Sobre las Matrices Totalmente No Positivas

Cantó, Begoña[(1)], Cantó, Rafael[(1)], Urbano. Ana M.[(1)]
(1) Instituto de Matemática Multidisciplinar. Universitat Politècnica de València. Camino de Vera s/n 46022 Valencia. e-mail: {bcanto,rcanto,amurbano}@mat.upv.es

RESUMEN

En este trabajo presentamos un procedimiento para construir un tipo de matrices llamadas totalmente no positivas, estudiar sus propiedades y obtener las relaciones que tienen con otra clase de matrices llamadas totalmente no negativas.

Palabras clave: Álgebra lineal, matrices totalmente no positivas, factorización LU.

INTRODUCCIÓN

Las matrices aparecen de forma natural en diferentes disciplinas tales como Geometría, Estadística, Economía, Informática, Física, Robótica, etc. Si se clasifica una matriz respecto al signo de sus menores, aparecen estas clases: matrices totalmente no positivas, t.n.p, (totalmente negativas, t.n.) si todos sus menores son no positivos (negativos); matrices parcialmente negativas, llamadas N-matrices, si todos sus menores principales son negativos; matrices no negativas, TN (matrices positivas, TP) si todos sus menores son todos no negativos (positivos). Existen muchos trabajos relacionados con estas clases de matrices, ya que las matrices t.n.p. y t.n. son generalizaciones de las N-matrices que se utilizan en el estudio de modelos económicos [1,2]; y las matrices TN y TP cuentan con muchas aplicaciones en las áreas de Estadística, Sistemas mecánicos, Análisis real y complejo, Biología, Teoría de la aproximación, Diseño geométrico asistido por ordenador, Combinatoria, Economía, …

El cálculo del signo de cada uno de los posibles menores que se pueden obtener en una matriz, desde orden 1 hasta el valor de su determinante, no es una tarea sencilla. Por ello, resulta importante conocer diferentes caracterizaciones de estas clases de matrices y así poder asegurar en que clase se encuentra una matriz sin necesidad de calcularlo. Para ello se aplican los métodos de eliminación de Gauss y de Neville que nos permiten obtener factorizaciones de tipo LDU, sus propiedades y también su forma canónica de Jordan (véase, entre otros, los siguientes trabajos y sus referencias [3,4,5,6]). Otro problema a considerar es la construcción de matrices que pertenezcan a estas clases y así resolver las cuestiones abiertas que las relacionan entre sí, como, por ejemplo, si dada una matriz TN es posible obtenerla como producto de dos matrices t.n.p. Para resolver este problema, en este trabajo presentamos un procedimiento que construye matrices t.n.p. basándose en un proceso presentado en [7] para obtener matrices TN.

DEFINICIONES Y PROPIEDADES

Antes de abordar el problema, recordamos las siguientes definiciones y propiedades. Llamamos $A = (a_{ij})$ a una matriz de orden n con coeficientes reales. A lo largo de este trabajo distinguimos dos tipos de matrices t.n.p. que definimos a continuación.

Definición 1. Si $a_{11} < 0$, entonces A se denomina matriz t.n.p. de tipo I. Por otra parte, si $a_{11} = 0$, pero $a_{12} < 0$ y $a_{21} < 0$, entonces A es una matriz t.n.p. de tipo II.

Recordamos que el rango de una matriz A, *rg(A)*, es el orden del mayor menor no nulo obtenido en la matriz A, y su rango principal, *p-rg(A)*, es el orden del mayor menor principal no nulo de A.

Definición 2. Una terna de enteros positivos (n, r, p) se llama terna $(1, i_2, \ldots, i_p)$-negativamente realizable de tipo I (tipo II) si existe una matriz t.n.p. de tipo I (tipo II) $A = (a_{ij})$ de orden n con rg(A) = r, p-rg(A) = p, $\{1, i_2, \ldots, i_p\}$ ($i_2 = 2$) como su secuencia de los primeros p-índices de A.

Si una matriz A satisface las condiciones de la Definición 2, entonces se dice que A es una matriz asociada a la terna (n, r, p) $(1, i_2, \ldots, i_p)$-negativamente realizable de tipo I (tipo II).

En este trabajo se obtiene un procedimiento para calcular una matriz escalonada superior por bloques usando matrices escalonadas inferior por bloques. Por ello, recordamos las siguientes definiciones.

Definición 3. Una matriz es una matriz escalonada superior si la primera entrada no nula en cada fila (llamada pivote) está a la derecha del pivote de la fila anterior y todas las filas nulas están en la parte inferior de la matriz.

Definición 4. Una matriz es una matriz escalonada superior por bloques si cada bloque no nulo, empezando desde la izquierda, está a la derecha del pivote de los bloques no nulos posteriores.

Definición 5. Una matriz es escalonada inferior (escalonada inferior por bloques) si su transpuesta es una matriz escalonada superior (escalonada superior por bloques).

CÁLCULO DE MATRICES TOTALMENTE NO POSITIVAS

En este apartado vamos a obtener un procedimiento para calcular una matriz TN escalonada superior por bloques U de orden n, con rg(U) = r, p-rg(U) = p, y la secuencia de sus primeros p-índices dada por $(1, i_2, \ldots, i_p)$.

A continuación, utilizaremos resultados conocidos sobre las matrices t.n.p con el fin de estudiar las condiciones que deben cumplirse para que el producto de matrices A = LDU sea una matriz t.n.p. de tipo I (tipo II) asociada a la terna (n, r, p) $(1, i_2, \ldots, i_p)$-negativamente realizable, siendo L una matriz TN de orden n invertible y triangular inferior para las matrices t.n.p. de tipo I (una matriz triangular inferior por bloques para las matrices t.n.p. de tipo II), D una matriz diagonal e invertible, y U la matriz TN escalonada superior por bloques que hemos obtenido previamente. En los procedimientos utilizaremos la notación de MatLab para definir las matrices.

Procedimiento 1. Dada una terna de números enteros positivos (n, r, p), se construye una matriz TN escalonada superior por bloques $U = (u_{ij})$ de orden n con rg(U) = r, p-rg(U) = p y la secuencia de sus primeros p-índices dada por $(1, i_2, \ldots, i_p)$.

(1.a) Se obtiene el número de primeros p-índices consecutivos que llamamos s.

(2.a) Si s = p, U = tril(ones(n, n)), en el caso en que n coincida con el valor del último p-índice, ó U = [tril(ones(s, n)); zeros(n-s,n)], en el caso en que no sean coincidentes.

(2.b) Si s ≠ p, la matriz U se obtiene a partir de dos bloques, $U=[\, U_1 \;\; U_2\,]^T$, de esta forma:

(2.b.1) El primer bloque, U_1, es una matriz U_1 = tril(ones(s, n)).

(2.b.2) El segundo bloque, U_2, se obtiene con el producto de las siguientes matrices:

- Una matriz escalonada superior por bloques, V, formada por filas no nulas (cuyos elementos no nulos son 1) y por filas nulas.

- Una matriz, G, que es producto de la matriz identidad por diversas matrices inversas de matrices bidiagonales. Estas matrices bidiagonales tienen unos en la diagonal y el resto de elementos no nulos tienen valor -1.

Tanto las filas no nulas de la matriz V, como las filas que contienen el valor -1 de la matriz G, corresponden a las que contienen los p-índices y a las usadas para conseguir el rango de la matriz.

Procedimiento 2. A partir del Procedimiento 1, se construyen las matrices t.n.p. de tipo I, producto de la matriz U con las matrices L y D definidas al inicio de esta sección, con:

(2.a) L_1 = tril(ones(n, n)).

(2.b) D_1 = diag([-d1, 1, …, 1]) con el coeficiente $d_1 > 0$.

La matriz resultante es $A_1 = L_1D_1U$.

Procedimiento 3. A partir del Procedimiento 1, se construyen las matrices t.n.p. de tipo II, producto de la matriz U con las matrices L y D definidas al inicio de esta sección, con:

(3.a) L_2 = [[0 1 ; 1 0]   zeros(2, n-2); ones(n-2, 1) -ones(n-2, 1) tril(ones(n-2, n-2))].

(3.b) D_2 = diag([-d1, -1, 1, …, 1]) con el coeficiente $d_1 > 0$.

La matriz resultante es $A_2 = L_2D_2U$.

En los procedimientos 2 y 3 el coeficiente d_1 debe verificar lo siguiente,

$$d_1 \geq \sum_{j=2}^{i_p} u_{jn}.$$

Con estas matrices podemos asegurar los siguientes resultados.

Proposición 1. Sea $A_1 = L_1D_1U$ una matriz obtenida utilizando los Procedimientos 1 y 2, entonces A_1 es una matriz t.n.p. de tipo I asociada a la terna (n, r, p) (1, i_2, …, i_p)-negativamente realizable.

Proposición 2. Sea $A_2 = L_2D_2U$ una matriz obtenida utilizando los Procedimientos 1 y 3, entonces A_2 es una matriz t.n.p. de tipo II asociada a la terna (n, r, p) (1, i_2, …, i_p)-negativamente realizable.

Con el fin de clarificar los procedimientos se muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1. Calcular una matriz t.n.p. de tipo I y una matriz t.n.p. de tipo II, asociadas a la terna (6, 4, 3)-negativamente realizable y siendo (1, 2, 5) sus primeros 3-índices.

Por el Procedimiento 1 se obtiene la matriz U = G * V,

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Por el Procedimiento 2, se construyen las matrices

L_1 = tril(ones(6, 6)), D_1 = diag([-6, 1, 1, 1, 1, 1]), $d_1 \geq 1 + 1 + 2 + 2 = 6$.

Por el Procedimiento 3, se construyen las matrices

L_2 = [[0 1 ; 1 0]   zeros(2,4); ones(4,1) -ones(4,1) tril(ones(4, 4))],

D_2 = diag([-7, -1, 1, 1, 1, 1]), $d_1 \geq 1 + 1 + 2 + 2 = 6$.

Finalmente, obtenemos $A_1 = L_1D_1U$, la matriz t.n.p. de tipo I y $A_2 = L_2D_2U$, la matriz t.n.p. de tipo II.

$$A_1 = \begin{pmatrix} -6 & -6 & -6 & -6 & -6 & -6 \\ -6 & -5 & -5 & -5 & -5 & -5 \\ -6 & -5 & -5 & -5 & -4 & -4 \\ -6 & -5 & -5 & -5 & -3 & -2 \\ -6 & -5 & -5 & -5 & -2 & 0 \\ -6 & -5 & -5 & -5 & -2 & 0 \end{pmatrix} y\, A_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -7 & -7 & -7 & -7 & -7 & -7 \\ -7 & -6 & -6 & -6 & -5 & -5 \\ -7 & -6 & -6 & -6 & -4 & -3 \\ -7 & -6 & -6 & -6 & -3 & -1 \\ -7 & -6 & -6 & -6 & -3 & -1 \end{pmatrix}.$$

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo ha sido financiado por el proyecto MTM2017-85669-P-AR.

REFERENCIAS

[1] Bapat, R.B.; Raghavan, T.E.S. (1997). "Nonnegative Matrices and Applications". Cambridge University Press, New York.

[2] Parthasarathy, T. (1990). "N-matrices". *Linear Algebra Appl.,* v. 139, pp. 89-102.

[3] Cantó, R.; Koev, P.; Ricarte, B.; Urbano, A.M. (2008). "LDU-factorization of Nonsingular Totally Nonpositive Matrices". *SIAM J. Matrix Anal. Appl.,* v. 30, pp. 777-782.

[4] Cantó, R.; Peláez, M.J.; Urbano, A.M. (2016). "On the characterization of totally nonpositive matrices". *SeMA Journal,* v. 73, pp. 347-368.

[5] Cantó, B.; Cantó, R.; Urbano, A.M. (2021). "Irreducible totally nonnegative matrices with a prescribed Jordan structure". *Linear Algebra Appl.,* v. 609, pp. 129-151.

[6] Fallat, S.M.; Johnson, C.R. (2021). "Totally Nonnegative Matrices". Princeton Ser. Appl. Math. Princeton Univ. Press, Princeton, New Jersey.

[7] Cantó, R.; Urbano, A.M. (2018). "On the maximum rank of totally nonnegative matrices". *Linear Algebra Appl.,* v. 551, pp. 125-146.