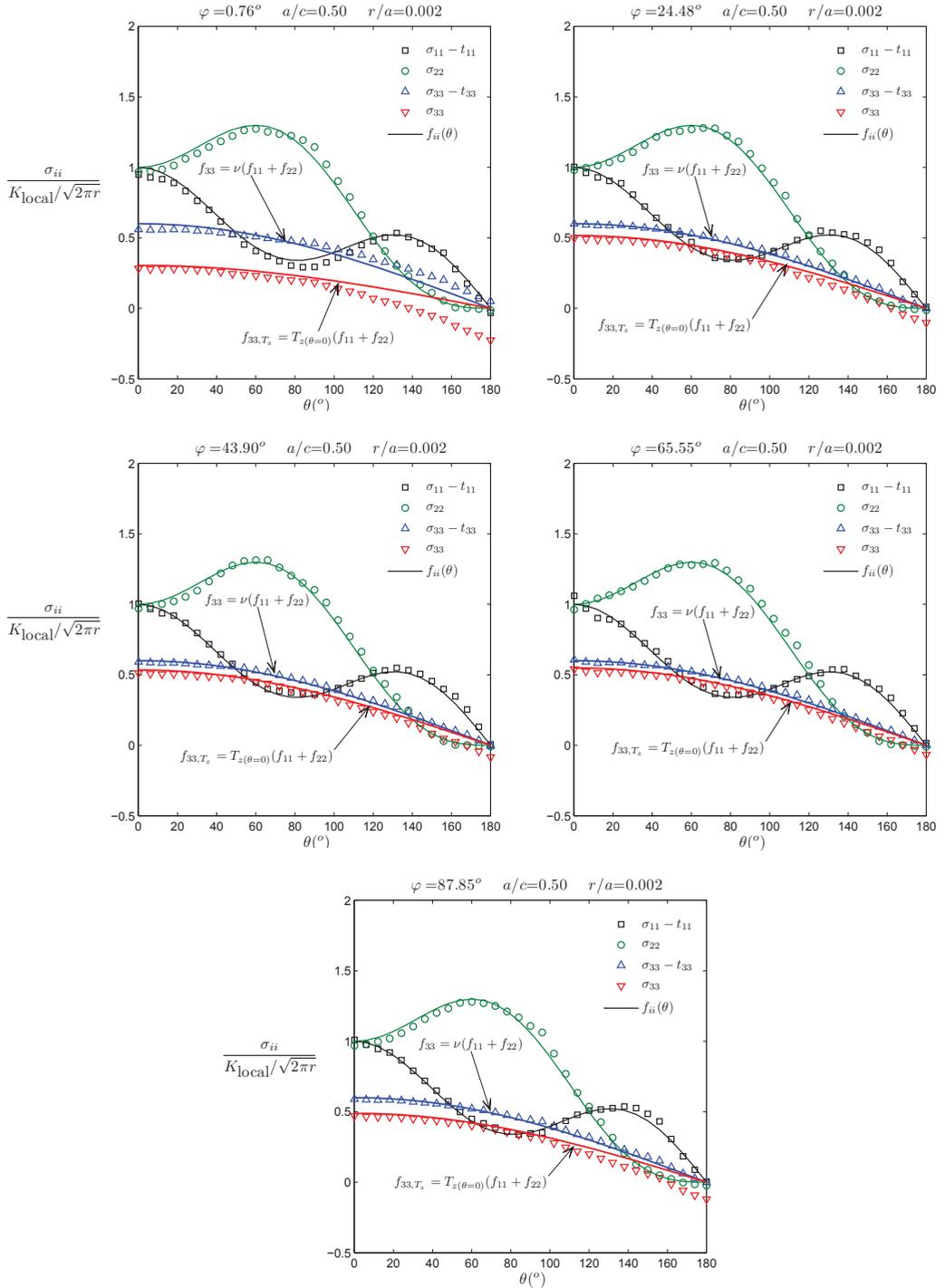


Figura 2.27. Estado de tensiones en el camino circular cercano al frente de grieta. Ejemplo $a/c = 0,5$ y $r/a = 0,002$.

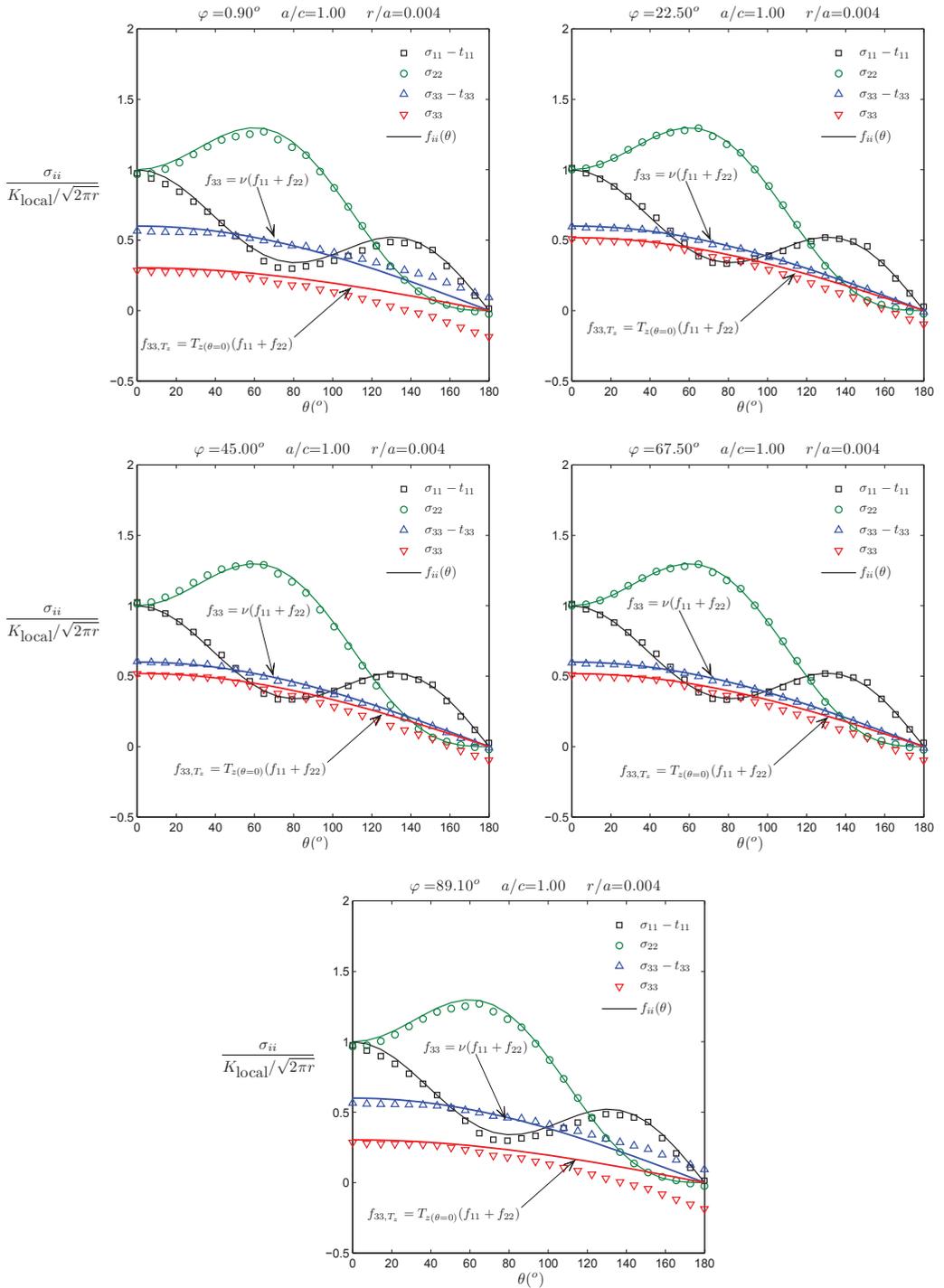


Figura 2.28. Estado de tensiones en el camino circular cercano al frente de grieta. Ejemplo $a/c = 1,0$ y $r/a = 0,004$.

Capítulo 3

Aproximación numérica mediante elementos finitos extendidos

*Las grandes ideas son aquellas
de las que lo único que nos sorprende
es que no se nos hayan ocurrido antes.*

Noel Clarasó

3.1. Motivación y antecedentes

El estudio analítico del comportamiento mecánico de piezas, incluyendo el análisis de grietas mediante el uso de la MFEL, solo puede realizarse analíticamente en casos sencillos. Los casos más complicados tienen que abordarse inevitablemente mediante técnicas numéricas, que permiten obtener una solución aproximada del problema. Una de las técnicas numéricas más consolidada y usada tanto en ámbitos científicos como técnicos, es el MEF. Este método se haya bien documentado en gran cantidad de libros [12–14, 75–80], y se incluye en los planes de formación de diversas carreras de ciencia e ingeniería. La consolidación del método llega incluso a la existencia de numerosas herramientas comerciales de cálculo, de las cuales, ejemplos representativos pueden ser ABAQUS, [81] y ANSYS, [82]. Existen además herramientas de ámbito académico, por ejemplo FEAP, [28–30] y ELMER, [83]. Incluso hay distribuciones específicas en Linux dedicadas a su aplicación, como CAELINUX, [84].

No obstante, el MEF presenta algunos inconvenientes en la resolución de problemas donde existen singularidades, de los cuales la existencia de grietas es un caso particular. La razón es que la aproximación del MEF se basa en un desarrollo en un espacio polinómico y puede utilizarse para estudiar, con elevada precisión, problemas cuya solución presenta un campo continuo y suave, pero presentan poca eficacia al emplearse para describir comportamientos singulares. En particular, la solución co-

respondiente a la existencia de la fisura presenta una discontinuidad y una región con comportamiento singular que se describe mediante funciones no polinómicas. Para conseguir una precisión adecuada de este tipo de problemas, resulta obligatorio el uso de un refinamiento local de la malla en la región donde domina la singularidad, lo que conduce a un aumento considerable de los Grados De Libertad —GDL—. Además, el uso del MEF necesita la discretización del modelo mediante una malla con topología adaptada a la geometría de la grieta, que añade complicaciones al estudio de la propagación de la fisura, ya que se hace necesario realizar un remallado que se adapte a la nueva configuración geométrica.

Para mejorar el comportamiento del MEF en los estudios de singularidades, especialmente en aplicaciones de la MFEL, existen varios planteamientos que permiten incluir la tendencia de los campos asintóticos en la formulación de los elementos, entre otros se pueden nombrar [85–88]. Strang, en [76], introduce un nuevo planteamiento para este tipo de aproximaciones, que consiste en introducir términos exactos de la solución conocidos *a priori* en la propia formulación de la base de los elementos finitos. En el caso de la MFEL se está hablando de los términos del campo asintótico del extremo de grieta.

Un paso natural a partir de esta idea es considerar el PUM en unión con el MEF, dando lugar al método de elementos finitos con partición de la unidad—PUFEM, del inglés *Partition of Unity Finite Element Method*—, introducido por Babuska en [89–91]. El PUM es una técnica sin malla donde la descripción se realiza utilizando regiones solapadas, o parches, definidos empleando funciones de aproximación. Además se definen unas funciones de peso para conseguir que se mantenga la partición de la unidad y lograr regularidad en la solución. En el PUFEM es sencillo incluir información analítica de la solución en el espacio de elementos finitos. Fleming *et al* introducen, en [92], el Método de Galerkin libre de elementos —EFG, del inglés *Element Free-Galerkin*—, que consiste en un método sin malla para el estudio de la fractura y del crecimiento de grieta. Encontraron que los resultados en tensiones alrededor del extremo de grieta presentan oscilaciones, a menos que se realice un elevado refinamiento. Para solventar esta complicación se introducen términos de enriquecimiento en la formulación, incluyendo además un algoritmo de transformación para posibilitar su utilización en grietas curvas.

Belytschko, [93], introduce un método para estudiar problemas de MFEL, como la propagación de grietas. Este método, entre otras ventajas, apenas necesita realizar un remallado para el estudio del crecimiento de la grieta. La base de la técnica es el MEF, pero la aproximación es enriquecida con las mismas funciones de enriquecimiento que se usan en [92]. La topología de la malla es independiente de la grieta, pero el efecto se introduce enriqueciendo la aproximación en los elementos cercanos al frente de grieta. Este enriquecimiento se realiza con las funciones de la solución del campo asintótico del extremo de grieta, que cumple la condición de partición de la unidad, [89–91].

Una técnica más genérica y sencilla es introducida por Moës en [15]. Aquí la discontinuidad de los campos asociados a las caras de grieta se introduce usando como enriquecimiento la función de Heaviside. El enriquecimiento, tanto para el extremo de grieta como para las caras de grieta, se efectúa siguiendo una reglas sencillas. Este método, en principio, permite obtener una mayor precisión y evita realizar mallas

adaptadas a la geometría de grieta. En [94], en el estudio de grietas ramificadas, se dio a esta técnica el nombre de XFEM. También se ha usado en casos tridimensionales, por ejemplo en [18, 25, 95], e incluso es capaz de incluir otro tipo de leyes constitutivas, tales como las correspondientes a la existencia de contacto, [96, 97].

Existe un planteamiento muy similar al del XFEM, incluso en su formulación, conocido como método generalizado de los elementos finitos —GFEM, del inglés *Generalized Finite Element Method*— introducido por Stroubolis, [98–100], y Duarte, [101]. En esta formulación, usando los principios del PUM, se mejora la aproximación del MEF, tanto local como globalmente, incorporando funciones, de origen analítico o aproximado, que se encuentran en manuales y prontuarios, al espacio de aproximación.

En estos métodos se debe introducir la descripción geométrica de la grieta de algún modo —aunque puede ser innecesario en casos sencillos, es un punto crucial en casos genéricos donde pueden existir grietas con topologías realmente complicadas— y las técnicas numéricas disponibles para el movimiento de superficies son un candidato perfecto. Una de estas técnicas es el método de las funciones distancia o de nivel —LSM, del inglés *Level Set Method*—, introducido por Sethian, [102–104], y Osher, [105, 106], que aunque parte de espacios de aproximación de diferencias finitas, se pueden implementar en elementos finitos, [107, 108]. El LSM ha sido aplicado en concordancia con el XFEM para permitir la descripción de la grieta, facilitar la selección del enriquecimiento y realizar la propagación en gran número de trabajos, incluso para grietas tridimensionales. Entre ellos se pueden destacar [16, 18, 25, 109–111].

Aunque el XFEM presenta muchas ventajas, también muestra inconvenientes, como una menor velocidad de convergencia, [112, 113]. Chessa atribuye este comportamiento a la falta de propiedades de la partición de la unidad en los elementos que no están totalmente enriquecidos, que se conocen como elementos de transición. Las soluciones que proponen, se basan en intentar recuperar la partición de la unidad en dichos elementos, para ello o se modifica la formulación de los elementos, [114], o se introducen funciones de forma jerárquicas de orden superior, [113, 115]. La zona de enriquecimiento también afecta a la velocidad de convergencia, tal como se puede observar en [115–117]. Si se usa una zona de enriquecimiento independiente de la malla se puede conseguir mejor velocidad de convergencia. Sin embargo el resultado es un empeoramiento en el condicionamiento de la matriz del sistema.

El condicionamiento se puede mejorar eliminando problemas en la zona de transición, usando preconditionadores, [116] o reduciendo el número de GDL asociados al campo asintótico, [115, 117]. Un estudio más exhaustivo de esta problemática puede encontrarse en la tesis doctoral de Vercher, [118], incluyendo unos primeros estudios sobre los elementos de transición en tres dimensiones.

La integración numérica de los elementos enriquecidos es uno de los puntos en los que hay que prestar una atención especial al emplear el XFEM. La integración de dichos elementos debe ser abordada con cierto cuidado, debido a la presencia de funciones que presentan discontinuidades y singularidades. Las reglas de integración que se pueden emplear han sido consideradas en diversos trabajos, [15, 97, 116, 117, 119–122], que generalmente, se basan en la subdivisión del elemento en subelementos conformes con la geometría de la grieta, normalmente triángulos o cuadriláteros para dos dimensiones, y en tetraedros o hexaedros para tres dimensiones, con las caras de

los nuevos subelementos orientadas con la grieta.

En estos nuevos elementos se realiza una integración estándar o una integración usando una transformación de coordenadas para capturar mejor la singularidad. Hay otro tipo de técnicas como la descrita en [123] que permite usar una cuadratura estándar sin particionar el elemento reemplazando las funciones no integrables por polinomios equivalentes.

Se puede, por tanto, resumir el XFEM como una modificación del MEF que incorpora conceptos del PUM, de forma que introduce funciones locales para enriquecer el espacio de aproximación. La idea es, por tanto, extensible a muchos campos. En el caso concreto de la mecánica de la fractura introduce las funciones necesarias para representar las discontinuidades y los términos en los que se encuentra el comportamiento singular del campo asintótico de desplazamientos. De esta manera, el mallado no necesita incorporar la geometría de la grieta.

Al tratarse de un MEF modificado también permite el uso de técnicas que han demostrado su efectividad, como refinamientos, elementos de orden superior o elementos especiales. Ha sido tal la importancia que ha tenido este método que en poco más de una década ha llevado además de publicaciones del estado del arte como [111, 120, 124], a gran número de tesis doctorales, por ejemplo [125, 126], monografías, [127] y su implementación en programas de elementos finitos comerciales tal como ABAQUS, [128]. En este capítulo se realiza un breve resumen de la implementación para tres dimensiones.

3.2. XFEM en grietas tridimensionales

El modelado eficaz de problemas que presentan grietas tridimensionales aún constituye un reto para la mecánica computacional. El estudio mediante MEF es complicado, ya que se necesita construir una malla que describa la topología tanto del cuerpo como de la grieta. Además debe capturar el comportamiento singular en el frente de grieta y en la discontinuidad entre las caras de grieta. También aparecen dificultades añadidas, si se decide considerar el estudio de la propagación de la fisura, ya que se deben realizar remallados para permitir el estudio de cada paso del crecimiento. Una opción que existe para resolver esta problemática es el XFEM, cuya aplicación a tres dimensiones se resume a continuación.

3.2.1. Descripción de la grieta tridimensional mediante *level sets*

El primer objetivo consiste en lograr introducir la descripción de la grieta sin necesitar una expresión analítica o tener que modificar la topología de la malla, que se consigue con el uso de LS. Originalmente, los LS se definen como funciones distancia euclídeas —de gradiente unitario— y continuas Lipschitz.

Una ventaja de la aplicación de esta técnica es que permite el uso del LSM, [102–106], con lo que es posible realizar la propagación de la grieta usando la misma malla de elementos finitos como soporte, como en [18, 25, 110, 129]. Lo habitual, sin embargo,

es usar una malla de diferencias finitas para realizar la propagación como en [130, 131], debido a que el LSM se construyó originalmente para dicha aproximación.

La misma estrategia de descripción es válida para otros métodos de propagación de superficies como el método de avance rápido —FMM, del inglés *Fast Marching Method*—, [132–134], que se emplea en [135, 136]. En conclusión, se trata de una técnica muy versátil que proviene de métodos bien conocidos en la comunidad matemática.

Para realizar la descripción de la grieta se utilizan dos LS, [18, 25, 110], que se identifican mediante ϕ y ψ . El LS ϕ es también llamado función distancia de la superficie de grieta y la localización geométrica de la superficie de la grieta se corresponde con su valor cero. El LS ψ se denomina función distancia del frente de grieta. La posición del frente de grieta se identifica mediante la intersección de los niveles cero de los LS, es decir, donde se verifica $\phi = 0$ y $\psi = 0$. Además ψ se construye de forma que sea ortogonal a ϕ , al menos en el frente y superficie de la grieta. En resumen la grieta se define mediante dos LS mediante la relación (3.1), tal como se puede apreciar en la Fig. 3.1

$$\begin{aligned} \phi(x) = 0 \quad \psi(x) < 0 &\longrightarrow \text{superficie de grieta} \\ \phi(x) = 0 \quad \psi(x) = 0 &\longrightarrow \text{frente de grieta} \end{aligned} \quad (3.1)$$

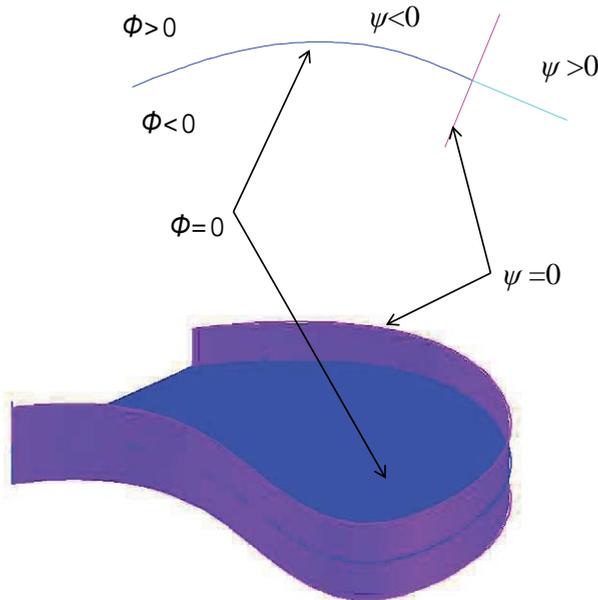


Figura 3.1. Ejemplo de *level sets* para la descripción genérica de una grieta.

Las condiciones de función distancia euclídea y que ambos LS sean ortogonales se

traducen en las condiciones expresadas en la Ec. (3.2). Sin embargo ambas condiciones no se pueden verificar al mismo tiempo en todo el espacio para grietas genéricas tal y como se muestra en [18, 25, 110], aunque en las zonas cercanas a la superficie y al frente de grieta, esta desviación es apenas apreciable.

$$\begin{aligned}\|\nabla\phi(x)\| &= 1 \\ \|\nabla\psi(x)\| &= 1 \\ \nabla\phi(x)\nabla\psi(x) &= 0\end{aligned}\tag{3.2}$$

Desde un punto de vista de la geometría diferencial, los LS pueden entenderse como las parametrizaciones correspondientes a dos cartas¹, de manera que permiten definir una superficie, que se corresponde con la definición de la grieta. A partir de esta definición, los LS se pueden utilizar para construir una base local de coordenadas curvilíneas asociadas a la grieta. Una primera opción, expuesta en [18, 25], es utilizar, directamente, los vectores correspondientes a los gradientes normalizados de los LS como dos vectores de la base, siendo el tercero el producto vectorial entre ellos, es decir:

$$\begin{aligned}\vec{e}_1 &= \frac{\nabla\psi(x)}{\|\nabla\psi\|} \\ \vec{e}_2 &= \frac{\nabla\phi(x)}{\|\nabla\phi\|} \\ \vec{e}_3 &= \vec{e}_1 \times \vec{e}_2\end{aligned}\tag{3.3}$$

La definición de la base local según la Ec. (3.3), no consigue asegurar la ortogonalidad en todo el espacio. Hay que recordar que la ortogonalidad no es una exigencia matemática en una geometría diferencial curvilínea general, pero es recomendable ya que la mayoría de los desarrollos en mecánica se realizan en sistemas cartesianos euclídeos —es decir, en un sistema coordenado de base ortogonal donde la función distancia se corresponde con una distancia euclídea—.

En [110] se propone una modificación, en la que el tercer vector de la base local en un punto se corresponde con el vector tangente al frente de grieta en el punto más cercano del mismo, lo cual requiere calcular el punto más cercano de grieta y averiguar la dirección tangente. En contraposición a estas definiciones, en la tesis se propone usar una base a partir del triedro de Frenet-Serrat, definido geoméricamente en la Fig. 3.2, donde se realizan las identificaciones geométricas siguientes:

$$\begin{aligned}\vec{e}_1 &= \vec{N} \\ \vec{e}_2 &= \vec{B} \\ \vec{e}_3 &= \vec{T}\end{aligned}\tag{3.4}$$

¹Sin intención de presentar una definición rigurosa, se puede entender que una carta se corresponde con una superficie que es diferenciable y tiene definido un sistema coordenado asociado.

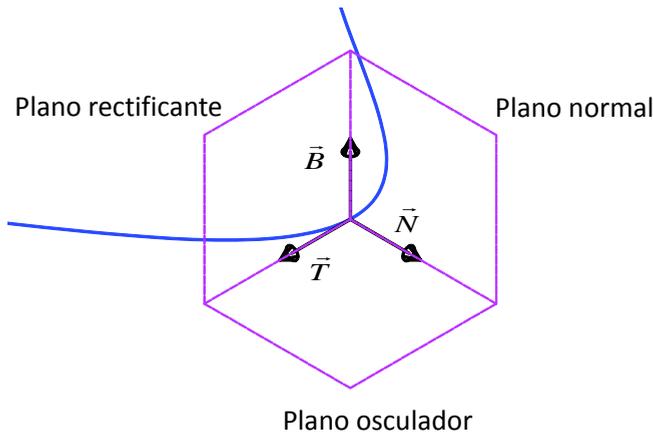


Figura 3.2. Triedro de Frenet-Serrat para una curva.

Al interpretar los LS como las funciones de parametrización de la superficies, se puede identificar el plano normal con el definido con los gradientes. El vector normal a dicho plano se puede definir como el producto vectorial normalizado de los gradientes, que se corresponde con el vector tangente del triedro de Frenet-Serrat, \vec{T} , y análogamente es el vector \vec{e}_3 de la base buscada. El vector base \vec{e}_1 se define como $\nabla\psi(x)/\|\nabla\psi\|$ que es el vector normal en el triedro de Frenet-Serrat, \vec{N} . Resta calcular el vector de la base \vec{e}_2 , o el binormal del triedro \vec{B} , que viene dado por el producto vectorial de \vec{N} y \vec{T} . Por tanto el triedro de Frenet-Serrat se construye según la Ec. (3.5) y de ahí se obtiene una base curvilínea local ortogonal. Realmente el único cambio realizado respecto a la Ec. (3.3) es recalcular \vec{e}_2 a partir de los vectores \vec{e}_1 y \vec{e}_3 como $\vec{e}_2 = (\vec{e}_1 \times \vec{e}_3) / \|\vec{e}_1 \times \vec{e}_3\|$.

$$\begin{aligned}
 \vec{N} &= \frac{\nabla\psi(x)}{\|\nabla\psi\|} = \vec{e}_1 \\
 \vec{T} &= \frac{\nabla\psi(x) \times \nabla\phi(x)}{\|\nabla\psi(x) \times \nabla\phi(x)\|} = \vec{e}_3 \\
 \vec{B} &= \frac{\vec{T} \times \vec{N}}{\|\vec{T} \times \vec{N}\|} = \vec{e}_2
 \end{aligned} \tag{3.5}$$

La identificación de ϕ y ψ con las parametrizaciones de una superficie permite usar el formalismo asociado a la geometría diferencial de superficies para el estudio de casos con curvaturas, como se realiza en la sección 4.4.3. El triedro de Frenet-Serrat es una base que coincide con la base local de la grieta y que se ha introducido en la Fig. 2.1.

Otro uso que se le da a los LS es la introducción de las coordenadas polares asociadas al sistema de coordenadas locales de la grieta. Para ello, se utiliza la identificación

de los LS y su base asociada con la base local de la grieta y finalmente se construye según la expresión:

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{\psi^2 + \phi^2} \\ \theta &= \tan^{-1} \frac{\phi}{\psi} \end{aligned} \quad (3.6)$$

Desde un punto de vista riguroso esta asociación no es totalmente válida, ya que asume que la base es cartesiana y que las coordenadas definidas por los LS son de tipo euclídeo, condiciones que no se pueden asegurar estrictamente. A pesar de ello estas diferencias pueden ignorarse, por construcción, en un entorno local y próximo al frente de grieta, sin embargo, pueden tener influencia en puntos alejados del frente de grieta.

3.2.2. Implementación de *level sets* en elementos finitos

La implementación de la información de los LS en un espacio de elementos finitos es casi directa. Los valores analíticos —si existe la expresión directa o mediante actualización numérica para proceso de crecimiento de grieta o definición no analítica— se calculan en los nodos del dominio y los valores dentro de los elementos se obtienen, mediante la interpolación usando las funciones de forma correspondientes.

Teniendo en cuenta el signo de los LS en los nodos, es posible detectar los elementos afectados por la discontinuidad y por el frente de grieta. Información que da una idea de la geometría de la grieta según el espacio de elementos finitos y es de tremenda utilidad para el XFEM. Los elementos cortados por la superficie de la grieta se identifican con la Ec. (3.7), y la Ec. (3.8) permite determinar los elementos que contienen el frente de grieta. Para ello se computa el signo de los valores máximos y mínimos de los LS en los nodos del elemento identificados por I^{el}

$$\begin{cases} \min_{i \in I^{el}} (\text{signo}(\phi_i)) \max_{i \in I^{el}} (\text{signo}(\phi_i)) \leq 0 \\ \max_{i \in I^{el}} (\text{signo}(\psi_i)) < 0 \end{cases} \quad (3.7)$$

$$\begin{cases} \min_{i \in I^{el}} (\text{signo}(\phi_i)) \max_{i \in I^{el}} (\text{signo}(\phi_i)) \leq 0 \\ \min_{i \in I^{el}} (\text{signo}(\psi_i)) \max_{i \in I^{el}} (\text{signo}(\psi_i)) \leq 0 \end{cases} \quad (3.8)$$

La construcción de la base local de la grieta se obtiene de los valores nodales de la base local de los LS. Dado que las funciones de forma utilizadas habitualmente en elementos finitos solo tienen continuidad C^0 , sus derivadas no son continuas entre elementos, y por tanto, la base local construida a partir de los gradientes de los LS no es en general continua. Para intentar resolver esta problemática se usa la idea propuesta en [18], que consiste en promediar en cada nodo los valores de los gradientes de los elementos a los que pertenece. Estos valores promediados son los nuevos valores nodales de la base, que se usan en el dominio mediante la interpolación usual de elementos finitos.

La evaluación exacta de los términos de la base tal como se describe en (3.3) —y que permite obtener directamente la expresión (3.5) con $\vec{e}_2 = (\vec{e}_1 \times \vec{e}_3) / \|\vec{e}_1 \times \vec{e}_3\|$ — es:

$$\begin{aligned}\vec{e}_1 &= \sum_{i \in I^{el}} N_i \frac{\nabla \psi|_i}{\|\nabla \psi|_i\|} \\ \vec{e}_2 &= \sum_{i \in I^{el}} N_i \frac{\nabla \phi|_i}{\|\nabla \phi|_i\|} \\ \vec{e}_3 &= \vec{e}_1 \times \vec{e}_2\end{aligned}\tag{3.9}$$

Los gradientes promediados se indican con $\nabla \psi|_i$ y $\nabla \phi|_i$, N_i son las funciones de forma del elemento correspondientes al nodo i . Esta implementación es la misma que se introduce en [25, 110].

3.2.3. Funciones de enriquecimiento para grietas tridimensionales

El XFEM es una técnica numérica que permite el enriquecimiento local de los espacios de aproximación a partir de conceptos relacionados con la partición de la unidad. Este método es útil para resolver problemas con soluciones no suaves en pequeñas partes del dominio de cálculo, como ocurre debido a la presencia de singularidades y discontinuidades.

En comparación con el método clásico de los elementos finitos, el XFEM tiene muchas ventajas para el modelado numérico de la grieta, sobre todo si se quiere considerar su propagación. El método consiste en el enriquecimiento del modelo de MEF con GDL adicionales en los nodos asociados a los elementos afectados por la grieta [15].

La discontinuidad y el comportamiento asintótico de la grieta se introducen con enriquecimientos, evitando la necesidad de modificar la malla, por lo que es posible usar solo una malla de elementos finitos para cualquier tipo de grieta y orientación. Por tanto, la misma malla es válida para realizar estudios de propagación. Sin embargo, la malla utilizada debe estar suficientemente refinada para la correcta descripción de la trayectoria del crecimiento de la grieta a partir de los LS. Por tanto es necesario un refinamiento moderado en comparación con el método clásico.

El XFEM utiliza enriquecimientos locales para introducir la singularidad. Así considerando la malla de elementos finitos, los nodos cercanos al frente de grieta están enriquecidos con GDL que introducen funciones que representan el comportamiento asintótico de la grieta y la discontinuidad según la MFEL. La Fig. 3.3 representa una región de una malla formada con hexaedros lineales. Los nodos marcados con círculos están enriquecidos con GDL adicionales asociados a la discontinuidad, y los nodos marcados con cuadrados se enriquecen con GDL adicionales asociados a la singularidad. Los elementos que contienen al menos un nodo con enriquecimiento se conocen como elementos enriquecidos.

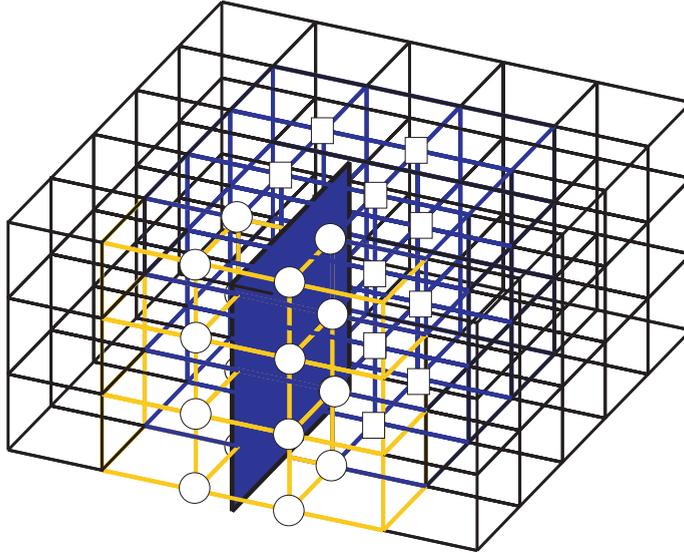


Figura 3.3. Nodos enriquecidos en el XFEM. Círculos: nodos enriquecidos con la función de Heaviside. Elementos afectados directamente por este enriquecimiento en amarillo. Cuadrados: nodos con función de enriquecimiento de extremo de grieta. Elementos afectados por el enriquecimiento en azul.

Los nodos con GDL asociados a la discontinuidad tienen funciones de forma que multiplican la función de Heaviside $H(\vec{r})$, función que cambia de signo a cada lado de la grieta, $H(\vec{r}) = \pm 1$. El número de nuevos GDL se corresponde con la dimensión del problema, para tres dimensiones añadimos tres nuevos GDL. Físicamente, esta función introduce la discontinuidad entre las caras de la grieta.

Los nodos que presentan el enriquecimiento correspondiente a la singularidad se enriquecen en cada dirección cartesiana, mediante cuatro funciones de enriquecimiento que son capaces de reproducir los campos asociados a la singularidad del frente de grieta, [15]. En tres dimensiones se enriquece, por tanto, con 12 GDL adicionales, $F_\alpha(\vec{r})$:

$$[F_\alpha(r, \theta), \alpha = 1-4] = \left[\sqrt{r} \sin \frac{\theta}{2}, \sqrt{r} \cos \frac{\theta}{2}, \sqrt{r} \sin \frac{\theta}{2} \sin \theta, \sqrt{r} \cos \frac{\theta}{2} \sin \theta \right] \quad (3.10)$$

donde r, θ son las coordenadas polares locales definidas en los puntos del frente de grieta, Fig. 2.1. Estas funciones reproducen el campo de desplazamientos asintótico correspondiente al comportamiento en puntos cercanos al frente de grieta según MFEL, produciendo el comportamiento singular en deformaciones y tensiones correspondientes a los puntos cercanos al frente de grieta. Las funciones de enriquecimiento $H(\vec{r})$ y $F_1(\vec{r})$ son funciones discontinuas en la cara de grieta. Se elige $H(\vec{r}) = 1$ si \vec{r} está en la parte superior de la grieta y $H(\vec{r}) = -1$ en otro caso, y por tanto coincide con el

signo de la función LS ϕ . La discontinuidad asociada a las caras de grieta se introduce mediante la función de Heaviside en los elementos partidos por la grieta, y en el elemento enriquecido con las funciones de extremo de grieta se consigue mediante la función de enriquecimiento $\sqrt{r} \sin \frac{\theta}{2}$ en la Ec. (3.10), que es discontinua en $\theta = \pm\pi$.

La aproximación en desplazamientos utilizada es:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{\text{xfem}}(\vec{r}) = & \sum_{i \in I^{el}} N_i(\vec{r}) u_i + \sum_{i \in \mathcal{J}} N_i(\vec{r}) [H(\vec{r}) - H(\vec{r}_i)] \mathbf{a}_i \\ & + \sum_{i \in \mathcal{K}} N_i(\vec{r}) \sum_{\alpha=1}^4 [F_\alpha(\vec{r}) - F_\alpha(\vec{r}_i)] \mathbf{b}_{i\alpha} \end{aligned} \quad (3.11)$$

donde I^{el} es el conjunto de nodos del elemento, $N_i(\vec{r})$ son las funciones de forma y u_i son los GDL normales del nodo i (u_i representa el desplazamiento físico en los nodos). Los subconjuntos \mathcal{J} y \mathcal{K} contienen los nodos enriquecidos con la función de Heaviside, $H(\vec{r})$, y con las funciones que reproducen el comportamiento asintótico de frente de grieta, $F_\alpha(\vec{r})$, respectivamente, además \mathbf{a}_i y $\mathbf{b}_{i\alpha}$ son sus correspondientes GDL.

Para facilitar la introducción de condiciones de contorno, la formulación utilizada es la que introduce el *shifting*, es decir, se restan las funciones de enriquecimiento correspondiente a cada nodo, de manera que la contribución desaparece en los nodos pero no en los puntos de integración. De la Ec. (3.11), se deduce que el desplazamiento físico en el nodo enriquecido i , $\mathbf{u}_{\text{xfem}}(\vec{r}_i)$ viene dado por los GDL normales, u_i . Esta representación permite la introducción de condiciones de contorno en los nodos de la zona enriquecida usando los GDL del MEF.

Hay que remarcar que los GDL adicionales \mathbf{a}_i y $\mathbf{b}_{i\alpha}$ de la Ec. (3.11) solo se añaden en los nodos que se enriquecen. Así, si no hay enriquecimiento, la ecuación anterior se reduce a la aproximación clásica de elementos finitos, esto es $\mathbf{u}_{\text{mef}}(\vec{r}) = \sum_i N_i(\vec{r}) u_i$. Por tanto, el XFEM mantiene gran parte de las ventajas asociadas con el MEF.

3.2.4. Subdivisión e integración numérica

En el MEF, la integración numérica en los elementos se suele realizar mediante reglas de cuadratura de Gauss. Cuando la función a integrar es de tipo polinómico, este tipo de integración da muy buen resultado, siendo posible incluso obtener el valor exacto. Sin embargo para el caso de funciones discontinuas o singulares pueden surgir ciertos problemas, no siendo suficiente la estrategia de usar cuadraturas de mayor orden. Una buena opción para estos casos es la realización de subdivisiones donde se mantiene un bajo orden de cuadratura, [137].

En el estudio de comportamiento de grietas mediante el MEF, la malla se adapta a la geometría de la grieta, pudiéndose aplicar sin problemas los esquemas de integración basados en el método de Gauss-Legendre. Si el problema es abordado usando el XFEM, la malla no se adapta a la geometría de la grieta y es necesario integrar funciones no continuas y/o singulares. Esta integración numérica ha sido objeto de distintos trabajos como [15, 97, 116, 117, 119–123].

Los elementos de la aproximación XFEM que involucran sólo funciones de forma estándar de elementos finitos, es decir, aquellos elementos en que no se realiza

un enriquecimiento, requieren únicamente una regla de integración normal, de tipo Gauss-Legendre, [98, 99]. En los elementos intersectados por la grieta y enriquecidos con la función que representa la discontinuidad es necesario unir adecuadamente las contribuciones de ambos lados de la grieta y el uso de una regla de integración estándar de Gauss-Legendre es incorrecto, ya que la malla y la grieta están orientados arbitrariamente entre sí y además la función a integrar presenta discontinuidad. Es necesario modificar la forma en que se realiza la cuadratura en el elemento, con tal de que la forma débil esté bien representada, para lo cual, en XFEM, se integra el dominio elemental mediante la construcción de subdominios.

Moës, [15], define los subdominios del elemento como la suma de subpolígonos cuyos contornos se alinean con la geometría de la grieta, que se convierte en frontera en la subdivisión junto con el contorno del elemento. Estos subpolígonos son necesarios únicamente para la integración numérica y no conllevan grados de libertad adicionales. Si al integrar la función de enriquecimiento, $H(\vec{r})$, el resultado es indistinguible de una función constante pueden aparecer singularidades en el sistema de ecuaciones. Para evitar este fenómeno, Daux *et al.*, [94], no enriquecen los nodos en los que el soporte está casi por completo a un solo lado de la grieta.

La elección de estos subpolígonos se realiza desde un punto de vista de simplicidad en su construcción. En los elementos bidimensionales se suele usar una subdivisión en triángulos, de manera que la grieta coincida con alguno de sus lados y en los elementos tridimensionales se subdividen en tetraedros.

El algoritmo que se utiliza para la subdivisión a partir de las regiones obtenidas en el corte del elemento por la grieta es introducido en [138], que produce triángulos —2-D— o tetraedros —3-D—, de forma que la superficie de grieta se corresponde con un lado de los subdominios y el frente de grieta coincide con alguna de las aristas o contiene un vértice. Un ejemplo del resultado de dicho algoritmo para una malla bidimensional de triángulos se puede observar en la Fig. 3.4.

Los elementos que contienen el frente de grieta además de introducir la discontinuidad, poseen términos que se corresponden con funciones singulares tipo $1/\sqrt{r}$. El uso de cuadraturas Gauss-Legendre normales para su integración produce resultados no óptimos. Es decir, es necesario usar un elevado orden de cuadratura o añadir subdivisiones para aumentar el número de puntos de integración. Sin embargo, estas estrategias no son las más adecuadas. Laborde, [117], propone usar un esquema basado en una transformación de coordenadas de los puntos de cuadratura de manera que queden concentrados alrededor de la singularidad siguiendo una distribución polar centrada en el extremo de grieta, procedimiento conocido por el nombre de integración «casi-polar», que es fácil de implementar y da buenos resultados como puede observarse en [115, 118], pero no existen apenas estudios para tres dimensiones. Además existen otros métodos, como los introducidos en [116, 123],

Una opción sencilla para la integración, es usar un alto orden de integración en tetraedros a partir de un hexaedro colapsado adecuadamente, Fig. 3.5, estas reglas de integración son clásicas y fáciles de encontrar en la bibliografía, por ejemplo en los trabajos de Stroud [139] y posteriormente de Keast [140]. La estructura de colapso de Stroud ha sido usada en [118] para XFEM y es la aplicada aquí. Para aprovechar el método de colapso de Stroud en un tetraedro seguimos la siguiente regla: La arista

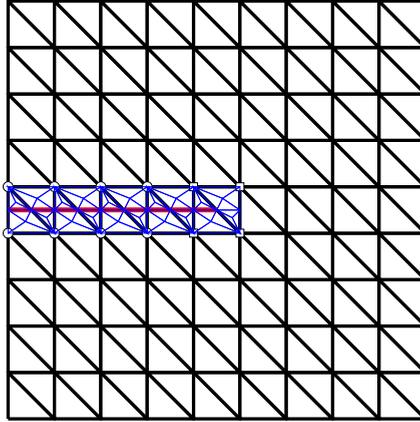


Figura 3.4. Ejemplo de subdivisión de elementos.

donde se colapsa el hexaedro se hace coincidir con la arista que comparte el tetraedro con el frente de grieta, y el nodo donde se colapsan más nodos del hexaedro se hace coincidir con el vértice.

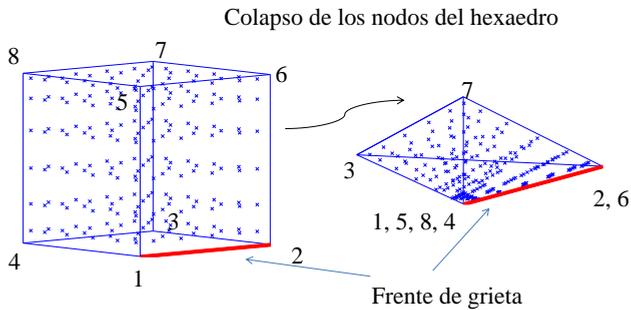


Figura 3.5. Distribución de los puntos de cuadraturas de Stroud.

Recientemente ha aparecido una implementación de la técnica de integración «casipolar» en tres dimensiones, [122]. Aquí se parte de las reglas de integración sobre un prisma. El prisma se transforma en un prisma de referencia de donde se construye el tetraedro de integración. El esquema de transformación se presenta en la Fig. 3.6. La transformación no trivial, T_q , del prisma de referencia en el tetraedro se encuentra en (3.12). Un ejemplo de la distribución de los puntos de cuadratura de dicho método

se presenta en la Fig. 3.7.

$$\begin{aligned}\bar{r} &= \bar{\rho} \cos^2 \bar{\theta} \\ \bar{s} &= \bar{\rho} \sin^2 \bar{\theta} \\ \bar{t} &= \bar{t}'\end{aligned}\tag{3.12}$$

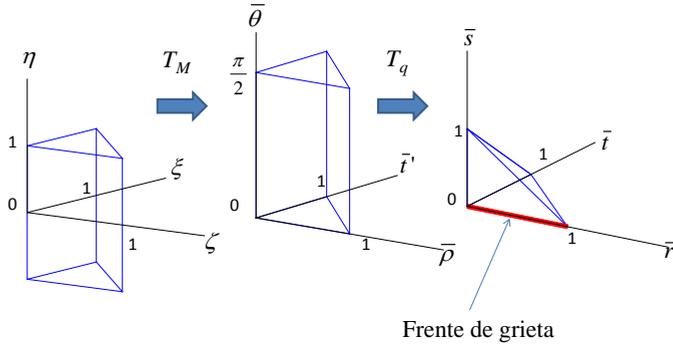


Figura 3.6. Transformación de dominios para la integración «casi-polar» de Park.

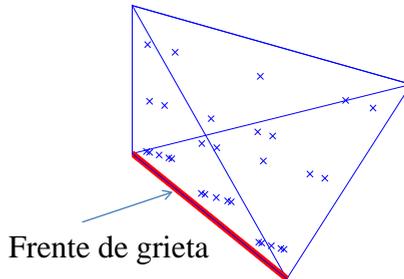


Figura 3.7. Ejemplo de distribución de los puntos de cuadraturas «casi-polar» de Park.

3.2.5. Error y convergencia

El MEF, y por tanto el XFEM, son técnicas numéricas utilizadas para obtener una solución aproximada de un problema. Está claro, que por su propia naturaleza, la solución presentada por estos métodos no es la solución exacta. Una vez que se conoce la solución aproximada para cada punto del dominio, Ω_{mef} , la diferencia entre

el valor obtenido y el valor exacto —casi siempre desconocido— se conoce como error. Por ejemplo para los desplazamientos, siendo \mathbf{u}_{mef} el resultado de elementos finitos y \mathbf{u}_{ex} el valor exacto, el error se define localmente como $\mathbf{e}_u = \mathbf{u}_{\text{mef}} - \mathbf{u}_{\text{ex}}$. La definición del error como magnitud local resulta, habitualmente, poco conveniente y por ello se suelen usar estimadores puntuales. En estadística un estimador es una función de la muestra que da un intervalo sobre la valoración de un parámetro, si en vez del intervalo se busca un punto del mismo se llamará puntual, [141]. El estimador puntual buscado debe dar un escalar representativo del error cometido.

Una forma de obtener un estimador puntual es aplicar el concepto de norma, concretamente se suele aplicar la norma L^2 . En el MEF se suele utilizar la norma en energía, $|e|_{\text{E}}$, que presenta una relación evidente con la energía de deformación elástica, [12], y es:

$$|e|_{\text{E}} = \left[\int_{\Omega_{\text{mef}}} (\varepsilon_{\text{mef}} - \varepsilon_{\text{ex}})^{\text{T}} (\sigma_{\text{mef}} - \sigma_{\text{ex}}) \, \text{d}\Omega \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3.13)$$

La definición de norma energética también puede hacerse de forma local en cada elemento, $|e|_{\text{E}}^e$, verificándose la siguiente relación

$$|e|_{\text{E}}^2 = \sum_{e=1}^{N_{el}} (|e|_{\text{E}}^e)^2 \quad (3.14)$$

Existe la costumbre de presentar el error en tanto por ciento respecto al valor exacto, lo cual proporciona un orden intuitivo del error cometido de forma adimensionalizada. Tras definir el concepto de error, hay que tener en cuenta que el MEF presenta una convergencia teórica a la solución exacta, es decir, si el tamaño del elemento, h , tiende cero se recupera la solución exacta. Esta convergencia indica que, refinando el sistema, la solución obtenida se aproxima cada vez más a la solución exacta, es decir con el refinamiento el error de discretización disminuye.

Es importante, por tanto, conocer como disminuye el error, y la norma energética del error, cuando aumenta el número de GDL del sistema o disminuye el h —considerando la malla como regular—. Este aspecto es especialmente relevante en problemas singulares —como los propios de la MFEL—, ya que, habitualmente, las velocidades de convergencia no son las mismas que para problemas regulares [12, 14]. En general, la velocidad de convergencia de una secuencia de soluciones del MEF depende de distintos factores, como del tipo y orden p de los elementos utilizados y de la intensidad de la singularidad que pueda contener el problema, λ —en MFEL, $\lambda=0,5$ —.

La variación teórica del error, que sin pérdida de generalidad se puede asimilar con el caso particular correspondiente al campo de desplazamientos, \mathbf{e}_u , respecto al tamaño de elemento, h , en el MEF, sigue la relación:

$$\mathbf{e}_u \propto h^s \quad (3.15)$$

a partir de donde se define la velocidad de convergencia, s , cuyo valor es $s = \text{mín}(p, \lambda)$.

Además, si en vez de considerar el error, se considera la norma L^2 , la relación con h es la mitad de la anterior, es decir, $s/2$, [12].

La expresión (3.15) constituye la relación de definición, pero si se realizan refinamientos adaptativos o si la malla no es regular no acaba de ser representativa, por ello también se suele considerar la convergencia del error respecto los GDL. Para problemas bidimensionales se puede aproximar el número de GDL con el tamaño de elemento como:

$$\text{GDL} \propto \left(\frac{1}{h}\right)^2 \quad (3.16)$$

y para 3D:

$$\text{GDL} \propto \left(\frac{1}{h}\right)^3 \quad (3.17)$$

Por tanto la velocidad de convergencia del error respecto a los GDL es la mitad que respecto al tamaño de elemento h en 2D, esto es $-s/2$, y un tercio para 3D.

Por abuso de lenguaje se utiliza el término velocidad de convergencia para referirnos al exponente en valor absoluto que relaciona la evolución del error considerado, o indiferentemente en norma L^2 , con la magnitud de refinamiento de la malla, expresada como GDL o h .

El XFEM, tal como se muestra en [112, 113], presenta una pérdida en velocidad de convergencia respecto a la obtenida en el MEF. Esta pérdida según Chessa se debe a la falta de propiedades de la partición de la unidad en los elementos que no están totalmente enriquecidos y da lugar a que la velocidad obtenida sea la mitad que si se utiliza el MEF. La forma de realizar el enriquecimiento estándar en XFEM, se conoce como enriquecimiento topológico y muestra la pérdida de velocidad de convergencia que se acaba de describir. Sin embargo, es posible enriquecer una área fija, enriquecimiento que se conoce como geométrico, procedimiento que en grietas rectas permite recuperar el comportamiento asociado a un estudio empleando MEF, véase [115]. En la tesis no se ha empleado enriquecimiento geométrico, ya que aún no se ha estudiado su efecto en grietas curvas, dejándose como un futuro trabajo.

La velocidad de convergencia esperada para los estudios en XFEM aparece en el cuadro 3.1 y sirve para verificar la implementación y bondad de resultados a lo largo de la tesis con enriquecimiento topológico.

Velocidad de convergencia del error, s		
	$ e _E$	\mathbf{e}_u
GDL (2D)	0,25	0,5
h	0,5	1

Cuadro 3.1. Valores asintóticos para la velocidad de convergencia s en el XFEM con enriquecimiento topológico.

3.3. Verificación numérica

Uno de los mayores problemas para realizar verificaciones numéricas en estudios tridimensionales es la falta de soluciones analíticas para casos finitos. Existen soluciones correspondientes a situaciones infinitas, pero que imponen limitaciones en el posible modelado numérico. Por ejemplo, si no se pueden imponer las condiciones de contorno adecuadas, se debe utilizar una aproximación a dominio infinito introduciendo por un dominio muy grande en comparación a las dimensiones de la grieta. Otra opción es imponer las tracciones exactas o desplazamientos exactos en la posición de un contorno. Los ejemplos que se suelen usar para verificar los métodos en casos tridimensionales suelen corresponderse con casos bidimensionales extruidos, que —exceptuando en algunos casos patológicos— son lo bastante genéricos para permitir la realización de un análisis tridimensional.

Un ejemplo de este tipo, se utiliza para verificar el funcionamiento de la implementación del XFEM y elegir la regla de integración. El problema considerado tiene una solución con parte suave y singular, se le conoce como problema de Westergaard y ha sido empleado tanto en MEF, [142], como en XFEM, [118]. En el problema se considera una grieta de longitud $2a$ en una placa infinita sometida a tracción biaxial uniforme combinada con carga tangencial en el infinito, Fig. 3.8. Este problema tiene la siguiente expresión exacta en los campos de desplazamiento:

$$\begin{aligned}
 u_1 &= \frac{K_I}{2\mu\sqrt{\pi a}} \left[\frac{\kappa - 1}{2} \sqrt{|t|} \cos \frac{\bar{\phi}}{2} - \frac{x_2}{\sqrt{|t|}} \left(x_1 \operatorname{sen} \frac{\phi}{2} + x_2 \cos \frac{\phi}{2} \right) \right] \\
 &\quad + \frac{K_{II}}{2\mu\sqrt{\pi a}} \left[\frac{\kappa + 1}{2} \sqrt{|t|} \operatorname{sen} \frac{\bar{\phi}}{2} + \frac{x_2}{\sqrt{|t|}} \left(x_1 \cos \frac{\phi}{2} - x_2 \operatorname{sen} \frac{\phi}{2} \right) \right] \\
 u_2 &= \frac{K_I}{2\mu\sqrt{\pi a}} \left[\frac{\kappa + 1}{2} \sqrt{|t|} \operatorname{sen} \frac{\bar{\phi}}{2} - \frac{x_2}{\sqrt{|t|}} \left(x_1 \cos \frac{\phi}{2} - x_2 \operatorname{sen} \frac{\phi}{2} \right) \right] \\
 &\quad - \frac{K_{II}}{2\mu\sqrt{\pi a}} \left[\frac{\kappa - 1}{2} \sqrt{|t|} \cos \frac{\bar{\phi}}{2} + \frac{x_2}{\sqrt{|t|}} \left(x_1 \operatorname{sen} \frac{\phi}{2} + x_2 \cos \frac{\phi}{2} \right) \right]
 \end{aligned} \tag{3.18}$$

donde μ es el módulo de rigidez a cizalladura y κ la constante de Kolosov. Además se tienen las siguientes relaciones

$$\begin{aligned}
 K_I &= \sigma_\infty \sqrt{\pi a} \\
 K_{II} &= \tau_\infty \sqrt{\pi a} \\
 m &= x_1^2 - x_2^2 - a^2 \\
 n &= 2x_1 x_2 \\
 i &= \sqrt{-1} \\
 t &= m + in \\
 \bar{\phi} &= \operatorname{arg}(m + in) \\
 \phi &= \operatorname{arg}(m - in)
 \end{aligned} \tag{3.19}$$

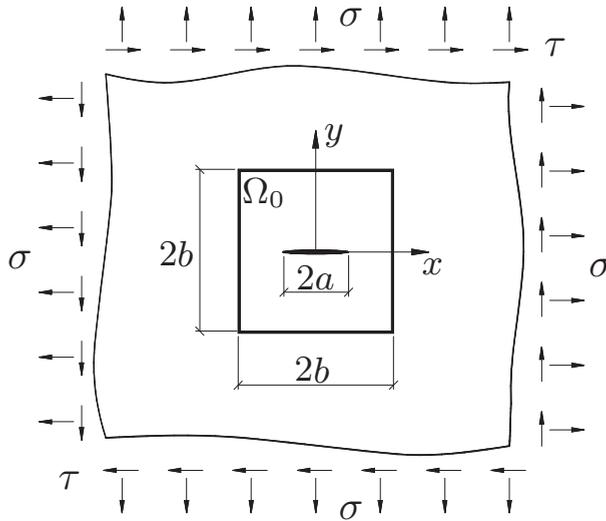


Figura 3.8. Definición geométrica del problema de Westergaard en dos dimensiones.

A partir de esta definición se pueden imponer las condiciones de contorno exactas en un modelo finito extruido —véase un ejemplo de la malla y grieta extruida en la Fig. 3.3—. Solo se analizan los casos en que la solución presenta K_I o K_{II} , lo que permite estudiar el comportamiento de las reglas de integración adaptadas al extremo de grieta. Para ello, se hace una comparación de la convergencia en norma energética para las dos integraciones de la singularidad. Los elementos finitos, y los tetraedros resultados de la subdivisión, que no necesitan una integración especial se realizan con una integración con regla de Gauss normal de 64 puntos. La integración de los tetraedros que contienen singularidad se realiza mediante un hexaedro colapsado de 64 puntos, siguiendo Stroud tal como se ha realizado en [118] o mediante una regla de 42 puntos según el esquema de Park [122]. El resultado se presenta en la Fig. 3.9 para K_I y en la Fig. 3.10 para el K_{II} .

El comportamiento obtenido con ambas rutinas de integración es correcto, según el cuadro 3.1. Se elige el esquema de integración introducido por Park ya que necesita menos puntos de integración para un nivel de exactitud similar.

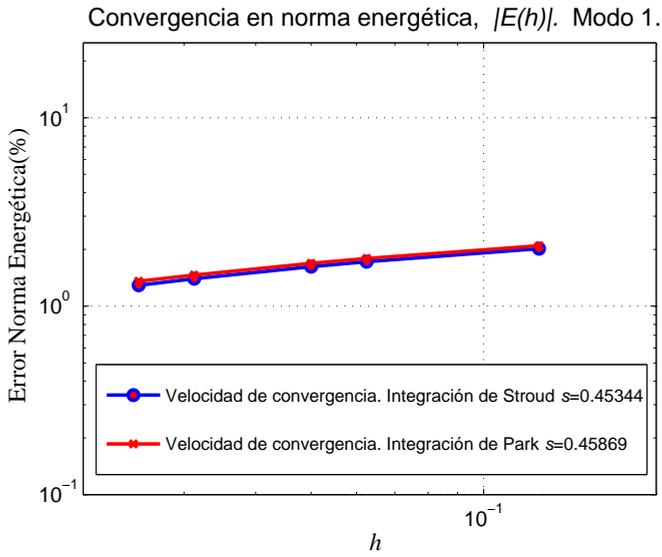


Figura 3.9. Convergencia en energía para el problema Westergaard con solo K_I .

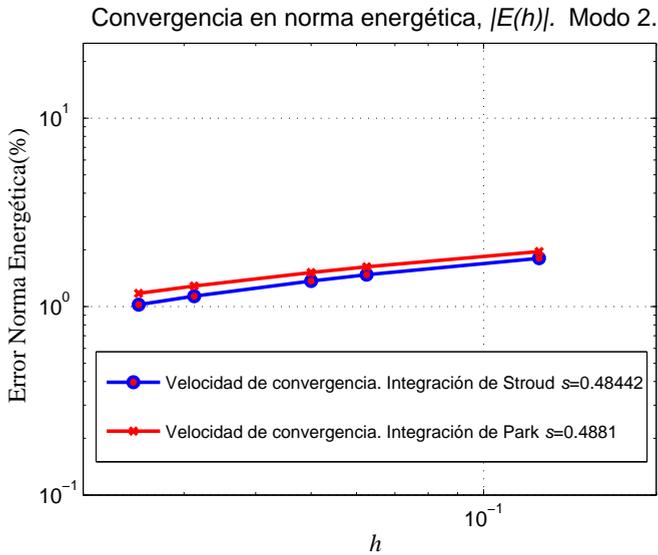


Figura 3.10. Convergencia en energía para el problema Westergaard con solo K_{II} .

Capítulo 4

Métodos para el cálculo de los FIT en XFEM

*Que no sabemos lo que nos pasa:
eso es lo que nos pasa.*

José Ortega y Gasset

4.1. Motivación y antecedentes

El cálculo de los FIT es un objetivo prioritario en la MFEL porque determinan el estado asintótico de tensiones en el entorno del extremo de grieta. El conocimiento de dichos valores permite caracterizar el crecimiento de la grieta, estimar la vida a fatiga y evaluar la posibilidad de la rotura por fractura. Este estudio intensivo ha dado lugar a la existencia de gran diversidad de técnicas tanto analíticas como numéricas. Como resultado de este esfuerzo existen muchas fuentes donde los valores de los FIT aparecen tabulados para diversos casos de interés como en [50, 143–145]. En [142, 146, 147] pueden encontrarse introducciones a las diversas técnicas disponibles para su cálculo. No obstante, la obtención de los valores de los FIT en una grieta genérica aún no se ha conseguido resolver completamente, por ejemplo, existen dificultades en grietas curvas y en fisuras tridimensionales.

En el campo de la ingeniería, para el cálculo genérico de los FIT, los planteamientos basados en técnicas numéricas presentan ventajas sobre los planteamientos analíticos, debido a su mayor versatilidad. Los métodos desarrollados con la integral de dominio, que se fundamentan en principios energéticos a partir de la solución numérica proporcionada por el MEF, se han impuesto claramente frente a otras técnicas.

Las integrales de dominio presentan diversas ventajas, como su teórica independencia del tamaño y forma de la región de integración —siempre y cuando se verifiquen ciertas condiciones—, por lo que se pueden escoger regiones de integración alejadas del extremo de grieta en las que el error numérico es menor. Además su carácter energético es consistente, tanto con los planteamientos del MEF, como con la teoría de la MFEL para criterios de crecimiento de grieta. Una ventaja añadida es su facilidad de

implementación como técnica de postproceso del MEF, lo cual simplifica su extensión al XFEM.

El método más conocido es la integral de dominio equivalente a la integral de contorno J , propuesta por Rice en [19], denominada método de la integral equivalente de dominio —EDI, del inglés Equivalent Domain Integral—, [21]. La integral J , sin embargo, no es capaz de obtener los valores de los FIT separados en los diversos modos de apertura de grieta. Para el análisis de problemas en modo mixto, se suele aplicar la formulación EDI de la integral de interacción I . La integral de interacción en formulación de contorno fue propuesta en [148] y la formulación en dominio en [149]. Sin embargo, no todas las integrales pueden aplicarse para el estudio de grietas curvas o no planas, [23, 24, 150–153].

Las formulaciones que las distintas integrales de dominio emplean para la extracción de los FIT, se basan en soluciones asintóticas de los campos de deformaciones y tensiones correspondientes a grietas rectas en dos dimensiones. Algunas integrales, por ejemplo la integral de interacción, utilizan explícitamente campos auxiliares en su formulación.

Se sabe que los campos solución de las grietas curvas no son los mismos que los de una grieta recta, pero aún no existe una expresión genérica. Consecuentemente la extracción de los FIT en estudios genéricos de grietas curvas necesita una atención especial, como se puede apreciar en [23, 24, 150–157]. En la bibliografía existen diversas relaciones en la definición de los campos auxiliares de grietas planas. Hay que considerar así cuál de ellas es la más adecuada para ser utilizadas en estudios que incluyan fisuras curvas.

Gosz introduce correcciones en la integral de interacción para el estudio de grietas curvas tridimensionales con el MEF, [23, 24], mostrando una mejora en los resultados. Estas mejoras incluyen el uso de principios de geometría diferencial curvilínea en el análisis de grietas. La parametrización curvilínea depende de la geometría de la grieta considerada y debe construirse para cada caso particular. El XFEM junto con el LSM permite simplificar el estudio de la propagación de grietas curvas y no planas en tres dimensiones [18, 25, 110]. Una de sus ventajas es que provee de un sistema coordenado local natural a la geometría de la grieta y análogo al observado en la Fig. 2.1. En el XFEM, la grieta se define mediante los LS, [15, 18, 25, 95, 110], que introducen una parametrización explícita de la superficie asociada a la fisura. Puede considerarse un formalismo análogo al correspondiente a la geometría diferencial con coordenadas curvilíneas asociadas a una superficie, y por tanto, permite introducir la formulación y correcciones asociadas a un sistema local curvilíneo.

4.2. Integral J

4.2.1. Formulación en integral de contorno e independencia del camino

Una de las magnitudes críticas en cualquier estudio físico es la cantidad de energía asociada al fenómeno considerado. En un problema de MFEL, suponiendo constantes las fuerzas exteriores, siendo Π la energía potencial total del cuerpo elástico y U la

energía de deformación elástica del sistema, se define la tasa de liberación de energía G por unidad de área de grieta formada como

$$G = -\frac{\partial \Pi}{\partial A} = \left| \frac{\partial U}{\partial A} \right| \quad (4.1)$$

Rice, partiendo de la expresión anterior, y coincidiendo con su valor, introduce, en [19], la integral J en su forma de contorno para evaluar el campo de deformaciones en las proximidades de la entalla bidimensional. Eshelby ya había utilizado una integral similar con su tensor energía momento [158, 159]. Planteamientos similares aparecen en [160–163].

Usando la notación que incluye el tensor de energía momento de Eshelby, y conceptos que resultan útiles en la definición como integral de dominio, la integral J bajo las hipótesis de sólido homogéneo con comportamiento elástico —no necesariamente lineal—, en ausencia de fuerzas por unidad de volumen y fuerzas por unidad de superficie en la entalla, para la configuración de la Fig. 4.1, se define por

$$J = - \oint_{\Gamma} P_{ij} q_i n_j dC \quad (4.2)$$

donde Γ es cualquier camino que rodee al extremo de entalla (cuyo contorno es Γ_{gr}), q_i es un vector que indica la extensión de la grieta, es decir es paralelo a la dirección \vec{e}_1 y por tanto a la grieta, P_{ij} es el tensor de Eshelby y n_j es un vector normal al contorno Γ .

El tensor energía momento de Eshelby, P_{ij} , se define como

$$P_{ij} = W \delta_{ij} - \sigma_{jk} \partial_i u_k \quad (4.3)$$

donde W es la densidad de energía de deformación elástica que se obtiene según la expresión

$$W = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} \quad (4.4)$$

La independencia de la integral J con respecto al camino Γ de evaluación, es una de las propiedades que hace que el método sea muy empleado. En [19] también se demuestra que J es nula cuando se evalúa usando un contorno cerrado que encierra un dominio libre de singularidades, Γ^* . Una selección adecuada de este dominio, tal como se muestra en la Fig. 4.2, permite que la demostración sea inmediata. Se puede apreciar, a partir de la figura, que las integrales correspondientes a Γ^2 y Γ^4 , al no existir fuerzas en las caras de grieta, son nulas y por tanto el resultado para los caminos arbitrarios Γ^1 y Γ^3 son iguales exceptuando el signo que se debe a la orientación en el recorrido. Así pues el resultado no depende del camino elegido.

$$- \oint_{\Gamma^*} P_{ij} q_i n_j dC = - \int_{\Gamma^1} P_{ij} q_i n_j dC - \int_{\Gamma^2} P_{ij} q_i n_j dC - \int_{\Gamma^3} P_{ij} q_i n_j dC - \int_{\Gamma^4} P_{ij} q_i n_j dC \quad (4.5)$$

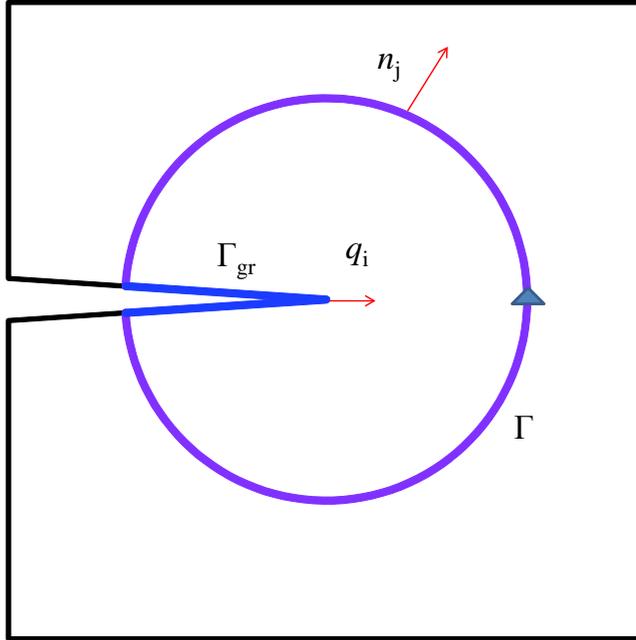


Figura 4.1. Entalla en un dominio bidimensional para cálculo de J . Γ es cualquier camino que contenga el fondo de entalla Γ_{gr} .

$$-\oint_{\Gamma^*} P_{ij} q_i n_j dC = 0 \longrightarrow \oint_{\Gamma^1} P_{ij} q_i n_j dC = \oint_{\Gamma^3} P_{ij} q_i n_j dC \quad (4.6)$$

La relación, para las condiciones dadas, que dota de sentido físico a la integral J , y permite deducir los FIT, es :

$$J = G \quad (4.7)$$

4.2.2. Formulación en integral de dominio

El cálculo de una integral de contorno a partir de los resultados del MEF no es una opción recomendable desde un punto de vista numérico, ya que su correcta implementación reviste de cierta complejidad y suelen aparecer errores asociados a la proyección de los datos sobre el camino de integración. Si es posible, es preferible utilizar integrales de dominio, que pueden ser calculadas con mayor facilidad y ofrecen mayor precisión. El método de la integral de dominio, introducido en [21], varía la formulación original de [19] de forma ingeniosa para poder aplicar el teorema de la divergencia y transformarla en una integral de dominio. La formulación que se ha usado en la definición de la Ec. (4.2) ya incorpora dichas modificaciones, con lo que solo hay aplicar el teorema de la divergencia. Así se obtiene

$$J = - \int_{\Omega} \partial_j (P_{ij} q_i) d\Omega \quad (4.8)$$

Como $\partial_j P_{ij} = 0$, se llega a la siguiente integral de dominio

$$J = - \int_{\Omega} P_{ij} \partial_j q_i d\Omega \quad (4.9)$$

Una de las ventajas de esta formulación es que la misma integral sirve, conceptualmente, tanto para dos dimensiones como para tres dimensiones. En el caso bidimensional el dominio se puede corresponder con el mostrado en la Fig. 4.3, con cuya extrusión es posible definir un dominio para estudios en tres dimensiones. Un punto a considerar en tres dimensiones es que los FIT son magnitudes puntuales que varían a lo largo del frente de grieta, por lo que se debe considerar un dominio de extracción en cada punto de cálculo, P.

El tensor q_i se ha introducido como un vector que indica la extensión virtual de la grieta. Para que la definición de integral de dominio sea consistente, su definición debe incluir un efecto de función de peso para la influencia de los distintos puntos del dominio. Así debe valer 0 en el contorno exterior del dominio de extracción, $\Gamma(\Omega)$ —líneas o superficies que encierra el dominio de extracción Ω , sea una superficie o un volumen respectivamente— y 1 en una región cercana al punto P de cálculo, que se

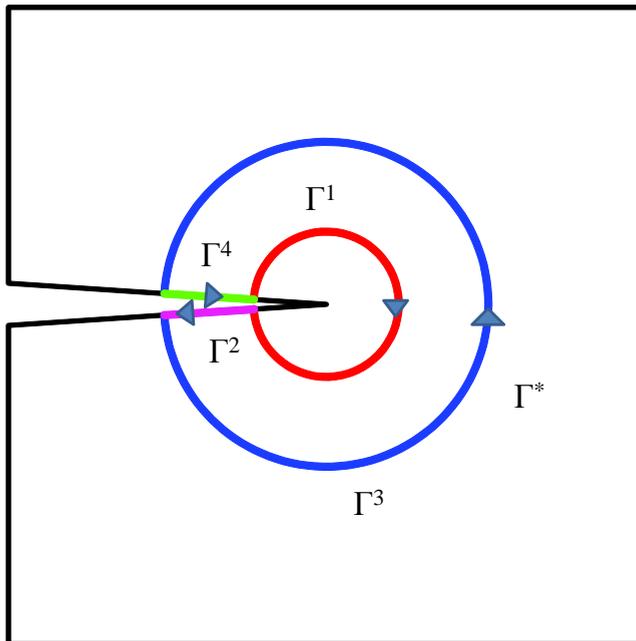


Figura 4.2. Dominio cerrado $\Gamma^* = \Gamma^1 + \Gamma^2 + \Gamma^3 + \Gamma^4$ usado para la demostración de la independencia de camino en la integral J .

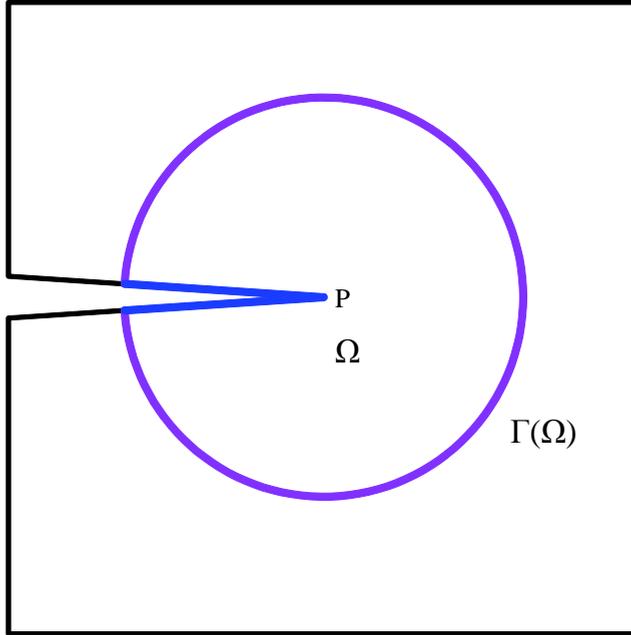


Figura 4.3. Dominio de integración para 2D.

consigue introduciendo q_i mediante la siguiente ecuación

$$q_i = \alpha \vec{e}_1 \quad (4.10)$$

es decir, como el producto de un valor de ponderación α por el vector de la base local \vec{e}_1 —base introducida en Fig. 2.1 y que se obtiene a partir de los valores de los LS—. El valor de la función de peso, α , se discute en la Sec. 4.5.

El cálculo numérico de las integrales, en el dominio Ω , equivale a la suma de las integrales de dominio en los elementos incluidos en Ω . La integral en cada elemento se realiza numéricamente en el dominio de referencia del elemento usando las coordenadas y pesos de la regla de integración correspondiente. Los valores que no están calculados analíticamente en los puntos de Gauss se obtienen por interpolación, usando las funciones de forma del MEF, a partir de los valores nodales. Más información sobre como realizar la integración numérica se puede encontrar en [15, 18, 110, 118].

En esta tesis los puntos de cálculo P al utilizar el XFEM, para las integrales en tres dimensiones, son definidos como los puntos de intersección de las caras de los elementos con el frente de grieta, que se calculan por interpolación a partir de los valores nodales de los LS.

4.2.3. Relación con los factores de intensidad de tensiones

El objetivo principal de las integrales de dominio es la obtención de los valores numéricos de los FIT. Sin embargo hasta ahora se ha presentado una magnitud ener-

gética que se obtiene a partir de los campos solución cercanos al frente de la grieta, pero no se ha introducido su relación con los FIT. No obstante, J se puede utilizar para calcular G , que como aparece en cualquier texto de mecánica de fractura está relacionado con los valores de los FIT.

Por tanto, es posible establecer una relación entre el valor de J y los FIT, que en el caso bidimensional es:

$$J = \frac{1}{E'} (K_I^2 + K_{II}^2) \quad (4.11)$$

donde E' es una magnitud generalizada que se corresponde con

$$E' = \begin{cases} E & \text{en estado de tensión plana} \\ \frac{E}{1-\nu^2} & \text{en estado de deformación plana} \end{cases} \quad (4.12)$$

La relación de la Ec. (4.11) también se puede obtener sustituyendo los valores de los campos en la Ec. (4.2) e integrando en contorno cerrado circular.

En el caso tridimensional, J no puede ser relacionado, tan directamente, con el valor de G . Sin embargo, si se interpreta que es resultado de la contribución de los distintos valores de G en los puntos a lo largo del frente de grieta, y dicha contribución puede ser ponderada mediante α en la longitud de grieta incluida en el dominio de extracción, L^{gr} , y los FIT se consideran constantes o de variación suficientemente suave en un entorno local de P se puede llegar a la expresión:

$$\frac{J(P)}{\int_{L^{gr}} \alpha dl} = G(P) = \frac{1}{E'} (K_I^2 + K_{II}^2) + \frac{1+\nu}{E} K_{III}^2 \quad (4.13)$$

Hay que observar que, usando esta integral, no es posible obtener de forma directa la solución en los distintos modos de los FIT para problemas de modo mixto.

4.3. Integral de interacción

Para conseguir obtener el valor de los FIT en cada modo de crecimiento de grieta, se utiliza la integral de interacción, I . Este método permite calcular K_I , K_{II} y K_{III} utilizando campos auxiliares. La integral de interacción se basa en considerar la integral J para describir la tasa de liberación de energía provocada por dos campos de tensiones, J^{tot} , uno de los cuales va a ser el campo problema y otro un campo auxiliar. La integral total, J^{tot} , se puede descomponer como la suma del efecto de los dos campos independientes, J y J^{aux} , y un término de interacción, I , tal como se observa en:

$$J^{tot} = J + J^{aux} + I \quad (4.14)$$

La relación exacta que se usa para evaluar la integral de interacción, con las caras de grieta libres de tracciones, en forma de dominio —que se puede encontrar por ejemplo en [18, 23, 24, 110, 151]— es:

$$I = - \int_{\Omega} \partial_j (P_{ij}^{aux} q_i) d\Omega \quad (4.15)$$

donde el tensor P_{ij}^{aux} , análogo a P_{ij} , (4.3), y construido a partir de los campos de interacción, es:

$$P_{ij}^{aux} = W^{aux} \delta_{ij} - \sigma_{jk}^{aux} \partial_i u_k - \sigma_{jk} \partial_i u_k^{aux} \quad (4.16)$$

El término W^{aux} indica la densidad de energía de interacción, cuya expresión es:

$$W^{aux} = \frac{1}{2} (\sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^{aux} + \sigma_{ij}^{aux} \varepsilon_{ij}) \quad (4.17)$$

con σ_{ij}^{aux} , ε_{ij}^{aux} y u_j^{aux} identificando los correspondientes campos auxiliares.

Habitualmente, se acepta que los campos solución y los campos auxiliares están relacionados mediante el mismo tensor de propiedades del material, es decir, se acepta la relación de reciprocidad, esto es:

$$\varepsilon_{ij}^{aux} \sigma_{ij} = \varepsilon_{ij}^{aux} C_{ijkl} \varepsilon_{kl} = C_{klij} \varepsilon_{ij}^{aux} \varepsilon_{kl} = \sigma_{kl}^{aux} \varepsilon_{kl} \quad (4.18)$$

Así se puede desarrollar

$$\frac{1}{2} (\varepsilon_{ij}^{aux} \sigma_{ij} + \varepsilon_{ij} \sigma_{ij}^{aux}) = \varepsilon_{ij}^{aux} \sigma_{ij} \quad (4.19)$$

y es posible reducir la Ec. (4.17) a

$$W^{aux} = \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^{aux} \quad (4.20)$$

La elección de los campos auxiliares se basa en la configuración de la grieta recta, donde se verifica que $\partial_j P_{ij}^{aux} = 0$, lo cual permite llegar a la expresión de la integral de interacción para grietas rectas:

$$I = - \int_{\Omega} P_{ij}^{aux} \partial_j q_i d\Omega \quad (4.21)$$

4.3.1. Campos auxiliares

Una de las cuestiones que se plantea es la elección de unos campos auxiliares que verifiquen los criterios necesarios. Obviamente, deben tener un sentido físico claro que justifique su introducción, cumplir con las condiciones del problema y además deben permitir extraer los FIT. Si, para la definición de los campos auxiliares de deformaciones y tensiones, se usa el primer término de los campos asintóticos de la teoría de la MFEL, que se pueden observar en (2.3) y (2.4), se cumplen, en principio, todos los criterios propuestos y además es posible encontrar una relación para obtener los FIT.

Los campos auxiliares que se suelen utilizar en los cálculos con la integral de interacción I se definen en las siguientes expresiones. Los campos de desplazamientos son:

$$\begin{aligned}
u_1^{aux} &= \frac{1}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \left\{ K_I^{aux}(s) \cos \frac{\theta}{2} (\kappa - \cos \theta) + K_{II}^{aux}(s) \sin \frac{\theta}{2} (\kappa + 2 + \cos \theta) \right\} \\
u_2^{aux} &= \frac{1}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \left\{ K_I^{aux}(s) \sin \frac{\theta}{2} (\kappa - \sin \theta) + K_{II}^{aux}(s) \cos \frac{\theta}{2} (\kappa - 2 + \cos \theta) \right\} \\
u_3^{aux} &= \frac{2}{\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} K_{III}^{aux}(s) \sin \frac{\theta}{2}
\end{aligned} \quad (4.22)$$

Los valores independientes —al ser el tensor simétrico— del campo de tensiones son:

$$\begin{aligned}
\sigma_{11}^{aux} &= \frac{K_I^{aux}(s)}{\sqrt{2\pi r}} \left[1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right] \cos \frac{\theta}{2} - \frac{K_{II}^{aux}(s)}{\sqrt{2\pi r}} \left[2 + \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \right] \sin \frac{\theta}{2} \\
\sigma_{22}^{aux} &= \frac{K_I^{aux}(s)}{\sqrt{2\pi r}} \left[1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right] \cos \frac{\theta}{2} + \frac{K_{II}^{aux}(s)}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \\
\sigma_{33}^{aux} &= \nu (\sigma_{11} + \sigma_{22}) \\
\sigma_{12}^{aux} &= \frac{K_I^{aux}(s)}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} + \frac{K_{II}^{aux}(s)}{\sqrt{2\pi r}} \left[1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right] \cos \frac{\theta}{2} \\
\sigma_{13}^{aux} &= - \frac{K_{III}^{aux}(s)}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \\
\sigma_{23}^{aux} &= \frac{K_{III}^{aux}(s)}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2}
\end{aligned} \quad (4.23)$$

Observando estas expresiones se puede concluir que se acepta el estado de deformación plana en las cercanías de la grieta. Además, se han introducido los FIT auxiliares de los campos, esto es K_I^{aux} , K_{II}^{aux} y K_{III}^{aux} , que son las magnitudes que permiten obtener los FIT separados en sus diversos modos. Los valores angulares θ y r que aparecen en las expresiones se refieren a las magnitudes polares en el sistema de referencia local del punto estudiado en la grieta y que se obtienen a partir de los LS tal como se presenta en la Ec. (3.6).

Falta por comentar los valores del campo auxiliar de deformaciones. En principio no existe una expresión analítica para su obtención directa, pero se puede obtener a partir de las definiciones de los campos elásticos. Dependiendo del autor se define dicho campo de una forma u otra. Por ejemplo, Gosz, en [23, 24], usa el campo de desplazamientos para su definición como

$$\varepsilon_{ij}^{aux} = \frac{1}{2} \{ \partial_j u_i^{aux} + \partial_i u_j^{aux} \} \quad (4.24)$$

pero Moës, en [18], lo obtiene a partir del campo de tensiones auxiliares aprovechando el tensor constitutivo según:

$$\varepsilon_{ij}^{aux} = C_{ijkl}^{-1} \sigma_{kl}^{aux} \quad (4.25)$$

Es claro que ambas expresiones son equivalentes, al menos en el caso de la grieta recta o plana. Las diferencias que aparecen en el caso de grietas curvas se presentarán en la siguiente sección.

4.3.2. Relación con los factores de intensidad de tensiones

Análogamente a la relación que la integral J muestra con G y utilizando la definición de la integral de interacción, Ec. (4.14), se puede definir una magnitud G^{aux} . Además con las mismas condiciones que con la integral J se puede establecer que en dos dimensiones se verifica la relación:

$$I = G^{aux} \quad (4.26)$$

y se tiene la siguiente relación entre la G^{aux} y los FIT

$$G^{aux} = \frac{2}{E'} (K_I K_I^{aux} + K_{II} K_{II}^{aux}) \quad (4.27)$$

Si se considera la integral I tridimensional, para el punto del frente de grieta indicado por P , como resultado de la contribución de los valores de G^{aux} ponderados mediante α de los distintos puntos a lo largo del frente de grieta, y además se supone que G^{aux} es constante —o de una variación suficientemente suave— en un entorno local de P , se puede llegar a la siguiente expresión:

$$I(P) = \int_{L^{gr}} G^{aux} \alpha dl = G^{aux}(P) \int_{L^{gr}} \alpha dl \quad (4.28)$$

Es habitual suponer un estado de deformación plana en el interior de un frente de grieta tridimensional. Por ello E' se toma en general como $E/(1 - \nu^2)$. Por tanto, para un punto, P , del frente de grieta, se tiene:

$$G^{aux}(P) = \frac{2(1 - \nu^2)}{E} \{K_I K_I^{aux} + K_{II} K_{II}^{aux}\} + \frac{1}{\mu} K_{III} K_{III}^{aux} \quad (4.29)$$

La elección de los valores K_I^{aux} , K_{II}^{aux} y K_{III}^{aux} en la expresión de los campos auxiliares permite extraer los diversos valores de los FIT del problema. Considerando las integrales de interacción en que solo exista un modo en los campos auxiliares, se puede observar que el resultado para G^{aux} es proporcional al FIT del modo correspondiente. Se tiene así:

- Si $K_I^{aux} = 1$, $K_{II}^{aux} = 0$ y $K_{III}^{aux} = 0$ se obtiene I^I
- Si $K_I^{aux} = 0$, $K_{II}^{aux} = 1$ y $K_{III}^{aux} = 0$ se obtiene I^{II}
- Si $K_I^{aux} = 0$, $K_{II}^{aux} = 0$ y $K_{III}^{aux} = 1$ se obtiene I^{III}

que se traducen, para dos dimensiones, en las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} K_I &= \frac{EI^I}{2(1 - \nu^2)} \\ K_{II} &= \frac{EI^{II}}{2(1 - \nu^2)} \end{aligned} \quad (4.30)$$

y, para tres dimensiones, en:

$$\begin{aligned}
 K_{\text{I}} &= \frac{E}{2(1-\nu^2)} \frac{I^{\text{I}}(\text{P})}{\int_{L^{gr}} \alpha dl} \\
 K_{\text{II}} &= \frac{E}{2(1-\nu^2)} \frac{I^{\text{II}}(\text{P})}{\int_{L^{gr}} \alpha dl} \\
 K_{\text{III}} &= \mu \frac{I^{\text{III}}(\text{P})}{\int_{L^{gr}} \alpha dl}
 \end{aligned} \tag{4.31}$$

Debido a las hipótesis y a que los campos auxiliares escogidos se corresponden con un problema de grieta recta y plana con estado de deformación plana, sus resultados no son rigurosamente aplicables en problemas con comportamientos no suaves en la variación de los FIT o grietas con algún tipo de curvatura.

4.4. Integrales de dominio en grietas con curvatura

4.4.1. Problemática en grietas con curvatura

Uno de los mayores problemas que puede presentarse en el estudio de las grietas curvas, es la definición adecuada de la base local de referencia, ya que su obtención en estudios con el MEF puede ser muy complicada, debiéndose elaborar para cada problema por separado. Las expresiones que se utilizan en el cálculo de las integrales de dominio Ec. (4.9) y Ec. (4.21) se fundamentan en una correcta definición de dicha base, de manera que q_i es paralela a las caras de grieta, y se pueden ignorar los términos correspondientes a las integrales en las superficies de la fisura.

La base, en el ámbito del XFEM, puede formarse a partir de la información de los LS. La forma directa de definir la base local, Ec. (3.3), introducida en [15], no asegura que estas condiciones se verifiquen. En el presente trabajo se ha introducido una variación en la Ec.(3.5) que consigue formar una base ortogonal local. Otra forma de conseguir una base ortogonal que no resulta tan operativa también se puede encontrar en [110]. No hay que olvidar que las construcciones a partir de los LS solo tienen sentido en las regiones en las que estas funciones distancia estén bien definidas.

Otra dificultad es que las soluciones generales, para los campos utilizados en la MFEL, se corresponden con un caso de grieta plana recta lo cual puede crear complicaciones al aplicar los diversos métodos para extracción de los FIT [150]. Este punto se puede observar claramente en la integral de interacción que necesita la introducción explícita de campos auxiliares, que usualmente se corresponden con la solución de la MFEL para grietas rectas.

Además de las dificultades asociadas con la definición de la integral de dominio, el operador gradiente debe ser consistente con la utilización de coordenadas curvilíneas. Es decir, debe incluir el efecto introducido mediante los símbolos de Christoffel. El cálculo de dichos símbolos requiere conocer la definición analítica de la geometría de la grieta. Gosz, [23, 24], realiza este desarrollo para algunos casos de referencia. Sin embargo no se suelen usar estas correcciones, ya que obligan a la realización de diversos cálculos, no triviales, para cada ejemplo particular en MEF. No obstante,

los LS dan información sobre la construcción geométrica de la grieta que permite un desarrollo aproximado del operador gradiente en curvilíneas.

En resumen, existen diversos factores que afectan a la calidad de los resultados de las integrales de dominio empleadas en el cálculo de los FIT de análisis de grietas curvas utilizando el XFEM y los LS. En la tesis se considera la influencia de estos factores, realizándose un estudio numérico de su efecto en el capítulo 5, concretamente:

- La influencia de la ortogonalidad de la base. La formulación de la integral de dominio se basa en relaciones que aceptan que la base es ortogonal y así evitar cálculos en la superficie de la grieta mediante integrales de contorno o superficie. No obstante, no se puede garantizar la ortogonalidad de la base para grietas curvas, cuando esta se construye a partir de los LS.
- Los campos auxiliares empleados en la integral de interacción se corresponden con un caso de grieta recta. No obstante, en la literatura se suele extender su aplicación al análisis de grietas curvas. Explícitamente, el campo auxiliar de deformaciones se deduce de los otros campos auxiliares —de los campos de desplazamientos o de tensiones— utilizando relaciones que no se verifican para grietas curvas. En la tesis se realiza un análisis del efecto de las distintas definiciones del campo auxiliar de deformaciones para evaluar cuál de las opciones presenta mejor comportamiento.
- Además, se considera también la validez de la condición de reciprocidad en algunos de los términos de la integral de interacción cuando se utilizan los campos auxiliares correspondientes a la grieta recta para estudiar configuraciones curvas.
- Estos factores también afectan a la propiedad de independencia del camino de la integral de interacción. En consecuencia, se analiza la influencia en los estudios de grietas curvas de la función de crecimiento virtual de la grieta y del tamaño y definición del dominio de extracción.
- Finalmente, el uso de coordenadas curvilíneas complica el cálculo de los gradientes y derivadas, que habitualmente se suele ignorar en la práctica. Partiendo de los LS en la tesis se ha introducido una formulación de los gradientes en curvilíneas. La influencia de la introducción del efecto de las coordenadas curvilíneas también se ha estudiado en la tesis.

4.4.2. Modificaciones a la integral de interacción en grietas con curvatura

En la construcción de la integral de dominio para I se acepta, en grietas que no presentan curvatura, que $\partial_j P_{ij}^{aux} = 0$ y se puede pasar de la Ec. (4.15) a la Ec. (4.21). En caso de que la grieta presente alguna curvatura —debido a los campos auxiliares de grieta recta escogidos— no se verifica $\partial_j P_{ij}^{aux} = 0$ y así la expresión de partida debe ser:

$$I = - \int_{\Omega} P_{ij}^{aux} \partial_j q_i d\Omega - \int_{\Omega} q_i \partial_j P_{ij}^{aux} d\Omega \quad (4.32)$$

Esta expresión proviene de que para los campos auxiliares, expresados en la base de coordenadas curvilíneas, no se cumplen las ecuaciones de equilibrio interno y las ecuaciones de compatibilidad entre deformaciones y desplazamientos. Es decir, se tiene:

$$\begin{aligned} \partial_i \sigma_{ij}^{aux} &\neq 0 \\ (\partial_l u_j^{aux} - \partial_l \varepsilon_{ij}^{aux}) &\neq 0 \end{aligned} \quad (4.33)$$

Además no se puede aceptar la ecuación de reciprocidad, es decir, no se puede usar el mismo tensor constitutivo para relacionar el campo de deformaciones auxiliares y el campo de tensiones auxiliares, con lo que se propone en la tesis que para la expresión para W^{aux} se debe emplear la Ec. (4.17), es decir $W^{aux} = \frac{1}{2} (\sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^{aux} + \sigma_{ij}^{aux} \varepsilon_{ij})$.

El cálculo de $\partial_j P_{ij}^{aux}$, sin aceptar la condición de reciprocidad, resulta muy poco adecuado desde un punto de vista numérico, debido a que incluye términos en derivadas de aproximaciones por MEF, que introducen imprecisiones significativas. Además este término se debe a una corrección por el uso de coordenadas curvilíneas y su efecto es bastante menor que el del término P_{ij}^{aux} . Para minimizar la introducción de errores, se acepta la reciprocidad en el desarrollo de $\partial_j P_{ij}^{aux}$, obteniéndose:

$$\partial_j P_{ij}^{aux} = \partial_j \sigma_{kl}^{aux} \varepsilon_{kl} \delta_{ij} - \sigma_{kl} \partial_l u_k^{aux} - \partial_l \sigma_{kl}^{aux} \partial_j u_k \quad (4.34)$$

Los campos auxiliares se definen usando el primer término de los campos asintóticos, pero en el sistema de referencia curvilíneo no se verifican simultáneamente las ecuaciones de compatibilidad, las de equilibrio y la ley de Hooke [18, 23, 24, 110, 150]. Se puede reforzar la condición de compatibilidad, como en [18, 110], si se calcula el campo de deformaciones a partir del campo de tensiones mediante la aplicación de la ley de Hooke, tal como se muestra en Ec. (4.25). También se puede reforzar que se verifique la condición de equilibrio interno, como en [23, 24], si se obtiene el campo de desplazamientos auxiliar mediante la Ec. (4.24)

Puesto que no se cumplen las condiciones de compatibilidad entre desplazamientos y deformaciones y las condiciones de equilibrio interno en los campos auxiliares, entonces las dos expresiones disponibles para el cálculo del campo de deformaciones auxiliar no coinciden y ninguna de ellas tiene por qué ser la más correcta. Una opción es escoger una aproximación de mínimos cuadrados a las dos expresiones, Ec. (4.24) y Ec. (4.25). Una propuesta de esta tesis es emplear el promedio entre ambas opciones, es decir:

$$\varepsilon_{ij}^{aux} = \frac{\frac{1}{2} \{ \partial_j u_i^{aux} + \partial_i u_j^{aux} \} + C_{ijkl}^{-1} \sigma_{ij}^{aux}}{2} \quad (4.35)$$

En el capítulo 5 se analizará numéricamente la influencia de estas alternativas.

4.4.3. Gradiente en curvilíneas. Derivadas de los campos auxiliares en la base de coordenadas curvilíneas

Un problema añadido es que, al trabajar con una base local construida aplicando coordenadas curvilíneas, los términos que incluyen derivadas de los campos auxiliares se complican. En [23, 24] aparece parte de su desarrollo en problemas conocidos. Utilizando dichas expresiones como punto de partida—que se basan en hacer un desarrollo a partir del tensor de la métrica en lugar de usar directamente los símbolos de Christoffel—, se va a realizar la construcción explícita de todos los términos necesarios. Debido a la definición del sistema de referencia y que no se puede asegurar su ortogonalidad, se tiene que comentar que el sistema de coordenadas empleado es de tipo covariante. A pesar de esta clarificación, el desarrollo es el mismo para un sistema de coordenadas contravariante, exceptuando los cambios formales de notación, notación formal que no ha sido rigurosamente respetada en esta tesis por mantener coherencia con la notación usada en la bibliografía. Mencionar que ambos tipos de coordenadas coinciden en un sistema de referencia ortogonal.

Una aportación de esta tesis es la deducción analítica de los distintos gradientes que aparecen en la integral de interacción cuando se utilizan coordenadas curvilíneas en estudios basados en XFEM y LS, para lo que se parte de los desarrollos de Gosz [23, 24].

El operador gradiente en coordenadas curvilíneas es:

$$\partial_i = \vec{e}_i \frac{1}{h_i} \frac{\partial}{\partial \xi_i} \quad (4.36)$$

con h_i el factor de escala, ξ_i la coordenada local correspondiente y $\frac{\partial}{\partial \xi_i}$ siendo el operador derivada usual.

Para hacer el desarrollo consideraremos dos campos tensoriales genéricos, empezando con el campo vectorial f_j . Calculando primero los términos $\partial_i f_j$ que corresponden al producto tensorial del operador gradiente con el campo vectorial:

$$\partial_i f_j = \vec{\nabla} \otimes \vec{f} \quad (4.37)$$

y aprovechando la relación en la Ec. (4.36), la Ec. (4.37) se expresa de forma explícita en la base de coordenadas curvilíneas como:

$$\partial_i f_j = \left(\vec{e}_1 \frac{1}{h_1} \frac{\partial}{\partial \xi_1} + \vec{e}_2 \frac{1}{h_2} \frac{\partial}{\partial \xi_2} + \vec{e}_3 \frac{1}{h_3} \frac{\partial}{\partial \xi_3} \right) \otimes (\vec{e}_1 f_1 + \vec{e}_2 f_2 + \vec{e}_3 f_3) \quad (4.38)$$

Desarrollando y usando notación matricial, se llega a la siguiente Ec. (4.39), donde aparecen dos términos. Un término correspondiente a la derivada del campo y otro

correspondiente a la derivada de la base curvilínea.

$$\begin{aligned} \partial_i f_j = & \left(\begin{array}{ccc} \frac{1}{h_1} \frac{\partial f_1}{\partial \xi_1} & \frac{1}{h_1} \frac{\partial f_2}{\partial \xi_1} & \frac{1}{h_1} \frac{\partial f_3}{\partial \xi_1} \\ \frac{1}{h_2} \frac{\partial f_1}{\partial \xi_2} & \frac{1}{h_2} \frac{\partial f_2}{\partial \xi_2} & \frac{1}{h_2} \frac{\partial f_3}{\partial \xi_2} \\ \frac{1}{h_3} \frac{\partial f_1}{\partial \xi_3} & \frac{1}{h_3} \frac{\partial f_2}{\partial \xi_3} & \frac{1}{h_3} \frac{\partial f_3}{\partial \xi_3} \end{array} \right) + \\ & + f_m \left(\begin{array}{ccc} \frac{1}{h_1} \frac{\partial \vec{e}_m}{\partial \xi_1} \bullet \vec{e}_1 & \frac{1}{h_1} \frac{\partial \vec{e}_m}{\partial \xi_1} \bullet \vec{e}_2 & \frac{1}{h_1} \frac{\partial \vec{e}_m}{\partial \xi_1} \bullet \vec{e}_3 \\ \frac{1}{h_2} \frac{\partial \vec{e}_m}{\partial \xi_2} \bullet \vec{e}_1 & \frac{1}{h_2} \frac{\partial \vec{e}_m}{\partial \xi_2} \bullet \vec{e}_2 & \frac{1}{h_2} \frac{\partial \vec{e}_m}{\partial \xi_2} \bullet \vec{e}_3 \\ \frac{1}{h_3} \frac{\partial \vec{e}_m}{\partial \xi_3} \bullet \vec{e}_1 & \frac{1}{h_3} \frac{\partial \vec{e}_m}{\partial \xi_3} \bullet \vec{e}_2 & \frac{1}{h_3} \frac{\partial \vec{e}_m}{\partial \xi_3} \bullet \vec{e}_3 \end{array} \right) \end{aligned} \quad (4.39)$$

El producto escalar $\frac{1}{h_i} \frac{\partial \vec{e}_m}{\partial \xi_i} \bullet \vec{e}_j$, con $j = 1, 2, 3$, extrae las componentes en cada dirección de la base de la derivada de cada vector de la base curvilínea.

Escribiendo el resultado (4.39) de una forma más compacta se llega a:

$$\partial_i f_j = \frac{1}{h_i} \frac{\partial f_j}{\partial \xi_i} + f_m \frac{1}{h_i} \frac{\partial \vec{e}_m}{\partial \xi_i} \bullet \vec{e}_j \quad (4.40)$$

que se usa para obtener las derivadas de q_i y del campo de desplazamientos en la base curvilínea, es decir, $\partial_j q_i$ y $\partial_i u_j^{aux}$.

La expresión anterior permite establecer la comparación con la obtenida mediante la nomenclatura con los símbolos de Christoffel:

$$\partial_i f_j = \frac{1}{h_i} \frac{\partial f_j}{\partial \xi_i} + \Gamma_{ij}^m f_m \quad (4.41)$$

Análogamente se puede calcular la expresión de $\partial_i \partial_j f_k$, utilizada para el cálculo de $\partial_i \partial_j u_k^{aux}$, como:

$$\begin{aligned} \partial_i \partial_j f_k = & \vec{e}_i \frac{1}{h_i} \frac{\partial}{\partial \xi_i} \otimes \left\{ \vec{e}_j \otimes \vec{e}_k \left(\frac{1}{h_j} \frac{\partial f_k}{\partial \xi_j} + f_m \frac{1}{h_j} \frac{\partial \vec{e}_m}{\partial \xi_j} \bullet \vec{e}_k \right) \right\} = \\ = & \frac{1}{h_i} \frac{1}{h_j} \frac{\partial^2 f_k}{\partial \xi_i \partial \xi_j} + \frac{1}{h_i} \frac{\partial}{\partial \xi_i} \frac{1}{h_j} \frac{\partial f_k}{\partial \xi_j} + \frac{1}{h_m} \frac{\partial f_k}{\partial \xi_m} \frac{1}{h_i} \frac{\partial \vec{e}_m}{\partial \xi_i} \bullet \vec{e}_k + \\ & + \frac{1}{h_j} \frac{\partial f_m}{\partial \xi_j} \frac{1}{h_i} \frac{\partial \vec{e}_m}{\partial \xi_i} \bullet \vec{e}_k + \frac{1}{h_i} \frac{1}{h_j} \frac{\partial f_m}{\partial \xi_i} \frac{\partial \vec{e}_m}{\partial \xi_j} \bullet \vec{e}_k + \\ & + \frac{1}{h_i} f_m \frac{\partial}{\partial \xi_i} \frac{1}{h_j} \frac{\partial \vec{e}_m}{\partial \xi_j} \bullet \vec{e}_k + \frac{1}{h_i} f_m \frac{1}{h_j} \frac{\partial^2 \vec{e}_m}{\partial \xi_i \partial \xi_j} \bullet \vec{e}_k + \\ & + \frac{1}{h_i} f_m \frac{1}{h_j} \left(\frac{\partial \vec{e}_m}{\partial \xi_l} \bullet \vec{e}_k \right) \left(\frac{\partial \vec{e}_l}{\partial \xi_i} \bullet \vec{e}_j \right) \end{aligned} \quad (4.42)$$

Además, se obtiene el desarrollo para la expresión genérica de $\partial_i f_{jk}$, que se necesita para la derivada de los campos auxiliares de tensiones —y a partir de ellos los de las derivadas de las deformaciones auxiliares mediante la ley de Hooke—, $\partial_i \sigma_{jk}^{aux}$, como:

$$\partial_i f_{jk} = \frac{1}{h_i} \frac{\partial f_{jk}}{\partial \xi_i} + f_{mk} \frac{1}{h_i} \frac{\partial \vec{e}_m}{\partial \xi_i} \bullet \vec{e}_k + f_{jm} \frac{1}{h_i} \frac{\partial \vec{e}_m}{\partial \xi_i} \bullet \vec{e}_j \quad (4.43)$$

Después del desarrollo teórico, se presenta la implementación en XFEM de los términos numéricos necesarios. La matriz jacobiana de la transformación de coordenadas entre la base cartesiana y la base curvilínea, obtenida a partir de las definiciones de la base y que está relacionada con las derivadas de la base curvilínea respecto a las coordenadas cartesianas, es:

$$J_{ij} = \frac{\partial \xi_i}{\partial x_j} \quad (4.44)$$

Como no se puede asegurar la ortogonalidad del sistema de referencia, hay que realizar la inversa de la transformación usando la inversa de la matriz jacobiana, ya que en este caso no coincide con la transpuesta.

Las derivadas respecto a las coordenadas curvilíneas locales son:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \xi_1} &= \frac{\partial}{\partial \psi} \\ \frac{\partial}{\partial \xi_2} &= \frac{\partial}{\partial \phi} \end{aligned} \quad (4.45)$$

La tercera componente $\frac{\partial}{\partial \xi_3}$ no tiene correspondencia directa en la representación mediante LS que se utiliza, pero coincide con la coordenada s de longitud del frente de grieta. Aún así, los campos auxiliares usados —que se definen en la Ec. (4.22) y en la Ec. (4.23)— no dependen explícitamente de ella, con lo que se puede obviar su cálculo directo, aunque se puede obtener a partir de la matriz jacobiana de la transformación, Ec. (4.44).

El factor de escala entre las coordenadas se obtiene a partir de la matriz jacobiana mediante:

$$h_i^2 = \sum_k J_{ki}^{-1} J_{ki}^{-1} \quad (4.46)$$

donde, a diferencia de los valores para los factores de escala calculados en [23, 24], al construir la base mediante un promediado en los nodos del gradiente en elementos finitos, no se puede asegurar que alguno de los factores de escala sea de valor unidad.

Usando la regla de la cadena y la expresión de la matriz jacobiana se deducen las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{e}_i}{\partial \xi_j} &= \frac{\partial \vec{e}_i}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial \xi_j} = \frac{\partial \vec{e}_i}{\partial x_k} J_{kj}^{-1} \\ \frac{\partial \frac{1}{h_i}}{\partial \xi_j} &= \frac{\partial \frac{1}{h_i}}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial \xi_j} = \frac{\partial \frac{1}{h_i}}{\partial x_k} J_{kj}^{-1} \end{aligned} \quad (4.47)$$

Como la aproximación utiliza la información del MEF, se pueden obtener los siguientes resultados calculados a partir de los valores nodales —información que se

indica mediante la notación $|_i$ —:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \vec{e}_j}{\partial x_k} &= \sum_i \frac{\partial N_i}{\partial x_k} \vec{e}_j|_i \\ \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{1}{h_j} &= \sum_i \frac{\partial N_i}{\partial x_k} \frac{1}{h_j} \Big|_i\end{aligned}\tag{4.48}$$

donde $\frac{\partial N_i}{\partial x_k}$ indica derivada de la función de forma correspondiente respecto a la coordenada cartesiana x_k . Hay que recordar que el espacio de aproximación de elementos finitos utilizado es lineal, por lo tanto, todos aquellos términos que incluyan segundas derivadas de la base local son nulos, aunque su cálculo para aproximaciones de mayor orden no reviste mayor dificultad conceptual.

4.5. Definición del dominio de extracción

El campo vectorial q_i se interpreta como un campo virtual de crecimiento de grieta, según puede verse en la Fig. 4.4 y en la Fig. 4.5. La definición es:

$$q_i = \alpha \vec{e}_1\tag{4.49}$$

con $\alpha = 0$ en el contorno $\Gamma(\Omega)$ y $\alpha = 1$ en el punto P del frente de grieta

La definición de q_i como un vector tangente a \vec{e}_1 , tiene una gran ventaja, ya que permite no realizar las integrales en el contorno de las caras de la fisura, independientemente de la geometría. Esta simplificación ya se ha incluido en las definiciones de las integrales de dominio, Ec. (4.9), Ec. (4.21) y Ec. (4.32). La función q_i debe ser suficientemente continua y suave para presentar un buen comportamiento en su derivada.

Teniendo en cuenta que la estimación en la zona cercana al extremo de grieta siempre es menos precisa que en zonas alejadas —debido a la singularidad existente— hay que procurar aumentar la influencia del cálculo de estas regiones, y en principio, cuanto más se extienda el dominio Ω las estimaciones obtenidas mediante las integrales de dominio serán más precisas.

Hay diversos tipos de funciones q_i utilizadas en la práctica, que se definen mediante α . En el ámbito del XFEM, los LS proveen de herramientas para su construcción independientemente de la malla y en concordancia con la definición geométrica local de la grieta. Una de las más usadas, por ejemplo en [20, 118], es la definición del dominio de extracción como una *plateau* de valor unidad y cero en el exterior, Fig. 4.6, y que se puede introducir en dos dimensiones para un dominio definido por un radio exterior R_{ext} como

$$\alpha = \begin{cases} 1 & \text{si } \sqrt{\phi^2 + \psi^2} < R_{ext} \\ 0 & \text{si } \sqrt{\phi^2 + \psi^2} \geq R_{ext} \end{cases}\tag{4.50}$$

Con la definición como *plateau* de la Ec. (4.50), la integración se realiza solo en un anillo de elementos, ya que los valores de α se definen en los nodos según la Ec. (4.50),

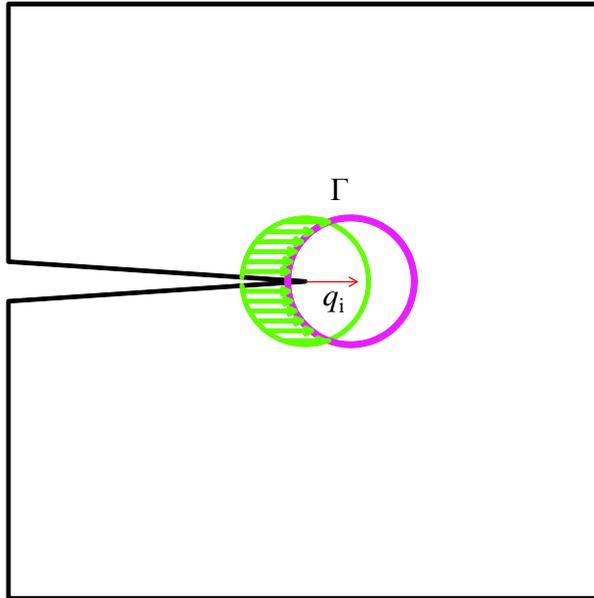


Figura 4.4. Significado de q_i en el esquema del dominio de extracción. Campo de extensión virtual de crecimiento de la grieta.

interpolándose de la forma habitual en el interior de los elementos. La precisión puede mejorarse incluyendo más elementos, para ello se pueden definir dos zonas con una región de variación lineal entre ellas, como se puede observar en la Fig. 4.7. Se define, así, un dominio circular mediante R_{ext} a partir del cual α es nula y una región circular interior de radio R_{int} donde α es de valor unidad. Entre ambas regiones, el valor de α varía linealmente entre cero y uno:

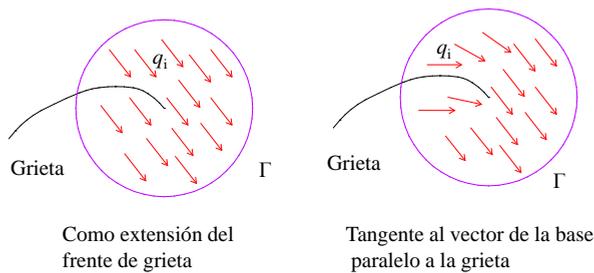
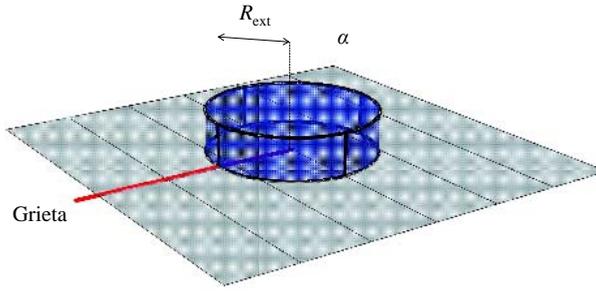
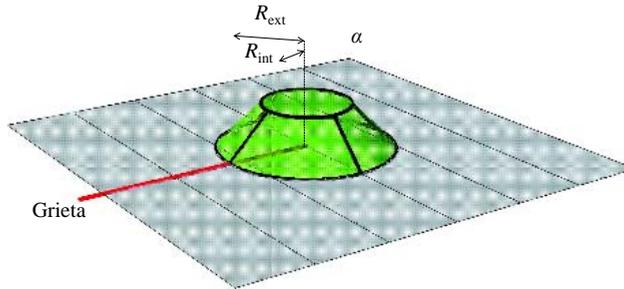


Figura 4.5. Representación de la dirección del campo virtual de velocidades q_i respecto a la grieta. Izquierda: como extensión en el extremo de grieta. Derecha: como vector tangente a \vec{e}_1 en el dominio.

Figura 4.6. Representación de q_i como *plateau*.

$$\alpha = \begin{cases} 1 & \text{si } \sqrt{\phi^2 + \psi^2} \leq R_{int} \\ \frac{\sqrt{\phi^2 + \psi^2} - R_{ext}}{R_{int} - R_{ext}} & \text{si } R_{int} < \sqrt{\phi^2 + \psi^2} < R_{ext} \\ 0 & \text{si } \sqrt{\phi^2 + \psi^2} \geq R_{ext} \end{cases} \quad (4.51)$$

Figura 4.7. Representación de q_i con dos regiones, una rampa con una *plateau* en la zona central.

En el caso de que se plantee el cálculo de los FIT de una grieta que tenga algún tipo de curvatura, no se anula el gradiente en la zona *plateau* porque también se deriva el vector \vec{e}_1 de la base, ya que varía al tratarse de una grieta curva —véanse Fig 4.5 derecha, Ec. (4.40), Ec. (4.42) y Ec. (4.43)—. Existe un término $-q_i \partial_j P_{ij}^{aux}$ de la integral de interacción que al hacer los correspondientes desarrollos no se anula en grietas curvas porque los campos auxiliares no son los correctos al haber tomado los campos auxiliares de una grieta recta. Este término no depende del gradiente de q_i , [18, 23, 24, 151] debe ser nulo para unos campos auxiliares exactos y puede dominar para valores pequeños del otro término que depende del gradiente de q_i . Para minimizar su efecto se puede introducir un dominio de integración definido por una figura rampa tal como se puede observar en la Fig. 4.8 y en la definición:

$$\alpha = \begin{cases} 1 - \frac{\sqrt{\phi^2 + \psi^2}}{R_{ext}} & \text{si } \sqrt{\phi^2 + \psi^2} < R_{ext} \\ 0 & \text{si } \sqrt{\phi^2 + \psi^2} \geq R_{ext} \end{cases} \quad (4.52)$$

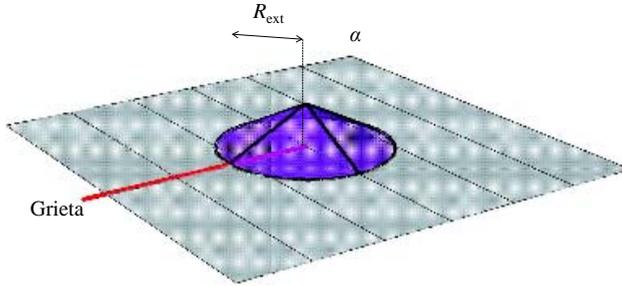


Figura 4.8. Representación de q_i como rampa.

En tres dimensiones el valor numérico de los LS no basta para definir el dominio de extracción. Para ello se utilizan las coordenadas de sistema de referencia local curvilíneo definido en P a partir de los LS. Estas coordenadas ξ_1 , ξ_2 y ξ_3 se construyen a partir del sistema cartesiano con origen en el punto P y aprovechando la definición del sistema local de la grieta.

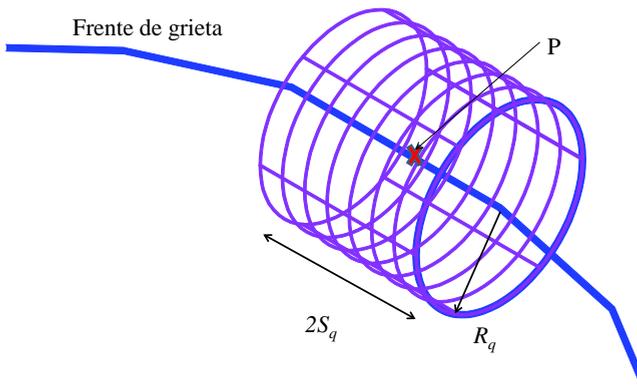


Figura 4.9. Representación esquemática de un cilindro como dominio de integración en tres dimensiones alrededor de un punto P del frente de grieta

Para tres dimensiones se considera un dominio que coincide con un cilindro de radio R_q y de altura dos veces S_q , Fig. 4.9, y una función α definida de forma análoga a una función rampa en dos dimensiones, esto es

$$\alpha = \begin{cases} \left(1 - \frac{\sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2}}{R_q}\right) \left(1 - \frac{|\xi_3|}{S_q}\right) & \text{Si } \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2} < R_q \text{ y } |\xi_3| < S_q \\ 0 & \text{Si } \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2} \geq R_q \text{ o } |\xi_3| \geq S_q \end{cases} \quad (4.53)$$

Capítulo 5

Ejemplos numéricos de cálculo de los FIT en XFEM

*Afortunado es el hombre que
tiene tiempo para esperar.
Calderón de la Barca*

5.1. Ejemplos numéricos en 2-D

5.1.1. Introducción y caso de referencia grieta curva

El objetivo principal de la tesis es el estudio de grietas tridimensionales aunque, por sencillez, se comienza mediante análisis paramétricos bidimensionales que permiten deducir información sobre los factores que influyen en la extracción de los FIT. Los análisis se realizan estudiando la velocidad de convergencia del error en los FIT respecto a los GDL, de valor óptimo 0,5, puesto que se realiza un refinamiento de un modelo de XFEM con enriquecimiento topológico y 0,5 es la máxima velocidad de convergencia alcanzable.

El problema de referencia considerado es una grieta arco en una placa infinita sometida a tensión biaxial. La geometría de la grieta se define mediante el radio R_c y el ángulo β , Fig. 5.1, con valores $R_c = 1$ y $\beta = \pi/2$. Se considera una porción finita del dominio, determinada mediante una anchura $w = 2$ y una altura $h = 2$. En el contorno se imponen las condiciones de simetría y el campo exacto de tensiones, obtenido de la solución analítica presentada en [164]. La solución exacta para los FIT, [24, 165], es:

$$\begin{aligned} K_{\text{I}}^{ex} &= \sigma_{\infty} (\pi a)^{\frac{1}{2}} \frac{\cos\left(\frac{\beta}{2}\right)}{1 + \text{sen}^2\left(\frac{\beta}{2}\right)} \\ K_{\text{II}}^{ex} &= \sigma_{\infty} (\pi a)^{\frac{1}{2}} \frac{\text{sen}\left(\frac{\beta}{2}\right)}{1 + \text{sen}^2\left(\frac{\beta}{2}\right)} \end{aligned} \tag{5.1}$$

donde $a = R_c \text{sen}(\beta)$ y la tensión en el infinito es $\sigma_\infty = 100$. Las propiedades del material son $E = 10^7$ y $\nu = 0,33$. Las magnitudes son concordantes pero sin correspondencia con unidades reales.

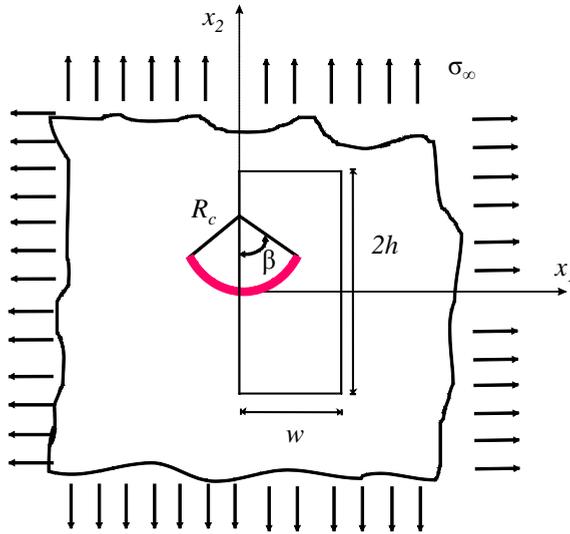


Figura 5.1. Problema de una grieta con forma de arco en una placa infinita sometida a tensión biaxial

En los estudios de convergencia se emplea una secuencia de mallas regular de elementos triangulares lineales. Un esquema del refinamiento de la malla se puede observar en la Fig. 5.2. Los tamaños de elementos utilizados, definidos a partir de un lado del triángulo regular, son:

$$h = \left\{ \frac{R_c}{63}, \frac{R_c}{73}, \frac{R_c}{93}, \frac{R_c}{113}, \frac{R_c}{133}, \frac{R_c}{163}, \frac{R_c}{173}, \frac{R_c}{193}, \frac{R_c}{213}, \right. \\ \left. \frac{R_c}{233}, \frac{R_c}{257}, \frac{R_c}{323}, \frac{R_c}{413}, \frac{R_c}{457}, \frac{R_c}{513}, \frac{R_c}{673} \right\} \quad (5.2)$$

5.1.2. Análisis de grieta curva

El primer análisis se plantea con la finalidad de elegir la definición de la base. El radio del dominio de extracción se selecciona como $R_{ext} = 0,2R_c$, que es lo suficientemente pequeño para disminuir el efecto de la curvatura y evitar regiones donde los LS estén mal construidos. Para definir α se usa la función rampa introducida en la Ec. (4.52). El dominio de extracción y la función q_i utilizada, magnifican los errores derivados de la definición de la base al recoger información de los elementos vecinos al frente de grieta. Para evitar otro tipo de influencias, en el análisis se utiliza únicamente la integral J .

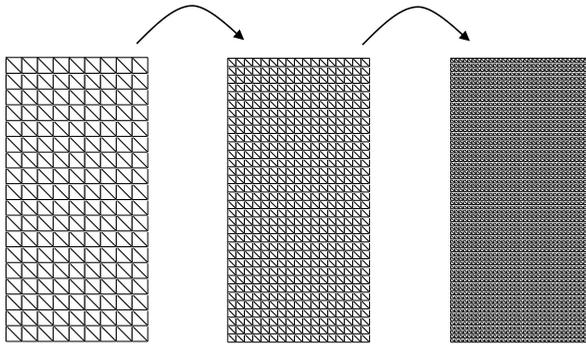


Figura 5.2. Esquema del proceso de refinamiento y creación de la secuencia de mallas.

Por una parte, la base es formulada siguiendo la definición de la Ec. (3.3), es decir, es construida de forma directa a partir de los LS. Por otra parte, se define una base ortogonal usando las consideraciones geométricas introducidas en la Ec. (3.5). Observando la Fig. 5.3 se deduce que con la base ortogonal se alcanza el valor óptimo de convergencia.

Una vez demostrado que la base ortogonal ofrece mejores resultados se puede abordar el estudio de la integral de interacción, para lo cual se emplea el mismo dominio de extracción, es decir α definida como una función rampa con $R_{ext} = 0,2R_c$.

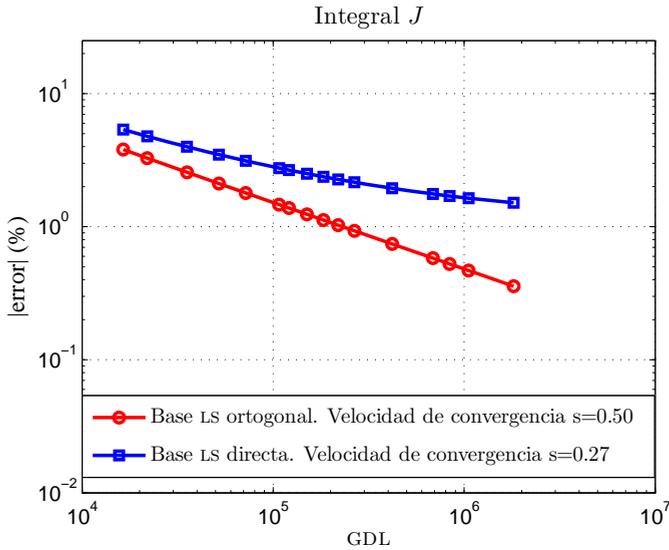


Figura 5.3. Estudio en la definición de la base local a partir de los LS. Estudio en la convergencia del error para la integral J .

Se consideran cinco casos, que incluyen todas las opciones definidas para la integral de interacción en grietas curvas. Se tienen en cuenta las situaciones donde en el término correspondiente a la energía, W^{aux} , se acepta la aproximación de la relación de reciprocidad y así se puede utilizar la expresión (4.20). Para esta definición se consideran las tres posibilidades para la construcción del campo de deformaciones auxiliares ε_{ij}^{aux} , es decir, a partir del campo de desplazamientos auxiliar como en la Ec. (4.24), a partir del campo de tensiones auxiliares, Ec. (4.24) o con un promediado entre ambas opciones, Ec. (4.35).

La otra situación se corresponde con no simplificar el término de energía W^{aux} —marcado explícitamente en las gráficas—, es decir usando la expresión (4.17). Los casos considerados para el campo de desplazamientos auxiliar son su obtención a partir de los desplazamientos, Ec. (4.24) o usando el promediado, Ec. (4.35). Los efectos en la velocidad de convergencia para K_I y para K_{II} pueden verse en la Fig. 5.4 y en la Fig. 5.5 respectivamente.

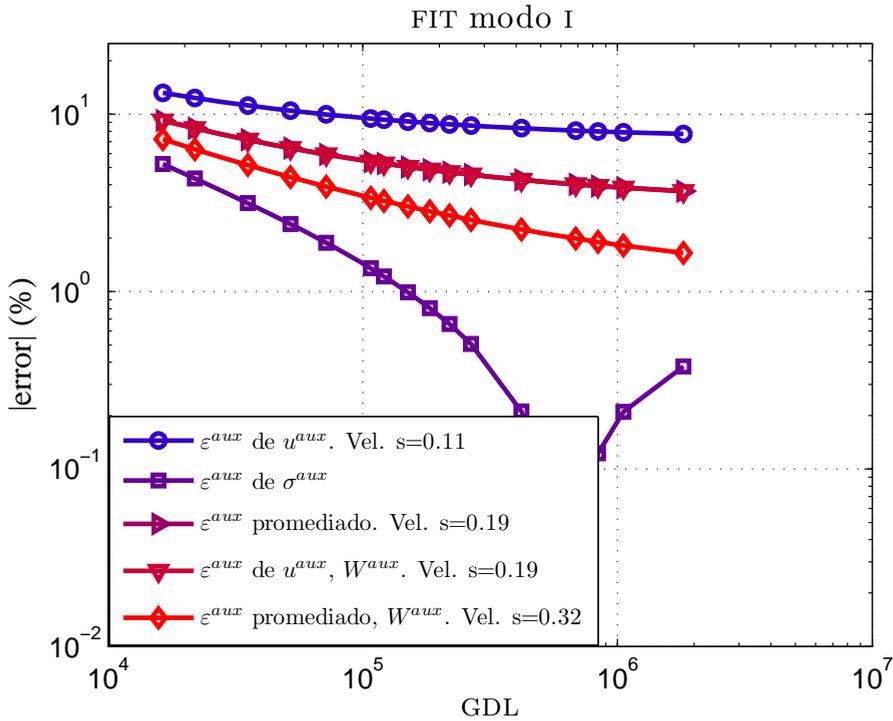


Figura 5.4. Resultados del estudio en velocidad de convergencia para las definiciones de la integral de interacción en grietas curvas. Convergencia en error para K_I .

La velocidad de convergencia óptima no se alcanza en ninguno de los estudios. Se puede observar que en el caso de obtener ε_{ij}^{aux} a partir de σ_{ij}^{aux} , se tiene mayor precisión en K_I , pero converge a otra solución, como lo demuestra el cambio brusco de pendiente. Este cambio de pendiente es debido al valor absoluto de errores negativos cuando se sobrepasa la solución de referencia. En el comportamiento de K_{II} no se pueden observar grandes diferencias.

El mejor comportamiento, según la Fig. 5.4 y la Fig. 5.5, se corresponde con el caso donde se usa el término de W^{aux} , no simplificado al no suponer la relación de reciprocidad, y además se utiliza ε_{ij}^{aux} calculado a partir del promedio entre sus posibles definiciones.

Este resultado es lógico ya que implica el menor número de suposiciones, al aceptarse la reciprocidad únicamente en el término asociado a $\partial_j P_{ij}^{aux}$ e imponiéndose un promedio de las condiciones de compatibilidad y de equilibrio interno con la expresión de ε_{ij}^{aux} dada por la Ec. (4.33). Se puede observar en la Fig. 5.4, que los resultados en los que se supone totalmente la relación de reciprocidad —es decir, aquellos no identificados mediante W^{aux} — en los términos apropiados de la integral de interacción muestran un comportamiento peor.

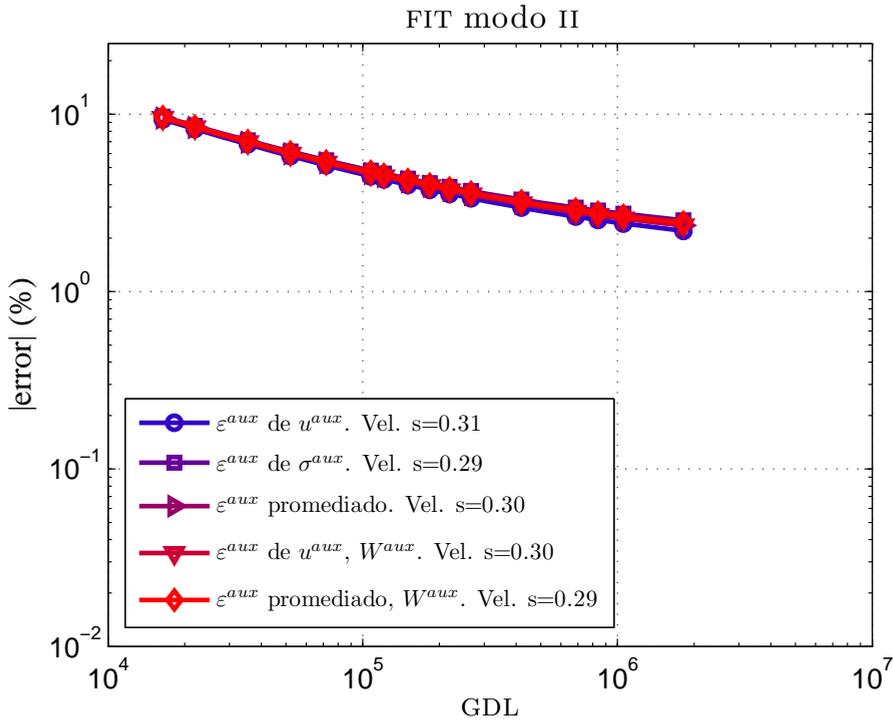


Figura 5.5. Resultados del estudio en velocidad de convergencia para las definiciones de la integral de interacción en grietas curvas. Convergencia en error para K_{II} .

Considerando la Fig. 5.5 hay que comentar que no es posible apreciar apenas diferencias en el comportamiento de K_{II} . Este fenómeno merecería un estudio más detallado que no ha sido abordado en esta tesis y se deja como trabajo a realizar en el futuro.

Una vez seleccionada la base y la expresión más adecuada para la integral de interacción, es posible abordar el análisis del efecto de la función usada para definir el dominio de extracción. La función α definida en la Ec. (4.51) incluye una región central con una pequeña *plateau* y una zona con rampa, definidas por dos radios R_{int} y R_{ext} . Si $R_{int} = 0$ se recupera la definición de la función rampa presentada en Ec. (4.52) y si $R_{int} = R_{ext}$ se tiene la función de *plateau* constante, Ec. (4.50), que implica la integración en un único anillo de elementos.

Se escoge un valor $R_{ext} = 0,4R_c$ y se hace variar la proporción $\frac{R_{int}}{R_{ext}}$. Este valor para el radio es elevado, lo cual hace difícil obtener un valor de convergencia óptimo, puesto que la aproximación de campos auxiliares de grieta recta está menos justificada cuanto más lejos se está del extremo de grieta, pero permite observar mejor las diferencias entre los diversas relaciones. Los efectos en la velocidad de convergencia de K_I , K_{II} y J pueden observarse en la Fig. 5.6 y el mínimo error obtenido en la secuencia de

mallas para cada caso de R_{int} en la Fig. 5.7. El uso de la función rampa, $R_{int} = 0$, produce una pérdida de precisión pero el mejor comportamiento en la convergencia, exactamente el óptimo para la integral J y el único caso con velocidad de convergencia positiva para la integral de interacción.

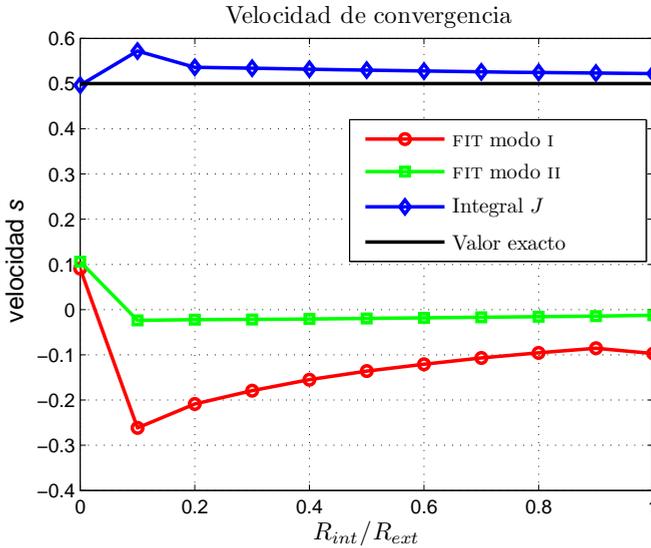


Figura 5.6. Resultados del estudio de convergencia para distintas relaciones $\frac{R_{int}}{R_{ext}}$ para definición del dominio de extracción.

Finalmente, se estudia el efecto del tamaño del dominio de extracción. El radio que define el tamaño del dominio de extracción, R_{ext} , se hace variar entre $0,01R_c$ y $0,9R_c$. Se utiliza la expresión de la integral de interacción que ha dado mejor resultado en los análisis anteriores y un α definido mediante la función rampa. La velocidad de convergencia respecto al radio de extracción para los FIT, calculados con la integral de interacción, y para J se presenta en la Fig. 5.8. El error mínimo alcanzado en cada estudio de convergencia realizado también se presenta en la Fig. 5.9.

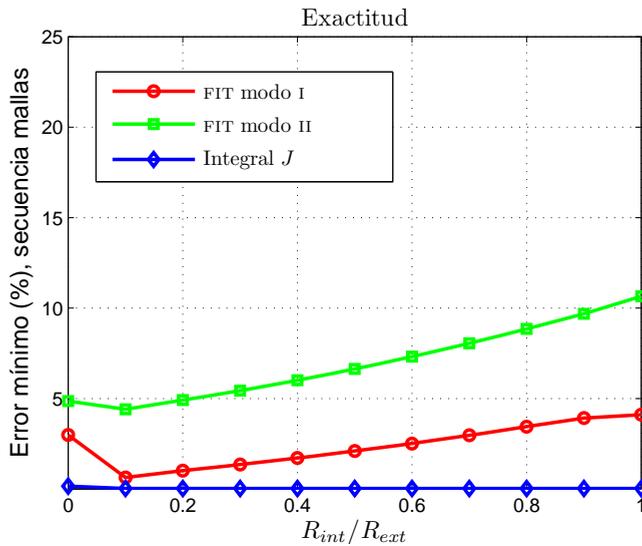


Figura 5.7. Mínimo error obtenido en los estudios de convergencia para distintas relaciones $\frac{R_{int}}{R_{ext}}$ para definición del dominio de extracción.

Observando los resultados se puede concluir que para alcanzar la velocidad de convergencia óptima se debe usar un dominio de extracción del mismo orden o inferior al 10% del radio de curvatura de la grieta. El coste de usar un radio de extracción pequeño es que conlleva emplear un mayor refinamiento para evitar integrar con poca información —lo que supondría una pérdida de precisión—. Este efecto se puede observar en las gráficas obtenidas. El resultado es totalmente lógico ya que el comportamiento asintótico es dominante en regiones cercanas al frente de grieta, anulando, debido a la proximidad, incluso los efectos de la curvatura, y por tanto en esa región se observa que los campos auxiliares utilizados —de grieta recta— son correctos.

Considerando detenidamente la Fig. 5.8 parece recomendable usar un radio de extracción que verifique $R_{ext} < 0,1R_c$. Considerando la Fig. 5.9 parece recomendable considerar un dominio de extracción con $R_{ext} \approx 0,2R_c$. La causa es que cuanto menor es el tamaño del dominio de extracción, en promedio más afectan los errores asociados al extremo de grieta y mayor refinamiento se necesita. Como conclusión global, parece recomendable tomar un dominio de extracción definido por $R_{ext} \approx 0,1R_c$ para tener tanto una buena velocidad de convergencia como un error suficientemente pequeño.

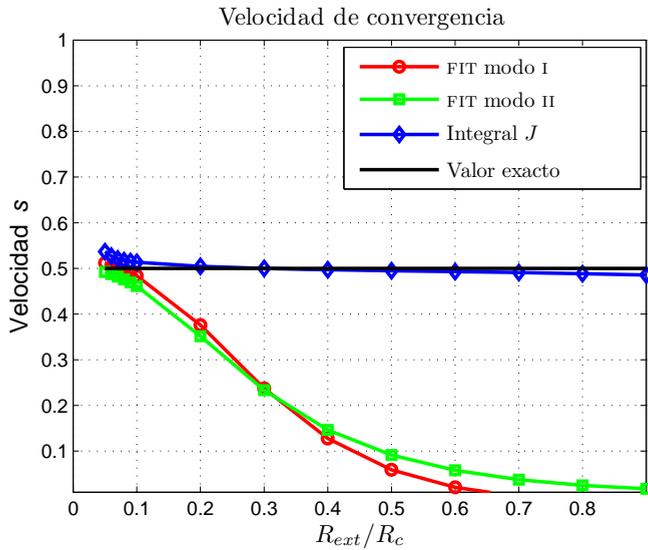


Figura 5.8. Velocidad de convergencia del error en los FIT y J para varios radios de extracción.

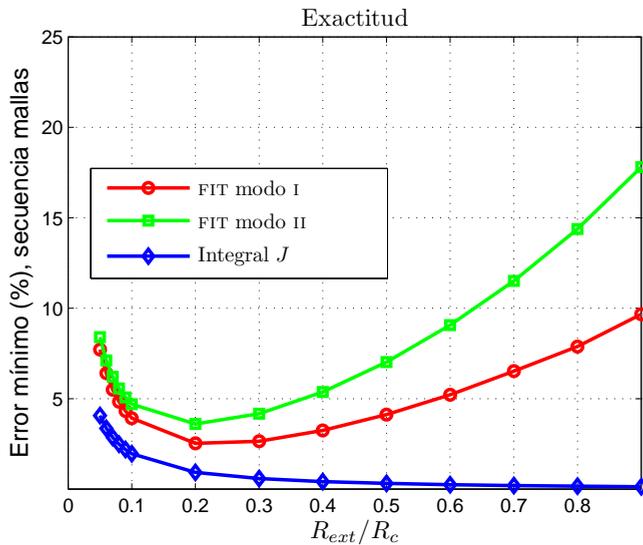


Figura 5.9. Resultados en el valor absoluto del mínimo error (%) alcanzado en los estudios de convergencia para varios radios de extracción de los FIT y J .

5.2. Ejemplos numéricos en 3-D

5.2.1. Problema de Westergaard

La convergencia de estudios bidimensionales ha sido exhaustivamente estudiada en grietas rectas en el XFEM, como por ejemplo en [115]. Sin embargo los análisis para casos tridimensionales son poco numerosos. Como consecuencia es necesario verificar la convergencia en grietas tridimensionales planas y de frente recto. Para ello se utiliza el problema de Westergaard, introducido en el apartado 3.3, extruido a lo largo de un espesor t . Para la integración numérica en el extremo de grieta se utiliza la integración «casi-polar» de Park descrita en [122] e introducida en la sección 3.2.4. El tamaño del dominio de la integración tridimensional viene dado por $R_q = 0,8a$, donde a es la longitud de la grieta, y S_q , que coincide con el tamaño del elemento usado — recordemos que S_q es el tamaño del dominio de extracción en dirección del frente de grieta, ver Fig. 4.9—.

Se estudian dos casos, uno en modo I puro, identificado con $K_I = 100$, y otro en modo II puro, con $K_{II} = 100$. Se presenta la distribución de los FIT, obtenidos con la integral de interacción y con la integral J , y también se estudia la velocidad de convergencia en error medio respecto al tamaño de elemento. Para ello se parte de una malla regular de hexaedros, considerando la siguiente secuencia de tamaño de mallas $h = (\frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{20}, \frac{1}{32}, \frac{1}{40}) a$.

La distribución de los resultados a lo largo del frente para K_I y J en el caso de modo I puro se puede observar en las Figs. 5.10 y 5.11, respectivamente. La velocidad de convergencia en error medio respecto a $\frac{1}{h}$ para el caso modo I para K_I y J se presenta respectivamente en las Figs. 5.12 y 5.13.

Para el problema con modo II puro se tiene la representación de resultados a lo largo del frente en las Figs. 5.14 y 5.15. La velocidad de convergencia del error respecto al tamaño de elemento se presenta en las Figs. 5.16 y 5.17.

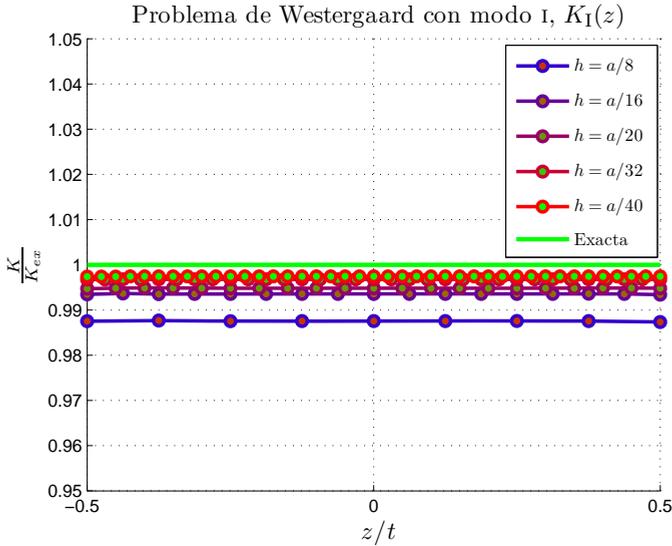


Figura 5.10. Resultados de K_I en el frente de grieta para el problema de Westergaard tridimensional en modo I puro. Integral de interacción.

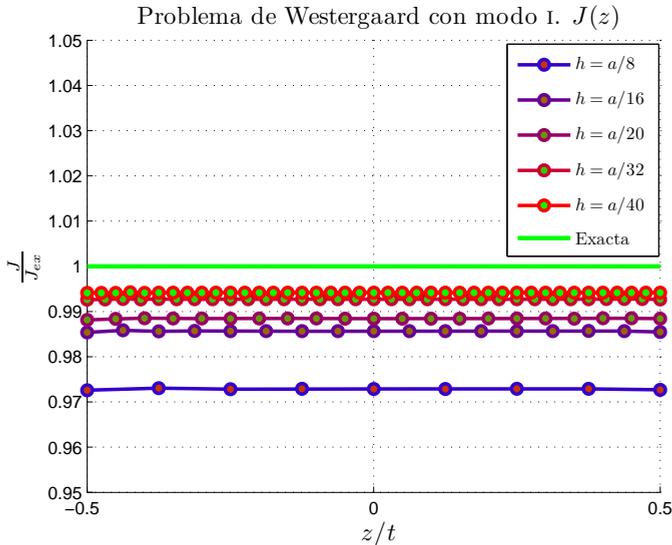


Figura 5.11. Resultados de J en el frente de grieta para el problema de Westergaard tridimensional en modo I puro.

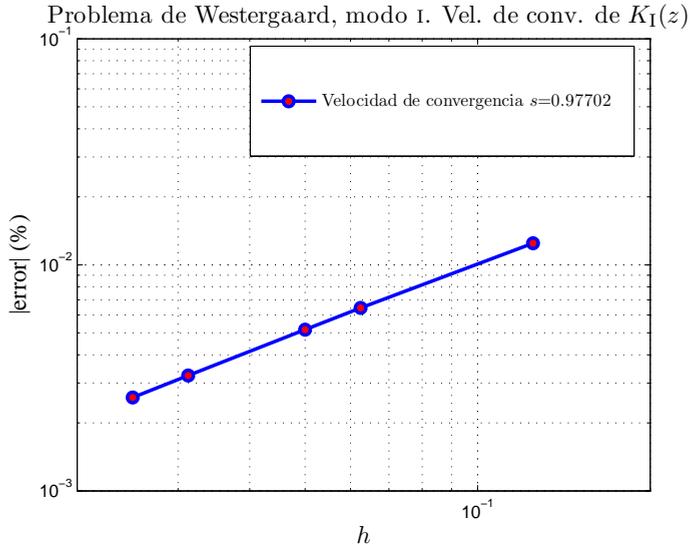


Figura 5.12. Error de K_I medio respecto a h para el problema de Westergaard tridimensional en modo I puro. Velocidad de convergencia.

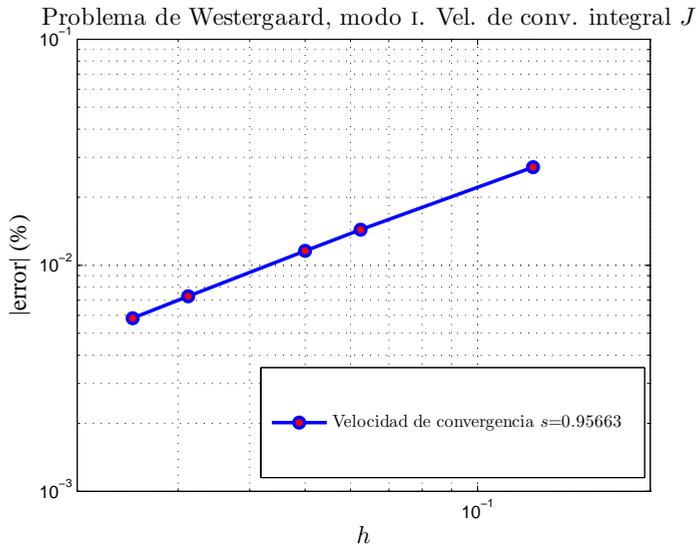


Figura 5.13. Error de J medio respecto a h para el problema de Westergaard tridimensional en modo I puro. Velocidad de convergencia.

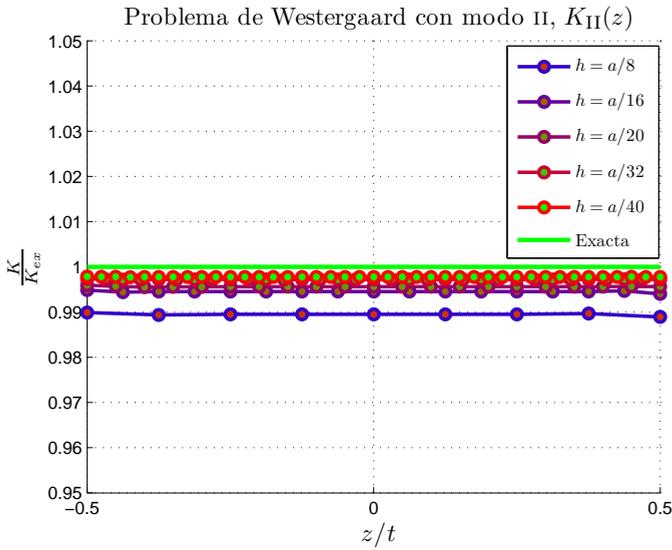


Figura 5.14. Resultados de K_{II} en el frente de grieta para el problema de Westergaard tridimensional en modo II puro.

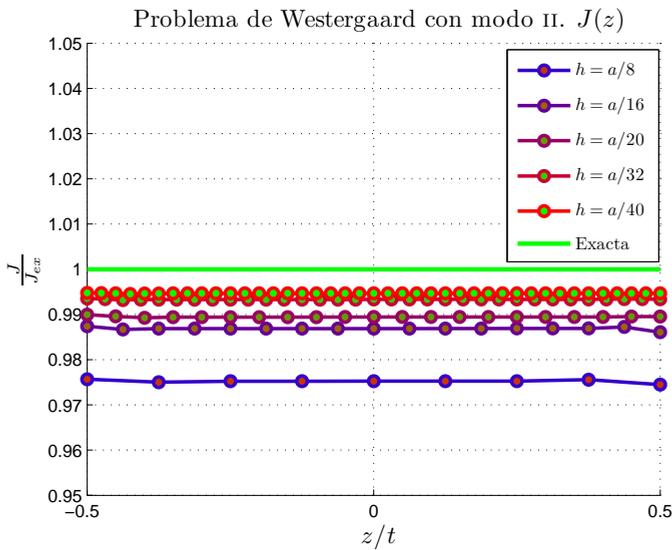


Figura 5.15. Resultados de J en el frente de grieta para el problema de Westergaard tridimensional en modo II puro.

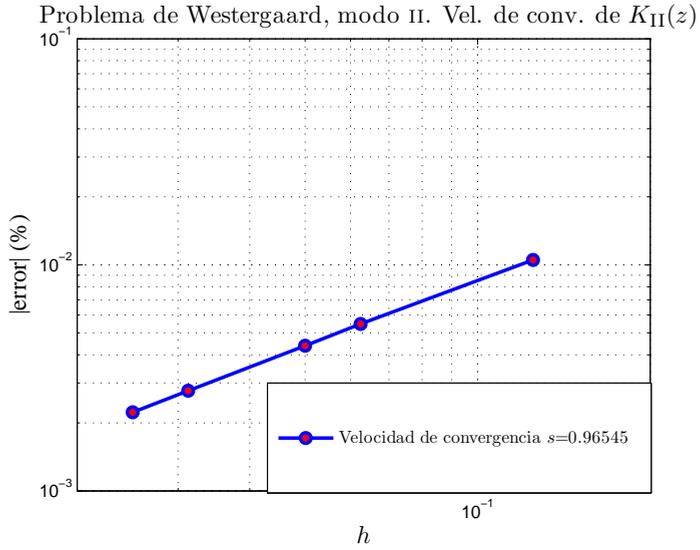


Figura 5.16. Error de K_{II} medio respecto a h para el problema de Westergaard tridimensional con modo II puro. Velocidad de convergencia.

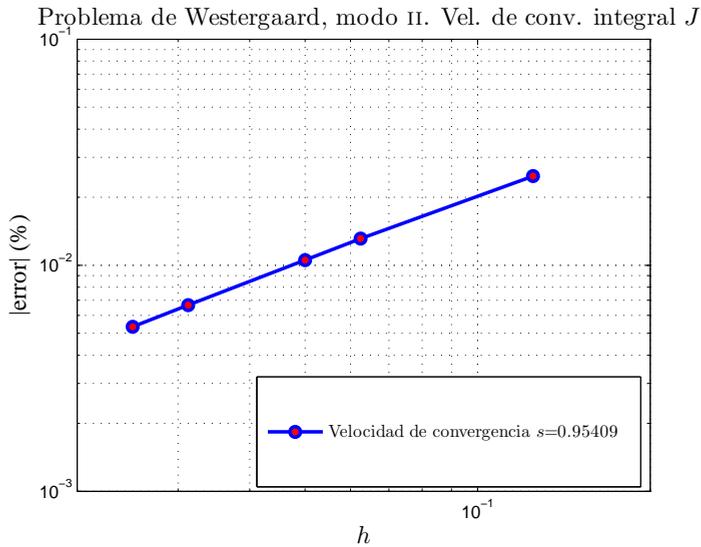


Figura 5.17. Error de J medio respecto a h para el problema de Westergaard tridimensional con modo II puro. Velocidad de convergencia.

El valor óptimo para la velocidad de convergencia del error es 1,0 y por tanto se aprecia un buen comportamiento tanto en la precisión de los FIT como en su comportamiento en la velocidad de convergencia. La implementación de las integrales de dominio utilizadas se corresponde con la formulación para grietas curvas, con lo se verifica que las imprecisiones debidas a los términos que no se anulan en grietas curvas, prácticamente desaparecen cuando se aplica sobre grietas planas y rectas.

5.2.2. Problema de grieta-arco

Una vez seleccionados los parámetros mediante el estudio bidimensional de la sección 5.1.1, y verificado el comportamiento de las integrales tridimensionales con una grieta plana, se realiza el estudio de una grieta arco plana en una placa infinita, que se corresponde con el caso extruido del modelo 2D considerado en el apartado 5.1.1, con espesor finito, $t = 1$. Se tiene un modelo que permite realizar un estudio de grieta no plana de frente recto que tiene solución exacta, problema que además también ha sido estudiado con MEF en [24]. En el análisis se utiliza una secuencia de mallas regulares con tamaño de elemento $h = (\frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{20}, \frac{1}{32}, \frac{1}{40}) R_c$, donde R_c es el radio de la grieta arco.

El primer objetivo consiste en confirmar las dimensiones del dominio de extracción. Dado que el frente de grieta sigue siendo paralelo a los lados de los elementos, se elige como tamaño de S_q el tamaño de elemento, que tiene concordancia con la forma de extraer los FIT a partir de las integrales de dominio.

El análisis del tamaño del dominio de extracción se realiza representando los valores calculados promediados en el frente para un radio de extracción que varía entre $R_q = 0,01R_c$ y $R_q = 1R_c$. Los resultados para K_I se pueden observar en la Fig. 5.18, para K_{II} en la Fig. 5.19 y para J en la Fig. 5.20. A falta de presentar los resultados de convergencia, las gráficas confirman las conclusiones obtenidas en dos dimensiones de que R_q debe ser del orden del diez por ciento del radio de curvatura.

La distribución de K_I , K_{II} y J a lo largo del frente de grieta para $R_q = 0,1R_c$ se puede observar, respectivamente, en las figuras 5.21, 5.22 y 5.23. Gosz en [24] obtiene para J un error mínimo relativo de 0,4% para un tamaño de elemento de $h = \frac{1}{500}R_c$. El mínimo error obtenido en los análisis aquí realizados es inferior al 0,7% para $h = \frac{1}{40}R_c$, resultado que demuestra la exactitud de la implementación y es un ejemplo claro de la precisión que se puede obtener con el XFEM.

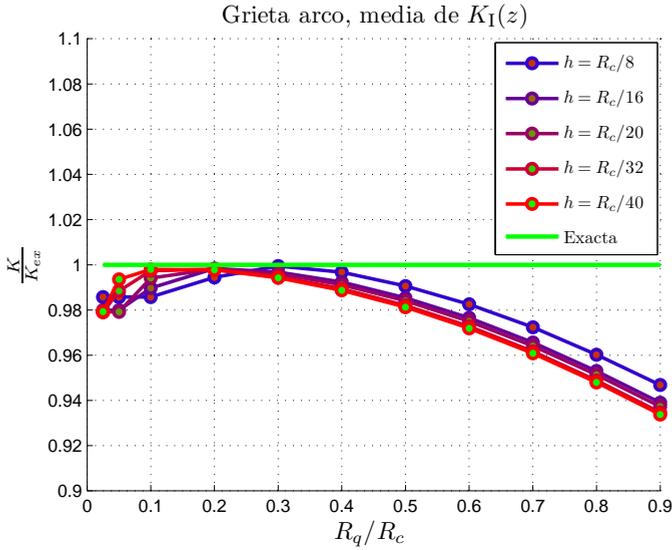


Figura 5.18. Valor medio normalizado de K_I a lo largo del frente de grieta respecto a R_q para el problema de grieta arco extruido en 3D.

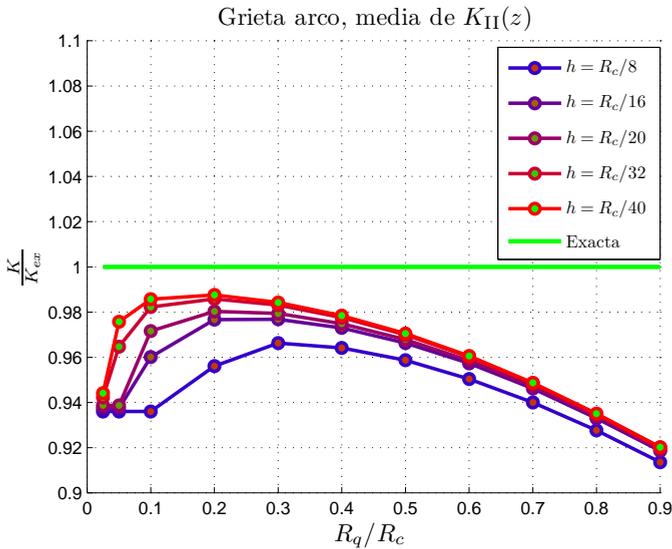


Figura 5.19. Valor medio normalizado de K_{II} a lo largo del frente de grieta respecto a R_q para el problema de grieta arco extruido en 3D.

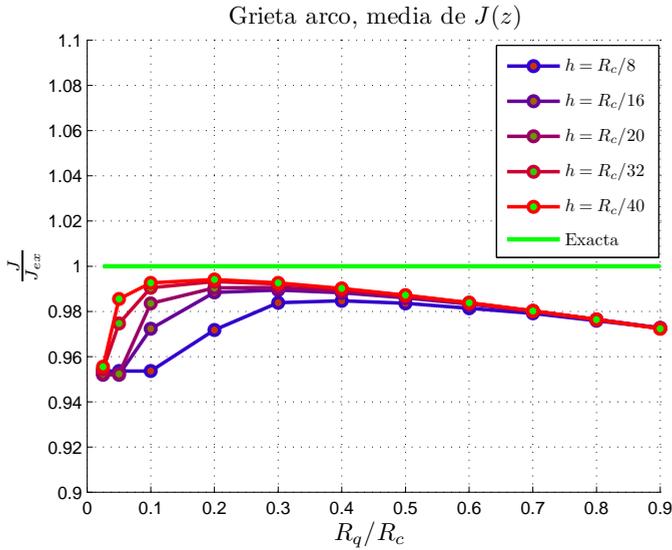


Figura 5.20. Valor medio normalizado de J a lo largo del frente de grieta respecto a R_q para el problema de grieta arco extruido en 3D.

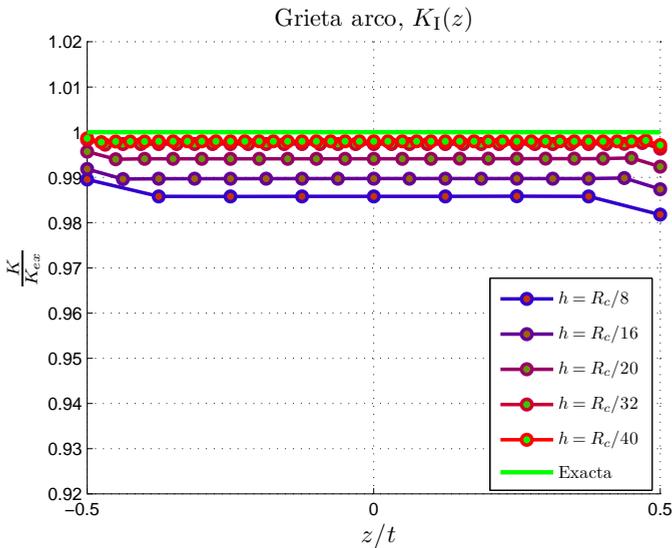


Figura 5.21. Distribución de K_I a lo largo del frente de grieta para el problema de grieta arco extruido en 3D.

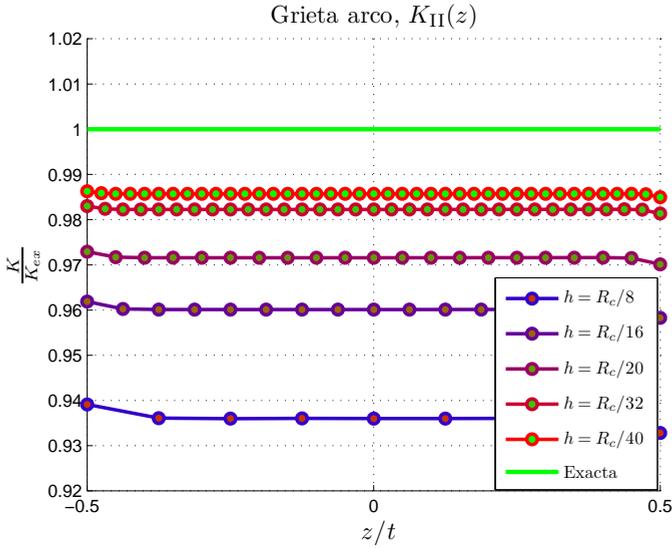


Figura 5.22. Distribución de K_{II} a lo largo del frente de grieta para el problema de grieta arco extruido en 3D.

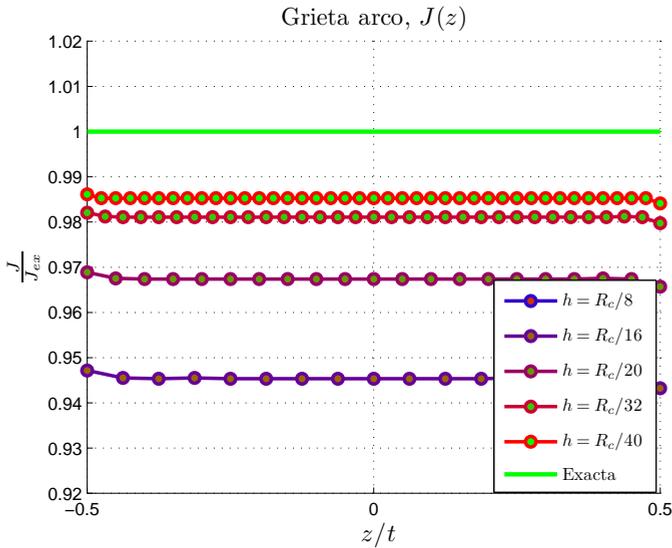


Figura 5.23. Distribución de J a lo largo del frente de grieta para el problema de grieta arco extruido en 3D.

Las velocidades de convergencia del error en K_I , K_{II} y J , frente a h , se presentan en la Fig. 5.25, en la Fig. 5.26 y en la Fig. 5.27 respectivamente. Teniendo en cuenta que el valor óptimo para la velocidad de convergencia es 1,0, se observa que los valores obtenidos son cercanos al óptimo aunque presentan alguna desviación.

La diferencia respecto al valor óptimo se puede atribuir a que al variar los dominios de extracción con la definición nodal de los LS, y por lo tanto depender su tamaño del tamaño de elemento en la malla, hay oscilaciones significativas en el volumen de extracción, como puede verse en la Fig. 5.24, y por tanto aparecen oscilaciones en la convergencia.

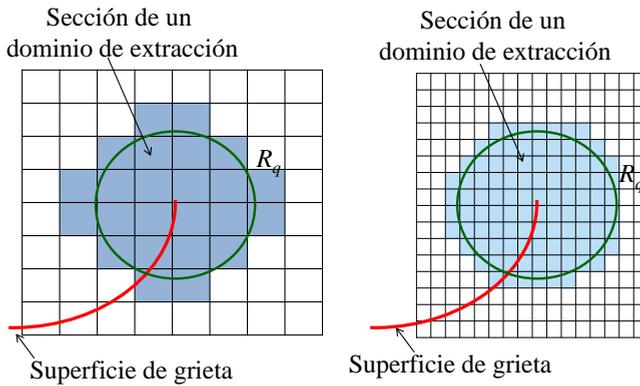


Figura 5.24. Oscilaciones en el radio de extracción, R_q , debido a la malla. Aparición de convexidades.

Finalmente en las figuras 5.28, 5.29 y 5.30 se representa, para el tamaño de elemento $h = \frac{1}{40}R_c$, el efecto de incluir o no los términos correspondientes a la formulación en coordenadas curvilíneas de los gradientes para K_I , K_{II} y J , respectivamente. Si se representa la distribución de K_I a lo largo del frente en la secuencia de mallas sin realizar la corrección asociada al uso de coordenadas curvilíneas, Fig. 5.31, se puede apreciar que no converge a la solución exacta. Por tanto, la inclusión del término de corrección debido a las coordenadas curvilíneas es imprescindible para obtener una convergencia hacia la solución mediante la integral de interacción en grietas no planas. El efecto de esta corrección apenas supone una mejora en los resultados en K_{II} , lo que motiva que el estudio de la diferencia en este comportamiento pueda ser considerado como un futuro trabajo de investigación.

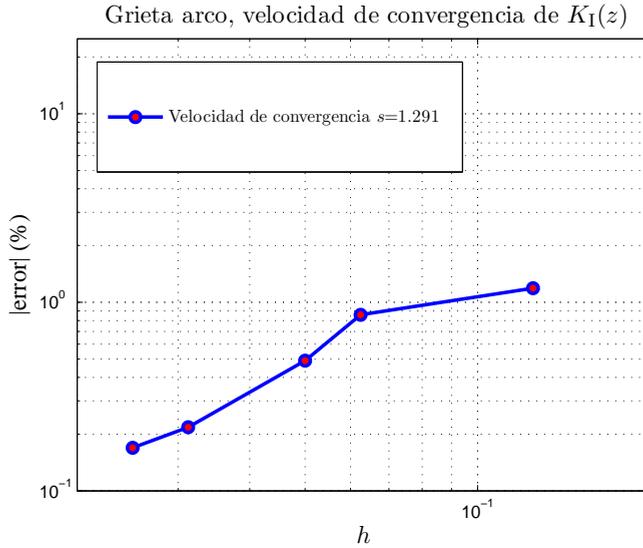


Figura 5.25. Resultados del estudio de convergencia de error medio para K_I en el problema de grieta arco extruido 3D.

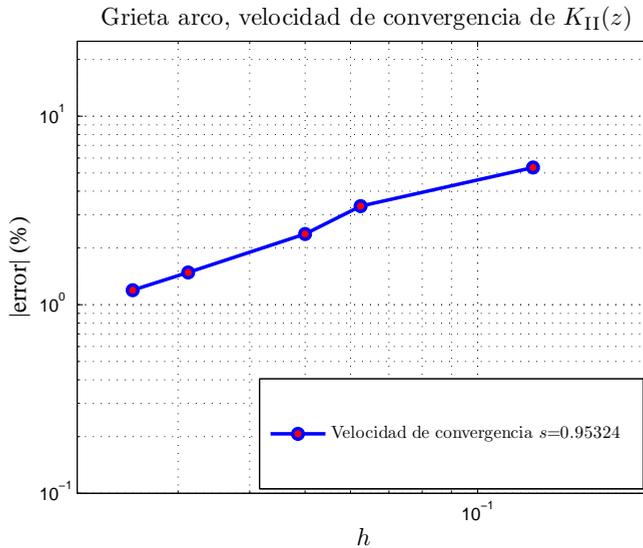


Figura 5.26. Resultados del estudio de convergencia de error medio para K_{II} en el problema de grieta arco extruido 3D.

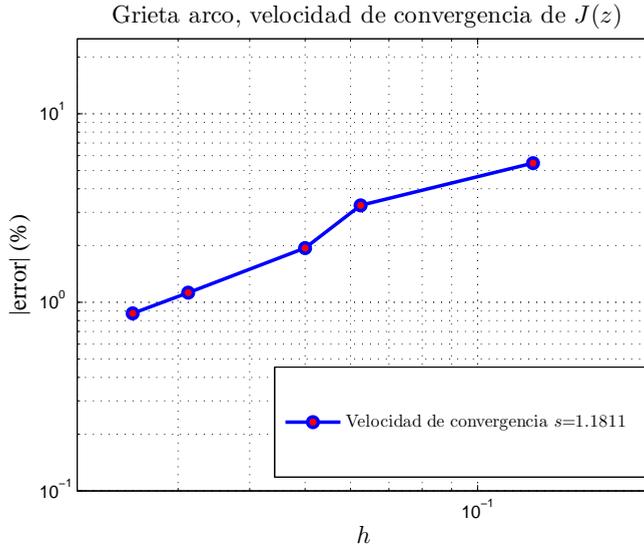


Figura 5.27. Resultados del estudio de convergencia de error medio para J en el problema de grieta arco extruido 3D.

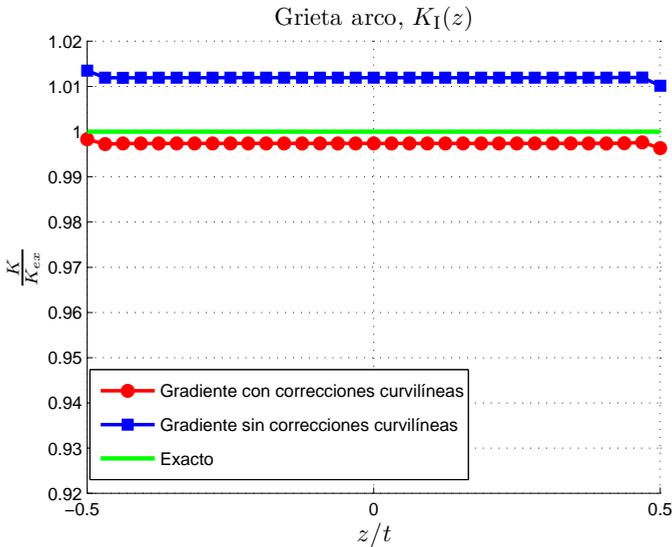


Figura 5.28. Estudio del efecto por la curvatura en los gradientes para la integral de interacción. K_I en el problema de grieta arco extruido 3D.

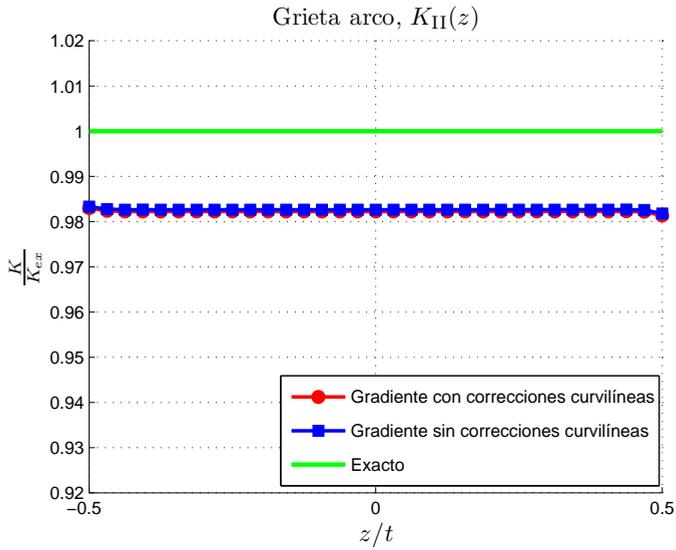


Figura 5.29. Estudio del efecto por la curvatura en los gradientes para la integral de interacción. K_{II} en el problema de grieta arco extruido 3D.

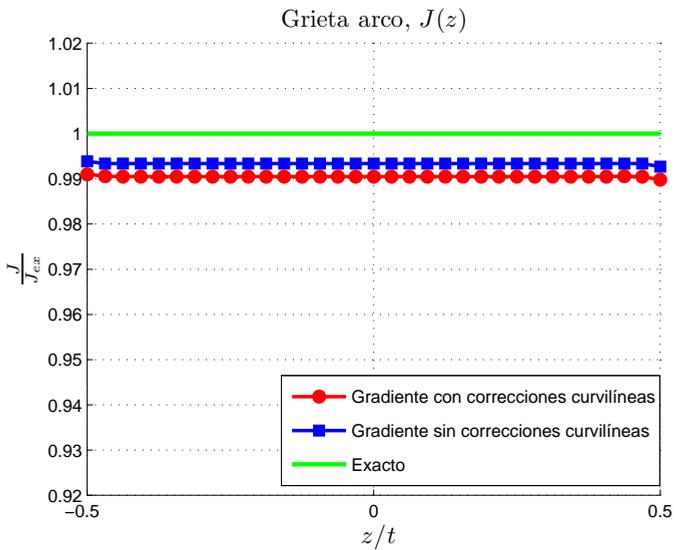


Figura 5.30. Estudio del efecto por la curvatura en los gradientes para la integral de dominio. J en el problema de grieta arco extruido 3D.

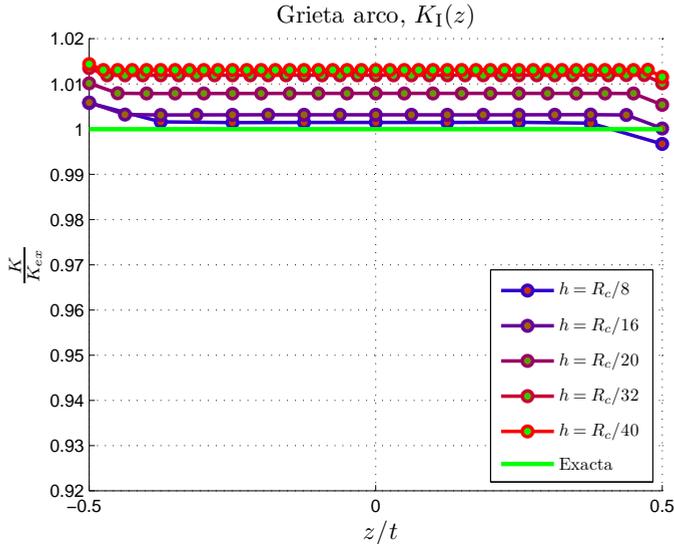


Figura 5.31. Distribución de K_I a lo largo del frente de grieta para el problema de grieta arco extruido 3D. No se incluye la corrección en los gradientes debido al uso de coordenadas curvilíneas.

5.2.3. Problema aproximado a grieta circular

Analizado el caso de una grieta no plana de frente recto, se va a estudiar una grieta plana que presente frente curvo. Se considera una grieta circular —*penny shape* en inglés— en un dominio infinito sometida a tensión remota constante. Esta tensión puede ser de tracción, σ_∞ , en dirección normal al plano de la grieta y que produce modo I puro, o de cortante, τ_∞ , que provoca modos II y III. Los valores exactos de los FIT para esta configuración de grieta aparecen en diversos tratados y artículos como [6, 15, 95, 145, 166, 167] y se reproducen a continuación:

$$\begin{aligned}
 K_I^{ex} &= 2\sigma_\infty (\pi a)^{\frac{1}{2}} \\
 K_{II}^{ex} &= 4\tau_\infty (\pi a)^{\frac{1}{2}} \frac{\text{sen}(\theta)}{(2-\nu)} \\
 K_{III}^{ex} &= 4\tau_\infty (\pi a)^{\frac{1}{2}} \frac{(1-\nu)\cos(\theta)}{(2-\nu)}
 \end{aligned} \tag{5.3}$$

La dimensión a coincide con el radio de la circunferencia. Un esquema de este problema puede verse en la Fig. 5.32. El modelado del problema se ha hecho mediante una placa de dimensiones $t = w = 20a$ y $h = 20a$, con $a = 1$, que aplicando condiciones de simetría representa la cuarta parte del espacio representado en la Fig. 5.33. Las condiciones de dominio infinito son aceptables por la proporción de las dimensiones características de la placa respecto a la dimensión característica de la grieta. Las propiedades que definen el material son $E = 10^4$ y $\nu = 0,3$.

Se utiliza una malla de hexaedros, regular en una zona de dimensiones $2a \times a \times a$ que incluye la grieta, tal como se muestra en la Fig. 5.33. Se usa una secuencia de mallas con tamaños de elemento $h = (\frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{20}) a$ en la zona regular.

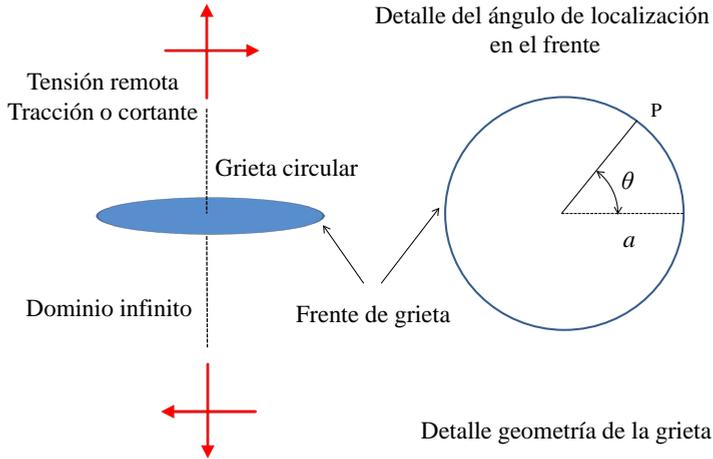


Figura 5.32. Esquema de la grieta circular en dominio infinito.

El tamaño del dominio de extracción se selecciona tomando $R_q = 0,1a$ y $S_q = 0,025a$, que se corresponden con un 10% del radio de curvatura de la circunferencia para R_q y una cantidad muy pequeña para S_q . Los resultados para el problema de tracción pura se muestran en la Fig. 5.34 para K_I y en la Fig. 5.35 para J . Para el problema de cortante los resultados se presentan en las figuras 5.36 y 5.37 para K_{II} y K_{III} respectivamente y en la Fig. 5.38 para J .

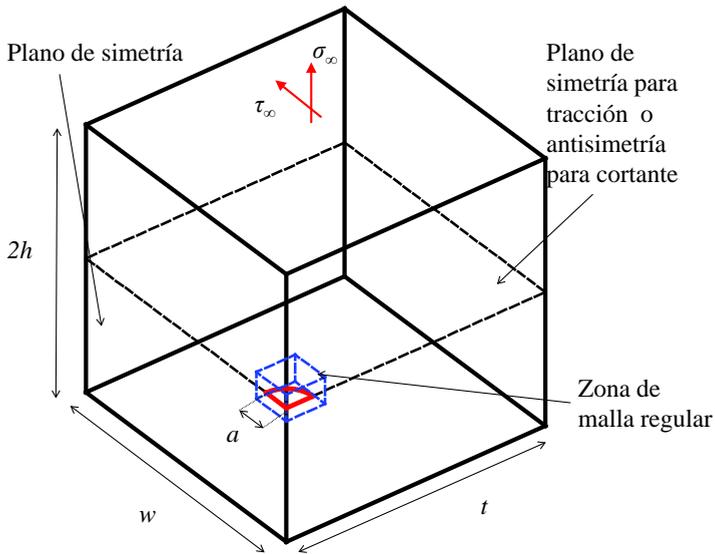


Figura 5.33. Esquema del modelo usado para simular la grieta circular en dominio infinito.

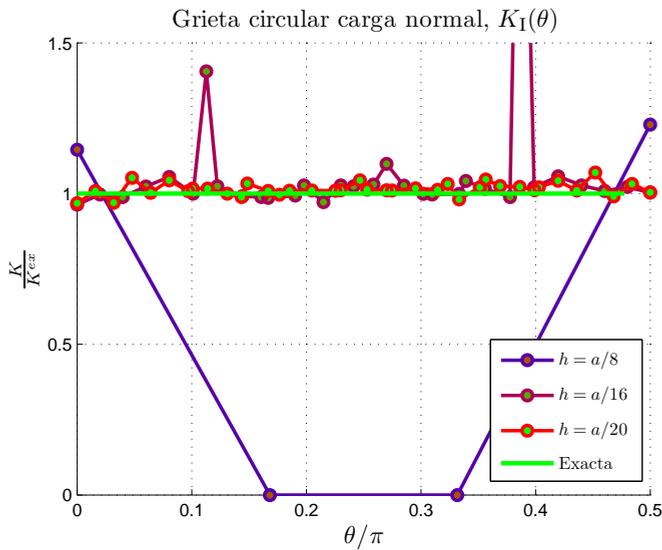


Figura 5.34. Resultados de la distribución de K_I a lo largo del frente en el problema de grieta circular bajo tracción remota.

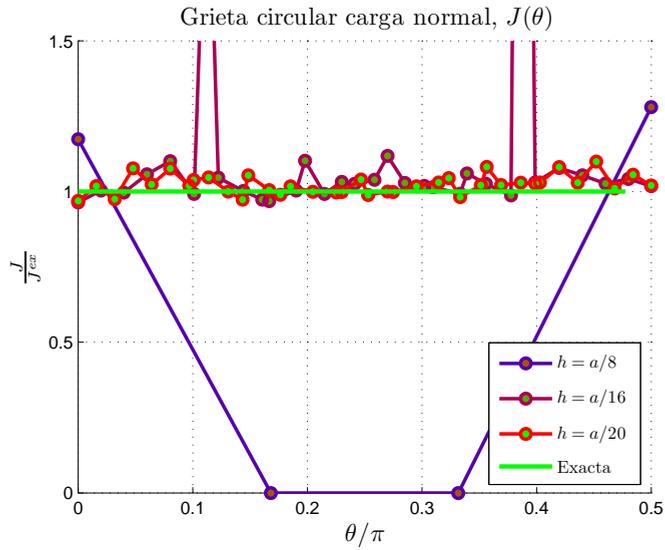


Figura 5.35. Resultados de la distribución de J a lo largo del frente en el problema de grieta circular bajo tracción remota.

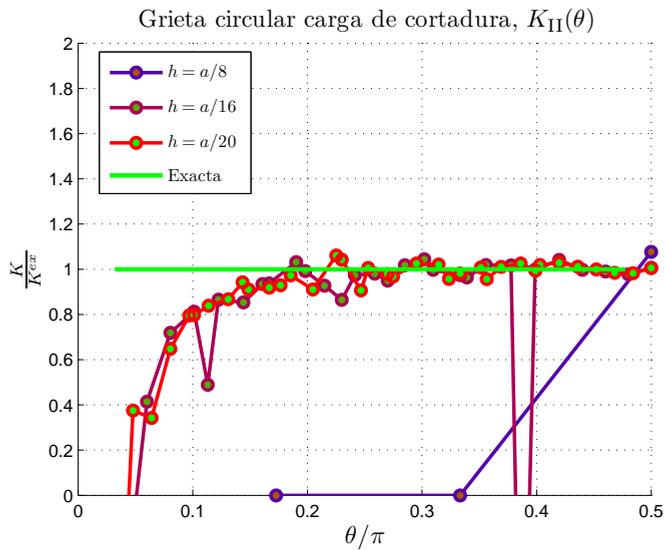


Figura 5.36. Resultados de la distribución K_{II} a lo largo del frente en el problema de grieta circular bajo cortante remoto.

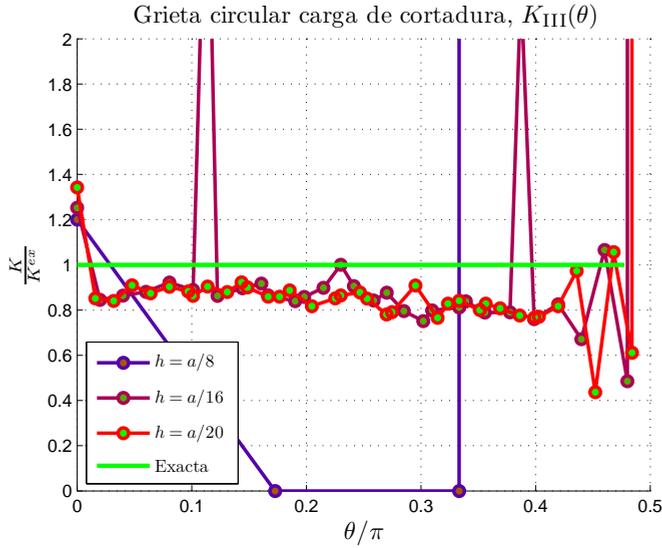


Figura 5.37. Resultados de la distribución K_{III} a lo largo del frente en el problema de grieta circular bajo cortante remoto.

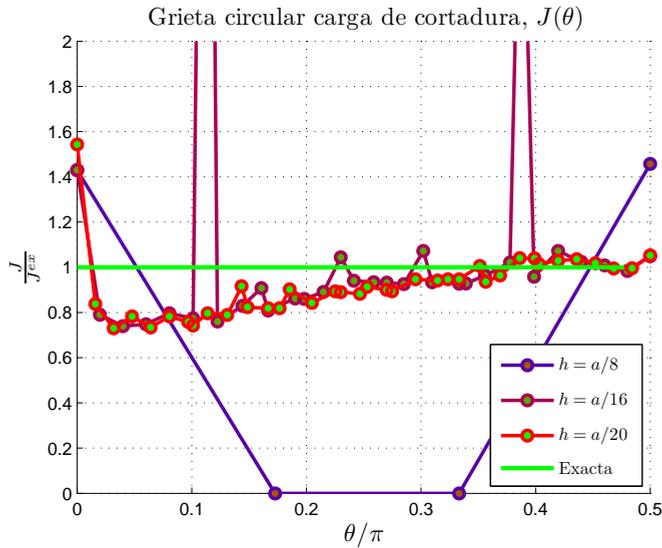


Figura 5.38. Resultados de la distribución J a lo largo del frente en el problema de grieta circular bajo cortante remoto.

De las Figs. 5.34, 5.35, 5.36, 5.37 y 5.38 podemos sacar varias conclusiones. Con la malla $h=a/8$ no es posible obtener resultados aceptables, lo cual se debe a que la malla es demasiado basta como para permitir el estudio de la grieta curva. En los resultados de la malla con tamaño de elemento $h=a/16$ aparecen unos picos debido a inconsistencias con el tamaño de S_q al cortar un frente de grieta curvo con una malla regular, que da lugar a segmentos muy pequeños. El comportamiento demuestra que cuanto más se refina la malla se alcanza más precisión. También hay que comentar que cuanto más cerca estamos del valor 0 para K_{II} y K_{III} , que coincide con regiones situadas cerca de la frontera, se consigue una solución con menor precisión.

No se ha realizado un estudio de convergencia ya que el modelo es aproximado. Además al no ser la malla paralela al frente de grieta, y calcularse el dominio de extracción a partir de valores nodales, aparecen oscilaciones en el tamaño y longitud de grieta considerada en cada punto P de cálculo de los FIT, que origina a su vez oscilaciones en el resultado, como se puede deducir de la Fig. 5.39, y que impide un estudio de convergencia consistente.

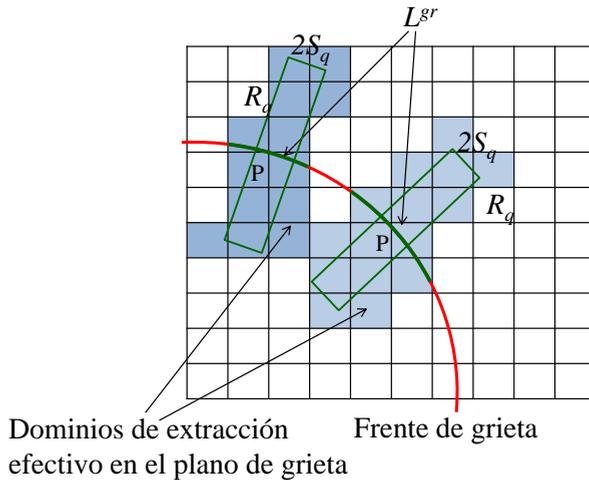


Figura 5.39. Oscilaciones del tamaño de extracción y longitud de grieta considerada debido a que la malla no es paralela al frente de grieta.

En la Fig. 5.39 se observa que el tamaño y forma de los dominios de extracción efectivos varían mucho dependiendo de la topología de la intersección del volumen teórico definido por R_q y S_q y la malla.

Se considera, ahora, el efecto a lo largo de frente de grieta de incluir o no los términos que aparecen en los gradientes correspondientes al uso de coordenadas curvilíneas, para lo que se representa la distribución de los FIT y J para el tamaño de elemento $h = \frac{1}{20}R_c$. Los resultados para el problema de tracción pura son Fig. 5.40 para K_I y Fig. 5.41 para J . Para el problema de cortante los resultados se presentan en la Fig. 5.42 para K_{II} , en la Fig. 5.43 para K_{III} y en la Fig. 5.44 para J . Nótese que no se aprecian diferencias significativas entre incluir el desarrollo para el gradiente en curvilíneas o no incluirlo, debido a que se trata de un ejemplo con grieta plana de frente de curvatura constante, en el ejemplo siguiente —grieta elíptica— se apreciará más su importancia. Además hay que tener en cuenta que los errores correspondientes a la discretización y a las oscilaciones de tamaño en los dominios de extracción efectivos son elevados.

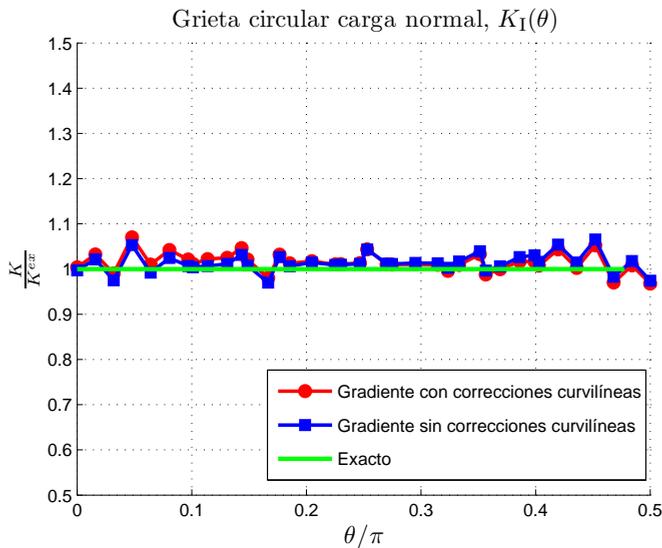


Figura 5.40. Resultados de la comparación entre incluir el ajuste para el gradiente en curvilíneas o no. Distribución de K_I a lo largo del frente en el problema de grieta circular bajo tracción remota.

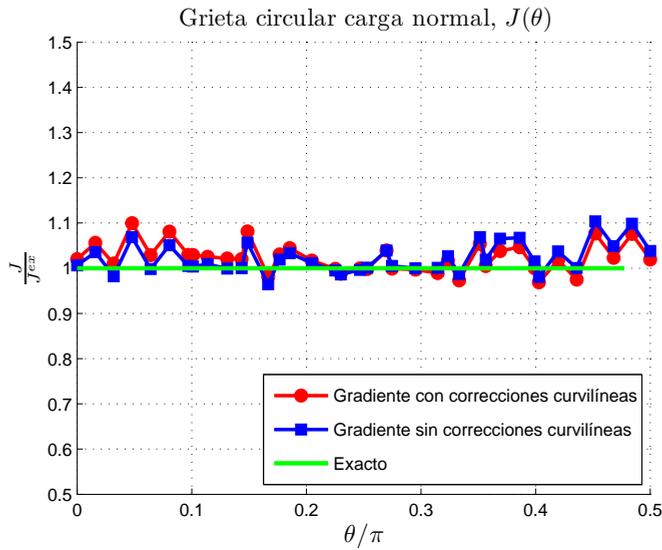


Figura 5.41. Resultados de la comparación entre incluir el ajuste para el gradiente en curvilíneas o no. Distribución de J a lo largo del frente en el problema de grieta circular bajo tracción remota.

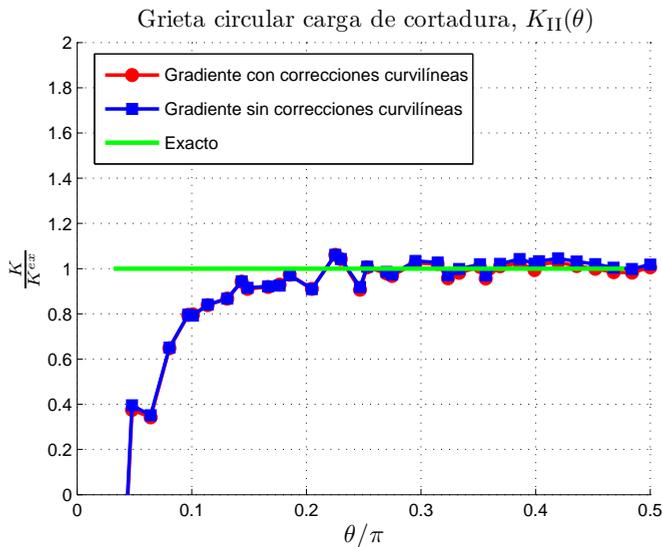


Figura 5.42. Resultados de la comparación entre incluir el ajuste para el gradiente en curvilíneas o no. Distribución de K_{II} a lo largo del frente en el problema de grieta circular bajo cortante remoto.

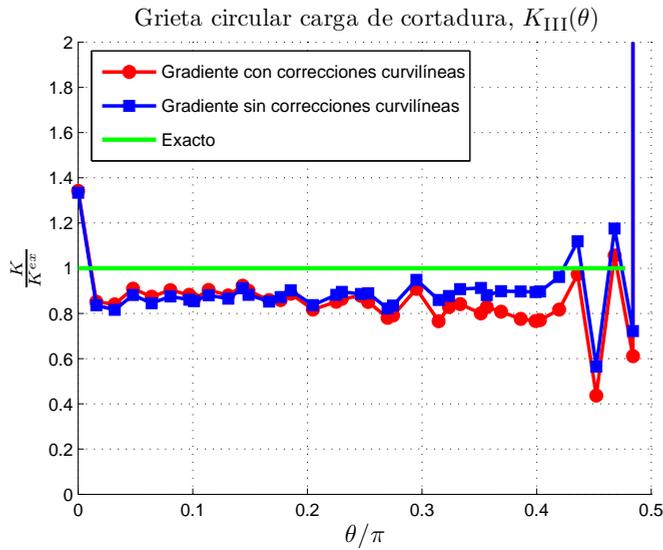


Figura 5.43. Resultados de la comparación entre incluir el ajuste para el gradiente en curvilíneas o no. Distribución de K_{III} a lo largo del frente en el problema de grieta circular bajo cortante remoto.

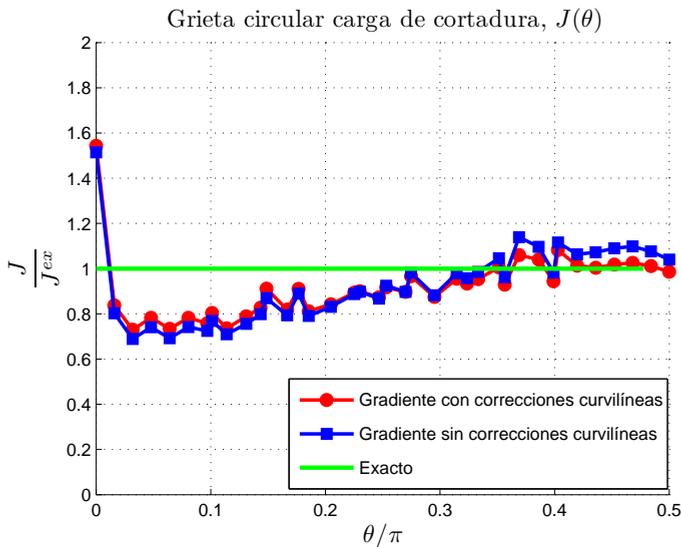


Figura 5.44. Resultados de la comparación entre incluir el ajuste para el gradiente en curvilíneas o no. Distribución de J a lo largo del frente en el problema de grieta circular bajo cortante remoto.

5.2.4. Problema aproximado a grieta elíptica

Tras abordar un caso en el que la curvatura a lo largo del frente de grieta es constante, a continuación se considera un caso que presenta variación en la curvatura del frente de grieta. El problema elegido se corresponde con una grieta elíptica en dominio infinito sometida a tensión constante. Esta tensión puede ser de tracción, σ_∞ , normal al plano de la grieta que produce modo I puro, o de cortante, τ_∞ , que provoca modos II y III. La geometría de la grieta y de las tensiones de carga se puede observar en la Fig.5.45.

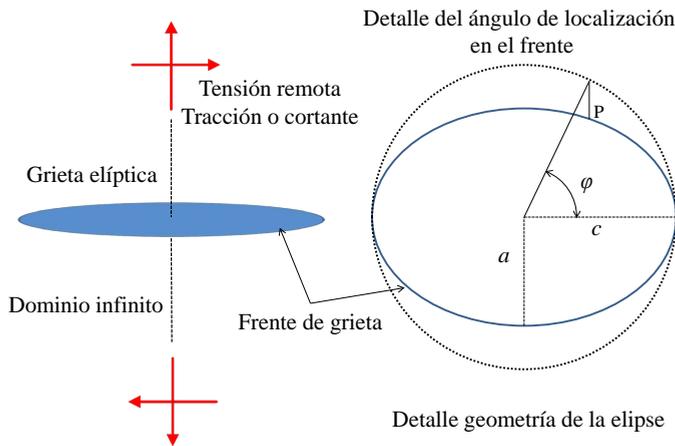


Figura 5.45. Esquema de la grieta elíptica en dominio infinito. Detalle de definición del ángulo φ .

Los valores exactos de los FIT para esta configuración, que aparecen en diversos manuales y artículos como [23, 50, 167–170], se reproducen a continuación:

$$\begin{aligned}
 K_I^{ex} &= \frac{\sigma_\infty}{E\{k\}} \left(\frac{\pi c}{a}\right)^{\frac{1}{2}} f(a, c, \varphi) \\
 K_{II}^{ex} &= \left(\frac{\pi a^3}{c}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{k^2 \tau_\infty \operatorname{sen} \varphi}{\left[(k^2 + \nu \acute{k}^2) E\{k\} + \acute{k}^2 K\{k\}\right] f(a, c, \varphi)} \\
 K_{III}^{ex} &= 4(\pi a c)^{\frac{1}{2}} \frac{-(1 - \nu) k^2 \tau_\infty \operatorname{cos} \varphi}{\left[(k^2 - \nu) E\{k\} + \nu \acute{k}^2 K\{k\}\right] f(a, c, \varphi)}
 \end{aligned} \tag{5.4}$$

donde

$$\begin{aligned}
 f(a, c, \varphi) &= (a^2 \sin^2 \varphi + c^2 \cos^2 \varphi)^{\frac{1}{4}} \\
 k &= \left(1 - \frac{a^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}} \\
 \acute{k} &= \frac{a}{c} \\
 E\{k\} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - k^2 \sin^2 \phi)^{\frac{1}{2}} d\phi \\
 \acute{E}\{k\} &= \frac{c}{a} E\{k\} \\
 K\{k\} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\phi}{(1 - k^2 \sin^2 \phi)^{\frac{1}{2}}}
 \end{aligned} \tag{5.5}$$

El modelo se realiza con una placa de dimensiones $t = 10a$, $w = 10c$ y $h = 10a$, que por condiciones de simetría, representa una cuarta parte del dominio. El modelo se acepta como infinito por la proporción de las dimensiones características de la placa respecto a las dimensiones características de la grieta. Las propiedades que definen el material son $E = 10^4$ y $\nu = 0,3$.

Se utiliza una malla de hexaedros, con estructura regular en una región de dimensiones $\frac{5c}{6} \times \frac{2c}{3} \times \frac{4c}{3}$, tal como se muestra en la Fig. 5.46. En el estudio se utiliza una secuencia de mallas que en la zona regular tiene tamaños de elemento $h = (\frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \frac{1}{24}) a$. El dominio de extracción se corresponde con las magnitudes $S_q = 0,033c$ y $R_q = 0,1c$, elección motivada por las dimensiones de la grieta y la geometría relativa entre malla y grieta.

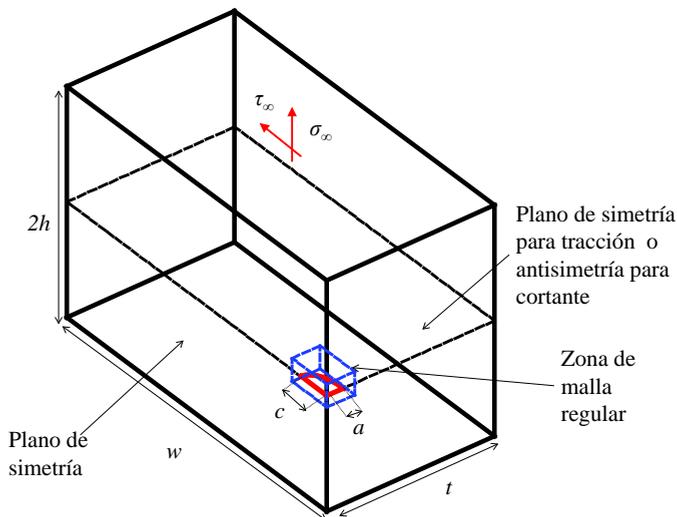


Figura 5.46. Esquema del modelo usado para simular la grieta elíptica en dominio infinito.

Los resultados para el problema de tracción pura se presentan en la Fig. 5.47 para K_I y en la Fig. 5.48 para J . Para el problema de cortante los resultados se presentan en la Fig. 5.49 para K_{II} , en la Fig. 5.50 para K_{III} y en la Fig. 5.51 para J . Se puede observar que, a pesar de las oscilaciones en el dominio de extracción, que se muestran en la Fig. 5.24 y en la Fig. 5.39, los resultados mejoran al refinar la malla. No obstante, se siguen observando oscilaciones en los resultados debido a lo irregular del dominio de extracción efectivo como ya se ha comentado anteriormente. Nótese que además la malla es más basta de lo recomendable en la zona de máxima curvatura, limitación que viene impuesta por los requerimientos computacionales.

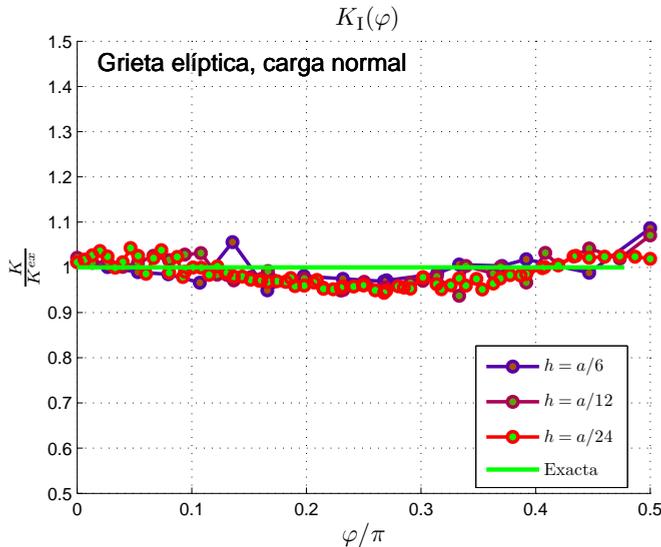


Figura 5.47. Evolución de K_I a lo largo del frente de grieta para distintos tamaños de elemento en el problema de grieta elíptica bajo tracción remota.

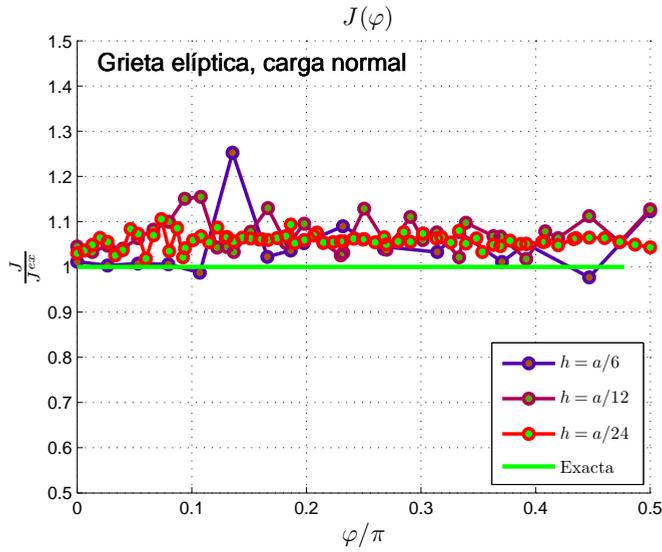


Figura 5.48. Evolución de J a lo largo del frente de grieta para distintos tamaños de elemento en el problema de grieta elíptica bajo tracción remota.

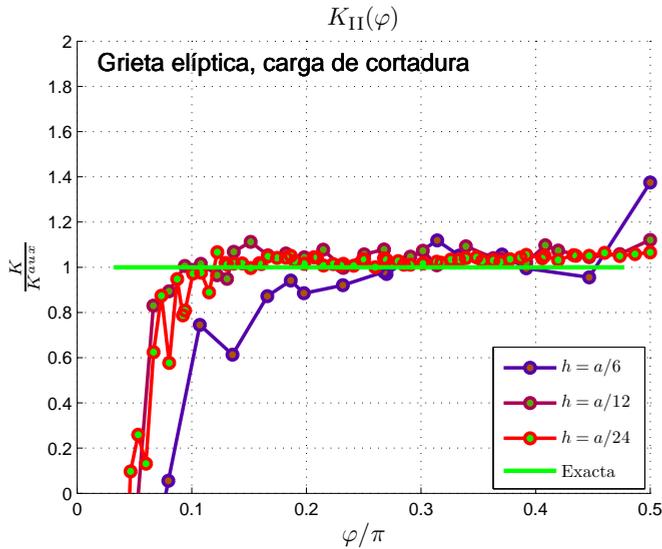


Figura 5.49. Evolución de los K_{II} a lo largo del frente de grieta para distintos tamaños de elemento en el problema de grieta elíptica bajo cortante remoto.

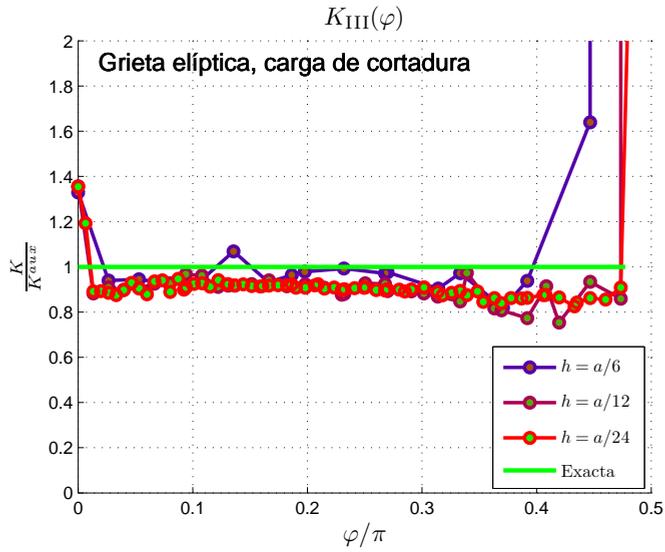


Figura 5.50. Evolución de los K_{III} a lo largo del frente de grieta para distintos tamaños de elemento en el problema de grieta elíptica bajo cortante remoto.

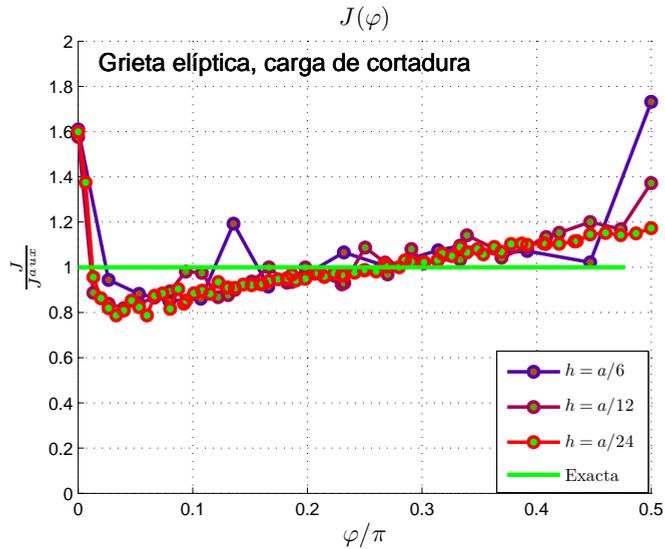


Figura 5.51. Evolución de J a lo largo del frente de grieta para distintos tamaños de elemento en el problema de grieta elíptica bajo cortante remoto.

La comparación entre los resultados obtenidos al utilizar o no el ajuste de coordenadas curvilíneas en los gradientes se presenta solo para la configuración con tamaño de elemento $h = \frac{a}{24}$. Los resultados para el problema de tracción pura son representados en la Fig. 5.52 para K_I y en la Fig. 5.53 para J . Para el problema de cortante los resultados se presentan en la Fig. 5.54 para K_{II} , en la Fig. 5.55 para K_{III} y en la Fig. 5.56 para J . Se puede apreciar claramente que la corrección mejora el comportamiento en zonas de menor curvatura. Los tamaños de elemento empleados, no permiten una descripción correcta de la zona con mayor curvatura. Por tanto se puede concluir, que es necesaria la introducción de los gradientes en coordenadas curvilíneas para poder capturar adecuadamente el efecto de las variaciones de curvatura. Como ya se ha comentado en la zona donde existe mayor curvatura la malla es demasiado basta para tener una descripción correcta. Si además el valor tiende a cero se aumenta el error cometido. Si junto a estas razones se considera que los cálculos en la zona de la frontera de la descripción tienen menos información para el cálculo numérico se entienden los resultados de la Fig. 5.54.

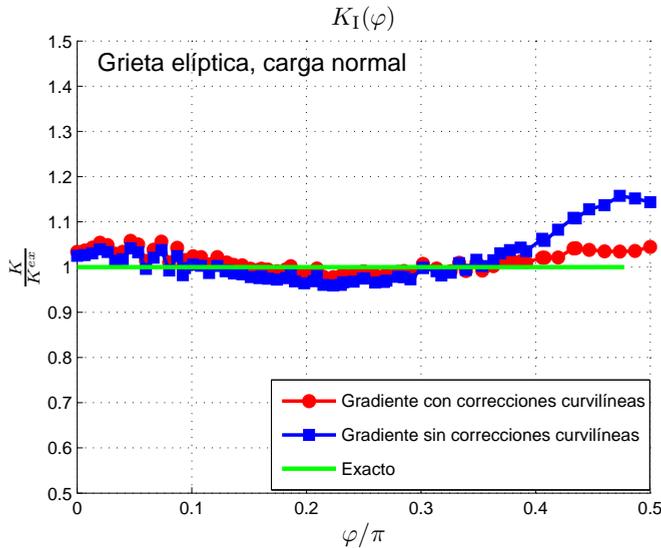


Figura 5.52. Resultados de la comparación entre incluir el ajuste para el gradiente en curvilíneas o no. Distribución de K_I a lo largo del frente en el problema de grieta elíptica bajo tracción remota.

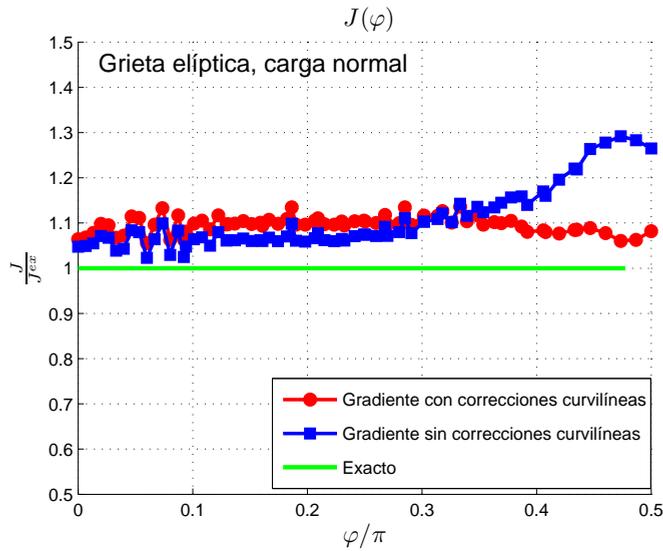


Figura 5.53. Resultados de la comparación entre incluir el ajuste para el gradiente en curvilíneas o no. Distribución de J a lo largo del frente en el problema de grieta elíptica bajo tracción remota.

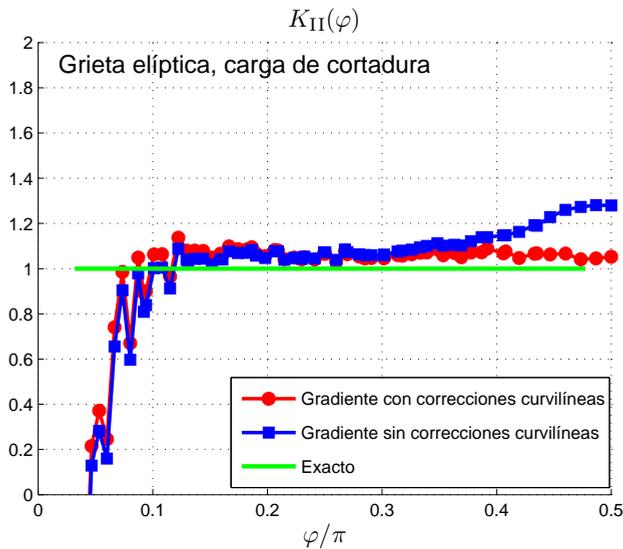


Figura 5.54. Resultados de la comparación entre incluir el ajuste para el gradiente en curvilíneas o no. Distribución de K_{II} a lo largo del frente en el problema de grieta elíptica bajo cortante remoto.

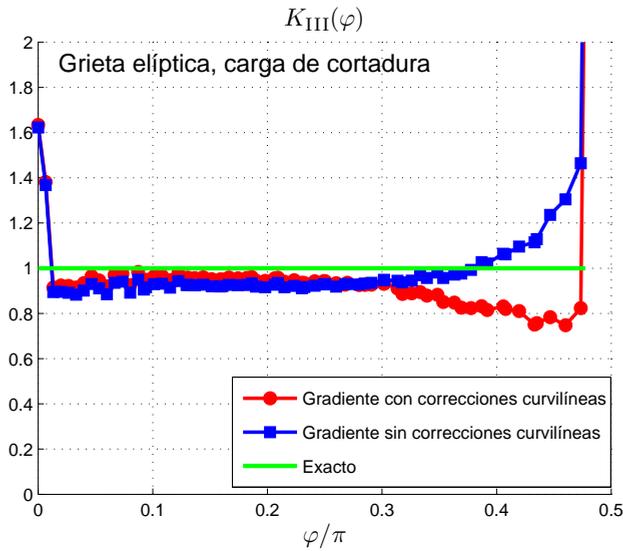


Figura 5.55. Resultados de la comparación entre usar el ajuste para el gradiente en curvilíneas o no. Distribución de K_{III} a lo largo del frente en el problema de grieta elíptica bajo cortante remoto.

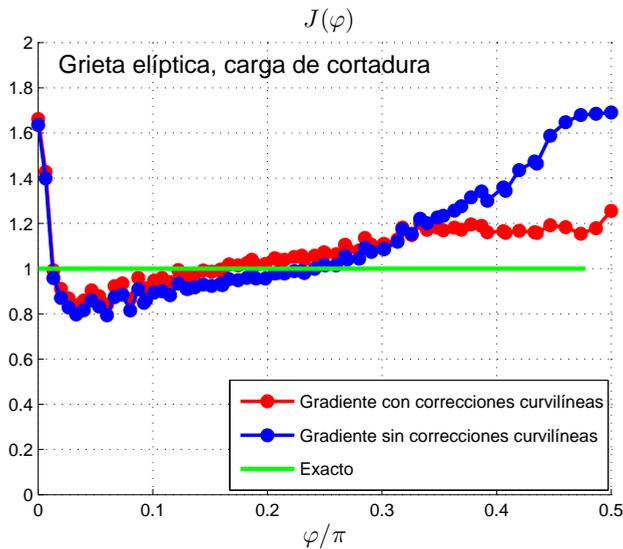


Figura 5.56. Resultados de la comparación entre incluir el ajuste para el gradiente en curvilíneas o no. Distribución de J a lo largo del frente en el problema de grieta elíptica bajo cortante remoto.

Una vez realizados los estudios numéricos es posible llegar a conclusiones sobre la bondad del método. En primer lugar, se consigue una mayor precisión tanto por las ventajas en la formulación de la integración, como por la utilización de funciones de enriquecimiento capaces de capturar gran parte del comportamiento singular presente. No obstante, también existe un gran número de inconvenientes, entre los que se pueden destacar los problemas que aparecen en la definición del dominio de extracción y la longitud irregular del tramo de frente calculado en las integraciones debido a la intersección de la malla regular con el frente de grieta. Hay que destacar también la menor velocidad de convergencia que exhibe el XFEM respecto al MEF. Uno de los problemas que impone limitaciones en el cálculo 3D es el peor acondicionamiento asociado al XFEM ya que impone limitaciones en los métodos iterativos para la resolución numérica del sistema de ecuaciones asociado. Aunque el uso de los LS se ha presentado como una ventaja, también tiene sus inconvenientes al ser necesarios métodos numéricos e iterativos para simular el crecimiento de grieta con esta descripción.

Capítulo 6

Singularidad de esquina

*Las ideas no duran mucho.
Hay que hacer algo con ellas.
Santiago Ramón y Cajal*

6.1. Motivación y antecedentes

En el estudio de las grietas tridimensionales se acepta la aproximación bidimensional de deformación plana, que es avalada por diversos trabajos, [8–10, 44–46, 171], en donde a través de diversos desarrollos se llega a expresiones analíticas equivalentes a las introducidas en el capítulo 2. Por tanto, el análisis tridimensional de grietas, utilizando conceptos de la teoría de MFEL, se realiza, aceptando las hipótesis del estado de tensión o deformación plana, al no disponerse de una aproximación mejor, a pesar de no verificarse para el estado tridimensional real, como se demuestra en [8, 9, 65].

Más aún, la singularidad asociada al frente de grieta no es el único tipo de comportamiento singular que sucede en la grieta tridimensional. Aparece otro tipo de singularidad en el campo de tensiones en la intersección de la grieta con una superficie libre, Fig. 6.1, singularidad que se conoce como *vertex* o de borde libre o singularidad de esquina. Uno de los efectos de esta singularidad es producir una reducción drástica de los valores calculados de K_I en problemas en modo I.

En mecánica de la fractura no existen muchos trabajos que presenten resultados teóricos sobre el estado tensional existente en el punto del *vertex*, siendo las formulaciones disponibles aplicables solo en casos particulares, como se puede ver en [8, 26, 172, 173]. También existen estudios experimentales para intentar obtener información del comportamiento de la singularidad de borde libre [174, 175].

Debido a la falta de resultados analíticos o experimentales que permitan el desarrollo de un modelo, la consideración de este efecto se suele realizar mediante métodos numéricos [51, 176–178], aunque lo habitual en los estudios prácticos es ignorar su existencia, al considerarse la región de influencia de esta singularidad muy pequeña en relación al efecto total de la grieta, [51, 176, 179]. Sin embargo, la presencia de la singularidad asociada al *vertex* modifica el comportamiento en fatiga, véase [179, 180],

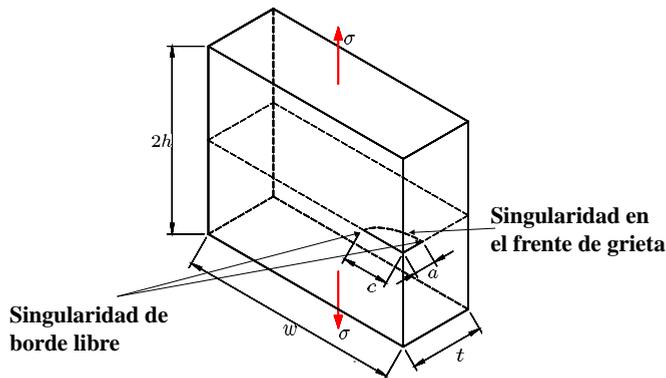


Figura 6.1. Ejemplo de configuración de grieta tridimensional donde se indica la intersección de borde libre.

con lo que, para realizar un estudio correcto, es necesario su introducción.

El XFEM se ha presentado como una técnica numérica que simplifica el estudio de problemas de la mecánica de la fractura. No obstante, cuando se utiliza el XFEM para estudiar una grieta en 3D que presenta singularidades de esquina, algunas de sus ventajas no están bien adaptadas a este problema, ya que las funciones de enriquecimiento del XFEM sólo describen la singularidad típica de grieta en 2D. Si se quiere realizar una descripción correcta del efecto en el *vertex*, hay que hacer algunas modificaciones en el enriquecimiento.

Suponiendo que el resultado de la singularidad puede aproximarse añadiendo nuevos términos de enriquecimiento como en [15], el desarrollo en XFEM puede considerarse como la suma del enriquecimiento que corresponde a la singularidad del frente de grieta y un nuevo conjunto de funciones que describe la singularidad de *vertex*. Sin embargo, no se dispone de una expresión analítica para construir estas funciones de enriquecimiento.

A continuación, se hace una breve descripción de las teorías más relevantes acerca de la singularidad de borde libre y se introduce un tipo de enriquecimiento genérico para intentar mejorar los análisis mediante el XFEM de problemas que presenten este tipo de singularidad.

6.2. Breve revisión de teorías sobre la singularidad de esquina

Sih, en [8], aborda el problema de la intersección del frente de grieta con una cara libre, para lo que parte de las ecuaciones de Hartranft, presentadas en [9]. Plantea el estudio de una placa finita que presenta la solución de la grieta bidimensional en estado de deformación plana en los puntos cercanos a la grieta, situados en el interior del sólido y consigue obtener una tendencia asintótica, pero sin poder resolver explíci-

tamente la dependencia en la coordenada x_3 —coordenada definida en la dirección 3 del sistema de referencia asociado al frente de grieta, véase Fig. 2.1—.

Este autor no consigue encontrar la solución en el borde libre, argumentando que es posible que los campos observados se deban a singularidades de orden mayor al de las originadas por el frente de grieta. Sih concluye que el efecto provocado en el borde libre se puede considerar como una variación en s —coordenada 3 a lo largo del frente de grieta— del factor de intensidad de tensiones e intenta reproducirlo mediante una función $f(\tau)$ que multiplica a los FIT, que vale cero en el borde libre, $f(\tau) = 0$, y uno en la zona totalmente dominada por la grieta, $f(\tau) = 1$, aunque no consigue obtener la forma analítica de dicha función, $f(\tau)$.

Uno de los primeros intentos para el análisis de la singularidad de esquina fue realizado por Folias en [172, 181, 182], donde, partiendo de las ecuaciones de Navier para una grieta plana en una placa y usando transformaciones integrales de Fourier, llega a un resultado para el comportamiento singular en el *vertex* para lo cual considera un sistema de referencia esférico centrado en el punto de intersección con el borde libre tal como se muestra en la Fig. 6.2. La expresión que obtiene es:

$$\sigma_{ij} = \rho^{-(\frac{1}{2}+2\nu)} f_{ij}(\theta, \phi) \quad (6.1)$$

donde ρ , θ y ϕ son las coordenadas en el sistema de referencia esférico local, ν es el coeficiente de Poisson, y $f_{ij}(\theta, \phi)$ es una función que indica la dependencia angular de la singularidad, a la que se le supone un comportamiento esférico.

Esta expresión originó cierta controversia, ya que su interpretación directa provoca estados que no tienen sentido físico, como valores infinitos asociados al campo de desplazamientos para el caso límite. Tal y como el autor matiza en [181], el término singular, es decir $-(\frac{1}{2} + 2\nu)$, debe considerarse como límite asintótico.

Benthem [26] considera el problema analítico de una grieta infinita y una superficie libre, ortogonales entre sí. Todo el estudio se realiza en coordenadas esféricas centradas en el punto de intersección entre la grieta y la cara. El autor sugiere que los estados tensionales presentes en dicho punto son de la forma:

$$\sigma_{ij} = \rho^{-\lambda} f_{ij}(\lambda; \theta, \phi) \quad (6.2)$$

Esta expresión tiene valores de tensión nula en las caras de grieta y en la superficie libre. Además, por motivos energéticos, se tiene que el orden de singularidad debe cumplir la restricción adicional de $-\lambda > -\frac{3}{2}$.

Para verificar los resultados utiliza las funciones de Boussinesq-Papkovich-Neuber —funciones que son solución de las ecuaciones de Navier-Cauchy y se forman a partir de funciones armónicas—. Intenta resolver, en primer lugar, las ecuaciones con las condiciones de contorno utilizando el método de separación de variables, pero encuentra que ningún valor de λ crea una solución correcta —aparte de las triviales que no son solución del problema de la singularidad en borde libre y de grieta—. Después, intenta llegar a la solución con una combinación infinita de términos, para lo cual debe resolver, mediante truncamientos, un determinante infinito. Sin embargo, el sistema no converge a una solución.

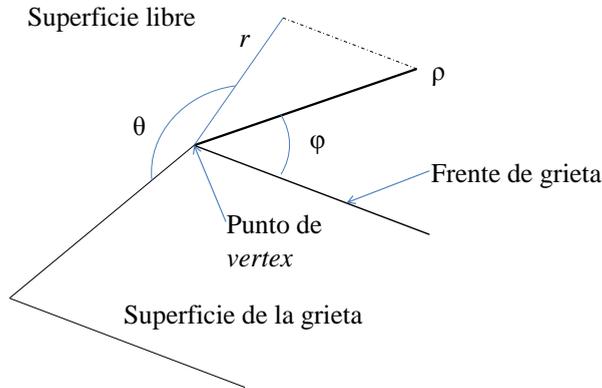


Figura 6.2. Sistema esférico de coordenadas definido en el punto de intersección de la grieta con la superficie libre.

Para resolver el problema, tras el fallo de la convergencia por el proceso del truncamiento del determinante, usa el «método de resonancias». Para dicha técnica necesita introducir nuevos GDL, que se requieren para reproducir las condiciones de contorno. Para incluir estos nuevos GDL adicionales emplea funciones solución que habían sido desechadas en el método de separación de variables. Estas funciones introducen tensiones en la cara de grietas que hay que eliminar, para lo que introduce una tensión virtual puntual en el punto de intersección de grieta y superficie libre.

Finalmente, se tiene que, según su desarrollo, la solución para las tensiones es la propuesta en la Ec. (6.2). En esta relación el término $f_{ij}(\lambda; \theta, \phi)$ corresponde a una serie infinita sin expresión analítica genérica. Además $f_{ij}(\lambda; \theta, \phi)$ y λ dependen de ν , es decir, del coeficiente de Poisson. La dependencia de λ con ν se presenta en el Cuad. 6.1.

Con estos resultados el campo de desplazamientos es de la forma:

ν	$-\lambda$
0,0	-0,5
0,15	-0,4836
0,3	-0,4523
0,4	-0,4132
0,5	-0,3318

Cuadro 6.1. Valores de λ . Orden de singularidad de esquina dependiente del coeficiente de Poisson ν .

$$u_i = \rho^{-\lambda+1} g_i(\lambda; \theta, \phi) \quad (6.3)$$

A pesar de estos resultados, el orden de la singularidad no acaba de ser aceptado aunque estudios posteriores parecen demostrar que es el correcto. Así Becker en [183] hace un ajuste por mínimos cuadrados para calcular un valor para el orden de singularidad de borde libre —en el campo de tensiones—, obteniendo $-\lambda = -0,40 \pm 0,02$.

Zhu en [173] utiliza un sistema de coordenadas curvilíneas ortogonales propias de la grieta —sistema que coincide totalmente con el sistema de coordenadas que se construye a partir de la representación mediante los LS—. A partir de este sistema de coordenadas, define los otros sistemas de coordenadas que necesita en los cálculos. Estos sistemas son equivalentes al sistema coordenado esférico (ρ, θ, ϕ) y al sistema coordenado cilíndrico, (r, θ, t) . Emplea t , en lugar de la expresión habitual z , para mostrar explícitamente que el origen está en el borde libre y el carácter local del sistema de referencia.

El artículo comienza haciendo un breve estudio comparativo entre la grieta tridimensional y las grietas bidimensionales, concluyendo que, bajo ciertas hipótesis, los puntos cercanos al frente de grieta de una grieta tridimensional tienen un estado que se corresponde con una grieta bidimensional bajo deformación plana. Las hipótesis que deben cumplir estos puntos, P, de la grieta son:

- El frente de grieta no tiene que tener discontinuidades en P.
- El material no tiene que presentar discontinuidades en sus propiedades en P.
- La superficie de grieta en el punto P no debe presentar tensiones singulares de orden $r^{1/2}$.

Para evaluar el problema de la singularidad en el punto P^+ , que corresponde a la intersección de la grieta con una cara libre —ortogonales entre sí—, considera que el comportamiento físico puede descomponerse en la superposición de dos estados: uno que corresponde a una grieta infinita y otro que coincide con el caso de cara libre sin grieta. En el segundo estado se aplica un valor de tensión puntual, en P^+ , que recupera las condiciones del estado original.

Así obtiene un resultado para modo I en el punto P^+ . La solución que obtiene da lugar a las expresiones para las tensiones de la Ec. (6.4) y para los desplazamientos de la Ec. (6.5). Los términos que no aparecen explícitamente en la Ec. (6.5) y en la Ec. (6.4) no sufren modificaciones respecto a los campos asintóticos del frente de grieta en coordenadas cilíndricas locales. La solución, similar a la solución asintótica de la fisura, tiene el orden de singularidad del frente de grieta, es decir $r^{-1/2}$.

$$\begin{aligned}
\sigma_{rr} &= \frac{K_I(t)}{\sqrt{2\pi r}} \left[\frac{1}{4} (5 - 3\nu - 10\nu^2) \cos \frac{\theta}{2} - \frac{1}{4} (1 + \nu - 2\nu^2) \cos \frac{3\theta}{2} \right] \\
\sigma_{\theta\theta} &= \frac{K_I(t)}{\sqrt{2\pi r}} \left[\frac{1}{4} (3 - 5\nu - 6\nu^2) \cos \frac{\theta}{2} + \frac{1}{4} (1 + \nu - 2\nu^2) \cos \frac{3\theta}{2} \right] \\
\sigma_{tt} &= 0 \\
\sigma_{r\theta} &= \frac{K_I(t)}{\sqrt{2\pi r}} \left[\frac{1}{4} (1 + \nu - 2\nu^2) \left(\operatorname{sen} \frac{\theta}{2} + \cos \frac{3\theta}{2} \right) \right]
\end{aligned} \tag{6.4}$$

$$\begin{aligned}
u_r &= \frac{K_I(t)}{4\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \left\{ (1 - \nu) (5 - 6\nu) \cos \frac{\theta}{2} - (1 - \nu) (1 + 2\nu) \cos \frac{3\theta}{2} \right\} \\
u_\theta &= \frac{K_I(t)}{4\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \left\{ (1 - \nu) (7 - 2\nu) \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} - (1 - \nu) (1 + 2\nu) \operatorname{sen} \frac{3\theta}{2} \right\}
\end{aligned} \tag{6.5}$$

La obtención y forma de los campos de tensiones en la cara libre para una placa finita se estudia en [171]. Como resultado, se tiene que el estado tensional en la cara libre se puede expresar como la suma de distintos estados tensionales. De todos estos estados, el efecto de la singularidad de esquina en la cara libre está localizado en un solo término ¹. Los resultados son totalmente matemáticos pero los refuerza comparando un desarrollo particular con el análogo obtenido al aplicar la teoría de placas.

Pook en [176, 184] realiza una introducción a la singularidad en el borde libre y su influencia en los resultados. En sus trabajos se comentan las dificultades que han evitado avanzar en este campo, como la falta de datos numéricos para poder realizar verificaciones y el desconocimiento del tamaño de la zona de influencia, que se supone dependiente de la carga existente. También considera la influencia del ángulo entre el frente de grieta respecto a la superficie libre, que se identifica mediante β y se define en la Fig. 6.3. Tanto este ángulo, como el orden de singularidad del borde libre, λ , están relacionados con ν , el coeficiente de Poisson. Concluye que existe un ángulo β_c , que llama crítico, para el cual $\lambda = 0,5$, e introduce expresiones para la evaluación de dicho ángulo en un modo tensional simétrico, Ec. (6.6), y en un modo antisimétrico, Ec. (6.7).

$$\beta_c = \tan^{-1} \left\{ \frac{(\nu - 2)}{\nu} \right\} \tag{6.6}$$

$$\beta_c = \tan^{-1} \left\{ \frac{(1 - \nu)}{\nu} \right\} \tag{6.7}$$

Además, en [176], analiza el valor de los distintos FIT en el borde de esquina, donde comenta la importancia que tienen estos factores en la diferencia de los valores

¹Resultado que conduce a pensar que el estado tensional provocado por la grieta en su intersección con la cara libre, puede expresarse como un estado tensional que se añade al resto de los estados tensionales existentes en el dominio.

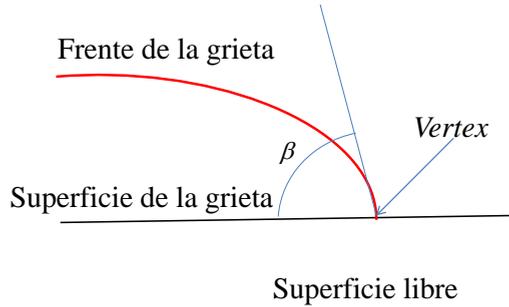


Figura 6.3. Esquema de la definición del ángulo entre la superficie libre y la grieta.

obtenidos respecto a los que asintóticamente se deben obtener al existir la singularidad de borde libre. También introduce la medida de intensidad de tensiones del punto esquina K_λ , concepto que es análogo al de los FIT para la singularidad del borde de esquina. Asimismo, compara la importancia de la zona dominada por la singularidad de borde libre con el efecto de la zona dominada por el frente de grieta. Presenta, incluso, un tratamiento muy simple del papel de los FIT y del aspecto de los campos de tensiones y desplazamientos en la cercanía de la grieta.

Leung, en [185], estudia un caso tridimensional en modo I mediante elementos finitos y se comprueban los resultados de la singularidad de borde libre con las expresiones teóricas propuestas por Zhu en [173]². También en este trabajo se incluye una fórmula para obtener el orden de singularidad de los FIT mediante un ajuste por mínimos cuadrados de los datos del campo de tensiones en la cercanía de la grieta.

$$\ln(K_1) = \lim_{r \rightarrow 0} \{ \ln(\sigma_{rr}) + \lambda \ln(2\pi r) \} \tag{6.8}$$

También, en [177], intenta analizar los campos de las singularidades presentes en un caso en modo I, para lo cual separa los campos singulares en dos: un campo que corresponde a la grieta para el que se acepta el desarrollo realizado en [9] y otro para la singularidad de borde libre para el cual obtiene una solución a partir de un cuerpo con una grieta que es sometido a una tracción singular en la superficie libre normal al plano de grieta. La fuerza que introduce en el cuerpo elimina la tensión que suministra la solución correspondiente a la grieta.

La solución final se obtiene por superposición de ambos campos. Para representar el segundo campo, correspondiente a la singularidad borde libre, utiliza coordenadas esféricas, con origen en la intersección de la grieta con el borde libre. No consigue resolver la expresión analítica de dicho campo pero sugiere que debe ser de la forma $\rho^{-\frac{1}{2}} \nu f(\theta, \phi)$ por lo que el orden de la singularidad es el mismo que en el frente de la fisura.

En [51], Kwon usa como valor del orden de la singularidad en el borde libre —del campo de desplazamientos— el valor $\lambda = 0,452$ para la configuración y coeficiente

² Las expresiones originales en [173] contenían errores tipográficos. Por ello, Leung las revisa en los apéndices del artículo. Corrección que ya se ha incluido en las ecuaciones (6.4) y (6.5).

de Poisson del problema, que obtiene de [26], valores que han sido recogidos en el cuadro 6.1. Considera la interacción entre la parte de singularidad del frente de grieta con la singularidad de borde libre. Para controlar la zona de influencia de cada singularidad introduce un factor, D_{pe} , que señala si la zona corresponde a un caso de tensión plana — $D_{pe} = 0$ — o a uno de deformación plana — $D_{pe} = 1$ —. Este índice se define como:

$$D_{pe} = \frac{\sigma_{33}}{\nu(\sigma_{11} + \sigma_{22})} \quad (6.9)$$

Argumenta que, para el campo de tensiones, la relación entre el término correspondiente a la singularidad de grieta y el término correspondiente a la singularidad de borde libre es (6.10).

$$\sigma_{ij} = D_{pe}\sigma_{ij}^{gr} + (1 - D_{pe})\sigma_{ij}^{bl} \quad (6.10)$$

En el resultado anterior, σ_{ij}^{gr} es el campo de tensiones correspondiente a la grieta y σ_{ij}^{bl} es el correspondiente a la singularidad del *vertex*, cuya expresión en el sistema de coordenadas esféricas centrado en el punto del *vertex* es:

$$\sigma_{ij}^{bl} = \frac{K\lambda}{\sqrt{2\pi}}\rho^{-\lambda}f_{ij}(\theta, \phi) \quad (6.11)$$

relación que se obtiene a partir de la Ec. (6.2) y que, para ángulos pequeños, se puede aproximar por:

$$\sigma_{ij}^{bl} = \frac{K\lambda}{\sqrt{2\pi}}\rho^{-\lambda}\frac{f(\theta)}{\theta} \quad (6.12)$$

donde la fracción $\frac{f(\theta)}{\theta}$ es una aproximación a $f_{ij}(\theta, \phi)$ con θ el ángulo de coordenadas cilíndricas. Sin embargo no obtiene expresiones generales para $f_{ij}(\theta, \phi)$ y $f(\theta)$.

Dimitrov en [186] intenta resolver, para el campo de desplazamientos, el orden λ de la singularidad y los términos exactos de la función dependiente de los ángulos de la base en coordenadas esféricas. Para ello parte de un problema de autovalores resuelto sobre una aproximación de Petrov-Galerkin de elementos finitos. Sin embargo solo aporta un límite, según el cual, λ debe ser mayor a $-0,5$.

Heyder revisa en [179] el desarrollo de las distintas singularidades y encuentra cotas para el orden de la singularidad de borde libre. Según estos límites se tiene $-0,5 \leq \lambda \leq 1$. En el trabajo, se comentan las dependencias del orden de la singularidad con el coeficiente de Poisson y la influencia del ángulo crítico de la grieta, β_c . Hace un estudio numérico de la determinación —con las ecuaciones (6.6) y (6.7)— del ángulo crítico de la grieta respecto al borde libre, β_c , que compara con los datos ofrecidos en [184]. En el artículo también se realiza un breve estudio experimental de la influencia de las singularidades en la propagación de la grieta por fatiga.

En el trabajo de Matos, [52], se tiene una introducción sobre las distintas singularidades en tres dimensiones. En este desarrollo teórico se utilizan, para el borde libre, los resultados de Benthem [26]. El autor expone que, por cuestiones energéticas, el borde libre tiende a tener orden de singularidad $r^{-1/2}$, estado ideal que se consigue

cuando el ángulo entre la grieta y el borde libre es el ángulo crítico, β_c . Por tanto el crecimiento de la grieta tiende hacia esa configuración geométrica.

6.3. Enriquecimiento para la singularidad del borde libre

A continuación se propone un enriquecimiento para el modelado de la singularidad de borde libre basado en armónicos esféricos. El objetivo es introducir un enriquecimiento genérico para fenómenos esféricos y aplicarlo al caso de la singularidad de borde libre. Este tipo de enriquecimiento es una propuesta de la tesis que permite introducir parte del efecto de la singularidad de esquina en la formulación de XFEM. En la sección siguiente se realiza un estudio numérico de su efecto.

6.3.1. Breve introducción a los armónicos esféricos

En matemáticas los armónicos esféricos son la parte angular de un conjunto de soluciones de la ecuación de Laplace en coordenadas esféricas. Los armónicos esféricos de Laplace Y_m^l son un conjunto específico de armónicos esféricos que forman un sistema ortogonal, introducidos originalmente por Pierre Simon de Laplace.

Los armónicos esféricos son importantes en muchas aplicaciones, tanto teóricas como prácticas, particularmente en el cálculo de los orbitales atómicos de los electrones, en la representación de los campos gravitacionales, de las geodésicas, de los campos magnéticos de cuerpos planetarios y estrellas, y en la caracterización de la radiación de fondo de microondas. En la realización de gráficos tridimensionales por ordenador, los armónicos esféricos juegan un papel muy importante en gran cantidad de efectos, incluyendo iluminación indirecta —efectos de ambiente, iluminación global, transferencia de radiación precalculada, etcétera— y en el reconocimiento de formas tridimensionales, [187].

La ecuación de Laplace en coordenadas esféricas es:

$$\nabla^2 f = \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho^2 \frac{\partial f}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\rho^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} = 0 \quad (6.13)$$

Los armónicos esféricos son funciones del cuerpo complejo asociadas a los polinomios de Legendre — $P_l^m(\cos \theta)$ — y pueden generarse directamente a partir de ellos mediante recurrencias, [188–190]. Las funciones normalizadas de armónicos esféricos denotados mediante $Y_{lm}(\theta, \phi)$ son

$$Y_{lm}(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(\cos \theta) e^{im\phi} \quad (6.14)$$

De las propiedades de los polinomios de Legendre se pueden deducir los valores $l = 0, 1, 2, \dots$ y $m = -l, \dots, 0, \dots, l$ y por tanto

$$Y_{lm}(\theta, \phi) = (-1)^m Y_{lm}^*(\theta, \phi) \quad (6.15)$$

donde $Y_{lm}^*(\theta, \phi)$ es el complejo conjugado.

Las condiciones de normalización y ortogonalidad se expresan como

$$\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \sin\theta d\theta Y_{lm}(\theta, \phi) Y_{l'm'}^*(\theta, \phi) = \delta_{ll'} \delta_{mm'} \quad (6.16)$$

donde $\delta_{ll'}$ y $\delta_{mm'}$ son funciones delta de Kronecker.

La relación de completitud viene dada por

$$\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l Y_{lm}(\theta, \phi) Y_{lm}^*(\theta', \phi') = \delta(\cos\theta - \cos\theta') \delta(\phi - \phi') \quad (6.17)$$

donde $\delta(\cos\theta - \cos\theta')$ y $\delta(\phi - \phi')$ son funciones delta de Dirac.

En el ámbito de estudio, solo interesa considerar cantidades reales. Así es más conveniente trabajar con los armónicos esféricos reales, y_{lm} , donde:

$$y_{lm}(\theta, \phi) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} [Y_{lm}(\theta, \phi) + Y_{lm}^*(\theta, \phi)] & \text{si } m > 0 \\ Y_{l0}(\theta, \phi) & \text{si } m = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} [Y_{lm}(\theta, \phi) - Y_{lm}^*(\theta, \phi)] & \text{si } m < 0 \end{cases} \quad (6.18)$$

La regla de normalización de los armónicos esféricos reales, y_{lm} , es

$$\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \sin\theta d\theta y_{lm}(\theta, \phi) y_{l'm'}(\theta, \phi) = \delta_{ll'} \delta_{mm'} \quad (6.19)$$

Una propiedad interesante de los armónicos esféricos es que forman una base de funciones con dependencia angular esférica. Por tanto, toda función que presenta solo dependencia angular del sistema de referencia esférica, puede ser expresada en términos de armónicos esféricos, por ejemplo:

$$g_i(\lambda; \theta, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l a_{lm} y_{lm}(\theta, \phi) \quad (6.20)$$

donde a_{lm} es el coeficiente real asociado con el armónico esférico $y_{lm}(\theta, \phi)$.

La representación habitual de las 4 primeras bandas de los armónicos esféricos reales se puede apreciar en la Fig. 6.4.

6.3.2. Armónicos esféricos como enriquecimiento para la singularidad de borde libre

Se va a aceptar que la Ec. (6.3) puede ser utilizada para describir el efecto de la singularidad de borde libre. La parte angular del campo de desplazamiento de la singularidad en el *vertex*, puede expandirse utilizando la Ec. (6.20). De esta forma los armónicos esféricos pueden emplearse para formar una base que reproduzca el campo de desplazamiento asintótico de la singularidad, siguiendo una descripción análoga a la realizada en (3.10). Consecuentemente, es posible introducir un nuevo conjunto de funciones de enriquecimiento como:

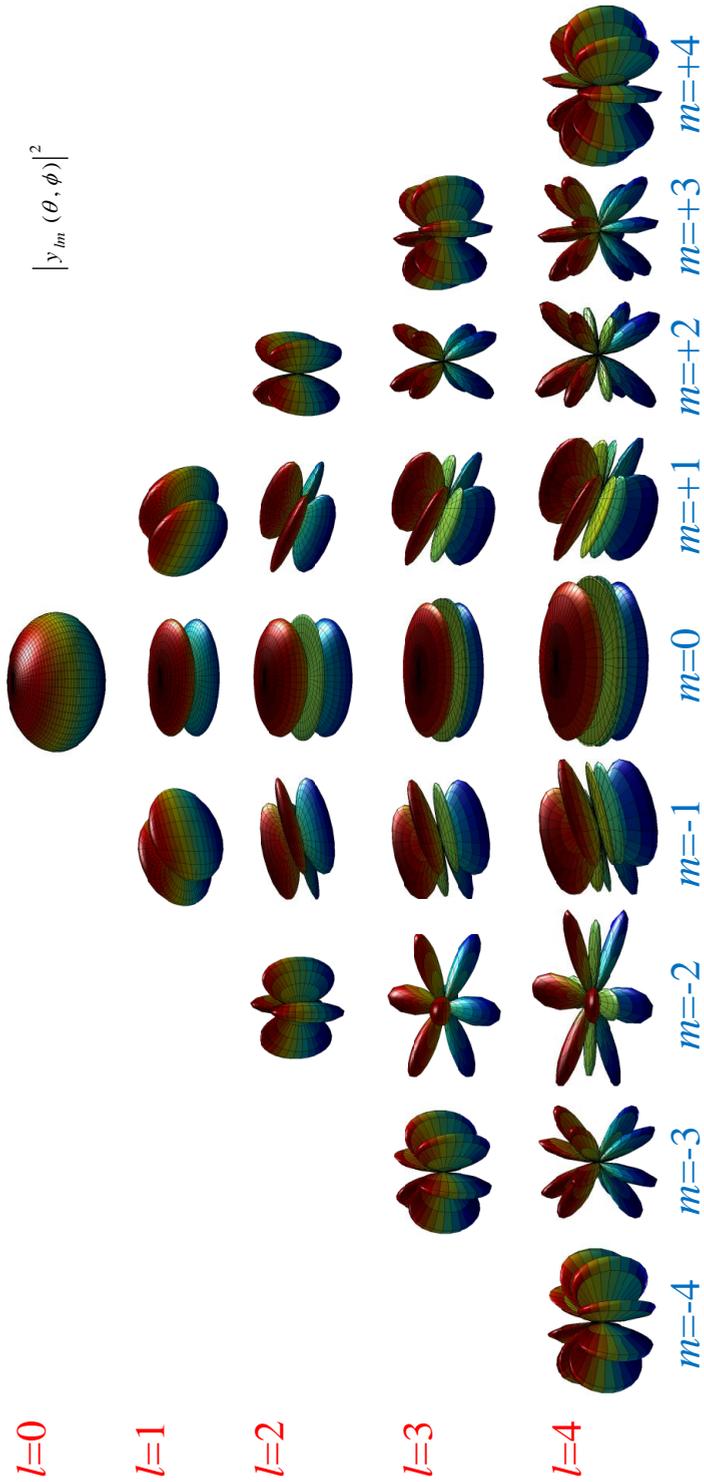


Figura 6.4. Ilustración que muestra la forma de los primeros armónicos esféricos $l = 0, 1, 2, 3, 4$.

$$G_{lm}(\rho, \theta, \phi) = \rho^{-\lambda+1} y_{lm}(\theta, \phi) \quad (6.21)$$

Así se puede expresar el desplazamiento en la aproximación de XFEM para simular la existencia de grietas, incluyendo la singularidad de borde libre o esquina, como:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{\text{xfem}}(\vec{r}) = & \sum_{i \in I^{el}} N_i(\vec{r}) u_i + \sum_{i \in \mathcal{J}} N_i(\vec{r}) [H(\vec{r}) - H(\vec{r}_i)] \mathbf{a}_i \\ & + \sum_{i \in \mathcal{K}} N_i(\vec{r}) \sum_{\alpha=1}^4 [F_\alpha(\vec{r}) - F_\alpha(\vec{r}_i)] \mathbf{b}_{i\alpha} \\ & + \sum_{i \in \mathcal{V}} \left[N_i(\vec{r}) \sum_{l=0}^L \sum_{m=-l}^l [G_{lm}(\vec{r}) - G_{lm}(\vec{r}_i)] \mathbf{c}_{ilm} \right] \end{aligned} \quad (6.22)$$

donde el subconjunto \mathcal{V} contiene los nodos enriquecidos con las funciones enriquecidas mediante armónicos esféricos, G_{lm} , y c_{ilm} son los correspondientes GDL. La selección del conjunto \mathcal{V} se realiza tomando los elementos que incluyan el punto *vertex* y cuyos nodos pertenezcan al subconjunto \mathcal{K} . El número de términos de armónicos esféricos añadidos se controla con L .

Hay algunos aspectos de la construcción del subconjunto \mathcal{V} donde se debe ser cuidadoso puesto que están relacionados con el conocimiento de las dependencias de la singularidad de borde libre. La primera dificultad es la elección del orden de singularidad, λ . Dado que siempre evoluciona hasta adquirir una configuración que presente β_c , donde aparece un orden de singularidad parecido al de la grieta, y que los valores presentados en el cuadro 6.1 son muy próximos al comportamiento en la fisura, se puede usar como primera aproximación el mismo orden de singularidad del frente de grieta —aunque sería posible introducir en la Ec. (6.21) el verdadero valor de λ si es conocido a priori—.

La segunda complicación deriva del carácter muy local del efecto de la singularidad de borde libre, ya que su influencia solo se aprecia en una región muy pequeña y cercana al punto de singularidad. Los elementos enriquecidos deben estar, en lo posible, dentro de esta región para que el enriquecimiento añadido no contamine la solución en regiones alejadas de esta zona. Esto impone un límite en el tamaño del elemento cercano al *vertex*, más aún cuando no se puede saber a priori las dimensiones exactas de la región afectada.

6.4. Verificación numérica

6.4.1. Modelo geométrico y problema de referencia

La geometría considerada es una placa rectangular de espesor t , anchura w y altura $2h$ que se muestra en la Fig. 6.5. La longitud de la grieta es a . La placa tiene las siguientes dimensiones: $a/t = 0,5$, $w/t = 1,5$ y $h/t = 2,5$. El coeficiente de Poisson es 0,3 y el módulo de Young es 20000 unidades. Este problema fue usado para estudiar la singularidad de borde libre en [185], tomando el valor de $\lambda = 0,5$. El cálculo de los

FIT de un problema similar aparece en [191] y además fue empleado como problema de referencia para el XFEM en [95]. Para el estudio se considera un sistema coordenado cartesiano centrado en el frente de grieta, y localizado en el plano medio del espesor del modelo geométrico.

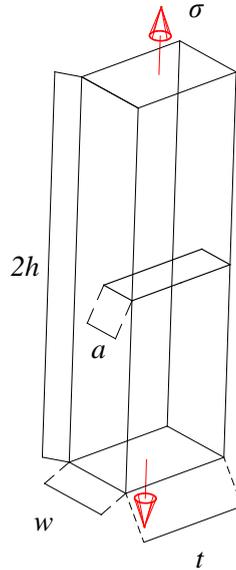


Figura 6.5. Esquema geométrico.

6.4.2. Modelos de elementos finitos

Se han construido dos modelos. El primero realizado en ABAQUS, utiliza una malla estándar de elementos finitos, Fig. 6.6, y gracias a las simetrías presentes en el plano de grieta y en el plano medio, solo ha sido necesario considerar un cuarto de la placa. La malla elaborada presenta dos regiones, una región adaptada a la singularidad y a la morfología de la grieta, que está concentrada hacia el borde libre. La otra región se malla para capturar el comportamiento general del modelo. Se han utilizado elementos tipo hexaedro y tipo prisma de orden cuadrático, con 20 nodos por elemento, siendo el tamaño mínimo de elemento del orden de $0,002a$.

El segundo modelo de elementos finitos lineales se ha creado para la aproximación de XFEM y utiliza una malla regular de hexaedros, Fig. 6.7. Solo se ha aplicado la simetría que aparece en el plano medio, analizando una secuencia de mallas para observar el efecto del enriquecimiento.

6.4.3. Resultados para los factores de intensidad de tensiones

Los resultados obtenidos con los dos modelos de elementos finitos se comparan con la solución que aparece en [185]. Se realiza un análisis usando tres tamaños de elemento en la malla de XFEM. El tamaño de elemento se elige observando la solución de referencia y la obtenida mediante ABAQUS. En estas soluciones la región de singularidad de esquina es alrededor del 3% de la longitud del frente de grieta, t . Se construyen tres mallas, una con un tamaño de elemento más grande que la región, otra con un tamaño de elemento similar y otra con un tamaño de elemento inferior.

Este problema presenta configuración de modo I puro. Como la integral de interacción no es aplicable al estudio de singularidades distintas a la del frente de grieta, únicamente se utiliza la integral J para la obtención de los FIT. El dominio de extracción se define con S_q igual al tamaño del elemento y $R_q = 0,8a$.

Los resultados de los FIT para diversos órdenes de armónicos esféricos, seleccionados mediante L , se presentan en las Figs. 6.8, 6.9 y 6.10. En estas gráficas, se puede apreciar que el comportamiento de la singularidad de borde libre en los FIT se captura mejor si se usan algunos términos de enriquecimiento mediante armónicos esféricos. Se observa también que si el tamaño de elemento es muy grande, el enriquecimiento con armónicos esféricos introduce comportamientos no deseados. Este comportamiento no deseado se aprecia en la subida brusca de los valores de los FIT —fácilmente identificable como una joroba en los gráficos—, justo antes de la zona afectada por la singularidad de borde libre, $z/t \approx 0,40 - 0,45$.

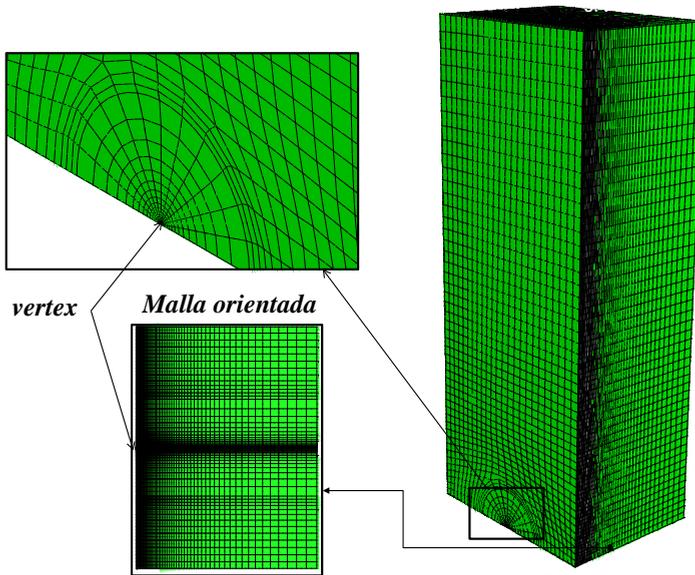


Figura 6.6. Malla adaptada al problema en ABAQUS. Se puede observar el refinamiento concentrado hacia el *vertex*.

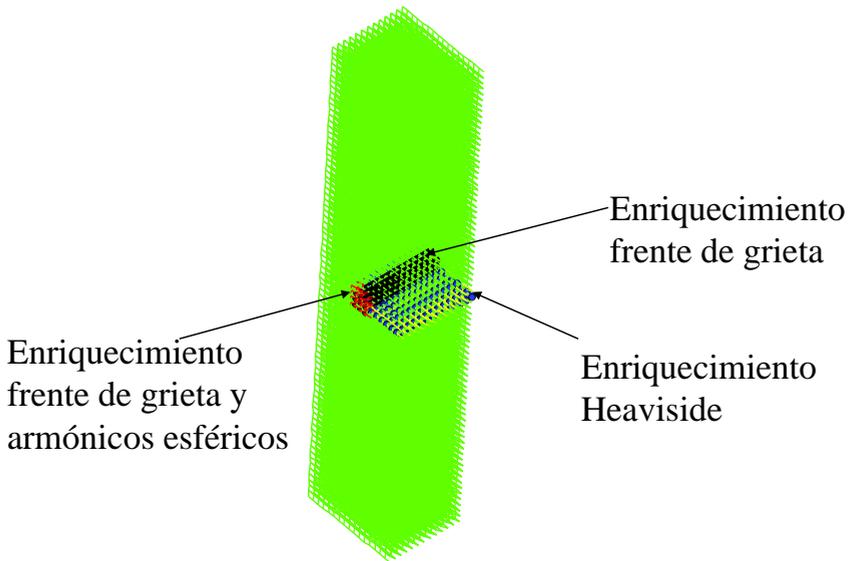


Figura 6.7. Ejemplo de una de las mallas para el análisis con XFEM. Se pueden observar las regiones enriquecidas.

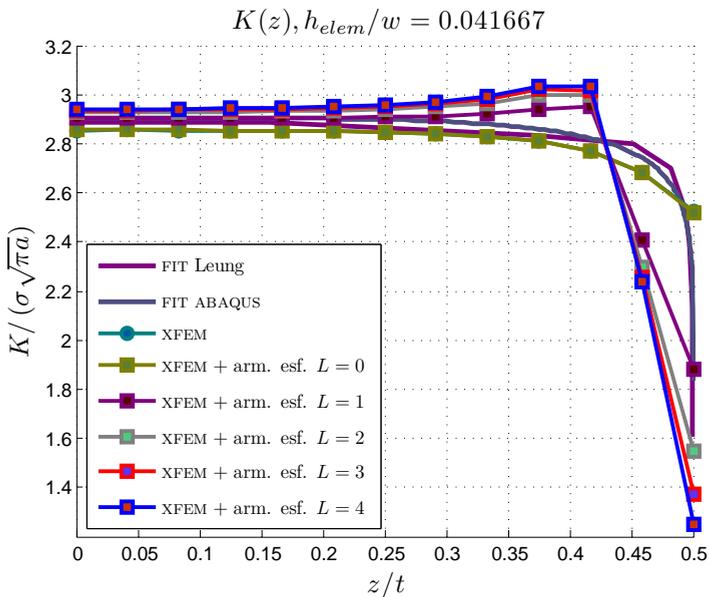


Figura 6.8. Resultados en los FIT para un tamaño de elemento mayor que la región afectada.

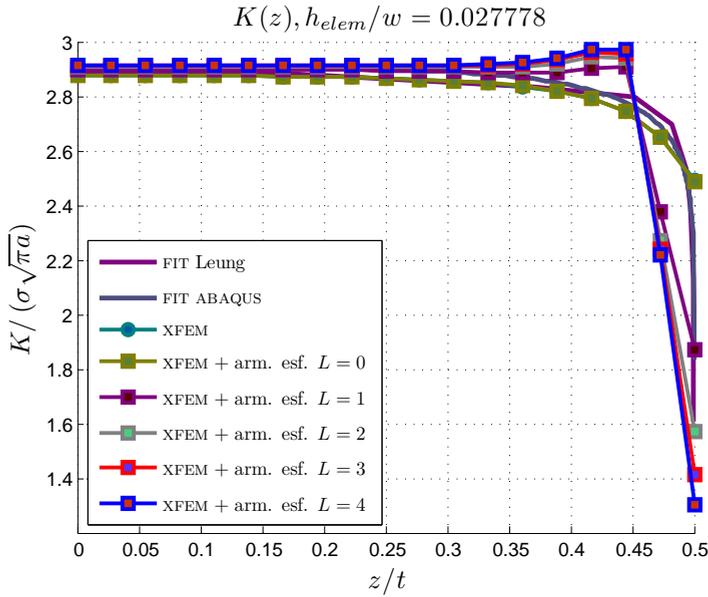


Figura 6.9. Resultados en los FIT para un tamaño de elemento similar a la región afectada.

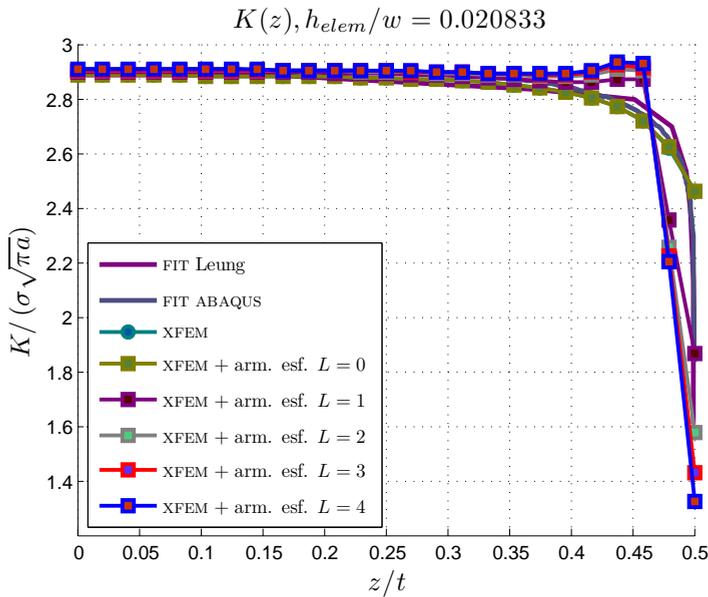


Figura 6.10. Resultados en los FIT para un tamaño de elemento inferior a la región afectada.

6.4.4. Resultados en los campos de tensiones

Un análisis basado únicamente en los FIT no es suficiente para juzgar la bondad del nuevo enriquecimiento. El estudio de los campos de tensiones en algunas secciones de grieta permite observar mejor el efecto del enriquecimiento. Las secciones estudiadas están localizadas a 3% y 20% del espesor respecto a superficie libre, Fig. 6.11 y Fig. 6.12. La falta de precisión de las soluciones de elementos finitos en el frente, $r = 0$, se evita tomando puntos cercanos al frente de grieta pero no situados en el mismo.

Los datos se extraen del modelo de MEF y del modelo XFEM más refinado, de forma que en la aproximación exista al menos un elemento entre la zona de extracción y la frontera para poder asegurar la bondad de los resultados.

Para extraer la distribución de tensiones en la sección se utilizan puntos situados en una circunferencia pequeña centrada en el correspondiente punto del frente de grieta. Dicha circunferencia tiene un radio r y su relación a la longitud de grieta es $r/a = 0,004$. El ángulo polar θ varía entre 0 y 180° grados. Se usa la transformación de coordenadas habitual para transformar todos los campos al mismo sistema de referencia de la grieta. Los términos de ajuste correspondientes a t_{ij} son ignorados. La solución de elementos finitos estándar se utiliza también como valor de referencia y se indica por σ_{ABAQUS} .

La sección situada al 3% de t respecto al borde libre —posición $z=0,47t$ —, es cercana a la zona enriquecida con armónicos esféricos y tiene cierta influencia de la singularidad del borde libre. Las componentes normalizadas de los campos de tensiones σ_{11} , σ_{22} , σ_{33} y σ_{12} se representan en la Fig. 6.11. De la gráfica se obtiene que el enriquecimiento de armónicos esféricos no produce empeoramiento en esta región, siendo los resultados similares a los obtenidos en el MEF. La otra sección considerada, correspondiente al 20% de t respecto al *vertex* —posición $z=0,3t$ —, es una región incluida en la zona dominada por la singularidad del frente de grieta, que presenta un estado de deformación plana. Las componentes normalizadas de los campos de tensiones σ_{11} , σ_{22} , σ_{33} y σ_{12} se representan en la Fig. 6.12. En esta zona ya no afecta el nuevo enriquecimiento recuperándose el comportamiento estándar de XFEM.

Los resultados obtenidos en el cálculo de los FIT son razonables, pero la representación de los campos de tensiones no permite llegar a una conclusión definitiva sobre este nuevo enriquecimiento, ya que el tamaño de elemento utilizado es demasiado grande. Debido a razones asociadas al coste computacional ha sido imposible realizar un mayor refinamiento.

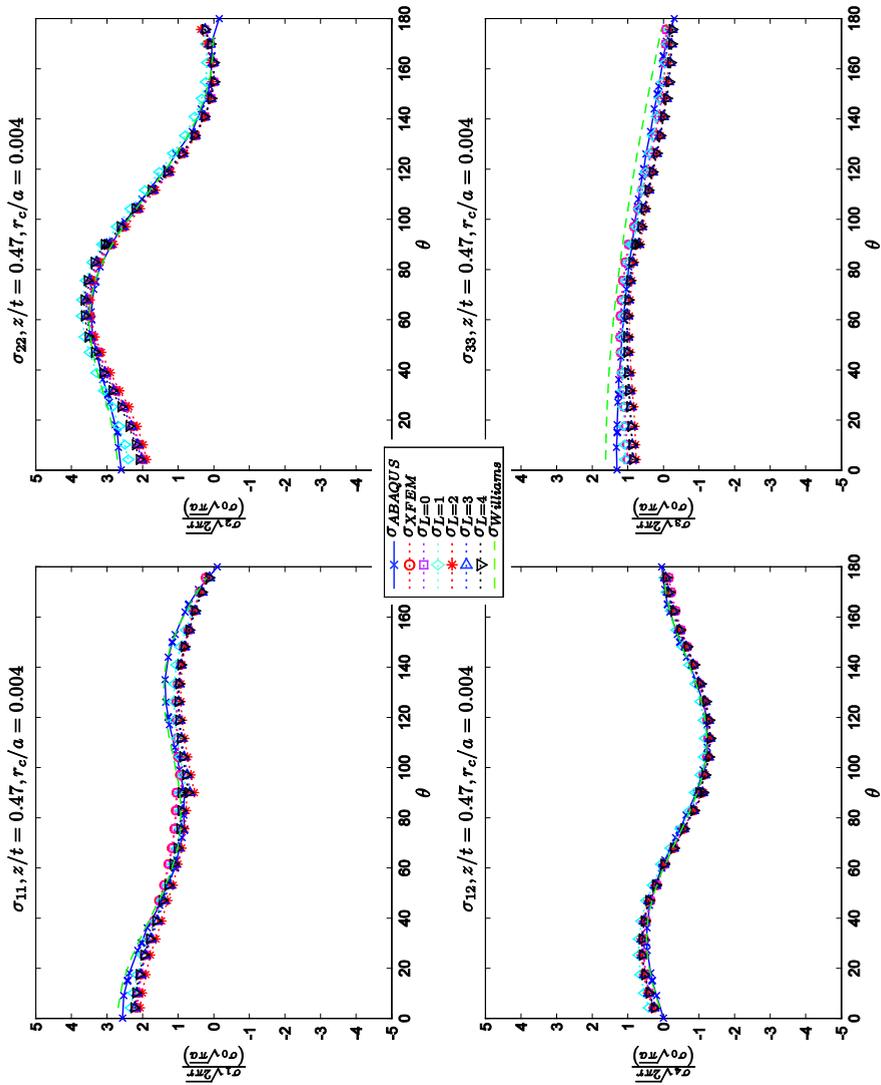


Figura 6.11. Distribución de tensiones σ_{ij} en un camino circular cercano al frente de grieta a $0,03t$ de la superficie libre.

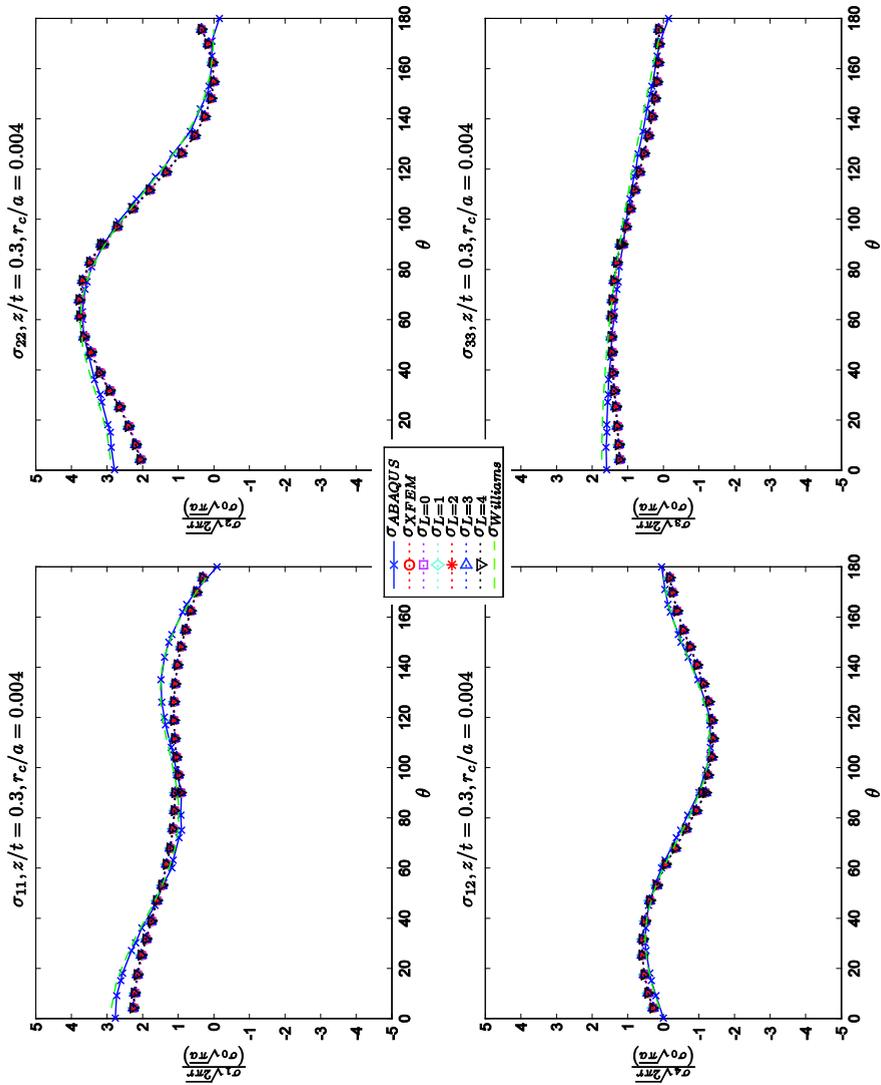


Figura 6.12. Distribución de tensiones σ_{ij} en un camino circular cercano al frente de grieta a $0,2t$ de la superficie libre.

Capítulo 7

Conclusiones, aportaciones y trabajos futuros

*El recuerdo que deja un libro
es más importante que el libro mismo.
Gustavo Adolfo Bécquer*

7.1. Conclusiones y aportaciones

7.1.1. Estudio de los campos asintóticos en la grieta tridimensional

Se ha realizado una breve revisión de la teoría de MFEL en su aplicación a la grieta tridimensional, donde se ha puesto de manifiesto que los supuestos utilizados en la construcción de los campos asintóticos no son, en general, aplicables en grietas genéricas, ya que las hipótesis de estado de tensión o de deformación plana y de sólido infinito, utilizadas en la deducción de las expresiones matemáticas de los campos asintóticos no son totalmente aceptables.

Además, no basta con considerar el primer término del desarrollo asintótico. En los estudios numéricos presentados, se ha demostrado que si se quiere realizar una descripción correcta en los puntos cercanos al frente de grieta, se deben incluir los términos constantes del desarrollo. Es decir, para el campo de tensiones se tienen que utilizar expresiones del tipo $\sigma_{ij} = \frac{K}{\sqrt{2\pi r}} + t_{ij}$. Es cierto que algunos autores incluyen el término t_{11} , pero el término t_{33} también es necesario, pese a que su consideración en la literatura es mucho más escasa.

Se ha realizado una comparación en el análisis de la triaxialidad en la grieta, mediante la descripción que utiliza t_{ij} respecto a otra metodología que emplea un factor empírico llamado factor de constricción T_z . La descripción incluyendo t_{ij} da mejores resultados. Consecuentemente, y como primera contribución de la presente tesis, se ha comprobado que para poder describir correctamente el comportamiento

triaxial existente en las cercanías de la grieta tridimensional, se requiere conocer los FIT y los t_{ij} .

7.1.2. Adaptación del método de los elementos finitos extendido al estudio de grietas tridimensionales

Debido a que el estudio de una grieta tridimensional mediante el uso de MEF es muy costoso, aumentando la dificultad si se quiere estudiar la propagación, se ha decidido utilizar la técnica XFEM que se basa en el enriquecimiento de la solución. Se ha realizado una breve revisión bibliográfica de este método, comentando las ventajas e inconvenientes.

La revisión de la técnica se ha centrado en la formulación tridimensional existente, que aún deja ciertos puntos abiertos. La especificación de la grieta se realiza mediante funciones auxiliares, *Level Sets*, que utilizan definiciones básicas correspondientes a la geometría diferencial. La unión de la descripción de la grieta con conceptos de geometría diferencial, permite obtener una nueva metodología para construir una base ortogonal local.

Se examina además el método de integración numérica en los elementos que presentan la singularidad. Para ello, se selecciona entre dos reglas disponibles, una basada en el colapso adecuado de un hexaedro presentada por Stroud, [139], y otra que deriva de la técnica «casi-polar» introducida en 3D por Park, [122]. Los dos métodos de integración para la zona singular presentan convergencias similares, aunque la segunda necesita menos puntos de integración.

Las aportaciones realizadas en este apartado son la creación de una metodología de definición de base local ortogonal y la selección de un método de integración numérica adecuado.

7.1.3. Cálculo de los factores de intensidad de tensiones

La obtención de los FIT es una de las prioridades en los métodos numéricos aplicados a la mecánica de la fractura, ya que permiten la descripción del estado de tensiones y la caracterización de la severidad de la grieta. Uno de los métodos con mejor resultado es el de las integrales de dominio, entre ellas la integral J y la integral de interacción. Este método, aunque potente y flexible, exhibe ciertas complicaciones cuando se aplica a grietas tridimensionales que presenten curvaturas. Sin embargo, el uso del XFEM introduce conceptos e información que puede facilitar algunos de los cálculos.

Se ha realizado un breve análisis de los dos métodos y se ha desarrollado su implementación a partir del XFEM, en la cual se incluye la definición del dominio de extracción a partir de los LS. Además se consideran las dificultades que aparecen en un espacio de aproximación basado en el XFEM y los LS. Uno de los resultados obtenidos es la necesidad de utilización de una base local ortogonal para el cálculo de las integrales.

La aplicación de la integral de interacción al estudio de grietas con curvaturas presenta varios aspectos delicados, ya que los campos auxiliares involucrados en su

definición no son rigurosamente aplicables. Se han considerado ciertos cambios en la formulación para minimizar este efecto, que muestran en los estudios numéricos un comportamiento aceptable.

El uso de coordenadas curvilíneas complica la formulación de los operadores gradiente. En la tesis, como parte de las aportaciones, se aprovecha la relación de los LS con las coordenadas curvilíneas, propias de geometría diferencial y cálculo tensorial, para obtener una expresión numérica, aproximación que es necesaria para conseguir un comportamiento correcto en la obtención de los FIT.

Todos estos cambios no bastan si no se considera cuidadosamente el tamaño del dominio de extracción. De hecho si, junto a las modificaciones anteriores, se selecciona cuidadosamente el tamaño de extracción se puede obtener la velocidad de convergencia óptima. Este estudio cuantitativo no ha podido ser realizado en todos los ejemplos, ya que en algunos casos se ha sacrificado esta posibilidad en aras de la sencillez de la definición del dominio de extracción. Sin embargo, los resultados cualitativos también parecen confirmar este comportamiento.

En el capítulo 4 se han introducido diversas aportaciones, como variaciones en la formulación de la integral de interacción, expresiones numéricas para los gradientes en coordenadas curvilíneas y recomendaciones en cuanto a las dimensiones del dominio de extracción —y por tanto del tamaño de elemento— que permiten obtener los FIT en grietas tridimensionales y además proporcionan una velocidad de convergencia óptima o al menos un comportamiento cualitativo adecuado, tal como se ha probado mediante estudios numéricos en el capítulo 5.

7.1.4. Estudio y enriquecimiento de la singularidad en el borde libre

La singularidad del frente de grieta no es la única singularidad asociada a la existencia de la fisura en sólidos tridimensionales. Existe un comportamiento singular en la intersección de la grieta con las superficies libres. Primeramente, se ha realizado una revisión histórica de las distintas teorías existentes para la caracterización de dicha singularidad. Además se ha desarrollado un enriquecimiento para su introducción en estudios realizados mediante XFEM.

En el estudio del borde libre aparecen varias dificultades no totalmente resueltas. Por ejemplo, en general no se dispone del valor exacto del orden de la singularidad, aunque se supone cercano al de la grieta, ni se conoce su forma funcional angular, aunque parece presentar un comportamiento esférico, por lo que se ha considerado razonable suponer que una base de efectos esféricos es capaz de introducir su descripción en un enriquecimiento. Otra importante dificultad es su limitada zona de influencia, que supone una restricción en el tamaño de elemento necesario para lograr una descripción correcta.

El enriquecimiento introducido muestra un resultado razonable al estudiar los FIT. Sin embargo no se ha podido confirmar representando los campos de tensiones, ya que el tamaño de elemento utilizado es demasiado grande para que el cálculo de los FIT y la interpolación cerca de la frontera permita llegar a conclusiones definitivas. No se ha podido realizar un mayor refinamiento por cuestiones relacionadas con el coste

computacional.

En conclusión, la propuesta de este enriquecimiento queda como una posible aproximación para abordar el problema, que al provenir de una idea general como es usar una base genérica, puede ser aprovechada para otros tipos de singularidades o efectos.

7.2. Trabajos futuros

7.2.1. Trabajos relacionados con la malla de elementos finitos

Mejoras en la subdivisión de elementos. Doble subdivisión y definición de la grieta utilizando elementos de mayor orden o diferencias finitas

En esta tesis se ha realizado una introducción a la metodología básica de XFEM para estudios tridimensionales. Sin embargo, la técnica es susceptible de ser mejorada para conseguir descripciones correctas de grietas genéricas. Aunque el XFEM necesita un refinamiento menor que el equivalente en MEF, este debe ser lo bastante elevado para introducir con detalle la geometría de la fisura. La especificación de la grieta se efectúa mediante el uso de funciones LS. Por tanto, si no se desea disminuir el tamaño de elemento, se debe buscar formas de aumentar su eficacia.

En la aproximación planteada se utilizan elementos lineales, pero la transformación del elemento de referencia en el real en el estudio de grietas genéricas, produce que la subdivisión realizada no sea correcta, debido al término parásito no lineal que presentan los elementos cuadriláteros —o los hexaedros en tres dimensiones—. Este problema puede ser fácilmente observado en la Fig. 7.1. El resultado de este error es apreciable ya que afecta a la integración en el elemento que contiene el comportamiento singular y cambia totalmente la geometría de la grieta como se puede comprobar en [111].

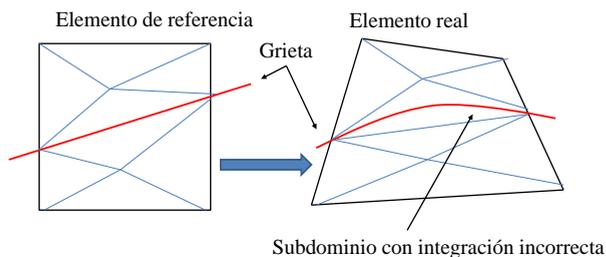


Figura 7.1. Error en la subdivisión del elemento con la técnica usada.

Claramente el problema se soluciona si se utiliza una malla adaptada a la geometría de la grieta. Sin embargo, esta solución motiva perder parte de las ventajas asociadas

al XFEM. Una manera de minimizar el error en la subdivisión es realizarla dos veces, es decir realizando un esquema como el mostrado en la Fig. 7.2.

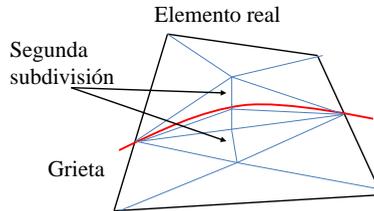


Figura 7.2. Estrategia de doble subdivisión del elemento.

Al depender las funciones de enriquecimiento, la subdivisión y la base auxiliar de la correcta definición de la grieta a partir de los LS, una estrategia que se puede utilizar, y además puede ser usada en combinación con la doble subdivisión, es emplear elementos finitos de mayor orden solo para la descripción de la grieta mediante los LS, tal como se propone en [192]. Una opción que se plantea en [130] es utilizar una malla de diferencias finitas muy refinada para la descripción de los LS y luego proyectar los valores en la malla de elementos finitos.

El uso de estas técnicas mejora el comportamiento general del método, pero aún no se ha realizado una comprobación rigurosa en tres dimensiones, con lo que constituye una extensión directa de la metodología propuesta en la tesis para estudio de grietas genéricas.

Refinamiento. *Hanging nodes*

Una de las teóricas ventajas del XFEM es que no resulta necesario realizar un remallado para realizar estudios de propagación de la grieta. Sin embargo, la malla debe ser lo bastante refinada para que la técnica sea capaz de capturar la variación de la geometría de la grieta. En problemas bidimensionales no suele haber problema en utilizar una malla suficientemente refinada en toda la región de crecimiento.

En tres dimensiones el uso de una malla suficientemente refinada en toda la región en que se puede dar lugar a la propagación, constituye un problema de eficacia. Para casos estáticos sin propagación basta con hacer una malla adaptada a la geometría de la grieta. Esto no es posible sin hacer remallados cuando se incluye el crecimiento de la fisura. No obstante, el empleo de técnicas adaptativas que modifiquen la configuración de la malla para la correcta descripción de la grieta, aunque el orden de refinado sea inferior al necesario en el MEF, elimina parte de las ventajas del XFEM.

Más elegante es utilizar una técnica que permita mantener la malla original, añadiéndole refinamientos locales. Una de estas técnicas, es la que se puede llamar de refinamiento no regular o no conforme y que se conoce como técnica de *hanging nodes*, [193–195], que ha sido ampliamente empleada en dos y tres dimensiones. El refinamiento por *hanging nodes* construye una malla no conforme, tal como se puede observar en la Fig. 7.3. Como se puede observar la malla original no es modificada,

refinándose solo aquellos elementos que necesitan una discretización más elevada, que se subdividen en nuevos elementos más pequeños.

La creación de mallas no conformes motiva la aparición de nodos no conformes o colgantes —de ahí el nombre de *hanging nodes*—, es decir, no son nodos para todos los elementos adyacentes. Los nodos que presentan un comportamiento no conforme deben verificar condiciones adicionales para no provocar problemas en el cálculo por elementos finitos y asegurar la continuidad C^0 de la interpolación. Por ejemplo, por sencillez suele ser solo de un orden de subdivisión, es decir no presenta dos nodos no conformes en el mismo lado del elemento, lo que se conoce como orden H^1 .

El desplazamiento de los nodos no conformes se debe relacionar con el de los nodos conformes con los que comparte lado de elemento, esta restricción se puede imponer por ejemplo usando multiplicadores de Lagrange. Se pueden encontrar diversas formas de imponer esta limitación en cuadriláteros y hexaedros en [196].

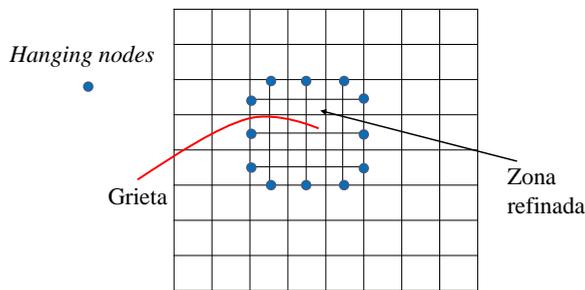


Figura 7.3. Ejemplo de malla no conforme resultado de refinar mediante la técnica de *hanging nodes*.

Recientemente la técnica de *hanging nodes* se ha introducido en XFEM, por ejemplo en [197], aunque aparecen problemas si un nodo no conforme está enriquecido. Una solución sencilla es refinar más dominio que la región a enriquecer, de manera que los nodos no conformes no presenten enriquecimiento. La introducción de los *hanging nodes* en el proceso de mallado y remallado es una de los trabajos planteados para llevar a cabo en el futuro.

Limitación del tamaño de elemento con la curvatura

Para realizar una descripción adecuada de la grieta y para extraer los FIT, existe un límite para el tamaño de elemento, ya que se ha concluido en esta tesis que el tamaño del dominio de extracción debe ser alrededor de un 10% del radio de curvatura, que se puede definir como la inversa de la curvatura, κ . Se puede relacionar directamente este tamaño de elemento localmente con la descripción geométrica de la grieta mediante los LS usando la definición de κ , que por ejemplo para ϕ es:

$$\kappa = \nabla \left(\frac{\nabla \phi}{\|\nabla \phi\|} \right) \quad (7.1)$$

Este límite se puede aplicar tanto a la hora de construir la malla inicial como combinado con los criterios de tamaño de elemento en el refinamiento. En cualquier caso para conseguir la aplicación correcta de este criterio es necesario disponer de una buena definición de los LS.

Problemas en el condicionamiento y la velocidad de convergencia. Elementos de transición mejorados y otras técnicas

Como se ha comentado en el capítulo 3, el XFEM presenta problemas tanto en el condicionamiento de la matriz de rigidez, como en la velocidad de convergencia. Diversas técnicas usadas en dos dimensiones, y que se empiezan a considerar en casos tridimensionales, han sido comentadas, [112–118], pero no existen análisis sobre su uso en el estudio de grietas curvas, ni en dos ni en tres dimensiones. Un punto interesante es su implementación y verificación en casos con curvatura.

Además, hay que tener en cuenta que el condicionamiento está relacionado con la estabilidad de los métodos iterativos de cálculo, frecuentemente necesarios para el estudio de modelos tridimensionales, debido a las limitaciones de memoria física de los ordenadores. Por tanto, mejorar el condicionamiento de la matriz de rigidez y seleccionar preconditionadores y métodos iterativos adecuados a la técnica XFEM resulta un punto necesario e interesante para un futuro estudio.

7.2.2. Trabajos relacionados con las integrales de dominio

Relación de las integrales de dominio tridimensionales con la tasa de liberación de energía por unidad de área

Para poder obtener los FIT se utiliza la relación entre la integral J con G , donde se acepta que G es constante o presenta variación suave en una región localmente próxima al punto de cálculo. En [22] se plantea otra relación, que no acepta tantas suposiciones, estableciendo que la integral de dominio se calcula en diversos puntos a lo largo del frente y el tamaño de extracción incluye los puntos de cálculo cercanos. La relación que plantea es de la forma

$$J_i = A_{ij}G_j \quad (7.2)$$

donde J_i es la integral J calculada en los diversos puntos a lo largo del frente de grieta, G_j se corresponde con G en ese conjunto de puntos y A_{ij} es una matriz que los relaciona.

Cada elemento de la matriz se define como la integración de la función α_j del dominio de extracción para la integral J_i y una función de forma N_i^G , es decir:

$$A_{ij} = \int_{L^{gr}} N_i^G \alpha_j dl \quad (7.3)$$

La definición de N_i^G , que es una función de forma unidimensional definida sobre el frente de grieta y que vale 1 en el punto de cálculo i y cero en el resto, no es directa ya que según se comenta en [22] puede dar lugar a oscilaciones en la solución, con

lo que las ventajas obtenidas se pierden. Sin embargo considerar una integración de este modo es necesaria para abordar adecuadamente problemas con mayor curvatura o que necesiten un mayor dominio de extracción.

Dominio fijo de extracción en 3D

Como se muestra en las Figs. 5.24 y 5.39, al depender la definición del dominio de extracción de valores asociados a la grieta y a la malla, es posible que aparezcan oscilaciones y convexidades. Para evitar estos efectos indeseables una opción es definir el dominio de extracción mediante un dominio externo e independiente de la malla, como en [18], de forma que se proyecten las soluciones de elementos finitos en esta región auxiliar. Además, es posible definir este dominio exterior en función de los LS y así, también, de la curvatura local.

El proceso de proyección de información de la malla de elementos finitos a este dominio auxiliar externo, supone evidentemente una fuente de error. Sin embargo este dominio evita totalmente el efecto adverso de la variación del tamaño, y por tanto, es posible realizar estudios de convergencia independientemente de la relación entre la geometría de la grieta y la topología de la malla, con lo que es coherente con el planteamiento del XFEM. Una vez conseguido este dominio externo, es interesante estudiar el efecto en la convergencia y precisión de distintas definiciones de la función α , incluyendo expresiones cuadráticas o exponenciales.

Implementación de integrales para extracción de t_{11} y t_{33}

En el capítulo 2 se ha concluido que para hacer una descripción correcta de los estados tensionales en la cercanía de la grieta se necesita conocer los FIT y los términos de segundo orden t_{ij} . El valor de t_{11} se obtiene a partir de una integral de interacción introducida en [63] y que se halla implementada en códigos de elementos finitos comerciales, tal como ABAQUS, y a partir de t_{11} se calcula t_{33} .

En los capítulos siguientes se han obtenido modificaciones para las integrales de interacción aplicadas al cálculo de los FIT, pero no se ha realizado ningún comentario sobre el cálculo de t_{ij} . Parece natural un futuro trabajo que consista en implementar la integral modificada para el cálculo de t_{11} .

7.2.3. Trabajos relacionados con otro tipo de singularidades

Borde libre

Se ha introducido un nuevo enriquecimiento, basado en armónicos esféricos, que consigue, en parte, considerar el comportamiento de la singularidad de borde libre en un estudio de XFEM. Sin embargo, no se ha podido demostrar su validez debido a las limitaciones en la discretización.

Consecuentemente debe realizarse una investigación más profunda, que puede incluir la verificación de distintos órdenes de singularidad, la selección de los términos de armónicos esféricos que tienen más peso –y por tanto dan información de la forma

funcional de las funciones analíticas asociadas a la singularidad— y la comprobación del comportamiento en grietas curvas.

Al ser el campo de tensiones de la singularidad de borde libre diferente a la singularidad presente en el frente de grieta, el uso de la integral de interacción para la obtención de los FIT no tiene sentido. Por tanto, es necesario buscar una expresión de la integral de interacción que nos permita obtener información sobre el efecto de esta singularidad en situaciones con modo mixto.

Otras singularidades

La singularidad del frente de grieta y del borde libre no son las únicas asociadas a la existencia de grietas, aparecen otras cuando la estructura de grietas presenta ramificaciones o cambios bruscos en la superficie —que se conocen en inglés como *kinked cracks*—.

Una revisión del estado del arte del estudio de estas singularidades y sus problemáticas debe realizarse para tener una descripción completa del efecto de grietas en sólidos tridimensionales. También, puede resultar de interés añadir enriquecimientos para modelar su comportamiento en XFEM y obtener información sobre el estado presente en esos puntos.

Bibliografía

- [1] ERDOGAN, F. *Fracture mechanics*. International Journal of Solids and Structures, volumen 37 (1–2) (2000), pp. 171–183.
- [2] GRIFFITH, A. A. *The phenomena of rupture and flow in solids*. Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, volumen 221 (1921), pp. 163–198.
- [3] GRIFFITH, A. A. *The theory of rupture*. Proceedings of the First International Congress for Applied Mechanics (1924), pp. 55–63.
- [4] IRWIN, G. R. *Fracture dynamics, fracturing of metals*. American Society for Metals (1948), pp. 147–166.
- [5] OROWAN, E. *Fracture and strength of solids*. Reports on Progress in Physics, volumen 12 (1948), pp. 185–232.
- [6] SNEDDON, I. N. *The distribution of stress in the neighbourhood of a crack in an elastic solid*. Proceedings of the Royal Society London, volumen 187A (1946), pp. 229–260.
- [7] IRWIN, G. R. *Analysis of stresses and strains near the end of a crack traversing a plate*. ASME Journal of Applied Mechanics, volumen 24 (1957), pp. 361–364.
- [8] SIH, G. C. *A review of three-dimensional stress problem for a cracked plate*. International Journal of Fracture Mechanics, volumen 7 (1) (1971), pp. 39–61.
- [9] HARTRANFT, R. J. y SIH, G. C. *The use of eigenfunctions expansions in the general solution of three-dimensional crack problems*. Journal of Mathematics and Mechanics, volumen 19 (2) (1969), pp. 123–138.
- [10] HARTRANFT, R. J. y SIH, G. C. *Stress singularities for a crack with an arbitrary curved front*. Engineering Fracture Mechanics, volumen 9 (3–K) (1977), pp. 705–718.
- [11] *Encyclopedia of Computational Mechanics*. Wiley (2004).
- [12] ZIENKIEWICZ, O. C. y TAYLOR, R. L. *El Método de los Elementos Finitos*, volumen 1. McGraw-Hill y CIMNE, 4^a ed^{ón}. (1994).

- [13] ZIENKIEWICZ, O. C. y TAYLOR, R. L. *El Método de los Elementos Finitos*, volumen 2. McGraw-Hill y CIMNE, 4^a ed^{ón}. (1994).
- [14] SZABÓ, B. A. y BABUŠKA, I. *Finite Element Analysis*. John Wiley & Sons (1991).
- [15] MOËS, N., DOLBOW, J. y BELYTSCHKO, T. *A finite element method for crack growth without remeshing*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, volumen 46 (1999), pp. 131–150.
- [16] STOLARSKA, M., CHOPP, D. L., MOËS, N. ET AL. *Modelling crack growth by level sets in the extended finite element method*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, volumen 51 (2001), pp. 943–960.
- [17] SUKUMAR, N., CHOPP, D. L., MOËS, N. ET AL. *Modeling holes and inclusions by level sets in the extended finite element method*. Computational methods in applied mechanical engineering, volumen 190 (2001), pp. 6183–6200.
- [18] MOËS, N., GRAVOUIL, A. y BELYTSCHKO, T. *Non-planar 3d crack growth by the extended finite element and level sets-Part I: Mechanical model*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, volumen 53 (2002), pp. 2549–2568.
- [19] RICE, J. *A path independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks*. Journal of applied mechanics, volumen 35 (1968), pp. 379–386.
- [20] SHIH, C. F., MORAN, B. y NAKAMURA, T. *Energy release rate along a three-dimensional crack front in a thermally stressed body*. International Journal of Fracture, volumen 30 (2) (1986), pp. 79–102.
- [21] LI, F. Z., SHIH, C. F. y NEEDLEMAN, A. *A comparison of methods for calculating energy release rates*. Engineering Fracture Mechanics, volumen 21 (2) (1985), pp. 405–421.
- [22] RAJARAM, H., SOCRATES, S. y PARKS, D. M. *Application of domain integral methods using tetrahedral elements to the determination of stress intensity factors*. Engineering Fracture Mechanics, volumen 66 (2000), pp. 455–482.
- [23] GOSZ, M., DOLBOW, J. y MORAN, B. *Domain integral formulation for stress intensity factor computation along curved three-dimensional interface cracks*. International Journal of Solids and Structures, volumen 35 (15) (1998), pp. 1763–1783.
- [24] GOSZ, M. y MORAN, B. *An interaction energy integral method for computation of mixed-mode stress intensity factors along non-planar crack fronts in three dimensions*. Engineering Fracture Mechanics, volumen 69 (2002), pp. 299–319.

- [25] GRAVOUIL, A., MOËS, N. y BELYTSCHKO, T. *Non-planar 3d crack growth by the extended finite element and level sets-Part II: Level set update*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, volumen 53 (2002), pp. 2569–2586.
- [26] BENTHEM, J. P. *State of stress at the vertex of quarter-infinite crack in a half-space*. International Journal of Solids and Structures, volumen 13 (1977), pp. 479–492.
- [27] BAŽANT, Z. P. y ESTENSSORO, L. F. *Surface singularity and crack propagation*. International Journal of Solids and Structures, volumen 15 (1979), pp. 405–426.
- [28] TAYLOR, R. L. *FEAP– A Finite Element Analysis Program. Version 7.5 User Manual*. Department of Civil and Environmental Engineering University of California at Berkeley (2004).
- [29] TAYLOR, R. L. *FEAP– A Finite Element Analysis Program. Version 7.5 Programmer Manual*. Department of Civil and Environmental Engineering University of California at Berkeley (2003).
- [30] TAYLOR, R. L. *FEAP– A Finite Element Analysis Program. Version 7.5 Theory Manual*. Department of Civil and Environmental Engineering University of California at Berkeley (2003).
- [31] ANDERSON, T. L. *Fracture mechanics: fundamentals and applications*. CRC press, 3 ed^{ón}. (2005).
- [32] ATLURI, S. N. *Computational methods in the mechanic of the fracture*, volumen 2 de *Computational Methods in Mechanics*. Elsevier science publisher (1986).
- [33] BARSON, J. M. y ROLFE, S. T. *Fracture and fatigue control in structures*. Prentice Hall, 2 ed^{ón}. (1987).
- [34] BROEK, D. *Elementary Engineering Fracture Mechanics*. Martinus Nijhoff Publishers, 4 ed^{ón}. (1986).
- [35] BUI, H. D. *Fracture mechanics inverse problems and solutions*, volumen 139 de *Solid Mechanics and its Applications*. Springer (2006).
- [36] EWALDS, H. L. y WANHILL, R. J. H. *Fracture Mechanics*. Edward Arnold, Ltd. (1984).
- [37] GDOUTOS, E. E. *Fracture Mechanics: an Introduction*. Springer, 2 ed^{ón}. (2005).
- [38] HILLS, D. A., KELLY, P. A., DAI, D. N. ET AL. *Solution of Crack Problems: The Distributed Dislocation Technique*. Solid Mechanics and its Applications. Kluwer Academic Publishers (1996).
- [39] OWEN, D. R. J. y FAWKES, A. J. *Engineering Fracture Mechanics: Numerical Methods and Applications*. Pineridge Press, Ltd. (1983).

- [40] LIEBOWITZ, H. *Fracture an advanced treatise*, volumen 2. Academic Press, Inc (1968).
- [41] WIEGHARDT, K. *Über das Spalten und Zerreißen elastischer Körper*. *Mathematik und Physik*, volumen 55 (1907), pp. 60–103.
- [42] WIEGHARDT, K. *On splitting and cracking of elastic bodies*. *Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures*, volumen 18 (12) (1995), pp. 1371–1405. Traducido del alemán por H.P. Rossmannith.
- [43] WILLIAMS, M. L. *On the stress distribution at the base of a stationary crack*. *Journal of Applied Mechanics*, volumen 24 (1957), pp. 109–114.
- [44] OLAOSEBIKAN, L. *on the variation of stress along the front of cracks and surface flaws*. *Engineering Fracture Mechanics*, volumen 37 (1) (1990), pp. 221–235.
- [45] GRAY, L. J. y GLAUCIO, H. P. *Crack tip interpolation, revisited*. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, volumen 58 (2) (1998), pp. 428–455.
- [46] LEUNG, A. Y. T. y SU, R. K. L. *Eigenfunction expansion for penny-shaped and circumferencial cracks*. *International Journal of Fracture*, volumen 89 (1998), pp. 205–222.
- [47] NEWMAN, J. C. J. y RAJU, I. *Stress intensity factor equations for cracks in three-dimensional finite bodies*. *American Society for Testing and Materials STP 791* (1983), pp. 238–265.
- [48] NEWMAN, J. C. J. y RAJU, I. *Stress intensity factor equations for cracks in three-dimensional finite bodies subjected to tension and bending loads*. *NASA Technical memorandum 85793* (1984).
- [49] MURAKAMI, Y. *Analysis of stress intensity factors of modes I, II and III for inclined surface cracks of arbitrary shape*. *Engineering Fracture Mechanics*, volumen 22 (4) (1985), pp. 101–114.
- [50] MURAKAMI, Y. *Stress Intensity Factors Handbook*. Pergamon (1987).
- [51] KWON, S. W. y SUN, C. T. *Characteristics of three-dimensional stress fields in plates with a trough-the-thickness crack*. *International Journal of Fracture*, volumen 104 (2000), pp. 291–315.
- [52] MATOS, P. F. P. D. y NOWELL, D. *The influence of the Poisson's ratio and corner points singularities in three dimensional plasticity induced fatigue crack closure: A numerical study*. *International Journal of Fatigue*, volumen 30 (2008), pp. 1930–1943.
- [53] GINER, E., FERNÁNDEZ ZÚÑIGA, D., FERNÁNDEZ SÁEZ, J. ET AL. *A unified analysis of the in-plane and out-of-plane constraints in 3-D LEFM*. En revisión (2012).

- [54] GONZÁLEZ ALBUIXECH, V. F., GINER, E., FERNÁNDEZ SÁEZ, J. ET AL. *Influence of the t_{33} -stress state around corner cracks in an elastic plate*. Engineering Fracture Mechanics, volumen 78 (2011), pp. 412–427.
- [55] NAKAMURA, T. y PARKS, D. M. *Three-dimensional stress field near the crack front of a thin elastic plate*. Journal of Applied Mechanics, volumen 55 (1988), pp. 805–813.
- [56] GUO, Z. *Three dimensional analysis of plastic constraint for through-thickness cracked bodies*. Engineering Fracture Mechanics, volumen 62 (1999), pp. 383–407.
- [57] KIM, Y., ZHU, X. K. y CHAO, Y. J. *Quantification of constraint on elastic 3d crack front by the $J-A_2$ three-term solution*. Engineering Fracture Mechanics, volumen 68 (2001), pp. 895–914.
- [58] PETTI, J. P. y DODD, R. H. J. *Constraint comparisons for common fracture specimens: $C(T)$ s and $SE(B)$ s*. Engineering Fracture Mechanics, volumen 71 (2004), pp. 2677–2683.
- [59] BETEGÓN, C., BELZUNCE, F. J. y RODRÍGUEZ, C. *A two parameter fracture criterion for high strength low carbon steel*. Acta Materialia, volumen 44 (3) (1996), pp. 1055–1061.
- [60] HIESE, W. *Gültigkeitskriterien zur Bestimmung von Scherbruchzähigkeiten*. Tesis doctoral, Fakultät für Maschinenbau, Ruhr-Universität Bochum (2000).
- [61] NEIMITZ, A. y GALKIEWICZ, J. *Fracture toughness of structural components: influence of constraint*. International Journal of Pressure Vessels and Piping, volumen 83 (2006), pp. 42–54.
- [62] SHEN, H. y GUO, W. *3d constraint effect on 3d fatigue crack propagation*. International Journal of Fatigue, volumen 27 (2005), pp. 617–623.
- [63] NAKAMURA, T. y PARKS, D. M. *Determination of elastic t -stress along three dimensional crack fronts using an interaction integral*. International Journal of Solids and Structures, volumen 29 (13) (1992), pp. 1597–1611.
- [64] MESHII, T. y TANAKA, T. *Experimental t_{33} -stress formulation of test specimen thickness effect on fracture toughness in the transition temperature region*. Engineering Fracture Mechanics, volumen 77 (2010), pp. 867–877.
- [65] GINER, E., FERNÁNDEZ ZÚÑIGA, D., FERNÁNDEZ SÁEZ, J. ET AL. *On the J_{x_1} -integral and the out-of-plane constraint in a 3D elastic cracked plate loaded in tension*. International Journal of Solids and Structures, volumen 47 (7-8) (2010), pp. 934–946.
- [66] QU, J. y WANG, X. *Solutions of t -stresses for quarter-elliptical corner cracks in finite thickness plates subject to tension and bending*. International Journal of Pressure Vessels and Piping, volumen 83 (2006), pp. 593–606.

- [67] WANG, X. y BELL, R. *Elastic t -stress solutions for semi-elliptical surface cracks in finite thickness plates subject to non-uniform stress distributions*. Engineering Fracture Mechanics, volumen 71 (2004), pp. 1477–1496.
- [68] WANG, X., LEWIS, T. y BELL, R. *Estimations of the t -stress for small cracks at notches*. Engineering Fracture Mechanics, volumen 73 (2006), pp. 366–375.
- [69] GUO, W. *Elasto-plastic three-dimensional crack border field—I singular structure of the field*. Engineering Fracture Mechanics, volumen 46 (1993), pp. 93–104.
- [70] GUO, W. *Elasto-plastic three-dimensional crack border field—II asymptotic solution for the field*. Engineering Fracture Mechanics, volumen 46 (1993), pp. 105–113.
- [71] GUO, W. *Elasto-plastic three-dimensional crack border field—III fracture parameters*. Engineering Fracture Mechanics, volumen 51 (1) (1995), pp. 51–71.
- [72] SHE, C. y GUO, W. *The out-of-plane constraint of mixed-mode cracks in thin elastic plates*. International Journal of Solids and Structures, volumen 44 (2007), pp. 3021–3034.
- [73] ZHANG, B. y GUO, W. *Three-dimensional stress state around quarter-elliptical corner cracks in elastic plates subjected to uniform tension loading*. Engineering Fracture Mechanics, volumen 74 (2007), pp. 386–398.
- [74] ZHAO, J. y GUO, W. *The in-plane and out-of-plane stress constraint factors and $K - T - T_z$ description of a semi-elliptical surface crack*. International Journal of Fatigue, volumen 29 (2007), pp. 435–443.
- [75] BATHE, K. J. *Finite Element Procedures*. Prentice-Hall (1996).
- [76] STRANG, G. y FIX, G. J. *An Analysis of the Finite Element Method*. Prentice-Hall (1973).
- [77] CAREY, G. F. y ODEN, J. T. *Finite Elements: A Second Course*, volumen II de *The Texas Finite Element Series*. Prentice-Hall (1983).
- [78] HUEBNER, K., THORNTON, E. y BYROM, T. *Finite Element Procedures in Engineering Analysis*. John Wiley & Sons, 3 ed^{ón}. (1995).
- [79] BURNETT, D. S. *Finite Element Analysis: From Concepts to Applications*. Addison-Wesley (1987).
- [80] CIARLET, P. G. *The Finite Element Method for Elliptic Problems*. North-Holland, 2 ed^{ón}. (1987).
- [81] ABAQUS. *Abaqus/Standard User's Manual v. 6.11*. Hibbit, Karlsson & Sorensen, Inc. (2011).
- [82] LAWRENCE, K. L. *ANSYS Tutorial 10*. Schroff Development Corporation (2005).

- [83] *ELMER. open source finite element software for multiphysical problems* (2011). URL <http://www.csc.fi/english/pages/elmer>.
- [84] *CAE Linux. open-source powered engineering* (2011). URL <http://caelinux.com/CMS/>.
- [85] BARSOUM, R. *Triangular quarter-point elements as elastic and perfectly plastic crack tip elements*. International Journal of Numerical Methods in Engineering, volumen 11 (1977), pp. 85–98.
- [86] GALLAGHER, R. *A review of finite element techniques in fracture mechanics*. En A. Luxmoore y D. Owen, eds., *1st International Conference on Numerical Methods in Fracture Mechanics*. Pineridge, Swansea (1978), pp. 1–25.
- [87] FAWKES, A. J., OWEN, D. R. J. y LUXMOORE, A. R. *An assessment of crack tip singularity models for use with isoparametric elements*. Engineering Fracture Mechanics, volumen 11 (1979), pp. 143–159.
- [88] KWON, Y. W. y AKIN, J. E. *Development of a derivative singular element for application to crack propagation problems*. Computers and Structures, volumen 31 (3) (1989), pp. 467–471.
- [89] BABUŠKA, I., CALOZ, G. y OSBORN, J. *Special finite element methods for a class of second order elliptic problems with rough coefficients*. SIAM Journal on Numerical Analysis, volumen 31 (1994), pp. 945–981.
- [90] MELENK, J. M. y BABUŠKA, I. *The partition of unity finite element method: Basic theory and applications*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, volumen 39 (1996), pp. 289–314.
- [91] BABUŠKA, I. y MELENK, J. M. *The partition of unity method*. International Journal of Numerical methods in engineering, volumen 40 (1997), pp. 727–758.
- [92] FLEMING, M., CHU, Y. A., MORAN, B. ET AL. *Enriched element-free galerkin methods for crack-tip field*. International Journal of Numerical method in engineering, volumen 40 (1997), pp. 1483–1504.
- [93] BELYTSCHKO, T. y BLACK, T. *Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing*. International Journal of Numerical Methods in Engineering, volumen 45 (5) (1999), pp. 601–620.
- [94] DAUX, C., MOËS, N., DOLBOW, J. ET AL. *Arbitrary branched and intersecting cracks with the extended finite element method*. International Journal of Numerical Methods in Engineering, volumen 48 (2000), pp. 1741–1760.
- [95] SUKUMAR, N., MOËS, N., MORAN, B. ET AL. *Extended finite element method for three-dimensional crack modelling*. International Journal of Numerical Methods in Engineering, volumen 48 (2000), pp. 1549–1570.

- [96] DOLBOW, J., MOËS, N. y BELYTSCHKO, T. *Modelling fracture in Mindlin-Reissner plates with the extended finite element method*. International Journal of Solids and Structures, volumen 37 (2000), pp. 7161–7183.
- [97] DOLBOW, J., MOËS, N. y BELYTSCHKO, T. *An extended finite element method for modelling crack growth with frictional contact*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, volumen 190 (2001), pp. 6825–6846.
- [98] STROUBOULIS, T., BABUŠKA, I. y COPPS, K. *The design and analysis of the generalized finite element method*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, volumen 181 (2000), pp. 43–69.
- [99] STROUBOULIS, T., COPPS, K. y BABUŠKA, I. *The generalized finite element method: an example of its implementation and illustration of its performance*. International Journal of Numerical Methods in Engineering, volumen 47 (2000), pp. 1401–1417.
- [100] STROUBOULIS, T., COPPS, K. y BABUŠKA, I. *The generalized finite element method*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, volumen 190 (2001), pp. 4081–4193.
- [101] DUARTE, C. A., BABUŠKA, I. y ODEN, J. T. *Generalized finite element methods for three dimensional structural mechanics problems*. Computational Structures, volumen 77 (2000), pp. 215–232.
- [102] SETHIAN, J. A. *Theory, Algorithms, and Applications of Level Set Methods for Propagating Interfaces*. Acta Numerica, Cambridge University Press (1996).
- [103] SETHIAN, J. A. *Level Set Methods; Evolving Interfaces in Geometry, Fluid Mechanics, Computer Vision and Material Sciences*. Cambridge University Press, 1 ed^{ón}. (1996).
- [104] SETHIAN, J. A. *Level Set Methods; Evolving Interfaces in Geometry, Fluid Mechanics, Computer Vision and Material Sciences*. Cambridge University Press, 2 ed^{ón}. (1999).
- [105] OSHER, S. y FEDKIW, R. P. *Level set methods: An overview and some recent results*. Journal of Computational Physics, volumen 169 (2001), pp. 463–502.
- [106] OSHER, S. y FEDKIW, R. *Level Set Methods and Dynamic Implicit Surfaces*. Springer-Verlag New York, Applied Mathematical Sciences (2002).
- [107] BARTH, T. J. y SETHIAN, J. *Numerical schemes for the Hamilton-Jacobi and level set equations on triangulated domains*. Journal of Computational Physics, volumen 145 (1) (1998), pp. 1–40.
- [108] MOURAD, H. M., DOLBOW, J. y GARIKIPATI, K. *An assumed-gradient finite element method for the level set equation*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, volumen 64 (2005), pp. 1009–1032.

- [109] BELYTSCHKO, T., MOËS, N., USUI, S. ET AL. *Arbitrary discontinuities in finite elements*. International Journal of Numerical Methods in Engineering, volumen 50 (2001), pp. 993–1013.
- [110] DUFLOT, M. *A study of the representation of cracks with level sets*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, volumen 70 (11) (2006), pp. 1261–1302.
- [111] FRIES, T. P. y BELYTSCHKO, T. *The generalized/extended finite element method: An overview of the method and its applications*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, volumen 84 (2010), pp. 253–304.
- [112] STAZI, F. L., BUDYN, E., CHESSA, J. ET AL. *An extended finite element method with higher-order elements for curved cracks*. Computational Mechanics, volumen 31 (2003), pp. 38–48.
- [113] CHESSA, J., WANG, H. y BELYTSCHKO, T. *On the construction of blending elements for local partition of unity enriched finite elements*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, volumen 57 (2003), pp. 1015–1038.
- [114] FRIES, T. P. *A corrected XFEM approximation without problems in blending elements*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, volumen 75 (5) (2008), pp. 503–532.
- [115] TARANCÓN, J. E., VERCHER, A., GINER, E. ET AL. *Enhanced blending elements for x fem applied to linear elastic fracture mechanics*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, volumen 77 (1) (2009), pp. 126–148.
- [116] BÉCHET, E., MINNEBO, H., MOËS, N. ET AL. *Improved implementation and robustness study of the X-FEM for stress analysis around cracks*. International Journal of Numerical Methods in Engineering, volumen 64 (2005), pp. 1033–1056.
- [117] LABORDE, P., POMMIER, J., RENARD, Y. ET AL. *High-order extended finite element method for cracked domains*. International Journal of Numerical Methods in Engineering, volumen 64 (2005), pp. 354–381.
- [118] VERCHER MARTINEZ, A. *Mejora de los elementos de transición en XFEM aplicado a Mecánica de la Fractura Elástica Lineal*. Tesis doctoral, Universitat Politècnica de València (2010).
- [119] SUKUMAR, N. y PREVOST, J. H. *Modeling quasi-static crack growth with the extended finite element method part I: Computer implementation*. International Journal of Solids and Structures, volumen 40 (26) (2003), pp. 7513–7537.
- [120] KARIHALOO, B. L. y XIAO, Q. Z. *Modelling of stationary and growing cracks in FE framework without remeshing: a state-of-the-art review*. Computers and Structures, volumen 81 (2003), pp. 119–129.

- [121] XIAO, Q. y KARIHALOO, B. *Improving the accuracy of XFEM crack tip fields using higher order quadrature and statically admissible stress recovery*. International Journal of Numerical Methods in Engineering, volumen 66 (9) (2006), pp. 1378–1410.
- [122] PARK, K., PEREIRA, J. P., DUARTE, C. A. ET AL. *Integration of singular enrichment functions in the generalized/ extended finite element methods for three-dimensional problems*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, volumen 78 (10) (2009), pp. 1220–1257.
- [123] VENTURA, G. *On the elimination of quadrature subcells for discontinuous functions in the extended finite-element method*. International Journal of Numerical Methods in Engineering, volumen 66 (2006), pp. 761–795.
- [124] YAZID, A., ABDELKADER, N. y ABDELMADJID, H. *A state-of-the-art review of the x-fem for computational fracture mechanics*. Applied Mathematical Modelling, volumen 33 (12) (2009), pp. 4269 – 4282.
- [125] DOLBOW, J. E. *An extended finite element method with discontinuous enrichment for applied mechanics*. Tesis doctoral, Northwestern University, Evanston. Illinois. EEUU. (1999).
- [126] BORDAS, S. *Extended finite element and level set methods with applications to growth of cracks and biofilms*. Tesis doctoral, Northwestern university, Evanston. Illinois. EEUU. (2003).
- [127] MOHAMMADI, S. *Extended finite element method for Fracture Analysis of Structures*. Blackwell Publishing Ltd (2008).
- [128] GINER, E., SUKUMAR, N., TARANCÓN, J. E. ET AL. *An Abaqus implementation of the extended finite element method*. Engineering Fracture Mechanics, volumen 76 (2009), pp. 347–368.
- [129] STOLARSKA, M. A. *Modelling crack growth by level sets*. Tesis doctoral, Northwestern University (2002).
- [130] PRABEL, B., COMBESURE, A., GRAVOUIL, A. ET AL. *Level set X-FEM non-matching meshes: Application to dynamic crack propagation in elastic-plastic media*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, volumen 69 (2007), pp. 1553–1569.
- [131] DUDDU, R., BORDAS, S., CHOPP, D. ET AL. *A combined extended finite element and level set method for biofilm growth*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, volumen 74 (5) (2008), pp. 848–870.
- [132] OSHER, S. y SETHIAN, J. A. *Fronts propagating with curvature dependent speed: Algorithms based on Hamilton-Jacobi formulations*. Journal of Computational Physics, volumen 79 (1) (1988), pp. 12–49.

- [133] ADALSTEINSSON, D. y SETHIAN, J. A. *A fast level set method for propagating interfaces*. Journal of Computational Physics, volumen 118 (1994), pp. 269–277.
- [134] SETHIAN, J. A. y POPOVICI, A. M. *Three dimensional travelttime computation using the fast marching method*. International Meeting of Society of Exploration Geophysicist, volumen 1778 (1998), pp. 1778–1781.
- [135] SUKUMAR, N., CHOPP, D. L. y MORAN, B. *Extended finite element method and fast marching method for three-dimensional fatigue crack propagation*. Engineering Fracture Mechanics, volumen 70 (2003), pp. 29–48.
- [136] SUKUMAR, N., CHOPP, D. L., BECHET, E. ET AL. *Three-dimensional non-planar crack growth by a coupled extended finite element and fast marching method*. International Journal of Numerical Methods in Engineering, volumen 76 (5) (2008), pp. 727–748.
- [137] QUARTERONI, A., SACCO, R. y SALERI, F. *Numerical mathematics*. Springer, 2 ed^{ón}. (2007).
- [138] *Element partitioning code in 2-d and 3-d for the extended finite element method* (2011). URL <http://dilbert.engr.ucdavis.edu/~suku/xfem>.
- [139] STROUD, A. *Approximate Calculation of Multiple Integrals*. Prentice Hall (1971), 431 pp.
- [140] KEAST, P. *Moderate-degree tetrahedral quadrature formulas*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, volumen 55 (1986), pp. 339–348.
- [141] RÍOS, S. *Métodos estadísticos*. Castillo (1967).
- [142] GINER MARAVILLA, E. *Estimación del error de discretización en el cálculo del factor de intensidad de tensiones mediante elementos finitos*. Tesis doctoral, Universitat Politècnica de València (2001).
- [143] ROOKE, D. y CARTWRIGHT, D. *Compendium of stress Intensity Factors*. HSMO London (1976).
- [144] SIH, G. C. *Handbook of Stress Intensity Factors*. Lehigh University, Institute of Fracture and Solid Mechanics (1973).
- [145] TADA, H., PARIS, P. y IRWIN, G. *The Stress Analysis of Cracks Handbook*. Saint Louis : Paris Productions (Del Research Corp.) (1985).
- [146] SIH, G. C. *Methods of Analysis and Solutions of Crack Problems*, volumen 1 de *Mechanics of Fracture*. Noordhoff International Publishing (1973).
- [147] ALIABADI, M. H. y ROOKE, D. P. *Numerical Fracture Mechanics. Computational Mechanics Publications: Solid Mechanics and its Applications*. Kluwer Academic Publishers (1991).

- [148] CHEN, F. H. K. y SHIELD, R. T. *Conservation laws in elasticity of the J-integral type*. Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik (ZAMP), volumen 28 (1977), pp. 1–22.
- [149] SHIH, C. F. y ASARO, R. J. *Elastic-plastic analysis of cracks on bimaterial interfaces: Part I - small scale yielding*. Journal of Applied Mechanics, volumen 55 (1988), pp. 299–316.
- [150] NAHTA, R. y MORAN, B. *Domain integrals for axisymmetric interface crack problems*. International Journal of Solids and Structures, volumen 30 (15) (1993), pp. 2027 – 2040.
- [151] WALTERS, M. C., PAULINO, G. H. y DODDS JR., R. H. *Interaction integral procedure for 3-d curved cracks including surface traction*. Engineering Fracture Mechanics, volumen 772 (2005), pp. 1635–1663.
- [152] WALTERS, M. C. *Domain-integral methods for computation of fracture-mechanics parameters in three-dimensional functionally-graded solids*. Tesis doctoral, university of Illinois at Urbana-Champaign (2005).
- [153] ZULFIGAR, A. *Stress intensity factor computations for general curvilinear cracks in complex components*. Tesis doctoral, Northwestern University (2001).
- [154] STERN, M., BECKER, E. B. y DUNHAM, R. S. *A contour integral computation of mixed-mode stress intensity factors*. International Journal of Fracture, volumen 12 (3) (1976), pp. 359–368.
- [155] MORAN, B. y SHIH, C. *Crack tip and associated domain integrals from momentum and energy balance*. Engineering Fracture Mechanics, volumen 27 (6) (1987), pp. 615 – 642.
- [156] ERIKSSON, K. *A general expression for an area integral of a point-wise J for a curved crack front*. International Journal of Fracture, volumen 106 (2000), pp. 65–80.
- [157] ERIKSSON, K. *A domain independent integral expression for the crack extension force of a curved crack in three dimensions*. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, volumen 50 (2002), pp. 381–403.
- [158] ESHELBY, J. D. *The continuum theory of lattice defects*. volumen 3 de *Solid State Physics* (1956), pp. 79 – 144.
- [159] ESHELBY, J. D. *The elastic energy-momentum tensor*. Journal of Elasticity, volumen 5 (3-4) (1975), pp. 321–335.
- [160] SANDERS, J. L. J. *On the Griffith-Irwin fracture theory*. Journal of Applied Mechanics, volumen 27 (1960), pp. 652–353.
- [161] CHEREPANOV, G. P. *Crack propagation in continuous media*. Journal of Applied Mathematics and Mechanics, volumen 31 (1967), pp. 503–512.

- [162] CHEREPANOV, G. P. *Mechanics of Brittle Fracture. Traducido del ruso por De Wit, R. y Cooley, W.* McGraw-Hill (1979).
- [163] SIMMONDS, J. G. y NICHOLSON, J. W. *On Sanders' energy-release rate integral and conservation laws in finite elastostatics.* Archive for Rational Mechanics and Analysis, volumen 76 (1981), pp. 1–8.
- [164] MUSKHELISHVILI, N. I. *Some basic problems in the mathematical theory of elasticity.* Leiden: Noordhoff (1952).
- [165] COTTERELL, B. y RICE, J. R. *Slightly curved or kinked cracks.* International Journal of Fracture, volumen 16 (1980), pp. 155–169.
- [166] SNEDDON, I. y LOWENGRUB, M. *Crack Problems in the Classical Theory of Elasticity.* John Wiley & Sons (1969).
- [167] SÁEZ, A., ARIZA, M. P. y DOMÍNGUEZ, J. *Three-dimensional fracture analysis in transversely isotropic solids.* Engineering Analysis with Boundary Elements, volumen 20 (4) (1997), pp. 287 – 298.
- [168] IRWIN, G. R. *Crack-extension force for a part-through crack in a plate.* Journal of Applied Mechanics, volumen 29 (4) (1962), pp. 651–654.
- [169] KASSIR, M. K. y SIH, G. C. *Three dimensional stress distribution around an elliptical crack under arbitrary loadings.* Journal of Applied Mechanics, volumen 33 (1966), pp. 601–611.
- [170] NULLER, B., KARAPETIAN, E. y KACHANOV, M. *On the stress intensity factor for the elliptical crack.* International Journal of Fracture, volumen 92 (1998), pp. 15–20.
- [171] GREGORY, R. D. *The general form of the three-dimensional elastic field inside an isotropic plate with free faces.* Journal of Elasticity, volumen 28 (1992), pp. 1–28.
- [172] FOLIAS, E. S. *On the three-dimensional theory of cracked plates.* Journal of Applied Mechanics, volumen 42 (3) (1975), pp. 663–674.
- [173] ZHU, W. X. *Singular stress field of three-dimensional crack.* Engineering Fracture Mechanics, volumen 36 (2) (1990), pp. 239–244.
- [174] SMITH, C. W., EPSTEIN, J. S. y REZVANI, M. *Measurement of dominant eigenvalues in cracked body problems.* International Journal of Fracture, volumen 39 (1989), pp. 15–24.
- [175] HUMBERT, L. *Formulation des effets tridimensionnels dans les plaques élastiques fissurées en mode I à partir de la méthode d'éléments finis et de l'interférométrie. Application à l'exploitation de la méthode des caustiques.* Tesis doctoral, Université de Poitiers (2000).

- [176] POOK, L. P. *Crack profiles and corner point singularities*. Fatigue fracture engineering material structures, volumen 23 (2000), pp. 141–150.
- [177] LEUNG, A. Y. T. y SU, R. K. L. *Order of the singular stress fields of through-thickness cracks*. International Journal of Fracture, volumen 75 (1996), pp. 85–93.
- [178] HUTAŘ, P., NÁHLÍK, L. y KNĚSL, Z. *The effect of a free surface on fatigue crack behaviour*. International Journal of Fatigue, volumen 32 (8) (2010), pp. 1265 – 1269.
- [179] HEYDER, M., KOLK, K. y KUHN, G. *Numerical and experimental investigations of the influence of corner singularities on 3d fatigue crack propagation*. Engineering Fracture Mechanics, volumen 72 (2005), pp. 2095–2105.
- [180] HUTAŘ, P., NÁHLÍK, L. y KNĚSL, Z. *Quantification of the influence of vertex singularities on fatigue crack behavior*. Computational Materials Science, volumen 45 (3) (2009), pp. 653 – 657.
- [181] FOLIAS, E. S. *Method of solution of a class of three-dimensional elastostatic problems under mode I loading*. International Journal of Fracture, volumen 16 (1980), pp. 335–348.
- [182] FOLIAS, E. S. *The 3d stress field at the intersection of a hole and a free surface*. International Journal of Fracture, volumen 35 (1987), pp. 187–194.
- [183] BECKER, I. y SCHNACK, E. *Numerical calculation of singularities at reentrant edges and corners for three dimensional crack problems*. Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik, Journal of Applied Mathematics and Mechanics, volumen 70 (11) (1990), pp. 529–530.
- [184] POOK, L. P. *Some implications of corner point singularities*. Engineering Fracture Mechanics, volumen 48 (3) (1994), pp. 367–378.
- [185] LEUNG, A. Y. T. y SU, R. K. L. *A numerical study of singular stress field of 3d cracks*. Finite elements in Analysis and Design, volumen 18 (1995), pp. 389–401.
- [186] DIMITROV, A., ANDRĂ, H. y SCHNACK, E. *Efficient computation of order and mode of corner singularities in 3-d elasticity*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, volumen 52 (2001), pp. 805–827.
- [187] *Spherical harmonic. From MathWorld—A Wolfram Web Resource* (2012). URL <http://mathworld.wolfram.com/SphericalHarmonic.html>.
- [188] FERRERS, N. M. *An elementary treatise on spherical harmonics and subjects connected to them*. Macmillan (1877).
- [189] GROEMER, H. *Geometric applications of Fourier series and spherical harmonics*. Cambridge University Press (1996).

- [190] JACKSON, J. D. *Classical Electrodynamics*. John Wiley, 2 ed^{ón}. (1985).
- [191] RAJU, I. S. y NEWMAN, J. C. *Three-dimensional finite-element. Analysis of finite-thickness fracture specimens*. NSA, Report TN D-8414 May (1977), pp. 1–40.
- [192] CHENG, K. W. y FRIES, T. P. *Higher-order XFEM for curved strong and weak discontinuities*. International Journal of Numerical Methods in Engineering, volumen 82 (2010), pp. 564–590.
- [193] AINSWORTH, M. y SENIOR, B. *Aspects of an adaptive hp-finite element method: Adaptive strategy, conforming approximation and efficient solvers*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, volumen 150 (1997), pp. 65–87.
- [194] NIEKAMP, R. y STEIN, E. *An object-oriented approach for parallel two- and three-dimensional adaptive finite element computations*. Computers & Structures, volumen 80 (2002), pp. 317–328.
- [195] AINSWORTH, M., DEMKOWICZ, L. y KIM, C. W. *Analysis of the equilibrated residual method for a posteriori error estimation on meshes with hanging nodes*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, volumen 196 (2007), pp. 3493–3507.
- [196] HEUVELINE, V. y SCHIEWECK, F. *H^1 -interpolation on quadrilateral and hexahedral meshes with hanging nodes*. Journal Computing, volumen 80 (2007), pp. 203–220.
- [197] FRIES, T. P., BYFUT, A., ALIZADA, A. ET AL. *Hanging nodes and XFEM*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, volumen 196 (2011), pp. 404–430.

