

UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE VALENCIA



Departamento de Comunicaciones



TESIS DOCTORAL

Modelado con técnicas modales de estructuras de
microondas basadas en guías N-furcadas arbitrariamente
rellenas con materiales

Autor: Jaime Pitarch Portero

Director: José Manuel Catalá Civera

Valencia, julio de 2007

RESUMEN

En este trabajo, se han desarrollado e implementado técnicas modales para la resolución de problemas en guía de onda, que son muy populares en la industria de las microondas por su capacidad de resistir altas potencias. El análisis modal de los campos en estructuras guiadas permite descomponer un dispositivo complejo en varios elementos más sencillos, que pueden ser analizados de forma separada con el método más apropiado en cada caso. Básicamente, las técnicas modales pueden dividirse en aquéllas que analizan uniones en guía, y las que calculan las características de propagación de una guía en concreto. Posteriormente, la aplicación del análisis circuital generalizado permite unir convenientemente estas estructuras. Se ha realizado un análisis de la bibliografía que aporta contribuciones en estos campos. Se han implementado las técnicas que se han considerado más eficientes para resolver los problemas concretos, generalizadas a guías N-furcadas, que son una extensión de las guías bifurcadas. En particular, se han realizado contribuciones en la teoría del método de los modos acoplado, para caracterizar guías de onda parcialmente rellenas sin restricciones. En casos en los que la geometría hacía imposible el tratamiento analítico, se ha recurrido a los elementos finitos de forma híbrida con las técnicas modales propuestas. Con estas herramientas, se han diseñado dispositivos de microondas y se ha validado su comportamiento acudiendo al análisis con otros simuladores. Se presenta también una sugerencia de líneas de continuación de este trabajo.

RESUM

En aquest treball, s'han desenvolupat i implementat tècniques modals per a la resolució de problemes en guia d'ona, que són molt populars en la indústria de les microones per la seua capacitat de resistir altes potències. L'anàlisi modal dels camps en estructures guiades permet descompondre un dispositiu complex en diversos elements més senzills, que poden ser analitzats de forma separada amb el mètode més apropiat en cada cas. Bàsicament, les tècniques modals poden dividir-se en aquelles que analitzen unions en guia, i aquelles que calculen les característiques de propagació d'una guia en concret. Posteriorment, l'aplicació de l'anàlisi circuital generalitzat permet unir convenientment aquestes estructures. S'ha realitzat una anàlisi de la bibliografia que aporta contribucions en aquests camps. S'han implementat les tècniques que s'han considerat més eficients per a resoldre els problemes concrets, generalitzades a guies N-furcades, que són una extensió de les guies bifurcades. En particular, s'han realitzat contribucions en la teoria del mètode de les maneres acoblat, per a caracteritzar guies d'ona parcialment plenes sense restriccions. En casos en els quals la geometria feia impossible el tractament analític, s'ha recorregut als elements finits de forma híbrida amb les tècniques modals proposades. Amb aquestes eines, s'han dissenyat dispositius de microones i s'ha validat el seu comportament acudint a l'anàlisi amb altres simuladors. Es presenta també un suggeriment de línies de continuació d'aquest treball.

ABSTRACT

In this work, some modal techniques for solving guided-wave problems have been developed and implemented. Waveguides are very popular in the microwave industry because of their high power handling capability. The modal analysis of the fields in guided-wave structures permits to decompose a complex device in several simpler elements, which can be analyzed by the best suited method. Basically, modal techniques can be divided among those which analyze waveguide junctions and those which analyze the propagation characteristics of a given waveguide. Then, the application of the generalized circuit theory permits to join those structures properly. An analysis of the bibliography in this subject has been performed. The techniques that have been considered to be best suited for each problema have been implementated, and they have been generalized to N-furcated junctions, which are an extension of the bifurcated waveguides. In those cases where the geometry does not allow an analytic treatment, an hybrid technique finite element/modal analysis has been used. With the aid of these tools, some microwave devides have been designed and their performance has been validated with the aid of commercial simulators. Some guidelines for future work in the matter have been proposed.

ÍNDICE

0. AGRADECIMIENTOS	1
1. INTRODUCCIÓN.....	4
1.1. PROCESOS DE CALENTAMIENTO Y MEDIDA POR MICROONDAS	4
1.2. HERRAMIENTAS DE ANÁLISIS.....	7
1.3. ESTRUCTURA DE LA TESIS	10
2. DESARROLLO TEÓRICO	12
2.1. EL ANÁLISIS CIRCUITAL GENERALIZADO	12
2.1.1. El método de la matriz de dispersión generalizada	12
2.1.2. Método de la matriz de admitancia generalizada.....	16
2.1.3. Consideraciones respecto a las matrices S e Y	19
2.1.3.1. Diferentes definiciones de la matriz Y	20
2.1.3.2. Relaciones entre la matriz S y la matriz Y	25
2.2. ANÁLISIS MODAL DE DISCONTINUIDADES.....	27
2.2.1. Introducción	27
2.2.2. Adaptación modal en la unión	27
2.2.3. Extensión a la formulación de la guía N-furcada.	30
2.2.4. El problema de la convergencia relativa	31
2.2.5. Ejemplo: un salto en guía de onda.	32
2.3. LA CONVERGENCIA Y EL NÚMERO DE MODOS.....	37
2.3.1. Cálculo de áreas por recuento de cuadrados	37
2.3.2. Ejemplos.....	40
2.4. EL MÉTODO DE LOS MODOS ACOPLADOS.....	44
2.4.1. Introducción	44
2.4.2. Cálculo de la matriz de acoplo.....	46
2.4.2.1. Formulación directa.....	53
2.4.2.2. Formulación indirecta.....	60
2.4.2.3. Formulación restringida.....	71
2.4.3. Formulaciones para el caso isótropo	79
2.4.3.1. Formulación directa.....	79
2.4.3.2. Formulación indirecta.....	83
2.4.3.3. Formulación restringida.....	88
2.4.4. Validaciones	91
2.4.4.1. Materiales isótropos	93
2.4.4.2. Materiales anisótropos	112
2.4.4.3. Materiales quirales.....	129
2.4.4.4. Materiales bianisótropos	142
2.5. HIBRIDACIÓN CON ELEMENTOS FINITOS	151
2.5.1. Introducción	151
2.5.2. Resolución de un problema de valor propio	152
2.5.3. Aplicación a la caracterización de guías de onda	160
2.5.4. La Toolbox PDE de MATLAB®.....	161
2.5.4.1. Introducción.....	161

2.5.4.2. Dibujo de la geometría.....	162
2.5.4.3. Condiciones de contorno.....	163
2.5.4.4. Definición de los coeficientes.....	164
2.5.4.5. Mallado de la geometría.....	165
2.5.4.6. Otros parámetros del problema.....	167
2.5.4.7. Descripción de las variables y funciones de interés.....	168
2.5.5. Desarrollo de una herramienta para el análisis de transiciones.....	172
2.5.6. Resultados.....	178
3. APLICACIONES.....	183
3.1. LA MULTIALIMENTACIÓN.....	183
3.1.1. Introducción.....	183
3.1.2. Análisis y optimización de cavidades multialimentadas.....	184
3.1.3. Resultados.....	187
3.1.3.1. Cavidad estática.....	189
3.1.3.2. Túnel de microondas.....	196
3.1.4. Conclusiones.....	200
3.2. DISPOSITIVOS DE MULTIGUÍAS.....	201
3.3. MEDIDA INVERSA DE PARÁMETROS ELECTROMAGNÉTICOS.....	204
3.3.1. Recuperación de parámetros.....	204
3.3.2. Resultados.....	205
3.4. FILTROS DE ENTRADA/SALIDA.....	211
3.4.1. Introducción.....	211
3.4.2. Análisis.....	213
4. CONCLUSIONES Y LÍNEAS FUTURAS.....	216
5. PUBLICACIONES.....	218
5.1. REVISTAS INTERNACIONALES.....	218
5.2. CONGRESOS NACIONALES E INTERNACIONALES.....	218
6. REFERENCIAS.....	220
7. ANEXOS.....	232
7.1. INTEGRALES DE ACOPLO DEL MÉTODO DE MODOS ACOPLADOS.....	232
7.1.1. Formulación directa.....	234
7.1.2. Formulación indirecta.....	265
7.1.3. Formulación restringida.....	300
7.2. INTEGRALES DE ACOPLO DEL MÉTODO DE ADAPTACIÓN MODAL.....	304
7.3. SOFTWARE DESARROLLADO.....	311
7.3.1. Método de adaptación modal.....	311
7.3.2. Método de los modos acoplados.....	313
7.3.3. Hibridación con elementos finitos.....	314

0. AGRADECIMIENTOS

Este trabajo es el resultado de una serie de investigaciones realizadas en el Grupo de Calentamiento por Microondas de la Universidad Politécnica de Valencia, liderado por José Manuel Catalá, mi director. A él debo la especialización que he adquirido en el campo de las microondas y el sustento económico que me ha permitido cursar en exclusividad mis estudios de doctorado. Espero que su lucha constante contra mi tendencia natural al desorden se haya visto reflejada en este documento. Aquí consta mi agradecimiento por todo su apoyo. También quiero expresar mi agradecimiento a Felipe Peñaranda, por su implicación en el desarrollo matemático de algunos métodos y en la obtención de resultados.

Mis compañeras, las recientes madres, que han llegado conmigo hasta el final, han hecho que el trabajo fuera mucho más llevadero, aparte de darme su apoyo, cuando no ayuda directa, en incontables momentos: Bea, que conoce más que nadie mi vida en la universidad en estos diez años, y Rocío, mi amiga colombiana, que cuando todos nos estabilicemos, me animará a visitar el otro lado del charco.

Esta tesis debe mucho a Miguel Ángel Solano, de la Universidad de Cantabria. Cuando la cosa no estaba nada clara, di con él, y no dudó en ayudarme en mi trabajo e implicarse, incluso en los detalles. De aquellas interesantes comunicaciones, surgió la idea de dar un nuevo rumbo a la investigación, cuyos frutos se consiguieron finalmente.

Mis padres tienen mucha culpa de que haya llegado a completar mi formación hasta el máximo nivel, puesto que siempre han querido que así sea, para lo que me han mantenido y eximido de otras tareas más allá de lo que yo mismo habría hecho. Por eso, ahora que llega el momento de irse, les doy las gracias por todo. También hago extensivos los agradecimientos al resto de la familia, especialmente a mi prima Marta, que sin duda me superará en lo deportivo, científico y musical.

En este periodo de doctorado, he hecho casi más cosas que en todo el resto de mi vida. Esto lo debo en gran parte a los amigos que tengo la suerte de tener y que tan importante han sido para mí. Empiezo por David Blay, mi amigo más famoso, estrella de las ondas, con quien lo mío viene de largo y va para largo.

Mi agradecimiento va también a David Sornosa y Germán. Con el primero he tenido y tendré unas conversaciones científicas de lo más interesante, aparte

de no dejar de quejarnos sobre el sistema educativo de este país. Con el segundo, reconozco que alguna vez me he sentido acomplejado ante toda su inteligencia y cultura, cuando no contábamos más de 13 o 14 años. Luego le fue algo peor, pero seguro que el año que viene se saca las oposiciones.

Si tengo algún plan que incluya irnos a correr o de excursión a alguna parte, llamaré a Joan Marc y a Javi, con los que ya he compartido incontables vivencias, y las que faltan por llegar. Solamente ellos me entienden que me pueda gustar caminar 8 horas bajo el sol con 15 kilos a la espalda, o dormir en una tienda de campaña con temperaturas bajo cero en el exterior. Ahora, nos ha dado por hacernos funcionarios. Este año, yo. El año que viene, vosotros.

Carlos (El Mico) es de esos que siempre están ahí, desde los tiempos de aquella cinta grabada de Van Halen, o de nuestras historias con la grabadora compartida de cd's. Vinieron un montón de nocheviejas y un montón de pateos, y juntos nos hemos visto evolucionar el uno al otro. Es quizá el único que reconoce como cualidades mías cosas que yo sólo considero como defectos.

Que no falte por mencionar a mis queridas amigas y compañeras de colegio desde que éramos casi unos bebés, especialmente a Cristina, Merche, Inma y Raquel Rubio. Ya quedaremos para celebrarlo.

Una de las razones que me llevó a estudiar teleco en su día fue saber que iba a conocer a un grupo "bueno". Esa expectativa se superó con creces, y a los primeros días de empezar la carrera, ya nos habíamos hecho los amos de la clase, simplemente porque éramos los mejores. Ahí nacieron unas amistades que durarán siempre, y mi agradecimiento va a todos ellos. Empiezo por Dani, por ser alguien especial. Por tantos momentos compartidos, buenos y malos, en todos los ámbitos y en todas las situaciones, que empezaron en aquella historia de la tubería en el instituto. Y porque me ayudó a hacerme una persona mejor. A Hueso, por ser la persona que mejor me comprende, el único que hasta ahora se ha atrevido a emigrar para buscar un futuro mejor. Sabes que tengo una visita pendiente a Munich. A Jaigarro, el profesor, con el que me unen tantas cosas, como esos conciertos con parada en su casa, aquellas temporadas en su equipete, o aquellos 91.5 créditos que nos dio por sacarnos en cuarto (y lo hicimos), para dejarnos quinto limpio para el proyecto. A Sergio (Pascal), la mascota, el perenquén, y recientemente, el doctor. En general, a los que, al poco de entrar en la escuela, inventamos ese engendro deportivo-social llamado "Los Triviales", que tanto éxito tuvo. A los lllirianos, Pablo y Miguel, con los que tanto me he reído. A Ramón, mi compañero de pupitre de los primeros tiempos, hasta que decidió hacerse telemático e iniciar una carrera meteórica en la

empresa. A Pedro, el conquense, la inocencia y buena educación hecha persona, que está consiguiendo hacer carrera en Madrid, pero que sabe que está destinado a perder si se viene a correr conmigo. A Jose, el felizmente casado. También a Mariola, por todo lo que nos queremos. A Antonio Lozano, mi compañero de los primeros años de doctorado, una de las mejores personas que he conocido. Y también a Cristina, con quien conecté desde el primer momento que apareció por el laboratorio, y que tanto me ha estado animando para finalizar este trabajo. Yo la animo a que empiece a correr en serio de una vez.

Allá por finales de 2001, cuando la carrera estaba llegando a su fin, me dio por cultivar otra serie de disciplinas. Por ejemplo, ponerme a estudiar percusión. En éstas, que aparecí por el conservatorio José Iturbi y caí en las manos de Salvador Pelejero, y de buenas a primeras, con todo el afán por mi parte, y todo el entusiasmo por el suyo, me vi convertido en percusionista. Cuando ya acertaba a dar golpes con cierto sentido, me introdujo en el grupo de percusión, actual Percujove, donde encontré mucho más de lo que me esperaba, en lo musical y sobre todo en lo humano, con una cantidad de amigos tan grande, que para no gastar papel en exceso, consigno en pliego aparte los agradecimientos a ellos. Fruto de la asombrosa capacidad de organización y autogestión del grupo, surgieron aquellas giras europeas, y ya vamos a por la cuarta.

En sintonía con mis veleidades musicales, entran mis compañeros y amigos de L'Espera, los suecanos y marenyeros Roig, Víctor y Milio. Quién me iba a decir que, cuando buscaba integrarme como batería en un grupo de Heavy, iba a encontrar a unos amigos tan sanos, tan inteligentes y con los que tantos puntos de vista comparto, en lo musical, en lo político y en lo social. Sé que va a ser completamente imposible formar otro grupo tan bueno en todos los sentidos.

Cuando dispuse de más tiempo, me dio por correr más y mejor. Por culpa de la insistencia de Miguel Ferrer, gran ingeniero, corredor y amigo, me vi metido en el Club de Atletismo de la UPV, donde la gente entiende aquello de “correr por correr”, para huir de las cosas malas y perseguir las buenas. Mi agradecimiento por su amistad y compañerismo a todos ellos, especialmente, al citado Miguel, a Javi Galindo, nuestro presi, todo un ejemplo de líder, y a Carlos, con su enorme sonrisa a cuestas todos los días. Mención especial para Covadonga, por toda nuestra confianza y lo que compartimos.

Muchas gracias a todos.

1. INTRODUCCIÓN

1.1. PROCESOS DE CALENTAMIENTO Y MEDIDA POR MICROONDAS

La utilización de energía microondas para la generación de calor fue descubierta accidentalmente en 1945 en el Departamento de Microondas y Tubos de Potencia de Raytheon (EE.UU.), durante un proceso de testeo de magnetrones. Inicialmente, fue visto como un medio eficiente y rápido de convertir energía eléctrica en calor. A partir de aquí, se han descubierto muchos otros aspectos de esta forma de energía que son extremadamente importantes. Un aspecto clave es la relativa uniformidad en la distribución de calor en el interior del material de interés. Este fenómeno básico, como se ha descubierto, posibilita al usuario controlar aspectos como la calidad, aspectos físicos del material y la repetitividad del proceso. Esta habilidad de control, junto con los obvios beneficios técnicos y económicos como son la conservación de la energía, reducción del tiempo de ciclo, selectividad en el calentamiento, velocidad, reducción del espacio de operación, control y entorno electrónico y mejora del entorno de trabajo, hacen muy atractivo el uso de este tipo de energía. El advenimiento del bajo coste comercial de los artículos de consumo tales como hornos domésticos de microondas, ha llevado consigo un resurgimiento del interés en usar las propiedades de estas frecuencias para otras importantes tareas de índole industrial. El calentamiento por microondas es una de las áreas que más progreso ha experimentado durante la última década, culminando en numerosas instalaciones de manufacturas y procesos industriales [1]-[5]. A medida que la comunidad científica en general ha llegado a tener mayor conocimiento del potencial del uso de la energía de microondas para usos industriales, muchos investigadores, especialmente científicos de materiales, están interesados en determinar si esta nueva tecnología puede ser beneficiosa para ellos. Históricamente, la banda de las microondas y radiofrecuencia del espectro electromagnético ha sido usada principalmente para la transmisión y recepción de información en comunicaciones y radar. Por tanto, las teorías electromagnéticas en que se basa el calentamiento por microondas han sido estudiadas durante muchos años y son conocidas pese a que continuamente se vienen desarrollando métodos o técnicas para su resolución. No obstante, para entender el mecanismo de calentamiento de los materiales, es fundamental

contemplar la interacción entre la energía microondas y las propiedades características de la materia durante el proceso [1], [5]-[6].

El calentamiento por microondas de materiales dieléctricos se debe a la disipación de parte de la energía del campo electromagnético aplicado en energía térmica. El mecanismo molecular envuelto es complejo. Se puede describir como un fenómeno de fricción en el cual la rotación de los dipolos es impedida por restricciones intermoleculares, resultando una histéresis entre campo aplicado y polarización que da como resultado un calentamiento del material bajo tratamiento [1], [2]-[5]. Visto desde un nivel macroscópico, la potencia disipada como calentamiento en un volumen es proporcional a la potencia electromagnética que penetra en ese volumen, es decir, al cuadrado del campo eléctrico local aplicado, a la frecuencia de la onda electromagnética y a las propiedades dieléctricas de los materiales. Internamente, la deposición de energía está limitada por la profundidad de penetración del campo dentro del material. Esta profundidad depende de nuevo de la frecuencia de la onda y también de las propiedades dieléctricas de los materiales. La radiación electromagnética comúnmente utilizada (infrarrojos, luz visible, etc.) presenta unas longitudes de onda relativamente pequeñas y por consiguiente muy poca penetración en la materia con pérdidas. A frecuencias de microondas este valor de penetración es del orden de centímetros, es decir, del mismo orden de magnitud que las dimensiones de los materiales a calentar, de ahí el uso de estas frecuencias. La generación de calor es prácticamente instantánea, por lo que otros fenómenos térmicos como conducción, convección, y radiación juegan un papel secundario en el equilibrio de la temperatura [1], [5]-[7]. De este modo, el conocimiento preciso de las propiedades eléctricas de los materiales es fundamental para conocer su comportamiento bajo la influencia de un campo electromagnético. Las características electromagnéticas más importantes de un material son la permitividad (ϵ) y la permeabilidad (μ). Como resultado de estas propiedades, la longitud de onda de la onda electromagnética es menor en el interior del material a procesar. Además, el módulo del campo eléctrico se atenúa, lo que resulta en una transferencia de energía electromagnética en una energía térmica en el interior del material dando lugar al calentamiento del mismo.

No sólo es importante el conocimiento de las propiedades dieléctricas en aplicaciones de calentamiento por microondas. Recientemente, el aumento incesante del uso de los terminales móviles en telefonía, ha llevado consigo un aumento de la preocupación por la exposición de los usuarios a la radiación electromagnética. Así pues, la determinación de las propiedades dieléctricas de

varios tejidos y materiales orgánicos es muy importante para la estimación de la tasa de absorción específica local y promediada de la energía electromagnética (SAR) en el cuerpo humano. Del mismo modo, el comportamiento eléctrico de un circuito impreso o de un módulo multichip puede verse afectado significativamente por las propiedades dieléctricas del material del sustrato. Todo esto, junto con el incremento de las aplicaciones industriales de las microondas, ya sea en el campo de la medicina (hipertermia, angioplastia, liposucción, etc.), agricultura (desinfección, desinsectación, secado de alimentos, etc.) e industria (vulcanizado de caucho, pasteurización, atemperado, etc.), ha hecho resurgir el interés por desarrollar sistemas precisos de medida para caracterización dieléctrica de estos materiales.

1.2. HERRAMIENTAS DE ANÁLISIS

La sintonización o las correcciones mecánicas en un dispositivo de microondas, una vez éste ha sido fabricado, son muy difíciles, y en ocasiones, imposibles de realizar. Por tanto, el modelado preciso de este tipo de estructuras es una tarea importante.

El modelado electromagnético encuentra las relaciones entre las fuentes de energía y los campos que éstas producen en la estructura bajo análisis, tal y como describen las Ecuaciones de Maxwell [9]. Sin embargo, cuando los ordenadores no podían ayudar al diseño electromagnético, para los ingenieros, habituados a manejarse con circuitos eléctricos y electrónicos, resultaban inmanejables las expresiones resultantes de las Ecuaciones de Maxwell a la hora de poder diseñar dispositivos electromagnéticos. La gran demanda tecnológica durante la Segunda Guerra Mundial en el campo de las telecomunicaciones hizo redoblar los esfuerzos en este sentido. Se optó por realizar una abstracción circuital de un problema electromagnético y crear circuitos equivalentes eléctricos, cuyo comportamiento fuera aproximado al del dispositivo real. La contribución principal se debe a N. Marcuvitz, del MIT, que trabajó en el desarrollo de circuitos en guía con aplicaciones al radar. Al finalizar la guerra, estos trabajos fueron recopilados y publicados [8].

La solución a problemas de valor de frontera simples se puede encontrar mediante técnicas analíticas que conducen a soluciones cerradas. Este tipo de soluciones están usualmente limitadas a cierto tipo de geometrías canónicas. Sin embargo, éste no es el caso de las modernas estructuras que se utilizan en la actualidad, para las que se necesita la aplicación de técnicas numéricas. Esta clase de técnicas han de ser tan eficientes como sea posible, tanto en términos de velocidad de proceso como de requisitos de memoria.

En la bibliografía, se describen multitud de métodos para resolver problemas electromagnéticos. La idoneidad de un método u otro depende de las características del problema (geometría, tamaño eléctrico, etc.).

En la técnica del operador integral, la respuesta electromagnética es dada por la suma de todas las contribuciones elementales (funciones de Green) correspondientes a unas determinadas excitaciones elementales. Por otro lado, las técnicas de operador diferencial se basan en la aplicación directa de las Ecuaciones de Maxwell en su forma diferencial. El método de las diferencias finitas en el dominio del tiempo (FDTD) [10] y el método de los elementos finitos [11] son los ejemplos más conocidos. FDTD realiza una discretización de

las Ecuaciones de Maxwell en un malla rectangular, y FEM divide el dominio del problema en elementos, en cada uno de los cuales aplica la ecuación diferencial en su forma lagrangiana (débil). Las técnicas ópticas basan sus modelos en el trazado de rayos y la utilización de coeficientes de difracción [12]. Las más populares son la Teoría Geométrica de la Difracción (GTD) y la Teoría Uniforme de la Difracción (UTD). Finalmente, los métodos modales [13]-[48] se basan en expresar la solución a las Ecuaciones de Maxwell como suma de autofunciones para una geometría concreta.

Esta tesis doctoral se va a centrar en el estudio de las técnicas modales para el análisis de discontinuidades en guía de onda. El método de acoplo modal (MM) es muy útil cuando la geometría bajo análisis se puede dividir en dos regiones o más, y cada una de ellas puede expresar sus campos de forma sencilla en un sistema de coordenadas separable. En cada región, se define un conjunto de soluciones de las Ecuaciones de Maxwell. Cada una de estas soluciones satisface las Ecuaciones de Maxwell en todos los puntos de la frontera excepto en la unión entre las regiones. El acoplo modal significa forzar a que también se cumplan las condiciones de contorno en la unión mediante una adecuada combinación de las funciones base.

Este método es muy útil para analizar discontinuidades en guía y puede usarse también para obtener la frecuencia de resonancia de cavidades. Hahn fue el primero en describir esta técnica [14], al emplear el MM para calcular los parámetros del circuito equivalente de un resonador de cavidad. Posteriormente, Clarricoats y Slinn presentaron el método [15], y Wexler [16] utilizó una formulación más sistemática y organizada para resolver las discontinuidades.

Cuando estas estructuras están parcialmente rellenas de materiales, el Método de los Modos Acoplados (CMM) se puede aplicar para calcular las constantes de propagación y los perfiles de campo de los modos característicos (modos propios) de esta estructura en función de los modos de la correspondiente guía vacía (modos base) [49]-[90]. Este método se basa en la propiedad de completitud de los modos base de la guía vacía. Schelkunoff formuló el CMM para el caso de un hipotético medio lineal anisótropo, y puede ser considerado como el fundador del método [49]. Recientemente, este método ha sido extendido a la resolución de guías de onda bianisótropas [90].

En el caso de estructuras más complejas, cuyo análisis no pueda ser llevado a cabo por técnicas modales, puede ser posible realizar la descomposición en estructuras más simples (redes de microondas). Entonces, cada una de estas redes puede ser analizada de forma separada con el método más adecuado, y

posteriormente, ensamblada con el resto mediante la aplicación del análisis circuital generalizado [37]-[45].

Esta idea de combinar diferentes técnicas de análisis se ha venido usando desde hace años [19]. Debido a su eficiencia, el MM es muy popular en el análisis de discontinuidades transversales en guía de onda, mientras que el FEM o el FDTD son más apropiados para formas irregulares.

1.3. ESTRUCTURA DE LA TESIS

En este trabajo, se han desarrollado herramientas de diseño eficientes de dispositivos complejos de microondas, con aplicaciones de alta potencia.

En el capítulo de teoría se hace una exposición, en primer lugar, del análisis circuital generalizado, puesto que va a ser una herramienta fundamental en todo este trabajo. Una vez puesta la base, se entra a exponer el método de adaptación modal, extendido a las guías N-furcadas, con consideraciones respecto a la convergencia relativa del método. Se ilustra el funcionamiento del método con un ejemplo sencillo.

Posteriormente, se dedica un subapartado a la relación existente entre un parámetro que indica la precisión utilizada en los métodos modales y el número de modos existentes, puesto que es este valor el que proporciona el tamaño de las matrices y, por tanto, el coste computacional.

En el siguiente subapartado, se exponen las tres formulaciones del método de los modos acoplados: directa, indirecta, y restringida: las dos primeras, para guías de sección arbitraria rellenas de un material bianisótropo arbitrario, y la última, para guías rectangulares con slabs de ferrita de altura completa. Se particularizan las formulaciones para el caso de materiales isótropos y se comprueba la consistencia con las guías vacías.

Se expone una gran cantidad de ejemplos de validación y de comparación entre las formulaciones para todo tipo de materiales: isótropos, anisótropos, quirales y bianisótropos en general. En estas comparaciones se llega a la conclusión de que la formulación indirecta proporciona resultados más precisos para un determinado número de modos que la directa.

Los métodos modales son válidos para guías de onda con cualquier sección transversal, pero solamente es posible llegar a resultados de forma analítica en el caso de formas canónicas, como la rectangular o circular. Si se encontraran de forma numérica los modos en una guía de forma arbitraria, sería posible aplicar toda la teoría del análisis modal, realizando de esta manera, una técnica híbrida. Esto es lo que se hace en el siguiente subapartado, dedicado a la hibridación de la adaptación modal con elementos finitos.

Puesto que todas las técnicas modales pueden combinarse para llegar a diseñar dispositivos complejos, en el apartado de aplicaciones se diseñan varios dispositivos con aplicaciones a las microondas de alta potencia.

Se diseñan unos cuantos hornos multialimentados, donde se aplica tanto la adaptación modal para resolver las transiciones como el método de los modos acoplados para analizar la parte de la muestra a calentar. Se aplican los algoritmos genéticos para realizar diseños óptimos.

Se realiza un diseño de un acoplador direccional en guía de onda, donde se aplica la adaptación modal, eligiendo un correcto juego de modos, y se unen las redes resultantes convenientemente.

Posteriormente, se realiza el diseño de un sistema de medida inversa de parámetros electromagnéticos en guía de onda, con la ayuda de un analizador de redes. La combinación del método de adaptación modal y el método de los modos acoplados ayuda a implementar la parte directa, o de análisis. Con una función de minimización, realiza la parte inversa, recuperando los parámetros a calcular.

En la última aplicación de esta tesis, se realiza el diseño de un filtro corrugado, para evitar fugas en sistemas de calentamiento dinámicos. Este apartado sirve de aplicación para el apartado de la hibridación de la adaptación modal con elementos finitos.

Se finaliza con un apartado de conclusiones y líneas futuras de investigación, y las contribuciones propias en revistas y congresos que se han derivado de esta tesis. Se incluye también un apartado con el listado de los trabajos que han sido de referencia.

Finalmente, los anexos están dedicados al desarrollo de las integrales de acoplo de todos los métodos desarrollados y al listado de las funciones que componen el software desarrollado.

2. DESARROLLO TEÓRICO

2.1. EL ANÁLISIS CIRCUITAL GENERALIZADO

2.1.1. El método de la matriz de dispersión generalizada

La posibilidad de la caracterización de discontinuidades múltiples en cascada es de gran interés desde un punto de vista práctico, dado que existen multitud de componentes pasivos con estructuras de este tipo tales como filtros, guías corrugadas, bocinas corrugadas, acopladores direccionales, etc.

El concepto fue introducido por el grupo de Mittra [36], [34], pp. 207-217, pero fue a finales de los 70 y en los 80 cuando se investigó muy intensamente en este tema. Los primeros trabajos en este área, pueden atribuirse a T. E. Rozzi [46]-[48], en los que el citado autor analiza filtros en guía con discontinuidades múltiples (irises), pero no consigue dar una formulación general al problema, y sólo son aplicables bajo ciertas restricciones en los tipos de discontinuidades.

En 1982, aparecen algunos trabajos sobre este método con cierto aspecto de generalidad. Entre estos trabajos cabe citar los de F. Arndt [37]-[39], G.L. James [40], T. Itoh [41]-[42] y E. Kühn y V. Hombach [43].

La característica fundamental de estos trabajos es la introducción de un nuevo concepto en el estudio de discontinuidades en guía, el concepto de la *matriz de dispersión generalizada* (GSM), cuya definición puede verse en el apartado siguiente. Con este nuevo concepto, se consiguen enlazar con relativa facilidad discontinuidades en guías de onda y líneas de transmisión, sin restricción alguna respecto al número de las mismas.

Esta matriz combina la interacción mutua de dos discontinuidades por medio de los modos dominantes y los modos al corte. Ello permite la descripción correcta de la interacción entre dos discontinuidades o uniones, aunque la distancia entre ellas sea infinitamente pequeña. Ello es extremadamente útil en el diseño de circuitos de microondas. La técnica GSM necesita ser usada junto

con otras tales como el método de adaptación modal, que caracterice una discontinuidad sencilla. Este método se describe en el apartado siguiente.

La técnica de la GSM consiste en descomponer una estructura compleja en varias de geometría menos complicada, para las cuales la solución está disponible o se puede obtener más fácilmente. A continuación se caracterizan todas las estructuras resultantes del circuito de microondas en términos de la GSM. Finalmente, se calcula la matriz total de la estructura, a partir de las matrices de dispersión de cada elemento, utilizando las expresiones y procedimientos descritos en el apartado siguiente. Esto es lo que se hace, por ejemplo, en [19], donde la estructura se divide en componentes más elementales que se modelan independientemente. Para ello en algunos se utiliza el FDTD y otros se modelan analíticamente. Finalmente se obtiene vía GSM la estructura original.

Como puede verse, no es necesario resolver todo el problema electromagnético al mismo tiempo, lo que obligaría a la utilización de una gran cantidad de memoria de ordenador, haciendo imposible la resolución de problemas con un número elevado de discontinuidades. El método permite calcular el comportamiento electromagnético de cada una de las discontinuidades por separado, para posteriormente ser enlazadas y obtener la respuesta de todo el conjunto, con toda exactitud, sin más que emplear el número de modos adecuado a cada geometría en concreto.

La inclusión de todos los modos y no solamente del fundamental permite obtener soluciones físicamente rigurosas., pero, aunque todas las matrices son de orden infinito, en la práctica deben truncarse a un tamaño finito.

La matriz de dispersión generalizada está estrechamente relacionada con la matriz de dispersión convencional S_C que se usa en la teoría de redes de microondas. La diferencia es que, así como la matriz S_C de teoría de redes únicamente incluye el modo dominante y sus parámetros S_{ij} son números, la matriz de dispersión generalizada incluye además los modos de mayor orden, siendo en general de orden infinito, aunque se trunca, y sus parámetros S_{ij} son submatrices de funciones correspondientes a los diferentes modos utilizados en la expansión de los campos.

El plano de la unión se tomaba como plano de referencia en la definición convencional, pero ahora el concepto de la GSM puede extenderse más. Pueden desplazarse los accesos una cierta distancia, de manera que la discontinuidad quede entre ellos, permitiendo así el tratamiento de un mayor número de clases de discontinuidades. Trataremos cada plano de referencia como un puerto *físico*

y supondremos que cada puerto físico está acompañado de infinitos puertos *eléctricos*, para cada uno de los modos considerados.

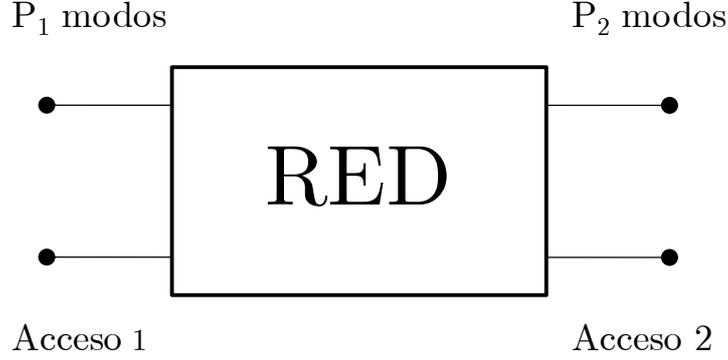


Fig. 2.1. Red de dos accesos. Los campos en el acceso 1 se descomponen en base a P_1 modos, y los del acceso 2, en base a P_2 modos.

La Fig. 2.1 muestra una red equivalente de dos accesos. Las componentes transversales de los campos en cada acceso pueden expresarse como combinación lineal de funciones base:

$$\mathbf{E}_t^{(i)} = \sum_{n=1}^{P_i} v_n^{(i)} \mathbf{e}_n^{(i)} \quad (2.1)$$

$$\mathbf{H}_t^{(i)} = \sum_{n=1}^{P_i} i_n^{(i)} \mathbf{h}_n^{(i)} \quad (2.2)$$

donde $v_n^{(i)}$ e $i_n^{(i)}$ representan los *coeficientes de tensión y corriente*, respectivamente (coeficientes de la expansión modal), para cada modo en el acceso i , $\mathbf{e}_n^{(i)}$ y $\mathbf{h}_n^{(i)}$ son los campos transversales eléctrico y magnético del modo n del acceso i . En lo sucesivo, se va a emplear la letra tipo negrita para representar las magnitudes vectoriales.

Cada uno de estos coeficientes puede considerarse como la superposición de una onda incidente y reflejada en cada acceso y se relaciona con los coeficientes utilizados en la formulación del análisis modal según

$$v_n^{(1)} = a_n^{(1)} + b_n^{(1)} \quad (2.3)$$

$$i_n^{(1)} = a_n^{(1)} - b_n^{(1)} \quad (2.4)$$

$$v_n^{(2)} = a_n^{(2)} + b_n^{(2)} \quad (2.5)$$

$$i_n^{(2)} = a_n^{(2)} - b_n^{(2)} \quad (2.6)$$

donde $a_n^{(1)}$ es la amplitud del modo n del acceso 1, incidente hacia la red, $b_n^{(1)}$ es la amplitud del modo n de la guía 1, reflejado desde la red, $a_n^{(2)}$ es la amplitud

del modo n del acceso 2, incidente hacia la red, y $b_n^{(2)}$ es la amplitud del modo n de la guía 2, reflejado desde la red.

Particularizando para el acceso 1, si consideramos que está excitado con el modo p -ésimo con amplitud unidad, el acceso 2 no tiene ondas incidentes, y la amplitud compleja del q -ésimo modo de la onda reflejada hacia la izquierda es $b_q^{(1)}$, el elemento (q,p) de la matriz de dispersión generalizada $S_{11}(q,p)$ es $b_q^{(1)}$. De forma similar, si la amplitud compleja del modo q -ésimo transmitido al acceso 2 (hacia la derecha) es $b_q^{(2)}$, $S_{21}(q,p) = b_q^{(2)}$. Para el resto de accesos, la definición es análoga.

Si $\mathbf{a}^{(1)}$, $\mathbf{b}^{(1)}$, $\mathbf{a}^{(2)}$ y $\mathbf{b}^{(2)}$ son vectores de componentes $a_n^{(1)}$, $b_n^{(1)}$, $a_n^{(2)}$ y $b_n^{(2)}$, respectivamente, en forma matricial, las amplitudes complejas modales de las puertas de una red de dos accesos y la matriz de dispersión generalizada, se relacionan de la forma:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{b}^{(1)}_{[P_1, x_1]} \\ \mathbf{b}^{(2)}_{[P_2, x_1]} \end{pmatrix}_{[(P_1+P_2), x_1]} = \begin{pmatrix} S_{11[P_1, x_1]} & S_{12[P_1, x_1, P_2]} \\ S_{21[P_2, x_1, P_1]} & S_{22[P_2, x_1, P_2]} \end{pmatrix}_{[(P_1+P_2), x_1, (P_1+P_2)]} \begin{pmatrix} \mathbf{a}^{(1)} \\ \mathbf{a}^{(2)} \end{pmatrix}_{[(P_1+P_2), x_1]} \quad (2.7)$$

donde entre corchetes se expresan los tamaños de las matrices o vectores, los cuales son igual al número de modos tomados en cada acceso.

En forma compacta:

$$\mathbf{b} = S \mathbf{a} \quad (2.8)$$

Donde

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} \mathbf{b}^{(1)} \\ \mathbf{b}^{(2)} \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

$$S = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{pmatrix} \quad (2.10)$$

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}^{(1)} \\ \mathbf{a}^{(2)} \end{pmatrix} \quad (2.11)$$

Es decir, la matriz de dispersión generalizada proporciona las amplitudes de los modos reflejados por la red a partir de las amplitudes de los modos incidentes a ella.

Nótese que la matriz S relaciona coeficientes del desarrollo modal utilizado. Por tanto, está ligada a las expresiones de los campos utilizadas, y a la normalización de éstos, como se verá posteriormente.

La generalización para el caso de un número cualquiera de accesos es obvia. Si el vector de amplitudes complejas de modos que inciden en el acceso i es $\mathbf{a}^{(i)}$ y el vector de amplitudes complejas de modos que salen desde el acceso j es $\mathbf{b}^{(j)}$, los elementos S_{ij} de la matriz de dispersión generalizada los relacionan mediante:

$$\mathbf{b}^{(j)} = \sum_{i=1}^N S_{ij} \mathbf{a}^{(i)} \quad (2.12)$$

donde N es el número de accesos de la red.

El tamaño de S será $N \times N$, y el tamaño de sus elementos S_{ij} será $P_i \times P_j$, siendo P_i el número de modos utilizados en el acceso i , y P_j el número de modos utilizados en el acceso j .

Desde el punto de vista circuital, no es aconsejable el empleo de matrices S para enlazar discontinuidades (cuadripolos), dado que existen otras familias de parámetros más apropiados para el enlace de redes en cascada. Sin embargo, debe tenerse en cuenta que en este tipo de problemas intervienen modos al corte (constante de propagación real positiva), y la utilización de las matrices S solo necesita de exponenciales negativas, mientras que el empleo de otros parámetros obligaría a utilizar exponenciales tanto positivas como negativas. Estas exponenciales positivas para el caso de modos al corte pueden conducir a valores muy elevados, no manejables computacionalmente, haciendo imposible o inestable la resolución numérica del problema, como ocurre con las matrices de transmisión T .

2.1.2. Método de la matriz de admitancia generalizada

Al igual que el método GSM, el método de la matriz de admitancia generalizada (GAM) es útil para analizar discontinuidades múltiples en cascada. El método también tiene en cuenta tanto los modos que se propagan como los modos al corte. Consiste en descomponer un circuito complejo en varios de geometría menos complicada, para las cuales la solución está disponible o se puede obtener más fácilmente. A continuación se caracterizan todas las estructuras resultantes del circuito de microondas en términos de la GAM Y , definida en el apartado siguiente, aunque para ello también es necesario apoyarse en otros métodos. Posteriormente, se conectan adecuadamente los elementos caracterizados por separado, individuales, utilizando las expresiones y

procedimientos descritos en el apartado siguiente, para obtener la matriz de admitancias generalizada total.

La matriz de dispersión generalizada está estrechamente relacionada con la matriz de admitancias convencional Y_C que se usa en la teoría de redes de microondas. La diferencia es que, así como la matriz Y_C de teoría de redes únicamente incluye el modo dominante y sus parámetros Y_{ij} son escalares, la matriz de admitancias generalizada incluye además los modos de mayor orden, siendo en general de orden infinito, aunque se trunca, y sus parámetros Y_{ij} son matrices de funciones correspondientes a los diferentes modos utilizados en la expansión de los campos.

La Fig. 2.2 muestra una red de N accesos con P_i modos en cada uno:

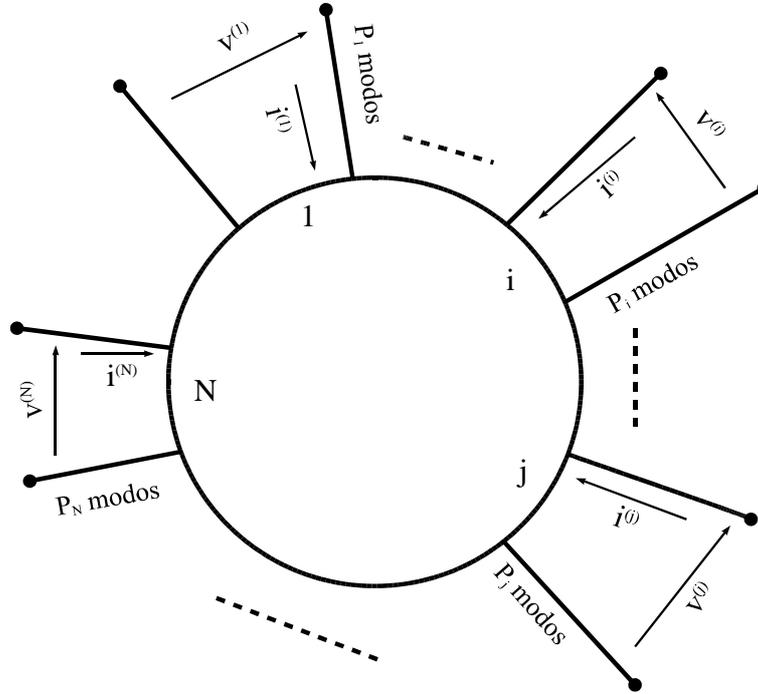


Fig. 2.2. Red de N accesos.

Las componentes transversales de los campos en cada acceso pueden expresarse como combinación lineal de funciones base:

$$\mathbf{E}_t^{(i)} = \sum_{n=1}^{P_i} v_n^{(i)} \mathbf{e}_n^{(i)} \quad (2.13)$$

$$\mathbf{H}_t^{(i)} = \sum_{n=1}^{P_i} i_n^{(i)} \mathbf{h}_n^{(i)} \quad (2.14)$$

donde $v_n^{(i)}$ e $i_n^{(i)}$ representan los *coeficientes de tensión y corriente*, respectivamente (coeficientes de la expansión modal), para cada modo en el acceso i y $\mathbf{e}_n^{(i)}$, $\mathbf{h}_n^{(i)}$ son cualquier conjunto de funciones base. La matriz de

dispersión generalizada proporciona los pesos de la expansión del campo magnético en el acceso i $\mathbf{H}_t^{(i)}$, a partir de los pesos de la expansión del campo eléctrico en el acceso j $\mathbf{E}_t^{(j)}$. Al igual que con la matriz S , estos coeficientes están ligados a las expresiones de las funciones base utilizadas.

Si $\mathbf{v}^{(i)}$ y $\mathbf{i}^{(i)}$ son vectores de componentes $v_n^{(i)}$ e $i_n^{(i)}$, respectivamente, los elementos Y_{ij} de la matriz de admitancias generalizada Y los relacionan mediante:

$$\mathbf{i}^{(i)} = \sum_{j=1}^N Y_{ij} \mathbf{v}^{(j)}. \quad (2.15)$$

Matricialmente,

$$\begin{pmatrix} \mathbf{i}^{(1)}_{[P_1 x1]} \\ \vdots \\ \mathbf{i}^{(N)}_{[P_N x1]} \end{pmatrix}_{[(P_1+\dots+P_N)x1]} = \begin{pmatrix} Y_{11[P_1 x P_1]} & \cdots & Y_{1N[P_1 x P_N]} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Y_{N1[P_N x P_1]} & \cdots & Y_{NN[P_N x P_N]} \end{pmatrix}_{\left[\begin{smallmatrix} (P_1+\dots+P_N)x \\ (P_1+\dots+P_N) \end{smallmatrix} \right]} \begin{pmatrix} \mathbf{v}^{(1)}_{[P_1 x1]} \\ \vdots \\ \mathbf{v}^{(N)}_{[P_N x1]} \end{pmatrix}_{[(P_1+\dots+P_N)x1]} \quad (2.16)$$

donde entre corchetes se expresan los tamaños de las matrices o vectores, siendo P_i el número de modos utilizados en el acceso i .

O bien,

$$\mathbf{i} = Y \mathbf{v} \quad (2.17)$$

Donde

$$\mathbf{i} = \begin{pmatrix} \mathbf{i}^{(1)} \\ \vdots \\ \mathbf{i}^{(N)} \end{pmatrix} \quad (2.18)$$

$$Y = \begin{pmatrix} Y_{11[P_1 x P_1]} & \cdots & Y_{1N[P_1 x P_N]} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Y_{N1[P_N x P_1]} & \cdots & Y_{NN[P_N x P_N]} \end{pmatrix} \quad (2.19)$$

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} \mathbf{v}^{(1)}_{[P_1 x1]} \\ \vdots \\ \mathbf{v}^{(N)}_{[P_N x1]} \end{pmatrix} \quad (2.20)$$

Por tanto, la matriz de admitancias proporciona las amplitudes de las funciones base del campo eléctrico tangencial a una red a partir de las amplitudes de las funciones base del campo magnético.

La obtención de la GAM de una cavidad con un número arbitrario de puertos, basada en una formulación en términos de la función de Green diádica,

se propone en [27], donde se diseñan desfases con diferente número de uniones en T.

En [28] se obtienen las GAM de una unión de guías rectangulares, con 3 o 4 puertos, a partir de las ecuaciones de los campos en las guías, lo que no requiere el conocimiento de las funciones de Green. La GAM se obtiene de forma cerrada, sin la necesidad de resolver sistemas de ecuaciones.

La GAM, debido a su definición, es especialmente útil en la caracterización de cavidades o tramos de guía de onda con paredes eléctricas, ya que sus elementos se evalúan cortocircuitando todos los puertos de la estructura menos uno. Ello reduce el número de matrices a invertir. Para modelos con paredes magnéticas, es conveniente utilizar la matriz de impedancias generalizadas Z , cuya inversa es Y .

Otra ventaja del GAM sobre el GSM es que, para estructuras sin pérdidas, la matriz de admitancias generalizadas implica el uso de un álgebra real, mientras que la matriz S requiere un álgebra compleja.

Una desventaja de la matriz Y es que posee singularidades polares, con la inestabilidad numérica que ello conlleva [25]. La unión entre dos guías rectangulares y una circular (unión en X) se analiza mediante el método GAM en [26].

2.1.3. Consideraciones respecto a las matrices S e Y .

Las anteriores definiciones de las matrices de dispersión generalizada y de admitancia generalizada implican que dichas matrices están ligadas a las funciones base usadas y a la relación entre los coeficientes de tensión y corriente ($v_n^{(i)}$ e $i_n^{(i)}$) y los coeficientes de ondas incidente y reflejada ($a_n^{(i)}$ y $b_n^{(i)}$). Además la relación entre los signos de los coeficientes de las ondas incidentes y reflejadas depende de la transversalidad de los modos.

Por otra parte, la conexión de las matrices Y se realiza aplicando condiciones de continuidad de los campos tangenciales en los puertos, por tanto, la relación de signos de los coeficientes de la expansión modal de los campos en los puertos a conectar dependerá de la dirección de las funciones base vectoriales de los campos utilizadas en cada puerto. Es decir, la conexión de redes Y depende de la definición de dicha matriz.

Por todo ello son necesarias algunas consideraciones respecto a los anteriores aspectos. En particular, respecto de las diferentes definiciones de las matrices multimodales en relación con las normalizaciones empleadas.

2.1.3.1. Diferentes definiciones de la matriz Y

En la anterior definición de la matriz de admitancias generalizadas, las funciones base de la expansión que suelen elegirse responden a los casos que se analizan a continuación, dando lugar a diferentes matrices Y .

En el contexto del análisis modal en discontinuidades en guía de onda, las funciones base eléctrica y magnética de cierto modo se relacionan mediante alguna relación de ortogonalidad. De ahora en adelante, se supone que la dirección de propagación de las ondas es z .

- Una relación entre las funciones base que se suele dar es

$$\mathbf{h}'_n \times \hat{\mathbf{z}}^{(i)} = \mathbf{e}'_n Y_{0n}^{(i)} \quad (2.21)$$

siendo $\hat{\mathbf{z}}^{(i)}$ la dirección progresiva de propagación de los campos en el puerto i e $Y_{0n}^{(i)}$ la admitancia característica del modo n en el puerto i .

Un análisis dimensional de (2.21) lleva a la conclusión de que los coeficientes $v_n^{(i)}$ e $i_n^{(i)}$ tienen ambos las mismas dimensiones, y la matriz de admitancias generalizadas Y es adimensional o está normalizada en admitancia. Cuando ello suceda se representará dicha matriz mediante Y' , y los coeficientes de tensión y amplitud mediante $v_n'^{(i)}$ e $i_n'^{(i)}$, y su relación con los coeficientes de ondas incidente y reflejada ($a_n^{(i)}$ y $b_n^{(i)}$) suele ser

$$v_n'^{(i)} = a_n^{(i)} + b_n^{(i)} \quad (2.22)$$

$$i_n'^{(i)} = a_n^{(i)} - b_n^{(i)} \quad (2.23)$$

Haciendo ahora

$$\mathbf{e}'_n = \boldsymbol{\varphi}'_n \times \hat{\mathbf{z}}^{(i)} \quad (2.24)$$

$$\mathbf{h}'_n = Y_{0n}^{(i)} \boldsymbol{\varphi}'_n \quad (2.25)$$

las expansiones de los campos se pueden expresar como:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_t^{(i)} &= \sum_{n=1}^{P_i} v_n'^{(i)} \mathbf{e}'_n = \sum_{n=1}^{P_i} v_n'^{(i)} (\boldsymbol{\varphi}'_n \times \hat{\mathbf{z}}^{(i)}) = \\ &= \sum_{n=1}^{P_i} (a_n^{(i)} + b_n^{(i)}) \mathbf{e}'_n = \sum_{n=1}^{P_i} (a_n^{(i)} + b_n^{(i)}) (\boldsymbol{\varphi}'_n \times \hat{\mathbf{z}}^{(i)}) \end{aligned} \quad (2.26)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_t^{(i)} &= \sum_{n=1}^{P_i} i_n^{(i)} \mathbf{h}_n^{(i)} = \sum_{n=1}^{P_i} i_n^{(i)} Y_{0n}^{(i)} \boldsymbol{\varphi}_n^{(i)} = \\ &= \sum_{n=1}^{P_i} (b_n^{(i)} - a_n^{(i)}) \mathbf{h}_n^{(i)} = \sum_{n=1}^{P_i} (b_n^{(i)} - a_n^{(i)}) Y_{0n}^{(i)} \boldsymbol{\varphi}_n^{(i)} \end{aligned} \quad (2.27)$$

Si las funciones base $\boldsymbol{\varphi}_n^{(i)}$ están ortonormalizadas, es decir $\int_{S_i} \boldsymbol{\varphi}_n^{(i)} \cdot \boldsymbol{\varphi}_m^{(i)} dS = \delta_{nm}$, se cumple que

$$\int_{S_i} (\mathbf{e}_n^{(i)} \times \mathbf{h}_m^{(i)}) \cdot \hat{\mathbf{z}}^{(i)} dS = Y_{0n}^{(i)} \delta_{nm} \quad (2.28)$$

Los modos propios de una guía i , $\mathbf{e}_n^{(i)}$ y $\mathbf{h}_n^{(i)}$, poseen relaciones de ortogonalidad, siendo:

$$\int_{S_i} (\mathbf{e}_n^{(i)} \times \mathbf{h}_m^{(i)}) \cdot \hat{\mathbf{z}}^{(i)} dS = Q_n^{(i)} \delta_{nm} \quad (2.29).$$

En este caso, el factor que depende de la normalización de las funciones base empleadas, definido según (2.29), vale

$$Q_n^{(i)} = Y_{0n}^{(i)} \quad (2.30)$$

- Otra relación entre $\mathbf{e}_n^{(i)}$ y $\mathbf{h}_n^{(i)}$ muy utilizada es

$$\mathbf{h}_n^{(i)} \times \hat{\mathbf{z}}^{(i)} = \mathbf{e}_n^{(i)} \quad (2.31)$$

siendo $\hat{\mathbf{z}}^{(i)}$ la dirección progresiva de propagación de los campos en el puerto i .

En este caso, el cociente $i_n^{(i)}/v_n^{(i)}$ tiene dimensiones de admitancia. Cuando ello suceda, representaremos la matriz de admitancias generalizada mediante Y , los coeficientes de tensión y amplitud mediante $v_n^{(i)}$ e $i_n^{(i)}$, y su relación con los coeficientes de ondas incidente y reflejada ($a_n^{(i)}$ y $b_n^{(i)}$) suele ser

$$v_n^{(i)} = a_n^{(i)} + b_n^{(i)} \quad (2.32)$$

$$i_n^{(i)} = Y_{0n}^{(i)} (a_n^{(i)} - b_n^{(i)}) \quad (2.33)$$

Por tanto, llamando

$$\mathbf{e}_n^{(i)} = \boldsymbol{\varphi}_n^{(i)} \times \hat{\mathbf{z}}^{(i)} \quad (2.34)$$

$$\mathbf{h}_n^{(i)} = \boldsymbol{\varphi}_n^{(i)} \quad (2.35)$$

las expansiones de los campos se pueden expresar como:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_t^{(i)} &= \sum_{n=1}^{P_i} v_n^{(i)} \mathbf{e}_n^{(i)} = \sum_{n=1}^{P_i} v_n^{(i)} (\boldsymbol{\varphi}_n^{(i)} \times \hat{\mathbf{z}}^{(i)}) = \\ &= \sum_{n=1}^{P_i} (a_n^{(i)} + b_n^{(i)}) \mathbf{e}_n^{(i)} = \sum_{n=1}^{P_i} (a_n^{(i)} + b_n^{(i)}) (\boldsymbol{\varphi}_n^{(i)} \times \hat{\mathbf{z}}^{(i)}) \end{aligned} \quad (2.36)$$

$$\begin{aligned}\mathbf{H}_t^{(i)} &= \sum_{n=1}^{P_i} i_n^{(i)} \mathbf{h}_n^{(i)} = \sum_{n=1}^{P_i} i_n^{(i)} \boldsymbol{\varphi}_n^{(i)} = \\ &= \sum_{n=1}^{P_i} Y_{0n}^{(i)} (a_n^{(i)} - b_n^{(i)}) \bar{\mathbf{h}}_n^{(i)} = \sum_{n=1}^{P_i} Y_{0n}^{(i)} (a_n^{(i)} - b_n^{(i)}) \boldsymbol{\varphi}_n^{(i)}\end{aligned}\quad (2.37)$$

Así, la matriz de admitancias generalizadas Y tiene dimensiones de admitancia.

Si la relación entre las funciones base usadas en este caso y el anterior es

$$\boldsymbol{\varphi}_n^{(i)} = \boldsymbol{\varphi}'_n^{(i)} \quad (2.38)$$

es decir

$$\mathbf{e}_n^{(i)} = \boldsymbol{\varphi}_n^{(i)} \times \hat{\mathbf{z}}^{(i)} = \mathbf{e}'_n^{(i)} \quad (2.39)$$

$$\mathbf{h}_n^{(i)} = Y_{0n}^{(i)} \boldsymbol{\varphi}_n^{(i)} = Y_{0n}^{(i)} \mathbf{h}'_n^{(i)} \quad (2.40)$$

para que los coeficientes $a_n^{(i)}$ y $b_n^{(i)}$ sean los mismos, se obtiene Y' a partir de Y del siguiente modo:

A partir de (2.39) y (2.40), y usando (2.31):

$$\mathbf{E}_t^{(i)} = \sum_{n=1}^{P_i} v_n^{(i)} \mathbf{e}'_n^{(i)} = \sum_{n=1}^{P_i} v_n^{(i)} \mathbf{e}_n^{(i)} \quad (2.41)$$

$$\mathbf{H}_t^{(i)} = \sum_{n=1}^{P_i} i_n^{(i)} \mathbf{h}'_n^{(i)} = \sum_{n=1}^{P_i} i_n^{(i)} Y_{0n}^{(i)} \mathbf{h}_n^{(i)} \quad (2.42)$$

Es decir,

$$v_n^{(i)} = v_n'^{(i)} \quad (2.43)$$

$$i_n^{(i)} = i_n'^{(i)} Y_{0n}^{(i)} \quad (2.44)$$

Según la definición de matriz de admitancias generalizadas para una red de N accesos, Y cumple

$$\mathbf{i}^{(i)} = \sum_{j=1}^N Y_{ij} \mathbf{v}^{(j)} \quad (2.45)$$

Sustituyendo (2.43) y (2.44):

$$Y_0^{(i)} \mathbf{i}^{(i)} = \sum_{j=1}^N Y_{ij} \mathbf{v}^{(j)} \Rightarrow \mathbf{i}^{(i)} = \sum_{j=1}^N (Y_0^{(i)})^{-1} Y_{ij} \mathbf{v}^{(j)} \quad (2.46)$$

Y, según la definición de matriz de admitancias generalizadas

$$Y'_{ij} = (Y_0^{(i)})^{-1} Y_{ij} \quad (2.47)$$

donde $Y_0^{(i)}$ es una matriz diagonal, cuyos elementos son las admitancias características de modo en el acceso i . Por tanto

$$Y' = Y_0^{-1}Y \quad (2.48)$$

donde Y_0 es una matriz diagonal de elementos $Y_0^{(i)}$.

Si las funciones base $\varphi_n^{(i)}$ están ortonormalizadas, es decir, $\int_{S_i} \varphi_n^{(i)} \cdot \varphi_m^{(i)} dS = \delta_{nm}$, se cumple que

$$\int_{S_i} (\mathbf{e}_n^{(i)} \times \mathbf{h}_m^{(i)}) \cdot \mathbf{z}^{(i)} dS = \delta_{nm} \quad (2.49)$$

y el factor que depende de la normalización de las funciones base empleadas en el caso primero vale

$$Q_n^{(i)} = 1 \quad (2.50)$$

• También se suelen elegir las funciones base de manera que se cumplan

$$\tilde{\mathbf{h}}_n^{(i)} \times \hat{\mathbf{z}}^{(i)} = \tilde{\mathbf{e}}_n^{(i)} \quad (2.51)$$

siendo $\hat{\mathbf{z}}^{(i)}$ la dirección progresiva de propagación de los campos en el puerto i , teniendo también el cociente $i_n^{(i)}/v_n^{(i)}$ dimensiones de admitancia, pero con la relación entre los coeficientes de tensión y amplitud (representados ahora por medio de $\tilde{v}_n^{(i)}$ e $\tilde{i}_n^{(i)}$) y los coeficientes de ondas incidente y reflejada ($a_n^{(i)}$ y $b_n^{(i)}$) dada esta vez por

$$\tilde{v}_n^{(i)} = \frac{1}{\sqrt{Y_{on}^{(i)}}} (a_n^{(i)} + b_n^{(i)}) \quad (2.52)$$

$$\tilde{i}_n^{(i)} = \sqrt{Y_{on}^{(i)}} (a_n^{(i)} - b_n^{(i)}) \quad (2.53)$$

En este caso, se representará la matriz de admitancias generalizadas mediante \tilde{Y} .

Haciendo ahora

$$\tilde{\mathbf{e}}_n^{(i)} = \tilde{\varphi}_n^{(i)} \times \hat{\mathbf{z}}^{(i)}$$

$$\tilde{\mathbf{h}}_n^{(i)} = \tilde{\varphi}_n^{(i)}$$

las expansiones de los campos se expresan entonces como:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_t^{(i)} &= \sum_{n=1}^{P_i} \tilde{v}_n^{(i)} \tilde{\mathbf{e}}_n^{(i)} = \sum_{n=1}^{P_i} \tilde{v}_n^{(i)} (\tilde{\varphi}_n^{(i)} \times \hat{\mathbf{z}}^{(i)}) = \\ &= \sum_{n=1}^{P_i} \frac{1}{\sqrt{Y_{on}^{(i)}}} (a_n^{(i)} + b_n^{(i)}) \tilde{\mathbf{e}}_n^{(i)} = \sum_{n=1}^{P_i} \frac{1}{\sqrt{Y_{on}^{(i)}}} (a_n^{(i)} + b_n^{(i)}) (\tilde{\varphi}_n^{(i)} \times \hat{\mathbf{z}}^{(i)}) \end{aligned} \quad (2.54)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_t^{(i)} &= \sum_{n=1}^{P_i} \tilde{i}_n^{(i)} \tilde{\mathbf{h}}_n^{(i)} = \sum_{n=1}^{P_i} \tilde{i}_n^{(i)} \tilde{\varphi}_n^{(i)} = \\ &= \sum_{n=1}^{P_i} \sqrt{Y_{on}^{(i)}} (a_n^{(i)} - b_n^{(i)}) \tilde{\mathbf{h}}_n^{(i)} = \sum_{n=1}^{P_i} \sqrt{Y_{on}^{(i)}} (a_n^{(i)} - b_n^{(i)}) \tilde{\varphi}_n^{(i)} \end{aligned} \quad (2.55)$$

Entonces, la matriz de admitancias generalizadas \tilde{Y} tiene dimensiones de admitancia.

Si la relación entre las funciones base utilizadas en este caso y en el primero es

$$\tilde{\varphi}_n^{(i)} = \sqrt{Y_{0n}^{(i)}} \varphi_n^{(i)} \quad (2.56)$$

Es decir,

$$\mathbf{e}_n^{(i)} = \frac{1}{\sqrt{Y_{0n}^{(i)}}} (\tilde{\varphi}_n^{(i)} \times \hat{\mathbf{z}}) = \frac{1}{\sqrt{Y_{0n}^{(i)}}} \mathbf{e}_n^{(i)} \quad (2.57)$$

$$\mathbf{h}_n^{(i)} = \sqrt{Y_{0n}^{(i)}} \tilde{\varphi}_n^{(i)} = \sqrt{Y_{0n}^{(i)}} \tilde{\mathbf{h}}_n^{(i)} \quad (2.58)$$

Para que los coeficientes $a_n^{(i)}$ y $b_n^{(i)}$ sean los mismos, la relación de \tilde{Y} con Y' se obtiene del siguiente modo:

A partir de (2.57) y (2.58), y usando(2.51):

$$\mathbf{E}_t^{(i)} = \sum_{n=1}^{P_i} v_n^{(i)} \mathbf{e}_n^{(i)} = \sum_{n=1}^{P_i} v_n^{(i)} \frac{1}{\sqrt{Y_{0n}^{(i)}}} \tilde{\mathbf{e}}_n^{(i)} \quad (2.59)$$

$$\mathbf{H}_t^{(i)} = \sum_{n=1}^{P_i} i_n^{(i)} \mathbf{h}_n^{(i)} = \sum_{n=1}^{P_i} i_n^{(i)} \sqrt{Y_{0n}^{(i)}} \tilde{\mathbf{h}}_n^{(i)} \quad (2.60)$$

Es decir,

$$\tilde{\mathbf{v}}_n^{(i)} = \frac{v_n^{(i)}}{\sqrt{Y_{0n}^{(i)}}} \quad (2.61)$$

$$\tilde{i}_n^{(i)} = i_n^{(i)} \sqrt{Y_{0n}^{(i)}}. \quad (2.62)$$

Según la definición de matriz de admitancias generalizadas para una red de N accesos \tilde{Y} cumple

$$\tilde{\mathbf{i}}^{(i)} = \sum_{j=1}^N \tilde{Y}_{ij} \tilde{\mathbf{v}}^{(j)} \quad (2.63)$$

Sustituyendo (2.61) y (2.62):

$$\left(Y_0^{(i)}\right)^{1/2} \tilde{\mathbf{i}}^{(i)} = \sum_{j=1}^N \tilde{Y}_{ij} \left(Y_0^{(j)}\right)^{-1/2} \mathbf{v}^{(j)} \Rightarrow \tilde{\mathbf{i}}^{(i)} = \sum_{j=1}^N \left(Y_0^{(i)}\right)^{-1/2} \tilde{Y}_{ij} \left(Y_0^{(j)}\right)^{-1/2} \mathbf{v}^{(j)} \quad (2.64)$$

y según la definición de la matriz de admitancias generalizadas

$$Y'_{ij} = \left(Y_0^{(i)}\right)^{-1/2} \tilde{Y}_{ij} \left(Y_0^{(j)}\right)^{-1/2} \quad (2.65)$$

donde $\left(Y_0^{(i)}\right)^{-1/2}$ y $\left(Y_0^{(j)}\right)^{-1/2}$ son matrices diagonales, y sus elementos son los inversos de las raíces cuadradas positivas de las admitancias características de modo en los accesos i y j , respectivamente. Por tanto

Desarrollo teórico

$$Y' = Y_0^{-1/2} \tilde{Y} Y_0^{-1/2} \quad (2.66)$$

donde $Y_0^{-1/2}$ es una matriz diagonal de elementos $(Y_0^{(i)})^{-1/2}$.

Si las funciones base $\tilde{\varphi}_n^{(i)}$ están ortonormalizadas, es decir $\int_{S_i} \tilde{\varphi}_n^{(i)} \cdot \tilde{\varphi}_{nm}^{(i)} dS = \delta_{nm}$, se cumple que

$$\int_{S_i} (\tilde{\mathbf{e}}_n^{(i)} \times \tilde{\mathbf{h}}_m^{(i)}) \cdot \tilde{\mathbf{z}}^{(i)} dS = \delta_{nm} \quad (2.67)$$

y el factor que depende de la normalización de las funciones base empleadas en el caso primero vale

$$Q_n^{(i)} = 1 \quad (2.68)$$

2.1.3.2. Relaciones entre la matriz S y la matriz Y

A continuación se obtiene la relación entre la matriz de dispersión generalizada y la matriz de admitancias generalizadas, definidas anteriormente.

- Utilizando la definición del caso primero, es decir, para una matriz de admitancias normalizada en admitancia (adimensional) matricialmente se tiene que

$$\mathbf{i}' = Y' \mathbf{v}' \quad (2.69)$$

$$\mathbf{v}' = \mathbf{a} + \mathbf{b} \quad (2.70)$$

$$\mathbf{i}' = \mathbf{a} - \mathbf{b} \quad (2.71)$$

luego sustituyendo (2.70) y (2.71) en (2.69) y despejando \mathbf{b} , se tiene

$$\mathbf{b} = (I + Y')^{-1} (I - Y') \mathbf{a} \quad (2.72)$$

es decir

$$S = (I + Y')^{-1} (I - Y') \quad (2.73)$$

o bien:

$$S = 2(I + Y')^{-1} - I. \quad (2.74)$$

Desde el punto de vista computacional, es preferible utilizar (2.74), ya que no se efectúa ningún producto matricial, y se reduce el tiempo de cálculo en un 50%, aproximadamente.

La relación inversa se obtiene fácilmente

$$Y' = (I - S)(I + S)^{-1} = 2(I + S)^{-1} - I. \quad (2.75)$$

- Utilizando la definición del segundo caso matricialmente se tiene que

$$\mathbf{i} = Y\mathbf{v} \quad (2.76)$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{a} + \mathbf{b} \quad (2.77)$$

$$\mathbf{i} = Y_0(\mathbf{a} - \mathbf{b}) \quad (2.78)$$

luego sustituyendo (2.77) y (2.78) en (2.76) y despejando \mathbf{b} , se tiene

$$\mathbf{b} = (Y_0 + Y)^{-1}(Y_0 - Y)\mathbf{a} \quad (2.79)$$

es decir

$$\begin{aligned} S &= (Y_0 + Y)^{-1}(Y_0 - Y) = \\ &= 2(Y_0 + Y)^{-1}Y_0 - I \end{aligned} \quad (2.80)$$

La relación inversa es

$$\begin{aligned} Y &= Y_0(I - S)(I + S)^{-1} = \\ &= 2Y_0(I + S)^{-1} - Y_0 \end{aligned} \quad (2.81)$$

Como se puede ver (2.80) y (2.81) son equivalentes a (2.74) y (2.75), respectivamente, dado que $Y' = Y_0^{-1}Y$.

• Utilizando la definición del tercer caso anterior, matricialmente se tiene que

$$\tilde{\mathbf{i}} = \tilde{Y}\tilde{\mathbf{v}} \quad (2.82)$$

$$\tilde{\mathbf{v}} = Y_0^{-1/2}(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \quad (2.83)$$

$$\tilde{\mathbf{i}} = Y_0^{1/2}(\mathbf{a} - \mathbf{b}) \quad (2.84)$$

luego sustituyendo (2.83) y (2.84) en (2.82) y despejando \mathbf{b} , se tiene

$$\mathbf{b} = (Y_0^{1/2} + \tilde{Y}Y_0^{-1/2})^{-1}(Y_0^{1/2} - \tilde{Y}Y_0^{-1/2})\mathbf{a} \quad (2.85)$$

es decir

$$\begin{aligned} S &= (Y_0^{1/2} + \tilde{Y}Y_0^{-1/2})^{-1}(Y_0^{1/2} - \tilde{Y}Y_0^{-1/2}) = \\ &= 2(Y_0^{1/2} + \tilde{Y}Y_0^{-1/2})^{-1}Y_0^{1/2} - I \end{aligned} \quad (2.86)$$

La relación inversa en este caso es

$$\begin{aligned} \tilde{Y} &= Y_0^{1/2}(I - S)(I + S)^{-1}Y_0^{1/2} = \\ &= 2Y_0^{1/2}(I + S)^{-1}Y_0^{1/2} - Y_0 \end{aligned} \quad (2.87)$$

Como puede verse (2.86) y (2.87) son equivalentes a (2.74) y (2.75), respectivamente, dado que $Y' = Y_0^{-1/2}\tilde{Y}Y_0^{-1/2}$.

2.2. ANÁLISIS MODAL DE DISCONTINUIDADES

2.2.1. Introducción

El método de adaptación modal [13] es un método muy útil cuando la geometría de la estructura puede identificarse como la unión de dos o más regiones, cada una perteneciente a un sistema de coordenadas separables. Es decir, en cada región existe un conjunto bien definido de soluciones de las Ecuaciones de Maxwell, que satisfacen las condiciones de contorno excepto en la unión. Este método es el que más se utiliza para el análisis de discontinuidades en guías de onda transversales a la dirección de propagación. En 1941, Hahn [14] publicó el método para computar los parámetros del equivalente de un resonador de cavidad. Posteriormente, la técnica de la adaptación modal fue presentada por Clarricoats y Slinn [15] e, inmediatamente, por Wexler [16], usando formulaciones más sistemáticas y organizadas para evaluar los problemas de dispersión de discontinuidades. Como consecuencia natural de la expansión modal, Clarricoats y Slinn introdujeron el concepto de matriz de dispersión generalizada. El término *adaptación modal* fue introducido por Wexler, quien analizó multitud de discontinuidades de salto, diafragmas, guías en offset y uniones. Wexler también observó la dependencia y el comportamiento de la convergencia con la relación entre el número de modos usados para caracterizar cada una de las diferentes guías o aperturas cuya unión se caracterizaba, intuyendo que debería existir una relación óptima. Este problema de la convergencia ha sido estudiado posteriormente por varios autores. Posteriormente, en 1991, Esteban y Rebollar [30] realizaron una generalización del método a guías N-furcadas o uniones multiguía, es decir, la unión entre varias guías de onda que discurren paralelas y otra cuya sección transversal contiene a las anteriores. Desarrollaron una formulación muy eficiente basada en matrices de bloques que permitía tratar a las guías de onda pequeñas que confluían en la mayor como una única guía o puerto *virtual*.

2.2.2. Adaptación modal en la unión

Se plantea el problema de la siguiente forma: una discontinuidad en guía de onda con la siguiente sección transversal:

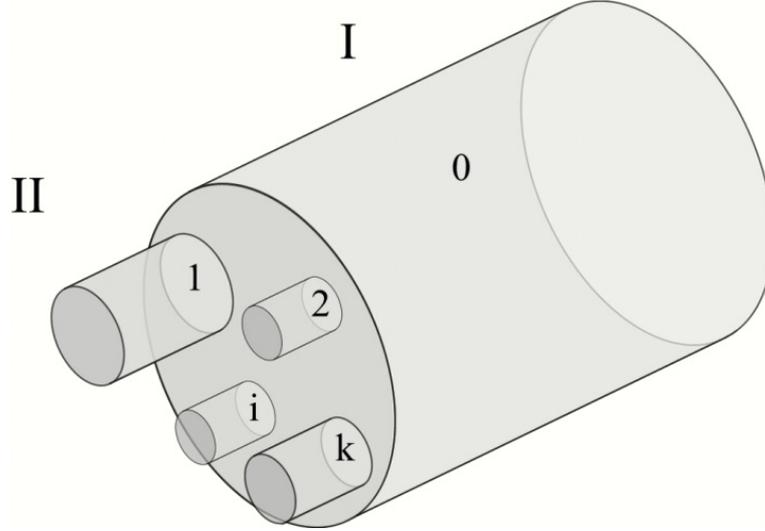


Fig. 2.3. Guía N-furcada. La guía 0 se divide en K guías tras la transición. La guía 0 se nombra como acceso I y las K guías resultantes, como acceso II.

Se impone la continuidad de los campos tangenciales eléctrico y magnético en la discontinuidad, de forma que los campos eléctrico y magnético tangenciales vistos desde la cavidad coinciden con los vistos desde cada una de las guías incidentes, y además, el campo eléctrico tangencial es nulo en el resto de la sección, de forma que, para una cierta guía de entrada k :

$$\mathbf{E}_{t,0} = \begin{cases} \mathbf{E}_{t,k} & (x, y) \in \Omega_k \\ 0 & \text{resto} \end{cases}, \quad (2.88)$$

$$\mathbf{H}_{t,0} = \mathbf{H}_{t,k} \quad (x, y) \in \Omega_k \quad (2.89)$$

siendo Ω_k la región del plano común a la guía k y la guía 0.

Se realiza la expansión del campo en cada guía como suma truncada de sus modos TE y TM:

$$\mathbf{E}_{t,k} = \sum_{m_k} v_{m_k} \mathbf{e}_{m_k} \quad (2.90)$$

$$\mathbf{H}_{t,k} = \sum_{m_k} i_{m_k} \mathbf{h}_{m_k} \quad (2.91)$$

$$\mathbf{E}_{t,0} = \sum_{m_0} v_{m_0} \mathbf{e}_{m_0} \quad (2.92)$$

$$\mathbf{H}_{t,0} = \sum_{m_0} i_{m_0} \mathbf{h}_{m_0} \quad (2.93)$$

La relación entre los modos base eléctricos y magnéticos es, en cada guía:

$$\mathbf{h}_{m_k} \times \hat{\mathbf{z}} = \mathbf{e}_{m_k} Y_{m_k}, \quad (2.94)$$

Los modos están normalizados de forma que se cumple que

Desarrollo teórico

$$\int_{S_k} \mathbf{e}_{m_k} \cdot \mathbf{e}_{n_k} dS = \delta_{mn} , \quad (2.95)$$

Y

$$\int_{S_k} \mathbf{h}_{m_k} \cdot \mathbf{h}_{n_k} dS = Y_{m_k}^2 \delta_{mn} , \quad (2.96)$$

para cada modo de las guías de entrada y la cavidad.

Sustituyendo las expresiones (2.90), y (2.92) en (2.88), multiplicando por un \mathbf{e}_{m_0} concreto e integrando en la superficie de la cavidad, se obtiene

$$\begin{aligned} v_{m_0} &= \sum_{m_1} v_{m_1} \int_{S_0} \mathbf{e}_{m_0} \cdot \mathbf{e}_{m_1} dS + \dots + \\ &+ \sum_{m_k} v_{m_k} \int_{S_0} \mathbf{e}_{m_0} \cdot \mathbf{e}_{m_k} dS + \dots + \quad , \quad (2.97) \\ &+ \sum_{m_N} v_{m_N} \int_{S_0} \mathbf{e}_{m_0} \cdot \mathbf{e}_{m_N} dS \end{aligned}$$

dada la normalización de los modos según (2.95).

\mathbf{e}_{m_k} son nulos en la parte de S_0 que no es S_k , de forma que las integrales en cada sumatorio se pueden extender únicamente a la superficie de la guía k :

$$\begin{aligned} v_{m_0} &= \sum_{m_1} v_{m_1} \int_{S_1} \mathbf{e}_{m_0} \cdot \mathbf{e}_{m_1} dS + \dots + \\ &+ \sum_{m_k} v_{m_k} \int_{S_k} \mathbf{e}_{m_0} \cdot \mathbf{e}_{m_k} dS + \dots + \quad (2.98) \\ &+ \sum_{m_N} v_{m_N} \int_{S_N} \mathbf{e}_{m_0} \cdot \mathbf{e}_{m_N} dS \end{aligned}$$

Si se definen las matrices

$$M_{m_0 m_k}^{k0} = \int_{S_k} \mathbf{e}_{m_0} \cdot \mathbf{e}_{m_k} dS , \quad (2.99)$$

se tiene que

$$\begin{aligned} v_{m_0} &= \sum_{m_1} v_{m_1} M_{m_0 m_1}^{10} + \dots + \\ &+ \sum_{m_k} v_{m_k} M_{m_0 m_k}^{k0} + \dots + \quad . \quad (2.100) \\ &+ \sum_{m_N} v_{m_N} M_{m_0 m_N}^{N0} \end{aligned}$$

Se demuestra en [29] que, son nulas las entradas de la matriz $M_{m_0 m_k}^{k0}$ correspondientes a acoplos TE-TM para cualesquiera secciones y posiciones relativas de las guías, es decir, que dadas dos guías, una contenida enteramente en la otra, si se incide por la guía de sección mayor con modos TM, no se excitan modos TE en la pequeña.

En forma matricial, (2.100) se expresa de la forma:

$$\mathbf{v}_0 = M^{10}\mathbf{v}_1 + \dots + M^{k0}\mathbf{v}_k + \dots + M^{N0}\mathbf{v}_N \quad (2.101)$$

Ahora, se aprovecha la continuidad del campo magnético tangencial dada por (2.89). Se sustituyen (2.91) y (2.93) en (2.89), se multiplica por un cierto \mathbf{h}_{m_k} y se integra en S_k . Dada la ortogonalidad de los modos, se tiene que

$$\begin{aligned} i_{m_k} \int_{S_k} \mathbf{h}_{m_k} \cdot \mathbf{h}_{m_k} dS &= i_{m_k} Y_{m_k}^2 = \\ &= -\sum_{m_0} i_{m_0} \int_{S_k} \mathbf{h}_{m_0} \cdot \mathbf{h}_{m_k} dS = \\ &= -\sum_{m_0} i_{m_0} Y_{m_0} Y_{m_k} \int_{S_k} \mathbf{e}_{m_0} \cdot \mathbf{e}_{m_k} dS = \\ &= -\sum_{m_0} i_{m_0} Y_{m_0} Y_{m_k} M_{m_0 m_k}^{k0} \end{aligned} \quad (2.102)$$

Simplificando el valor de $Y_{m_k}^{(h)}$ en toda la ecuación, se tiene, para cada una de las N guías:

$$i_{m_k} Y_{m_k} = -\sum_{m_0} i_{m_0} Y_{m_0} M_{m_0 m_k}^{k0} \quad (2.103)$$

De este modo, las amplitudes modales de la guía k quedan, en forma matricial, como

$$Y_k \mathbf{i}_k = -M^{k0t} Y_0 \mathbf{i}_0 \quad (2.104)$$

Con (2.101) y (2.104), se tiene el sistema de ecuaciones que permite obtener las amplitudes modales en la cavidad a partir de las ondas incidentes.

2.2.3. Extensión a la formulación de la guía N-furcada.

Esta formulación considera esta discontinuidad como un cuadripolo equivalente, en el que los parámetros de las N guías de entrada se agrupan en matrices de bloques para formar un acceso equivalente, y el otro acceso es la guía grande.

A continuación, con las ecuaciones ya planteadas, se aplicará la formulación de la guía N-furcada [30], basada en una formulación con matrices de bloques, que simplifica la notación. Esta formulación define las siguientes matrices de bloques:

$$\mathbf{v}_{II} = (\mathbf{v}_1^t, \mathbf{v}_2^t, \dots, \mathbf{v}_N^t)^t \quad (2.105)$$

$$\mathbf{i}_H = (\mathbf{i}_1^t, \mathbf{i}_2^t, \dots, \mathbf{i}_N^t) \quad (2.106)$$

$$Y_H = \text{diag}\{Y_1, Y_2, \dots, Y_N\} \quad (2.107)$$

$$M = (M^{10} \quad M^{20} \quad \dots \quad M^{N0}) \quad (2.108)$$

Con esto, es fácil ver que las amplitudes modales se pueden obtener a partir de las ecuaciones

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{v}_I &= M\mathbf{v}_H \\ Y_H \mathbf{i}_H &= -M^t Y_I \mathbf{i}_I \end{aligned} \right\}. \quad (2.109)$$

2.2.4. El problema de la convergencia relativa

La base del MM es la expansión del campo electromagnético en términos de series infinitas de modos normales. Dado que la capacidad para el cálculo numérico es finita, es necesario truncar las series infinitas para obtener una aproximación numérica. Este procedimiento es más útil y preciso que las aproximaciones analíticas, que se basan en modelos demasiado simplificados para la mayoría de los casos. Desafortunadamente, un ordenador siempre da una solución, incluso si el problema a resolver no está bien planteado o si aquella no tiene sentido. Por tanto, es importante asegurar la validez de una determinada solución numérica.

Una serie de funciones solamente puede truncarse si es convergente. La expansión de los campos electromagnéticos en base a una serie de funciones propias es convergente, puesto que tiene estructura de espacio de Hilbert. Por tanto, se obtienen aproximaciones tanto mejores cuantos más términos se consideren en la serie.

Lo que ocurre en el MM es que hay que truncar dos series simultáneamente, una a cada lado de la discontinuidad. Se ha observado que los resultados numéricos convergen hacia valores diferentes y de forma diferente, dependiendo de la forma en que se trunquen las series. Este fenómeno se conoce como *convergencia relativa*, concepto establecido por Mittra en 1963 [33]. En la elaboración de dicho trabajo, se presentaron problemas con los resultados dependiendo del número de modos que se usaron, pero no se resolvió el problema.

Wexler [16] también observó en 1967 la dependencia de los resultados en una unión con el número de modos usados en cada acceso, intuyendo que debería haber una relación óptima, puesto que en algunos casos, los resultados

se aproximaban más a los esperados que en otros. Sin embargo, tampoco se analizó el problema en profundidad.

En 1971, Mastermann y Clarricoats [17] examinaron este problema con mayor detalle. En su trabajo, se analiza una discontinuidad general con dos guías de onda en offset para diferentes aperturas de ambas. Llegan a la conclusión de que existe una relación crítica entre el número de modos usados a ambos lados de la discontinuidad, y que esta relación depende de las dimensiones de la estructura.

Otro importante estudio de la convergencia en el MM puede verse en [23], donde la convergencia relativa se relaciona con el condicionamiento del sistema lineal a resolver.

En [17], después de diversos análisis, se concluía que el cociente óptimo entre el número de modos en ambos lados de la discontinuidad es aquél que iguala las frecuencias espaciales de los modos de mayor orden considerado a cada lado de la discontinuidad. Es decir, los modos en ambas guías deben tener la misma resolución espacial [24]. Esta resolución espacial viene dada por la frecuencia de corte del modo en cuestión, f_c , o si se prefiere, el número de onda de corte k_c , que será el parámetro empleado, como se ha comentado en el apartado 2.3. Conviene comentar que, en el caso de existir modos degenerados, han de tenerse todos en cuenta, ya que siguen siendo ortogonales, y todos contribuyen de forma separada al campo electromagnético.

2.2.5. Ejemplo: un salto en guía de onda.

Las expresiones derivadas en el desarrollo anterior son para guías de sección arbitraria. Los modos de guías rectangulares, tanto los campos como las constantes de propagación, se pueden expresar en forma cerrada, y de esta forma, las integrales de acoplo se pueden calcular analíticamente. En el Anexo, se encuentran calculadas las integrales de acoplo para una unión entre dos guías rectangulares de diferente sección arbitrariamente situadas.

La Fig. 2.4 explica la nomenclatura seguida en este caso: se considera una unión descentrada de dos guías rectangulares, 1 y 2. La primera de ellas es la menor, y expresa los campos respecto del sistema (x_1, y_1) y mide $a_1 \times b_1$. La segunda es la mayor y expresa los campos respecto del sistema (x_2, y_2) y mide $a_2 \times b_2$. Desplazamiento de la posición centrada de la 1 respecto de la 2 (x_0, y_0) . Distancia entre los orígenes de ambas (d_x, d_y) .

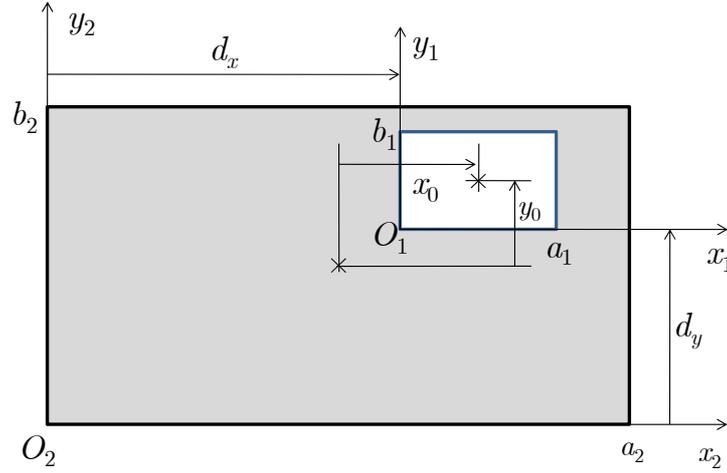


Fig. 2.4. Unión de dos guías rectangulares, 1 y 2. La primera (la menor) expresa los campos respecto del sistema (x_1, y_1) y mide $a_1 \times b_1$. La segunda (la mayor) expresa los campos respecto de (x_2, y_2) y mide $a_2 \times b_2$. El desplazamiento de la posición centrada de la 1 respecto de la 2 es (x_0, y_0) . La distancia entre los orígenes de ambas es (d_x, d_y) .

Se presenta a continuación un ejemplo de funcionamiento: una unión centrada ($x_0=y_0=0$) entre una guía de onda WR-62 ($a=15.8$ mm, $b=7.9$ mm) (acceso 1) y una guía WR-90 ($a=22.86$ mm, $b=10.16$ mm) (acceso 2). Se trabaja en el rango de frecuencias de 10 a 45 GHz. Este ejemplo es interesante porque abarca tanto el rango monomodo como el multimodo de ambas guías, con lo que se pueden obtener respuestas cruzadas para diferentes modos además de los fundamentales en ambos accesos.

Se calculan los parámetros S_{11} y S_{21} de los modos TE_{10} , TE_{30} y TM_{12} cuando se incide con el TE_{10} desde la primera, lo que da a un total de seis curvas. Las frecuencias de corte de estos modos en ambas guías son las siguientes:

Frec. Corte (GHz)	TE_{10}	TE_{30}	TM_{12}
WR-62	9.494	28.481	39.143
WR-90	6.562	19.685	30.248

Tabla 1. Frecuencias de corte de los modos TE_{10} , TE_{30} y TM_{12} en las guías de onda WR-62 ($a=15.8$ mm, $b=7.9$ mm) y WR-90 ($a=22.86$ mm, $b=10.16$ mm).

Como se ha comentado con anterioridad, el estudio de la convergencia de la formulación es importante si se quieren resultados precisos. El número de

modos empleado para calcular los parámetros S influye enormemente en los resultados, y más aún si se trata de una guía de tamaño eléctrico grande (multimodo). En este ejemplo, se sigue el criterio correcto, que es tomar todos los modos por debajo de un k_c dado en ambos lados de la discontinuidad.

En la Fig. 2.5, se realiza este estudio de convergencia, a la frecuencia más elevada: 45 GHz. Se representan todos los parámetros S comentados en función de k_c , normalizado al número de onda de corte del modo fundamental en la guía pequeña. En el siguiente apartado, se hablará de este parámetro con más detalle.

Nótese cómo a partir de $k_c=10$, los resultados permanecen prácticamente estables. Esto significa que ya se ha alcanzado la convergencia y que no son necesarios más modos para obtener buenos resultados en este rango de frecuencias. Conviene destacar que, según la banda de frecuencias considerada, son necesarios más modos o menos. Por ejemplo, si se hubieran representado los resultados en una pequeña banda en torno a 10 GHz, habría sido necesario un k_c mucho menor, ya que ambas guías estarían en régimen monomodo.

Otro aspecto que conviene destacar es que todos los modos parecen converger a la misma velocidad, a una frecuencia dada. Este fenómeno se observa en todos los casos, y por ello, en los estudios de la convergencia que se realicen a continuación, se representará únicamente el valor del modo fundamental.

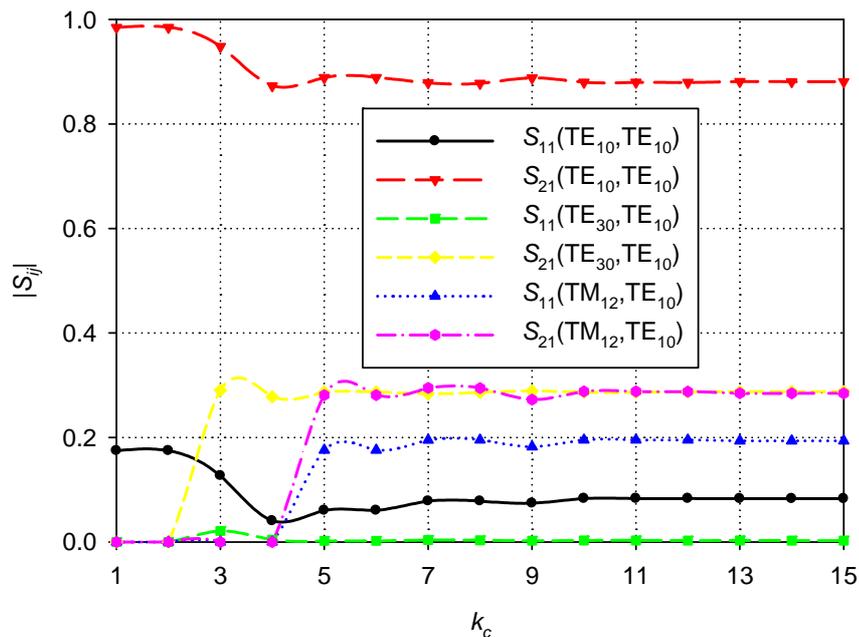


Fig. 2.5. Convergencia de los parámetros S

La Fig. 2.6 muestra los módulos de los parámetros S_{11} y S_{21} de los modos TE_{10} , TE_{30} y TM_{12} cuando se incide con el TE_{10} desde la primera. En la misma gráfica, se representan superpuestos los resultados obtenidos en la Fig. 7 de [19], por medio de FDTD, para comparar los resultados.

Dado que se están obteniendo parámetros cruzados entre modos, conviene realizar una aclaración respecto de la magnitud que se está representando:

Los parámetros S no son más que la relación entre coeficientes de los desarrollos en serie de los campos incidentes y reflejados. Según las consideraciones respecto a los parámetros S realizadas en un apartado anterior, si se definen unas funciones base con unas normalizaciones u otras, los coeficientes tienen un significado u otro. Los resultados de la Fig. 2.6 se han obtenido según la normalización dada por (2.51)-(2.68). Según esta normalización, los parámetros S son la raíz cuadrada del cociente de potencias, y cumplen la ley de conservación (para redes sin pérdidas) $|S_{11}^2| + |S_{21}^2| = 1$. Si se utiliza otra normalización, se pierde este significado físico y se podrían obtener parámetros S mayores que 1, por ejemplo.

Nótese cómo a determinadas frecuencias se producen saltos en las respuestas. Estas frecuencias son las frecuencias de corte de los modos de ambas guías, y en esos puntos, se produce una transferencia de potencia del resto de modos hacia ellos. Nótese cómo la relación $|S_{11}^2| + |S_{21}^2| = 1$ se cumple para el modo fundamental hasta la frecuencia de corte del modo TE_{30} en la WR-62: 19.685 GHz. A partir de ese momento, se sigue cumpliendo la ley de conservación, pero teniendo en cuenta para ello los modos TE_{10} y TE_{30} en la WR-62 (en la WR-90, solamente el TE_{10} está en propagación a esa frecuencia).

Se podría pensar que el modo TE_{20} debería haber entrado en juego antes, pero debido a que la unión de las guías es centrada y a que se excita la red con el TE_{10} , solamente se excitan los modos TE_{mn} y TM_{mn} con m impar y n par. El resto de modos no solamente no se excitan, sino que, si se está seguro de excitar siempre con el TE_{10} , ni siquiera es necesario tenerlos en cuenta como funciones base para caracterizar completamente la discontinuidad.

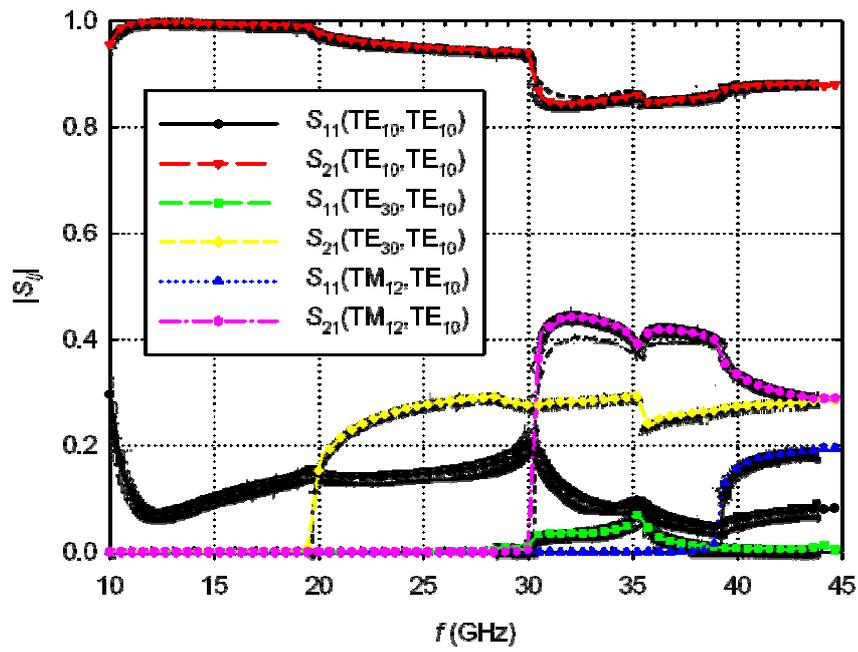


Fig. 2.6. Módulos de S_{11} y S_{21} de los modos TE_{10} , TE_{30} y TM_{12} cuando se incide con el TE_{10} desde el acceso 1, superpuestos con los resultados obtenidos en [37].

2.3. LA CONVERGENCIA Y EL NÚMERO DE MODOS

2.3.1. Cálculo de áreas por recuento de cuadrados

En todos los trabajos en los que se hace un estudio de la convergencia de un determinado método modal, se emplea el número de modos como variable independiente, es decir, como un parámetro de diseño.

En una unión entre dos guías, la adaptación modal en la unión no está bien realizada si se toma el mismo número de modos en ambas guías. Como se ha visto, el error en la aplicación del MM es mínimo si el modo de mayor orden que se elige en ambas guías tiene una misma resolución espacial. Es decir, un mismo valor de k_c . Pero en dos guías de distinto tamaño, un mismo k_c implica un número distinto de modos. Por tanto, para una serie de redes en cascada, se dice que el análisis se hace con una precisión dada si todos los elementos están analizados con el mismo k_c dado, y este k_c es el indicador de la precisión.

Adicionalmente, puede haber dos estructuras del mismo tamaño que no estén descritas por el mismo juego de modos, y que ambas estén descritas con una misma precisión. Piénsese, por ejemplo, en una estructura rectangular en la que se emplean todos los modos TE y TM, que se acopla con otra en la que se emplean únicamente los modos TE_{m0} . En estos casos, para un k_c dado, el número de modos en la segunda estructura es mucho menor que en la primera. Si se hace un análisis de la convergencia en cada una de ellas, ambas convergerán para valores de k_c similares, pero en la primera serán necesarios muchos más modos. Se concluye, por tanto, que el número de modos es una variable sin significado físico en el análisis modal.

Esta medida de la precisión, k_c , no depende de la frecuencia. Sin embargo, en la práctica, los dispositivos a frecuencias más elevadas tienen un tamaño menor, lo que hace que los valores de k_c sean menores. Entonces, al considerar dos guías monomodo que trabajan en bandas diferentes, el k_c del modo más alto deberá ser mayor en la guía más pequeña y viceversa. Interesaría un parámetro que permaneciera constante en dispositivos de un mismo tamaño eléctrico. Esto se soluciona si se divide el k_c del modo más alto por el del modo fundamental. Este parámetro k_c normalizado es el que se va a considerar en todo este documento, y por abreviatura se llamará k_c , es decir:

$$k_c = \max(k_{c,i})/k_{c,1} \quad (2.110)$$

Aunque, como se ha dicho, el número de modos es una variable que no tiene significado físico y que no sirve para evaluar la precisión, es necesario saber cuántos modos se consideran en cada caso, puesto que depende de ello el tamaño de las matrices consideradas para resolver el problema, y por tanto, el tiempo de cálculo.

Para una guía rectangular, en el caso de utilizar únicamente modos TE_{m0} , el modo TE_{20} tiene un valor de número de onda de corte el doble que el fundamental, el TE_{30} el triple, y así indefinidamente. Por tanto, la relación entre k_c y el número de modos N es, directamente,

$$N = k_c \quad (2.111)$$

Puede comprobarse que esto permite analizar estas estructuras con precisiones elevadas sin que el número de modos sea muy grande.

En el caso general de emplear todos los modos TE_{mn} y TM_{mn} , no existe una relación analítica que proporcione cuántos modos tienen un número de onda de corte inferior a un valor dado: hallar todos los modos por debajo de unos índices m y n dados.

Tal como se ha definido, el valor de k_c es realmente una frecuencia espacial, puesto que el número entero igual o inferior es el valor m del modo TE_{m0} de orden más elevado. Pensando en una transformada de Fourier bidimensional, con unos ejes k_x y k_y , este valor es igual al de una elipse dentro de la cual, se seleccionan todos los modos cuyos puntos en el plano (k_x, k_y) estén dentro ella.

Concretamente, el valor es

$$k_c^2 = \frac{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}{\frac{\pi}{a}} = \pi \left[m^2 + \left(\frac{na}{b}\right)^2 \right] = \pi [m^2 + (nh)^2], \quad (2.112)$$

donde se ha definido la relación de aspecto h como

$$h = \frac{a}{b} \quad (2.113)$$

Dividiendo todo por k_c^2 :

$$1 = \pi \left[\left(\frac{m}{k_c}\right)^2 + \left(\frac{nh}{k_c}\right)^2 \right] \quad (2.114)$$

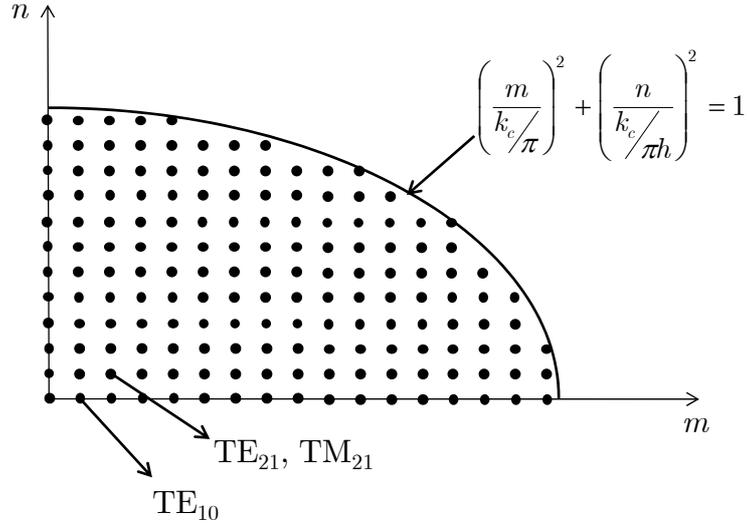


Fig. 2.7. Aproximación del área de una elipse por simple recuento.

O bien:

$$\left(\frac{m}{k_c/\pi}\right)^2 + \left(\frac{n}{k_c/\pi h}\right)^2 = 1 \quad (2.115)$$

Sea la Fig. 2.7. Si se consideran las variables m y n como continuas, (2.115) es una elipse centrada en el origen de semiejes k_c/π y $k_c/\pi h$. Nótese que contar todos los modos que tienen un k_c menor que uno dado tiene la interpretación geométrica de contar los puntos del primer cuadrante que estén dentro de la elipse representada por (2.115). Sin embargo, este recuento de puntos en el plano es también una medida del área, es decir, contar cuadrados de área unidad.

Por tanto, ya que hay que contar los modos TE y TM, podría pensarse que el número de modos es aproximadamente igual a dos veces el área de un cuarto de la elipse, la parte de ella situada en el primer cuadrante. El área de una elipse es igual a π multiplicado por los valores de los semiejes. Por tanto,

$$N = 2 \cdot \frac{1}{4} \pi \frac{k_c}{\pi h} \frac{k_c}{\pi} = \frac{\pi}{2h} k_c^2 \quad (2.116)$$

Es evidente que (2.116) es un valor aproximado, porque el número de modos es un valor entero y (2.116) no lo es, pero el error relativo ha de tender a cero cuando k_c se hace muy grande, puesto que el error entre el área de una elipse y su aproximación como suma de cuadrados pierde valor respecto del valor total cuando la elipse se hace grande (cuando k_c aumenta).

Si $h < 1$, la altura es mayor que la anchura, de forma que el valor de h que debería tomarse no sería h , sino $1/h$. Por tanto, se supondrá que $a \geq b$. Conforme aumenta h , la guía se va haciendo más estrecha, y tiende a ser una ranura. Al final, para un k_c dado, todos los modos son TE_{m0} , de modo que la ecuación cuadrática propuesta pierde validez, y la relación entre k_c y el número de modos es la dada por (2.111).

2.3.2. Ejemplos

Las Figs. 2.8–2.13 representan el número de modos en función de k_c para diferentes valores de la relación de aspecto h . Junto con el número real de modos, se superpone la curva aproximada (analítica) propuesta por (2.116). Se comprueba que la estimación propuesta es buena para valores de $h < 10$, lo que incluye la gran mayoría de casos reales de guías de onda.

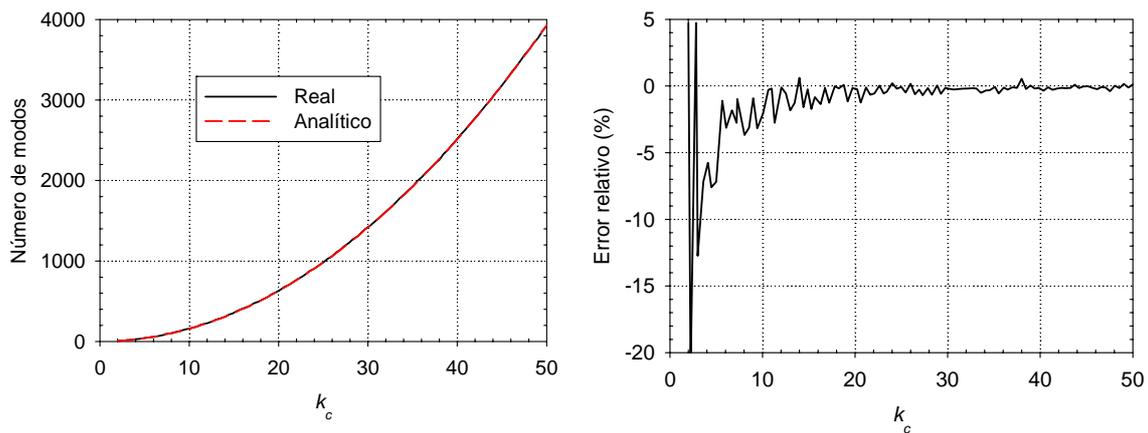


Fig. 2.8. Número de modos en una guía rectangular. Comparación del valor real respecto del proporcionado por (2.116). $h=1$.

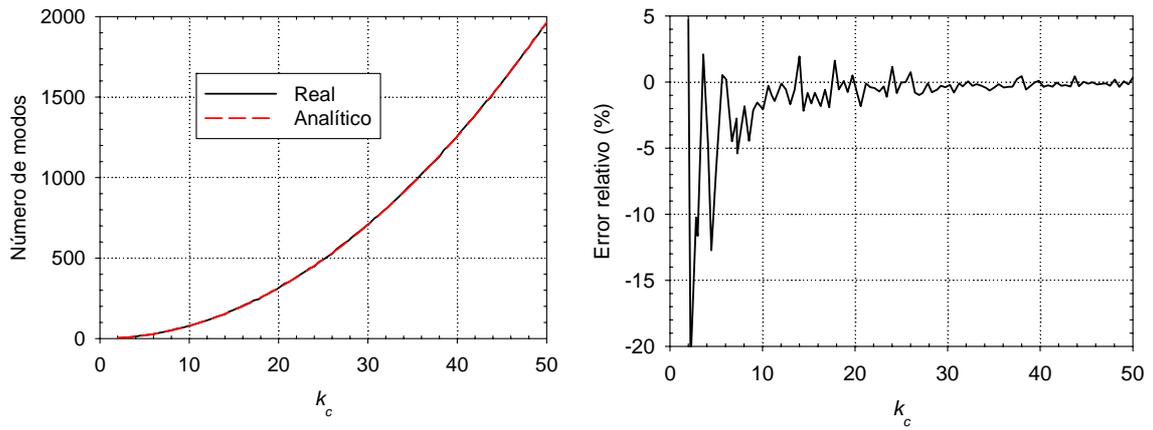


Fig. 2.9. Número de modos en una guía rectangular. Comparación del valor real respecto del proporcionado por (2.116). $h=2$.

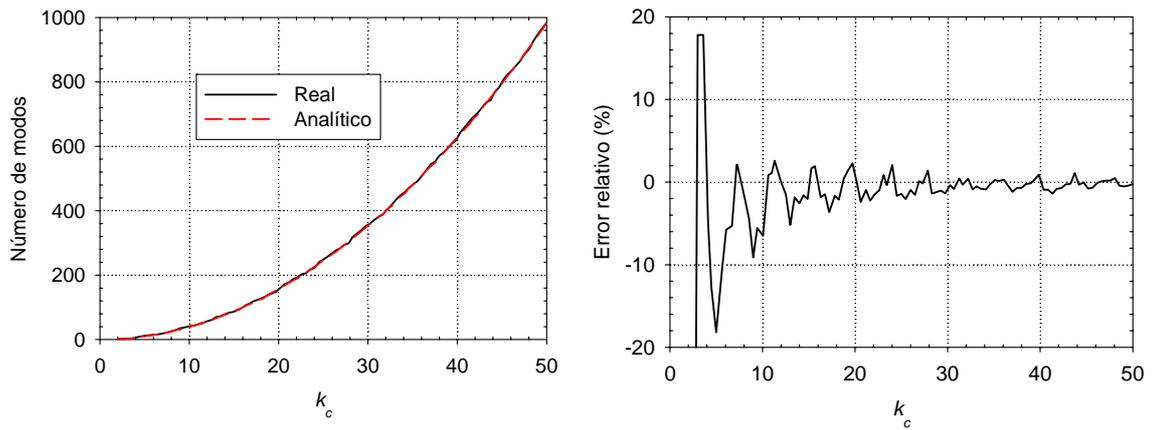


Fig. 2.10. Número de modos en una guía rectangular. Comparación del valor real respecto del proporcionado por (2.116). $h=4$.

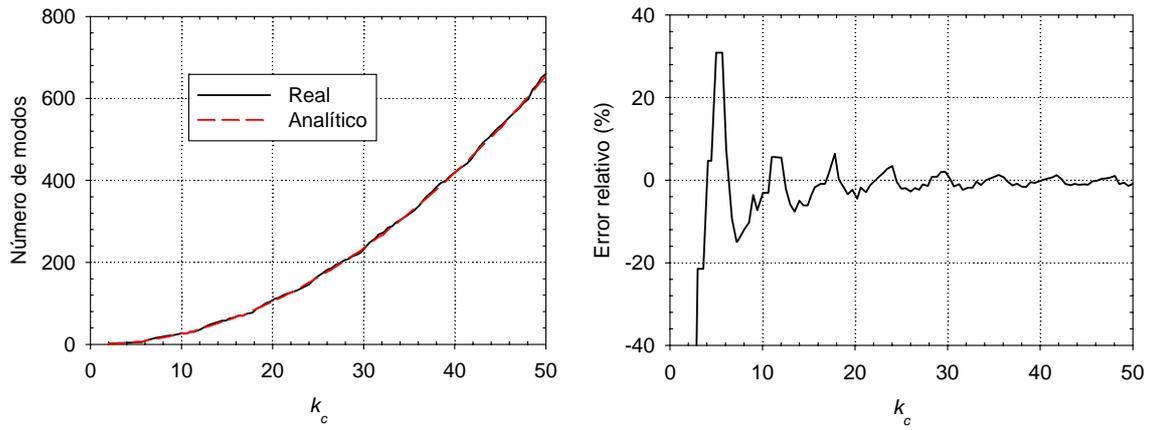


Fig. 2.11. Número de modos en una guía rectangular. Comparación del valor real respecto del proporcionado por (2.116). $h=6$.

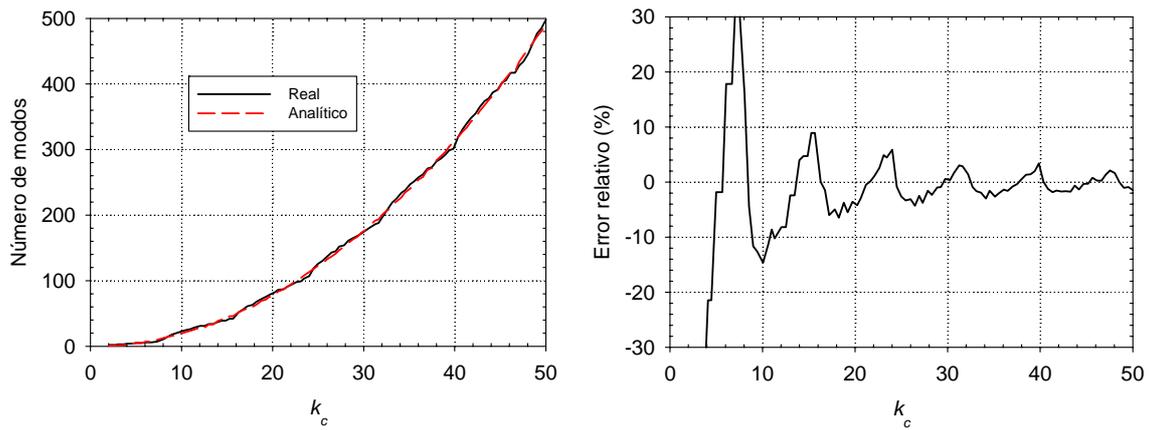


Fig. 2.12. Número de modos en una guía rectangular. Comparación del valor real respecto del proporcionado por (2.116). $h=8$.

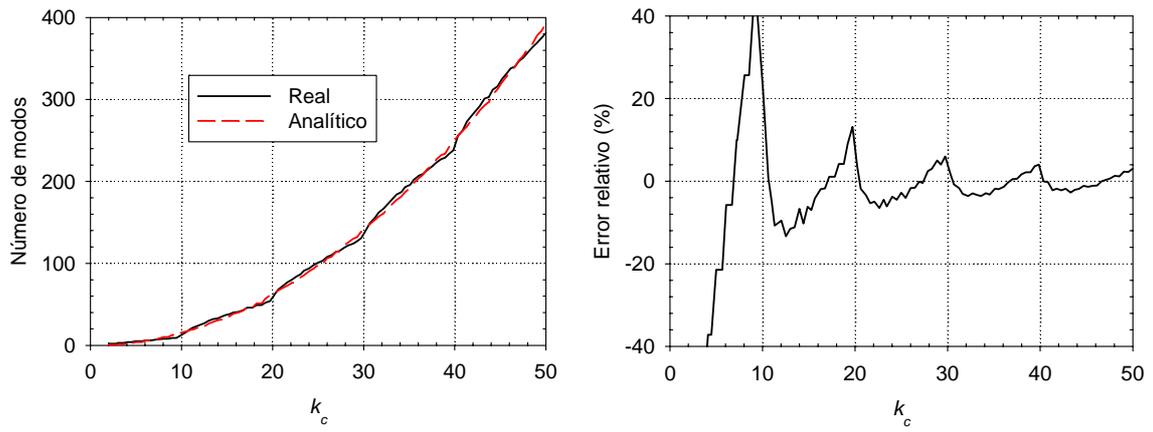


Fig. 2.13. Número de modos en una guía rectangular. Comparación del valor real respecto del proporcionado por (2.116). $h=10$.

2.4. EL MÉTODO DE LOS MODOS ACOPLADOS

2.4.1. Introducción

Los medios bianisótropos [56]-[63] son los medios lineales más generales y han recibido considerable atención en los últimos años. Debido a sus relaciones constitutivas, existe un acoplo adicional entre los campos eléctrico y magnético, lo que ha dado lugar a nuevos problemas y aplicaciones [64]-[65]. Algunos casos particulares de medios bianisótropos son los medios dieléctricos, magnéticos, quirales [66]-[68], ferritas [91] o Faraday-quirales [69].

Los medios quirales son un tipo de medios biisótropos, esto es, los campos y las densidades de flujo están acoplados por escalares en las relaciones constitutivas. Los medios quirales tienen la propiedad de poder cambiar la polarización de una onda incidente. Algunas de las aplicaciones más populares se dan en antenas impresas y sistemas de comunicación en general.

Las ferritas tienen anisotropía magnética e isotropía dieléctrica. Exhiben propiedades no recíprocas y sus aplicaciones incluyen supresores de interferencias electromagnéticas, antenas, circuladores y desfasadores.

Los medios Faraday-quirales son medios anisótropos con propiedades quirales, controladas con un campo magnético estático. Los quiroplasmas consisten en objetos quirales incrustados en un plasma, y las quiroferritas consisten en objetos quirales incrustados en una ferrita. Tienen potenciales aplicaciones en control de la sección recta radar de blancos cubiertos, y en la mejora de las propiedades de radiación y polarización de antenas y arrays.

Para el desarrollo de dispositivos de microondas cuya respuesta deba cumplir cierta condición, se deben encontrar unos parámetros de diseño óptimos, lo que implica, la mayoría de casos, un proceso de minimización. Por ello, se necesitan herramientas de diseño eficientes.

En el análisis de guías de onda parcialmente rellenas, el método de los modos acoplados (CMM) [49]-[90] es un método conocido para poder encontrar las características de propagación. Este método se basa en expresar los modos característicos, o propios, de la guía de onda como combinación lineal de los modos de la correspondiente guía vacía, o modos base. En el caso de una guía vacía, los modos propios son iguales a los modos base, y están desacoplados. Si

el material es pequeño o de parámetros cercanos al vacío, los modos propios se parecen mucho a los modos base, y con pocos de ellos, se puede obtener un desarrollo fiel. En general, cuanto más diferente sea la guía de una guía vacía, más modos serán necesarios para caracterizarla. La principal ventaja del CMM es que todos los modos propios se calculan de una sola vez, sin la necesidad de resolver costosas ecuaciones trascendentes.

El artículo de Schelkunoff [49], formulado para un medio anisótropo general caracterizado por sus matrices ε y μ , puede ser considerado como el que estableció el CMM. Esta formulación se refinó posteriormente [70]–[78]. En [75], se desarrolla el llamado Método del Operador Transversal, que se aplica en [77] y [78]. La mayor desventaja de [49] radica en que es necesaria la inversión de dos matrices, que en aquellos años suponía un problema, por lo que aquellos artículos se realizaron utilizando pocos modos base.

Otro trabajo importante derivado del trabajo de Schelkunoff se debe a Ogusu [53]. Este trabajo está formulado para dieléctricos isótropos, y resuelve guías abiertas envolviendo éstas por contornos metálicos lejanos ficticios. La diferencia esencial respecto de la formulación de Schelkunoff del CMM está en la forma explícita de expresar los campos axiales en función de los transversales, mediante inversión analítica de las relaciones constitutivas, lo que evita la inversión de matrices. Debido a la mayor simplicidad de los cálculos a realizar, esta formulación se ha venido utilizando ampliamente en el análisis de guías dieléctricas [79], ferritas magnetizadas [80] o medios bianisótropos generales [52]. A partir de ahora, se denominará a la estrategia de Ogusu como *directa*, mientras que la de Schelkunoff se denominará *indirecta*.

Partiendo de la formulación indirecta original de Schelkunoff, Chaloupka [82] analizó la dispersión de obstáculos dieléctricos y ferrimagnéticos en guía de onda rectangular, pero con tres novedades importantes: en primer lugar, en vez de utilizar un operador diferencial, se utiliza un operador integral. Segundo, el problema de dispersión se resuelve con un modelo de línea de transmisión manipulando las ecuaciones del telegrafista generalizadas (GTE). Tercero, se añade un término, $H_0(z)$, sin dependencia de las coordenadas transversales a la componente H_z [82]. Se confirmó posteriormente mediante el análisis de estructuras girotrópicas [83], [84], anisótropas [85] o quirales [86] que la inclusión de este nuevo término en la formulación indirecta es necesaria para obtener resultados precisos. En la estrategia directa, sin embargo, la inclusión de este término solamente afecta al cálculo final de la componente H_z . Varios resultados que comparan las formulaciones directa e indirecta con medidas y simulaciones con programas comerciales [87]–[88] hacen llegar a la conclusión de que, después

de introducir las mejoras de Chaloupka, la formulación indirecta da lugar a mejores resultados y a una mayor convergencia que la formulación directa.

La tesis doctoral de Miguel Ángel Solano [85] es una referencia imprescindible en el campo del CMM. En ella, se realizan análisis extensos y profundos sobre las formulaciones y sobre los resultados de las estrategias directa e indirecta. Del mismo modo, se propone una nueva formulación, llamada *restringida*, para el análisis de ferritas en guía rectangular de altura completa y magnetización vertical, donde solamente son necesarios los modos TE_{m0} . En la tesis doctoral de Álvaro Gómez [86], se implementan diversas formulaciones para el análisis de guías rectangulares parcialmente rellenas de medios quirales, entre las que se incluyen las formulaciones directa e indirecta.

En este trabajo, se extiende la formulación indirecta para materiales bianisótropos, que incluyen los materiales dieléctricos, magnéticos, quirales o ferrimagnéticos como casos particulares. Se exponen ambas formulaciones con detalle y se proporcionan resultados comparativos de ambas. Se desarrolla también la formulación restringida.

2.4.2. Cálculo de la matriz de acoplo

La Fig. 2.14 muestra una guía de onda rellena de un material bianisótropo e inhomogéneo, de parámetros ε , μ , η y ξ , que dependen de las coordenadas transversales u y v , perpendiculares a la dirección de propagación z .

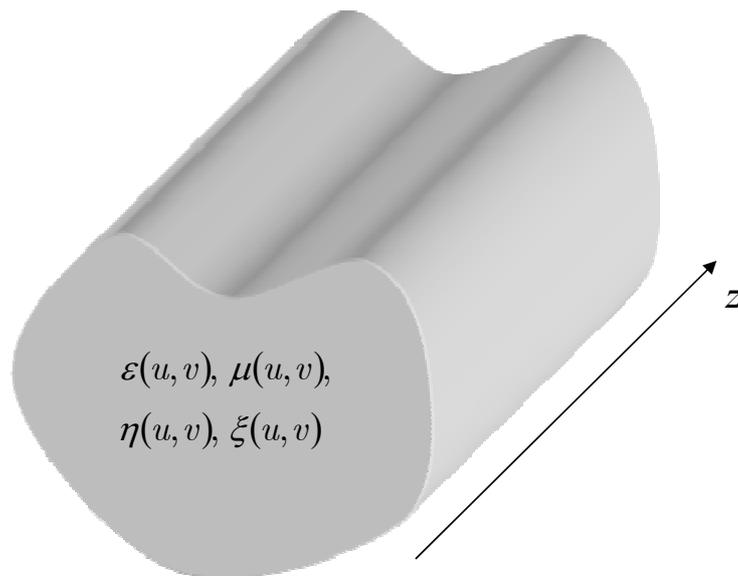


Fig. 2.14. Guía de onda de forma arbitraria rellena de un cierto material bianisótropo de parámetros ε , μ , η y ξ , con dependencia de las coordenadas (u, v) .

La propagación en líneas de transmisión fue resuelta por Oliver Heaviside, quien estudió la propagación de las señales por las líneas telegráficas, con el objetivo de eliminar la distorsión que sufrían a su paso por líneas subterráneas o de cable submarino. El fenómeno había adquirido actualidad en 1853 cuando Latimer Clark observó esta distorsión por primera vez en la línea anglo-holandesa, lo que suscitó la atención de Faraday, quien lo estudió y lo consideró una prueba de sus propias ideas sobre el campo electromagnético, en concreto sobre los *efectos transversales de las corrientes* [92]. Este fenómeno puso en duda la viabilidad del proyectado cable trasatlántico, de longitud hasta entonces inédita. William Thompson, más conocido como Lord Kelvin, elaboró en 1855 una teoría del telégrafo eléctrico en la que cambió las ideas de Faraday con las ecuaciones de Fourier sobre la difusión del calor en un cuerpo sólido, llegando a la conclusión de que el retardo de las señales se debía a la combinación de la resistencia y la capacitancia del cable, creciendo según el cuadrado de la longitud de éste [93]-[94].

Heaviside aplicó la teoría de Kelvin a sus propias experiencias con el cable anglo-danés y publicó una serie de trabajos sobre ello entre 1874 y 1789, que fueron posteriormente compilados [95]. Consecuencia de ello fue la inclusión de dos nuevos factores en la propagación hasta entonces no tenidos en cuenta: las pérdidas de la línea y la autoinducción. Completó y rectificó así la teoría inicial, formulando la que se conoció durante mucho tiempo como “ecuación de Heaviside” o “ecuación del telegrafista”, que suministra el valor instantáneo del voltaje en cualquier punto (z) de una línea en función de sus características eléctricas, y de forma análoga para la corriente. La propagación de señales incluso por cable quedaba así vinculada definitivamente a las ondas electromagnéticas.

Las ecuaciones del telegrafista para la propagación de ondas de tensión v y de corriente i en una línea de transmisión según una exponencial $e^{-\gamma z}$ tienen el siguiente aspecto:

$$\left. \begin{aligned} \partial_z v &= -\gamma i \\ \partial_z i &= -\gamma v \end{aligned} \right\} \quad (2.117)$$

Donde la *constante de propagación* γ reúne todos los parámetros físicos de la línea.

Para simplificar la notación, se denota como ∂_z a la derivada parcial respecto de z :

$$\partial_z = \partial/\partial z \quad (2.118)$$

Considérese ahora que se tiene una guía de onda vacía. Entonces, las características de propagación de cada modo se obtienen de forma independiente. Generalizando el concepto de línea de transmisión, se puede considerar que cada uno de los modos viaja a través de una línea de transmisión, y todos cumplen la ecuación del telegrafista:

$$\left. \begin{aligned} \partial_z v_k &= -\gamma_k i_k \\ \partial_z i_k &= -\gamma_k v_k \end{aligned} \right\} \quad (2.119)$$

O, en forma matricial,

$$\left. \begin{aligned} \partial_z \mathbf{v} &= -\Gamma \mathbf{i} \\ \partial_z \mathbf{i} &= -\Gamma \mathbf{v} \end{aligned} \right\} \quad (2.120)$$

Donde se ha definido la matriz de propagación:

$$\Gamma = \text{diag}(\gamma_k) \quad (2.121)$$

Agrupando ambas ecuaciones en una ecuación matricial, se tiene

$$\partial_z \begin{pmatrix} \mathbf{v} \\ \mathbf{i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\Gamma \\ -\Gamma & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{v} \\ \mathbf{i} \end{pmatrix} \quad (2.122)$$

O bien,

$$\partial_z \begin{pmatrix} \mathbf{v} \\ \mathbf{i} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} \mathbf{v} \\ \mathbf{i} \end{pmatrix} \quad (2.123)$$

Con

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -\Gamma \\ -\Gamma & 0 \end{pmatrix} \quad (2.124)$$

que se define como la matriz de acoplo de la línea de transmisión. Si la matriz M tiene este aspecto, se dice que los modos están desacoplados. En caso contrario, se dice que los modos están acoplados.

La Fig. 2.14 muestra una guía de onda rellena de cualquier material bianisótropo. Si se encuentran los modos característicos de ella, se tiene una situación análoga a la anterior, y la matriz de acoplo tiene el mismo aspecto que (2.124). Sin embargo, se pueden expresar los campos en la guía de la Fig. 2.14 como suma de los modos de la guía vacía, puesto que son una base completa para expresar cualquier campo electromagnético. Pero en este caso, los modos están acoplados. Es decir, la existencia de, por ejemplo, el TE_{10} , implica la existencia de otros modos TE o TM, puesto que los campos deben satisfacer una serie de condiciones impuestas por el material y por las Ecuaciones de Maxwell. En ese caso, hay que encontrar cuáles son los acoplos entre los modos de la guía

vacía, dados por la matriz M . Una vez encontrada ésta, se puede diagonalizar. El significado físico de esta diagonalización es el de un cambio de modos de forma que no estén acoplados. Es decir, encontrar los modos característicos de la guía, lo que proporciona la solución al problema.

Por tanto, sea cual sea el material que rellena la guía, sus campos eléctrico y magnético axial y transversal se expresan como suma de los modos característicos de la correspondiente guía vacía:

$$\mathbf{E}_t = \sum_n v_n \mathbf{e}_n \quad (2.125)$$

$$E_z = \sum_n v_{z,n} \mathbf{e}_{z,n} \quad (2.126)$$

$$\mathbf{H}_t = \sum_n i_n \mathbf{h}_n \quad (2.127)$$

$$H_z = \sum_n i_{z,n} h_{z,n} \quad (2.128)$$

En estas ecuaciones y las siguientes, se omite la dependencia espacial de las funciones implicadas para simplificar la notación. Las funciones \mathbf{e}_n y $\mathbf{e}_{z,n}$ son las funciones base eléctricas transversal y axial, \mathbf{h}_n y $h_{z,n}$ son las funciones base magnéticas transversal y axial, v_n y $v_{z,n}$ son las amplitudes eléctricas transversal y axial, y i_n y $i_{z,n}$ son las amplitudes magnéticas transversal y axial, respectivamente. Del mismo modo, los subíndices t y z se refieren a las componentes transversal y axial, respectivamente. Por sencillez en la notación, se han omitido las dependencias espaciales de todas las magnitudes implicadas.

Si se quiere relacionar los campos eléctrico y magnético, se ha de aplicar las Ecuaciones de Maxwell.

$$\left. \begin{aligned} \nabla \times \mathbf{E} &= -j\omega\mathbf{B} \\ \nabla \times \mathbf{H} &= j\omega\mathbf{D} \end{aligned} \right\} \quad (2.129)$$

Por otro lado, se sabe que de las tres componentes de los campos \mathbf{E} y \mathbf{H} , sólo dos de ellas son independientes. Por tanto, los campos eléctrico y magnético en la guía se separan en campos transversales y axiales:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{E} &= \mathbf{E}_t + E_z \hat{\mathbf{z}} \\ \mathbf{H} &= \mathbf{H}_t + H_z \hat{\mathbf{z}} \end{aligned} \right\} \quad (2.130)$$

Las ecuaciones del telegrafista (2.123) relacionan componentes transversales. Por tanto, se buscará eliminar de las ecuaciones las componentes H_z y E_z .

Realizando la operación $\times \hat{\mathbf{z}}$ en (2.129):

$$\left. \begin{aligned} (\nabla \times \mathbf{E}) \times \hat{\mathbf{z}} &= -j\omega \mathbf{B} \times \hat{\mathbf{z}} = -j\omega \mathbf{B}_t \times \hat{\mathbf{z}} \\ (\nabla \times \mathbf{H}) \times \hat{\mathbf{z}} &= j\omega \mathbf{D} \times \hat{\mathbf{z}} = j\omega \mathbf{D}_t \times \hat{\mathbf{z}} \end{aligned} \right\} \quad (2.131)$$

Desarrollando $(\nabla \times \mathbf{E}) \times \hat{\mathbf{z}}$:

$$\begin{aligned} & \left[(\partial_y E_z - \partial_z E_y) \hat{\mathbf{x}} + (\partial_z E_x - \partial_x E_z) \hat{\mathbf{y}} + (\partial_x E_y - \partial_y E_x) \hat{\mathbf{z}} \right] \times \hat{\mathbf{z}} = \\ & = -(\partial_y E_z - \partial_z E_y) \hat{\mathbf{y}} + (\partial_z E_x - \partial_x E_z) \hat{\mathbf{x}} = \\ & = (\partial_z E_x \hat{\mathbf{x}} + \partial_z E_y \hat{\mathbf{y}}) - (\partial_x E_z \hat{\mathbf{x}} + \partial_y E_z \hat{\mathbf{y}}) = \\ & = \partial_z \mathbf{E}_t - \nabla_t E_z \end{aligned} \quad (2.132)$$

El operador ∂_u indica derivada parcial respecto de u .

Análogamente:

$$(\nabla \times \mathbf{H}) \times \hat{\mathbf{z}} = \partial_z \mathbf{H}_t - \nabla_t H_z \quad (2.133)$$

De forma que (2.131) queda como

$$\left. \begin{aligned} \partial_z \mathbf{E}_t &= \nabla_t E_z - j\omega \mathbf{B}_t \times \hat{\mathbf{z}} \\ \partial_z \mathbf{H}_t &= \nabla_t H_z + j\omega \mathbf{D}_t \times \hat{\mathbf{z}} \end{aligned} \right\} \quad (2.134)$$

Al realizar el producto vectorial $\times \hat{\mathbf{z}}$ en (2.129), se ha perdido información de las Ecuaciones de Maxwell, puesto que hay componentes que han desaparecido. Realizando la operación $\cdot \hat{\mathbf{z}}$ en (2.129), se obtiene el resto de la información:

$$\left. \begin{aligned} (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot \hat{\mathbf{z}} &= -j\omega \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{z}} = -j\omega B_z \\ (\nabla \times \mathbf{H}) \cdot \hat{\mathbf{z}} &= j\omega \mathbf{D} \cdot \hat{\mathbf{z}} = j\omega D_z \end{aligned} \right\} \quad (2.135)$$

Desarrollando $(\nabla \times \mathbf{E}) \cdot \hat{\mathbf{z}}$:

$$\begin{aligned} & \left[(\partial_y E_z - \partial_z E_y) \hat{\mathbf{x}} + (\partial_z E_x - \partial_x E_z) \hat{\mathbf{y}} + (\partial_x E_y - \partial_y E_x) \hat{\mathbf{z}} \right] \cdot \hat{\mathbf{z}} = \\ & = \partial_x E_y - \partial_y E_x = \nabla_t (\mathbf{E}_t \times \hat{\mathbf{z}}) \end{aligned} \quad (2.136)$$

Análogamente,

$$(\nabla \times \mathbf{H}) \cdot \hat{\mathbf{z}} = \nabla_t (\mathbf{H}_t \times \hat{\mathbf{z}}) \quad (2.137)$$

Por tanto, (2.135) queda como

$$\left. \begin{aligned} \nabla_t (\mathbf{E}_t \times \hat{\mathbf{z}}) &= -j\omega B_z \\ \nabla_t (\mathbf{H}_t \times \hat{\mathbf{z}}) &= j\omega D_z \end{aligned} \right\} \quad (2.138)$$

Con (2.134) y (2.138), se tiene la misma información que las ecuaciones de Maxwell (2.129), pero con los campos desglosados en componentes. Por tanto, se pueden ahora sustituir los desarrollos en serie de las componentes de campo (2.125), (2.126), (2.127) y (2.128) en (2.134) y (2.138):

$$\left. \begin{aligned} \sum_n \partial_z v_n \mathbf{e}_n &= \sum_n v_{z,n} \nabla_t e_{z,n} - j\omega \mathbf{B}_t \times \hat{\mathbf{z}} \\ \sum_n \partial_z i_n \mathbf{h}_n &= \sum_n i_{z,n} \nabla_t h_{z,n} + j\omega \mathbf{D}_t \times \hat{\mathbf{z}} \end{aligned} \right\} \quad (2.139)$$

$$\left. \begin{aligned} \sum_n v_n \nabla_t (\mathbf{e}_n \times \hat{\mathbf{z}}) &= -j\omega \mathbf{B}_z \\ \sum_n i_n \nabla_t (\mathbf{h}_n \times \hat{\mathbf{z}}) &= j\omega \mathbf{D}_z \end{aligned} \right\} \quad (2.140)$$

Los gradientes de las funciones base axiales en (2.139) cumplen las relaciones típicas de los modos de una guía vacía:

$$\nabla_t e_{z,n} = -\frac{k_{c,n}^2}{\gamma_n} \mathbf{e}_n \quad (2.141)$$

$$\nabla_t h_{z,n} = -\frac{k_{c,n}^2}{\gamma_n} \mathbf{h}_n \quad (2.142)$$

Sustituyendo (2.141), (2.142), en (2.139):

$$\left. \begin{aligned} \sum_n \partial_z v_n \mathbf{e}_n &= -\sum_n v_{z,n} \frac{k_{c,n}^2}{\gamma_n} \mathbf{e}_n - j\omega \mathbf{B}_t \times \hat{\mathbf{z}} \\ \sum_n \partial_z i_n \mathbf{h}_n &= -\sum_n i_{z,n} \frac{k_{c,n}^2}{\gamma_n} \mathbf{h}_n + j\omega \mathbf{D}_t \times \hat{\mathbf{z}} \end{aligned} \right\} \quad (2.143)$$

En (2.123), se tienen las derivadas respecto de z de las componentes v_n e i_n . Por tanto, conviene eliminar los sumatorios de los miembros de la izquierda de (2.143). Esto se puede conseguir aprovechando la ortogonalidad de los modos transversales de una guía vacía en toda su sección transversal:

$$\int_{\Omega} \mathbf{e}_n \cdot \mathbf{e}_k \, dS = \delta_{nk} \quad (2.144)$$

$$\int_{\Omega} \mathbf{h}_n \cdot \mathbf{h}_k \, dS = Z_k^{-2} \delta_{nk} \quad (2.145)$$

Por otro lado, las componentes modales axiales también cumplen unas relaciones de ortogonalidad:

$$\int_{\Omega} e_{z,n} e_{z,k} \, dS = \left(\frac{k_{c,k}}{\gamma_k} \right)^2 \delta_{nk} \quad (2.146)$$

$$\int_{\Omega} h_{z,n} h_{z,k} \, dS = \left(\frac{k_{c,k}}{Z_k \gamma_k} \right)^2 \delta_{nk} \quad (2.147)$$

Aplicando estas relaciones en (2.143), se tiene:

$$\left. \begin{aligned} \partial_z v_k &= -v_{z,k} \frac{k_{c,k}^2}{\gamma_k} - j\omega \int_{\Omega} \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{B}_t \times \hat{\mathbf{z}} dS \\ Z_k^{-2} \partial_z i_k &= -i_{z,k} \frac{k_{c,k}^2}{\gamma_k} Z_k^{-2} + j\omega \int_S \mathbf{h}_k \cdot \mathbf{D}_t \times \hat{\mathbf{z}} dS \end{aligned} \right\} \quad (2.148)$$

Esta expresión proporciona de forma explícita las derivadas de las amplitudes transversales. El trabajo a realizar a continuación consistirá en convertir los miembros de la derecha en combinaciones lineales de las ondas transversales, para obtener (2.123).

Por otro lado, en (2.140), se cumple:

$$\begin{aligned} \nabla_t (\mathbf{e}_n \times \hat{\mathbf{z}}) &= -Z_n \nabla_t \mathbf{h}_n = -Z_n \nabla_t \left(-\frac{\gamma_n}{k_{c,n}^2} \nabla_t h_{z,n} \right) = Z_n \frac{\gamma_n}{k_{c,n}^2} \nabla_t \nabla_t h_{z,n} = \\ &= Z_n \frac{\gamma_n}{k_{c,n}^2} \nabla_t^2 h_{z,n} = -Z_n \frac{\gamma_n}{k_{c,n}^2} k_{c,n}^2 h_{z,n} = -Z_n \gamma_n h_{z,n} = \end{aligned} \quad (2.149)$$

$$\begin{aligned} \nabla_t (\mathbf{h}_n \times \hat{\mathbf{z}}) &= Z_n^{-1} \nabla_t \mathbf{e}_n = Z_n^{-1} \nabla_t \left(-\frac{\gamma_n}{k_{c,n}^2} \nabla_t e_{z,n} \right) = -Z_n^{-1} \frac{\gamma_n}{k_{c,n}^2} \nabla_t \nabla_t e_{z,n} = \\ &= -Z_n^{-1} \frac{\gamma_n}{k_{c,n}^2} \nabla_t^2 e_{z,n} = Z_n^{-1} \frac{\gamma_n}{k_{c,n}^2} k_{c,n}^2 e_{z,n} = Z_n^{-1} \gamma_n e_{z,n} \end{aligned} \quad (2.150)$$

Sustituyendo (2.149) y (2.150) en (2.140):

$$\left. \begin{aligned} \sum_n v_n Z_n \gamma_n h_{z,n} &= j\omega B_z \\ \sum_n i_n Z_n^{-1} \gamma_n e_{z,n} &= j\omega D_z \end{aligned} \right\} \quad (2.151)$$

O bien,

$$\left. \begin{aligned} B_z &= \frac{1}{j\omega} \sum_n v_n Z_n \gamma_n h_{z,n} \\ D_z &= \frac{1}{j\omega} \sum_n i_n Z_n^{-1} \gamma_n e_{z,n} \end{aligned} \right\} \quad (2.152)$$

Esta ecuación sirve para poner los valores de B_z y D_z en función de v_n e i_n .

En este punto, Se tiene una expresión explícita de las derivadas de las ondas transversales, pero no se sabe cuál es el valor de las densidades de flujo transversales \mathbf{B}_t y \mathbf{D}_t . Esta relación viene dada por las relaciones constitutivas de los campos en un medio bianisótropo, en su forma más general, son:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{B} &= \mu \mathbf{H} + \eta \mathbf{E} \\ \mathbf{D} &= \varepsilon \mathbf{E} + \xi \mathbf{H} \end{aligned} \right\} \quad (2.153)$$

donde μ , η , ε y ξ son matrices 3x3.

Siguiendo con el proceso, se distingue entre coordenadas transversales y axiales:

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_t \\ B_z \end{pmatrix} \quad (2.154)$$

$$\boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} \mu_{tt} & \mu_{tz} \\ \mu_{zt} & \mu_{zz} \end{pmatrix} \quad (2.155)$$

y análogamente para el resto de campos y parámetros.

Las relaciones constitutivas se pueden expresar, por tanto, de la forma

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{B}_t &= \mu_{tt} \mathbf{H}_t + \mu_{tz} H_z + \eta_{tt} \mathbf{E}_t + \eta_{tz} E_z \\ B_z &= \mu_{zt} \mathbf{H}_t + \mu_{zz} H_z + \eta_{zt} \mathbf{E}_t + \eta_{zz} E_z \\ \mathbf{D}_t &= \varepsilon_{tt} \mathbf{E}_t + \varepsilon_{tz} E_z + \xi_{tt} \mathbf{H}_t + \xi_{tz} H_z \\ D_z &= \varepsilon_{zt} \mathbf{E}_t + \varepsilon_{zz} E_z + \xi_{zt} \mathbf{H}_t + \xi_{zz} H_z \end{aligned} \right\} \quad (2.156)$$

Para obtener a partir de (2.148) una expresión formalmente idéntica a (2.123), hay que conseguir expresar las tensiones y corrientes axiales $v_{z,k}$ e $i_{z,k}$ a partir de las transversales, v_k e i_k . Esto se puede hacer de dos maneras:

- Siguiendo un procedimiento similar al realizado por Ogusu [53], que se llamará *Formulación directa*, basada en despejar de forma analítica $v_{z,k}$ e $i_{z,k}$ a partir de las relaciones constitutivas y de (2.152).
- Siguiendo un procedimiento similar al realizado por Schelkunoff [49], que se llamará *Formulación indirecta*, que consigue relacionar $v_{z,k}$ e $i_{z,k}$ con v_k e i_k aplicando el procedimiento de Galerkin a las ecuaciones que las relacionan, lo que da lugar a unos sistemas de ecuaciones, cuya solución obtiene $v_{z,k}$ e $i_{z,k}$ en función de v_k e i_k .

En este documento, se van a exponer ambas formulaciones en detalle, y se analizarán los resultados proporcionados por ambas.

2.4.2.1. Formulación directa

De las relaciones constitutivas (2.156), conviene realizar un repaso de qué magnitudes son conocidas y cuáles hay que expresar en función ellas:

- \mathbf{E}_t y \mathbf{H}_t se suponen conocidas, puesto que sus coeficientes son v_k e i_k , en función de los cuales conviene expresar (2.123).
- B_z y D_z también se pueden suponer conocidas, puesto que (2.152) las relaciona con v_k e i_k .

Modelado con técnicas modales de estructuras de microondas basadas en guías N-furcadas arbitrariamente rellenas con materiales

- E_z y H_z , son desconocidas, puesto que, en (2.148), aparecen sus componentes cuyo valor se desconoce aún.
- B_t y D_t , aparecen de forma explícita en (2.148), y, de momento, son componentes desconocidas.

Por tanto, teniendo en cuenta estas consideraciones, si se resuelve el sistema de ecuaciones dado por (2.156), se tiene:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{B}_t &= \mu_t \mathbf{H}_t + \lambda_b B_z + \eta_t \mathbf{E}_t + \chi_{tz} D_z \\ \mathbf{D}_t &= \varepsilon_t \mathbf{E}_t + \lambda_d D_z + \xi_t \mathbf{H}_t + \sigma_{tz} B_z \\ H_z &= \lambda_h \mathbf{H}_t + \nu_z B_z + \tau_{zt} \mathbf{E}_t + \psi_z D_z \\ E_z &= \lambda_e \mathbf{E}_t + \zeta_z D_z + \varphi_{zt} \mathbf{H}_t + \varpi_z B_z \end{aligned} \right\} \quad (2.157)$$

con los parámetros

$$\left. \begin{aligned} \mu_t &= \mu_{tt} + \alpha^{-1} \left[\mu_{tz} \left(\eta_{zz} \xi_{zt} - \varepsilon_{zz} \mu_{zt} \right) + \eta_{tz} \left(\xi_{zz} \mu_{zt} - \mu_{zz} \xi_{zt} \right) \right] \\ \eta_t &= \eta_{tt} + \alpha^{-1} \left[\mu_{tz} \left(\eta_{zz} \varepsilon_{zt} - \varepsilon_{zz} \eta_{zt} \right) + \eta_{tz} \left(\xi_{zz} \eta_{zt} - \mu_{zz} \varepsilon_{zt} \right) \right] \\ \varepsilon_t &= \varepsilon_{tt} + \alpha^{-1} \left[\varepsilon_{tz} \left(\xi_{zz} \eta_{zt} - \mu_{zz} \varepsilon_{zt} \right) + \xi_{tz} \left(\eta_{zz} \varepsilon_{zt} - \varepsilon_{zz} \eta_{zt} \right) \right] \\ \xi_t &= \xi_{tt} + \alpha^{-1} \left[\xi_{tz} \left(\eta_{zz} \xi_{zt} - \varepsilon_{zz} \mu_{zt} \right) + \varepsilon_{tz} \left(\xi_{zz} \mu_{zt} - \mu_{zz} \xi_{zt} \right) \right] \end{aligned} \right\} \quad (2.158)$$

y

$$\left. \begin{aligned} \lambda_b &= \alpha^{-1} \left(\mu_{tz} \varepsilon_{zz} - \eta_{tz} \xi_{zz} \right) \\ \lambda_d &= \alpha^{-1} \left(\varepsilon_{tz} \mu_{zz} - \xi_{tz} \eta_{zz} \right) \\ \lambda_h &= \alpha^{-1} \left(\xi_{zt} \eta_{zz} - \mu_{zt} \varepsilon_{zz} \right) \\ \lambda_e &= \alpha^{-1} \left(\eta_{zt} \xi_{zz} - \varepsilon_{zt} \mu_{zz} \right) \\ \chi_{tz} &= \alpha^{-1} \left(-\mu_{tz} \eta_{zz} + \eta_{tz} \mu_{zz} \right) \\ \sigma_{tz} &= \alpha^{-1} \left(-\varepsilon_{tz} \xi_{zz} + \xi_{tz} \varepsilon_{zz} \right) \\ \tau_{zt} &= \alpha^{-1} \left(\eta_{zz} \varepsilon_{zt} - \varepsilon_{zz} \eta_{zt} \right) \\ \varphi_{zt} &= \alpha^{-1} \left(\xi_{zz} \mu_{zt} - \mu_{zz} \xi_{zt} \right) \\ \nu_z &= \alpha^{-1} \varepsilon_{zz} \\ \psi_z &= -\alpha^{-1} \eta_{zz} \\ \zeta_z &= \alpha^{-1} \mu_{zz} \\ \varpi_z &= -\alpha^{-1} \xi_{zz} \end{aligned} \right\} \quad (2.159)$$

Donde se ha definido

$$\alpha = \varepsilon_{zz} \mu_{zz} - \eta_{zz} \xi_{zz} \quad (2.160)$$

La única condición para realizar esta transformación es que $\alpha \neq 0$, condición muy improbable en todos los casos.

Por tanto, se sustituyen \mathbf{B}_t y \mathbf{D}_t , en (2.148) por sus valores en (2.157):

$$\left. \begin{aligned} \partial_z v_k &= -v_{z,k} \frac{k_{c,k}^2}{\gamma_k} - j\omega \int_{\Omega} \mathbf{e}_k \cdot (\mu_t \mathbf{H}_t + \lambda_b B_z + \eta_t \mathbf{E}_t + \chi_{tz} D_z) \times \hat{\mathbf{z}} dS \\ Z_k^{-2} \partial_z i_k &= -i_{z,k} \frac{k_{c,k}^2}{\gamma_k} Z_k^{-2} + j\omega \int_S \mathbf{h}_k \cdot (\varepsilon_t \mathbf{E}_t + \lambda_d D_z + \xi_t \mathbf{H}_t + \sigma_{tz} B_z) \times \hat{\mathbf{z}} dS \end{aligned} \right\} \quad (2.161)$$

Para expresar las componentes conocidas en función de sus coeficientes, se sustituyen los campos \mathbf{E}_t y \mathbf{H}_t por sus expresiones en (2.125) y (2.127), y los campos B_z y D_z con (2.152):

$$\left. \begin{aligned} \partial_z v_k &= -v_{z,k} \frac{k_{c,k}^2}{\gamma_k} - \\ & j\omega \int_{\Omega} \mathbf{e}_k \cdot \left(\mu_t \sum_n i_n \mathbf{h}_n + \lambda_b \frac{1}{j\omega} \sum_n v_n Z_n \gamma_n h_{z,n} + \right. \\ & \left. + \eta_t \sum_n v_n \mathbf{e}_n + \chi_{tz} \frac{1}{j\omega} \sum_n i_n Z_n^{-1} \gamma_n e_{z,n} \right) \times \hat{\mathbf{z}} dS \\ Z_k^{-2} \partial_z i_k &= -i_{z,k} \frac{k_{c,k}^2}{\gamma_k} Z_k^{-2} + \\ & + j\omega \int_S \mathbf{h}_k \cdot \left(\varepsilon_t \sum_n v_n \mathbf{e}_n + \lambda_d \frac{1}{j\omega} \sum_n i_n Z_n^{-1} \gamma_n e_{z,n} + \right. \\ & \left. + \xi_t \sum_n i_n \mathbf{h}_n + \sigma_{tz} \frac{1}{j\omega} \sum_n v_n Z_n \gamma_n h_{z,n} \right) \times \hat{\mathbf{z}} dS \end{aligned} \right\} \quad (2.162)$$

Aún faltan por eliminar los coeficientes de las ondas axiales $v_{z,k}$ e $i_{z,k}$. Aplicando la ortogonalidad de las componentes modales axiales (2.146) y (2.147) a (2.126) y (2.128), se tiene que:

$$\left. \begin{aligned} v_{z,k} &= \left(\frac{\gamma_k}{k_{c,k}} \right)^2 \int_{\Omega} E_z e_{z,k} dS \\ i_{z,k} &= \left(\frac{Z_k \gamma_k}{k_{c,k}} \right)^2 \int_{\Omega} H_z h_{z,k} dS \end{aligned} \right\} \quad (2.163)$$

Se sustituyen luego E_z y H_z con (2.157), y se sustituyen luego \mathbf{E}_t , \mathbf{H}_t , B_z y D_z con (2.125), (2.127) y (2.152), respectivamente:

$$\begin{aligned}
 v_{z,k} &= \left(\frac{\gamma_k}{k_{c,k}} \right)^2 \int_{\Omega} E_z e_{z,k} dS = \left(\frac{\gamma_k}{k_{c,k}} \right)^2 \int_{\Omega} \left(\lambda_e \mathbf{E}_t + \varsigma_z D_z + \right. \\
 &= \left. \left(\frac{\gamma_k}{k_{c,k}} \right)^2 \int_{\Omega} \left(\lambda_e \sum_n v_n \mathbf{e}_n + \varsigma_z \frac{1}{j\omega} \sum_n i_n Z_n^{-1} \gamma_n e_{z,n} + \right. \right. \\
 &= \left. \left. + \varphi_{zt} \sum_n i_n \mathbf{h}_n + \varpi_z \frac{1}{j\omega} \sum_n v_n Z_n \gamma_n h_{z,n} \right) e_{z,k} dS \right. \\
 i_{z,k} &= \left(\frac{Z_k \gamma_k}{k_{c,k}} \right)^2 \int_{\Omega} H_z h_{z,k} dS = \left(\frac{Z_k \gamma_k}{k_{c,k}} \right)^2 \int_{\Omega} \left(\lambda_h \mathbf{H}_t + \nu_z B_z + \right. \\
 &= \left. \left(\frac{Z_k \gamma_k}{k_{c,k}} \right)^2 \int_{\Omega} \left(\lambda_h \sum_n i_n \mathbf{h}_n + \nu_z \frac{1}{j\omega} \sum_n v_n Z_n \gamma_n h_{z,n} + \right. \right. \\
 &= \left. \left. + \tau_{zt} \sum_n v_n \mathbf{e}_n + \psi_z \frac{1}{j\omega} \sum_n i_n Z_n^{-1} \gamma_n e_{z,n} \right) h_{z,k} dS \right.
 \end{aligned} \tag{2.164}$$

Sustituyendo (2.164) en (2.162):

$$\begin{aligned}
 \partial_z v_k &= \\
 &= -\frac{k_{c,k}^2}{\gamma_k} \left(\frac{\gamma_k}{k_{c,k}} \right)^2 \int_{\Omega} \left(\lambda_e \sum_n v_n \mathbf{e}_n + \varsigma_z \frac{1}{j\omega} \sum_n i_n Z_n^{-1} \gamma_n e_{z,n} + \right. \\
 &= \left. + \varphi_{zt} \sum_n i_n \mathbf{h}_n + \varpi_z \frac{1}{j\omega} \sum_n v_n Z_n \gamma_n h_{z,n} \right) e_{z,k} dS - \\
 &= -j\omega \int_{\Omega} \mathbf{e}_k \cdot \left(\mu_t \sum_n i_n \mathbf{h}_n + \lambda_b \frac{1}{j\omega} \sum_n v_n Z_n \gamma_n h_{z,n} + \right. \\
 &= \left. + \eta_t \sum_n v_n \mathbf{e}_n + \chi_{tz} \frac{1}{j\omega} \sum_n i_n Z_n^{-1} \gamma_n e_{z,n} \right) \times \hat{z} dS \\
 Z_k^{-2} \partial_z i_k &= \\
 &= -\frac{k_{c,k}^2}{\gamma_k} Z_k^{-2} \left(\frac{Z_k \gamma_k}{k_{c,k}} \right)^2 \int_{\Omega} \left(\lambda_h \sum_n i_n \mathbf{h}_n + \nu_z \frac{1}{j\omega} \sum_n v_n Z_n \gamma_n h_{z,n} \right. \\
 &= \left. + \tau_{zt} \sum_n v_n \mathbf{e}_n + \psi_z \frac{1}{j\omega} \sum_n i_n Z_n^{-1} \gamma_n e_{z,n} \right) h_{z,k} dS + \\
 &= +j\omega \int_S \mathbf{h}_k \cdot \left(\varepsilon_t \sum_n v_n \mathbf{e}_n + \lambda_d \frac{1}{j\omega} \sum_n i_n Z_n^{-1} \gamma_n e_{z,n} + \right. \\
 &= \left. + \xi_t \sum_n i_n \mathbf{h}_n + \sigma_{tz} \frac{1}{j\omega} \sum_n v_n Z_n \gamma_n h_{z,n} \right) \times \hat{z} dS
 \end{aligned} \tag{2.165}$$

o bien

$$\begin{aligned}
 \partial_z v_k &= \\
 &= -\gamma_k \int_{\Omega} \left(\lambda_e \sum_n v_n \mathbf{e}_n + \zeta_z \frac{1}{j\omega} \sum_n i_n Z_n^{-1} \gamma_n e_{z,n} + \right. \\
 &\quad \left. + \varphi_{zt} \sum_n i_n \mathbf{h}_n + \varpi_z \frac{1}{j\omega} \sum_n v_n Z_n \gamma_n h_{z,n} \right) \mathbf{e}_{z,k} dS - \\
 &\quad - \int_{\Omega} \mathbf{e}_k \cdot \left(j\omega \mu_t \sum_n i_n \mathbf{h}_n + \lambda_b \sum_n v_n Z_n \gamma_n h_{z,n} + \right. \\
 &\quad \left. + j\omega \eta_t \sum_n v_n \mathbf{e}_n + \chi_{tz} \sum_n i_n Z_n^{-1} \gamma_n e_{z,n} \right) \times \hat{\mathbf{z}} dS \\
 \partial_z i_k &= \\
 &= -\gamma_k Z_k^2 \int_{\Omega} \left(\lambda_h \sum_n i_n \mathbf{h}_n + \nu_z \frac{1}{j\omega} \sum_n v_n Z_n \gamma_n h_{z,n} + \right. \\
 &\quad \left. + \tau_{zt} \sum_n v_n \mathbf{e}_n + \psi_z \frac{1}{j\omega} \sum_n i_n Z_n^{-1} \gamma_n e_{z,n} \right) \mathbf{h}_{z,k} dS + \\
 &\quad + Z_k^2 \int_S \mathbf{h}_k \cdot \left(j\omega \varepsilon_t \sum_n v_n \mathbf{e}_n + \lambda_d \sum_n i_n Z_n^{-1} \gamma_n e_{z,n} + \right. \\
 &\quad \left. + j\omega \xi_t \sum_n i_n \mathbf{h}_n + \sigma_{tz} \sum_n v_n Z_n \gamma_n h_{z,n} \right) \times \hat{\mathbf{z}} dS
 \end{aligned} \tag{2.166}$$

Aplicando la propiedad distributiva respecto de la suma

$$\begin{aligned}
 \partial_z v_k &= \\
 &= -\gamma_k \left(\sum_n v_n \int_{\Omega} \lambda_e \mathbf{e}_n e_{z,k} dS + \frac{1}{j\omega} \sum_n i_n Z_n^{-1} \gamma_n \int_{\Omega} \zeta_z e_{z,n} e_{z,k} dS + \right. \\
 &\quad \left. + \sum_n i_n \int_{\Omega} \varphi_{zt} \mathbf{h}_n e_{z,k} dS + \frac{1}{j\omega} \sum_n v_n Z_n \gamma_n \int_{\Omega} \varpi_z h_{z,n} e_{z,k} dS \right) - \\
 &\quad - \left(j\omega \sum_n i_n \int_{\Omega} \mathbf{e}_k \cdot \mu_t \mathbf{h}_n \times \hat{\mathbf{z}} dS + \sum_n v_n Z_n \gamma_n \int_{\Omega} \mathbf{e}_k \cdot \lambda_b h_{z,n} \times \hat{\mathbf{z}} dS + \right. \\
 &\quad \left. + j\omega \sum_n v_n \int_{\Omega} \mathbf{e}_k \cdot \eta_t \mathbf{e}_n \times \hat{\mathbf{z}} dS + \sum_n i_n Z_n^{-1} \gamma_n \int_{\Omega} \mathbf{e}_k \cdot \chi_{tz} e_{z,n} \times \hat{\mathbf{z}} dS \right) \\
 \partial_z i_k &= \\
 &= -\gamma_k Z_k^2 \left(\sum_n i_n \int_{\Omega} \lambda_h \mathbf{h}_n h_{z,k} dS + \frac{1}{j\omega} \sum_n v_n Z_n \gamma_n \int_{\Omega} \nu_z h_{z,n} h_{z,k} dS + \right. \\
 &\quad \left. + \sum_n v_n \int_{\Omega} \tau_{zt} \mathbf{e}_n h_{z,k} dS + \frac{1}{j\omega} \sum_n i_n Z_n^{-1} \gamma_n \int_{\Omega} \psi_z e_{z,n} h_{z,k} dS \right) + \\
 &\quad + Z_k^2 \left(j\omega \sum_n v_n \int_{\Omega} \mathbf{h}_k \cdot \varepsilon_t \mathbf{e}_n \times \hat{\mathbf{z}} dS + \sum_n i_n Z_n^{-1} \gamma_n \int_{\Omega} \mathbf{h}_k \cdot \lambda_d e_{z,n} \times \hat{\mathbf{z}} dS + \right. \\
 &\quad \left. + j\omega \sum_n i_n \int_{\Omega} \mathbf{h}_k \cdot \xi_t \mathbf{h}_n \times \hat{\mathbf{z}} dS + \sum_n v_n Z_n \gamma_n \int_{\Omega} \mathbf{h}_k \cdot \sigma_{tz} h_{z,n} \times \hat{\mathbf{z}} dS \right)
 \end{aligned} \tag{2.167}$$

Esta expresión, (2.167), ya es formalmente igual a las ecuaciones del telegrafista, puesto que relacionan los coeficientes transversales con sus derivadas. Para simplificar las ecuaciones, se definen las matrices

$$M_{\lambda_e}^{kn} = -\gamma_k \int_{\Omega} \lambda_e \mathbf{e}_n e_{z,k} dS \quad (2.168)$$

$$M_{\zeta_z}^{kn} = -\frac{1}{j\omega} Z_n^{-1} \gamma_n \gamma_k \int_{\Omega} \zeta_z e_{z,n} e_{z,k} dS \quad (2.169)$$

$$M_{\varphi_{zt}}^{kn} = -\gamma_k \int_{\Omega} \varphi_{zt} \mathbf{h}_n e_{z,k} dS \quad (2.170)$$

$$M_{\varpi_z}^{kn} = -\frac{1}{j\omega} Z_n \gamma_n \gamma_k \int_{\Omega} \varpi_z h_{z,n} e_{z,k} dS \quad (2.171)$$

$$M_{\mu_t}^{kn} = -j\omega \int_{\Omega} \mathbf{e}_k \cdot \boldsymbol{\mu}_t \mathbf{h}_n \times \hat{\mathbf{z}} dS \quad (2.172)$$

$$M_{\lambda_b}^{kn} = -Z_n \gamma_n \int_{\Omega} \mathbf{e}_k \cdot \lambda_b h_{z,n} \times \hat{\mathbf{z}} dS \quad (2.173)$$

$$M_{\eta_t}^{kn} = -j\omega \int_{\Omega} \mathbf{e}_k \cdot \boldsymbol{\eta}_t \mathbf{e}_n \times \hat{\mathbf{z}} dS \quad (2.174)$$

$$M_{\chi_{tz}}^{kn} = -Z_n^{-1} \gamma_n \int_{\Omega} \mathbf{e}_k \cdot \chi_{tz} e_{z,n} \times \hat{\mathbf{z}} dS \quad (2.175)$$

$$M_{\lambda_h}^{kn} = -\gamma_k Z_k^2 \int_{\Omega} \lambda_h \mathbf{h}_n h_{z,k} dS \quad (2.176)$$

$$M_{\nu_z}^{kn} = -\frac{1}{j\omega} Z_n \gamma_n \gamma_k Z_k^2 \int_{\Omega} \nu_z h_{z,n} h_{z,k} dS \quad (2.177)$$

$$M_{\tau_{zt}}^{kn} = -\gamma_k Z_k^2 \int_{\Omega} \tau_{zt} \mathbf{e}_n h_{z,k} dS \quad (2.178)$$

$$M_{\psi_z}^{kn} = -\frac{1}{j\omega} Z_k^2 Z_n^{-1} \gamma_k \gamma_n \int_{\Omega} \psi_z e_{z,n} h_{z,k} dS \quad (2.179)$$

$$M_{\varepsilon_t}^{kn} = j\omega Z_k^2 \int_{\Omega} \mathbf{h}_k \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_t \mathbf{e}_n \times \hat{\mathbf{z}} dS \quad (2.180)$$

$$M_{\lambda_d}^{kn} = Z_k^2 Z_n^{-1} \gamma_n \int_{\Omega} \mathbf{h}_k \cdot \lambda_d e_{z,n} \times \hat{\mathbf{z}} dS \quad (2.181)$$

$$M_{\xi_t}^{kn} = j\omega Z_k^2 \int_{\Omega} \mathbf{h}_k \cdot \boldsymbol{\xi}_t \mathbf{h}_n \times \hat{\mathbf{z}} dS \quad (2.182)$$

$$M_{\sigma_{tz}}^{kn} = Z_k^2 Z_n \gamma_n \int_{\Omega} \mathbf{h}_k \cdot \boldsymbol{\sigma}_{tz} h_{z,n} \times \hat{\mathbf{z}} dS \quad (2.183)$$

En general, el subíndice de cada matriz indica el parámetro por el que se ponderan las integrales de superficie. Por tanto, (2.167) queda como

$$\left. \begin{aligned} \partial_z v_k &= \sum_n M_{\lambda_e}^{kn} v_n + \sum_n M_{\zeta_z}^{kn} i_n + \sum_n M_{\varphi_{zt}}^{kn} i_n + \sum_n M_{\varpi_z}^{kn} v_n + \\ &+ \sum_n M_{\mu_t}^{kn} i_n + \sum_n M_{\lambda_b}^{kn} v_n + \sum_n M_{\eta_t}^{kn} v_n + \sum_n M_{\chi_{tz}}^{kn} i_n \\ \partial_z i_k &= \sum_n M_{\lambda_h}^{kn} i_n + \sum_n M_{\nu_z}^{kn} v_n + \sum_n M_{\tau_{zt}}^{kn} v_n + \sum_n M_{\psi_z}^{kn} i_n + \\ &+ \sum_n M_{\varepsilon_t}^{kn} v_n + \sum_n M_{\lambda_d}^{kn} i_n + \sum_n M_{\xi_t}^{kn} i_n + \sum_n M_{\sigma_{tz}}^{kn} v_n \end{aligned} \right\} \quad (2.184)$$

Agrupando y reordenando términos semejantes:

$$\left. \begin{aligned} \partial_z v_k &= \sum_n \left(M_{\eta_t}^{kn} + M_{\lambda_e}^{kn} + M_{\lambda_b}^{kn} + M_{\sigma_z}^{kn} \right) v_n + \sum_n \left(M_{\mu_t}^{kn} + M_{\varphi_{zt}}^{kn} + M_{\chi_{tz}}^{kn} + M_{\xi_z}^{kn} \right) i_n \\ \partial_z i_k &= \sum_n \left(M_{\varepsilon_t}^{kn} + M_{\tau_{zt}}^{kn} + M_{\sigma_{tz}}^{kn} + M_{\nu_z}^{kn} \right) v_n + \sum_n \left(M_{\xi_t}^{kn} + M_{\lambda_h}^{kn} + M_{\lambda_d}^{kn} + M_{\psi_z}^{kn} \right) i_n \end{aligned} \right\} \quad (2.185)$$

Se definen las matrices

$$\left. \begin{aligned} M_{vv}^{kn} &= M_{\eta_t}^{kn} + M_{\lambda_e}^{kn} + M_{\lambda_b}^{kn} + M_{\sigma_z}^{kn} \\ M_{vi}^{kn} &= M_{\mu_t}^{kn} + M_{\varphi_{zt}}^{kn} + M_{\chi_{tz}}^{kn} + M_{\xi_z}^{kn} \\ M_{iv}^{kn} &= M_{\varepsilon_t}^{kn} + M_{\tau_{zt}}^{kn} + M_{\sigma_{tz}}^{kn} + M_{\nu_z}^{kn} \\ M_{ii}^{kn} &= M_{\xi_t}^{kn} + M_{\lambda_h}^{kn} + M_{\lambda_d}^{kn} + M_{\psi_z}^{kn} \end{aligned} \right\} \quad (2.186)$$

Por tanto,

$$\left. \begin{aligned} \partial_z v_k &= \sum_n M_{vv}^{kn} v_n + \sum_n M_{vi}^{kn} i_n \\ \partial_z i_k &= \sum_n M_{iv}^{kn} v_n + \sum_n M_{ii}^{kn} i_n \end{aligned} \right\} \quad (2.187)$$

En forma matricial

$$\left. \begin{aligned} \partial_z \mathbf{v} &= M_{vv} \mathbf{v} + M_{vi} \mathbf{i} \\ \partial_z \mathbf{i} &= M_{iv} \mathbf{v} + M_{ii} \mathbf{i} \end{aligned} \right\} \quad (2.188)$$

O bien,

$$\partial_z \begin{pmatrix} \mathbf{v} \\ \mathbf{i} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} \mathbf{v} \\ \mathbf{i} \end{pmatrix} \quad (2.189)$$

con

$$M = \begin{pmatrix} M_{vv} & M_{vi} \\ M_{iv} & M_{ii} \end{pmatrix} \quad (2.190)$$

De este modo, para implementar la estrategia directa, en primer lugar debe construirse M tal y como se ha descrito, en función de cada problema en concreto. Como se ha comentado anteriormente, la diagonalización de esta matriz implica encontrar una base en la cual los modos no estén acoplados, o sea, los modos propios. Por tanto, los valores propios de esta matriz son las constantes de propagación de los modos propios de la guía, y sus vectores propios, los coeficientes de las correspondientes combinaciones lineales de los modos base que dan lugar a los modos propios. Con este conocimiento, una vez caracterizada la guía, los modos se pueden proyectar a lo largo de z y definir discontinuidades entre guías rellenas de diferentes materiales por medio de la matriz S [54][54].

2.4.2.2. Formulación indirecta

En la formulación indirecta, hay que considerar en primer lugar que el campo magnético axial H_z tiene una determinada componente continua H_0 . Este término proviene de un hipotético modo TE_{00} , cuyas componentes son todas nulas menos H_z , que es constante. Es evidente que este modo no existe en una guía vacía. Sin embargo, cuando los campos de una guía inhomogénea se expresan en función de los modos de la guía vacía –como es el caso–, este modo sí que existe. Es decir, si no se tiene en cuenta este término, se está calculando mal la componente H_z [82].

Sin embargo, lo que realmente interesa es calcular las características de propagación de la guía, hallando todos los coeficientes de la matriz M en (2.123). En la estrategia directa expuesta en el apartado anterior, no se ha incluido H_0 en H_z , porque se demuestra que no tiene efecto sobre los coeficientes de la matriz M . Por tanto, aunque la componente H_z –que no suele utilizarse para nada– esté mal calculada, los coeficientes de M están *bien* calculados –posteriormente, se comprobará que la formulación directa es intrínsecamente errónea, por lo que, aunque esté *bien* implementada, a veces conduce a resultados erróneos.

En la formulación indirecta, en cambio, se va a demostrar que H_0 sí influye en el cálculo de los coeficientes de M , por lo que es necesario tenerlo en cuenta:

$$H_z = \sum_n i_{z,n} h_{z,n} + H_0 \quad (2.191)$$

Para implementar la formulación indirecta, se intenta no realizar la inversión analítica de ningún parámetro constitutivo. La razón es que se está considerando desarrollos en serie que implican funciones continuas y discontinuas, cuya convergencia está muy condicionada por la manera en que colocan en los miembros de una ecuación. En [85] se hace un estudio detallado de este aspecto.

Por tanto, ya que no se puede invertir de forma analítica las relaciones constitutivas para resolver las variables desconocidas H_0 , $v_{z,k}$ e $i_{z,k}$, son necesarias tres ecuaciones que las relacionen con las amplitudes transversales, a fin de llegar a las ecuaciones del telegrafista. Estas ecuaciones han de venir de las relaciones constitutivas (2.156).

Multiplicando el desarrollo en serie de E_z en (2.126) por $\epsilon_{zz} e_{z,k}$ e integrando:

Desarrollo teórico

$$\int_{\Omega} \varepsilon_{zz} e_{z,k} E_z dS = \sum_n v_{z,n} \int_{\Omega} \varepsilon_{zz} e_{z,k} e_{z,n} dS \quad (2.192)$$

pero resulta que, por (2.156):

$$\varepsilon_{zz} E_z = D_z - \varepsilon_{zt} \mathbf{E}_t - \xi_{zt} \mathbf{H}_t - \xi_{zz} H_z \quad (2.193)$$

realizando el desarrollo en serie de los campos a la derecha de la igualdad, usando (2.152), (2.125), (2.127) y (2.191):

$$\varepsilon_{zz} E_z = \frac{1}{j\omega} \sum_n i_n Z_n^{-1} \gamma_n e_{z,n} - \varepsilon_{zt} \sum_n v_n \mathbf{e}_n - \xi_{zt} \sum_n i_n \mathbf{h}_n - \xi_{zz} \left(\sum_n i_{z,n} h_{z,n} + H_0 \right) \quad (2.194)$$

de forma que

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left[\frac{1}{j\omega} \sum_n i_n Z_n^{-1} \gamma_n e_{z,n} - \varepsilon_{zt} \sum_n v_n \mathbf{e}_n - \right. \\ & \left. + \xi_{zt} \sum_n i_n \mathbf{h}_n - \xi_{zz} \left(\sum_n i_{z,n} h_{z,n} + H_0 \right) \right] e_{z,k} dS = \\ & = \sum_n v_{z,n} \int_{\Omega} \varepsilon_{zz} e_{z,k} e_{z,n} dS \end{aligned} \quad (2.195)$$

Aplicando la propiedad distributiva de la integral:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{j\omega} \sum_n i_n Z_n^{-1} \gamma_n \int_{\Omega} e_{z,n} e_{z,k} dS - \sum_n v_n \int_{\Omega} \varepsilon_{zt} \mathbf{e}_n e_{z,k} dS - \sum_n i_n \int_{\Omega} \xi_{zt} \mathbf{h}_n e_{z,k} dS - \\ & - \sum_n i_{z,n} \int_{\Omega} \xi_{zz} h_{z,n} e_{z,k} dS - H_0 \int_{\Omega} \xi_{zz} e_{z,k} dS = \sum_n v_{z,n} \int_{\Omega} \varepsilon_{zz} e_{z,k} e_{z,n} dS \end{aligned} \quad (2.196)$$

Por ortogonalidad en los campos eléctricos axiales (2.146):

$$\begin{aligned} & \frac{1}{j\omega} i_k Z_k^{-1} \gamma_k \left(\frac{k_{c,k}}{\gamma_k} \right)^2 - \sum_n v_n \int_{\Omega} \varepsilon_{zt} \mathbf{e}_n e_{z,k} dS - \sum_n i_n \int_{\Omega} \xi_{zt} \mathbf{h}_n e_{z,k} dS - \\ & - \sum_n i_{z,n} \int_{\Omega} \xi_{zz} h_{z,n} e_{z,k} dS - H_0 \int_{\Omega} \xi_{zz} e_{z,k} dS = \sum_n v_{z,n} \int_{\Omega} \varepsilon_{zz} e_{z,k} e_{z,n} dS \end{aligned} \quad (2.197)$$

Realizando el mismo procedimiento, se multiplica H_z en (2.191) por $\mu_{zz} h_{z,k}$ y se integra:

$$\int_{\Omega} \mu_{zz} h_{z,k} H_z dS = \sum_n i_{z,n} \int_{\Omega} \mu_{zz} h_{z,k} h_{z,n} dS + H_0 \int_{\Omega} \mu_{zz} h_{z,k} dS \quad (2.198)$$

pero, por (2.156):

$$\mu_{zz} H_z = B_z - \mu_{zt} \mathbf{H}_t - \eta_{zt} \mathbf{E}_t - \eta_{zz} E_z \quad (2.199)$$

Desarrollando los campos a la derecha de la igualdad, según (2.152), (2.127), (2.125) y (2.126):

$$\mu_{zz} H_z = \frac{1}{j\omega} \sum_n v_n Z_n \gamma_n h_{z,n} - \mu_{zt} \sum_n i_n \mathbf{h}_n - \eta_{zt} \sum_n v_n \mathbf{e}_n - \eta_{zz} \sum_n v_{z,n} e_{z,n} \quad (2.200)$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left(\frac{1}{j\omega} \sum_n v_n Z_n \gamma_n h_{z,n} - \mu_{zt} \sum_n i_n \mathbf{h}_n - \eta_{zt} \sum_n v_n \mathbf{e}_n - \eta_{zz} \sum_n v_{z,n} \mathbf{e}_{z,n} \right) h_{z,k} dS = \\ = \sum_n i_{z,n} \int_{\Omega} \mu_{zz} h_{z,k} h_{z,n} dS + H_0 \int_{\Omega} \mu_{zz} h_{z,k} dS \end{aligned} \quad (2.201)$$

Aplicando la propiedad distributiva de la integral:

$$\begin{aligned} \frac{1}{j\omega} \sum_n v_n Z_n \gamma_n \int_{\Omega} h_{z,n} h_{z,k} dS - \sum_n i_n \int_{\Omega} \mu_{zt} \mathbf{h}_n h_{z,k} dS - \\ - \sum_n v_n \int_{\Omega} \eta_{zt} \mathbf{e}_n h_{z,k} dS - \sum_n \int_{\Omega} v_{z,n} \eta_{zz} \mathbf{e}_{z,n} h_{z,k} dS = \\ = \sum_n i_{z,n} \int_{\Omega} \mu_{zz} h_{z,k} h_{z,n} dS + H_0 \int_{\Omega} \mu_{zz} h_{z,k} dS \end{aligned} \quad (2.202)$$

Por ortogonalidad en los campos magnéticos axiales, según (2.147):

$$\begin{aligned} \frac{1}{j\omega} v_k Z_k \gamma_k \left(\frac{k_{c,k}}{Z_k \gamma_k} \right)^2 - \sum_n i_n \int_{\Omega} \mu_{zt} \mathbf{h}_n h_{z,k} dS - \\ - \sum_n v_n \int_{\Omega} \eta_{zt} \mathbf{e}_n h_{z,k} dS - \sum_n \int_{\Omega} v_{z,n} \eta_{zz} \mathbf{e}_{z,n} h_{z,k} dS = \\ = \sum_n i_{z,n} \int_{\Omega} \mu_{zz} h_{z,k} h_{z,n} dS + H_0 \int_{\Omega} \mu_{zz} h_{z,k} dS \end{aligned} \quad (2.203)$$

Se han encontrado dos de las tres relaciones necesarias para poder expresar H_0 , $v_{z,k}$ e $i_{z,k}$ en función de $v_{z,k}$ e $i_{z,k}$. Para obtener la tercera, se parte de (2.152):

$$j\omega B_z = \sum_n v_n Z_n \gamma_n h_{z,n} \quad (2.204)$$

Se realiza la integral en toda la superficie de la guía:

$$j\omega \int_{\Omega} B_z dS = \sum_n v_n Z_n \gamma_n \int_{\Omega} h_{z,n} dS = 0 \quad (2.205)$$

debido a que

$$\int_{\Omega} h_{z,n} dS = 0 \quad (2.206)$$

Sustituyendo B_z por su valor según las relaciones constitutivas (2.156):

$$j\omega \int_{\Omega} B_z dS = j\omega \int_{\Omega} \left[\begin{aligned} &\mu_{zt} \sum_n i_n \mathbf{h}_n + \mu_{zz} \left(\sum_n i_{z,n} h_{z,n} + H_0 \right) + \\ &+ \eta_{zt} \sum_n v_n \mathbf{e}_n + \eta_{zz} \sum_n v_{z,n} \mathbf{e}_{z,n} \end{aligned} \right] dS = 0 \quad (2.207)$$

De forma que

$$j\omega \int_{\Omega} B_z dS = j\omega \int_{\Omega} \left[\begin{aligned} &\mu_{zt} \sum_n i_n \mathbf{h}_n + \mu_{zz} \left(\sum_n i_{z,n} h_{z,n} + H_0 \right) + \\ &+ \eta_{zt} \sum_n v_n \mathbf{e}_n + \eta_{zz} \sum_n v_{z,n} e_{z,n} \end{aligned} \right] dS = 0 \quad (2.208)$$

Aplicando la propiedad distributiva de la integral, se obtiene otra ecuación que relaciona las componentes conocidas con las desconocidas:

$$\begin{aligned} &\sum_n i_n \int_{\Omega} \mu_{zt} \mathbf{h}_n dS + \sum_n i_{z,n} \int_{\Omega} \mu_{zz} h_{z,n} dS + H_0 \int_{\Omega} \mu_{zz} dS + \\ &+ \sum_n v_n \int_{\Omega} \eta_{zt} \mathbf{e}_n dS + \sum_n v_{z,n} \int_{\Omega} \eta_{zz} e_{z,n} dS = 0 \end{aligned} \quad (2.209)$$

Por tanto, ya se tienen las tres ecuaciones necesarias:

$$\left. \begin{aligned} &\frac{1}{j\omega} i_k Z_k^{-1} \gamma_k \left(\frac{k_{c,k}}{\gamma_k} \right)^2 - \sum_n v_n \int_{\Omega} \varepsilon_{zt} \mathbf{e}_n e_{z,k} dS - \sum_n i_n \int_{\Omega} \xi_{zt} \mathbf{h}_n e_{z,k} dS - \\ &- \sum_n i_{z,n} \int_{\Omega} \xi_{zz} h_{z,n} e_{z,k} dS - H_0 \int_{\Omega} \xi_{zz} e_{z,k} dS = \sum_n v_{z,n} \int_{\Omega} \varepsilon_{zz} e_{z,k} e_{z,n} dS \\ &\quad \frac{1}{j\omega} v_k Z_k \gamma_k \left(\frac{k_{c,k}}{Z_k \gamma_k} \right)^2 - \sum_n i_n \int_{\Omega} \mu_{zt} \mathbf{h}_n h_{z,k} dS - \\ &\quad - \sum_n v_n \int_{\Omega} \eta_{zt} \mathbf{e}_n h_{z,k} dS - \sum_n v_{z,n} \int_{\Omega} \eta_{zz} e_{z,n} h_{z,k} dS = \\ &\quad = \sum_n i_{z,n} \int_{\Omega} \mu_{zz} h_{z,k} h_{z,n} dS + H_0 \int_{\Omega} \mu_{zz} h_{z,k} dS \\ &\quad \sum_n i_n \int_{\Omega} \mu_{zt} \mathbf{h}_n dS + \sum_n i_{z,n} \int_{\Omega} \mu_{zz} h_{z,n} dS + H_0 \int_{\Omega} \mu_{zz} dS + \\ &\quad + \sum_n v_n \int_{\Omega} \eta_{zt} \mathbf{e}_n dS + \sum_n v_{z,n} \int_{\Omega} \eta_{zz} e_{z,n} dS = 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.210)$$

Para clarificar la notación, se definen las matrices

$$M_{\varepsilon_{zt}}^{kn} = \int_{\Omega} \varepsilon_{zt} \mathbf{e}_n e_{z,k} dS \quad (2.211)$$

$$M_{\xi_{zt}}^{kn} = \int_{\Omega} \xi_{zt} \mathbf{h}_n e_{z,k} dS \quad (2.212)$$

$$M_{\xi_{zz}}^{kn} = \int_{\Omega} \xi_{zz} h_{z,n} e_{z,k} dS \quad (2.213)$$

$$V_{\xi_{zz}}^k = \int_{\Omega} \xi_{zz} e_{z,k} dS \quad (2.214)$$

$$M_{\varepsilon_{zz}}^{kn} = \int_{\Omega} \varepsilon_{zz} e_{z,k} e_{z,n} dS \quad (2.215)$$

$$M_{\mu_{zt}}^{kn} = \int_{\Omega} \mu_{zt} \mathbf{h}_n h_{z,k} dS \quad (2.216)$$

$$M_{\eta_{zt}}^{kn} = \int_{\Omega} \eta_{zt} \mathbf{e}_n h_{z,k} dS \quad (2.217)$$

$$M_{\eta_{zz}}^{kn} = \int_{\Omega} \eta_{zz} e_{z,n} h_{z,k} dS \quad (2.218)$$

$$M_{\mu_{zz}}^{kn} = \int_{\Omega} \mu_{zz} h_{z,k} h_{z,n} dS \quad (2.219)$$

$$V_{\mu_{zz}}^k = \int_{\Omega} \mu_{zz} h_{z,k} dS \quad (2.220)$$

$$V_{\mu_{zt}}^n = \int_{\Omega} \mu_{zt} h_n dS \quad (2.221)$$

$$\theta = \int_{\Omega} \mu_{zz} dS \quad (2.222)$$

$$V_{\eta_{zt}}^n = \int_{\Omega} \eta_{zt} e_n dS \quad (2.223)$$

$$V_{\eta_{zz}}^n = \int_{\Omega} \eta_{zz} e_{z,n} dS \quad (2.224)$$

Por tanto, (2.210) se puede escribir como

$$\left. \begin{aligned} & \frac{1}{j\omega} i_k Z_k^{-1} \gamma_k \left(\frac{k_{c,k}}{\gamma_k} \right)^2 - \sum_n v_n M_{\varepsilon_{zt}}^{kn} - \sum_n i_n M_{\xi_{zt}}^{kn} - \\ & - \sum_n i_{z,n} M_{\xi_{zz}}^{kn} - H_0 V_{\xi_{zz}}^k = \sum_n v_{z,n} M_{\varepsilon_{zz}}^{kn} \\ & \frac{1}{j\omega} v_k Z_k \gamma_k \left(\frac{k_{c,k}}{Z_k \gamma_k} \right)^2 - \sum_n i_n M_{\mu_{zt}}^{kn} - \sum_n v_n M_{\eta_{zt}}^{kn} - \\ & - \sum_n v_{z,n} M_{\eta_{zz}}^{kn} = \sum_n i_{z,n} M_{\mu_{zz}}^{kn} + H_0 V_{\mu_{zz}}^k \\ & \sum_n i_n V_{\mu_{zt}}^n + \sum_n i_{z,n} V_{\mu_{zz}}^{kn} + H_0 \theta + \sum_n v_n V_{\eta_{zt}}^n + \sum_n v_{z,n} V_{\eta_{zz}}^n = 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.225)$$

Se definen también las matrices diagonales:

$$Z = \text{diag}\{Z_k\} \quad (2.226)$$

$$\Gamma = \text{diag}\{\gamma_k\} \quad (2.227)$$

$$K_c = \text{diag}\{k_{c,k}\} \quad (2.228)$$

Matricialmente, (2.225) queda como

$$\left. \begin{aligned} & \frac{1}{j\omega} Z^{-1} \Gamma^{-1} K_c^2 \mathbf{i} - M_{\varepsilon_{zt}} \mathbf{v} - M_{\xi_{zt}} \mathbf{i} - M_{\xi_{zz}} \mathbf{i}_z - H_0 \mathbf{V}_{\xi_{zz}} = M_{\varepsilon_{zz}} \mathbf{v}_z \\ & \frac{1}{j\omega} Z^{-1} \Gamma^{-1} K_c^2 \mathbf{v} - M_{\mu_{zt}} \mathbf{i} - M_{\eta_{zt}} \mathbf{v} - M_{\eta_{zz}} \mathbf{v}_z = M_{\mu_{zz}} \mathbf{i}_z + H_0 \mathbf{V}_{\mu_{zz}} \\ & \mathbf{V}_{\mu_{zt}}^t \mathbf{i} + \mathbf{V}_{\mu_{zz}}^t \mathbf{i}_z + H_0 \theta + \mathbf{V}_{\eta_{zt}}^t \mathbf{v} + \mathbf{V}_{\eta_{zz}}^t \mathbf{v}_z = 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.229)$$

De la tercera ecuación, se despeja H_0 y se sustituye en las otras dos:

$$H_0 = -\frac{1}{\theta} \left(\mathbf{V}_{\mu_{zt}}^t \mathbf{i} + \mathbf{V}_{\mu_{zz}}^t \mathbf{i}_z + \mathbf{V}_{\eta_{zt}}^t \mathbf{v} + \mathbf{V}_{\eta_{zz}}^t \mathbf{v}_z \right) \quad (2.230)$$

Por tanto,

Desarrollo teórico

$$\left. \begin{aligned}
 & \frac{1}{j\omega} Z^{-1}\Gamma^{-1}K_c^2 \mathbf{i} - M_{\varepsilon_{zt}} \mathbf{v} - M_{\xi_{zt}} \mathbf{i} - M_{\xi_{zz}} \mathbf{i}_z = \\
 & = M_{\varepsilon_{zz}} \mathbf{v}_z - \frac{1}{\theta} \left(\mathbf{V}_{\mu_{zt}}^t \mathbf{i} + \mathbf{V}_{\mu_{zz}}^t \mathbf{i}_z + \mathbf{V}_{\eta_{zt}}^t \mathbf{v} + \mathbf{V}_{\eta_{zz}}^t \mathbf{v}_z \right) \mathbf{V}_{\xi_{zz}} \\
 & \frac{1}{j\omega} Z^{-1}\Gamma^{-1}K_c^2 \mathbf{v} - M_{\mu_{zt}} \mathbf{i} - M_{\eta_{zt}} \mathbf{v} - M_{\eta_{zz}} \mathbf{v}_z = \\
 & = M_{\mu_{zz}} \mathbf{i}_z - \frac{1}{\theta} \left(\mathbf{V}_{\mu_{zt}}^t \mathbf{i} + \mathbf{V}_{\mu_{zz}}^t \mathbf{i}_z + \mathbf{V}_{\eta_{zt}}^t \mathbf{v} + \mathbf{V}_{\eta_{zz}}^t \mathbf{v}_z \right) \mathbf{V}_{\mu_{zz}}
 \end{aligned} \right\} \quad (2.231)$$

Agрупando términos semejantes:

$$\left. \begin{aligned}
 & \left(\frac{1}{j\omega} Z^{-1}\Gamma^{-1}K_c^2 - M_{\xi_{zt}} + \frac{1}{\theta} \mathbf{V}_{\xi_{zz}} \mathbf{V}_{\mu_{zt}}^t \right) \mathbf{i} + \left(-M_{\varepsilon_{zt}} + \frac{1}{\theta} \mathbf{V}_{\xi_{zz}} \mathbf{V}_{\eta_{zt}}^t \right) \mathbf{v} = \\
 & = \left(M_{\xi_{zz}} - \frac{1}{\theta} \mathbf{V}_{\xi_{zz}} \mathbf{V}_{\mu_{zz}}^t \right) \mathbf{i}_z + \left(M_{\varepsilon_{zz}} - \frac{1}{\theta} \mathbf{V}_{\xi_{zz}} \mathbf{V}_{\eta_{zz}}^t \right) \mathbf{v}_z \\
 & \left(\frac{1}{j\omega} Z^{-1}\Gamma^{-1}K_c^2 - M_{\eta_{zt}} + \frac{1}{\theta} \mathbf{V}_{\mu_{zz}} \mathbf{V}_{\eta_{zt}}^t \right) \mathbf{v} + \left(-M_{\mu_{zt}} + \frac{1}{\theta} \mathbf{V}_{\mu_{zz}} \mathbf{V}_{\mu_{zt}}^t \right) \mathbf{i} = \\
 & = \left(M_{\mu_{zz}} - \frac{1}{\theta} \mathbf{V}_{\mu_{zz}} \mathbf{V}_{\mu_{zz}}^t \right) \mathbf{i}_z + \left(M_{\eta_{zz}} - \frac{1}{\theta} \mathbf{V}_{\mu_{zz}} \mathbf{V}_{\eta_{zz}}^t \right) \mathbf{v}_z
 \end{aligned} \right\} \quad (2.232)$$

Éste es el sistema de ecuaciones que va a permitir calcular las tensiones y corrientes axiales $v_{z,k}$ e $i_{z,k}$, en función de las transversales v_k e i_k . Para clarificar la notación, se definen las matrices

$$P_{\xi_{zt}} = \frac{1}{j\omega} Z^{-1}\Gamma^{-1}K_c^2 - M_{\xi_{zt}} + \frac{1}{\theta} \mathbf{V}_{\xi_{zz}} \mathbf{V}_{\mu_{zt}}^t \quad (2.233)$$

$$P_{\varepsilon_{zt}} = -M_{\varepsilon_{zt}} + \frac{1}{\theta} \mathbf{V}_{\xi_{zz}} \mathbf{V}_{\eta_{zt}}^t \quad (2.234)$$

$$P_{\xi_{zz}} = M_{\xi_{zz}} - \frac{1}{\theta} \mathbf{V}_{\xi_{zz}} \mathbf{V}_{\mu_{zz}}^t \quad (2.235)$$

$$P_{\varepsilon_{zz}} = M_{\varepsilon_{zz}} - \frac{1}{\theta} \mathbf{V}_{\xi_{zz}} \mathbf{V}_{\eta_{zz}}^t \quad (2.236)$$

$$P_{\eta_{zt}} = \frac{1}{j\omega} Z^{-1}\Gamma^{-1}K_c^2 - M_{\eta_{zt}} + \frac{1}{\theta} \mathbf{V}_{\mu_{zz}} \mathbf{V}_{\eta_{zt}}^t \quad (2.237)$$

$$P_{\mu_{zt}} = -M_{\mu_{zt}} + \frac{1}{\theta} \mathbf{V}_{\mu_{zz}} \mathbf{V}_{\mu_{zt}}^t \quad (2.238)$$

$$P_{\mu_{zz}} = M_{\mu_{zz}} - \frac{1}{\theta} \mathbf{V}_{\mu_{zz}} \mathbf{V}_{\mu_{zz}}^t \quad (2.239)$$

$$P_{\eta_{zz}} = M_{\eta_{zz}} - \frac{1}{\theta} \mathbf{V}_{\mu_{zz}} \mathbf{V}_{\eta_{zz}}^t \quad (2.240)$$

Por tanto estas matrices P relacionan las componentes axiales y transversales de la forma:

$$\begin{cases} P_{\varepsilon_{zz}} \mathbf{v}_z + P_{\xi_{zz}} \mathbf{i}_z = P_{\varepsilon_{zt}} \mathbf{v} + P_{\xi_{zt}} \mathbf{i} \\ P_{\eta_{zz}} \mathbf{v}_z + P_{\mu_{zz}} \mathbf{i}_z = P_{\eta_{zt}} \mathbf{v} + P_{\mu_{zt}} \mathbf{i} \end{cases} \quad (2.241)$$

En forma matricial,

$$\begin{pmatrix} P_{\varepsilon_{zz}} & P_{\xi_{zz}} \\ P_{\eta_{zz}} & P_{\mu_{zz}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{v}_z \\ \mathbf{i}_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{\varepsilon_{zt}} & P_{\xi_{zt}} \\ P_{\eta_{zt}} & P_{\mu_{zt}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{v} \\ \mathbf{i} \end{pmatrix} \quad (2.242)$$

Por tanto, resolviendo el sistema:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{v}_z \\ \mathbf{i}_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{\varepsilon_{zz}} & P_{\xi_{zz}} \\ P_{\eta_{zz}} & P_{\mu_{zz}} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} P_{\varepsilon_{zt}} & P_{\xi_{zt}} \\ P_{\eta_{zt}} & P_{\mu_{zt}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{v} \\ \mathbf{i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_{\varepsilon_{zt}} & Q_{\xi_{zt}} \\ Q_{\eta_{zt}} & Q_{\mu_{zt}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{v} \\ \mathbf{i} \end{pmatrix} \quad (2.243)$$

En forma de sistema de ecuaciones,

$$\begin{cases} \mathbf{v}_z = Q_{\varepsilon_{zt}} \mathbf{v} + Q_{\xi_{zt}} \mathbf{i} \\ \mathbf{i}_z = Q_{\eta_{zt}} \mathbf{v} + Q_{\mu_{zt}} \mathbf{i} \end{cases} \quad (2.244)$$

Estas matrices Q proporcionan los valores de las corrientes axiales en función de las transversales.

Ya se puede calcular H_0 de (2.230) en función de las corrientes y tensiones transversales, gracias a (2.244):

$$\begin{aligned} H_0 &= -\frac{1}{\theta} (\mathbf{V}_{\mu_{zt}}^t \mathbf{i} + \mathbf{V}_{\mu_{zz}}^t \mathbf{i}_z + \mathbf{V}_{\eta_{zt}}^t \mathbf{v} + \mathbf{V}_{\eta_{zz}}^t \mathbf{v}_z) = \\ &= -\frac{1}{\theta} [\mathbf{V}_{\mu_{zt}}^t \mathbf{i} + \mathbf{V}_{\mu_{zz}}^t (Q_{\eta_{zt}} \mathbf{v} + Q_{\mu_{zt}} \mathbf{i}) + \mathbf{V}_{\eta_{zt}}^t \mathbf{v} + \mathbf{V}_{\eta_{zz}}^t (Q_{\varepsilon_{zt}} \mathbf{v} + Q_{\xi_{zt}} \mathbf{i})] = \\ &= -\frac{1}{\theta} [(\mathbf{V}_{\eta_{zt}}^t + \mathbf{V}_{\mu_{zz}}^t Q_{\eta_{zt}} + \mathbf{V}_{\eta_{zz}}^t Q_{\varepsilon_{zt}}) \mathbf{v} + (\mathbf{V}_{\mu_{zt}}^t + \mathbf{V}_{\mu_{zz}}^t Q_{\mu_{zt}} + \mathbf{V}_{\eta_{zz}}^t Q_{\xi_{zt}}) \mathbf{i}] \end{aligned} \quad (2.245)$$

Se definen las siguientes matrices para simplificar la notación:

$$R_{\eta_{zt}} = -\frac{1}{\theta} (\mathbf{V}_{\eta_{zt}}^t + \mathbf{V}_{\mu_{zz}}^t Q_{\eta_{zt}} + \mathbf{V}_{\eta_{zz}}^t Q_{\varepsilon_{zt}}) \quad (2.246)$$

$$R_{\mu_{zt}} = -\frac{1}{\theta} (\mathbf{V}_{\mu_{zt}}^t + \mathbf{V}_{\mu_{zz}}^t Q_{\mu_{zt}} + \mathbf{V}_{\eta_{zz}}^t Q_{\xi_{zt}}) \quad (2.247)$$

De forma que

$$H_0 = R_{\eta_{zt}} \mathbf{v} + R_{\mu_{zt}} \mathbf{i} \quad (2.248)$$

Estas matrices R proporcionan el valor de la componente continua de H_z en función de los valores conocidos \mathbf{v} e \mathbf{i} . Se va a comprobar a continuación cómo este valor H_0 influye en las características de propagación de la guía, tal y como se ha dicho antes.

Por tanto, a partir de (2.148), se puede obtener ya las ecuaciones del telegrafista, dado que se está en condiciones de poner todas las magnitudes en función de los valores conocidos \mathbf{v} e \mathbf{i} .

Por un lado, la integral que contiene a la inducción magnética transversal \mathbf{B}_t , se puede sustituir ésta por su valor en (2.156):

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega} \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{B}_t \times \hat{\mathbf{z}} dS &= \int_{\Omega} \mathbf{e}_k \cdot (\mu_{tt} \mathbf{H}_t + \mu_{tz} H_z + \eta_{tt} \mathbf{E}_t + \eta_{tz} E_z) \times \hat{\mathbf{z}} dS = \\
 &= \int_{\Omega} \mathbf{e}_k \cdot \left[\mu_{tt} \sum_n i_n \mathbf{h}_n + \mu_{tz} \left(\sum_n i_{z,n} h_{z,n} + H_0 \right) + \eta_{tt} \sum_n v_n \mathbf{e}_n + \eta_{tz} \sum_n v_{z,n} e_{z,n} \right] \times \hat{\mathbf{z}} dS = \\
 &= \sum_n i_n \int_{\Omega} \mathbf{e}_k \cdot \mu_{tt} \mathbf{h}_n \times \hat{\mathbf{z}} dS + \sum_n i_{z,n} \int_{\Omega} \mathbf{e}_k \cdot \mu_{tz} h_{z,n} \times \hat{\mathbf{z}} dS + H_0 \int_{\Omega} \mathbf{e}_k \cdot \mu_{tz} \times \hat{\mathbf{z}} dS + \\
 &+ \sum_n v_n \int_{\Omega} \mathbf{e}_k \cdot \eta_{tt} \mathbf{e}_n \times \hat{\mathbf{z}} dS + \sum_n v_{z,n} \int_{\Omega} \mathbf{e}_k \cdot \eta_{tz} e_{z,n} \times \hat{\mathbf{z}} dS
 \end{aligned} \tag{2.249}$$

Por tanto, la derivada de las tensiones transversales en (2.148) queda como

$$\begin{aligned}
 \partial_z v_k &= -v_{z,k} \frac{k_{c,k}^2}{\gamma_k} - \\
 &- j\omega \left[\sum_n i_n \int_{\Omega} \mathbf{e}_k \cdot \mu_{tt} \mathbf{h}_n \times \hat{\mathbf{z}} dS + \sum_n i_{z,n} \int_{\Omega} \mathbf{e}_k \cdot \mu_{tz} h_{z,n} \times \hat{\mathbf{z}} dS + H_0 \int_{\Omega} \mathbf{e}_k \cdot \mu_{tz} \times \hat{\mathbf{z}} dS + \right. \\
 &\left. + \sum_n v_n \int_{\Omega} \mathbf{e}_k \cdot \eta_{tt} \mathbf{e}_n \times \hat{\mathbf{z}} dS + \sum_n v_{z,n} \int_{\Omega} \mathbf{e}_k \cdot \eta_{tz} e_{z,n} \times \hat{\mathbf{z}} dS \right]
 \end{aligned} \tag{2.250}$$

Para simplificar la notación, se definen las matrices

$$M_{\mu_{tt}}^{kn} = \int_{\Omega} \mathbf{e}_k \cdot \mu_{tt} \mathbf{h}_n \times \hat{\mathbf{z}} dS \tag{2.251}$$

$$M_{\mu_{tz}}^{kn} = \int_{\Omega} \mathbf{e}_k \cdot \mu_{tz} h_{z,n} \times \hat{\mathbf{z}} dS \tag{2.252}$$

$$V_{\mu_{tz}}^k = \int_{\Omega} \mathbf{e}_k \cdot \mu_{tz} \times \hat{\mathbf{z}} dS \tag{2.253}$$

$$M_{\eta_{tt}}^{kn} = \int_{\Omega} \mathbf{e}_k \cdot \eta_{tt} \mathbf{e}_n \times \hat{\mathbf{z}} dS \tag{2.254}$$

$$M_{\eta_{tz}}^{kn} = \int_{\Omega} \mathbf{e}_k \cdot \eta_{tz} e_{z,n} \times \hat{\mathbf{z}} dS \tag{2.255}$$

de forma que (2.250) queda de la forma

$$\partial_z v_k = -v_{z,k} \frac{k_{c,k}^2}{\gamma_k} - j\omega \left[\sum_n i_n M_{\mu_{tt}}^{kn} + \sum_n i_{z,n} M_{\mu_{tz}}^{kn} + H_0 V_{\mu_{tz}}^k + \right. \\
 \left. + \sum_n v_n M_{\eta_{tt}}^{kn} + \sum_n v_{z,n} M_{\eta_{tz}}^{kn} \right] \tag{2.256}$$

O, en forma matricial,

$$\partial_z \mathbf{v} = -K_c^2 \Gamma^{-1} \mathbf{v}_z - j\omega (M_{\mu_{tt}} \mathbf{i} + M_{\mu_{tz}} \mathbf{i}_z + H_0 \mathbf{V}_{\mu_{tz}} + M_{\eta_{tt}} \mathbf{v} + M_{\eta_{tz}} \mathbf{v}_z) \tag{2.257}$$

Agrupando términos semejantes:

Modelado con técnicas modales de estructuras de microondas basadas en guías N-furcadas arbitrariamente rellenas con materiales

$$\partial_z \mathbf{v} = -j\omega \left[M_{\mu_{tt}} \mathbf{i} + M_{\mu_{tz}} \mathbf{i}_z + H_0 \mathbf{V}_{\mu_{tz}} + M_{\eta_{tt}} \mathbf{v} + \left(M_{\eta_{tz}} + \frac{1}{j\omega} K_c^2 \Gamma^{-1} \right) \mathbf{v}_z \right] \quad (2.258)$$

Ahora, con la ayuda de (2.244) y (2.248), se pueden poner \mathbf{v}_z , \mathbf{i}_z y H_0 función de las corrientes y tensiones transversales:

$$\partial_z \mathbf{v} = -j\omega \left[\begin{array}{l} M_{\mu_{tt}} \mathbf{i} + M_{\mu_{tz}} (Q_{\eta_{zt}} \mathbf{v} + Q_{\mu_{zt}} \mathbf{i}) + (R_{\mu_{zt}} \mathbf{i} + \mathbf{R}_{\eta_{zt}} \mathbf{v}) \mathbf{V}_{\mu_{tz}} + \\ + M_{\eta_{tt}} \mathbf{v} + \left(M_{\eta_{tz}} + \frac{1}{j\omega} K_c^2 \Gamma^{-1} \right) (Q_{\varepsilon_{zt}} \mathbf{v} + Q_{\xi_{zt}} \mathbf{i}) \end{array} \right] \quad (2.259)$$

Ya se tiene una de las ecuaciones del telegrafista, puesto que se está relacionando $\partial_z \mathbf{v}$ con \mathbf{v} e \mathbf{i} . Para compactar la notación, se agrupan términos semejantes,

$$\partial_z \mathbf{v} = -j\omega \left[\begin{array}{l} + \left(M_{\eta_{tt}} + M_{\mu_{tz}} Q_{\eta_{zt}} + \mathbf{V}_{\mu_{tz}} \mathbf{R}_{\eta_{zt}} + \left(M_{\eta_{tz}} + \frac{1}{j\omega} K_c^2 \Gamma^{-1} \right) Q_{\varepsilon_{zt}} \right) \mathbf{v} \\ + \left(M_{\mu_{tt}} + M_{\mu_{tz}} Q_{\mu_{zt}} + \mathbf{V}_{\mu_{tz}} \mathbf{R}_{\mu_{zt}} + \left(M_{\eta_{tz}} + \frac{1}{j\omega} K_c^2 \Gamma^{-1} \right) Q_{\xi_{zt}} \right) \mathbf{i} \end{array} \right] \quad (2.260)$$

y se definen las siguientes matrices

$$M_{vv} = -j\omega \left(M_{\eta_{tt}} + M_{\mu_{tz}} Q_{\eta_{zt}} + \mathbf{V}_{\mu_{tz}} \mathbf{R}_{\eta_{zt}} + \left(M_{\eta_{tz}} + \frac{1}{j\omega} K_c^2 \Gamma^{-1} \right) Q_{\varepsilon_{zt}} \right) \quad (2.261)$$

$$M_{vi} = -j\omega \left(M_{\mu_{tt}} + M_{\mu_{tz}} Q_{\mu_{zt}} + \mathbf{V}_{\mu_{tz}} \mathbf{R}_{\mu_{zt}} + \left(M_{\eta_{tz}} + \frac{1}{j\omega} K_c^2 \Gamma^{-1} \right) Q_{\xi_{zt}} \right) \quad (2.262)$$

Por tanto,

$$\partial_z \mathbf{v} = M_{vv} \mathbf{v} + M_{vi} \mathbf{i} \quad (2.263)$$

En la otra ecuación de (2.148), se encuentra $\partial_z \mathbf{i}$. El desplazamiento eléctrico transversal de (2.148) se puede sustituir gracias a (2.156):

$$\begin{aligned} \int_S \mathbf{h}_k \cdot \mathbf{D}_t \times \hat{z} dS &= \int_S \mathbf{h}_k \cdot (\varepsilon_{tt} \mathbf{E}_t + \varepsilon_{tz} E_z + \xi_{tt} \mathbf{H}_t + \xi_{tz} H_z) \times \hat{z} dS = \\ &= \int_S \mathbf{h}_k \cdot \left(\varepsilon_{tt} \sum_n v_n \mathbf{e}_n + \varepsilon_{tz} \sum_n v_{z,n} e_{z,n} + \xi_{tt} \sum_n i_n \mathbf{h}_n + \xi_{tz} \left(\sum_n i_{z,n} h_{z,n} + H_0 \right) \right) \times \hat{z} dS = \\ &= \sum_n v_n \int_S \mathbf{h}_k \cdot \varepsilon_{tt} \mathbf{e}_n \times \hat{z} dS + \sum_n v_{z,n} \int_S \mathbf{h}_k \cdot \varepsilon_{tz} e_{z,n} \times \hat{z} dS + \\ &+ \sum_n i_n \int_S \mathbf{h}_k \cdot \xi_{tt} \mathbf{h}_n \times \hat{z} dS + \sum_n i_{z,n} \int_S \mathbf{h}_k \cdot \xi_{tz} h_{z,n} \times \hat{z} dS + H_0 \int_S \mathbf{h}_k \cdot \xi_{tz} \times \hat{z} dS \end{aligned} \quad (2.264)$$

Por tanto,

Desarrollo teórico

$$Z_k^{-2} \partial_z i_k = -i_{z,k} \frac{k_{c,k}^2}{\gamma_k} Z_k^{-2} + j\omega \left(\begin{aligned} & \sum_n v_n \int_S \mathbf{h}_k \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_{tt} \mathbf{e}_n \times \hat{\mathbf{z}} dS + \sum_n v_{z,n} \int_S \mathbf{h}_k \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_{tz} e_{z,n} \times \hat{\mathbf{z}} dS + \\ & + \sum_n i_n \int_S \mathbf{h}_k \cdot \boldsymbol{\xi}_{tt} \mathbf{h}_n \times \hat{\mathbf{z}} dS + \sum_n i_{z,n} \int_S \mathbf{h}_k \cdot \boldsymbol{\xi}_{tz} h_{z,n} \times \hat{\mathbf{z}} dS + H_0 \int_S \mathbf{h}_k \cdot \boldsymbol{\xi}_{tz} \times \hat{\mathbf{z}} dS \end{aligned} \right) \quad (2.265)$$

Para simplificar la notación, se definen las matrices

$$M_{\varepsilon_{tt}}^{kn} = \int_S \mathbf{h}_k \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_{tt} \mathbf{e}_n \times \hat{\mathbf{z}} dS \quad (2.266)$$

$$M_{\varepsilon_{tz}}^{kn} = \int_S \mathbf{h}_k \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_{tz} e_{z,n} \times \hat{\mathbf{z}} dS \quad (2.267)$$

$$M_{\xi_{tt}}^{kn} = \int_S \mathbf{h}_k \cdot \boldsymbol{\xi}_{tt} \mathbf{h}_n \times \hat{\mathbf{z}} dS \quad (2.268)$$

$$M_{\xi_{tz}}^{kn} = \int_S \mathbf{h}_k \cdot \boldsymbol{\xi}_{tz} h_{z,n} \times \hat{\mathbf{z}} dS \quad (2.269)$$

$$V_{\xi_{tz}}^k = \int_S \mathbf{h}_k \cdot \boldsymbol{\xi}_{tz} \times \hat{\mathbf{z}} dS \quad (2.270)$$

De forma que

$$Z_k^{-2} \partial_z i_k = -i_{z,k} \frac{k_{c,k}^2}{\gamma_k} Z_k^{-2} + j\omega \left(\begin{aligned} & \sum_n v_n M_{\varepsilon_{tt}}^{kn} + \sum_n v_{z,n} M_{\varepsilon_{tz}}^{kn} + \\ & + \sum_n i_n M_{\xi_{tt}}^{kn} + \sum_n i_{z,n} M_{\xi_{tz}}^{kn} + H_0 V_{\xi_{tz}}^k \end{aligned} \right) \quad (2.271)$$

O, en forma matricial,

$$Z^{-2} \partial_z \mathbf{i} = -Z^{-2} K_c^2 \Gamma^{-1} \mathbf{i}_z + j\omega \left(M_{\varepsilon_{tt}} \mathbf{v} + M_{\varepsilon_{tz}} \mathbf{v}_z + M_{\xi_{tt}} \mathbf{i} + M_{\xi_{tz}} \mathbf{i}_z + H_0 \mathbf{V}_{\xi_{tz}} \right) \quad (2.272)$$

Agrupando términos semejantes:

$$\partial_z \mathbf{i} = j\omega Z^2 \left(M_{\varepsilon_{tt}} \mathbf{v} + M_{\varepsilon_{tz}} \mathbf{v}_z + M_{\xi_{tt}} \mathbf{i} + \left(M_{\xi_{tz}} - \frac{1}{j\omega} Z^{-2} K_c^2 \Gamma^{-1} \right) \mathbf{i}_z + H_0 \mathbf{V}_{\xi_{tz}} \right) \quad (2.273)$$

Ya se está en disposición, se ponen todas las variables en función de las corrientes y tensiones transversales con ayuda de (2.244) y (2.248):

$$\begin{aligned} \partial_z \mathbf{i} &= j\omega Z^2 \left(\begin{aligned} & M_{\varepsilon_{tt}} \mathbf{v} + M_{\varepsilon_{tz}} (Q_{\varepsilon_{zt}} \mathbf{v} + Q_{\xi_{zt}} \mathbf{i}) + M_{\xi_{tt}} \mathbf{i} + \\ & + \left(M_{\xi_{tz}} - \frac{1}{j\omega} Z^{-2} K_c^2 \Gamma^{-1} \right) (Q_{\eta_{zt}} \mathbf{v} + Q_{\mu_{zt}} \mathbf{i}) + (R_{\mu_{zt}} \mathbf{i} + \mathbf{R}_{\eta_{zt}} \mathbf{v}) \mathbf{V}_{\xi_{tz}} \end{aligned} \right) = \\ &= j\omega Z^2 \left(\begin{aligned} & \left(M_{\varepsilon_{tt}} + M_{\varepsilon_{tz}} Q_{\varepsilon_{zt}} + \mathbf{V}_{\xi_{tz}} \mathbf{R}_{\eta_{zt}} + \left(M_{\xi_{tz}} - \frac{1}{j\omega} Z^{-2} K_c^2 \Gamma^{-1} \right) Q_{\eta_{zt}} \right) \mathbf{v} + \\ & \left(M_{\xi_{tt}} + M_{\varepsilon_{tz}} Q_{\xi_{zt}} + \mathbf{V}_{\xi_{tz}} \mathbf{R}_{\mu_{zt}} + \left(M_{\xi_{tz}} - \frac{1}{j\omega} Z^{-2} K_c^2 \Gamma^{-1} \right) Q_{\mu_{zt}} \right) \mathbf{i} \end{aligned} \right) \end{aligned} \quad (2.274)$$

Ésta es la otra ecuación del telegrafista, la que relaciona $\partial_z \mathbf{i}$ con \mathbf{v} e \mathbf{i} . Para compactar la notación, se definen las matrices

Modelado con técnicas modales de estructuras de microondas basadas en guías N-furcadas arbitrariamente rellenas con materiales

$$M_{iv} = j\omega Z^2 \left(M_{\varepsilon_{it}} + M_{\varepsilon_{iz}} Q_{\varepsilon_{zt}} + \mathbf{V}_{\xi_{tz}} \mathbf{R}_{\eta_{zt}} + \left(M_{\xi_{tz}} - \frac{1}{j\omega} Z^{-2} K_c^2 \Gamma^{-1} \right) Q_{\eta_{zt}} \right) \quad (2.275)$$

$$M_{ii} = j\omega Z^2 \left(M_{\xi_{it}} + M_{\varepsilon_{iz}} Q_{\xi_{zt}} + \mathbf{V}_{\xi_{tz}} \mathbf{R}_{\mu_{zt}} + \left(M_{\xi_{tz}} - \frac{1}{j\omega} Z^{-2} K_c^2 \Gamma^{-1} \right) Q_{\mu_{zt}} \right) \quad (2.276)$$

Por tanto se tiene la otra ecuación del telegrafista:

$$\partial_z \mathbf{i} = M_{iv} \mathbf{v} + M_{ii} \mathbf{i} \quad (2.277)$$

Las cuatro matrices M_{vv} , M_{vi} , M_{iv} y M_{ii} tienen una estructura muy similar, con cuatro términos que significan lo siguiente cada uno:

- El primero es la contribución de las submatrices transversales de los parámetros constitutivos ε_{it} , μ_{it} , η_{it} y χ_{it} . Estos términos están presentes en todo tipo de materiales, incluso en el caso del vacío.
- El segundo es la contribución de los elementos fuera de la diagonal, es decir, las anisotropías.
- El tercer término se debe a la inclusión del término H_0 . Se puede comprobar que este término existe siempre salvo en el caso particular de materiales isótropos no magnéticos.
- El cuarto término se divide en dos: el primero de ellos recibe contribuciones de las anisotropías, mientras que el segundo se debe a las componentes axiales ε_{zz} , μ_{zz} , η_{zz} y χ_{zz} .

De nuevo, se ha obtenido una expresión de la matriz M , diferente a la obtenida con la estrategia directa. Esta matriz se construye con las matrices indicadas en este apartado. Para la resolución de la propagación, y, si cabe, la resolución de discontinuidades, el proceso a seguir es el mismo que con la estrategia directa.

2.4.2.3. Formulación restringida

Se va a desarrollar una formulación del CMM válida para el caso en que la guía de onda esté parcialmente rellena con una o varias láminas de ferrita verticales, sometidas a un campo magnético externo en la dirección y , debido a que estas estructuras son ampliamente utilizadas en la realización de dispositivos no recíprocos. Por otro lado, los materiales isótropos quedan incluidos como casos particulares. Esta formulación restringida es una modificación de la formulación indirecta, y se expondrá por completitud. Igualmente, se plantean sistemas de ecuaciones aplicando el procedimiento de Galerkin, pero se plantean las ecuaciones de manera que no presenten productos de funciones discontinuas igualados a funciones continuas, lo que es inevitable al realizar las formulaciones generales directa e indirecta. Esto dará lugar a una excelente convergencia [85].

Las ferritas magnetizadas en y tienen la matriz de permeabilidad de la forma

$$\mu = \begin{pmatrix} \mu_{xx} & 0 & \mu_{xy} \\ 0 & \mu_{yy} & 0 \\ \mu_{zx} & 0 & \mu_{zz} \end{pmatrix} \quad (2.278)$$

Se considera la solución completa de los campos únicamente con modos TE_{m0} , de forma que las únicas componentes no nulas son E_y , H_x y H_z .

Las ecuaciones rotacionales de Maxwell (2.129) quedan como

$$\partial_z H_x - \partial_x H_z = j\omega D_y \quad (2.279)$$

$$\partial_z E_y = j\omega B_x \quad (2.280)$$

$$\partial_x E_y = -j\omega B_z$$

Las relaciones de constitución en una ferrita son:

$$D_y = \varepsilon E_y \quad (2.281)$$

$$B_x = \mu_{xx} H_x + \mu_{xz} H_z \quad (2.282)$$

$$B_z = \mu_{zx} H_x + \mu_{zz} H_z$$

Como en todas las formulaciones del CMM, los campos se desarrollan como modos de la guía vacía:

$$E_y = \sum_n v_n e_{y,n} \quad (2.283)$$

$$H_x = \sum_n i_n h_{x,n} \quad (2.284)$$

Modelado con técnicas modales de estructuras de microondas basadas en guías N-furcadas arbitrariamente rellenas con materiales

$$H_z = \sum_n i_{z,n} h_{z,n} + H_0 \quad (2.285)$$

Las ecuaciones de partida para la obtención de las diferentes formulaciones del CMM son (2.148). Particularizando éstas para este problema restringido:

$$\left. \begin{aligned} \partial_z v_k &= -j\omega \int_{\Omega} \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{B}_t \times \hat{\mathbf{z}} \, dS = j\omega \int_{\Omega} e_{y,k} B_x \, dS \\ \partial_z i_k &= -i_{z,k} \frac{k_{c,k}^2}{\gamma_k} + j\omega Z_k^2 \int_S \mathbf{h}_k \cdot \mathbf{D}_t \times \hat{\mathbf{z}} \, dS = -i_{z,k} \frac{k_{c,k}^2}{\gamma_k} + j\omega Z_k^2 \int_S h_{x,k} D_y \, dS \end{aligned} \right\} \quad (2.286)$$

Hay que sustituir los valores de D_y y B_x usando las relaciones de constitución (2.281) y (2.282), y eliminar las corrientes axiales $i_{z,k}$.

Las componentes D_y , H_x y B_z son discontinuas, mientras que E_y , B_x y H_z son continuas. Como se ha dicho antes, la convergencia de una solución está fuertemente influida por el hecho de que las ecuaciones no presenten productos de funciones discontinuas (cuando una de ellas resulta, de hecho, continua, al desarrollarla en serie), o de una continua por una discontinua, igualados a funciones continuas [85]. Como se puede comprobar, solamente la ecuación de \mathbf{D} verifica esta condición. Sin embargo, también se puede reescribir la ecuación de \mathbf{B} de manera correcta para este caso:

$$\begin{aligned} B_z &= \mu_a B_x + \mu_b H_z \\ H_x &= \mu_c B_x - \mu_d H_z \end{aligned} \quad (2.287)$$

Donde

$$\begin{aligned} \mu_a &= \frac{\mu_{zx}}{\mu_{xx}} \\ \mu_b &= \mu_{zz} - \frac{\mu_{xz}\mu_{zx}}{\mu_{xx}} \\ \mu_c &= \frac{1}{\mu_{xx}} \\ \mu_d &= \frac{\mu_{xz}}{\mu_{xx}} \end{aligned} \quad (2.288)$$

El desarrollo de B_z en (2.280) vale, por tanto,

$$\partial_x E_y = -j\omega (\mu_a B_x + \mu_b H_z) \quad (2.289)$$

La expresión de H_x también es útil:

$$H_x = \mu_c B_x - \mu_d H_z \quad (2.290)$$

El problema que tiene esta ecuación es que B_x , en principio, una componente de valor desconocido. Para ello, hay que proponer un desarrollo en serie de esta componente. Se utilizan las mismas funciones base que para H_x :

$$B_x = \mu_0 \sum_n b_n h_{x,n} \quad (2.291)$$

Se multiplica de forma explícita por μ_0 para que los coeficientes b_n sean del mismo orden de magnitud que $i_{z,n}$, dado que $\mathbf{B}=\mu\mathbf{H}$. Esto es importante, puesto que ambos coeficientes se van a resolver en el mismo sistema de ecuaciones y unas diferencias de siete órdenes de magnitud (el de μ_0) entre sus coeficientes y soluciones podrían dar lugar a inestabilidades numéricas.

De forma similar a la formulación indirecta, se buscará relacionar los coeficientes desconocidos coeficientes b_n e $i_{z,n}$, así como H_0 , en función de v_n e i_n a través de un sistema de ecuaciones que se resuelva con una inversión de matrices.

Sustituyendo las magnitudes de (2.289) y (2.290) por sus desarrollos en serie (2.291), (2.283), (2.284) y (2.285):

$$\left. \begin{aligned} -\frac{1}{j\omega} \partial_x \left(\sum_n v_n e_{y,n} \right) &= \mu_a \left(\mu_0 \sum_n b_n h_{x,n} \right) + \mu_b \left(\sum_n i_{z,n} h_{z,n} + H_0 \right) \\ \sum_n i_n h_{x,n} &= \mu_c \left(\sum_n b_n h_{x,n} \right) - \mu_d \left(\sum_n i_{z,n} h_{z,n} + H_0 \right) \end{aligned} \right\} \quad (2.292)$$

Por otro lado las funciones base cumplen la relación,

$$\partial_x e_{y,n} = -\gamma_n Z_n h_{z,n} \quad (2.293)$$

De forma que se tiene:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{j\omega} \sum_n v_n \gamma_n Z_n h_{z,n} &= \mu_a \mu_0 \sum_n b_n h_{x,n} + \mu_b \left(\sum_n i_{z,n} h_{z,n} + H_0 \right) \\ \sum_n i_n h_{x,n} &= \mu_c \left(\mu_0 \sum_n b_n h_{x,n} \right) - \mu_d \left(\sum_n i_{z,n} h_{z,n} + H_0 \right) \end{aligned} \right\} \quad (2.294)$$

Como anteriormente, para obtener un sistema de ecuaciones matriciales a partir de estas relaciones, se aplica el procedimiento de Galerkin. En la primera ecuación, con $h_{z,k}$. En la segunda, con $h_{x,k}$:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{j\omega} \sum_n v_n \gamma_n Z_n \int_{\Omega} h_{z,n} h_{z,k} dS &= \mu_0 \sum_n b_n \int_{\Omega} \mu_a h_{x,n} h_{z,k} dS + \\ + \sum_n i_{z,n} \int_{\Omega} \mu_b h_{z,n} h_{z,k} dS &+ H_0 \int_{\Omega} \mu_b h_{z,k} dS \\ \sum_n i_n \int_{\Omega} h_{x,n} h_{x,k} dS &= \mu_0 \sum_n b_n \int_{\Omega} \mu_c h_{x,n} h_{x,k} dS - \\ - \sum_n i_{z,n} \int_{\Omega} \mu_d h_{z,n} h_{x,k} dS &- H_0 \int_{\Omega} \mu_d h_{x,k} dS \end{aligned} \right\} \quad (2.295)$$

En los miembros de la izquierda, se usan las siguientes relaciones de ortogonalidad:

Modelado con técnicas modales de estructuras de microondas basadas en guías N-furcadas arbitrariamente rellenas con materiales

$$\int_{\Omega} h_{z,n} h_{z,k} dS = \left(\frac{k_{c,k}}{Z_k \gamma_k} \right)^2 \delta_{nk} \quad (2.296)$$

$$\int_{\Omega} h_{x,n} h_{x,k} dS = Z_k^{-2} \delta_{nk} \quad (2.297)$$

Por tanto, se tiene que

$$\left. \begin{aligned} & \frac{1}{j\omega} \left(\frac{k_{c,k}}{Z_k \gamma_k} \right)^2 v_k \gamma_k Z_k = \mu_0 \sum_n b_n \int_{\Omega} \mu_a h_{x,n} h_{z,k} dS + \\ & + \sum_n i_{z,n} \int_{\Omega} \mu_b h_{z,n} h_{z,k} dS + H_0 \int_{\Omega} \mu_b h_{z,k} dS \\ & Z_k^{-2} i_k = \mu_0 \sum_n b_n \int_{\Omega} \mu_c h_{x,n} h_{x,k} dS - \\ & - \sum_n i_{z,n} \int_{\Omega} \mu_d h_{z,n} h_{x,k} dS - H_0 \int_{\Omega} \mu_d h_{x,k} dS \end{aligned} \right\} \quad (2.298)$$

Como en el caso de la formulación indirecta, se tienen tres incógnitas, b_n e $i_{z,n}$, y H_0 , y hasta ahora, se tienen dos ecuaciones que las relacionen con v_n e i_n . Para conseguir la tercera ecuación que falta, se integra la expresión de B_z en (2.287):

$$\begin{aligned} & \frac{1}{j\omega} \sum_n v_n \gamma_n \int_{\Omega} h_{z,n} dS = 0 = \\ & = \mu_0 \sum_n b_n \int_{\Omega} \mu_a h_{x,n} dS + \sum_n i_{z,n} \int_{\Omega} \mu_b h_{z,n} dS + H_0 \int_{\Omega} \mu_b dS \end{aligned} \quad (2.299)$$

Dado que

$$\int_{\Omega} h_{z,n} dS = 0 \quad (2.300)$$

Para simplificar la notación en el sistema de ecuaciones, se definen las matrices siguientes:

$$M_{\mu_a}^{kn} = \int_{\Omega} \mu_a h_{x,n} h_{z,k} dS \quad (2.301)$$

$$M_{\mu_b}^{kn} = \int_{\Omega} \mu_b h_{z,n} h_{z,k} dS \quad (2.302)$$

$$V_{\mu_b}^k = \int_{\Omega} \mu_b h_{z,k} dS \quad (2.303)$$

$$M_{\mu_c}^{kn} = \int_{\Omega} \mu_c h_{x,n} h_{x,k} dS \quad (2.304)$$

$$M_{\mu_d}^{kn} = \int_{\Omega} \mu_d h_{z,n} h_{x,k} dS \quad (2.305)$$

$$V_{\mu_d}^k = \int_{\Omega} \mu_d h_{x,k} dS \quad (2.306)$$

$$V_{\mu_a}^k = \int_{\Omega} \mu_a h_{x,k} dS \quad (2.307)$$

$$\theta = \int_{\Omega} \mu_b dS \quad (2.308)$$

Por tanto, el sistema de ecuaciones formado por (2.298), y (2.310) queda como

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{j\omega} K_c^2 Z^{-1} \Gamma^{-1} \mathbf{v} &= \mu_0 M_{\mu_a} \mathbf{b} + M_{\mu_b} \mathbf{i}_z + H_0 \mathbf{V}_{\mu_b} \\ Z^{-2} \mathbf{i} &= \mu_0 M_{\mu_c} \mathbf{b} - M_{\mu_d} \mathbf{i}_z - H_0 \mathbf{V}_{\mu_d} \\ \mathbf{V}_{\mu_a}^t \mu_0 \mathbf{b} + \mathbf{V}_{\mu_b}^t \mathbf{i}_z + H_0 \boldsymbol{\theta} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.309)$$

Se despeja el valor de H_0 :

$$H_0 = -\frac{1}{\theta} \left(\mathbf{V}_{\mu_a}^t \mu_0 \mathbf{b} + \mathbf{V}_{\mu_b}^t \mathbf{i}_z \right) \quad (2.310)$$

Sustituyendo:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{j\omega} K_c^2 Z^{-1} \Gamma^{-1} \mathbf{v} &= \mu_0 M_{\mu_a} \mathbf{b} + M_{\mu_b} \mathbf{i}_z - \frac{1}{\theta} \left(\mathbf{V}_{\mu_a}^t \mu_0 \mathbf{b} + \mathbf{V}_{\mu_b}^t \mathbf{i}_z \right) \mathbf{V}_{\mu_b} \\ Z^{-2} \mathbf{i} &= \mu_0 M_{\mu_c} \mathbf{b} - M_{\mu_d} \mathbf{i}_z + \frac{1}{\theta} \left(\mathbf{V}_{\mu_a}^t \mu_0 \mathbf{b} + \mathbf{V}_{\mu_b}^t \mathbf{i}_z \right) \mathbf{V}_{\mu_d} \end{aligned} \right\} \quad (2.311)$$

Agrupando términos semejantes:

$$\left. \begin{aligned} \mu_0 \left(M_{\mu_a} - \frac{1}{\theta} \mathbf{V}_{\mu_b} \mathbf{V}_{\mu_a}^t \right) \mathbf{b} + \left(M_{\mu_b} - \frac{1}{\theta} \mathbf{V}_{\mu_b} \mathbf{V}_{\mu_b}^t \right) \mathbf{i}_z &= \frac{1}{j\omega} K_c^2 Z^{-1} \Gamma^{-1} \mathbf{v} \\ \mu_0 \left(M_{\mu_c} + \frac{1}{\theta} \mathbf{V}_{\mu_d} \mathbf{V}_{\mu_a}^t \right) \mathbf{b} + \left(-M_{\mu_d} + \frac{1}{\theta} \mathbf{V}_{\mu_d} \mathbf{V}_{\mu_b}^t \right) \mathbf{i}_z &= Z^{-2} \mathbf{i} \end{aligned} \right\} \quad (2.312)$$

Para simplificar la notación, se definen las matrices

$$P_{\mu_a} = M_{\mu_a} - \frac{1}{\theta} \mathbf{V}_{\mu_b} \mathbf{V}_{\mu_a}^t \quad (2.313)$$

$$P_{\mu_b} = M_{\mu_b} - \frac{1}{\theta} \mathbf{V}_{\mu_b} \mathbf{V}_{\mu_b}^t \quad (2.314)$$

$$P_{\mu_c} = M_{\mu_c} + \frac{1}{\theta} \mathbf{V}_{\mu_d} \mathbf{V}_{\mu_a}^t \quad (2.315)$$

$$P_{\mu_d} = -M_{\mu_d} + \frac{1}{\theta} \mathbf{V}_{\mu_d} \mathbf{V}_{\mu_b}^t \quad (2.316)$$

Por tanto,

$$\left. \begin{aligned} \mu_0 P_{\mu_a} \mathbf{b} + P_{\mu_b} \mathbf{i}_z &= \frac{1}{j\omega} K_c^2 Z^{-1} \Gamma^{-1} \mathbf{v} \\ \mu_0 P_{\mu_c} \mathbf{b} + P_{\mu_d} \mathbf{i}_z &= Z^{-2} \mathbf{i} \end{aligned} \right\} \quad (2.317)$$

En forma matricial:

$$\begin{pmatrix} \mu_0 P_{\mu_a} & P_{\mu_b} \\ \mu_0 P_{\mu_c} & P_{\mu_d} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{b} \\ \mathbf{i}_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{j\omega} K_c^2 Z^{-1} \Gamma^{-1} & 0 \\ 0 & Z^{-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{v} \\ \mathbf{i} \end{pmatrix} \quad (2.318)$$

Resolviendo las incógnitas:

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} \mathbf{b} \\ \mathbf{i}_z \end{pmatrix} &= \\
 &= \begin{pmatrix} \mu_0 P_{\mu_a} & P_{\mu_b} \\ \mu_0 P_{\mu_c} & P_{\mu_d} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{1}{j\omega} K_c^2 Z^{-1} \Gamma^{-1} & 0 \\ 0 & Z^{-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{v} \\ \mathbf{i} \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} Q_{\mu_a} & Q_{\mu_c} \\ Q_{\mu_b} & Q_{\mu_d} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{v} \\ \mathbf{i} \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{2.319}$$

En forma de sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \mathbf{b} = Q_{\mu_a} \mathbf{v} + Q_{\mu_c} \mathbf{i} \\ \mathbf{i}_z = Q_{\mu_b} \mathbf{v} + Q_{\mu_d} \mathbf{i} \end{cases} \tag{2.320}$$

Por tanto, las matrices Q relacionan los coeficientes hasta ahora desconocidos \mathbf{b} e \mathbf{i}_z con los conocidos \mathbf{v} e \mathbf{i} .

Ya se puede calcular H_0 en función de \mathbf{v} e \mathbf{i} , sustituyendo (2.320) en (2.310):

$$\begin{aligned}
 H_0 &= -\frac{1}{\theta} \left[\mathbf{V}_{\mu_a}^t \mu_0 (Q_{\mu_a} \mathbf{v} + Q_{\mu_c} \mathbf{i}) + \mathbf{V}_{\mu_b}^t (Q_{\mu_b} \mathbf{v} + Q_{\mu_d} \mathbf{i}) \right] = \\
 &= -\frac{1}{\theta} \left[(\mu_0 \mathbf{V}_{\mu_a}^t Q_{\mu_a} + \mathbf{V}_{\mu_b}^t Q_{\mu_b}) \mathbf{v} + (\mu_0 \mathbf{V}_{\mu_a}^t Q_{\mu_c} + \mathbf{V}_{\mu_b}^t Q_{\mu_d}) \mathbf{i} \right] = \\
 &= R_v \mathbf{v} + R_i \mathbf{i}
 \end{aligned} \tag{2.321}$$

Donde se han definido las matrices:

$$R_v = -\frac{1}{\theta} (\mu_0 \mathbf{V}_{\mu_a}^t Q_{\mu_a} + \mathbf{V}_{\mu_b}^t Q_{\mu_b}) \tag{2.322}$$

$$R_i = -\frac{1}{\theta} (\mu_0 \mathbf{V}_{\mu_a}^t Q_{\mu_c} + \mathbf{V}_{\mu_b}^t Q_{\mu_d}) \tag{2.323}$$

Del mismo modo, ya se está en condición de obtener las ecuaciones del telegrafista. Sustituyendo en (2.286) los valores de E_y y B_x por sus desarrollos en serie de (2.283) y (2.291):

$$\left. \begin{aligned}
 \partial_z v_k &= j\omega \mu_0 \int_{\Omega} e_{y,k} \left(\sum_n b_n h_{x,n} \right) dS = \\
 &= j\omega \mu_0 \sum_n b_n \int_{\Omega} e_{y,k} h_{x,n} dS \\
 \partial_z i_k &= -i_{z,k} \frac{k_{c,k}^2}{\gamma_k} + j\omega Z_k^2 \int_{\Omega} \varepsilon h_{x,k} \left(\sum_n v_n e_{y,n} \right) dS = \\
 &= -i_{z,k} \frac{k_{c,k}^2}{\gamma_k} + j\omega Z_k^2 \sum_n v_n \int_{\Omega} \varepsilon h_{x,k} e_{y,n} dS
 \end{aligned} \right\} \tag{2.324}$$

Pero se tiene que las funciones base eléctricas y magnética están relacionadas por

$$h_{x,n} = -Z_n^{-1} e_{y,n} \quad (2.325)$$

Y que las funciones base eléctricas cumplen la relación de ortogonalidad

$$\int_{\Omega} e_{y,n} e_{y,k} dS = \delta_{nk} \quad (2.326)$$

Por tanto,

$$\left. \begin{aligned} \partial_z v_k &= -j\omega\mu_0 Z_n^{-1} \sum_n b_n \int_{\Omega} e_{y,k} e_{y,n} dS = -j\omega\mu_0 Z_k^{-1} b_k \\ \partial_z i_k &= -i_{z,k} \frac{k_{c,k}^2}{\gamma_k} - j\omega Z_k \sum_n v_n \int_{\Omega} \varepsilon e_{y,k} e_{y,n} dS \end{aligned} \right\} \quad (2.327)$$

Para simplificar la notación, se define la siguiente matriz:

$$M_{\varepsilon}^{kn} = \int_{\Omega} \varepsilon e_{y,k} e_{y,n} dS \quad (2.328)$$

Por tanto (2.327) queda como,

$$\left. \begin{aligned} \partial_z v_k &= -j\omega\mu_0 Z_k^{-1} b_k \\ \partial_z i_k &= -i_{z,k} \frac{k_{c,k}^2}{\gamma_k} - j\omega Z_k \sum_n M_{\varepsilon}^{kn} v_n \end{aligned} \right\} \quad (2.329)$$

O, en forma matricial,

$$\left. \begin{aligned} \partial_z \mathbf{v} &= -j\omega\mu_0 Z^{-1} \mathbf{b} \\ \partial_z \mathbf{i} &= -K_c^2 \Gamma^{-1} \mathbf{i}_z - j\omega Z M_{\varepsilon} \mathbf{v} \end{aligned} \right\} \quad (2.330)$$

Para obtener las ecuaciones del telegrafista, hay que relacionar las ondas transversales \mathbf{v} e \mathbf{i} con sus derivadas en z . Para ellos, se sustituye estos valores en (2.330):

$$\left. \begin{aligned} \partial_z \mathbf{v} &= -j\omega\mu_0 Z^{-1} (Q_{\mu_a} \mathbf{v} + Q_{\mu_c} \mathbf{i}) \\ \partial_z \mathbf{i} &= -K_c^2 \Gamma^{-1} (Q_{\mu_b} \mathbf{v} + Q_{\mu_d} \mathbf{i}) - j\omega Z M_{\varepsilon} \mathbf{v} \end{aligned} \right\} \quad (2.331)$$

Éstas son las ecuaciones del telegrafista. Para aclarar la notación, se agrupa términos semejantes:

$$\left. \begin{aligned} \partial_z \mathbf{v} &= -\Gamma Q_{\mu_a} \mathbf{v} - \Gamma Q_{\mu_c} \mathbf{i} \\ \partial_z \mathbf{i} &= \left(-K_c^2 \Gamma^{-1} Q_{\mu_b} - j\omega Z M_{\varepsilon} \right) \mathbf{v} - K_c^2 \Gamma^{-1} Q_{\mu_d} \mathbf{i} \end{aligned} \right\} \quad (2.332)$$

Y, se definen las matrices:

Modelado con técnicas modales de estructuras de microondas basadas en guías N-furcadas arbitrariamente rellenas con materiales

$$\begin{aligned}
 M_{vv} &= -\Gamma Q_{\mu_a} \\
 M_{vi} &= -\Gamma Q_{\mu_c} \\
 M_{iv} &= -K_c^2 \Gamma^{-1} Q_{\mu_b} - j\omega Z M_\varepsilon \\
 M_{ii} &= -K_c^2 \Gamma^{-1} Q_{\mu_d}
 \end{aligned} \tag{2.333}$$

Por tanto,

$$\left. \begin{aligned}
 \partial_z \mathbf{v} &= M_{vv} \mathbf{v} + M_{vi} \mathbf{i} \\
 \partial_z \mathbf{i} &= M_{iv} \mathbf{v} + M_{ii} \mathbf{i}
 \end{aligned} \right\} \tag{2.334}$$

2.4.3. Formulaciones para el caso isótropo

En esta sección, se van a particularizar las expresiones de las matrices de acoplo en las tres formulaciones, lo que servirá para ilustrar las diferencias entre ellas y ver el significado físico de algunas matrices que intervienen. Posteriormente, se particularizarán las formulaciones para el caso de una guía vacía, y se comprobará la consistencia de todas ellas.

2.4.3.1. Formulación directa

Retrocediendo en la formulación, la inversión analítica de los parámetros constitutivos toma la siguiente forma para un material isótropo:

$$\left. \begin{array}{l} \mu_t = \mu \\ \eta_t = 0 \\ \varepsilon_t = \varepsilon \\ \xi_t = 0 \end{array} \right\} \quad (2.335)$$

$$\left. \begin{array}{l} \lambda_b = 0 \\ \lambda_d = 0 \\ \lambda_h = 0 \\ \lambda_e = 0 \\ \chi_{tz} = 0 \\ \sigma_{tz} = 0 \\ \tau_{zt} = 0 \\ \varphi_{zt} = 0 \\ \nu_z = \mu^{-1} \\ \psi_z = 0 \\ \zeta_z = \varepsilon^{-1} \\ \varpi_z = 0 \\ \alpha = \varepsilon\mu \end{array} \right\} \quad (2.336)$$

Las matrices de acoplo valen, para este caso,

$$M_{\lambda_e}^{kn} = 0 \quad (2.338)$$

$$M_{\zeta_z}^{kn} = -\frac{1}{j\omega} Z_n^{-1} \gamma_n \gamma_k \int_{\Omega} \varepsilon^{-1} e_{z,n} e_{z,k} dS \quad (2.339)$$

$$M_{\varphi_{zt}}^{kn} = 0 \quad (2.340)$$

$$M_{\varpi_z}^{kn} = 0 \quad (2.341)$$

Modelado con técnicas modales de estructuras de microondas basadas en guías N-furcadas arbitrariamente rellenas con materiales

$$M_{\mu_t}^{kn} = -j\omega \int_{\Omega} \mathbf{e}_k \cdot \boldsymbol{\mu}_t \mathbf{h}_n \times \hat{\mathbf{z}} dS \quad (2.342)$$

$$M_{\lambda_b}^{kn} = 0 \quad (2.343)$$

$$M_{\eta_t}^{kn} = 0 \quad (2.344)$$

$$M_{\chi_{tz}}^{kn} = 0 \quad (2.345)$$

$$M_{\lambda_h}^{kn} = 0 \quad (2.346)$$

$$M_{\nu_z}^{kn} = -\frac{1}{j\omega} Z_n \gamma_n \gamma_k Z_k^2 \int_{\Omega} \boldsymbol{\mu}^{-1} h_{z,n} h_{z,k} dS \quad (2.347)$$

$$M_{\tau_{zt}}^{kn} = 0 \quad (2.348)$$

$$M_{\psi_z}^{kn} = 0 \quad (2.349)$$

$$M_{\varepsilon_t}^{kn} = j\omega Z_k^2 \int_{\Omega} \mathbf{h}_k \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_t \mathbf{e}_n \times \hat{\mathbf{z}} dS \quad (2.350)$$

$$M_{\lambda_d}^{kn} = 0 \quad (2.351)$$

$$M_{\xi_t}^{kn} = 0 \quad (2.352)$$

$$M_{\sigma_{tz}}^{kn} = 0 \quad (2.353)$$

Por tanto, las matrices de las ecuaciones del telegrafista valen

$$\left. \begin{aligned} M_{vv}^{kn} &= 0 \\ M_{vi}^{kn} &= M_{\mu_t}^{kn} + M_{\varepsilon_z}^{kn} \\ M_{iv}^{kn} &= M_{\varepsilon_t}^{kn} + M_{\nu_z}^{kn} \\ M_{ii}^{kn} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.354)$$

O bien,

$$\left. \begin{aligned} M_{vv}^{kn} &= 0 \\ M_{vi}^{kn} &= -j\omega \int_{\Omega} \mathbf{e}_k \cdot \boldsymbol{\mu} \mathbf{h}_n \times \hat{\mathbf{z}} dS - \frac{1}{j\omega} Z_n^{-1} \gamma_n \gamma_k \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}^{-1} e_{z,n} e_{z,k} dS \\ M_{iv}^{kn} &= j\omega Z_k^2 \int_{\Omega} \mathbf{h}_k \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{e}_n \times \hat{\mathbf{z}} dS - \frac{1}{j\omega} Z_n \gamma_n \gamma_k Z_k^2 \int_{\Omega} \boldsymbol{\mu}^{-1} h_{z,n} h_{z,k} dS \\ M_{ii}^{kn} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.355)$$

Obsérvese que las matrices que relacionan las corrientes o tensiones con ellas mismas M_{vv} y M_{ii} , son nulas para materiales isótropos. Es decir, las derivadas están cruzadas. Las matrices tienen dos términos: los primeros se deben a los acoplos de los campos transversales y los segundos, a través de los campos axiales. Como se trata de un material isótropo, los campos transversales y axiales está desacoplados entre sí, ya que no existe ninguna matriz de acoplo que los relacione. Obsérvese también que la inversión analítica que se hace de

los parámetros constitutivos para obtener las ondas axiales se ve reflejada en este caso particular en la aparición de los parámetros ε^{-1} y μ^{-1} .

A continuación, se va a comprobar la consistencia de la formulación con el caso particular de una guía vacía. En ese caso, el resultado es conocido, porque el resultado ha de ser el de una línea de transmisión sin pérdidas por el que se propagan sus modos característicos.

En las ecuaciones del telegrafista, se hace directamente $\varepsilon=\varepsilon_0$ $\mu=\mu_0$, que se sacan fuera de las integrales al ser constantes en todo el dominio Ω :

$$\left. \begin{aligned} M_{vv}^{kn} &= 0 \\ M_{vi}^{kn} &= -j\omega\mu_0 \int_{\Omega} \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{h}_n \times \hat{\mathbf{z}} \, dS - \frac{1}{j\omega\varepsilon_0} Z_n^{-1} \gamma_n \gamma_k \int_{\Omega} e_{z,n} e_{z,k} \, dS \\ M_{iv}^{kn} &= j\omega\varepsilon_0 Z_k^2 \int_{\Omega} \mathbf{h}_k \cdot \mathbf{e}_n \times \hat{\mathbf{z}} \, dS - \frac{1}{j\omega\mu_0} Z_n \gamma_n \gamma_k Z_k^2 \int_{\Omega} h_{z,n} h_{z,k} \, dS \\ M_{ii}^{kn} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.356)$$

Si se tiene en cuenta que,

$$\int_{\Omega} \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{h}_n \times \hat{\mathbf{z}} \, dS = Z_n^{-1} \int_{\Omega} \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}_n \, dS = Z_n^{-1} \delta_{kn} \quad (2.357)$$

$$\int_{\Omega} \mathbf{h}_k \cdot \mathbf{e}_n \times \hat{\mathbf{z}} \, dS = -Z_n \int_{\Omega} \mathbf{h}_k \cdot \mathbf{h}_n \, dS = -Z_n Z_n^{-2} \delta_{kn} = -Z_n^{-1} \delta_{kn} \quad (2.358)$$

Entonces,

$$\left. \begin{aligned} M_{vv}^{kn} &= 0 \\ M_{vi}^{kn} &= -j\omega\mu_0 Z_n^{-1} \delta_{kn} - \frac{1}{j\omega\varepsilon_0} Z_n^{-1} \gamma_n \gamma_k \int_{\Omega} e_{z,n} e_{z,k} \, dS \\ M_{iv}^{kn} &= -j\omega\varepsilon_0 Z_k^2 Z_n^{-1} \delta_{kn} - \frac{1}{j\omega\mu_0} Z_n \gamma_n \gamma_k Z_k^2 \int_{\Omega} h_{z,n} h_{z,k} \, dS \\ M_{ii}^{kn} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.359)$$

Para seguir simplificando, hay que dar una expresión explícita de las impedancias. Para ello, se divide en modos TE y TM. En el caso TE:

$$Z_k = \frac{j\omega\mu_0}{\gamma_k} \quad (2.360)$$

Además, los modos TE no tienen E_z , de forma que $e_{z,k}=0$.

Aparte, se tiene en cuenta la relación de ortogonalidad

$$\int_{\Omega} h_{z,n} h_{z,k} \, dS = \left(\frac{k_{c,k}}{Z_k \gamma_k} \right)^2 \delta_{nk} \quad (2.361)$$

Por tanto,

$$\left. \begin{aligned}
 M_{vv}^{kn} &= 0 \\
 M_{vi}^{kn} &= -j\omega\mu_0 \left(\frac{j\omega\mu_0}{\gamma_k} \right)^{-1} \delta_{kn} = -\gamma_k \delta_{kn} \\
 M_{iv}^{kn} &= -j\omega\varepsilon_0 Z_k^2 Z_n^{-1} \delta_{kn} - \frac{1}{j\omega\mu_0} Z_n \gamma_n \gamma_k Z_k^2 \left(\frac{k_{c,k}}{Z_k \gamma_k} \right)^2 \delta_{nk} = \\
 &= -j\omega\varepsilon_0 \frac{j\omega\mu_0}{\gamma_k} \delta_{kn} - \frac{1}{j\omega\mu_0} \frac{j\omega\mu_0}{\gamma_k} k_{c,k}^2 \delta_{nk} = \\
 &= \frac{\omega^2 \varepsilon_0 \mu_0}{\gamma_k} \delta_{kn} - \frac{k_{c,k}^2}{\gamma_k} \delta_{nk} = -\frac{-\omega^2 \varepsilon_0 \mu_0 + k_{c,k}^2}{\gamma_k} \delta_{kn} = \\
 &= -\frac{\gamma_k^2}{\gamma_k} \delta_{kn} = -\gamma_k \delta_{kn} \\
 M_{ii}^{kn} &= 0
 \end{aligned} \right\} \quad (2.362)$$

Por otro lado, para los modos TM:

$$Z_k = \frac{\gamma_k}{j\omega\varepsilon_0} \quad (2.363)$$

Además, los modos TM no tienen H_z , de forma que $h_{z,k}=0$.

Aparte, se tiene en cuenta la relación de ortogonalidad

$$\int_{\Omega} e_{z,n} e_{z,k} dS = \left(\frac{k_{c,k}}{\gamma_k} \right)^2 \delta_{nk} \quad (2.364)$$

Por lo que

$$\left. \begin{aligned}
 M_{vv}^{kn} &= 0 \\
 M_{vi}^{kn} &= -j\omega\mu_0 Z_n^{-1} \delta_{kn} - \frac{1}{j\omega\varepsilon_0} Z_n^{-1} \gamma_n \gamma_k \left(\frac{k_{c,k}}{\gamma_k} \right)^2 \delta_{nk} = \\
 &= -j\omega\mu_0 Z_n^{-1} \delta_{kn} - \frac{1}{j\omega\varepsilon_0} Z_n^{-1} k_{c,k}^2 \delta_{nk} = \\
 &= -j\omega\mu_0 \left(\frac{\gamma_k}{j\omega\varepsilon_0} \right)^{-1} \delta_{kn} - \frac{1}{j\omega\varepsilon_0} \left(\frac{\gamma_k}{j\omega\varepsilon_0} \right)^{-1} k_{c,k}^2 \delta_{nk} = \\
 &= \frac{\omega^2 \varepsilon_0 \mu_0}{\gamma_k} \delta_{kn} - \frac{k_{c,k}^2}{\gamma_k} \delta_{kn} = -\frac{k_{c,k}^2 - \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0}{\gamma_k} \delta_{kn} = \\
 &= -\frac{\gamma_k^2}{\gamma_k} \delta_{kn} = -\gamma_k \delta_{kn} \\
 M_{iv}^{kn} &= -j\omega\varepsilon_0 Z_k^2 Z_n^{-1} \delta_{kn} = -j\omega\varepsilon_0 Z_k \delta_{kn} = \\
 &= -j\omega\varepsilon_0 \frac{\gamma_k}{j\omega\varepsilon_0} \delta_{kn} = -\gamma_k \delta_{kn} \\
 M_{ii}^{kn} &= 0
 \end{aligned} \right\} \quad (2.365)$$

Por tanto, los resultados obtenidos son consistentes con lo esperado a partir de la teoría.

2.4.3.2. Formulación indirecta

Para particularizar la formulación indirecta para el caso de un material isótropo, se retrocede en la formulación hasta la definición de las matrices de acoplo:

$$M_{\varepsilon_{zt}}^{kn} = 0 \quad (2.366)$$

$$M_{\xi_{zt}}^{kn} = 0 \quad (2.367)$$

$$M_{\xi_{zz}}^{kn} = 0 \quad (2.368)$$

$$V_{\xi_{zz}}^k = 0 \quad (2.369)$$

$$M_{\varepsilon_{zz}}^{kn} = \int_{\Omega} \varepsilon e_{z,k} e_{z,n} dS \quad (2.370)$$

$$M_{\mu_{zt}}^{kn} = 0 \quad (2.371)$$

$$M_{\eta_{zt}}^{kn} = 0 \quad (2.372)$$

$$M_{\eta_{zz}}^{kn} = 0 \quad (2.373)$$

$$M_{\mu_{zz}}^{kn} = \int_{\Omega} \mu h_{z,k} h_{z,n} dS \quad (2.374)$$

$$V_{\mu_{zz}}^k = \int_{\Omega} \mu h_{z,k} dS \quad (2.375)$$

$$V_{\mu_{zt}}^n = 0 \quad (2.376)$$

$$V_{\mu_{zz}}^{kn} = \int_{\Omega} \mu h_{z,n} dS \quad (2.377)$$

$$\theta = \int_{\Omega} \mu_{zz} dS \quad (2.378)$$

$$V_{\eta_{zt}}^n = 0 \quad (2.379)$$

$$V_{\eta_{zz}}^n = 0 \quad (2.380)$$

$$P_{\xi_{zt}} = \frac{1}{j\omega} Z^{-1} \Gamma^{-1} K_c^2 \quad (2.381)$$

$$P_{\varepsilon_{zt}} = 0 \quad (2.382)$$

$$P_{\xi_{zz}} = 0 \quad (2.383)$$

$$P_{\varepsilon_{zz}} = M_{\varepsilon_{zz}} \quad (2.384)$$

$$P_{\eta_{zt}} = \frac{1}{j\omega} Z^{-1} \Gamma^{-1} K_c^2 \quad (2.385)$$

$$P_{\mu_{zt}} = 0 \quad (2.386)$$

$$P_{\mu_{zz}} = M_{\mu_{zz}} - \frac{1}{\theta} \mathbf{V}_{\mu_{zz}} \mathbf{V}_{\mu_{zz}}^t \quad (2.387)$$

$$P_{\eta_{zz}} = 0 \quad (2.388)$$

$$Q_{\varepsilon_{zt}} = 0 \quad (2.389)$$

$$Q_{\xi_{zt}} = P_{\varepsilon_{zz}}^{-1} P_{\xi_{zt}} \quad (2.390)$$

$$Q_{\eta_{zt}} = P_{\mu_{zz}}^{-1} P_{\eta_{zt}} \quad (2.391)$$

$$Q_{\mu_{zt}} = 0 \quad (2.392)$$

$$R_{\eta_{zt}} = -\frac{1}{\theta} \mathbf{V}_{\mu_{zz}}^t Q_{\eta_{zt}} \quad (2.393)$$

$$R_{\mu_{zt}} = 0 \quad (2.394)$$

$$M_{\mu_{tt}}^{kn} = \int_{\Omega} \mathbf{e}_k \cdot \mu \mathbf{h}_n \times \mathbf{z} dS \quad (2.395)$$

$$M_{\mu_{tz}}^{kn} = 0 \quad (2.396)$$

$$V_{\mu_{tz}}^k = 0 \quad (2.397)$$

$$M_{\eta_{tt}}^{kn} = 0 \quad (2.398)$$

$$M_{\eta_{tz}}^{kn} = 0 \quad (2.399)$$

$$M_{\varepsilon_{tt}}^{kn} = \int_S \mathbf{h}_k \cdot \varepsilon \mathbf{e}_n \times \mathbf{z} dS \quad (2.400)$$

$$M_{\varepsilon_{tz}}^{kn} = 0 \quad (2.401)$$

$$M_{\xi_{tt}}^{kn} = 0 \quad (2.402)$$

$$M_{\xi_{tz}}^{kn} = 0 \quad (2.403)$$

$$V_{\xi_{tz}}^k = 0 \quad (2.404)$$

Por tanto, las matrices de las ecuaciones del telegrafista tienen la forma

$$\left. \begin{aligned} M_{vv} &= 0 \\ M_{vi} &= -j\omega \left(M_{\mu_{tt}} + \frac{1}{j\omega} K_c^2 \Gamma^{-1} P^{-1} P_{\varepsilon_{zz}} \xi_{zt} \right) \\ M_{iv} &= j\omega Z^2 \left(M_{\varepsilon_{tt}} - \frac{1}{j\omega} Z^{-2} K_c^2 \Gamma^{-1} Q_{\eta_{zt}} \right) \\ M_{ii} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.405)$$

O bien, poniendo de forma explícita las integrales de acoplo:

$$\left. \begin{aligned} M_{vv} &= 0 \\ M_{vi} &= M_{vi}^{kn} = -j\omega \left(\int_{\Omega} \mathbf{e}_k \cdot \boldsymbol{\mu} \mathbf{h}_n \times \hat{\mathbf{z}} \, dS + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{j\omega} k_{c,k}^2 \gamma_k^{-1} \left(\int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{e}_{z,k} \mathbf{e}_{z,n} \, dS \right)^{-1} \frac{1}{j\omega} Z_n^{-1} \gamma_n^{-1} k_{c,n}^2 \right) = \\ &= \left(-j\omega \int_{\Omega} \mathbf{e}_k \cdot \boldsymbol{\mu} \mathbf{h}_n \times \hat{\mathbf{z}} \, dS - \frac{1}{j\omega} k_{c,k}^2 \gamma_k^{-1} \left(\int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{e}_{z,k} \mathbf{e}_{z,n} \, dS \right)^{-1} Z_n^{-1} \gamma_n^{-1} k_{c,n}^2 \right) \\ M_{iv} &= M_{iv}^{kn} = j\omega Z_k^2 \left(\int_S \mathbf{h}_k \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{e}_n \times \hat{\mathbf{z}} \, dS - \frac{1}{j\omega} Z_k^{-2} k_{c,k}^2 \gamma_k^{-1} \cdot \right. \\ &\quad \left. \left(\int_{\Omega} \boldsymbol{\mu} h_{z,k} h_{z,n} \, dS - \left(-\frac{1}{\theta} \int_{\Omega} \boldsymbol{\mu} h_{z,k} \, dS \int_{\Omega} \boldsymbol{\mu} h_{z,n} \, dS \right) \right)^{-1} \frac{1}{j\omega} Z_n^{-1} \gamma_n^{-1} k_{c,n}^2 \right) = \\ &= \left(j\omega Z_k^2 \int_S \mathbf{h}_k \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{e}_n \times \hat{\mathbf{z}} \, dS - \frac{1}{j\omega} k_{c,k}^2 \gamma_k^{-1} \cdot \right. \\ &\quad \left. \left(\int_{\Omega} \boldsymbol{\mu} h_{z,k} h_{z,n} \, dS - \frac{1}{\theta} \int_{\Omega} \boldsymbol{\mu} h_{z,k} \, dS \int_{\Omega} \boldsymbol{\mu} h_{z,n} \, dS \right)^{-1} Z_n^{-1} \gamma_n^{-1} k_{c,n}^2 \right) \\ M_{ii} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.406)$$

Son varios aspectos los que interesa destacar: por un lado, las matrices M_{vv} y M_{ii} , son nulas para materiales isótropos también en este caso. En esta formulación aparece un tercer término en cada matriz: se trata de la contribución del campo H_0 , que se ve que depende de la permeabilidad. Por otro lado, la inversión necesaria para calcular las magnitudes axiales en función de las transversales no viene dada por la inversión analítica de los parámetros ε y μ , sino por la inversión de las matrices que implican a estos. Es decir, la

formulación directa se basa en inversión analítica, y la indirecta, en inversión numérica.

En este caso, se va a comprobar también la consistencia de la formulación con el caso particular de una guía vacía. En las ecuaciones del telegrafista, se hace directamente $\varepsilon=\varepsilon_0$ $\mu=\mu_0$, que se sacan fuera de las integrales al ser constantes en todo el dominio Ω :

$$\left. \begin{aligned} M_{vv}^{kn} &= 0 \\ M_{vi}^{kn} &= -j\omega\mu_0 \int_{\Omega} \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{h}_n \times \hat{\mathbf{z}} dS - \frac{1}{j\omega} k_{c,k}^2 \gamma_k^{-1} \left(\int_{\Omega} \varepsilon e_{z,k} e_{z,n} dS \right)^{-1} Z_n^{-1} \gamma_n^{-1} k_{c,n}^2 \\ M_{iv}^{kn} &= \left\{ \begin{aligned} j\omega\varepsilon_0 Z_k^2 \int_S \mathbf{h}_k \cdot \mathbf{e}_n \times \hat{\mathbf{z}} dS - \frac{1}{j\omega} k_{c,k}^2 \gamma_k^{-1} \cdot \\ \cdot \left(\mu_0 \int_{\Omega} h_{z,k} h_{z,n} dS - \frac{1}{\theta} \mu_0 \int_{\Omega} h_{z,k} dS \mu_0 \int_{\Omega} h_{z,n} dS \right)^{-1} Z_n^{-1} \gamma_n^{-1} k_{c,n}^2 \end{aligned} \right\} \\ M_{ii}^{kn} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.407)$$

Al igual que en el caso anterior, se tiene que

$$\int_{\Omega} \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{h}_n \times \hat{\mathbf{z}} dS = Z_n^{-1} \int_{\Omega} \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}_n dS = Z_n^{-1} \delta_{kn} \quad (2.408)$$

$$\int_{\Omega} \mathbf{h}_k \cdot \mathbf{e}_n \times \hat{\mathbf{z}} dS = -Z_n \int_{\Omega} \mathbf{h}_k \cdot \mathbf{h}_n dS = -Z_n Z_n^{-2} \delta_{kn} = -Z_n^{-1} \delta_{kn} \quad (2.409)$$

Además, hay que tener en cuenta que

$$\int_{\Omega} h_{z,n} dS = 0 \quad (2.410)$$

Por tanto,

$$\left. \begin{aligned} M_{vv}^{kn} &= 0 \\ M_{vi}^{kn} &= -j\omega\mu_0 Z_n^{-1} \delta_{kn} - \frac{1}{j\omega\varepsilon_0} k_{c,k}^2 \gamma_k^{-1} \left(\int_{\Omega} \varepsilon e_{z,k} e_{z,n} dS \right)^{-1} Z_n^{-1} \gamma_n^{-1} k_{c,n}^2 \\ M_{iv}^{kn} &= -j\omega\varepsilon_0 Z_k^2 Z_n^{-1} \delta_{kn} - \frac{1}{j\omega\mu_0} k_{c,k}^2 \gamma_k^{-1} \cdot \left(\int_{\Omega} h_{z,k} h_{z,n} dS \right)^{-1} Z_n^{-1} \gamma_n^{-1} k_{c,n}^2 \\ M_{ii}^{kn} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.411)$$

Al igual que en el caso anterior, se distingue en este momento entre modos TE y TM para poder tener expresiones de las impedancias. En el caso TE:

$$Z_k = \frac{j\omega\mu_0}{\gamma_k} \quad (2.412)$$

Además, los modos TE no tienen E_z , de forma que $e_{z,k}=0$.

Aparte, se tiene en cuenta la relación de ortogonalidad

$$\int_{\Omega} h_{z,n} h_{z,k} dS = \left(\frac{k_{c,k}}{Z_k \gamma_k} \right)^2 \delta_{nk} \quad (2.413)$$

Por tanto,

$$\left. \begin{aligned}
 M_{vv}^{kn} &= 0 \\
 M_{vi}^{kn} &= -j\omega\mu_0 Z_n^{-1} \delta_{kn} = -j\omega\mu_0 \left(\frac{j\omega\mu_0}{\gamma_k} \right)^{-1} \delta_{kn} = \gamma_k \delta_{kn} \\
 M_{iv}^{kn} &= -j\omega\varepsilon_0 Z_k^2 Z_n^{-1} \delta_{kn} - \frac{1}{j\omega\mu_0} k_{c,k}^2 \gamma_k^{-1} \cdot \left(\left(\frac{k_{c,k}}{Z_k \gamma_k} \right)^2 \delta_{nk} \right)^{-1} Z_n^{-1} \gamma_n^{-1} k_{c,n}^2 = \\
 &= -j\omega\varepsilon_0 Z_k \delta_{kn} - \frac{1}{j\omega\mu_0} Z_k k_{c,n}^2 \delta_{nk} = -j\omega\varepsilon_0 \frac{j\omega\mu_0}{\gamma_k} \delta_{kn} - \frac{1}{j\omega\mu_0} \frac{j\omega\mu_0}{\gamma_k} k_{c,n}^2 \delta_{nk} = \\
 &= \frac{\omega^2 \varepsilon_0 \mu_0}{\gamma_k} \delta_{kn} - \frac{k_{c,n}^2}{\gamma_k} \delta_{nk} = -\frac{k_{c,n}^2 - \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0}{\gamma_k} \delta_{kn} = -\frac{\gamma_n^2}{\gamma_k} \delta_{kn} = -\gamma_k \delta_{kn} \\
 M_{ii}^{kn} &= 0
 \end{aligned} \right\} (2.414)$$

Por otro lado, para los modos TM:

$$Z_k = \frac{\gamma_k}{j\omega\varepsilon_0} \quad (2.415)$$

Además, los modos TM no tienen H_z , de forma que $h_{z,k}=0$.

Aparte, se tiene en cuenta la relación de ortogonalidad

$$\int_{\Omega} e_{z,n} e_{z,k} dS = \left(\frac{k_{c,k}}{\gamma_k} \right)^2 \delta_{nk} \quad (2.416)$$

Por lo que

$$\left. \begin{aligned}
 M_{vv}^{kn} &= 0 \\
 M_{vi}^{kn} &= -j\omega\mu_0 Z_n^{-1} \delta_{kn} - \frac{1}{j\omega\varepsilon_0} k_{c,k}^2 \gamma_k^{-1} \left(\left(\frac{k_{c,k}}{\gamma_k} \right)^2 \delta_{nk} \right)^{-1} Z_n^{-1} \gamma_n^{-1} k_{c,n}^2 = \\
 &= -j\omega\mu_0 \left(\frac{\gamma_k}{j\omega\varepsilon_0} \right)^{-1} \delta_{kn} - \frac{1}{j\omega\varepsilon_0} \left(\frac{\gamma_k}{j\omega\varepsilon_0} \right)^{-1} k_{c,n}^2 \delta_{nk} = \\
 &= \frac{\omega^2 \varepsilon_0 \mu_0}{\gamma_k} \delta_{kn} - \frac{k_{c,n}^2}{\gamma_k} \delta_{nk} = -\frac{k_{c,n}^2 - \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0}{\gamma_k} \delta_{kn} = -\frac{\gamma_n^2}{\gamma_k} \delta_{kn} - \gamma_k \delta_{kn} \\
 M_{iv}^{kn} &= -j\omega\varepsilon_0 Z_k^2 Z_n^{-1} \delta_{kn} = -j\omega\varepsilon_0 Z_k \delta_{kn} = -j\omega\varepsilon_0 \frac{\gamma_k}{j\omega\varepsilon_0} \delta_{kn} = -\gamma_k \delta_{kn} \\
 M_{ii}^{kn} &= 0
 \end{aligned} \right\} (2.417)$$

Se comprueba que la formulación indirecta también es consistente con lo esperado teóricamente en el caso de una guía vacía.

2.4.3.3. Formulación restringida

Como en los casos precedentes, se retrocede en la formulación para poder particularizar los parámetros que intervienen al caso isótropo.

$$\begin{aligned}\mu_a &= 0 \\ \mu_b &= \mu \\ \mu_c &= \frac{1}{\mu} \\ \mu_d &= 0\end{aligned}\tag{2.418}$$

$$M_{\mu_a}^{kn} = 0\tag{2.419}$$

$$M_{\mu_b}^{kn} = \int_{\Omega} \mu h_{z,n} h_{z,k} dS\tag{2.420}$$

$$V_{\mu_b}^k = \int_{\Omega} \mu h_{z,k} dS\tag{2.421}$$

$$M_{\mu_c}^{kn} = \int_{\Omega} \mu^{-1} h_{x,n} h_{x,k} dS\tag{2.422}$$

$$M_{\mu_d}^{kn} = 0\tag{2.423}$$

$$V_{\mu_d}^k = 0\tag{2.424}$$

$$V_{\mu_a}^k = 0\tag{2.425}$$

$$\theta = \int_{\Omega} \mu dS\tag{2.426}$$

$$M_{\varepsilon}^{kn} = \int_{\Omega} \varepsilon e_{y,k} e_{y,n} dS\tag{2.427}$$

Se despeja el valor de H_0 :

$$H_0 = -\frac{1}{\theta} \mathbf{V}_{\mu_b}^t \mathbf{i}_z\tag{2.428}$$

Para simplificar la notación, se definen las matrices

$$P_{\mu_a} = 0\tag{2.429}$$

$$P_{\mu_b} = M_{\mu_b} - \frac{1}{\theta} \mathbf{V}_{\mu_b} \mathbf{V}_{\mu_b}^t\tag{2.430}$$

$$P_{\mu_c} = M_{\mu_c}\tag{2.431}$$

$$P_{\mu_d} = 0\tag{2.432}$$

Por tanto,

$$Q_{\mu_b} = \frac{1}{j\omega} P_{\mu_b}^{-1} K_c^2 Z^{-1} \Gamma^{-1}$$

$$Q_{\mu_c} = \mu_0^{-1} P_{\mu_c}^{-1} Z^{-2}\tag{2.433}$$

Desarrollo teórico

$$M_{vv}^{kn} = 0$$

$$M_{vi}^{kn} = -\gamma_k \mu_0^{-1} \left(\int_{\Omega} \mu^{-1} h_{x,n} h_{x,k} dS \right)^{-1} Z_n^{-2}$$

$$M_{iv}^{kn} = -k_{c,k}^2 \gamma_k^{-1} \frac{1}{j\omega} \left(\int_{\Omega} \mu h_{z,n} h_{z,k} dS - \frac{1}{\theta} \int_{\Omega} \mu h_{z,k} dS \int_{\Omega} \mu h_{z,n} dS \right)^{-1} k_{c,n}^2 Z_n^{-1} \gamma_n^{-1} - (2.434)$$

$$- j\omega Z_n \int_{\Omega} \varepsilon e_{y,k} e_{y,n} dS$$

$$M_{ii}^{kn} = 0$$

Al igual que en las otras dos formulaciones, M_{vv} y M_{ii} , son nulas. También aparece aquí el efecto de H_0 . En cuanto al tratamiento que se da a las variables, la formulación restringida, al recolocar las relaciones constitutivas, tiene un comportamiento mixto respecto de la directa e indirecta, en el sentido que existe inversión analítica y numérica.

Al igual que en las otras dos formulaciones, se va a comprobar analíticamente que, cuando se analiza una guía vacía, los modos están desacoplados, y que las matrices M_{vi} y M_{iv} , son diagonales e iguales al valor opuesto de la constante de propagación de cada modo.

En las ecuaciones del telegrafista, se hace directamente $\varepsilon = \varepsilon_0$ $\mu = \mu_0$, que se sacan fuera de las integrales al ser constantes en todo el dominio Ω .

Por otro lado, se tiene que, como solamente se manejan modos TE:

$$Z_k = \frac{j\omega\mu_0}{\gamma_k}$$

Aparte, se tienen en cuenta las relaciones de ortogonalidad

$$\int_{\Omega} h_{z,n} h_{z,k} dS = \left(\frac{k_{c,k}}{Z_k \gamma_k} \right)^2 \delta_{nk} \quad (2.435)$$

$$\int_{\Omega} h_{x,n} h_{x,k} dS = Z_k^{-2} \delta_{nk} \quad (2.436)$$

$$\int_{\Omega} e_{y,n} e_{y,k} dS = \delta_{nk} \quad (2.437)$$

Y también, que

$$\int_{\Omega} h_{z,n} dS = 0$$

Por tanto,

$$M_{vv}^{kn} = 0$$

$$M_{vi}^{kn} = -\gamma_k (Z_k^{-2} \delta_{nk})^{-1} Z_n^{-2} = -\gamma_k \delta_{nk}$$

$$\begin{aligned} M_{iv}^{kn} &= -k_{c,k}^2 \gamma_k^{-1} \frac{1}{j\omega\mu_0} \left(\left(\frac{k_{c,k}}{Z_k \gamma_k} \right)^2 \delta_{nk} \right)^{-1} k_{c,n}^2 Z_n^{-1} \gamma_n^{-1} - j\omega\epsilon_0 Z_n \int_{\Omega} e_{y,k} e_{y,n} dS = \\ &= -\frac{1}{j\omega\mu_0} k_{c,n}^2 Z_k \delta_{nk} - j\omega\epsilon_0 Z_n \delta_{nk} = -\frac{1}{j\omega\mu_0} k_{c,n}^2 \frac{j\omega\mu_0}{\gamma_k} \delta_{nk} - j\omega\epsilon_0 \frac{j\omega\mu_0}{\gamma_k} \delta_{nk} = \\ &= -\frac{k_{c,n}^2}{\gamma_k} \delta_{nk} + \frac{\omega^2 \epsilon_0 \mu_0}{\gamma_k} \delta_{nk} = \frac{-k_{c,n}^2 + \omega^2 \epsilon_0 \mu_0}{\gamma_k} \delta_{nk} = \frac{-\gamma_k^2}{\gamma_k} \delta_{nk} = \gamma_k \delta_{nk} \end{aligned}$$

$$M_{ii}^{kn} = 0$$

La formulación restringida también es consiente en este sentido.

2.4.4. Validaciones

Los materiales bianisótropos son el caso más general de material lineal. Se van a presentar resultados para varios de los casos particulares de materiales: isotrópos, anisótropos, quirales y bianisótropos. En todos aquellos casos donde sea posible, se acompañarán estos resultados de los recogidos en la bibliografía o de los procedentes de simuladores comerciales, para poder evaluar correctamente las prestaciones del método.

La Fig. 2.15 muestra una guía de onda rectangular axb en la que se tiene un material rectangular de dimensiones a_sxb_sxc , desplazado de las paredes de la guía unas distancias x_s e y_s en x e y , respectivamente. Una parte importante de las guías de onda parcialmente rellenas que se describen en la bibliografía constan de materiales que rellenan totalmente la dimensión vertical (y). Si se considera incidencia con el modo TE_{10} y el material que rellena la guía es isotrópo o anisótropo magnético, como una ferrita, solamente son necesarios los modos TE_{m0} para describir los campos en la guía, lo que supone un ahorro de carga computacional muy importante. Si además de esto, el material es simplemente un dieléctrico, las formulaciones directa, indirecta y restringida coinciden –sólo en este caso–, lo que se puede comprobar observando las ecuaciones correspondientes. En casos de materiales quirales, anisótropos eléctricos o bianisótropos generales, los modos TE_{m0} no son suficientes a pesar de la incidencia con el TE_{10} . Observando las relaciones constitutivas (2.156), se puede comprobar que, en estos casos, el TE_{10} es capaz de excitar la componente E_z , con lo que hay que emplear todo el conjunto TE_{mn} y TM_{mn} .

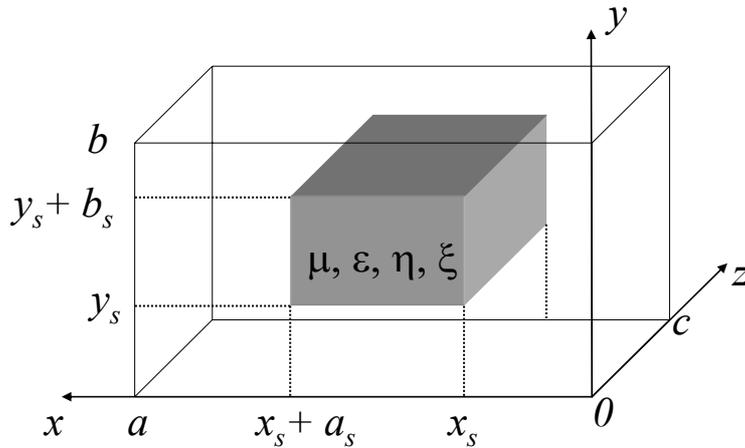


Fig. 2.15. Material bianisótropo general, de tamaño a_sxb_sxc situado en el interior de una guía rectangular axb , en la posición (x_s, y_s) .

En todos los ejemplos de validación, las guías rectangulares que se van a emplear tienen tamaños estándar, donde la altura mide la mitad que la anchura –salvo en la WR-90, pero por muy poco–, es decir, la relación de aspecto es $h=2$.

La Fig. 2.16 representa el tiempo de cálculo de la rutina de resolución del problema de valor propio, a cada frecuencia, del CMM, cuando se usa todo el juego de modos TE y TM. El resto de pasos del programa tienen tiempos de cálculo varias órdenes de magnitud por debajo, por lo que se puede considerar prácticamente como el tiempo total. Para un k_c dado, se puede obtener el número de modos total con (2.116). Este dato es importante, ya que el tiempo de cálculo depende del tamaño del sistema, $2N$, y no de k_c .

Se observa la importancia de obtener resultados precisos con un k_c bajo, ya que el tiempo de cálculo aumenta rápidamente. En los ejemplos que se van a proporcionar a continuación, se va poner de manifiesto que, dada una precisión exigida, con la formulación indirecta son necesarios menos modos. En los ejemplos donde solamente son necesarios el juego TE_{m0} , el número de modos es directamente $N=k_c$, al contrario que (2.116), donde la relación es cuadrática. Esto implica que, para una precisión dada, el número de modos es muy bajo, y el tiempo de cálculo es muy inferior al dado por otros métodos. Por ello, no se establecerán comparaciones en estos casos.

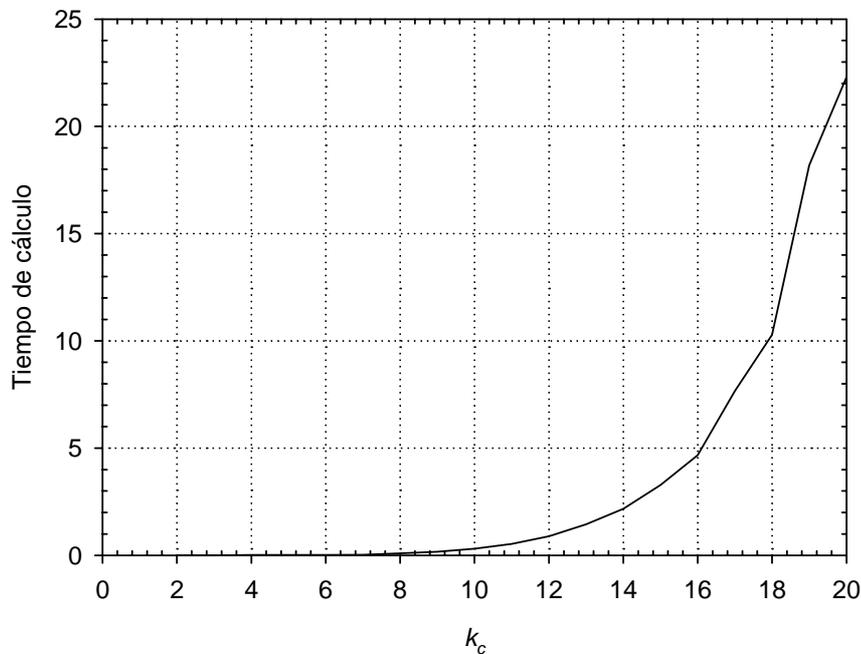


Fig. 2.16. Tiempo de cálculo del CMM para cada frecuencia en función de k_c

2.4.4.1. Materiales isótropos

Un medio isótropo tiene los parámetros constitutivos siguientes:

$$\left. \begin{array}{l} \varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r I \\ \mu = \mu_0 \mu_r I \\ \eta = 0 \\ \xi = 0 \end{array} \right\}, \quad (2.438)$$

donde I es la matriz identidad.

Por tanto, el material viene caracterizado completamente por los valores ε_r (permitividad relativa) y μ_r (permeabilidad relativa).

Se considera una guía rectangular con $a=2b$, parcialmente rellena con un material isótropo de dimensiones $a_s=0.888b$, $b_s=0.399b$, y $c=1.4b$, centrado en x , $x_s=(a-a_s)/2$, y en la cara inferior, $y_s=0$, a la frecuencia normalizada $k_0b=2$ ([99] Figs. 6, 7).

Dada esta simetría en x , suponiendo que se quieren obtener resultados del modo TE_{10} , dan la posibilidad de rechazar todos los modos TE_{mnm} y TM_{mnm} con m impar, que son la mitad de todos ellos, lo que supone un ahorro de cálculo importante.

La Fig. 2.17 muestra la convergencia de la constante de propagación del modo fundamental β , normalizada al número de onda en el vacío, k_0 , del caso descrito, para varios valores de los parámetros constitutivos, no magnéticos, magnéticos, sin pérdidas y con pérdidas, en función de k_c . Se aprecia una convergencia sensiblemente mejor de la formulación indirecta. Ello implica que es posible llegar a resultados precisos con un menor número de modos, o bien, que el mismo número de modos proporciona mejores resultados.

Se observa también que ambas formulaciones parecen converger a valores muy distintos cuando el número de modos es muy grande. Esto no debe extrañar si se tiene en cuenta que son formulaciones diferentes que tratan las componentes de campo de forma diferente. Por tanto, podría caber la pregunta de cuál de ellas es la correcta. La respuesta se obtiene comparando los resultados de parámetros S con los procedentes de otras técnicas de simulación.

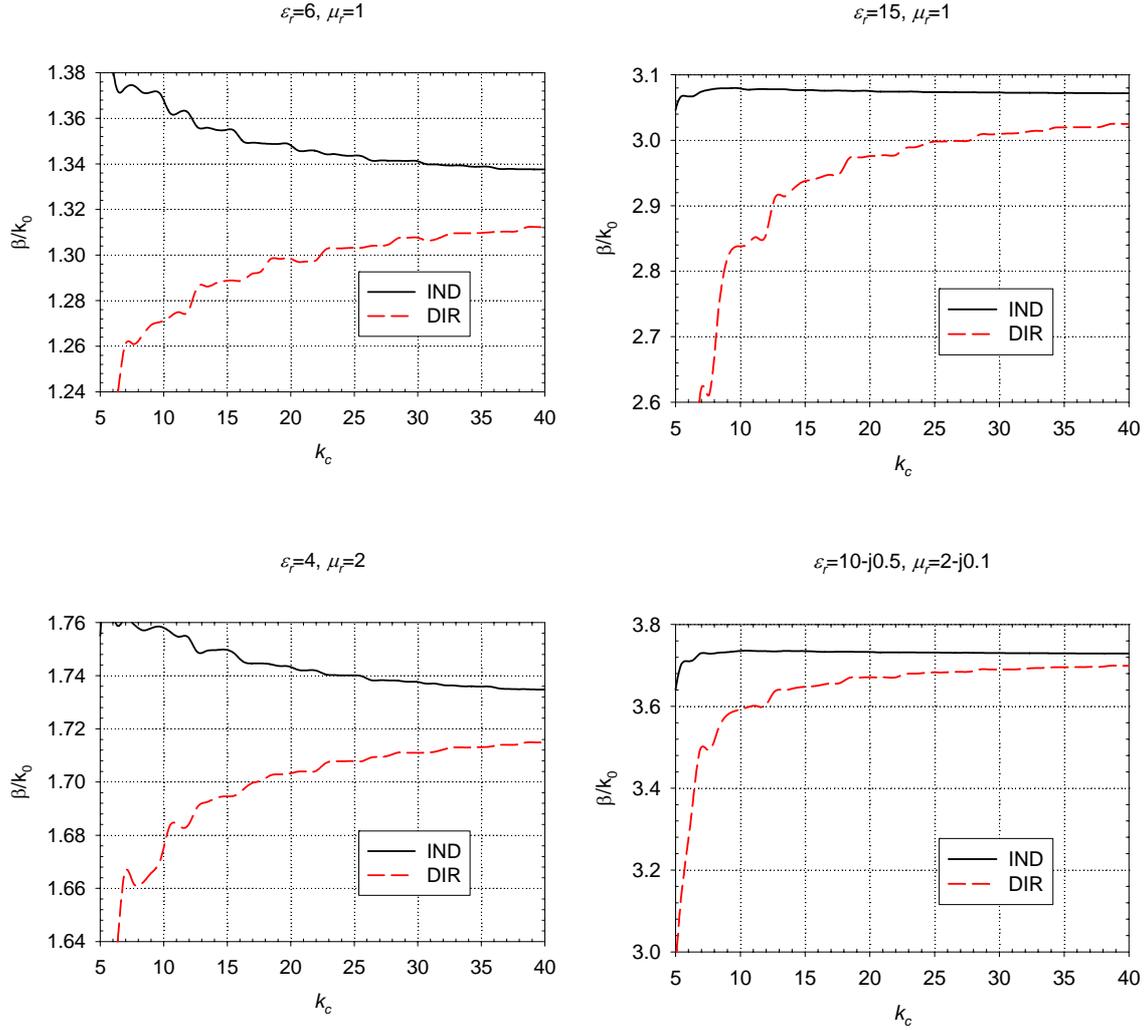


Fig. 2.17. Convergencia de la constante de propagación del modo fundamental para un material isótropo, $a=2b$, $a_s=0.888b$, $b_s=0.399b$, $x_s=(a-a_s)/2$, $y_s=0$. Diferentes valores de los parámetros constitutivos. IND se refiere a la estrategia indirecta, y DIR a la directa.

Las Figs. 2.18-2.21 comparan los resultados de parámetros S con los proporcionados por HFSS, entre el rango de frecuencias normalizadas 1.6 y 2.6. Se comprueba que, para un valor de $k_c=10$, los resultados de la formulación indirecta ya han convergido casi o totalmente, mientras que los de la formulación directa distan bastante de ser los correctos. Cuando se pasa a $k_c=20$, los resultados de la formulación indirecta apenas han variado, mientras que los de la directa se acercan más a los resultados de HFSS, pero sin llegar al grado de exactitud de la formulación indirecta.

Los tiempos de cálculo para HFSS por frecuencia son aproximadamente entre 4.5 s y 5 s por punto de frecuencia, claramente superiores a los 0.3 s de $k_c=10$, según la Fig. 2.16.

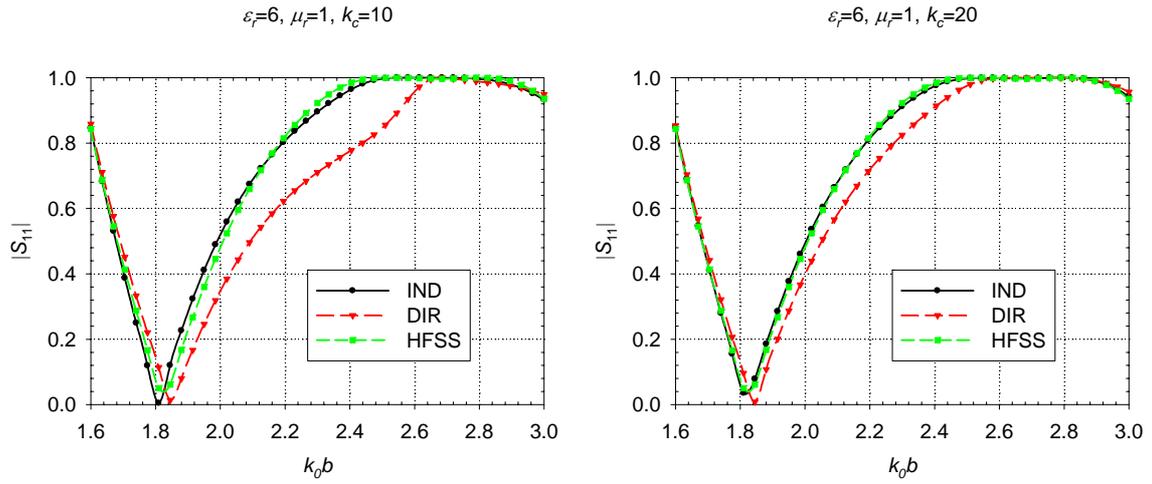


Fig. 2.18. Módulo de S_{11} , $a=2b$, $a_s=0.888b$, $b_s=0.399b$, $x_s=(a-a_s)/2$, $y_s=0$, $\epsilon_r=6$, $\mu_r=1$.

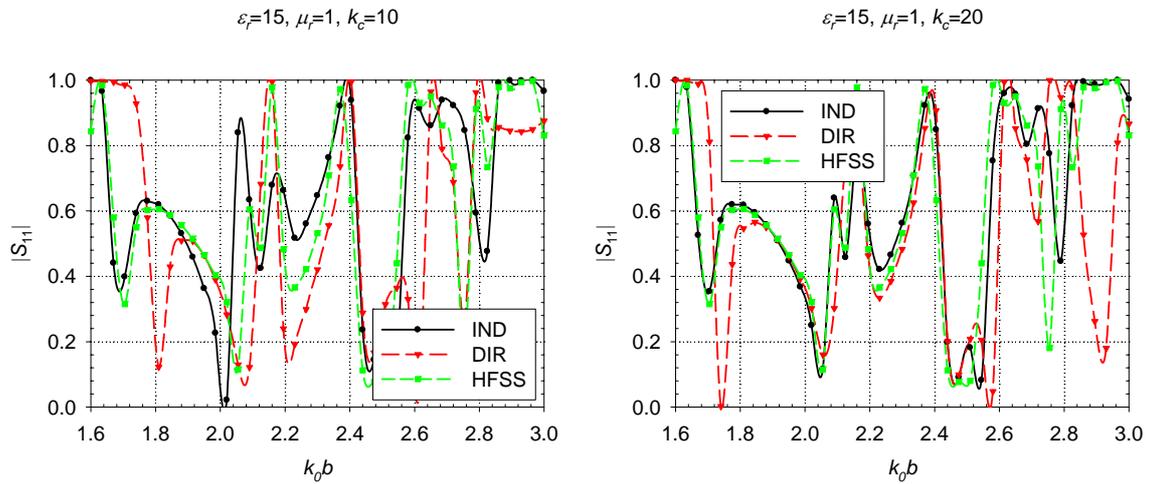


Fig. 2.19. Módulo de S_{11} , $a=2b$, $a_s=0.888b$, $b_s=0.399b$, $x_s=(a-a_s)/2$, $y_s=0$, $\epsilon_r=15$, $\mu_r=1$.

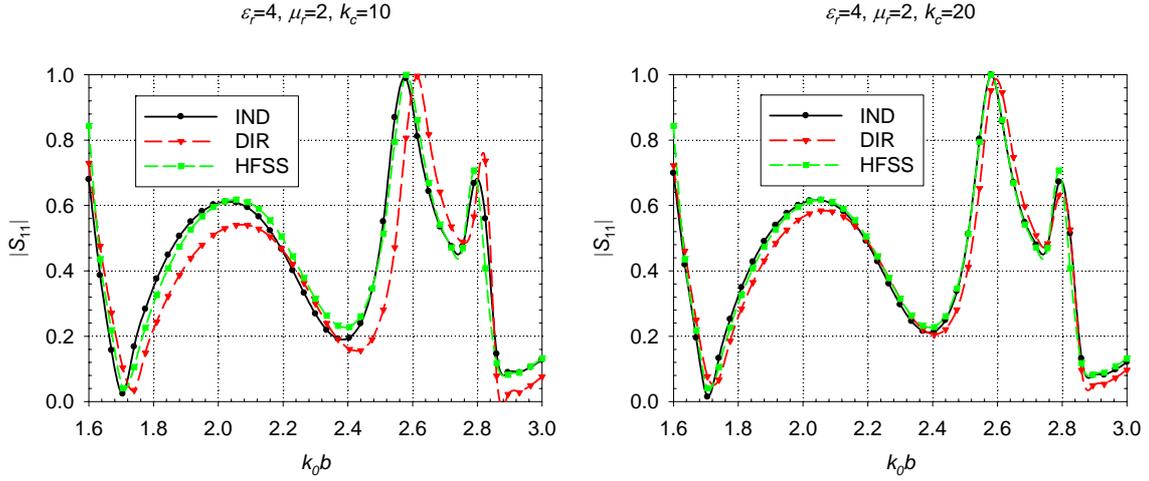


Fig. 2.20. Módulo de S_{11} , $a=2b$, $a_s=0.888b$, $b_s=0.399b$, $x_s=(a-a_s)/2$, $y_s=0$, $\epsilon_r=4$, $\mu_r=2$.

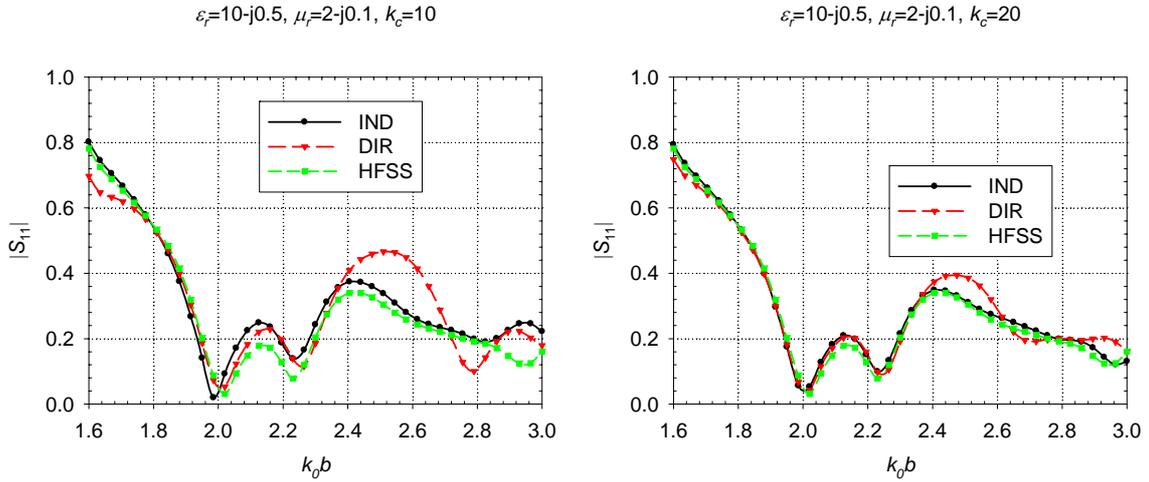
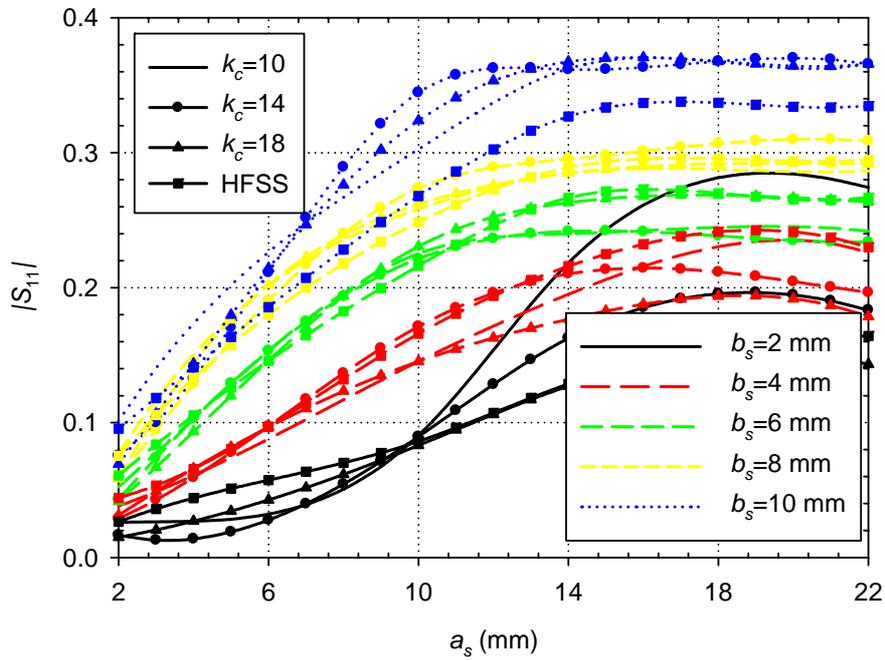


Fig. 2.21. Módulo de S_{11} , $a=2b$, $a_s=0.888b$, $b_s=0.399b$, $x_s=(a-a_s)/2$, $y_s=0$, $\epsilon_r=10-j0.5$, $\mu_r=2-j0.1$.

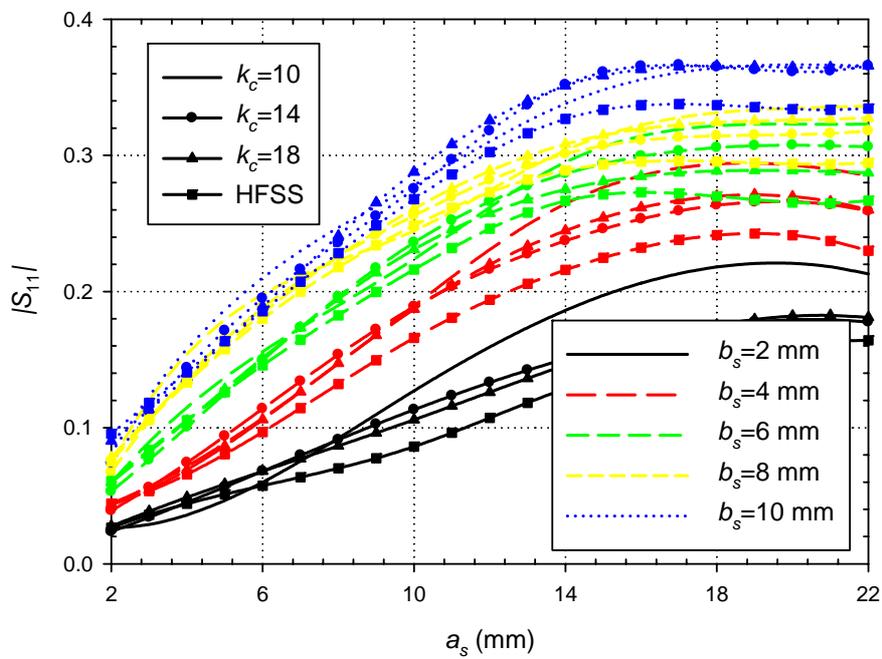
A continuación, se analizan otros ejemplos. Se sabe que los resultados también pueden variar en función de las dimensiones del material. Por ello, se realiza una comparación con varios materiales, realizando barridos en anchura a_s del material, para los casos posibles de altura $b_s=2, 4, 6, 8$ y 10 . Se toma una guía rectangular WR-90 (22.86 mm x 10.16 mm), a $f=10$ GHz. En ella, se introduce un material pegado a las paredes ($x_s=y_s=0$). Se analiza cada uno de los casos con las formulaciones directa e indirecta, para los casos de $k_c=10, 14$ y 18 .

$$\epsilon_r=12.56(1-j), \mu_r=5.89(1-j0.6), \text{DIR}$$



(a)

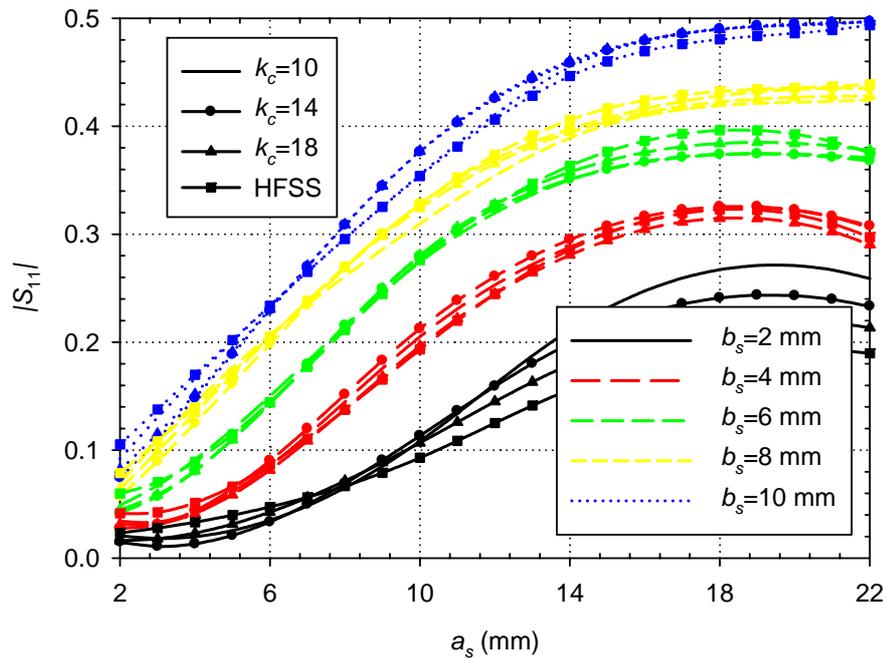
$$\epsilon_r=12.56(1-j), \mu_r=5.89(1-j0.6), \text{IND}$$



(b)

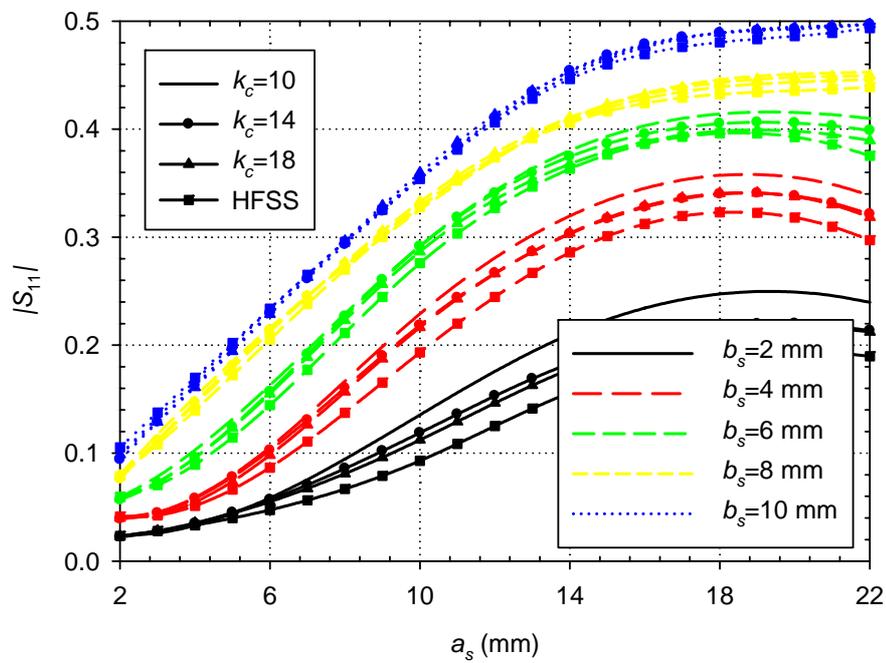
Fig. 2.22. Módulo de S_{11} , $\epsilon_r=12.56(1-j)$, $\mu_r=5.89(1-j0.6)$. $f=10$ GHz. a) Dir. b) Ind.

$$\epsilon_r=12.56(1-j), \mu_r=1.89(1-j0.6), \text{DIR}$$



(a)

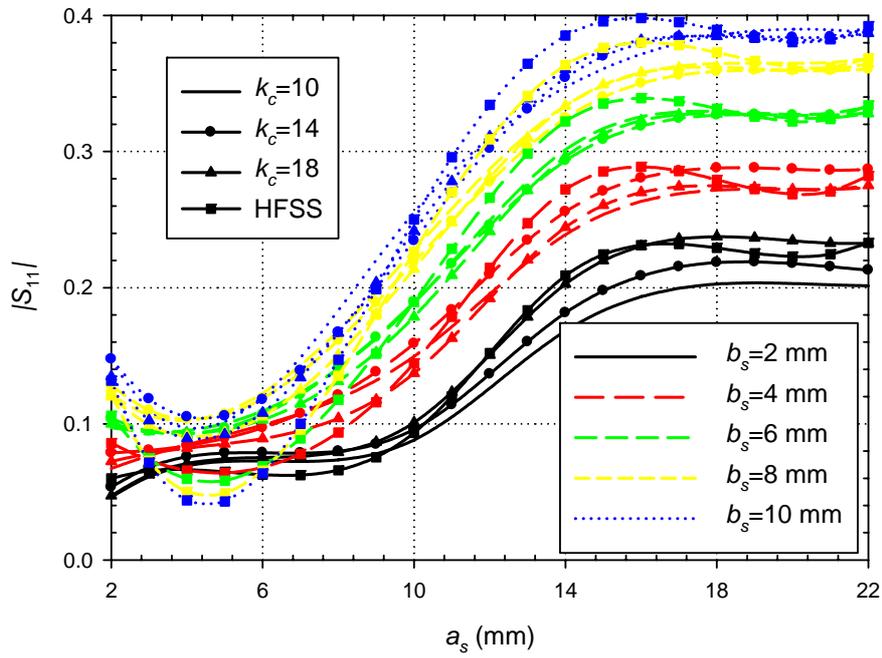
$$\epsilon_r=12.56(1-j), \mu_r=1.89(1-j0.6), \text{IND}$$



(b)

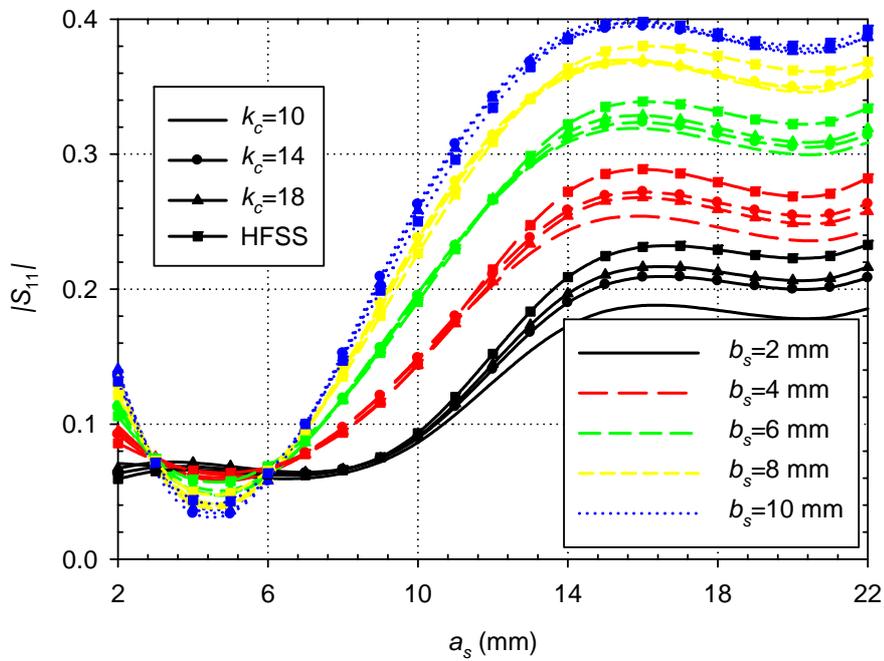
Fig. 2.23. Módulo de S_{11} , $\epsilon_r=12.56(1-j)$, $\mu_r=1.89(1-j0.6)$. $f=10$ GHz. a) Dir. b) Ind.

$$\varepsilon_r=1.89(1-j), \mu_r=12.56(1-j0.6), \text{DIR}$$



(a)

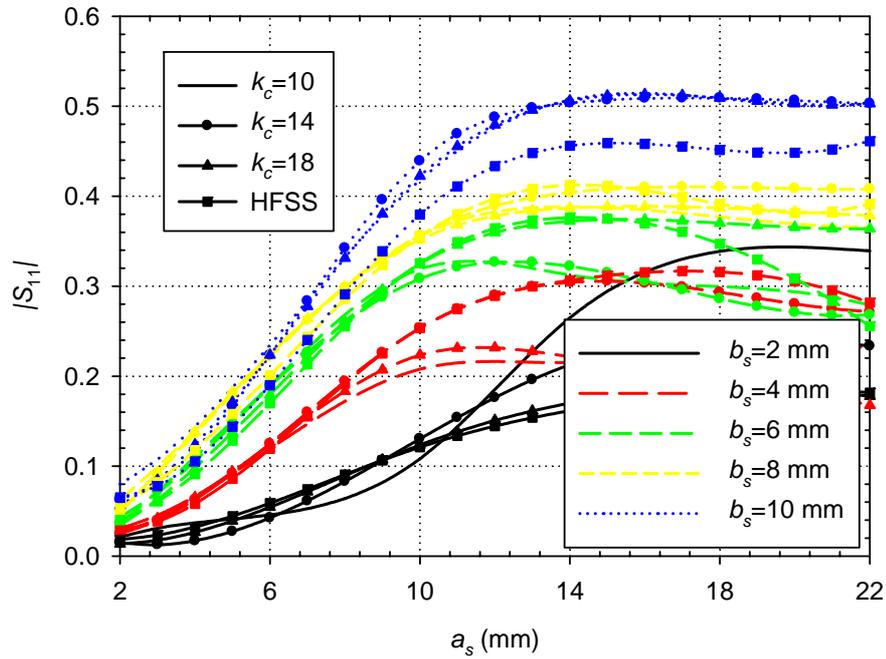
$$\varepsilon_r=1.89(1-j), \mu_r=12.56(1-j0.6), \text{IND}$$



(b)

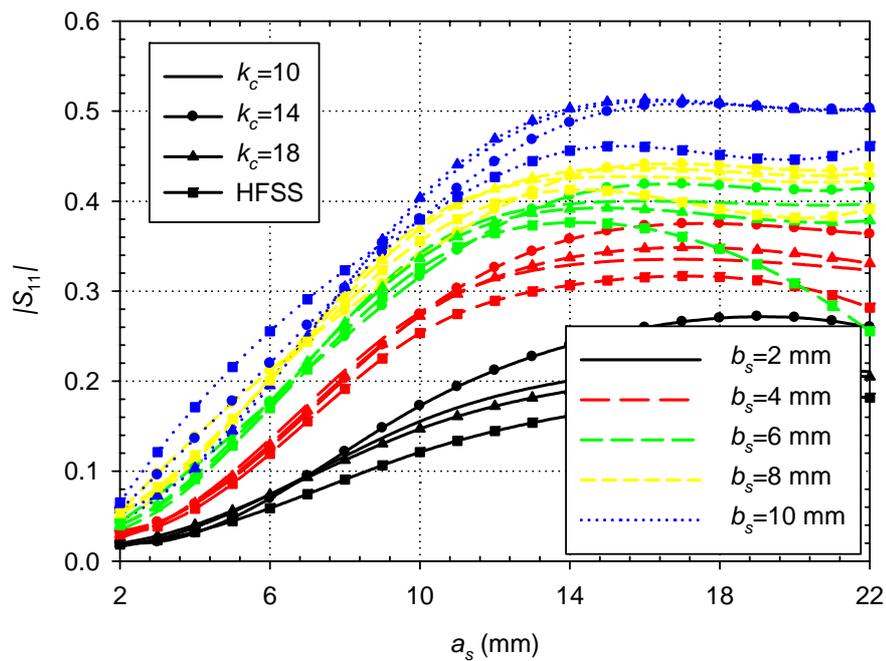
Fig. 2.24. Módulo de S_{11} , $\varepsilon_r=1.89(1-j)$, $\mu_r=12.56(1-j0.6)$. $f=10$ GHz. a) Dir. b) Ind.

$$\epsilon_r=8.56(1-j2.1), \mu_r=5.89(1-j0.01), \text{DIR}$$



(a)

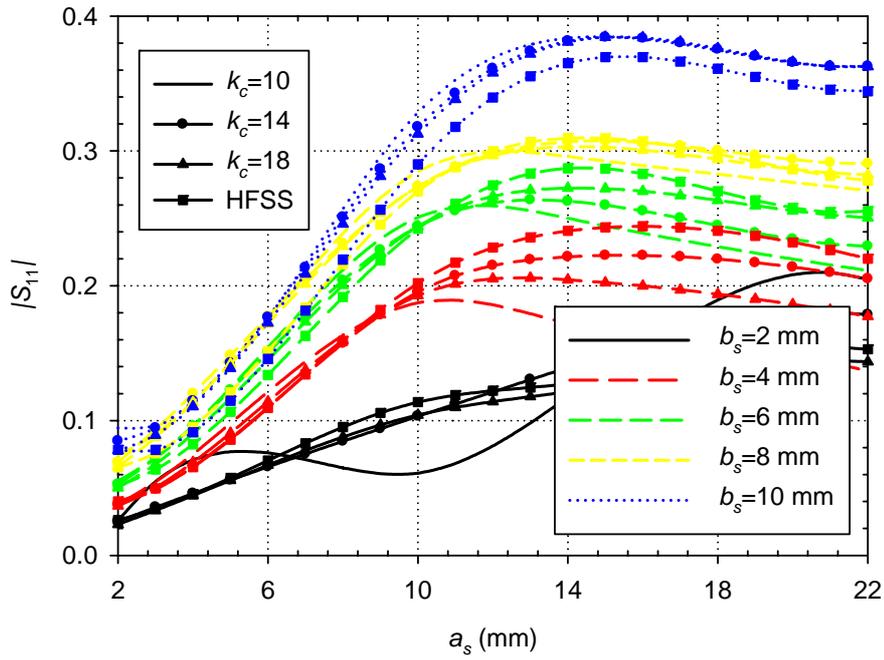
$$\epsilon_r=8.56(1-j2.1), \mu_r=5.89(1-j0.01), \text{IND}$$



(b)

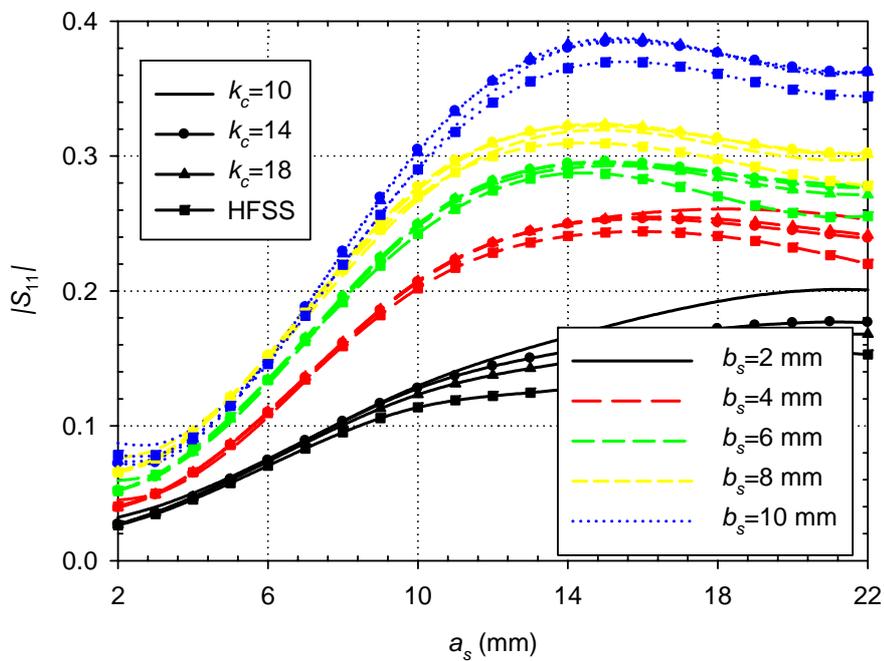
Fig. 2.25. Módulo de S_{11} , $\epsilon_r=8.56(1-j)$, $\mu_r=5.89(1-j0.6)$. $f=10$ GHz. a) Dir. b) Ind.

$$\epsilon_r=3.56(1-j2.1), \mu_r=5.89(1-j0.01), \text{DIR}$$



(a)

$$\epsilon_r=3.56(1-j2.1), \mu_r=5.89(1-j0.01), \text{IND}$$



(b)

Fig. 2.26. Módulo de S_{11} , $\epsilon_r=3.56(1-j2.1)$, $\mu_r=5.89(1-j0.01)$. $f=10$ GHz. a) Dir. b) Ind.

Obsérvese que, en todos los casos, las curvas de un mismo color, que corresponden a una misma situación física, para diferentes precisiones, están más juntas en el caso indirecto, es decir, la convergencia es mucho más rápida. Obsérvese también que, en algunos casos, incluso para $k_c=18$ (Δ), la formulación directa no consigue reproducir con exactitud los resultados de HFSS (\square). Esto quiere decir que la formulación directa no asegura buenos resultados ni siquiera cuando el número de modos es muy grande, mientras que, en la formulación indirecta, se consigue, en la mayoría de los casos, alta precisión para $k_c=10$ o $k_c=14$.

Por tanto, puesto que en el caso peor, la formulación indirecta proporciona resultados igual de precisos que la directa, y en la mayoría de los casos, mucho mejores, a partir de este momento se obtendrán los resultados únicamente con la formulación indirecta para el caso isótropo, salvo que se indique lo contrario.

Respecto a los tiempos de cálculo, la geometría es diferente en cada punto de cada gráfica, por lo que los tiempos de cálculo también lo son. Se han comparado algunos puntos significativos y se ha llegado a la misma conclusión que el apartado anterior: los tiempos de cálculo para $k_c=10$ son más de diez veces inferiores en el CMM que en la correspondiente simulación en HFSS. En algún caso puntual, se requiere $k_c=14$ en la formulación indirecta para resultados precisos. En este caso, el tiempo de cálculo es aproximadamente la mitad que en HFSS.

Seguidamente, se van a realizar una serie de comparaciones con artículos. En primer lugar, se van a comparar los resultados con los proporcionados por Siakavara [96]. En este artículo, se analizan guías de onda con materiales inhomogéneos en x , pero invariantes en y , con la técnica de expresar el campo en funciones base para cada región que determinan los materiales, y posteriormente, resolver la ecuación trascendente que se deriva de la imposición de las condiciones de contorno. Este método es de muy difícil generalización a otros materiales y a geometrías variantes en y , y la ecuación trascendente derivada conlleva una carga computacional muy grande, puesto que ha de resolverse de forma iterativa.

La Fig. 2.27 compara los resultados obtenidos con el CMM con los de la Fig. 3 de [96]. En una guía WR-90, $a=22.86$ mm, $b=10.16$ mm, se introduce un poste dieléctrico de $a_s=0.8a$, $b_s=b$, $c=0.2a$, $x_s=(a-a_s)/2$, $y_s=0$, $\mu_r=1$, según la nomenclatura de la Fig. 2.15. Se muestran resultados a la frecuencia $f=9.375$ GHz, para diferentes permitividades relativas ϵ_r , desde 1 hasta 13. Posteriormente, se gira el poste 90° respecto el eje z , y se obtienen unos segundos resultados, por lo que se tiene ahora $a_s=0.8a$ y $c=0.2a$.

Véase que, al ser $b_s=b$, es posible emplear la formulación restringida, que es lo que se ha hecho en este caso, como se hará en lo sucesivo si se cumple esta condición. Se puede apreciar alguna ligera discrepancia, especialmente para la situación número 2. También se observa que los resultados obtenidos con el CMM para $k_c=10$ y $k_c=20$ son prácticamente los mismos, de forma que se puede asegurar que los resultados han convergido.

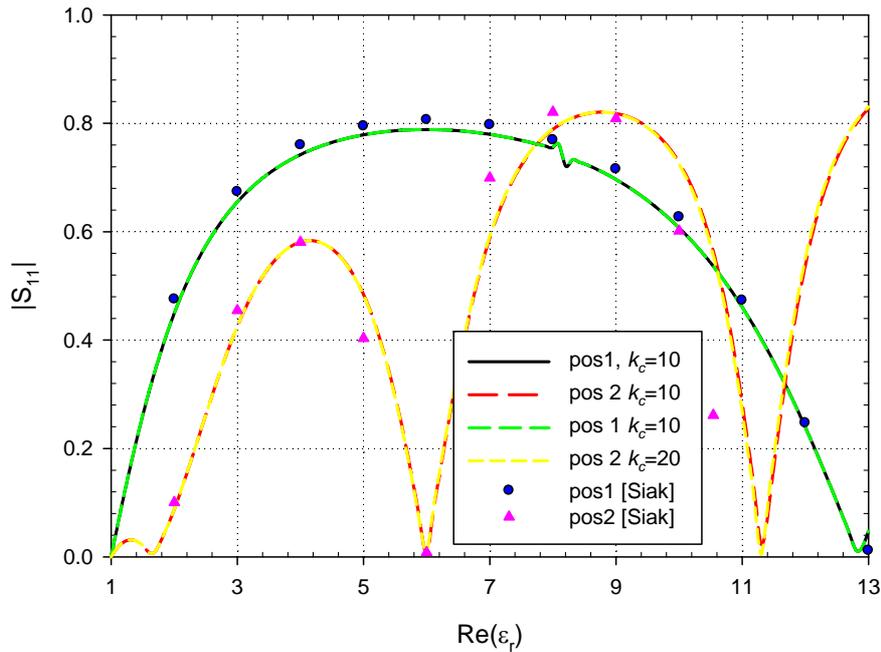


Fig. 2.27. Módulo de S_{11} . en función de ϵ_r . $a=22.86$ mm, $b=10.16$ mm, $x_s=(a-a_s)/2$, $y_s=0$, $\mu_r=1$, $b_s=b$. Pos. 1: $a_s=0.8a$, $c=0.2a$. Pos. 2: $a_s=0.2a$, $c=0.8a$. $f=9.375$ GHz. Comparación con [96].

La Fig. 2.28 muestra un resultado que se ha comparado con la Fig. 4 de [96]. En esta ocasión, los parámetros del problema son los mismos, salvo que se pone un poste de base cuadrada muy pequeño: $a_s=0.05a$, $c=0.05a$. Obsérvese que, al ser un poste tan pequeño, es necesaria una resolución espacial muy grande para poder seguir la variación del campo provocada por él. Como el barrido es en permitividad, a mayor permitividad, el problema es más exigente con la formulación. Se observa que, para $k_c=10$, los resultados reproducidos no son exactos aún para altas permitividades, pero para $k_c=20$, ya se ha convergido, porque, si se aumenta hasta $k_c=40$, los resultados no han variado. Se nota alguna ligera discrepancia, especialmente en la resonancia en el entorno de $\epsilon_r=52$. Pero no es menos cierto que [96] referencia otro trabajo sin dicha resonancia. Además, las medidas incluidas en [96] encajan perfectamente con las simulaciones.

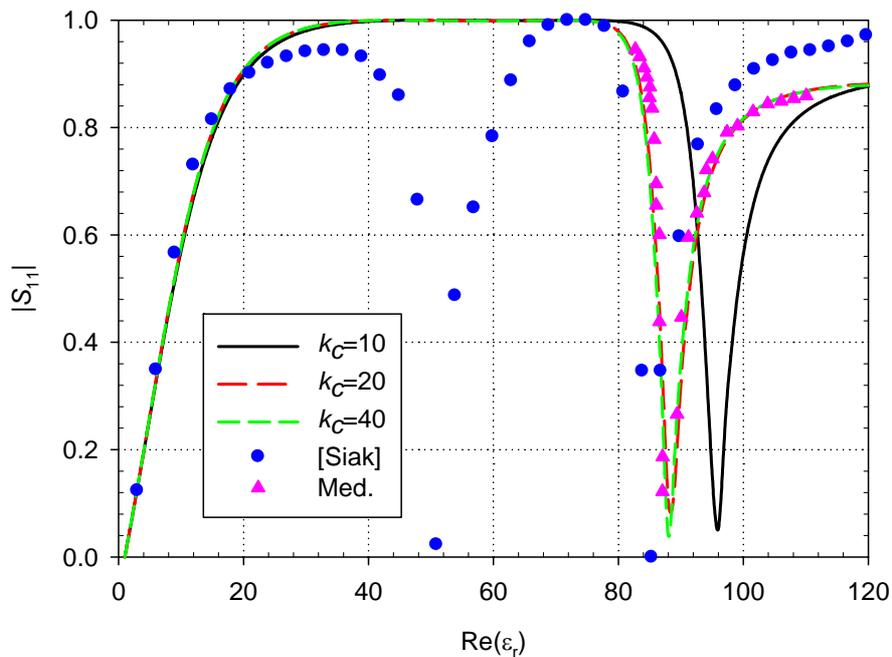


Fig. 2.28. Módulo de S_{11} . en función de ϵ_r . $a=22.86$ mm, $b=10.16$ mm, $a_s=0.05a$, $x_s=(a-a_s)/2$, $y_s=0$, $b_s=b$, $c=0.05a$. $\mu_r=1$, $f=9.375$ GHz. Comparación con [96].

La Fig. 2.29 reproduce los resultados de la Fig. 5 de [96]. Éste es un ejemplo muy popular en la literatura del análisis de guías inhomogéneas. En una guía WR-90, $a=22.86$ mm, $b=10.16$ mm, se introduce un poste dieléctrico de $a_s=12$ mm, $b_s=b$, $c=6$ mm, $x_s=(a-a_s)/2$, $y_s=0$, $\epsilon_r=8.2$ y $\mu_r=1$, según la nomenclatura de la Fig. 2.15. Se realiza un barrido entre 8 y 12 GHz. Se notan de nuevo discrepancias entre los resultados obtenidos por el CMM y los de [96], pero destacando que, de nuevo, compara sus resultados con los obtenidos por Lewin [97], y en este caso sí se solapan los resultados de [97] y las simulaciones obtenidas en este trabajo. Se comparan además los resultados con los de Chaloupka [82] y con el artículo de Wu y Jaggard [54]. Este último artículo implementa la formulación directa para materiales quirales, y lo aplica también a algunos casos isótropos como éste. Nótese que, al tratarse este caso de un material dieléctrico y de altura completa, los resultados de [54] coinciden exactamente con los realizados en este trabajo.

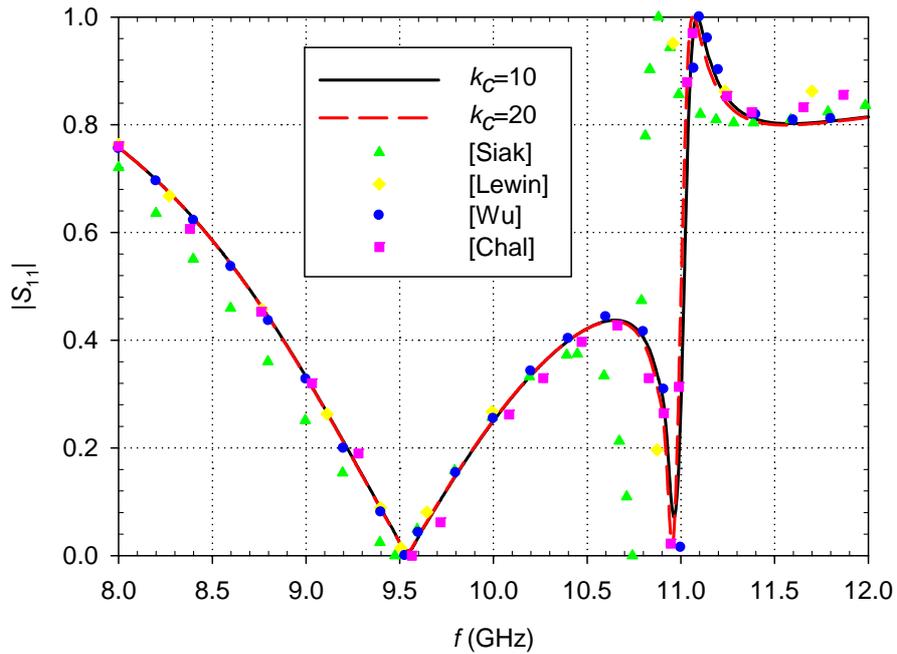


Fig. 2.29. Módulo de S_{11} . en función de f . $a=22.86$ mm, $b=10.16$ mm, $a_s=12$ mm, $x_s=(a-a_s)/2$, $y_s=0$, $b_s=b$, $c=6$ mm. $\epsilon_r=9.8$, $\mu_r=1$. Comparación con [96], [97], [82] y [54].

La Fig. 2.30 muestra una nueva validación, que se corresponde con la Fig. 6 de [96]. En una guía WR-90, $a=22.86$ mm, $b=10.16$ mm, se introducen dos postes dieléctricos de $\epsilon_r=9.8$ y $\mu_r=1$, ambos con $a_s=0.4a$, $c=0.5a$, $b_s=b$ e $y_s=0$. El primero, se sitúa en $x_s=0$, $y_s=0$, (pegado a la pared izquierda) y el segundo en $x_s=a-a_s$, $y_s=0$ (pegado a la pared derecha), según la nomenclatura de la Fig. 2.15. Se realiza un barrido entre 6.5 y 9.5 GHz. Se aprecia la gran similitud entre los resultados obtenidos por [96] y los obtenidos por el método desarrollado en este trabajo.

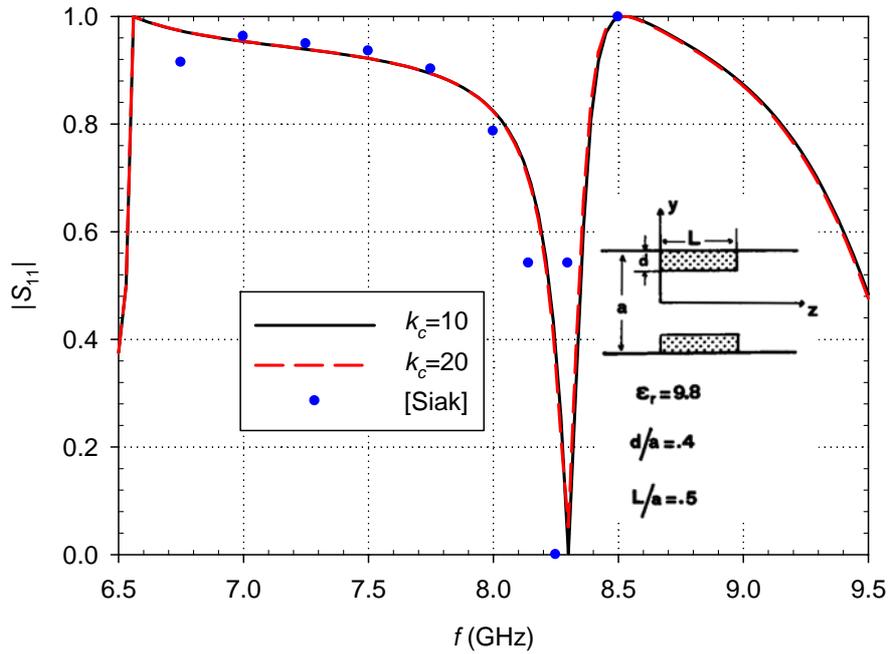


Fig. 2.30. Módulo de S_{11} . en función de f . $a=22.86$ mm, $b=10.16$ mm. Dos postes de $a_s=0.4a$, $c=0.5a$, $b_s=b$ e $y_s=0$, $c=6$ mm. El primero, $x_s=0$, y el segundo, $x_s=a-a_s$, $\epsilon_r=9.8$, $\mu_r=1$. Comparación con [96].

Un nuevo ejemplo de validación muy interesante es el mostrado a continuación, donde se reproducen los resultados obtenidos por Dou [98]. Este trabajo, implementa el FDTD para guías de onda.

La Fig. 2.31 se compara con la Fig. 3 de [98]. Se trata un poste dieléctrico situado en la guía rectangular que ocupa toda la altura pero en diferentes desplazamientos respecto de la posición centrada x_0 . Los valores son diámetro de la base del poste $d=0.15a$ y permitividad relativa $\epsilon_r=38$. La longitud de onda de trabajo es $\lambda=1.4a$. La particularidad importante es que el poste es circular, por lo que, en principio, no se puede abordar con una formulación particularizada para materiales rectangulares. Sin embargo, se sugiere la aproximación de este poste por otro de base cuadrada cuya área sea igual al área de la base del poste circular. Es decir, se ha tomado $\pi(d/2)^2=c^2=a_s^2$. La gran similitud de los resultados sugiere que, para obstáculos de tamaño eléctrico pequeño, no es necesario reproducir la geometría de forma exacta, sino considerar un objeto de un volumen equivalente.

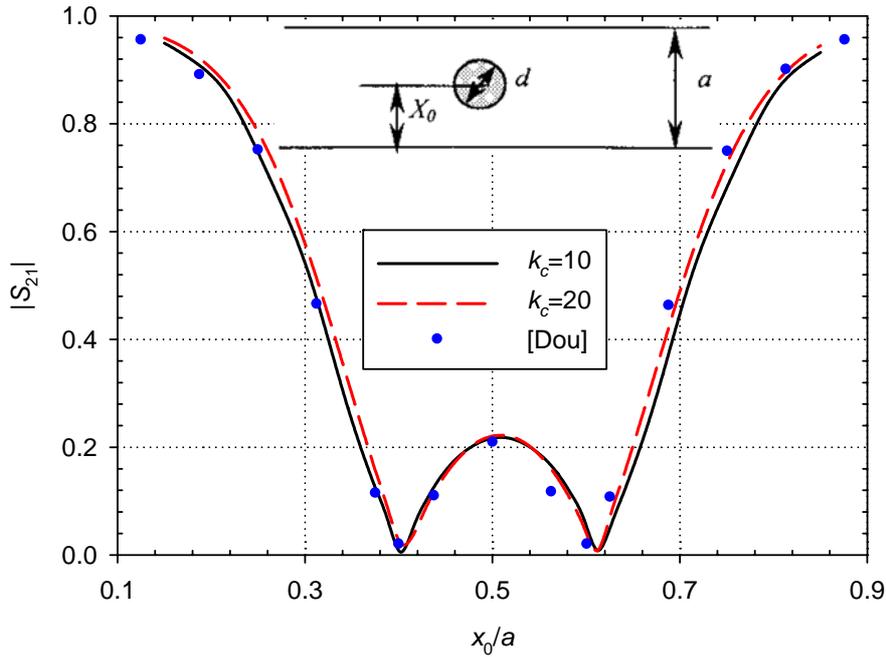


Fig. 2.31. Módulo de S_{21} . Guía de anchura a con poste de sección circular de diámetro $d=0.15a$ $\epsilon_r=38$. Resultados obtenidos aproximando por poste de base rectangular de $c^2=a_s^2=\pi(d/2)^2$. Validación con [98] Longitud de onda $\lambda=1.4a$.

La Fig. 2.32 consiste en un filtro realizado con dos postes cuadrados. Los resultados son, de nuevo, muy similares a [98]. Según la nomenclatura de este trabajo, los postes tienen base cuadrada de lados $a_s=c=0.15a$, en posición horizontal centrada $x_s=(a-a_s)/2$, separados entre ellos una distancia horizontal $d=0.225a$. El material tiene $\varepsilon_r=2.5$ y $\mu_r=1$. Se hace un barrido de 1.2 a 2 en la frecuencia normalizada a la frecuencia de corte de la guía $f_c=v_{\text{uz}}/(2a)$. Se aprecian discrepancias en las frecuencias altas en este caso, entre los resultados aportados por [98] y los aportados por este trabajo.

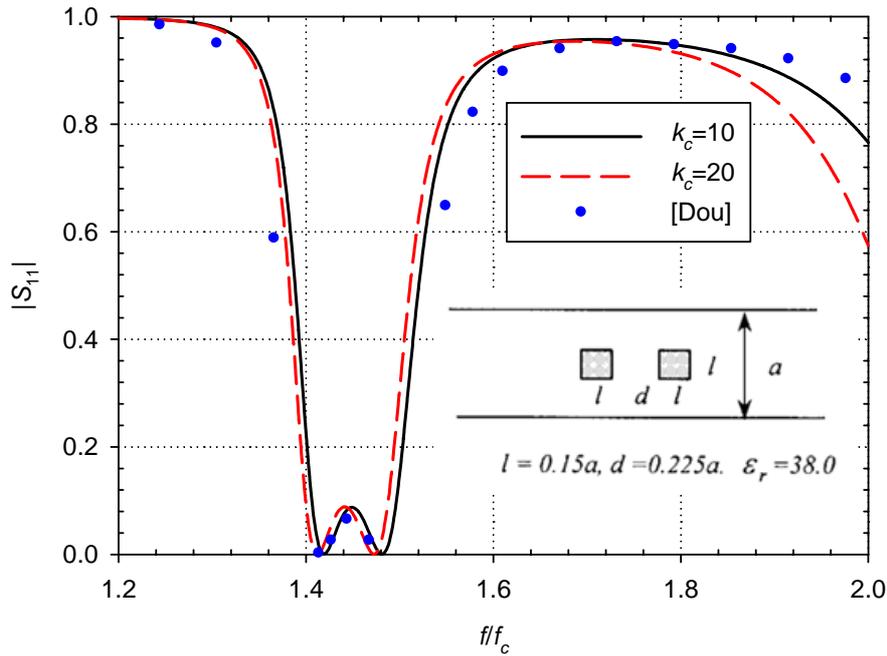


Fig. 2.32. Módulo de S_{11} . Guía de anchura a con dos postes de sección rectangular $a_s=c=0.15a$, $x_s=(a-a_s)/2$, separados $d=0.225a$. $\varepsilon_r=2.5$, $\mu_r=1$. Barrido de 1.2 a 2 en la frecuencia normalizada a $f_c=v_{\text{uz}}/(2a)$. Comparación con [98]

Seguidamente, se va a utilizar un resultado del artículo de Christ [99], que es una referencia muy importante en el análisis de guías de onda usando el método de las diferencias finitas en el dominio de la frecuencia. La gran generalidad del método empleado permite analizar esta vez guías inhomogéneas tanto en x como en y , por lo que, para poder reproducir con exactitud los resultados usando métodos modales, se han de emplear tanto modos TE como modos TM, de forma que, en los casos como éste, se usará la formulación indirecta en lugar de la restringida.

La Fig. 2.33 se corresponde con la Fig. 7 del trabajo de Christ [99]. Se trata de una guía de $a=2b$, $a_s=0.888b$, $b_s=0.399b$, $c=0.8b$, $x_s=(a-a_s)/2$, $y_s=0$, $\varepsilon_r=6$, $\mu_r=1$. Se realiza un barrido en frecuencia normalizada k_0b de 1.6 a 3. Nótese que los resultados obtenidos son muy parecidos.

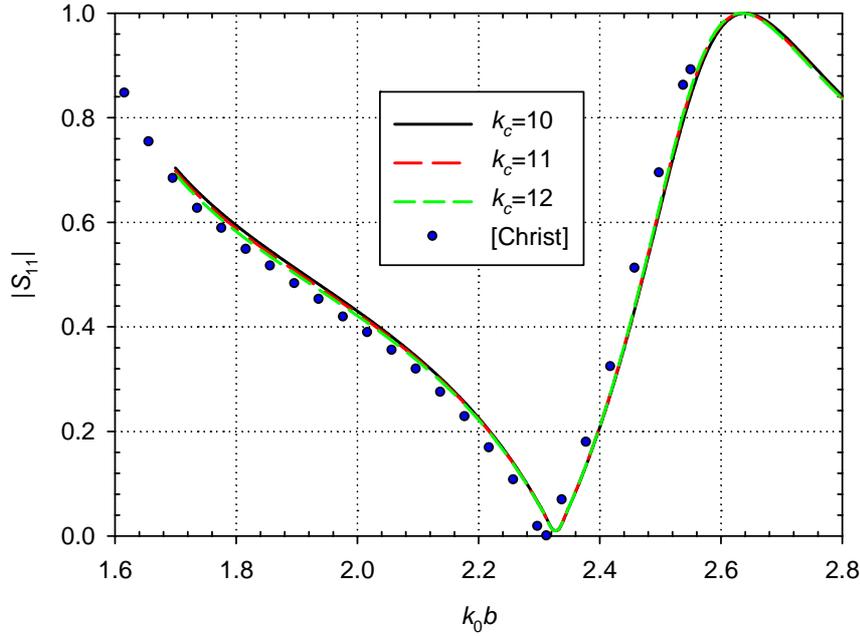


Fig. 2.33. Módulo de S_{11} . $a=2b$, $a_s=0.888b$, $b_s=0.399b$, $c=0.8b$, $x_s=(a-a_s)/2$, $y_s=0$, $\varepsilon_r=6$, $\mu_r=1$. Barrido en frecuencia normalizada k_0b de 1.6 a 3. Comparación con [99].

La Fig. 2.34 está en estrecha relación con la anterior, ya que se trata del mismo caso que el de la Fig. 2.33, pero introduciendo pérdidas dieléctricas progresivamente. Los resultados se comparan con la Fig. 5 de [100], que implementa el FEM para circuitos guiados. Nótese que los resultados obtenidos y los del trabajo referenciado son también muy parecidos.

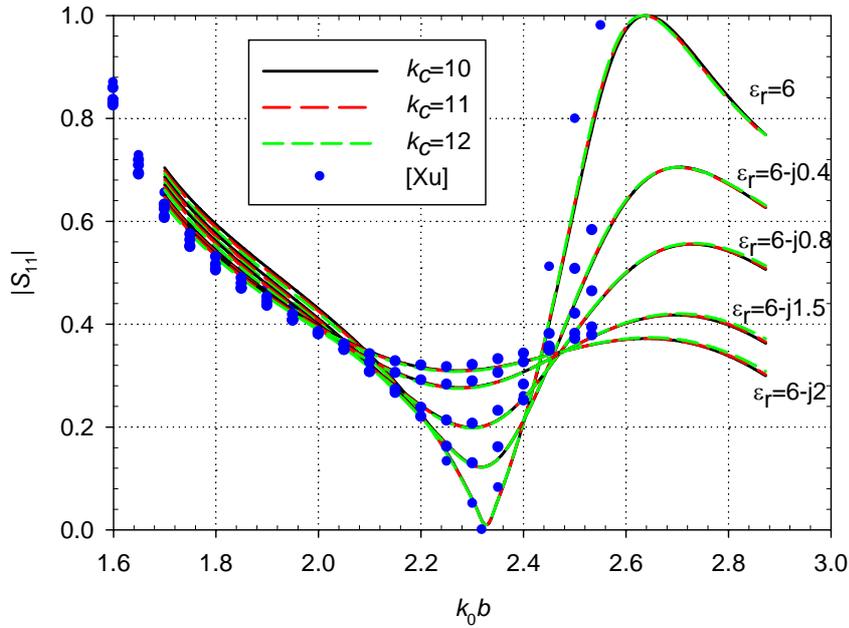


Fig. 2.34. Módulo de S_{11} . $a=2b$, $a_s=0.888b$, $b_s=0.399b$, $c=0.8b$, $x_s=(a-a_s)/2$, $y_s=0$, $\mu_r=1$. Barrido en frecuencia normalizada k_0b de 1.6 a 3, para las permitividades $\epsilon_r=6$, $6-j0.4$, $6-j0.8$, $6-j1.5$ y $6-j2$. Comparación con [100].

El artículo de Wu y Jaggard [54], pese a describir la formulación directa para materiales quirales, también presenta resultados para materiales isotrópicos. La Fig. 2.35 reproduce los resultados de la Fig. 6 de [54]. En una guía WR-90, $a=22.86$ mm, $b=10.16$ mm, se introduce un poste dieléctrico de $a_s=11$ mm, $b_s=5$ mm, $c=10, 7.5$ y 5 mm, $x_s=(a-a_s)/2$, $y_s=0$, $\epsilon_r=2.5$ y $\mu_r=1$, según la nomenclatura de la Fig. 2.15. Se realiza un barrido entre 7 y 12 GHz. Las longitudes del material se han ido cambiando (diferentes valores de c). Como ya se ha comentado, [54] implementa la formulación directa, que trata incorrectamente las componentes axiales de campo. Sin embargo, los resultados de [54] y los de este trabajo apenas difieren, debido a que la permitividad es muy pequeña ($\epsilon_r=2.5$). Ésta es la razón de que, en [54], solamente se analicen materiales de parámetros constitutivos muy bajos.

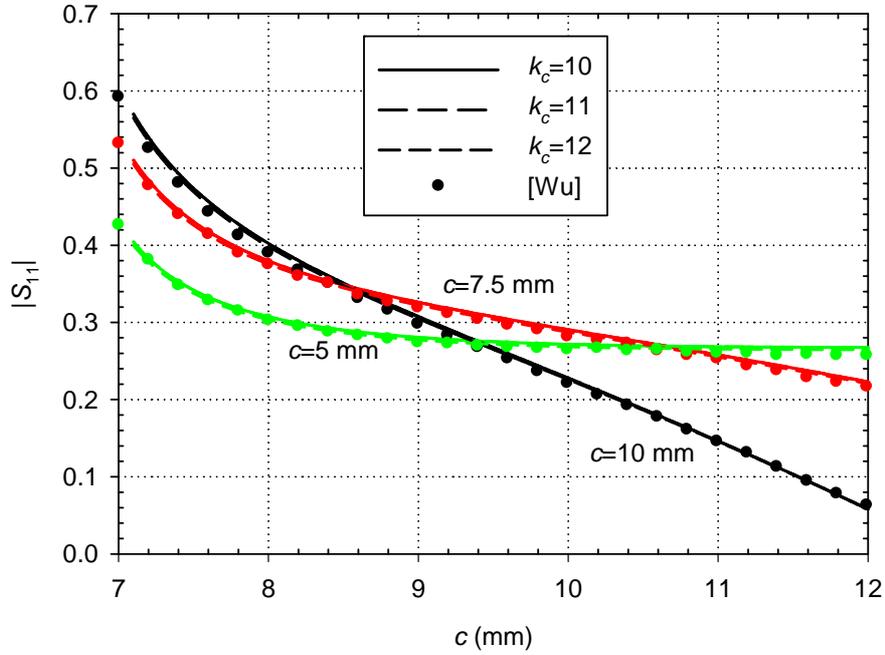


Fig. 2.35. Módulo de S_{11} . $a=22.86$ mm, $b=10.16$ mm, $a_s=11$ mm, $b_s=5$ mm, $x_s=(a-a_s)/2$, $y_s=0$, $\epsilon_r=2.5$ y $\mu_r=1$. Barrido en frecuencia entre 7 y 12 GHz, para $c=10, 7.5$ y 5 mm. Comparación con [54].

2.4.4.2. Materiales anisótropos

Una vez analizado el caso de los materiales isótropos, se va a subir un peldaño en la escala de complejidad. Cuando el material a analizar es anisótropo desde un punto de vista magnético, el vector de inducción magnética \mathbf{B} no es paralelo al vector de campo magnético \mathbf{H} , contrariamente a lo que ocurría en los materiales isótropos. Entonces, no se puede asumir que μ es escalar. Para el caso concreto de una ferrita, que es el material anisótropo que se va a considerar en el presente documento, la permeabilidad es una matriz 3x3 cuyos elementos dependen de diversos parámetros físicos.

Una comprensión de los efectos descritos requiere un estudio de la interacción entre la magnetización de la ferrita y el campo a frecuencia de microondas [91]. La conclusión importante es que, para cada tipo de ferrita, con un campo de magnetización estático \mathbf{H}_0 es posible controlar los valores de la matriz de permeabilidad:

$$\boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} \mu_{11} & \mu_{12} & \mu_{13} \\ \mu_{21} & \mu_{22} & \mu_{23} \\ \mu_{31} & \mu_{13} & \mu_{33} \end{pmatrix} \quad (2.439)$$

siendo cada uno de sus elementos:

$$\mu_{11} = \mu(\cos^2 \theta \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) + \mu_0 \sin^2 \theta \cos^2 \varphi \quad (2.440)$$

$$\mu_{12} = (\mu_0 - \mu) \sin^2 \theta \sin \varphi \cos \varphi - j\kappa \cos \theta \quad (2.441)$$

$$\mu_{13} = (\mu_0 - \mu) \sin \theta \cos \theta \cos \varphi + j\kappa \sin \theta \sin \varphi \quad (2.442)$$

$$\mu_{21} = (\mu_0 - \mu) \sin^2 \theta \sin \varphi \cos \varphi + j\kappa \cos \theta \quad (2.443)$$

$$\mu_{22} = \mu(\cos^2 \theta \sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi) + \mu_0 \sin^2 \theta \sin^2 \varphi \quad (2.444)$$

$$\mu_{23} = (\mu_0 - \mu) \sin \theta \cos \theta \sin \varphi - j\kappa \sin \theta \cos \varphi \quad (2.445)$$

$$\mu_{31} = (\mu_0 - \mu) \sin \theta \cos \theta \cos \varphi - j\kappa \sin \theta \sin \varphi \quad (2.446)$$

$$\mu_{32} = (\mu_0 - \mu) \sin \theta \cos \theta \sin \varphi + j\kappa \sin \theta \cos \varphi \quad (2.447)$$

$$\mu_{33} = \mu \sin^2 \theta + \mu_0 \cos^2 \theta \quad (2.448)$$

donde (θ, φ) es la dirección del campo magnético \mathbf{H}_0 continuo de alimentación en el interior de la ferrita, utilizando coordenadas esféricas.

Por ejemplo, si el campo \mathbf{H}_0 paralelo al eje y , se tiene que $\theta = \pi/2$, $\varphi = \pi/2$, por lo que:

$$\mu = \begin{pmatrix} \mu & 0 & -j\kappa \\ 0 & \mu_0 & 0 \\ j\kappa & 0 & \mu \end{pmatrix} \quad (2.449)$$

Los parámetros de las ferritas se suelen expresar, por tradición, en unidades del sistema CGS más que en Sistema Internacional. En el presente documento, también se va a seguir esta norma. Por ello, todas las magnitudes que aparezcan en las expresiones de este documento estarán en Sistema Internacional a excepción de la magnetización de saturación (Gauss en vez de A/m), el campo continuo de alimentación (Oersted en vez de A/m) y la anchura de línea (Oersted en vez de A/m). La conversión entre ambos sistemas para estas unidades se muestra en la Tabla 2.

	Sistema Internacional (SI)	Sistema CGS	Conversión
Densidad de flujo magnético (B)	T (Tesla)	G (Gauss)	$B(T) = \frac{B(G)}{10^4}$
Campo magnético (H) Anchura de línea (ΔH)	A/m	Oe (Oersted)	$H(A/m) = \frac{1000}{4\pi} H(Oe)$
Magnetización de saturación ($4\pi M_s$)	A/m	G (Gauss)	$M_s(A/m) = 4\pi M_s(G) \frac{1000}{4\pi}$

Tabla 2. Conversión entre el sistema CGS y el Sistema Internacional

Los parámetros κ y μ son función de la permeabilidad μ_0 en espacio libre, de la frecuencia angular ω , de la frecuencia angular magnética ω_m de la ferrita y de la frecuencia angular de resonancia o de Larmor ω_0 de la ferrita:

$$\mu = \mu_0 \left(1 + \frac{\omega_0 \omega_m}{\omega_0^2 - \omega^2} \right) \quad (2.450)$$

$$\kappa = \mu_0 \frac{\omega \omega_m}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad (2.451)$$

A su vez, la frecuencia angular magnética depende de la magnetización de saturación $4\pi M_s$ de la ferrita:

$$\omega_m = 2\pi\gamma(4\pi M_s) \cdot 10^6 \quad (2.452)$$

Mientras que la frecuencia de resonancia depende de la alimentación en el interior de la ferrita y de la anchura de línea ΔH de la ferrita:

$$\omega_0 = (2H_0 + j\Delta H)\pi\gamma \cdot 10^6 \quad (2.453)$$

Donde

$$\gamma = \frac{\mu_0 q_e g}{2m_e} \cdot \frac{1}{8000\pi^2} \quad (2.454)$$

g es el factor de Lande de la ferrita, cuyo valor típico es 2. $4\pi M_s$ es la magnetización de saturación de la ferrita, y q_e y m_e son la carga y la masa del electrón, respectivamente.

Se puede comprobar que, a mayor valor de la magnetización de saturación $4\pi M_s$, mayor valor de la frecuencia angular magnética ω_m , lo que se traduce en unos valores de κ y μ mayores.

Obsérvese que, para un valor de anchura de línea ΔH distinto de cero, la frecuencia de resonancia de la ferrita es compleja, y por tanto, también lo son κ y μ . Es decir, ΔH indica las pérdidas de la ferrita.

Para una ferrita dada, los parámetros electromagnéticos que se pueden variar son la frecuencia de trabajo ω y la alimentación H_0 . Obsérvese que, para un valor de ω cercano a ω_0 , tanto κ como μ tienen a ser muy grandes. Lo que ocurre es que nunca es posible conseguir una ferrita con anchura de línea $\Delta H=0$. Por tanto, existe una parte imaginaria en ω_0 que, nunca puede ser igual a ω . Esto hace que κ y μ alcancen valores grandes, pero finitos a la frecuencia ω , que es el punto del eje real más cercano a ω_0 en el plano complejo, o sea, $\text{Re}(\omega_0) = 2\pi\gamma H_0 \cdot 10^6$. Se puede comprobar cómo la frecuencia de resonancia depende linealmente de H_0 , y que es independiente de la ferrita, puesto que, examinando el valor de γ , únicamente depende de constantes, ya que g siempre vale en torno a 2. A la izquierda la frecuencia de resonancia, se dice que se trabaja por debajo de la resonancia, y a la derecha, por encima de la resonancia. A mayores pérdidas ΔH , más se suaviza la resonancia.

En el caso de alimentación $H_0=0$, la frecuencia de resonancia es imaginaria pura, o lo que es lo mismo, el máximo se da en $\omega=0$, por lo que todas las frecuencias están por encima de la resonancia. Por otro lado, se tiene que $\kappa=0$, con lo que no existen acoplamientos entre las distintas componentes de \mathbf{H} .

Por otro lado, cuando la alimentación H_0 es muy grande, ω_0 se hace muy grande también, lo que implica, según (2.450) y (2.451), que μ tiende a μ_0 y κ tiende a 0, es decir, la ferrita tiende a perder sus tanto sus propiedades

anisótropas como sus propiedades magnéticas, y se convierte en un simple dieléctrico.

Es importante considerar también el parámetro denominado permeabilidad relativa efectiva, que se define como

$$\mu_{ef} = \frac{\mu^2 - \kappa^2}{\mu} \quad (2.455)$$

Este parámetro es la permeabilidad de un material isótropo que tuviera la misma longitud de onda dentro de él que la ferrita.

A continuación, se muestran unas gráficas de los valores relativos (partido μ_0) de μ , κ y $\mu_{r,ef}$ respecto de la frecuencia y de H_0 para los casos de algunas ferritas comerciales conocidas.

Caso: ferrita GAC-550

Los parámetros de esta ferrita son: magnetización de saturación $4\pi M_s=550$ G, anchura de línea $\Delta H=45$ Oe, factor de Lande $g=2.00$, permitividad relativa $\epsilon_r=14.6$ y factor de pérdidas dieléctricas $\tan\delta<0.00015$.

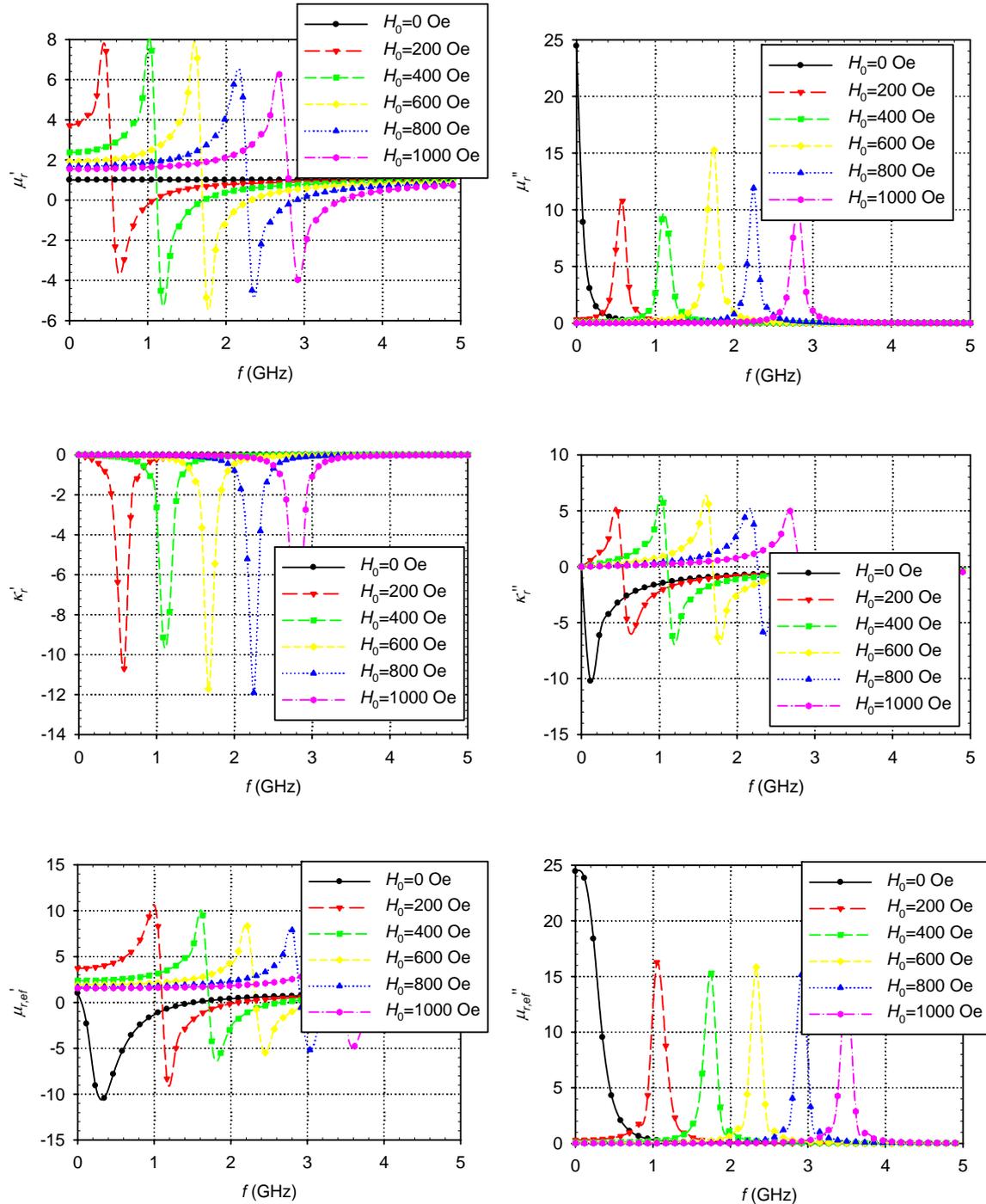
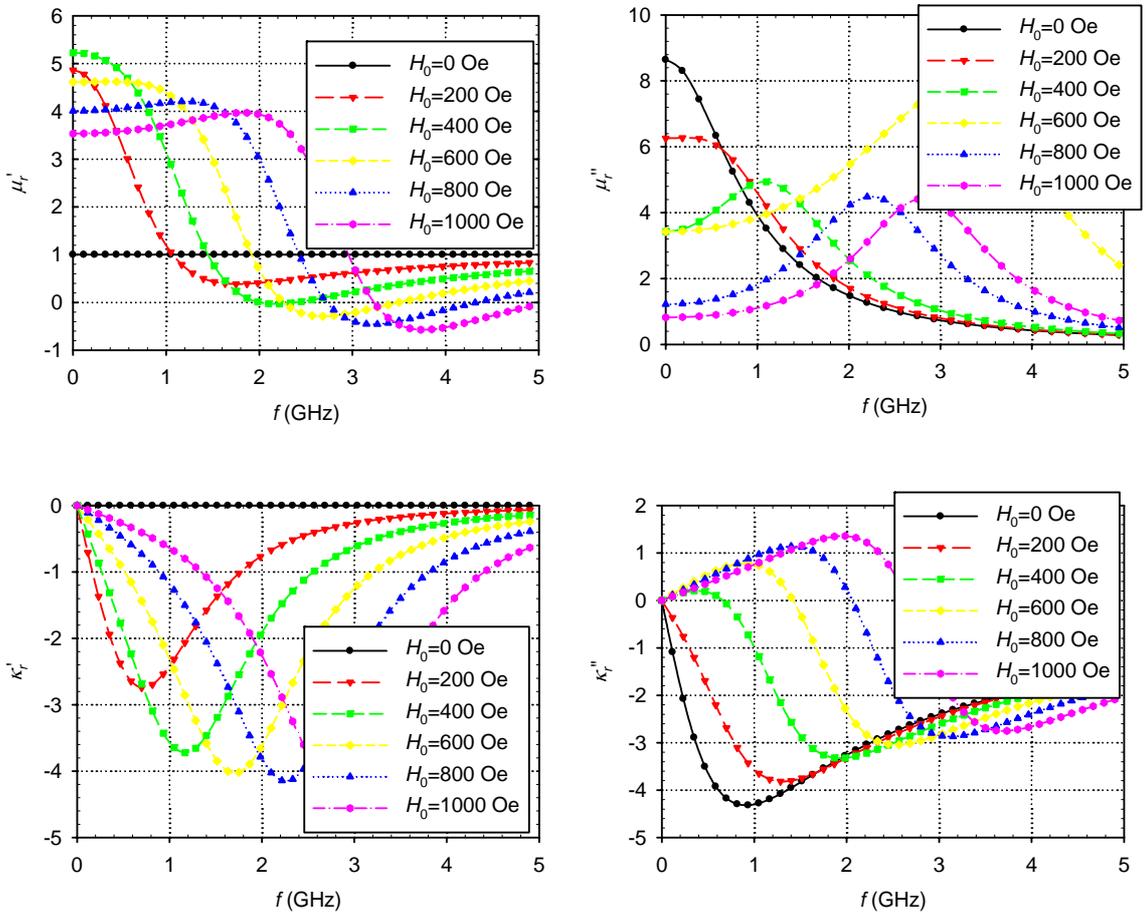


Fig. 2.36. Parámetros constitutivos de la ferrita GAC-550, en función de la frecuencia y de H_0 .

Puede comprobarse que los picos están uniformemente separados, con el primero de ellos a frecuencia cero, dado que la frecuencia de resonancia varía linealmente con H_0 . Obsérvese que la parte imaginaria de $\mu_{r,ef}$ siempre es positiva, es decir, la ferrita no puede amplificar nunca, a pesar de que algunos de sus parámetros pueden tener cambios de signo.

Caso: ferrita TTI-2800

Los parámetros de esta ferrita son: magnetización de saturación $4\pi M_s=2800$ G, anchura de línea $\Delta H=648$ Oe, factor de Lande $g=2.01$, permitividad relativa $\epsilon_r=13.1$ y factor de pérdidas $\tan\delta=0.005$.



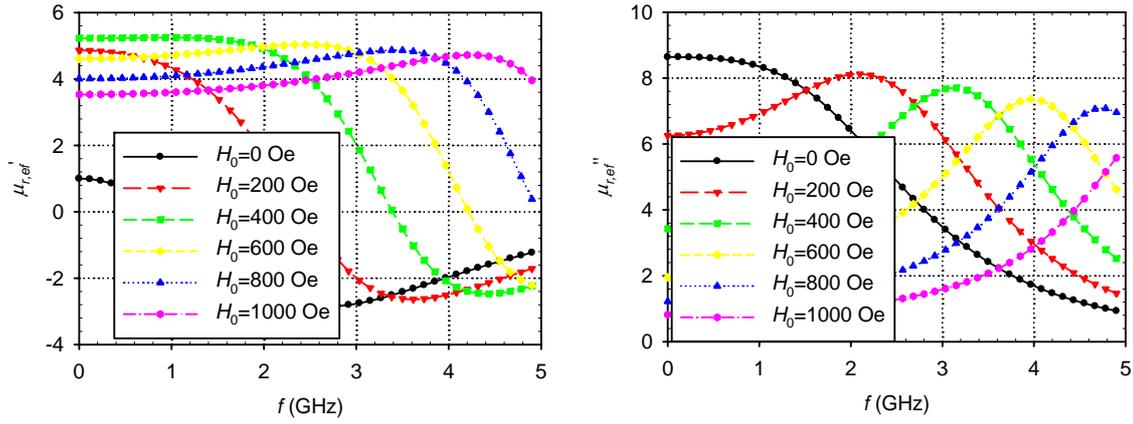


Fig. 2.37. Parámetros constitutivos de la ferrita TTI-2800, en función de la frecuencia y de H_0 .

Se puede observar que, pese a ser una ferrita completamente distinta, las resonancias se dan a las mismas frecuencias que la GAC-550. Puede comprobarse que, al ser la anchura de línea mucho mayor, estas resonancias están muy suavizadas. Se comprueba también que $\mu_{r,ef}$ nunca llega a ser negativo.

Se presentan a continuación unos resultados correspondientes a ferritas comerciales, del tipo TTI-2800 y GAC550. En esta serie de ejemplos, se da el caso $b_s=b$, por lo que es posible utilizar únicamente modos TE_{m0} y aplicar también la formulación restringida. Se comparan los resultados de las tres formulaciones con HFSS.

El primer ejemplo es una guía WR-75 ($a=15.8$ mm, $b=7.9$ mm), que se hace funcionar de 12 GHz a 18 GHz. En su interior, se coloca una ferrita TTI-2800, de parámetros magnetización de saturación $4\pi M_s=2800$ G, anchura de línea $\Delta H=648$ Oe, factor de Lande $g=2.01$, permitividad relativa $\epsilon_r=13.1$ y factor de pérdidas $\tan\delta=0.005$. Esta ferrita tiene el tamaño $a_s=0.7$ mm, $b_s=b$ $c=20$ mm, y está situada en $x_s=0.7$ mm, $y_s=0$.

Las Figs. 2.38-2.40 realizan un estudio para diferentes valores del campo estático vertical H_0 con el que se alimenta la ferrita. Los tiempos de cálculo en HFSS son de unos 15 s por punto de frecuencia en todos los casos. En el CMM, dado que solamente se usan modos TE_{m0} , este tiempo es muy pequeño (sobre la centésima de segundo).

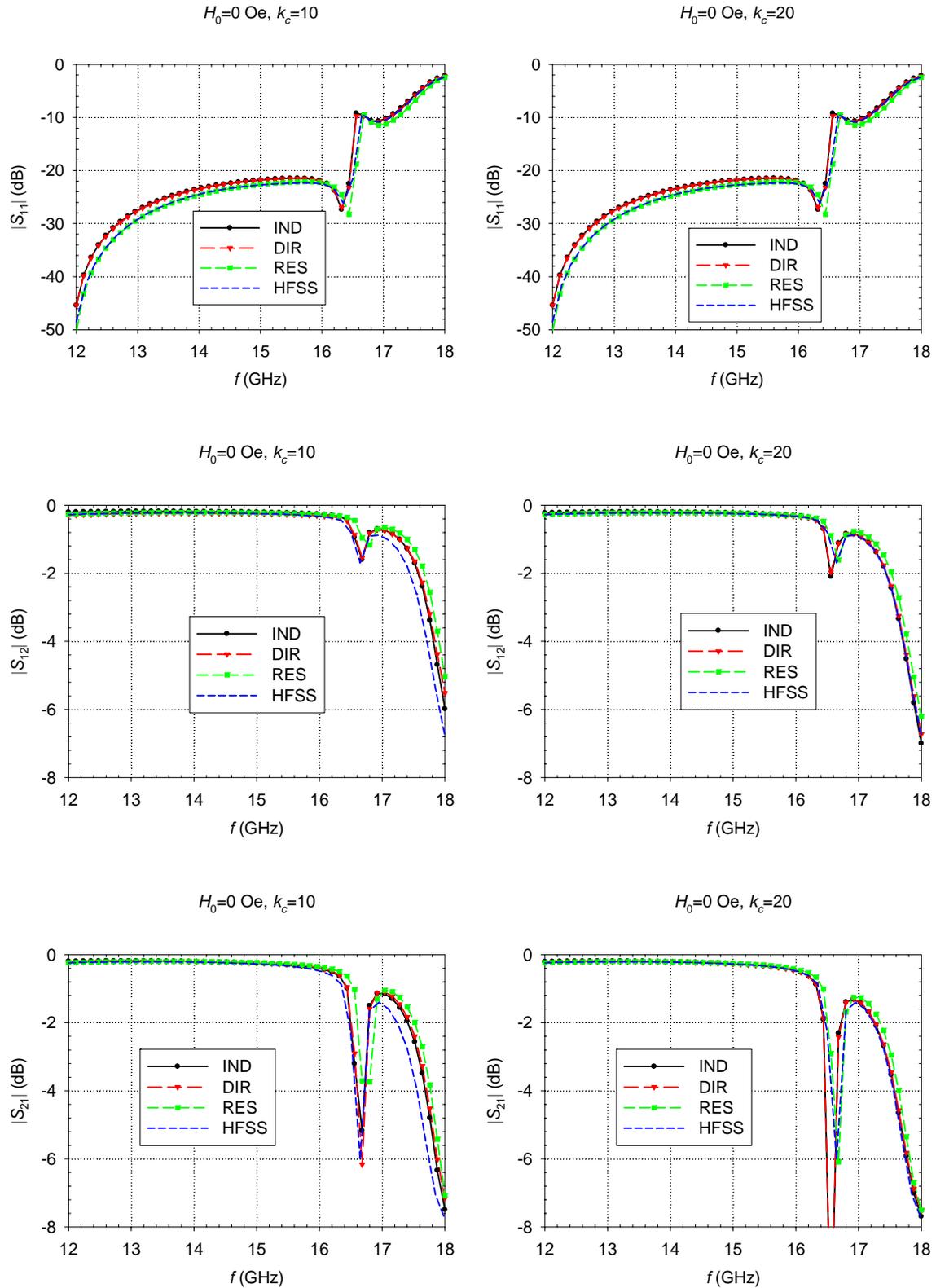


Fig. 2.38. Parámetros S de la ferrita TTI-2800: $4\pi M_s=2800$ G, $\Delta H=648$ Oe, $g=2.01$, $\epsilon_r=13.1$, $\tan\delta=0.005$. Guía WR-75 ($a=15.8$ mm, $b=7.9$ mm). $a_s=0.7$ mm, $b_s=b$, $c=20$ mm, $x_s=0.7$ mm, $y_s=0$. Alimentación $H_0=0$. Barrido de 12 GHz a 18 GHz.

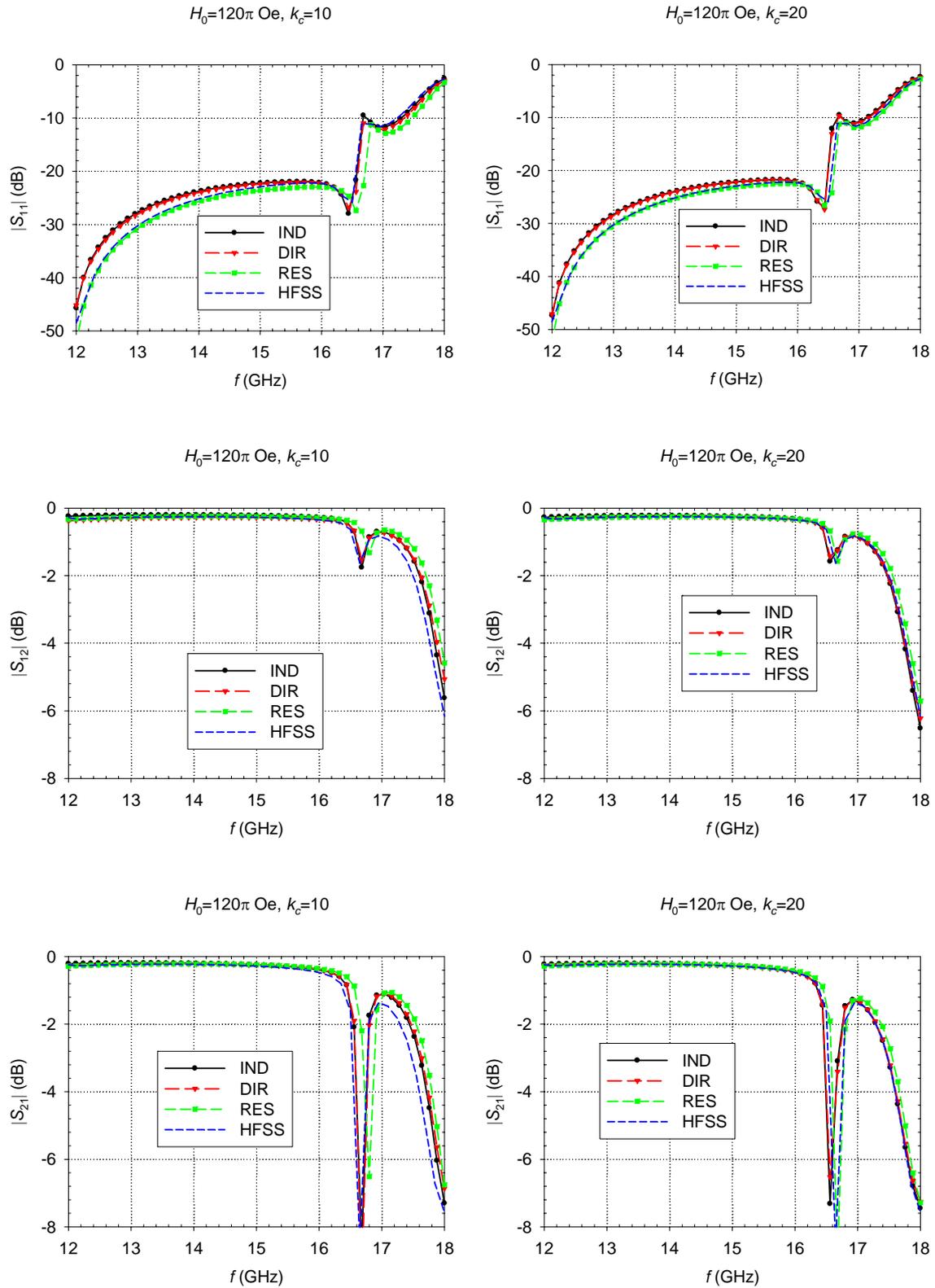


Fig. 2.39. Parámetros S de la ferrita TTI-2800: $4\pi M_s = 2800$ G, $\Delta H = 648$ Oe, $g = 2.01$, $\epsilon_r = 13.1$, $\tan\delta = 0.005$. Guía WR-75 ($a = 15.8$ mm, $b = 7.9$ mm). $a_s = 0.7$ mm, $b_s = b$, $c = 20$ mm, $x_s = 0.7$ mm, $y_s = 0$. Alimentación $H_0 = 120\pi$ Oe. Barrido de 12 GHz a 18 GHz.

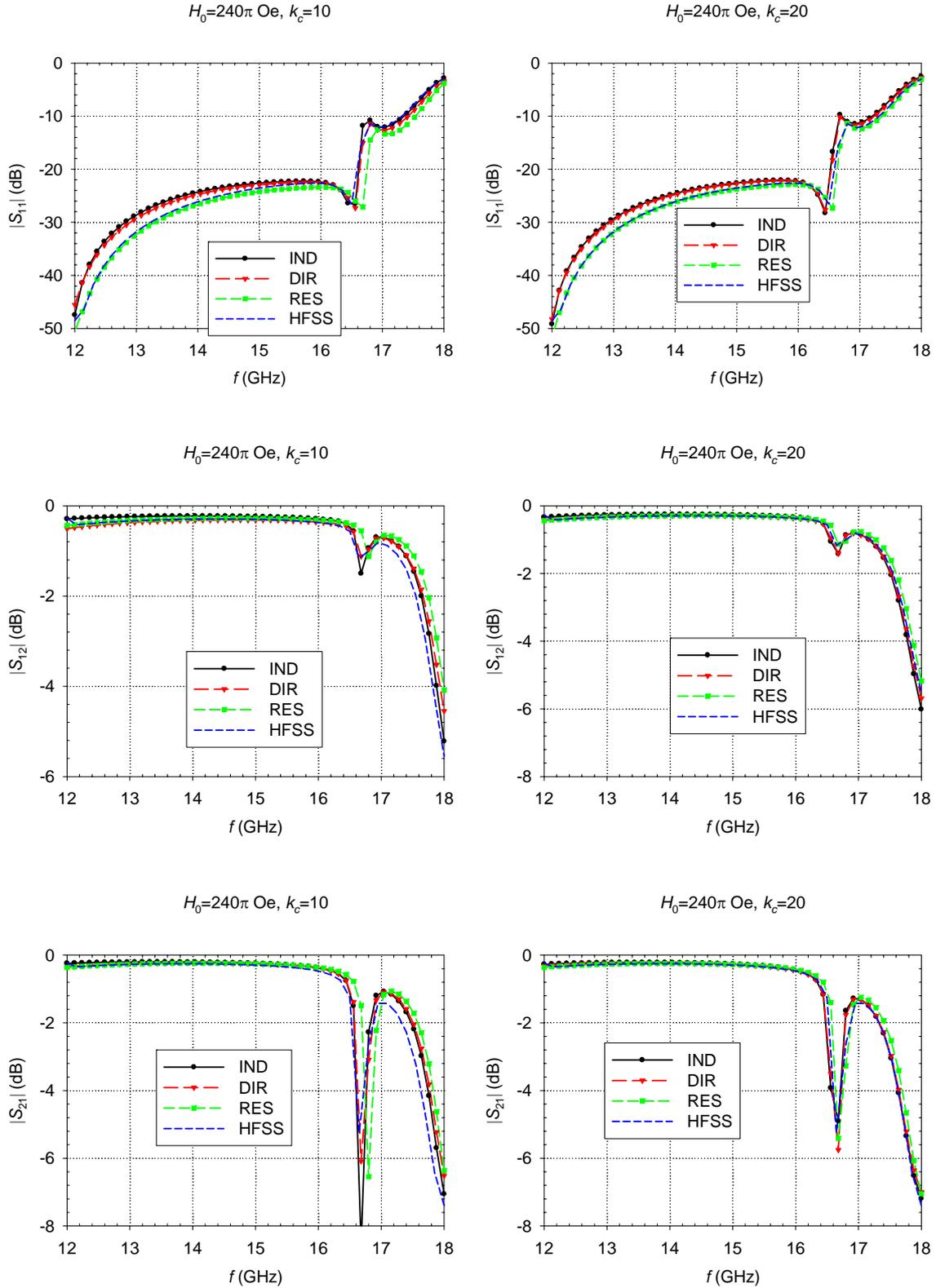


Fig. 2.40. Parámetros S de la ferrita TTI-2800: $4\pi M_s=2800$ G, $\Delta H=648$ Oe, $g=2.01$, $\epsilon_r=13.1$, $\tan\delta=0.005$. Guía WR-75 ($a=15.8$ mm, $b=7.9$ mm). $a_s=0.7$ mm, $b_s=b$, $c=20$ mm, $x_s=0.7$ mm, $y_s=0$. Alimentación $H_0=240\pi$ Oe. Barrido de 12 GHz a 18 GHz.

Las Fig 2.41-2.42 muestran unas simulaciones de la ferrita GAC-550: $4\pi M_s=550$ G, $g=2.00$, $\Delta H=45$ Oe, $\varepsilon_{r2}=14.6$, $\tan\delta=0.00015$. Guía WR-340 ($a=86.36$ mm, $b=a/2$), $a_s=16$ mm, $b_s=b$, $c=20$ mm, $x_s=(a-a_s)/2$ mm, $y_s=0$. Se realizan unas simulaciones por debajo de la resonancia (100 Oe) y cerca de la resonancia (800 Oe). En el primer caso, se comprueba que las simulaciones convergen rápidamente, mientras que en el segundo, son necesarios muchos más modos para llegar a la convergencia, debido a que la longitud de onda en la ferrita es muy pequeña. Puesto que la ferrita está centrada en x , el dispositivo es recíproco, o sea, $S_{12}=S_{21}$.

Para ambos casos de H_0 , los tiempos de cálculo en HFSS fueron de 8.2 s por punto de frecuencia. En el caso más restrictivo del CMM, que es el de $k_c=80$, el tiempo de unas 5 centésimas por punto de frecuencia.

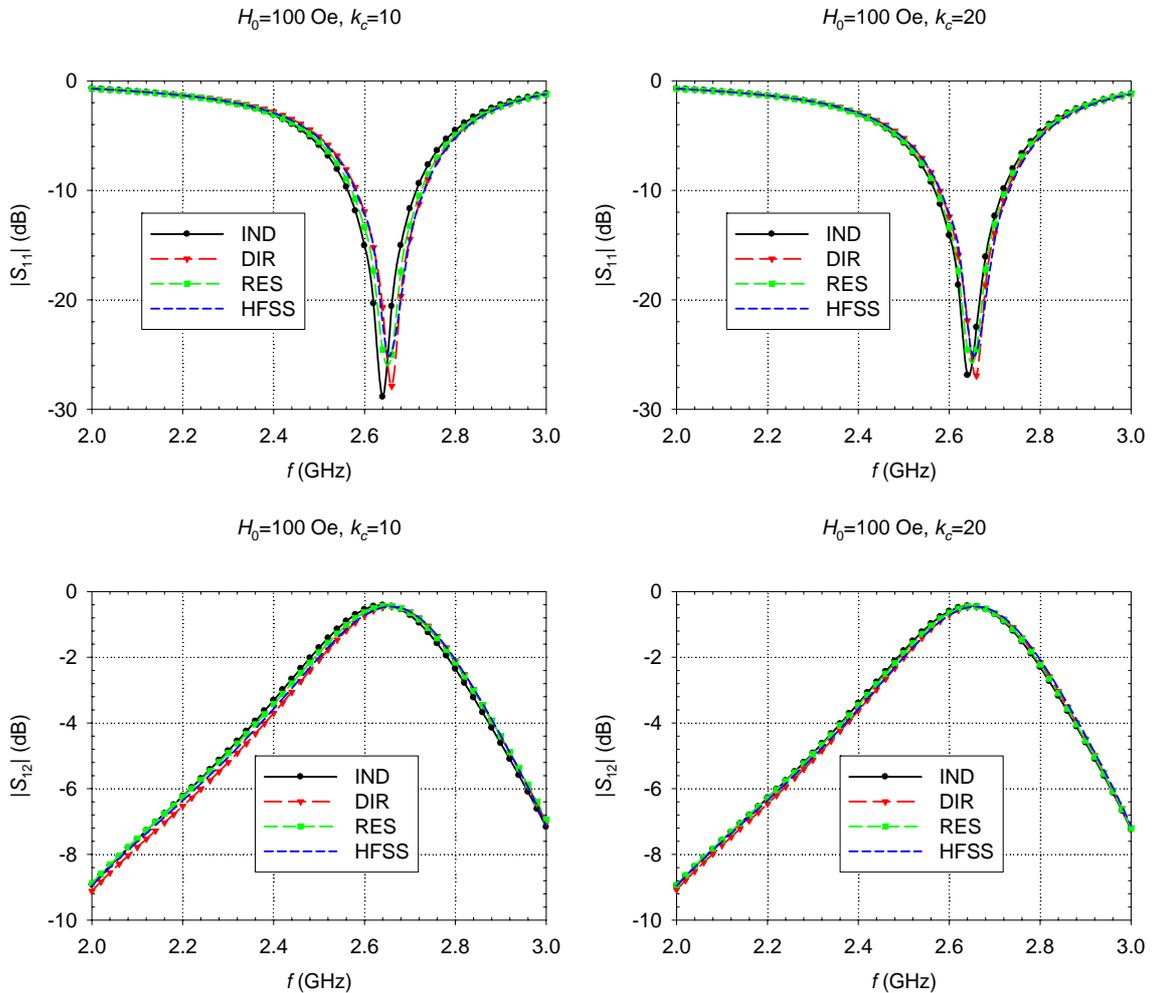


Fig. 2.41. Parámetros S de la ferrita GAC-550: $4\pi M_s=550$ G, $\Delta H=45$ Oe, $g=2.01$, $\varepsilon_r=14.6$, $\tan\delta=0.0015$. Guía WR-340 ($a=86.36$ mm, $b=43.18$ mm). $a_s=16$ mm, $b_s=b$, $c=20$ mm, $x_s=(a-a_s)/2$ mm, $y_s=0$. Alimentación $H_0=100$ Oe. Barrido de 2 GHz a 3 GHz.

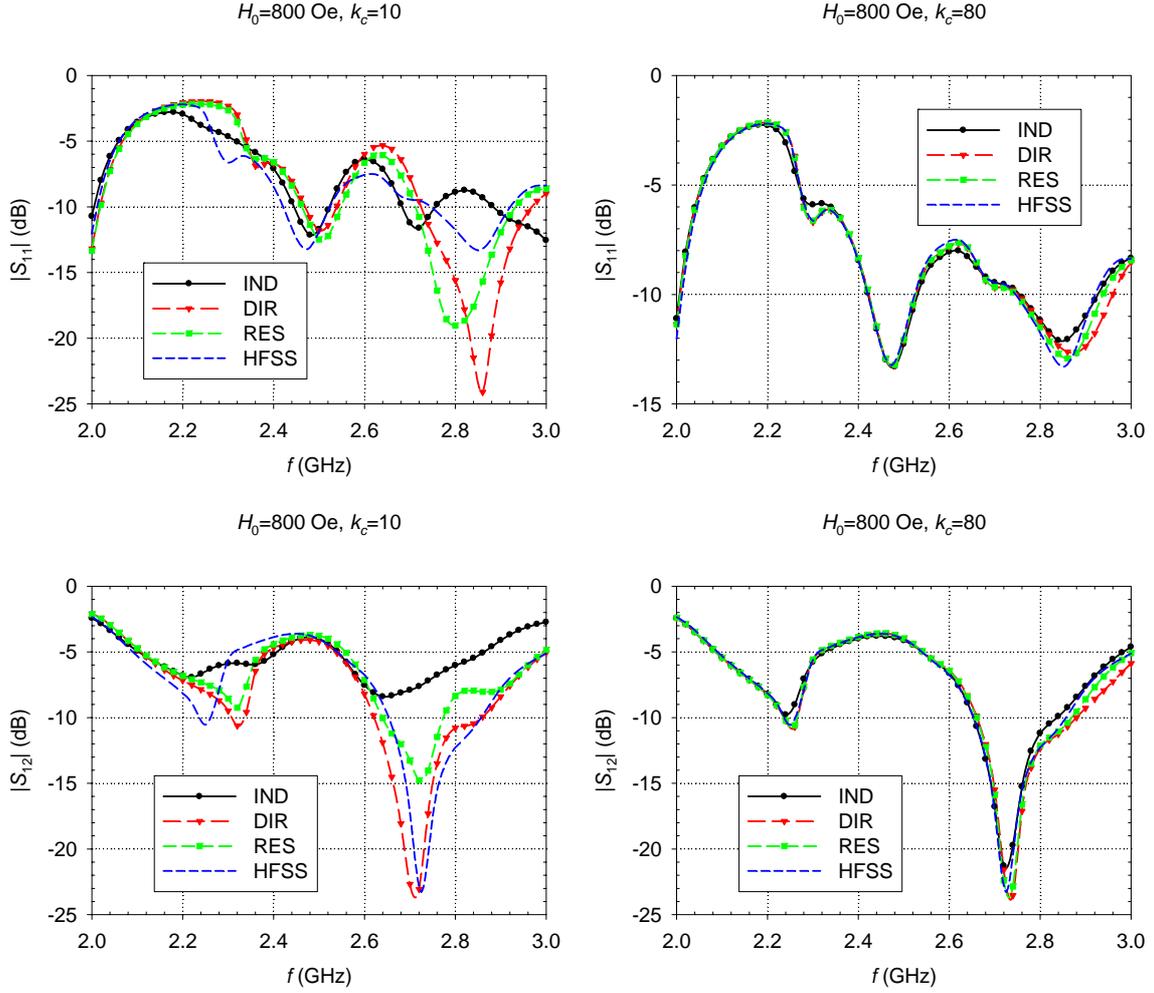


Fig. 2.42. Parámetros S de la ferrita GAC-550: $4\pi M_s=550$ G, $\Delta H=45$ Oe, $g=2.01$, $\epsilon_r=14.6$, $\tan\delta=0.0015$. Guía WR-340 ($a=86.36$ mm, $b=43.18$ mm). $a_s=16$ mm, $b_s=b$, $c=20$ mm, $x_s=(a-a_s)/2$ mm, $y_s=0$. Alimentación $H_0=800$ Oe. Barrido de 2 GHz a 3 GHz.

En el siguiente ejemplo, se ha considerado una guía de onda de sección transversal $a=86.36$ mm y $b=25$ mm, parcialmente rellena con una lámina de ferrita de $a_s=9$ mm, $b_s=b$, y $c=20$ mm, centrada en la guía ($x_s=41.68$ mm, $y_s=0$). El modelo de ferrita es el CG-550GA de Counties Laboratories, cuyos parámetros son: Factor de Lande $g=2.02$, magnetización de saturación $4\pi M_s=550$ G, anchura de línea $\Delta H<50$ Oe, permitividad relativa $\epsilon_r=14.6$, y tangente de pérdidas dieléctricas $\tan\delta < 1.5 \cdot 10^{-4}$. La ferrita se alimenta con un campo estático $H_{DC}=310$ Oe.

Si la estructura se excita con el modo TE_{10} , la respuesta del circuito es independiente de y , dado que $b_s=b$. Por ello, el conjunto de modos TE_{m0} describe los campos con exactitud.

La Fig 2.43 muestra la constante de propagación normalizada de la guía considerada, en función del número de modos base empleados. De esta figura, se puede comprobar que 20 modos base son suficientes ($m=1,\dots,20$) para obtener unos resultados buenos. De nuevo, las formulaciones directa e indirecta convergen a valores diferentes, si bien, las diferencias no son grandes.

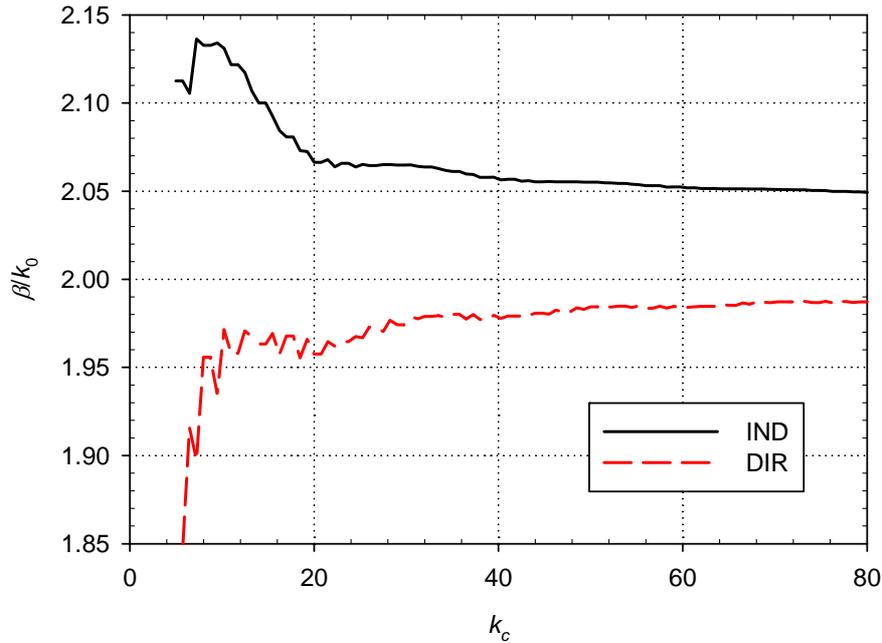


Fig. 2.43. Convergencia de la constante de propagación del modo fundamental respecto del número de modos en una ferrita CG-550-GA. $a=86.36$ mm, $b=25$ mm, $x_s=41.68$ mm, $y_s=0$, $a_s=9$ mm, $b_s=b$. Frecuencia $f=2.45$ GHz.

Las Figs. 2.44-2.45 muestran el módulo y la fase de los parámetros S de la estructura entre 2 y 3 GHz, calculados con ambas formulaciones. Se superponen los resultados obtenidos con CONCERTO y medidas realizadas en laboratorio. Estas medidas se han realizado con un analizador de redes vectorial ZVRE de Rhode & Schwarz. Las medidas están referidas al puerto estándar WR-340, a una distancia de 116.5 mm a la ferrita en ambos puertos. Por tanto, existe un salto entre diferentes secciones transversales en guía que ha de ser tenido en cuenta en las simulaciones, entre la altura 25 mm y la de 43.18 mm. El salto está centrado en el eje vertical.

Se puede comprobar que las simulaciones con el CMM concuerdan con las de CONCERTO y con los resultados experimentales. El tiempo de cálculo total de CONCERTO es muy superior al del CMM en este caso, ya que solamente se han usado modos TE_{m0} .

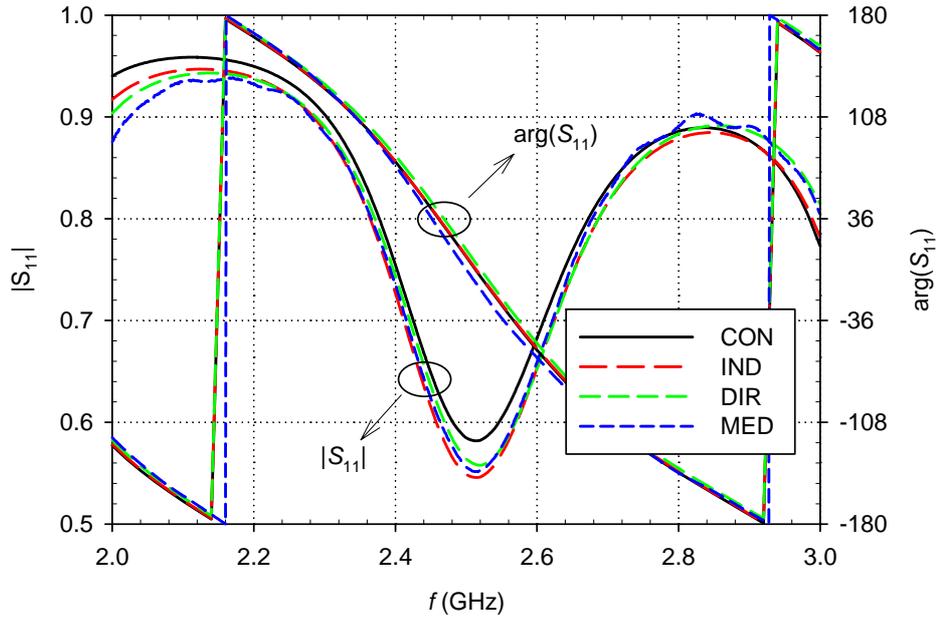


Fig. 2.44. Parámetro S_{11} de una guía parcialmente rellena de ferrita. $a=86.36$ mm, $b=25$ mm, $x_s=41.68$ mm, $y_s=0$, $a_s=9$ mm, $b_s=b$, $c=20$ mm. Resultados referidos al puerto en WR-340, situado a 116.5 mm de la ferrita.

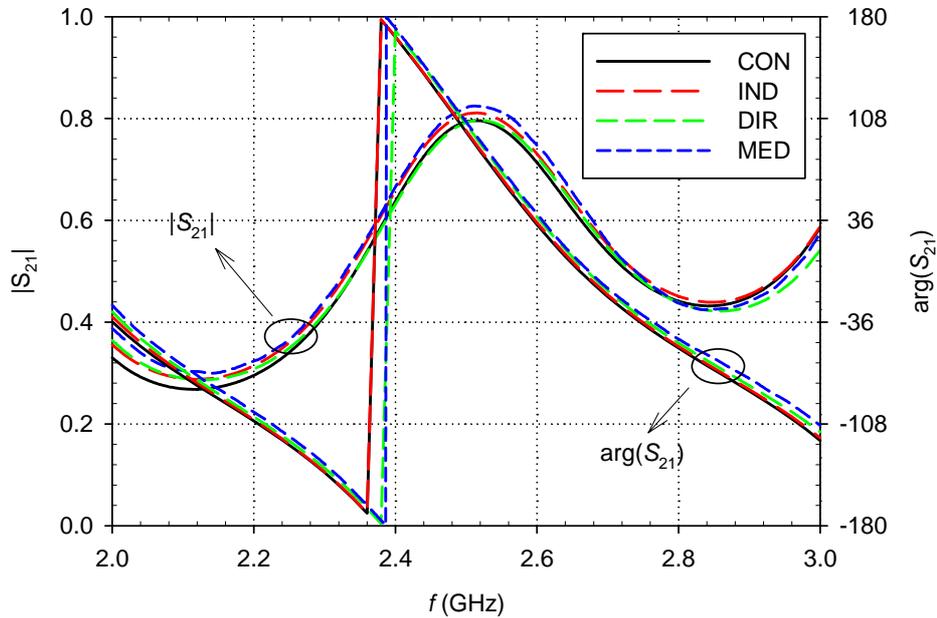


Fig. 2.45. Parámetro S_{21} de una guía parcialmente rellena de ferrita. $a=86.36$ mm, $b=25$ mm, $x_s=41.68$ mm, $y_s=0$, $a_s=9$ mm, $b_s=b$, $c=20$ mm. Resultados referidos al puerto en WR-340, situado a 116.5 mm de la ferrita.

Para verificar el comportamiento cuando la guía está parcialmente rellena en ambas dimensiones, se simula la guía anterior en función de la altura de la

muestra $b_s (y_s=0)$. Las Figs. 2.46-2.47 muestran los resultados de este barrido a 2.45 GHz. Los resultados están referidos al puerto $a=86.36$ mm y $b=25$ mm, a una distancia de 10 mm de la ferrita. El campo estático de alimentación de la ferrita es $H_{DC}=100$ Oe.

Dado que $b_s < b$, la incidencia con el modo fundamental excita todo el conjunto de modos TE y TM. En esta ocasión, se han tenido en cuenta 180 modos base para una buena convergencia en la solución. Se incluyen también los correspondientes resultados de CONCERTO. Se puede observar de nuevo la buena correspondencia entre ambos métodos.

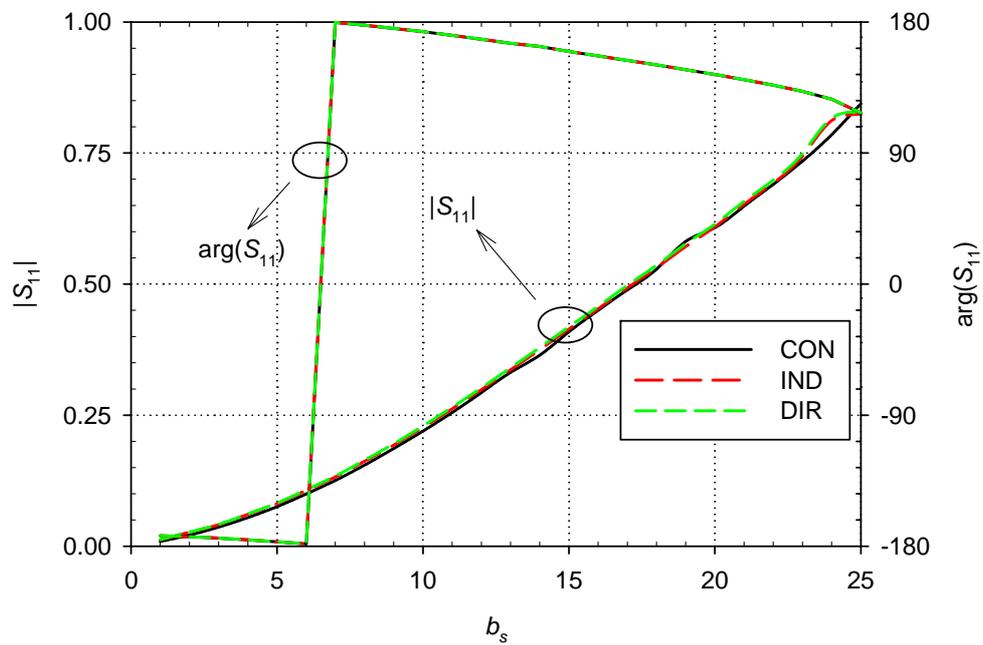


Fig. 2.46. Parámetro S_{11} de una guía parcialmente rellena de ferrita, en función del parámetro b_s . $a=86.36$ mm, $b=25$ mm, $x_s=38.68$ mm, $y_s=0$, $a_s=9$ mm, $c=20$ mm.

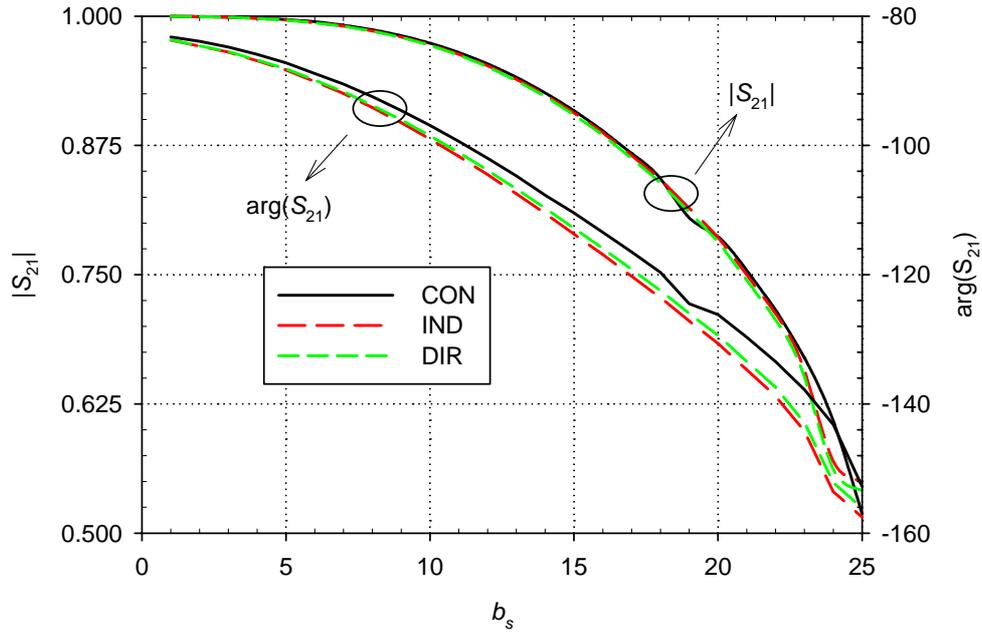


Fig. 2.47. Parámetro S_{21} de una guía parcialmente rellena de ferrita, en función del parámetro b_s . $a=86.36$ mm, $b=25$ mm, $x_s=38.68$ mm, $y_s=0$, $a_s=9$ mm, $c=20$ mm.

A continuación, se presenta un ejemplo comparado con la bibliografía. Las Figs. 2.48-2.49 muestran los resultados de la Fig. 7a de [98]. Se trata de una guía de anchura $a=7.12$ mm, en la que se pone en la posición horizontal centrada un poste de base circular y altura completa, de diámetro $d=0.25a$. Al igual que en un caso anterior, se aproxima este poste por otro de base cuadrada de igual área. Las características de la ferrita son $4\pi M_s=5000$ G, $g=2.00$, $\Delta H=0$, $\varepsilon_r=13.5$, $\tan\delta=0$. La Fig. 2.48 muestra los resultados para la ferrita excitada con un campo estático vertical $H_0=200$ Oe, y la Fig. 2.49 muestra los resultados para la ferrita sin excitar, $H_0=0$. Se comprueba que, también en el caso anisótropo, es posible sustituir un objeto eléctricamente pequeño de cualquier forma por otro rectangular y de un volumen equivalente. Como último comentario sobre estos resultados, en [98] se dice que un poste sin excitar equivale a un dieléctrico, lo cual, evidentemente, es falso.

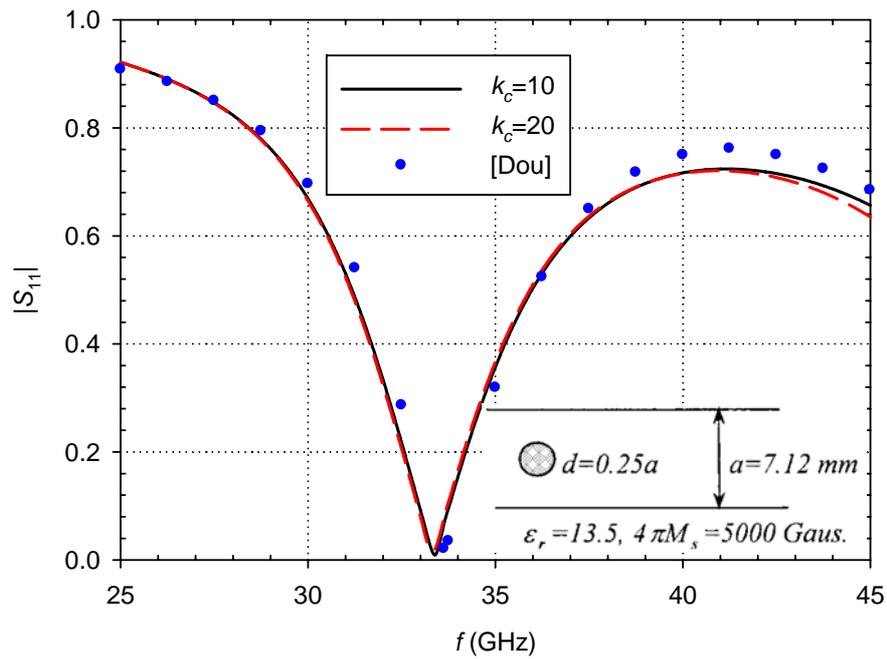


Fig. 2.48. Módulo de S_{11} . Ferrita $4\pi M_s=5000$ G, $\Delta H=0$ Oe, $g=2.00$, $\epsilon_r=13.5$, $\tan\delta=0$. Guía $a=7.12$ mm. Diámetro $d=0.25a$, $x_s=(a-a_s)/2$. Alimentación $H_0=200$ Oe. Barrido de 25 GHz a 45 GHz. Comparación con [98].

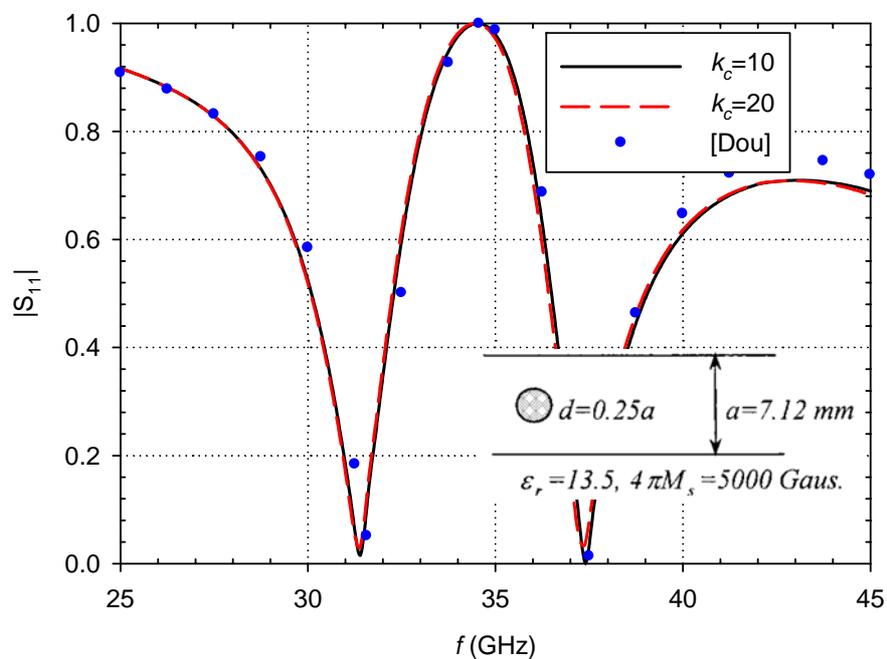


Fig. 2.49. Módulo de S_{11} . Ferrita $4\pi M_s=5000$ G, $\Delta H=0$ Oe, $g=2.00$, $\epsilon_r=13.5$, $\tan\delta=0$. Guía $a=7.12$ mm. Diámetro $d=0.25a$, $x_s=(a-a_s)/2$. Alimentación $H_0=0$ Oe. Barrido de 25 GHz a 45 GHz. Comparación con [98].

2.4.4.3. Materiales quirales

El concepto de “quiralidad” se conoce en el campo de la química desde finales del siglo XIX, aunque ya en el siglo anterior era utilizado por los químicos. El término “quiral” es un concepto geométrico que proviene de la palabra griega *cheir* ($\chi\epsilon\iota\rho$), que significa *mano*, y fue introducido por Lord Kelvin en sus *Baltimore Lectures on Molecular Dynamics and the Wave Theory of Light* [101]. En dicho trabajo, Lord Kelvin dice que un objeto, figura o grupo de puntos son quirales, y por tanto presentan quiralidad, si la imagen especular de los mismos no se puede hacer coincidir consigo misma mediante operaciones de traslación y rotación. En otras palabras, dicho objeto carece de simetría bilateral o es asimétricamente especular. Por el contrario, el objeto, figura o grupo de puntos será aquiral cuando carezca de la propiedad de quiralidad y, por tanto, se pueda superponer con su imagen especular.

La quiralidad da cuenta de la existencia de una confrontación en la orientación izquierda/derecha de algunas estructuras y es una propiedad de un objeto completo y no de un átomo particular. Una estructura quiral, geoméricamente, es dextrógira cuando presenta una orientación hacia la derecha (mano derecha) y levógira cuando la presenta hacia la izquierda (mano izquierda).

Los medios quirales presentan, entre otras, una propiedad electromagnética muy importante como es la de rotar el plano de polarización de la onda electromagnética que se propaga en su interior y que, según sea la frecuencia de trabajo, se conoce con el nombre de actividad óptica o electromagnética. Cuando el medio por el que se propaga la onda sea dextrógiro, el plano de polarización rotará hacia la derecha, mientras que cuando el medio sea levógiro, el plano rotará hacia la izquierda. Si se observa que a la salida del medio el plano de polarización de la onda no ha sufrido rotación alguna, el medio será entonces aquiral o no quiral. Para poder afirmar esto último, hay que cerciorarse de que el plano de polarización realmente no ha variado, es decir, que no haya realizado un giro de 360° .

De la misma forma que algunos cristales rotan el plano de polarización de un haz de luz linealmente polarizado (actividad óptica), es natural pensar que un conjunto de objetos quirales con una orientación dada provocarán el mismo efecto sobre una onda electromagnética a frecuencias más bajas como las microondas o las ondas milimétricas. A estas frecuencias, por ser usual en la teoría electromagnética, es preferible utilizar la permitividad y permeabilidad

relativa como los parámetros sustanciales que describen al medio material, en lugar del índice de refracción, además de un nuevo parámetro que da cuenta del grado de quiralidad y orientación del medio.

A diferencia de lo que sucede con las frecuencias ópticas, a frecuencias de microondas y ondas milimétricas no hay materiales que presenten actividad quiral, siendo entonces necesaria su “construcción” de forma artificial, mediante la inclusión, en un medio receptor, de objetos quirales que tengan las dimensiones adecuadas para que el conjunto total, medio receptor y objetos quirales, roten el plano de polarización de la onda que lo atraviesa a las frecuencias en las que se quiere poner de manifiesto este fenómeno.

En 1979, Jaggard et al. presentaron un modelo matemático a nivel macroscópico de la interacción de una onda electromagnética con una estructura quiral formada por un conjunto de hélices pequeñas aleatoriamente orientadas [102]. En él se describe razonadamente el acoplamiento entre el campo eléctrico y el campo magnético que existe en este tipo de medios, y se deducen las relaciones de constitución que describen su comportamiento electromagnético.

La Fig. 2.50 muestra un material quiral construido artificialmente incrustando hélices metálicas en un material isotrópico. Por su geometría, estas hélices rotan en el mismo sentido cualquiera que sea su orientación, de ahí que aunque estén orientadas aleatoriamente en el material, existe un efecto quiral definido en un sentido.

La idea esencial de [102] es que, para este tipo de medios y debido a la configuración de las espiras que se introducen en el medio receptor, la polarización eléctrica \mathbf{P} no depende únicamente del campo eléctrico \mathbf{E} aplicado, sino que la inducción magnética \mathbf{B} también contribuye a su valor final; del mismo modo el vector magnetización \mathbf{M} depende tanto de \mathbf{B} como de \mathbf{E} . Esta dependencia cruzada entre los campos, que involucra las dimensiones de las espiras, se especifica por un factor ξ_c o admitancia quiral. Otras cantidades se pueden también definir para describir este comportamiento, se verá más adelante en los diferentes conjuntos de relaciones de constitución que se utilizan para caracterizar estos medios. Con ello, se pueden escribir unas relaciones de constitución *especiales* en las que el vector desplazamiento \mathbf{D} en el medio no sólo depende de, \mathbf{E} sino también de la inducción magnética \mathbf{B} . Asimismo, el vector de campo magnético \mathbf{H} depende tanto de \mathbf{B} como de \mathbf{E} .



Fig. 2.50. Material quiral construido con hélices.

Este acoplamiento entre el campo eléctrico y magnético se puede explicar de la siguiente forma: la trayectoria de las hélices tiene una componente longitudinal y otra circular. La componente de corriente longitudinal contribuye al momento dipolar eléctrico y la componente de corriente circular, al momento dipolar magnético. De forma análoga, el campo magnético de la onda incidente sobre la espira tiene también una componente longitudinal. Para cuantificar este acoplo, es necesario introducir un nuevo término ξ_c en las relaciones de constitución que dé cuenta de este fenómeno y, por tanto, del grado de quiralidad del medio.

Durante las últimas décadas, la propagación de ondas electromagnéticas en el interior de medios quirales ha atraído considerablemente la atención de una parte de la comunidad científica. Los estudios realizados hasta la fecha sobre este tipo de medios y sus aplicaciones, son tan numerosos y diversos que sería imposible enumerarlos todos. Puesto que el trabajo realizado se centra en la propagación electromagnética en el interior de guías de onda de sección transversal rectangular, es razonable centrar el interés en algunos estudios realizados sobre este tipo de medios de transmisión.

En la literatura existen muchas publicaciones científicas que estudian la propagación de las ondas electromagnéticas en el interior de guías de onda conteniendo un material quiral e isótropo. A este tipo de guías de onda, se les conoce con el nombre de guía de onda quiral, traducción literal de *Chirrowaveguide* [103]. A diferencia de lo que ocurre con otros medios materiales, en algunos casos resulta muy difícil, y en otros, imposible encontrar una solución analítica cerrada del problema debido al acoplamiento intrínseco

existente entre las componentes longitudinales del campo eléctrico y del campo magnético. De las tres clases de guía de onda que se han estudiado en la literatura, planos paralelos, rectangular y circular, únicamente se han encontrado soluciones analíticas cerradas para guías de onda quiral de planos paralelos y circular. En cambio, en el caso de la guía de onda quiral rectangular, para la cual no se ha encontrado una solución analítica cerrada, las soluciones que se han propuesto hasta ahora han sido todas ellas aproximadas.

La primera publicación en la que se analiza la propagación electromagnética en el interior de guías de onda conteniendo un medio quiral se debe a Varadan et al. [104] en 1988, en el que se estudia la propagación en una guía de onda de planos paralelos totalmente llena de un medio quiral. En este artículo se utilizan las relaciones de constitución de Drude-Born-Federov. Un año más tarde, Pelet y Engheta [103], dicen introducir un nuevo tipo de guía de onda, que llaman guía de onda quiral (en inglés *chirowaveguide*). En este trabajo se resuelve la misma estructura de [104] pero utilizando las relaciones de constitución introducidas por Post. En 1990, Pelet y Engheta [105] introducen de nuevo el concepto de las guías quirales y de nuevo presentan como ejemplo el caso de la guía de planos paralelos completamente llena de un medio quiral. Ahora, además de presentar resultados de dispersión, muestran resultados correspondientes a las componentes del campo eléctrico. De todos estos trabajos se pueden extraer las siguientes características generales que presentan este nuevo tipo de medios de transmisión:

- Debido al acoplamiento que existe entre los campos eléctrico y magnético, los modos soportados por las guías de onda quiral son híbridos, y por tanto no existen ni modos TEM, ni TE ni TM [103], [105].
- El comportamiento de este nuevo tipo de medios de transmisión es parecido al de las guías de onda llenas de ferrita magnetizada, aunque la principal diferencia estriba en que los medios quirales son recíprocos mientras que las ferritas no lo son [103], [105].
- A diferencia de lo que ocurre en un medio quiral ilimitado, en guías de onda quirales no existen ondas circularmente polarizadas a derechas e izquierdas, y no existe una solución analítica cerrada del problema, y por tanto, se deben utilizar métodos numéricos para obtener una solución aproximada. De entre todos los que nos podemos encontrar en la bibliografía caben destacar los siguientes: el método de elementos finitos (FEM), [106]-[107], y el de las diferencias finitas (FDTD), [108].

La propagación en las guías de onda con estos materiales también puede resolverse con el CMM [86]-[89]. Para ello, es necesario identificar las relaciones constitutivas de un medio quiral con la forma general definida en este trabajo. Se han definido las ecuaciones constitutivas del medio (relaciones entre los campos eléctricos y magnéticos) para cualquier medio bianisótropo de la siguiente forma (ver también [109], [110] ó [111]):

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{B} &= \mu \mathbf{H} + \eta \mathbf{E} \\ \mathbf{D} &= \varepsilon \mathbf{E} + \xi \mathbf{H} \end{aligned} \right\} \quad (2.456)$$

de tal forma que μ y ε son la permeabilidad y la permitividad clásicas de los materiales, pudiendo ser matrices, y η y ξ son parámetros magnetoeléctricos que son también matrices en general.

Pero resulta que los materiales quirales no vienen, en principio, caracterizados por las ecuaciones constitutivas (2.456), sino que suelen venir caracterizados de otra forma [109], [112]. Las relaciones constitutivas tienen varias formas en la literatura. Por ejemplo, están las *Relaciones de Drude-Born-Federov*:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{D} &= \varepsilon' (\mathbf{E} + \beta \nabla \times \mathbf{E}) \\ \mathbf{B} &= \mu' (\mathbf{H} + \beta \nabla \times \mathbf{H}) \end{aligned} \right\} \quad (2.457)$$

Estas ecuaciones se pueden escribir, a través de las Ecuaciones de Maxwell, como [112]:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{D} &= \varepsilon'' \mathbf{E} - j\omega\chi \mathbf{H} \\ \mathbf{B} &= \mu'' \mathbf{H} + j\omega\chi \mathbf{E} \end{aligned} \right\} \quad (2.458)$$

donde:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon'' &= \varepsilon' \Delta \\ \mu'' &= \mu' \Delta \\ \chi &= \varepsilon' \mu' \beta \Delta \end{aligned} \quad \Delta = \frac{1}{1 - \beta^2 \omega^2 \varepsilon' \mu'} \right\} \quad (2.459)$$

Ecuación que, a su vez, podemos reescribir como (véase [112]):

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{D} &= \varepsilon_p \mathbf{E} - j\xi \mathbf{H} \\ \mathbf{B} &= \mu_p (\mathbf{H} + j\xi \mathbf{E}) \end{aligned} \right\} \quad (2.460)$$

donde cada parámetro es:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_p &= \varepsilon' \\ \mu_p &= \mu' \Delta \\ \xi &= \omega \varepsilon' \beta \end{aligned} \quad \Delta = \frac{1}{1 - \beta^2 \omega^2 \varepsilon' \mu'} \right\} \quad (2.461)$$

de tal forma que el parámetro $\xi = \omega \varepsilon' \beta$ es conocido como la admitancia de quiralidad, teniendo, por lo tanto, dimensiones de Ω^{-1} , o mho, o Siemens.

Otras relaciones similares, conocidas como *Relaciones de Post* son de la forma

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \varepsilon_p \mathbf{E} - j\xi_c \mathbf{B} \\ \mathbf{H} &= \frac{1}{\mu_p} \mathbf{B} - j\xi_c \mathbf{E} \end{aligned} \quad (2.462)$$

Las relaciones de constitución (2.462) son válidas para medios que contengan espiras, que son las que proporcionan el comportamiento quiral, con un tamaño eléctrico pequeño. Sin embargo, también se ha descrito en la literatura [102] que esas mismas relaciones constitutivas se pueden aplicar a cualquier medio quiral isótropo compuesto de espiras de cualquier tamaño, aunque la justificación de este comportamiento no parece tan evidente en este caso.

Estas formas de las ecuaciones constitutivas del medio no coinciden con la forma estándar o normal de los medios anisótropos en general, descrita en (2.456). Para poder utilizar una herramienta general que analice un problema general bianisótropo para medios quirales es necesario reescribir (2.462), para que quede en la forma general:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{B} &= \mu_m \mathbf{H} + \eta_m \mathbf{E} \\ \mathbf{D} &= \varepsilon_m \mathbf{E} + \xi_m \mathbf{H} \end{aligned} \right\} \quad (2.463)$$

donde se ha añadido el subíndice m para indicar los parámetros del medio.

De esta forma, identificando (2.463) y (2.462), se tiene que:

$$\left. \begin{aligned} \mu_m &= \mu_p \quad ; \quad \eta_m = j\mu_p \xi_c \\ \varepsilon_m &= \varepsilon_p + \mu_p \xi_c^2 \quad ; \quad \xi_m = -j\mu_p \xi_c \end{aligned} \right\} \quad (2.464)$$

Dentro de los medios generales bianisótropos, están los medios biisótropos, que incluyen a los medios quirales. Las relaciones básicas de los medios biisótropos [113] son muy parecidas a las de los bianisótropos, pero vienen regidas únicamente por escalares. Se suelen expresar de la manera

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \varepsilon \mathbf{E} + (\chi - j\kappa) \mathbf{H} \\ \mathbf{B} &= \mu \mathbf{H} + (\chi + j\kappa) \mathbf{E} \end{aligned} \quad (2.465)$$

Donde ε y μ son la permitividad y permeabilidad habituales que describen el acoplo eléctrico y magnético, respectivamente, κ es el parámetro adimensional de Pasteur, que da cuenta del grado de quiralidad del medio, y χ , el parámetro de Tellegen, es el factor adimensional que da cuenta del grado de no

reciprocidad que presenta el medio. Existe controversia sobre la posibilidad de la existencia real de los materiales con parámetros de Tegellen no nulos.

Las expresiones que ligan los parámetros constitutivos de un medio biisótropo general con los parámetros habituales de un material quiral son:

$$\varepsilon_p = \varepsilon - \frac{\mu_0 \varepsilon_0}{\mu} (\chi^2 + \kappa^2) \quad (2.466)$$

$$\mu_p = \mu \quad (2.467)$$

$$\xi_c = \frac{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}{\mu} \kappa \quad (2.468)$$

Y, al revés:

$$\varepsilon = \varepsilon_p + \frac{\mu_0 \varepsilon_0}{\mu_p} (\chi^2 + \kappa^2) \quad (2.469)$$

$$\mu = \mu_p \quad (2.470)$$

$$\kappa = \frac{\mu}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} \xi_c \quad (2.471)$$

Es necesario apuntar que los medios quirales que responden a las relaciones de constitución anteriores son medios sin pérdidas y recíprocos, como se puede apreciar examinando los términos de acoplo cruzados que tienen la misma parte imaginaria. Por lo tanto, el fenómeno de actividad electromagnética difiere del conocido como rotación de Faraday (por ejemplo en ferritas magnetizadas en la dirección de propagación) en que, en un medio quiral la rotación del plano de polarización de una onda linealmente polarizada no depende del sentido de propagación de la onda y en el caso de la ferrita, sí.

El conocimiento de las relaciones de constitución de este tipo de medios, junto con la posibilidad de poder construir artificialmente estos materiales y de caracterizarlos posteriormente, estimularon el interés por parte de la comunidad científica y fomentaron la investigación en este campo. Así, los primeros estudios sobre la propagación de ondas electromagnéticas en un medio quiral ilimitado, la reflexión y refracción en la interfaz aire-medio quiral, la interacción con cilindros circulares, etc., han ido dando lugar a otros estudios mucho más complejos [23].

En este trabajo, se presentan una serie de resultados de materiales quirales en guía de onda, para diferentes tamaños de éstos y diferentes valores de sus parámetros constitutivos. Se añade, para realizar la comparación, los resultados incluidos en [54] referidos a materiales quirales. Como se ha comentado en la sección anterior, en [54] se implementa la formulación directa, y se comprueba

Modelado con técnicas modales de estructuras de microondas basadas en guías N-furcadas
arbitrariamente rellenas con materiales

que sus resultados son exactamente coincidentes con los de este trabajo. Se compara únicamente con la formulación indirecta desarrollada en este trabajo, para poder ver las discrepancias entre ambas formulaciones en el análisis de materiales quirales.

La Fig. 2.51 reproduce los resultados obtenidos en la Fig. 7 de [54]. En una guía WR-90, $a=22.86$ mm, $b=10.16$ mm, se introduce un poste dieléctrico de $a_s=11$ mm, $b_s=5$ mm, $x_s=(a-a_s)/2$, $y_s=0$, $\varepsilon_r=2.5$ y $\mu_r=1$, según la nomenclatura de la Fig. 2.15. Se hace un barrido para la profundidad del material c desde 0 a 20 mm, a la frecuencia $f=9$ GHz. La admitancia de quiralidad ξ_c toma los valores $5 \cdot 10^{-4}$, 10^{-3} y $1.5 \cdot 10^{-3} \Omega^{-1}$.

Todos los casos son de una quiralidad muy pequeña, es decir, casi todos ellos son el mismo material isótropo, de valores pequeños: $\varepsilon_r=2.5$, $\mu_r=1$. Por ello, las discrepancias son mínimas. La explicación es la siguiente: Los parámetros de las ecuaciones constitutivas generales para un medio bianisótropo se relacionan con los parámetros quirales de la forma

$$\left. \begin{aligned} \mu_m &= \mu \quad ; \quad \eta_m = j\mu\xi_c \\ \varepsilon_m &= \varepsilon + \mu\xi_c^2 \quad ; \quad \xi_m = -j\mu\xi_c \end{aligned} \right\} \quad (2.472)$$

Para un parámetro de quiralidad pequeño como, $\xi_c=10^{-3}$, se tiene que $\mu\xi_c^2/\varepsilon \approx 0.15$ puede comprobar que apenas influye en la permitividad total, puesto que queda enmascarado por ε . Por otro lado, es de esperar, que si ε es pequeño, se noten más las discrepancias.

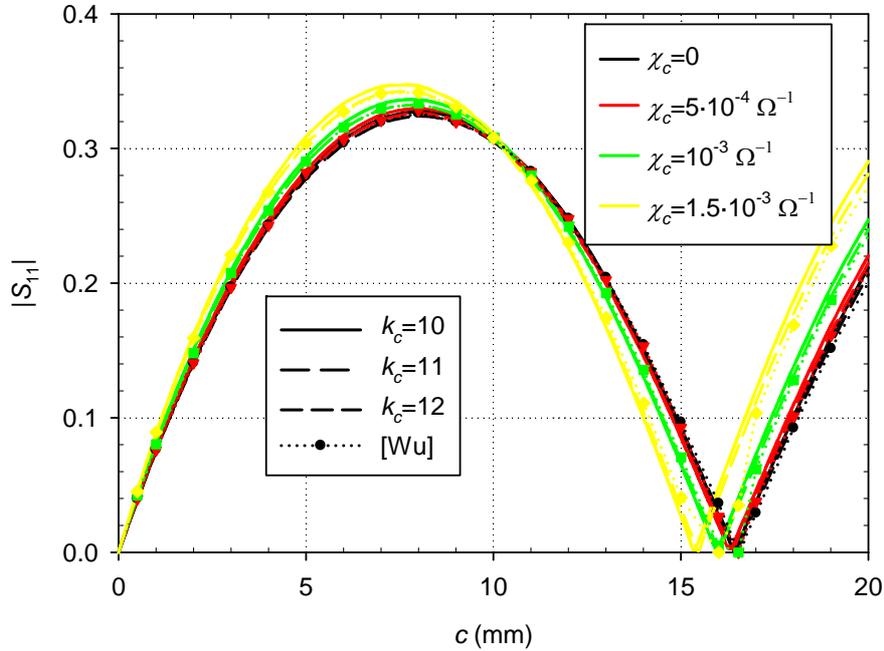


Fig. 2.51. Módulo de S_{11} . $a=22.86$ mm, $b=10.16$ mm, material de $a_s=11$ mm, $b_s=5$ mm, $x_s=(a-a_s)/2$, $y_s=0$, $\varepsilon_r=2.5$ y $\mu_r=1$. Se hace un barrido en c de 0 a 20 mm, Frecuencia $f=9$ GHz. La admitancia de quiralidad ξ_c toma los valores $5 \cdot 10^{-4}$, 10^{-3} y $1.5 \cdot 10^{-3} \Omega^{-1}$.

Validación con [54].

La Fig. 2.52 reproduce los resultados de la Fig. 11 de [54], que tiene la misma configuración que la los resultados de la Fig. 2.51 anterior. En este caso se hace un barrido en longitud del material, como antes, pero para diferentes permitividades $\epsilon_r=1, 2, 3$ y 4 ($\mu_r=1$), y una única admitancia de quiralidad $\xi_c=10^{-4} \Omega^{-1}$. Se puede comprobar que, a medida que ϵ_r disminuye, las discrepancias entre las dos formulaciones aumentan. Nótese que ninguno de los resultados de materiales quirales proporcionados por [54] va acompañado de comparaciones.

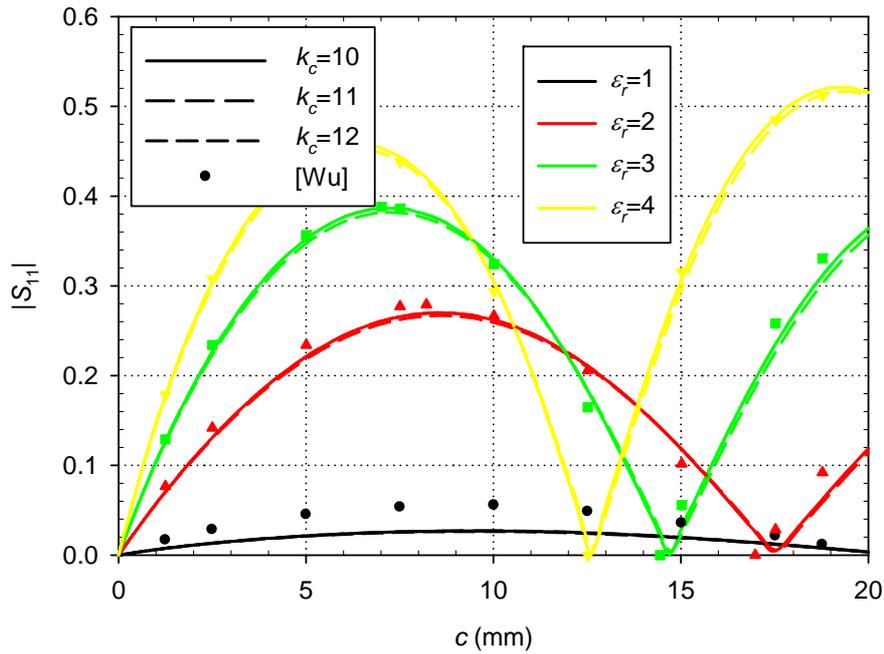


Fig. 2.52. Módulo de S_{11} . $a=22.86$ mm, $b=10.16$ mm, material de $a_s=11$ mm, $b_s=5$ mm, $x_s=(a-a_s)/2$, $y_s=0$, $\mu_r=1$ y $\xi_c=10^{-4} \Omega^{-1}$. Se hace un barrido en c de 0 a 20 mm, Frecuencia $f=9$ GHz. La permitividad ϵ_r toma los valores 1,2,3 y 4. Validación con [54].

Por último, en la Fig. 2.53, se hace un barrido en longitud del material, como antes, pero para diferentes anchuras del material $a_s=a/4$, $a/2$, $3a/4$ y a , con una única permitividad $\varepsilon_r=2.5$ y admitancia de quiralidad $\xi_c=10^{-4} \Omega^{-1}$, a $f=9$ GHz. Este caso se corresponde con la Fig. 15 de [54], cuya configuración es la misma que en la Fig. 2.51. Esta vez, tampoco se aprecian discrepancias, debido a que los parámetros constitutivos se mantienen en todo caso con valores bajos.

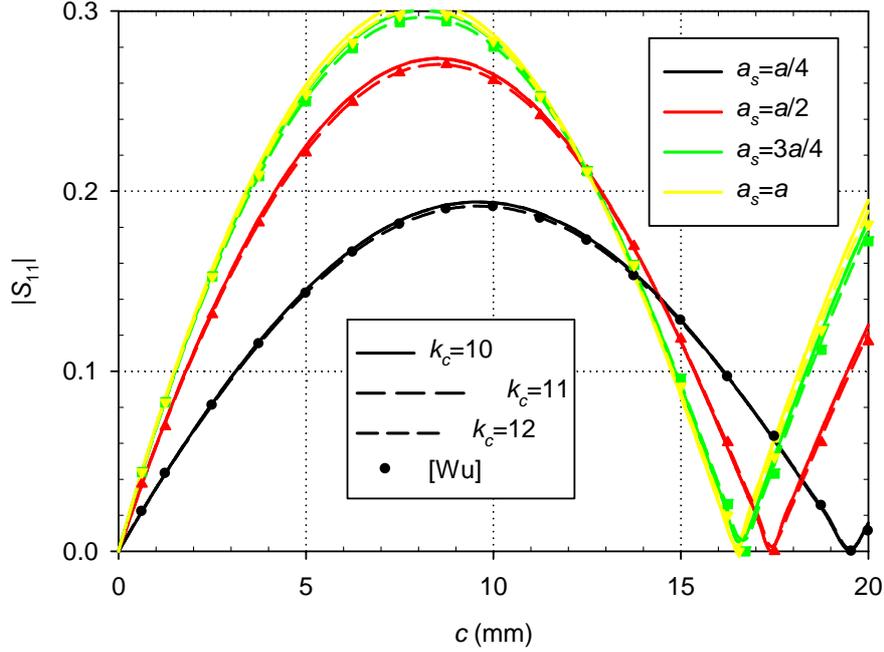


Fig. 2.53. Módulo de S_{11} . $a=22.86$ mm, $b=10.16$ mm, material de $b_s=5$ mm, $x_s=(a-a_s)/2$, $y_s=0$, $\varepsilon_r=2.5$, $\mu_r=1$, $\xi_c=5 \cdot 10^{-4} \Omega^{-1}$. Se hace un barrido en c de 0 a 20 mm, Frecuencia $f=9$ GHz. La anchura a_s toma los valores $a/4$, $a/2$, $3a/4$ y a . Validación con [54].

Llegados a este punto, parece que se observa que las diferencias entre ambas formulaciones en el caso de los materiales quirales son pequeñas. Sin embargo, todos los ejemplos se han realizado para valores constitutivos bajos. Se va a comprobar a continuación que estas diferencias aumentan notablemente cuando los materiales tienen una quiralidad más elevada.

No existen resultados en la literatura sobre convergencia y parámetros S en guía rectangular, salvo los ya mencionados de [54], que, como se ha dicho, implementa la formulación directa. Por tanto, todas las conclusiones extraídas a partir de estos resultados se han de basar en otro tipo de razonamientos.

La Fig. 2.54 representa la convergencia del modo fundamental en una guía de onda WR-90 ($a=22.86$ mm, $b=10.16$ mm) que contiene un material quiral de tamaño $a_s=11$ mm y $b_s=5$ mm, a una distancia de las paredes $x_s=(a-a_s)/2$, $y_s=0$, a una frecuencia $f=9$ GHz. Los parámetros del material, según (2.462), son: $\varepsilon=2.5\varepsilon_0$, $\mu_p=\mu_0$. Se realizan dos casos, $\xi_c=2\cdot 10^{-3}\ \Omega^{-1}$ y $\xi_c=8\cdot 10^{-3}\ \Omega^{-1}$.

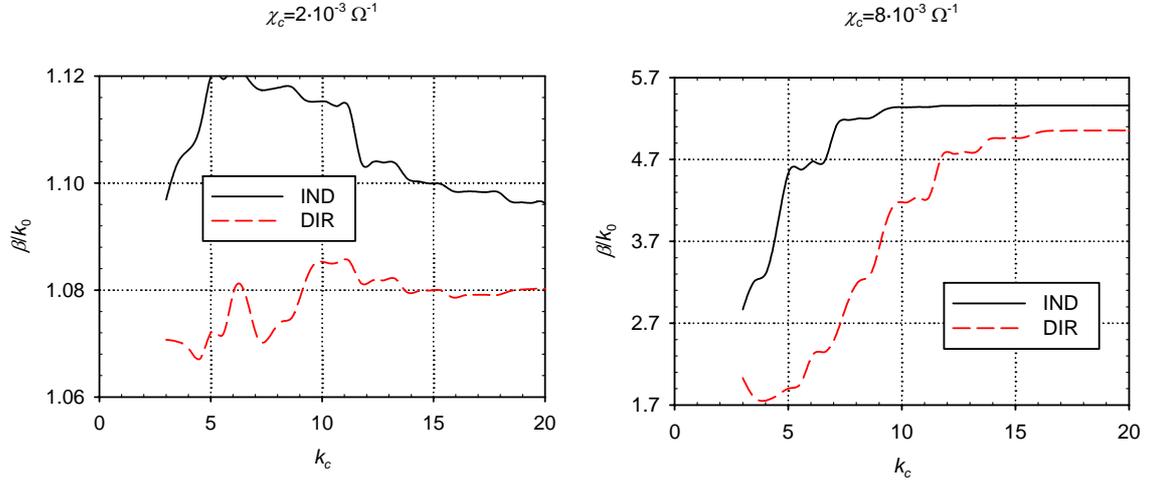


Fig. 2.54. Constante de propagación del modo fundamental normalizada al número de onda del vacío. $a_s=11$ mm, $b_s=5$ mm, $x_s=(a-a_s)/2$, $y_s=0$, $\varepsilon=2.5\varepsilon_0$, $\mu_p=\mu_0$. Dos casos: $\xi_c=2\cdot 10^{-3}\ \Omega^{-1}$ y $\xi_c=8\cdot 10^{-3}\ \Omega^{-1}$. Frecuencia $f=9$ GHz.

Se puede comprobar la mejor convergencia de la formulación indirecta, especialmente cuando el material tiene una quiralidad grande. Es por ello que, al presentar [54] resultados únicamente con parámetros constitutivos bajos, no difieren en exceso de los correctos.

La Fig. 2.55 muestra los parámetros S de los casos recogidos en la Fig. 2.54, calculados para $k_c=10$, y una longitud del material $c=4$ mm, donde se observa este hecho. Compruébese que las discrepancias, a medida que los parámetros constitutivos aumentan, son mayores.

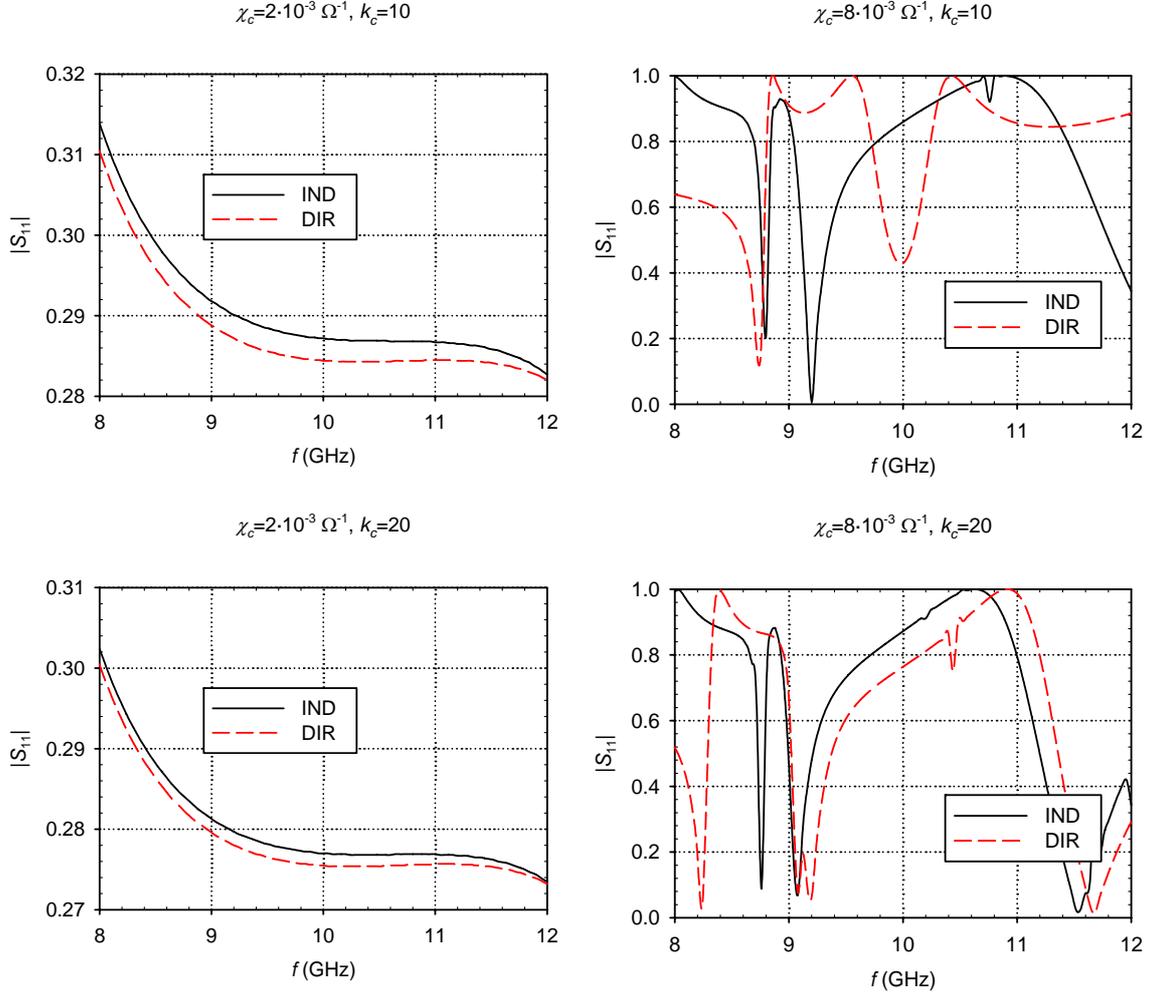


Fig. 2.55. Módulo del parámetro S_{11} entre 8 GHz y 12 GHz para los dos casos de la Fig. 2.55, con $c=4$ mm, para los casos de $k_c=10$ y $k_c=20$.

2.4.4.4. Materiales bianisótropos

En los apartados anteriores, se ha demostrado que la formulación indirecta desarrollada es la correcta para resolver la propagación en guías de onda inhomogéneas. Allá donde ha sido posible, se han adjuntado resultados procedentes de la bibliografía o de simuladores comerciales para validar los resultados obtenidos.

Existen materiales más generales que los isótropos, las ferritas o los materiales quirales, que también podrían ser analizados con esta técnica con facilidad, mientras que, con otras, el desarrollo analítico sería imposible o extremadamente complejo. Un ejemplo de estos materiales generales es el plasma quiral, que es un material bianisótropo, es decir, tiene componentes en las matrices constitutivas fuera de la diagonal, además de tener acoplos cruzados como los materiales quirales [69]. Para demostrar la potencia del método desarrollado, se han obtenido resultados de convergencia y parámetros S . Se han comparado los resultados de las formulaciones directa e indirecta, y se ha observado el mismo comportamiento que hasta ahora: los resultados no difieren en exceso para parámetros constitutivos bajos, mientras que difieren sustancialmente para parámetros altos, además de presentar la formulación indirecta una convergencia mucho mejor.

Un plasma quiral es el caso más conocido de anisotropía eléctrica. Consiste en un plasma en el que se introducen objetos que dotan al material de propiedades quirales. Al contrario de los materiales quirales, y debido a la anisotropía, los plasmas quirales son no recíprocos, y sus propiedades pueden ser controladas externamente con un campo magnético estático de alimentación. Esta mezcla de quiralidad y anisotropía tiene aplicaciones en guías quirales, en el control de la sección recta radar de blancos o el control de radiación y polarización de antenas y arrays en medios quirales.

Un plasma quiral tiene los siguientes parámetros constitutivos:

$$\hat{\epsilon} = \hat{\epsilon}_{\infty} \left(1 - \frac{f_p^2}{f^2 - f_g^2} \right) \quad (2.473)$$

$$\hat{\epsilon}_z = \hat{\epsilon}_{\infty} \left(1 - \frac{f_p^2}{f^2} \right) \quad (2.474)$$

$$\hat{g} = \hat{\epsilon}_{\infty} \frac{f_p^2 f_g}{f(f^2 - f_g^2)} \quad (2.475)$$

donde ε_∞ es la permitividad asintótica de alta frecuencia, f_p es la frecuencia de plasma y f_g es la frecuencia de resonancia giroeléctrica.

Estas variables dependen a su vez de otros parámetros físicos y del campo magnético estático de alimentación, al igual que otros materiales como las ferritas. Sin embargo, como se pretende únicamente comprobar el buen comportamiento del método en este tipo de materiales, se van a escoger valores arbitrarios de los valores recogidos en (2.473)-(2.475).

Para un plasma magnetizado longitudinalmente (z), la permitividad tiene la forma

$$\varepsilon_c = \begin{pmatrix} \varepsilon & -j\hat{g} & 0 \\ j\hat{g} & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{pmatrix} \quad (2.476)$$

Mientras que, para un plasma magnetizado verticalmente (y), la permitividad tiene la forma

$$\varepsilon_c = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & -j\hat{g} \\ 0 & \varepsilon_z & 0 \\ j\hat{g} & 0 & \varepsilon \end{pmatrix} \quad (2.477)$$

Este caso de magnetización vertical es más general desde el punto de vista del CMM, puesto que existe acoplo entre las componentes transversales y axial, a través del valor de \hat{g} , lo que no ocurre magnetizando en z , donde se consiguen efectos girótropos.

El plasma quirral tiene además una admitancia quirral ξ_c , que contribuye a los parámetros constitutivos de la forma

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon &= \varepsilon_c + \xi_c^2 \mu_0 \mu_r I \\ \mu &= \mu_0 \mu_r I \\ \eta &= -j\mu_0 \mu_r \xi_c I \\ \xi &= j\mu_0 \mu_r \xi_c I \end{aligned} \right\} \quad (2.478)$$

donde I es la matriz identidad de orden 3. Dado que no existen precedentes en la literatura sobre el análisis de plasmas quirales en guía rectangular, ni simuladores comerciales que sean capaces de modelar estos materiales, no se han podido comparar las gráficas siguientes con los resultados de otros métodos. Se hace la comparación de los resultados obtenidos mediante las formulaciones directa e indirecta del CMM para comprobar las diferencias de comportamiento de ambas.

Se han simulado dos plasmas quirales diferentes, para los casos de parámetros constitutivos altos y bajos. El plasma quiral de valores bajos tiene $\epsilon_\infty=6$, $\xi_c=10^{-3}$ mho y $\mu_r=1.2$, mientras que el plasma quiral de valores altos tiene $\epsilon_\infty=15$, $\xi_c=5 \cdot 10^{-3}$ mho y $\mu_r=2$. En ambos casos, se ha tomado $f_p=1.5$ GHz y $f_g=10$ GHz. Ambos casos se han simulado para los casos de magnetización en z y en y , lo que da lugar a cuatro situaciones físicas diferentes. La guía de onda es la WR-340 ($a=86.36$ mm, $b=43.18$ mm). Las posiciones en la guía de onda son $x_s=35.18$ mm, (centrado en x) $y_s=0$, $a_s=16$ mm, $b_s=30$ mm, y $c=10$ mm. Nótese que, aunque el material es no recíproco, su posición centrada en la guía convierte la estructura total en recíproca.

En la Fig. 2.56, se realiza un estudio de convergencia para $f=2.45$ GHz. Se representa la parte imaginaria de la constante de propagación del modo fundamental de la guía inhomogénea normalizada al número de onda del vacío, en función del número de modos base empleados. En los casos de parámetros constitutivos bajos, se comprueba que ambas formulaciones tienen un valor cercano al final en torno a $k_c=14$, En el caso de los valores altos, la formulación indirecta converge para $k_c=14$, mientras que la directa no lo hace hasta, aproximadamente $k_c=20$. Se observa un comportamiento similar en el caso de la convergencia para el caso de polarización en y y en z .

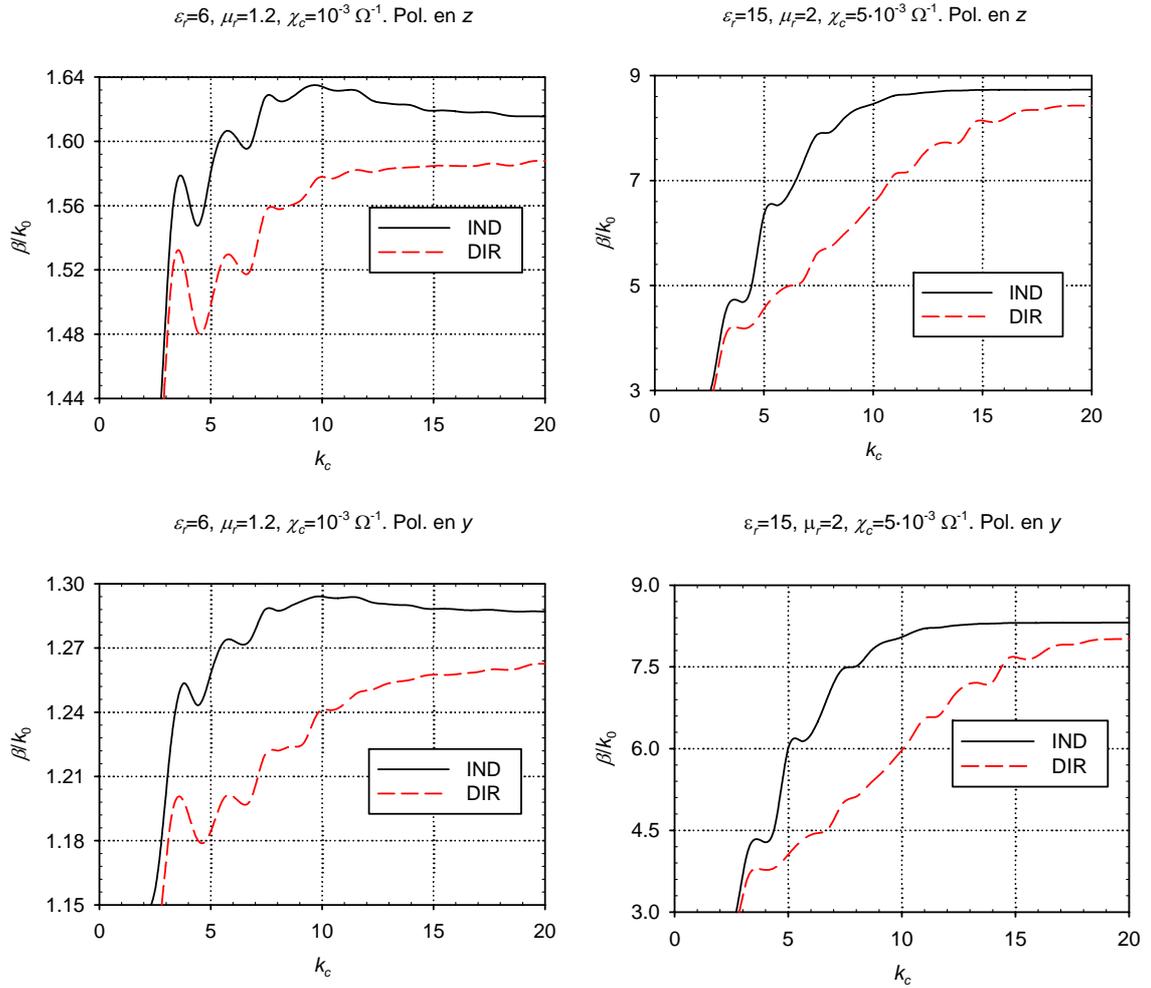


Fig. 2.56. Constante de propagación del modo fundamental normalizada al número de onda del vacío. Parámetros bajos ($\varepsilon_r=6, \chi_c=10^{-3} \Omega^{-1}$ y $\mu_r=1.2$) y parámetros altos ($\varepsilon_r=15, \chi_c=5 \cdot 10^{-3} \Omega^{-1}$ y $\mu_r=2$). Magnetización del plasma según y y según z . $f_p=1.5$ GHz, $f_g=10$ GHz en todos los casos. Las posiciones son $x_s=(a-a_s)/2, y_s=0, a_s=16$ mm, $b_s=30$ mm.

La Fig. 2.57 representa los parámetros S de toda la estructura, respecto de la frecuencia, entre 2 y 3 GHz. Los resultados se han obtenido usando $k_c=14$. En Fig. 2.57, se comparan las formulaciones directa e indirecta para el caso de parámetros constitutivos bajos y magnetización estática en z . Como es de esperar, los resultados son similares para ambas formulaciones, ya que, en la Fig. 2.56, se ve que la discrepancia es pequeña para este caso y este número de modos.

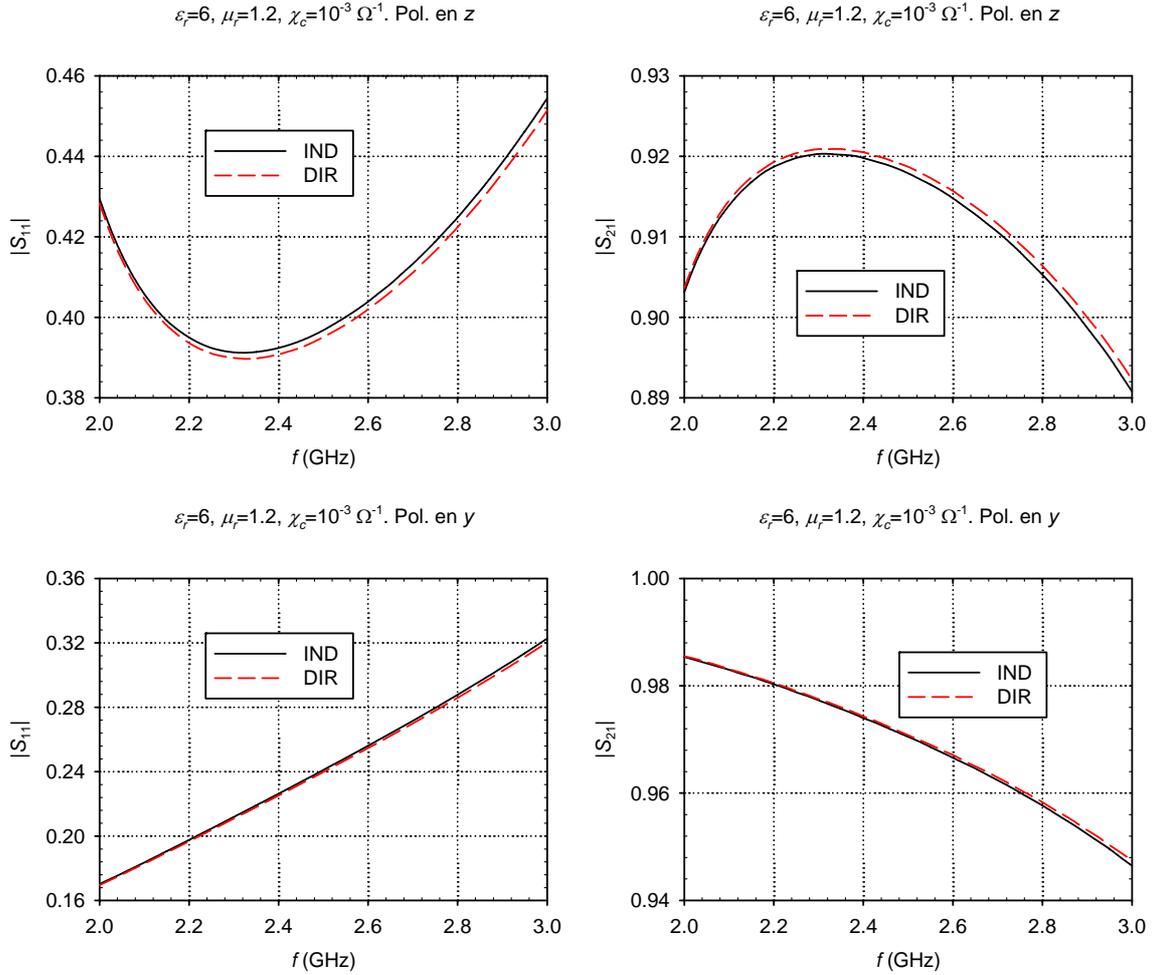


Fig. 2.57. Módulo de S_{11} y S_{21} entre 2 y 3 GHz de una guía de onda parcialmente rellena con un plasma quiral de $\varepsilon_\infty=6$, $\xi_c=10^{-3} \Omega^{-1}$ y $\mu_r=1.2$. $f_p=1.5$ GHz, $f_g=10$ GHz, magnetización en y y z . Las posiciones son $x_s=(a-a_s)/2$, $y_s=0$, $a_s=16$ mm, $b_s=30$ mm, y $c=10$ mm. $k_c=14$.

Posteriormente, en la Fig. 2.58, se representan los parámetros S de toda la estructura, respecto de la frecuencia, entre 2 y 3 GHz, para el caso de parámetros constitutivos altos, usando un $k_c=14$. Los resultados entre ambas formulaciones difieren bastante esta vez, puesto que la formulación directa no ha llegado a la convergencia con este número de modos.

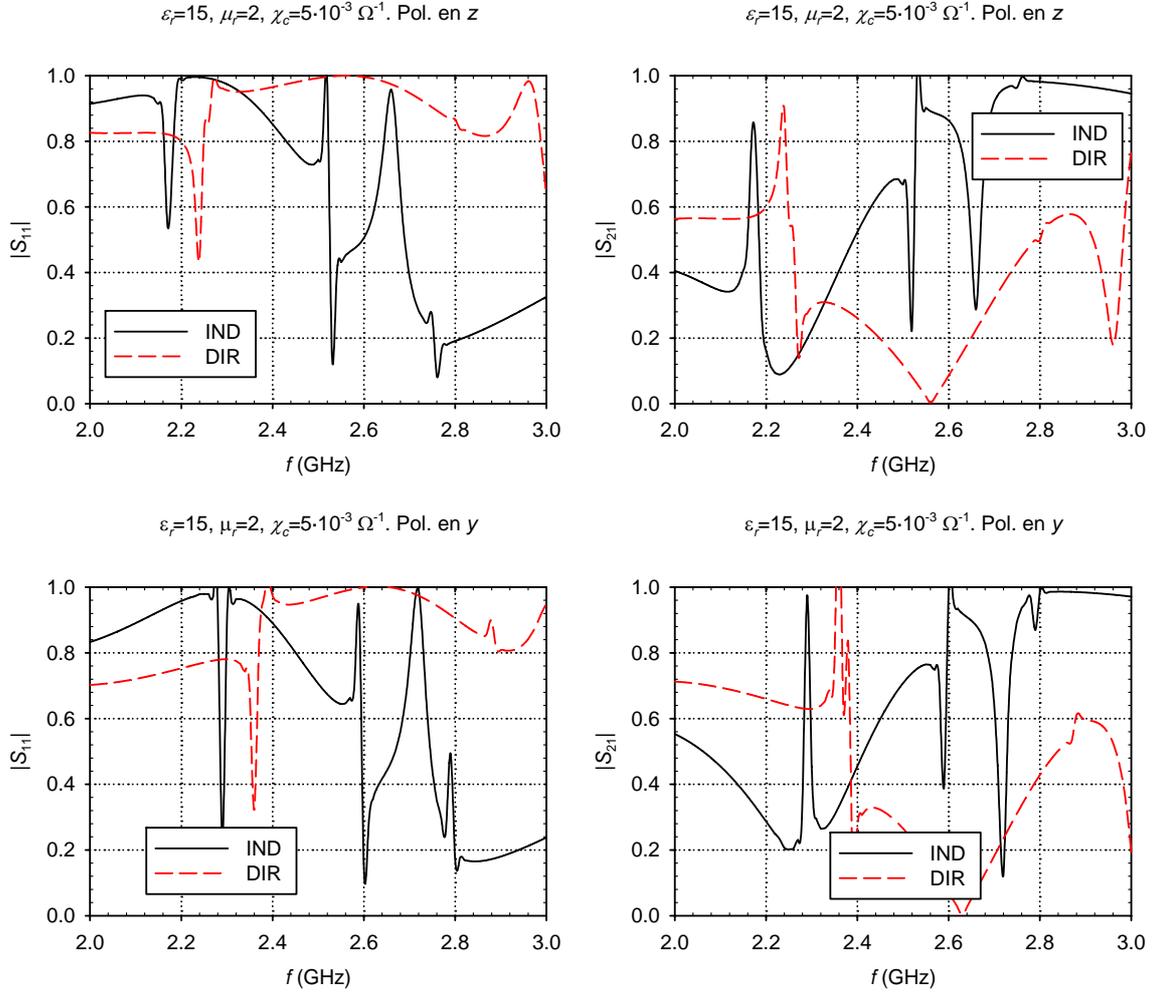


Fig. 2.58. Módulo de S_{11} y S_{21} entre 2 y 3 GHz de una guía de onda parcialmente rellena con un plasma quiral de $\epsilon_r=15$, $\chi_c=5 \cdot 10^{-3} \Omega^{-1}$ y $\mu_r=2$. $f_p=1.5$ GHz, $f_g=10$ GHz, magnetización en y y z . Las posiciones son $x_s=(a-a_s)/2$, $y_s=0$, $a_s=16$ mm, $b_s=30$ mm, y $c=10$ mm. $k_c=14$.

Vistos los resultados anteriores, cabe la pregunta de cuáles serán los resultados de la formulación directa con más modos. Por ello, se vuelve a simular la estructura empleando la formulación directa, pero usando esta vez $k_c=20$, y se muestran los resultados en la Fig. 2.59.

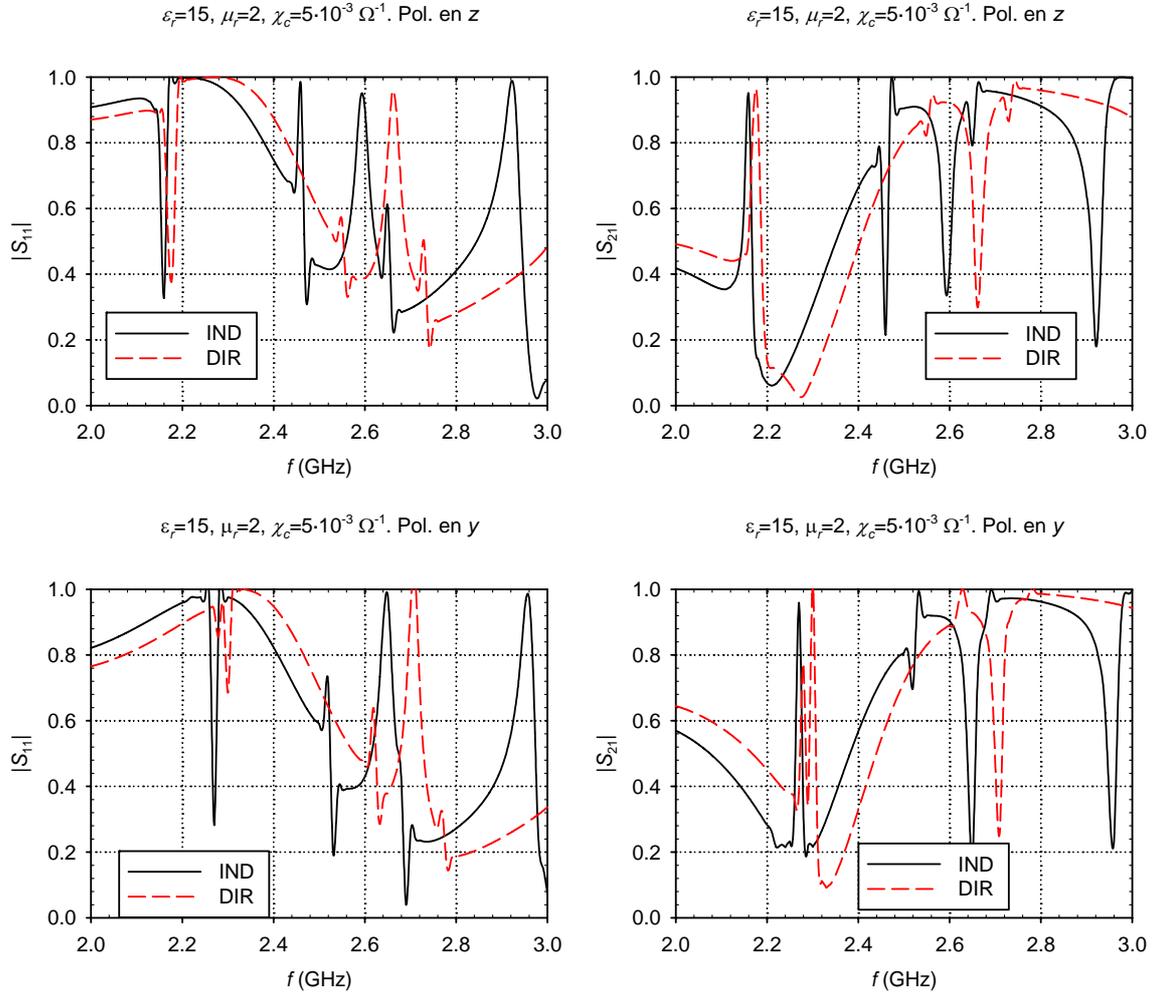


Fig. 2.59. Módulo de S_{11} y S_{21} entre 2 y 3 GHz de una guía de onda parcialmente rellena con un plasma quiral de $\epsilon_\infty=15$, $\xi_c=5 \cdot 10^{-3}$ mho y $\mu_r=2$. $f_p=1.5$ GHz, $f_g=10$ GHz, magnetización en y y z . Las posiciones son $x_s=(a-a_s)/2$, $y_s=0$, $a_s=16$ mm, $b_s=30$ mm, y $c=10$ mm. $k_c=20$.

En este último caso, los resultados de la formulación indirecta han variado poco, mientras que los obtenidos con la formulación directa son completamente diferentes a los anteriores, y ya se aproximan más a los de la formulación indirecta, con el perjuicio de la mayor carga computacional requerida. Por tanto, a pesar de que, en principio, la formulación indirecta es ligeramente más costosa, puesto que hay que invertir dos matrices más, en el fondo es mucho más eficiente, puesto que es necesario emplear un número de modos mucho menor para obtener una precisión dada. Se comprueba que el

hecho de tener parámetros constitutivos grandes hace necesario un número mayor de modos para alcanzar la convergencia, siendo este hecho mucho más desfavorable en el caso de la formulación directa. Para el caso de parámetros constitutivos bajos, se puede comprobar la semejanza de los resultados obtenidos con ambas formulaciones, mientras que para el caso de parámetros constitutivos altos, los resultados difieren, puesto que aún no se ha alcanzado la convergencia en el caso de la formulación directa para el número de modos empleados.

A continuación se presenta un ejemplo validado con la bibliografía de un material pseudochiral, u omega-material, que es otro tipo de material bianisótropo.

Un material pseudochiral puede producir desplazamiento eléctrico en cualquier dirección, dependiendo de la orientación de las partículas Ω . Para el caso de desplazamiento en el eje y , los parámetros constitutivos toman la forma:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_c = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon \end{pmatrix} \quad (2.479)$$

$$\boldsymbol{\mu}_c = \mu_0 \boldsymbol{\mu}_r I \quad (2.480)$$

$$\boldsymbol{\Omega}_{xz} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \Omega & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\Omega}_{zx} = \boldsymbol{\Omega}_{xz}^t, \quad (2.481)$$

Y las relaciones constitutivas son

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{D} &= \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{E} + j \boldsymbol{\Omega}_{zx} \mathbf{B} \\ \mathbf{B} &= \boldsymbol{\mu}_c \mathbf{H} - j \boldsymbol{\mu}_c \boldsymbol{\Omega}_{zx} \mathbf{E} \end{aligned} \right\} \quad (2.482)$$

Se considera un slab estrecho de Ω -material situado en una guía rectangular. Las dimensiones son $a=20$ mm, $b=10$ mm, $a_s=1$ mm, $b_s=b$ (altura completa), $x_s=(a-a_s)/2$ (muestra centrada), e $y_s=0$, con los parámetros $\varepsilon=9.8$, $\mu_r=1$ y $\Omega\eta_0=4$ ($\eta_0 = \sqrt{\mu_0/\varepsilon_0}$) [114].

La Fig. 2.60 muestra la convergencia de la constante de propagación del modo fundamental a la frecuencia $f=10$ GHz. Dado que la muestra es muy fina, (5 % of de la anchura a), es necesario emplear $k_c=20$, aproximadamente.

Teniendo este resultado en consideración, la Fig. 2.61 muestra el diagrama de dispersión de este modo, y se compara el resultado con el obtenido en [114]. Además de esto, dado que la muestra está centrada en el eje x , los modos con

simetría par (m impar) se pueden despreciar. Se representan resultados únicamente para la formulación indirecta, puesto que los obtenidos con la directa no son razonables.

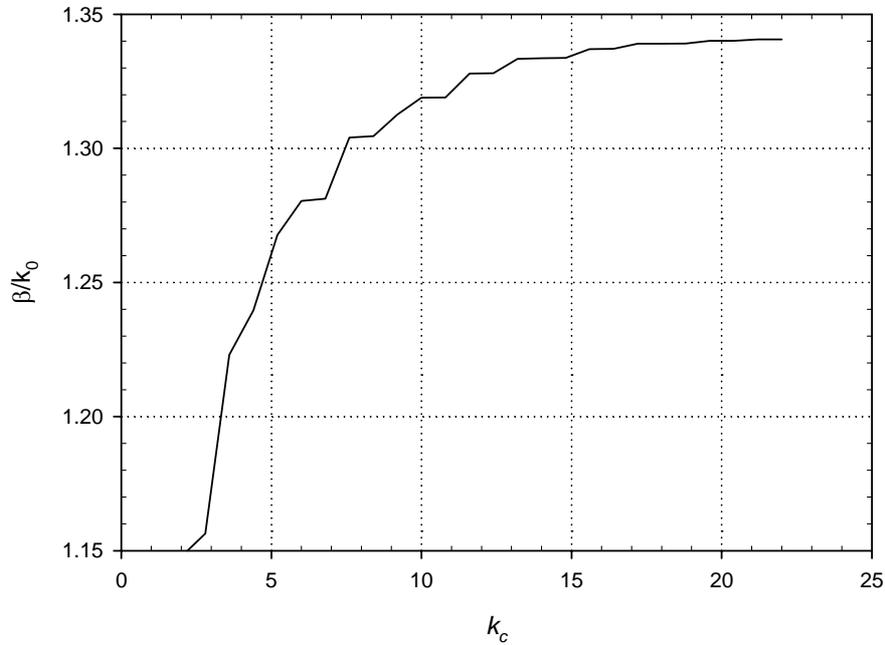


Fig. 2.60. Convergencia de la constante de propagación, para un Ω -material. $a=20$ mm, $b=10$ mm, $a_s=1$ mm, $b_s=b$, $x_s=(a-a_s)/2$, $y_s=0$, $\varepsilon=9.8$, $\mu_r=1$ y $\Omega\eta_0=4$.

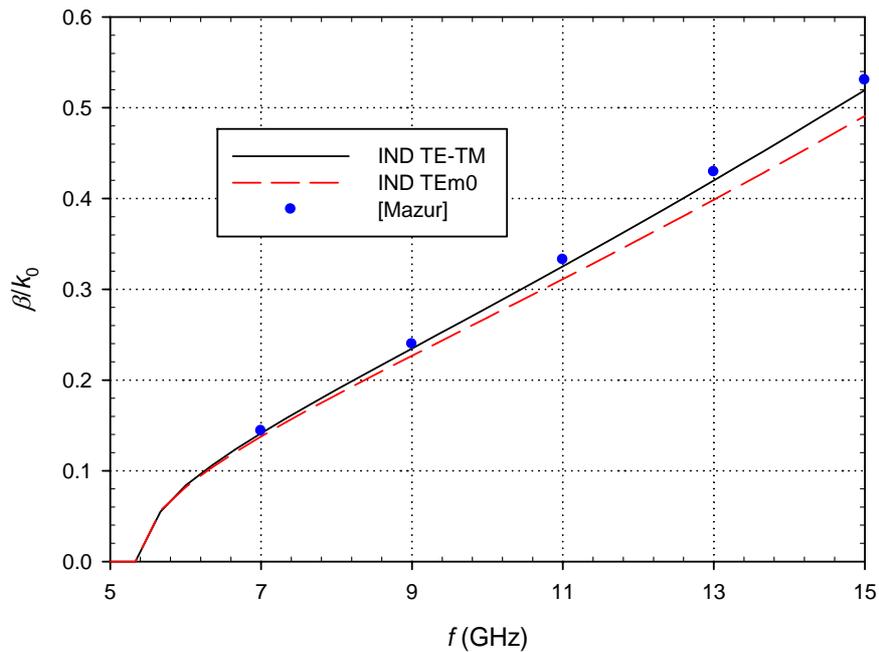


Fig. 2.61. Diagrama de dispersión del modo fundamental para el caso de la Fig. 2.60.

2.5. HIBRIDACIÓN CON ELEMENTOS FINITOS

2.5.1. Introducción

Para componentes compuestos de estructuras rectangulares o circulares, existen ya rutinas que aplican el MM. Esto permite el análisis riguroso y rápido de una larga serie de dispositivos como transformadores, filtros, multiplexores, acopladores, desfasadores, polarizadores, etc.

Sin embargo, cuando la forma de la estructura es irregular, se suelen usar métodos de discretización, como el FEM o el FDTD. Debido a la alta demanda de recursos que tienen estos métodos, sería deseable restringir la utilización de estos métodos a aquellas partes del dispositivo en cuestión donde fuera estrictamente necesario hacerlo, y analizar de otra forma más eficiente el resto de partes. Por tanto, es necesario desarrollar métodos híbridos que combinen la versatilidad de los métodos de discretización y la eficiencia de los métodos modales.

En este trabajo, se ha implementado una técnica híbrida (FEM/MM) para resolver el acoplo entre una guía de onda de sección irregular y otra guía de sección rectangular, si bien, la generalidad del método permite resolver una transición entre dos guías irregulares. La propagación en la guía rectangular ya se ha resuelto en los apartados anteriores, y las expresiones son las ya conocidas. Sin embargo, para resolver la propagación en una guía de onda de sección irregular, hay que retroceder en el proceso analítico hasta la ecuación de Helmholtz para los modos TE y los modos TM:

Modos TE

$$\nabla_t^2 h_z + k_c^2 h_z = 0, \left. \frac{\partial h_z}{\partial n} \right|_{\partial\Omega} = 0 \quad (2.483)$$

Modos TM

$$\nabla_t^2 e_z + k_c^2 e_z = 0, e_z|_{\partial\Omega} = 0 \quad (2.484)$$

Estas ecuaciones constituyen cada una de ellas un problema de valor propio en el plano, con unas determinadas condiciones de contorno, que hay que resolver para cada tipo de sección transversal en concreto. Los valores propios k_c^2 proporcionan los números de onda de corte de cada modo, y los vectores

propios, h_z y e_z en cada caso, proporcionan las componentes axiales de los modos TE y TM, respectivamente.

Matemáticamente, es un problema de Sturm-Liouville en dos dimensiones. Por tanto, estas ecuaciones tienen un conjunto infinito numerable de soluciones, con lo que hay infinitos modos TE y TM. Es decir, hay una sucesión infinita, positiva, no decreciente y divergente de números de onda de corte $k_{c,n}$. Se demuestra también que todos los modos son ortogonales respecto de un cierto productor escalar definido a partir de una norma, y que, por tanto, estos modos constituyen la base de un espacio de Hilbert para representar cualquier función con cuadrado integrable [115].

2.5.2. Resolución de un problema de valor propio

Como se ha comentado ya, cuando la geometría de estos problemas es complicada, no se pueden resolver de forma analítica. Una de las estrategias más utilizadas es emplear el FEM para hallar un número finito de modos.

La Fig. 2.62 muestra un ejemplo de sección irregular, que se ha mallado para poder proceder a su análisis con el FEM.

La herramienta PDETOOL de MATLAB v7.0 [116] permite resolver este tipo de problemas. PDETOOL es capaz de resolver el siguiente de valor propio: dado un dominio Ω y un contorno $\partial\Omega$ en el que se definen una condiciones de contorno, encontrar las funciones propias u del problema y sus correspondientes valores propios λ , que satisfacen:

$$-\nabla \cdot (c\nabla u) + au = \lambda du, \quad (x, y) \in \Omega, \quad (2.485)$$

donde Ω es un dominio acotado del plano, c , a , d y la solución u son funciones complejas definidas en Ω . c puede ser también una matriz 2x2 cuyos elementos sean funciones complejas en Ω . Se omitirá la dependencia de todas estas funciones con las coordenadas espaciales (x,y) para no recargar en exceso la notación, si bien hay que tener en cuenta este hecho.

Las condiciones de contorno aplicables a este problema diferencial son:

- Dirichlet homogénea: $u = 0$ en el contorno $\partial\Omega$.
- Neumann generalizada homogénea: $\hat{n} \cdot (c\nabla u) + qu = 0$ en $\partial\Omega$.

\hat{n} es el vector unitario normal al contorno en el sentido saliente y, en general, q es una función compleja definida a lo largo de $\partial\Omega$.

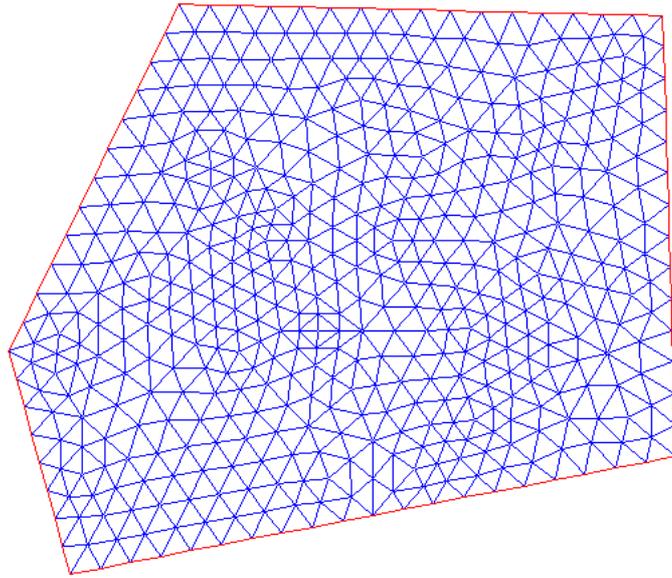


Fig. 2.62. Guía de onda de sección irregular mallada con elementos triangulares.

En el cálculo variacional, las condiciones de Dirichlet son llamadas también condiciones *esenciales*, y éstas restringen el espacio de prueba. Las condiciones de Neumann son llamadas también condiciones *naturales* y surgen de forma que es preciso que se cumplan para la existencia de la solución.

El primer paso es obtener la *formulación débil* de la ecuación diferencial. Sin pérdida de generalidad, se asumen condiciones de Neumann generalizadas en todo el contorno, sabiendo que las de Dirichlet son un caso particular de aquéllas.

Se define una nueva función llamada el *residuo*:

$$r = -\nabla \cdot (c\nabla u) + au - \lambda du, \quad (x, y) \in \Omega \quad (2.486)$$

Si u es la solución del problema, es evidente que el residuo es la función idénticamente nula:

$$r \equiv 0. \quad (2.487)$$

Esto es lo que se le debe *exigir* al residuo según la formulación *fuerte*, o *newtoniana*. Sin embargo, la formulación *débil* o *lagrangiana* relaja la condición anterior y exige que el residuo se anule en media ponderada a lo largo del dominio, es decir:

$$\iint_{\Omega} rv \, dS = 0, \quad (2.488)$$

para una cierta función v perteneciente a determinado espacio de funciones y llamada función de *test*.

Escribiendo la expresión del residuo, la ecuación integral es:

$$\iint_{\Omega} (-\nabla \cdot (c\nabla u) + au - \lambda du)v dS = 0. \quad (2.489)$$

Integrando por partes el primer término de la ecuación, se obtiene

$$\iint_{\Omega} \nabla \cdot (c\nabla u)v dS = -\iint_{\Omega} c\nabla u \cdot \nabla v dS + \oint_{\partial\Omega} c\nabla u \cdot v \cdot \mathbf{n} dl. \quad (2.490)$$

La integral de línea obtenida puede ser aprovechada para introducir la condición de contorno:

$$\oint_{\partial\Omega} c\nabla u \cdot v \cdot \mathbf{n} dl = -\oint_{\partial\Omega} qu dl, \quad (2.491)$$

y, sustituyendo, se obtiene la expresión final de la formulación débil:

$$\iint_{\Omega} [(c\nabla u) \cdot \nabla v + auv - \lambda duv] dS + \oint_{\partial\Omega} quv dl = 0, \quad \forall v. \quad (2.492)$$

Dado el aspecto de esta formulación, las funciones del espacio de test v y la solución deben pertenecer al *espacio de Sobolev de orden uno*:

$$H^1(\Omega) = \left\{ v : \iint_{\Omega} \left[v^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right] dS < \infty \right\} \quad (2.493)$$

Se restringe aún más el espacio de funciones admisibles: se exige además que, en aquellos puntos del contorno en los que haya condiciones de Dirichlet ($\partial\Omega_e$), éstas deben anularse:

$$u \in H^1(\Omega)$$

$$v \in H_0^1(\Omega), \text{ con } H_0^1(\Omega) = \left\{ v \in H^1(\Omega) : v = 0 \text{ en } \partial\Omega_e \right\}$$

Esta última restricción permite anular algunos términos del desarrollo y permite construir correctamente la solución.

El siguiente paso es realizar la discretización. Para ello, se ha de realizar la elección de una malla sobre Ω . Puede ocurrir, entonces, que la malla no se ajuste perfectamente al contorno, por lo que el dominio se distorsiona, pasando de ser Ω a ser Ω_h . Para no recargar la notación, se dirá de aquí en adelante que el dominio mallado es Ω , en vez de decir Ω_h . La Fig. 2.62 es un posible caso de dominio mallado de forma triangular.

Seguidamente, hay que restringir el espacio de funciones a uno de dimensión finita: $V_{N_p} \subset H^1(\Omega_h)$. Geométricamente, se realiza la proyección ortogonal (en norma *energía*) de la formulación débil en el espacio de funciones

V_{N_p} . La convergencia está garantizada si el espacio de dimensión finita tiende al de dimensión infinita cuando $N_p \rightarrow \infty$.

Dado que el operador diferencial es lineal, se exige que éste sea satisfecho por N_p funciones base test $\phi_1 \in V_{N_p}$:

$$\iint_{\Omega} [(c\nabla u) \cdot \nabla \phi_i + au\phi_i - \lambda du\phi] dS + \oint_{\partial\Omega} qu\phi_i dl = 0, \quad i = 1, \dots, N_p \quad (2.494)$$

Se realiza en desarrollo de u según la misma base de V_{N_p} :

$$u = \sum_{j=1}^{N_p} U_j \phi_j, \quad (2.495)$$

y se obtiene el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{N_p} \left\{ \iint_{\Omega} [(c\nabla \phi_j) \cdot \nabla \phi_i + a\phi_j\phi_i] dS + \oint_{\partial\Omega} q\phi_j\phi_i dl \right\} U_j = \\ & = \lambda \sum_{j=1}^{N_p} U_j \iint_{\Omega} d\phi_j\phi_i dS, \quad i = 1, \dots, N_p \end{aligned} \quad (2.496)$$

Si se definen los coeficientes

$$K_{ij} = \iint_{\Omega} [(c\nabla \phi_j) \cdot \nabla \phi_i] dS \quad (2.497)$$

(matriz de rigidez),

$$M_{ij} = \iint_{\Omega} a\phi_j\phi_i dS \quad (2.498)$$

(matriz de masas),

$$Q_{ij} = \oint_{\partial\Omega} q\phi_j\phi_i dl, \quad (2.499)$$

y

$$D_{ij} = \iint_{\Omega} d\phi_j\phi_i dS, \quad (2.500)$$

se puede escribir el sistema de la forma:

$$\sum_{j=1}^{N_p} \{K_{ij} + M_{ij} + Q_{ij}\} U_j = \lambda \sum_{j=1}^{N_p} D_{ij} U_j, \quad i = 1, \dots, N_p$$

Y, matricialmente,

$$(K + M + Q)U = \lambda DU. \quad (2.501)$$

K , M y Q son matrices $N_p \times N_p$, y D es un vector de N_p elementos. Los nombres de matriz de rigidez para K y matriz de masas para M se deben a razones históricas, ya que la primera aplicación del FEM en ingeniería fue la resolución de problemas de cálculo de estructuras.

Es evidente que la matriz $K + M + Q$ es simétrica. Además, si

$c_{ij}(x, y) \geq \delta > 0$, $a(x, y) \geq 0$ y $q(x, y)|_{\partial\Omega} \geq 0$, con $q(x, y)|_{\partial\Omega} > 0$ en alguna parte del contorno, entonces, si $U \neq 0$:

$$U^t(K + M + Q)U = \iint_{\Omega} [(\nabla u)^t c \nabla u + au^2] dS + \oint_{\partial\Omega} qu^2 dl > 0. \quad (2.502)$$

A la cantidad

$$U^t(K + M + Q)U \quad (2.503)$$

se la llama *norma energía*.

Hay muchas formas de escoger las funciones base del espacio. En este documento, se van a estudiar elementos triangulares, y funciones base lineales en cada triángulo. La linealidad garantiza que las integrales de la matriz de rigidez K existen. La proyección en el espacio V_{N_p} no es más que realizar interpolación lineal, y la evaluación de la solución en un triángulo se realiza simplemente en términos de los valores nodales. Si el mallado es *bueno* –luego se hablará con detalle–, V_{N_p} aproxima al espacio de funciones *suaves* en Ω .

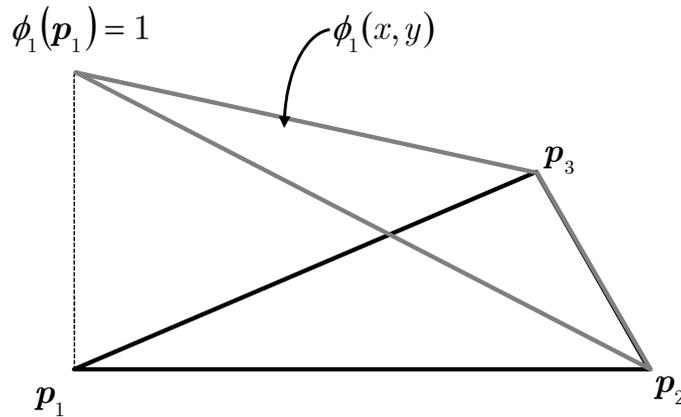


Fig. 2.63. Función base $\phi_1(x, y)$ en un elemento.

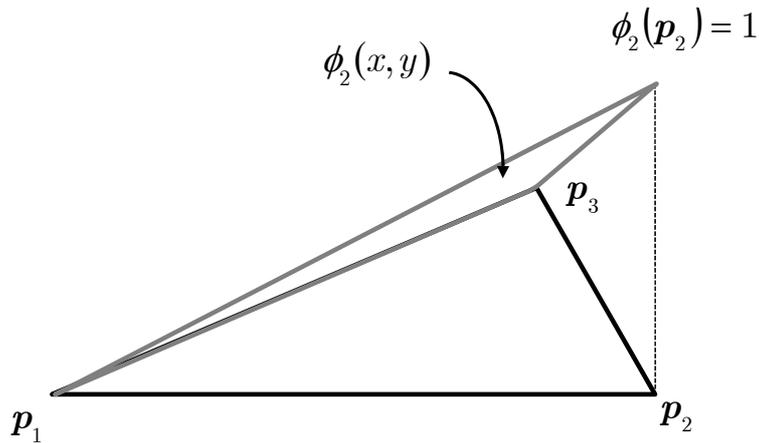


Fig. 2.64. Función base $\phi_2(x,y)$ en un elemento.

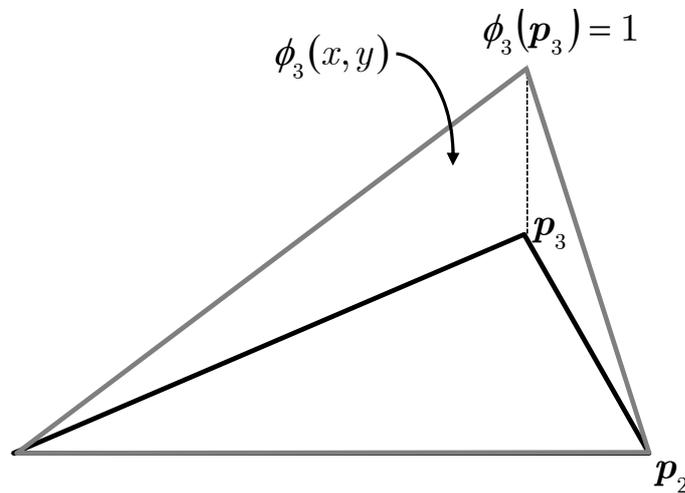


Fig. 2.65. Función base $\phi_3(x,y)$ en un elemento.

Una posible base de V_{N_p} son las funciones que, en cada triángulo, son trozos de planos, valen 0 en todos los nodos de un triángulo, menos en uno de ellos, donde valen uno, es decir:

$$\phi_i(\mathbf{p}_j) = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2, 3$$

donde \mathbf{p}_j es uno de los tres vértices de un triángulo.

Además, cada función base se anula en todos los triángulos menos en el considerado. Esto resulta en una interesante propiedad para la función:

$$u(\mathbf{p}_i) = \sum_{j=1}^{N_p} U_j \phi_j(\mathbf{p}_i) = U_i, \quad i = 1, \dots, N_p. \quad (2.504)$$

Llámesese A al área del triángulo. Puede comprobarse que las funciones base, para un triángulo dado formado por los puntos

Modelado con técnicas modales de estructuras de microondas basadas en guías N-furcadas arbitrariamente rellenas con materiales

$$\mathbf{p}_1 = (x_1, y_1), \mathbf{p}_2 = (x_2, y_2), \mathbf{p}_3 = (x_3, y_3) \quad (2.505)$$

son las siguientes:

$$\phi_1(x, y) = \frac{1}{2A} [(x_2 y_3 - x_3 y_2) + (y_2 - y_3)x + (x_3 - x_2)y], \quad (2.506)$$

$$\phi_2(x, y) = \frac{1}{2A} [(x_2 y_3 - x_3 y_2) + (y_2 - y_3)x + (x_3 - x_2)y], y \quad (2.507)$$

$$\phi_3(x, y) = \frac{1}{2A} [(x_2 y_3 - x_3 y_2) + (y_2 - y_3)x + (x_3 - x_2)y], \quad (2.508)$$

siendo nulas las tres fuera del triángulo.

Las Figs. 2.63-2.65 son las representaciones gráficas de estas funciones base.

Algunas de las integrales a realizar hacen uso de los gradientes. Éstos valen:

$$\nabla \phi_1 = \frac{1}{2A} (y_2 - y_3, x_3 - x_2) = \frac{1}{2A} \mathbf{P}_1, \quad (2.509)$$

$$\nabla \phi_2 = \frac{1}{2A} (y_3 - y_1, x_1 - x_3) = \frac{1}{2A} \mathbf{P}_2, \quad (2.510)$$

$$\nabla \phi_3 = \frac{1}{2A} (y_1 - y_2, x_2 - x_1) = \frac{1}{2A} \mathbf{P}_3, \quad (2.511)$$

Se han definido los vectores \mathbf{P}_1 , \mathbf{P}_2 y \mathbf{P}_3 por comodidad en la notación.

Esta localidad de las funciones base hace que las integrales que aparecen en K_{ij} , M_{ij} , Q_{ij} y D_i únicamente necesitan ser evaluadas en los triángulos que contienen al nodo \mathbf{p}_j . Por tanto, K_{ij} y M_{ij} son cero salvo que \mathbf{p}_i y \mathbf{p}_j sean vértices del mismo triángulo. De aquí, se deriva que K y M son matrices muy dispersas, y, con una numeración adecuada de los nodos, se pueden convertir en matrices de bandas.

Las matrices del sistema se construyen añadiendo las contribuciones de cada triángulo en los índices adecuados –es decir, si un nodo concreto es vértice de ese triángulo–. Este proceso se llama *ensamblado*.

Las rutinas que realizan el ensamblado calculan las matrices *locales* para cada triángulo y realizan el ensamblado a las posiciones correctas en las matrices y vectores dispersos.

Las matrices *locales* mencionadas anteriormente, contienen las integrales evaluadas únicamente en el triángulo actual. Los coeficientes se asumen constantes en cada triángulo, y se toma el valor que éstos tienen en el baricentro.

Considérese un elemento concreto, como el de las Figs. 2.63-2.65:

Llámesese T a la región del plano correspondiente a éste. La matriz de masas local es:

$$m_{ij} = \iint_T a(\mathbf{p}_c) \phi_i(x, y) \phi_j(x, y) dS = a(\mathbf{p}_c) \frac{A}{12} (1 + \delta_{ij}), \quad (2.512)$$

donde \mathbf{p}_c es el baricentro del triángulo:

$$\mathbf{p}_c = \frac{\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3}{3}. \quad (2.513)$$

Para la matriz de rigidez local, hay que evaluar los gradientes de las funciones base que son no nulas en el triángulo actual. La matriz c se toma como constante, evaluada en el baricentro del triángulo. Los elementos de la matriz de rigidez local valen:

$$k_{ij} = \iint_T [(c \nabla \phi_j) \cdot \nabla \phi_i] dS = \frac{1}{4A} \mathbf{P}_j c(\mathbf{p}_c) \mathbf{P}_i. \quad (2.514)$$

Si dos vértices del triángulo en cuestión pertenecen al contorno $\partial\Omega$, contribuyen a las integrales de línea asociadas con las condiciones de contorno. Si estos dos puntos son, por ejemplo, \mathbf{p}_1 y \mathbf{p}_2 , se tiene:

$$Q_{ij} = \int_{p_1 p_2} q \phi_j \phi_i dl = q(\mathbf{p}_b) \frac{\|\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2\|}{6} (1 + \delta_{ij}) \quad i, j = 1, 2 \quad (2.515)$$

donde \mathbf{p}_b es el punto medio del segmento $p_1 p_2$.

Para cada triángulo, el vértice \mathbf{p}_m , $m = 1, 2, 3$ se corresponde con el índice i_m de los puntos del mallado. De esta forma y según esta numeración, las contribuciones de los triángulos individuales se añaden a las matrices –por ejemplo, a la matriz K de la forma:

$$K_{i_m i_n} \leftarrow K_{i_m i_n} + k_{mn}, \quad m, n = 1, 2, 3. \quad (2.516)$$

Las condiciones de contorno de Dirichlet se tratan de forma diferente, ya que, en ellas, el valor de la solución viene impuesto, por lo tanto, no tiene sentido resolver una incógnita cuyo valor ya se conoce. Se realiza eliminando las filas correspondientes del sistema, y modificando el término independiente. Se obtiene un sistema reducido, también simétrico.

2.5.3. Aplicación a la caracterización de guías de onda

En primer lugar, se van a encontrar los modos de la guía resolviendo la ecuación de Helmholtz para los campos eléctrico y magnético, que son las siguientes. Identificando coeficientes de la ecuación general (2.485) con las de los modos en la guía (2.483) y (2.484), se ve que, en ambos casos, $a=0$, $d=1$ y $c=1$.

Si se aplican condiciones de contorno Dirichlet homogéneas, se estarán calculando los modos TM y obteniendo el campo eléctrico axial $e_{z,n}$, y si se aplican condiciones de Neumann homogéneas, se estarán calculando los modos TE y obteniendo el campo magnético axial $h_{z,n}$. Los valores propios obtenidos son $\lambda_n = k_{c,n}^2$.

Los perfiles de campo $e_{z,n}$ y $h_{z,n}$ de la guía irregular se poseen en forma de una matriz de números. A partir de ellos, hay que obtener los campos transversales $e_{t,n}$ y $h_{t,n}$, de forma numérica, de la manera siguiente:

Modos TE

$$\mathbf{h}_{t,n} = -\frac{\gamma_n}{k_{c,n}^2} \nabla_t h_{z,n} \quad (2.517)$$

$$\mathbf{e}_{t,n} = Z_n^{TE} \mathbf{h}_{t,n} \times \hat{\mathbf{z}} \quad (2.518)$$

Con

$$\gamma_n = \sqrt{k_{c,n}^2 - k^2} \quad (2.519)$$

$$Z_n^{TE} = \frac{j\omega\mu}{\gamma_n} \quad (2.520)$$

Modos TM

$$\mathbf{e}_{t,n} = -\frac{\gamma_n}{k_{c,n}^2} \nabla_t e_{z,n} \quad (2.521)$$

$$\mathbf{h}_{t,n} = Y_n^{TM} \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{e}_{t,n} \quad (2.522)$$

Con

$$\gamma_n = \sqrt{k_{c,n}^2 - k^2} \quad (2.523)$$

$$Y_n^{TM} = \frac{j\omega\epsilon}{\gamma_n} \quad (2.524)$$

Una vez obtenidos los modos de la guía inhomogénea, toda la teoría del MM y del análisis circuital generalizado, desarrollada en apartados anteriores, es

aplicable. Las integrales de acoplo entre diferentes modos deberán resolverse también mediante métodos de integración numérica, pero una vez realizadas, el resto de proceso es transparente a la naturaleza de la guía de onda.

2.5.4. La Toolbox PDE de MATLAB®

2.5.4.1. Introducción

Esta librería proporciona un entorno gráfico para el estudio y la solución de ecuaciones en derivadas parciales en dos dimensiones espaciales y el tiempo. Las ecuaciones son discretizadas por el método de los elementos finitos. Las herramientas posibilitan definir un problema en un dominio bidimensional que podrá ser dibujado, definir unas condiciones de contorno e iniciales, en su caso, y definir los coeficientes de la ecuación considerada. Posteriormente, se resuelve el problema generando un mallado, discretizando las ecuaciones en él y produciendo una aproximación a la solución.

Las ecuaciones en derivadas parciales que PDETOOL es capaz de resolver son las siguientes:

$$\text{-Ecuación elíptica: } -\nabla \cdot (c\nabla u) + au = f \quad (2.525)$$

$$\text{-Ecuación parabólica: } d \frac{\partial u}{\partial t} - \nabla \cdot (c\nabla u) + au = f \quad (2.526)$$

$$\text{-Ecuación hiperbólica: } d \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \nabla \cdot (c\nabla u) + au = f \quad (2.527)$$

$$\text{-Ecuación de valor propio: } -\nabla \cdot (c\nabla u) + au = \lambda du \quad (2.528)$$

Para todas las ecuaciones, y en el caso general, d , a y f son funciones de las dos variables espaciales que toman valores en el plano complejo y c es una matriz 2x2 cuyos elementos son funciones como d , a y f . En los casos de variación temporal, estos coeficientes también pueden depender del tiempo.

A la hora de resolver problemas concretos, como la aplicación a los filtros en guía de onda, se hace necesario prescindir del entorno gráfico, puesto que se busca obtener un problema que resuelva una estructura completa, que tenga unas variables de entrada y otras de salida, a fin de poder ser acoplado con otras rutinas. Se va a realizar un estudio detallado de la aplicación gráfica, de las variables que maneja y de los programas que contiene, para poder extraer las funciones necesarias que resuelvan el problema deseado.

Se va a centrar el estudio en las funciones y variables que corresponden a la resolución de un problema de valor propio bidimensional.

2.5.4.2. Dibujo de la geometría

Para resolver un problema diferencial en un determinado dominio bidimensional de forma arbitraria, es necesario, antes que nada, dibujar dicho dominio. PDETOOL tiene cuatro tipos de objetos que pueden ser dibujados: el círculo, el rectángulo, la elipse y el polígono, compuesto éste por un número arbitrario de rectas. Es posible dibujar una cantidad cualquiera de cada uno de los objetos, con solapamiento entre ellos o no.

A cada objeto, se le asigna automáticamente un nombre que lo identifica frente al resto. Este nombre se escribe encima del mismo objeto y puede ser modificado posteriormente por el usuario.

Es obvio que con el ratón no es posible dibujar un objeto con precisión, por lo que, una vez se tenga el objeto, es necesario editar sus propiedades. Por ejemplo, se pueden editar el centro y los semiejes de una elipse, o las dimensiones y el origen de un rectángulo. Es posible modificar tanto su forma como realizar traslaciones y rotaciones.

Una vez se tenga todos los objetos como es debido, es posible realizar las siguientes operaciones lógicas entre ellos:

- Unión: se representa con el operador $+$ y el resultado entre dos objetos es la unión entre ambos.
- Resta: subtrae de un objeto la parte de otro que solapa con el primero. Se representa con el signo $-$.
- Intersección: su resultado es la región del plano común entre dos objetos. Se representa con el operador $*$.

Los operadores de unión e intersección tienen la misma preferencia, y el operador de resta tiene una preferencia superior a ellos. Es posible controlar la preferencia mediante paréntesis.

Con estas operaciones, es posible construir objetos de variadas formas en los que se puede definir un problema diferencial.

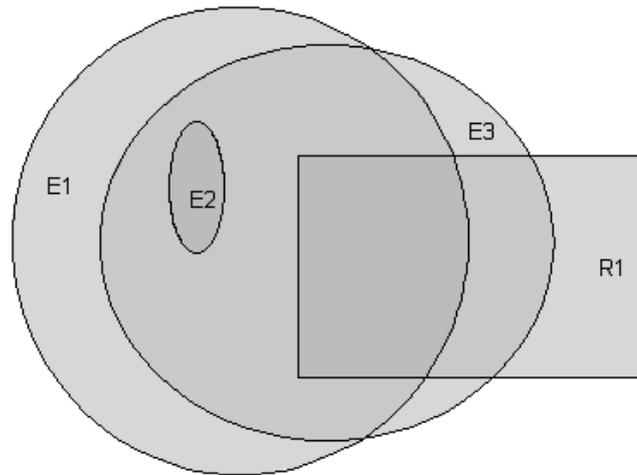


Fig. 2.66. Ejemplo de dominio compuesto por unas figuras elementales. La fórmula lógica es $(E1+R1)*E3-E2$.

2.5.4.3. Condiciones de contorno

En PDETOOL, se definen las condiciones de contorno para la solución u :

- Condiciones de Dirichlet: $hu = r$ en la frontera $\partial\Omega$.
- Condiciones de Neumann generalizadas: $\hat{\mathbf{n}} \cdot (c\nabla u) + qu = g$ en $\partial\Omega$.

$\hat{\mathbf{n}}$ es el vector unitario normal al contorno para cada punto de éste, y apuntando hacia el exterior del dominio y g , q , h y r son funciones en el plano complejo definidas a lo largo del contorno. En el caso lineal, estos coeficientes también pueden depender de la solución, y en el caso hiperbólico y parabólico, pueden depender también del tiempo. En el caso de valor propio, que es el que ocupa este estudio, solamente se pueden resolver problemas homogéneos, de manera que los valores introducidos de r y g son ignorados y se consideran iguales a cero.

El contorno es dividido por PDETOOL en segmentos. Cada tramo recto es un segmento y cada tramo curvo suele dividirse en varios segmentos. En el dibujo, aparece cada segmento con forma de una flecha. A cada uno de estos segmentos es posible aplicar distintas condiciones e contorno por separado.

Las condiciones de contorno para cada segmento pueden ser introducidas en función de las siguientes variables:

- Un número: en ese caso, el parámetro es constante en todo el segmento.
- Las coordenadas espaciales x e y .

-Una variable s que resulta de parametrizar el segmento. Esta variable vale cero en el origen de la flecha, vale uno en su extremo y varía linealmente según la longitud del arco en el sentido de la flecha. Por ejemplo, si se escribe $\sin(\pi s)$, el parámetro de la condición de contorno tomará la forma de un semiciclo positivo de una senoide desde el origen hasta el final del segmento.

-Las componentes del vector normal al contorno, n_x, n_y . Si se necesita el vector tangente, es obvio que sus componentes son $t_x=-n_y$ y $t_y=n_x$.

-El tiempo t (sólo para los problemas parabólico y hiperbólico).

-La solución u (problema no lineal).

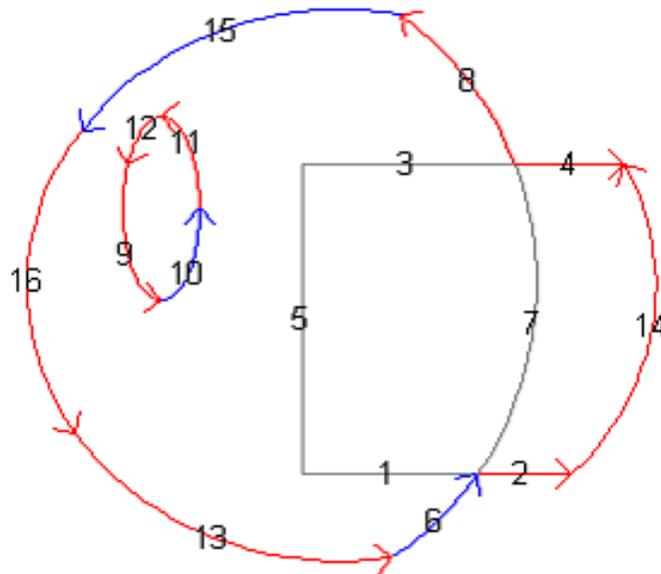


Fig. 2.67. Geometría descompuesta y contornos numerados, en los que se define un sentido. El color rojo indica condiciones de Dirichlet. El color rojo, condiciones de Neumann. El color gris indica separación entre subdominios.

2.5.4.4. Definición de los coeficientes

El dominio del problema diferencial se puede dividir en regiones o subdominios según la geometría dibujada (no confundir con la división en subdominios que se realiza para resolver por elementos finitos). Por ejemplo, si se dibuja un rectángulo dentro de otro, habrá dos regiones: una, interior al rectángulo pequeño y otra, exterior a ella, que será delimitada por el contorno de la geometría. En cada una de las regiones, se pueden especificar por separado los coeficientes de la ecuación. Estos coeficientes se pueden especificar basándose en las siguientes variables:

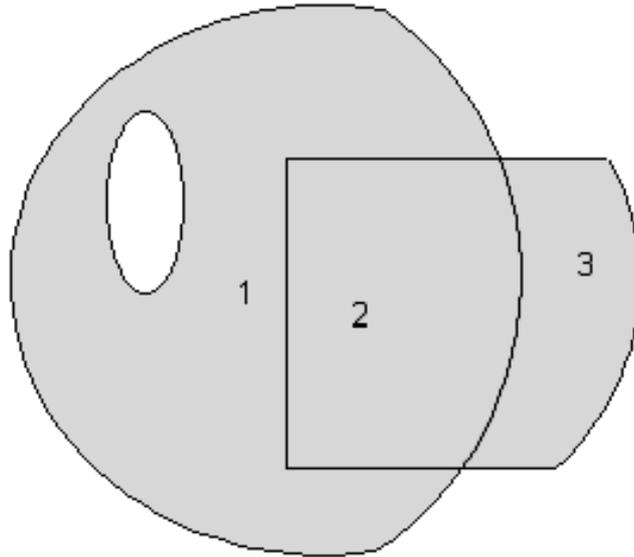


Fig. 2.68. Regiones del dominio donde se aplican diferentes formas de la ecuación diferencial.

- Las coordenadas espaciales x, y .
- El tiempo t .
- La solución u .
- Las derivadas parciales de la solución en x e y : u_x, u_y .

Los dos últimos casos son no lineales.

2.5.4.5. Mallado de la geometría

PDETOOL resuelve el problema diferencial utilizando el método de los elementos finitos. Este método divide el dominio del problema en subdominios, de forma que hay que realizar un mallado de la geometría. PDETOOL utiliza planos como funciones base, así que los subdominios son triangulares.

Al mallar la geometría, si hay tramos curvos, se aproximan por segmentos, de forma que se obtiene una figura de forma distinta a la original. Este problema se puede reducir cuanto se quiera refinando el mallado.

Un primer mallado de la geometría produce unos resultados que carecen de precisión, pero pueden dar una idea de cómo varía la solución. Sin embargo, si la variación es rápida, la solución puede llevar a equívoco. Por el contrario, el tiempo de procesado es muy bajo. Si se desea mayor precisión, es posible refinar el mallado. Este proceso se puede repetir hasta que se obtengan resultados con

la precisión deseada. Un posible indicador del error que se está cometiendo se puede obtener restando las soluciones obtenidas con mallados sucesivos.

El mallado que se realice está obligado a respetar las diferentes regiones del dominio, de forma que no puede haber un mismo triángulo en dos regiones diferentes. Esto indica que es recomendable eliminar los límites entre subregiones que no interesen, y que PDETOOL ha generado dada la geometría dibujada, ya que, de lo contrario, se obtiene un mallado muy forzado y de mala calidad.

Es posible que la solución de la ecuación tenga variaciones rápidas en una región concreta y variaciones lentas en otra región, de forma que para obtener buenos resultados, hay que realizar un mallado muy fino en todo el dominio, pero sólo es necesario en parte de él. Un ejemplo en electromagnetismo es la envolvente de una onda estacionaria en un medio de elevada constante dieléctrica. Para resolver este problema, PDETOOL posibilita realizar un mallado adaptativo. De este modo, el mallado se refina únicamente allá donde es necesario. En primer lugar, se realiza un primer mallado convencional. Entonces, refina aquellos elementos en los que considera que el error es grande. Así se genera una sucesión de soluciones en mallados cada vez más finos. El proceso termina cuando se alcanza un número dado de triángulos o cuando el error es menor que una cierta tolerancia.

En algunos problemas resueltos con mallado adaptativo, se ha detectado que la solución varía de forma que el primer mallado no proporciona una adecuada función de error. Esto se soluciona seleccionando la opción de mallado adaptativo después de haber refinado el mallado manualmente.

Por último, cabe comentar que el mallado de Delanay-Voronoi, utilizado por PDETOOL es de bastante mala calidad, no aprecia simetrías en dibujos simétricos, y los triángulos varían bastante su forma y tamaño en el dominio sin que exista motivo para ello. También se ha observado el absurdo caso de que una misma geometría centrada en puntos del plano distintos da lugar a mallados distintos, incluso con distinto número de triángulos.

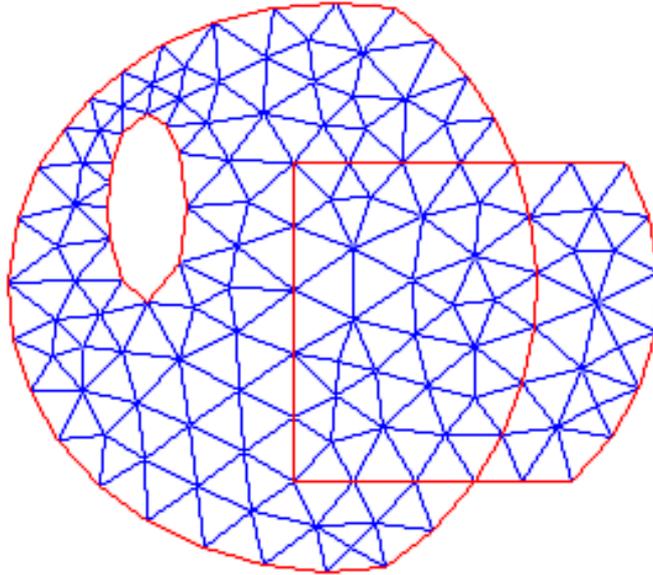


Fig. 2.69. Mallado del dominio, forzado por las distintas regiones.

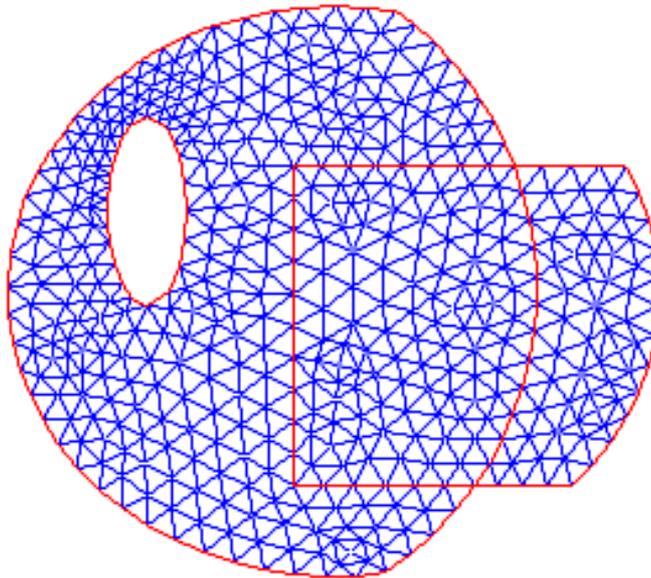


Fig. 2.70. Mallado refinado uniendo los puntos medios de los triángulos originales.

2.5.4.6. Otros parámetros del problema

Para este tipo de problema diferencial, el único parámetro a introducir es el rango de búsqueda de valores propios en el eje real. El elemento de la izquierda puede ser menos infinito. Sin embargo, es recomendable ajustarse al

intervalo en que se espera obtener valores propios a fin de acelerar la búsqueda, que ya es lenta de por sí. Ejemplos: [-Inf 200], [30 300].

2.5.4.7. Descripción de las variables y funciones de interés

2.5.4.7.1. Matriz descriptora de objetos

Esta matriz describe todos los objetos –rectángulos, círculos, etc.– que forman la geometría. Tiene tantas columnas como objetos haya en la imagen. Para cada una de esas columnas, según se trate de un objeto u otro, las filas tienen la siguiente estructura:

- Círculo: la primera fila es un 1, la segunda y tercera contienen las coordenadas x e y del centro, y la cuarta contiene el radio.
- Polígono arbitrario cerrado: la primera fila es un 2, la segunda contiene el número N de líneas rectas que componen dicho polígono, las N siguientes contienen las coordenadas x de cada uno de los puntos de partida de las rectas, y las N siguientes contienen las coordenadas y de cada uno de los puntos de partida de las rectas.
- Rectángulo: la primera fila es un 3. El resto se escribe como un caso particular al polígono arbitrario.
- Elipse: la primera fila es un 4, la segunda y tercera contienen las coordenadas x e y del centro, la cuarta es la longitud del eje mayor y la quinta, el eje menor. La sexta contiene el valor del ángulo que puede estar girada la elipse respecto del eje x .

2.5.4.7.2. Matriz de geometría descompuesta

El programa *decsg* descompone la matriz descriptora de objetos en la matriz de geometría descompuesta, realizando primero las operaciones lógicas indicadas entre todos los objetos dibujados. A partir de los objetos que haya en el dibujo y de las operaciones lógicas que se hayan definido sobre ellos, al final quedan una serie de segmentos que forman el contorno del problema y los segmentos que dividen las regiones del dominio. Los segmentos circulares o elípticos se suelen dividir en varios segmentos más pequeños si la curvatura es elevada. Esto se llama geometría descompuesta. Cada segmento es una columna de esta matriz, y a cada uno de ellos se les asigna un número entero positivo. Dada una columna, las filas dos y tres dicen las coordenadas x de los puntos inicial y final, respectivamente, y las filas cuatro y cinco contienen las

correspondientes coordenadas y . Las filas sexta y séptima contienen los números de las regiones que se encuentran a la izquierda y derecha del segmento, respectivamente.

Hay tres posibles segmentos en una geometría descompuesta:

- Para un arco de circunferencia, la primera fila vale 1, las filas ocho y nueve contienen las coordenadas x e y del centro y la fila diez contienen el radio.
- Para un segmento rectilíneo, la primera fila vale 2.
- Para arcos de elipse, la primera fila vale 4. Las filas ocho y nueve contienen las coordenadas del centro de la elipse. Las filas diez y once contienen las longitudes de los ejes mayor y menor, respectivamente, y la fila doce contienen el ángulo de rotación.

2.5.4.7.3. Matriz simbólica de condiciones de contorno

Esta matriz trabaja de forma conjunta con la matriz de geometría descompuesta y contiene las mismas columnas. Para cada columna, si la primera fila es un 0, ello significa que ese segmento no forma parte del contorno exterior, sino que divide dos regiones del dominio, y por tanto, no se puede aplicar condición de contorno sobre él. Si vale 1, esto quiere decir que sí forma parte del contorno exterior, y por tanto, el resto de las filas llevan información sobre las condiciones de contorno aplicadas a ese segmento. Si vale 2, se trata de condiciones de contorno mixtas, que sólo se aplican a sistemas de ecuaciones diferenciales. Para cada una de las columnas cuya primera fila vale 1, las filas contienen:

Si la segunda fila vale 0, se trata de condiciones de contorno Neumann generalizadas. En ese caso, las filas tercera y cuarta indican la longitud del dato q y del dato g . Estos datos se almacenan a partir de la columna quinta como cadenas de caracteres codificadas en ASCII. Por ejemplo, si el parámetro q vale $\sqrt{-1} \cdot 1.4e3$, y g vale 999, la cadena de caracteres se almacena como [115 113 114 116 40 45 49 41 42 49 46 52 101 51 57 57 57].

Si la segunda fila vale 1, se trata de condiciones de Dirichlet. En este caso, las columnas tercera y cuarta indican la longitud del dato q y del dato g , que son ignoradas. La quinta y la sexta indican de la longitud del dato h y del dato r , que se codifican en ASCII a partir de la séptima columna de igual forma que en el caso anterior.

2.5.4.7.4. Matrices del mallado

Estas matrices se generan con la función de MATLAB® *initmesh.m*. Una vez generado el mallado, se puede refinar con *refinemesh* o *adaptmesh*. La función *jigglemesh* realiza un reposicionamiento de los nodos que suele aumentar la calidad del mallado. Describen completamente el mallado triangular de la geometría, y su estructura es la siguiente:

Matriz p

Esta matriz tiene dos filas y tantas columnas como nodos haya en todo el mallado. Al realizar el mallado, se elige una numeración para los nodos. En una columna determinada las filas primera y segunda contiene las coordenadas x e y , respectivamente, del nodo correspondiente al índice de la columna.

Matriz e

Esta matriz se encarga de describir los contornos, tanto los contornos exteriores como aquellos que delimitan regiones del dominio. En esta matriz, filas primera y segunda contienen los índices de los puntos inicial y final, la tercera y cuarta contienen los valores del parámetro s –que toma valores entre 0 y 1 y parametriza la curva–. Es claro que, si el segmento no es de un contorno exterior, no es relevante el valor que pueda tomar s . La quinta contiene el número del segmento correspondiente y la sexta y séptima contienen los números de los subdominios a la izquierda y derecha del lado, según el sentido creciente del parámetro s .

Matriz t

Esta matriz describe los triángulos del mallado. Tiene tantas columnas como triángulos haya en el mallado. Los triángulos siguen también una numeración determinada. Para una columna dada, las tres primeras filas contienen los índices de los nodos que contienen ese triángulo, en sentido dextrógiro, y la cuarta contiene el número de la región correspondiente a ese subdominio, ya que un triángulo sólo puede pertenecer a una única región.

2.5.4.7.5. Matrices numéricas de condiciones de contorno

A partir de la matriz de condiciones de contorno, el programa *assemb* construye las matrices Q , G , H y R con los valores numéricos en cada punto correspondientes a las condiciones de contorno del problema, que contribuyen a las matrices del sistema y término independiente. Para ello, se vale del programa *pdeexpd*. Este programa evalúa las condiciones de contorno en todos

los lados, según el mallado utilizado. Una condición de contorno puede estar especificada en función de las siguientes variables:

- Constantes.
- Las variables espaciales x e y .
- Un parámetro s que varía entre 0 y 1 desde el punto inicial hasta el final del segmento, de forma proporcional a la longitud recorrida de éste.
- Las componentes del vector normal n_x y n_y .

De este modo, el programa obtiene, por medio de la matriz del mallado e , los triángulos que tienen lados que pertenecen a algún contorno. Es necesario evaluar en el contorno la expresión guardada en la matriz simbólica de condiciones de contorno, pero, para cada segmento, únicamente se va a evaluar en los puntos medios de los lados de los triángulos que componen este segmento. Por tanto, en primer lugar, el programa evalúa las variables x , y , s , n_x y n_y en cada uno de esos puntos. Acto seguido, para cada uno de los segmentos que componen el contorno, obtiene su expresión y la evalúa en los puntos correspondientes, obteniendo ya un vector de datos numéricos. Este dato se pasa a las rutinas de ensamblado de las matrices del sistema lineal que resuelve la ecuación por el método de los elementos finitos.

2.5.4.7.6. Matrices del sistema

El problema de valor propio generalizado a resolver es $(K - \lambda M)X = 0$ si bien, en la mayoría de los casos, la matriz M es la matriz identidad, y entonces se trata de un problema de valor propio ordinario. El programa *asema* construye las matrices del sistema K y M a partir de los coeficientes de la ecuación diferencial c , d , a y f . Evalúa estos coeficientes en todos los elementos del mallado. Una vez construidas estas matrices, se modifican para recibir las contribuciones de las condiciones de contorno a través de las matrices Q , G , H y R , lo que supone una reducción en el número de incógnitas. Concretamente, si N es el número de nodos del mallado y N_c son aquéllos que pertenecen al contorno, el número total de incógnitas es $N - N_c$.

2.5.4.7.7. El programa PDEEIG

La función de más alto nivel del paquete PDETOOL que se utiliza para resolver este tipo de problemas es *pdeeig* que resuelve el problema de valor propio, con la sintaxis:

```
[v, lambda]=pde eig(b,p,e,t,c,a,d,r)
```

En esta función intervienen las variables siguientes:

- b contiene los datos de las condiciones de contorno.
- p, e, t describen la geometría del problema y el mallado triangular para la resolución por elementos finitos.
- c, a, d son los coeficientes de la ecuación de valor propio.
- r es un vector de dos componentes $[\lambda_{\min}, \lambda_{\max}]$, que indican el rango de búsqueda de valores propios.
- Los valores devueltos son:
- v , que es una matriz cuyas columnas son cada una de las soluciones encontradas. Los elementos de cada columna son los valores nodales de la solución encontrada según una numeración definida en p, e y t .
- l es un vector cuyas componentes son los valores propios asociados a cada columna de v .

Esta función realiza una serie de llamadas a las funciones anteriores para construir las matrices del sistema a partir de los datos de los coeficientes y de la geometría, tal y como se ha indicado anteriormente. Posteriormente, llama al programa *sptarn* para resolver el sistema, de tamaño $(N-N_c) \times (N-N_c)$. Este programa resuelve un problema de valor propio generalizado del tipo $(K - \lambda M)X = 0$. Las matrices K y M han de ser dispersas –como lo son las matrices que intervienen en el FEM–. Ya que existen infinitas soluciones, realiza una búsqueda en el intervalo $[\lambda_{\min}, \lambda_{\max}]$, que se debe pasar como parámetro. Implementa el algoritmo de Arnoldi [117].

2.5.5. Desarrollo de una herramienta para el análisis de transiciones

El objetivo de este estudio es tener un programa que implemente una formulación mixta analítica-elementos finitos utilizando las funciones de PDETOOL pero evitando el entorno gráfico. Se busca aplicar el MM para resolver una discontinuidad en la que una de las dos guías es rectangular, mientras que la otra es tiene sección arbitraria. Por tanto, los modos la primera serán calculados de forma analítica. En la otra guía, se recurrirá a la herramienta PDETOOL de MATLAB®.

En primer lugar, dados una geometría y un rango de búsqueda de valores propios, hay que resolver de forma secuencial los problemas de Dirichlet y Neumann, y almacenar correctamente los campos y los números de onda de corte.

La geometría va a ser la de un filtro corrugado con tres filas de postes en la cara superior y tres en la inferior. Los aspectos técnicos de este tipo de estructuras se explican en el apartado 3.5211.

En primer lugar, se dibuja la estructura de la guía irregular correspondiente al filtro corrugado, que es una guía rectangular con entrantes en las partes superior e inferior. Para ello, se parte de los siguientes objetos:

Los rectángulos pequeños R2...R7 son sustraídos del grande R1 para obtener la geometría del filtro.

Para evitar el entorno gráfico, se crean las matrices correspondientes manualmente. La primera es la matriz de geometría descompuesta, que contiene tantas columnas como objetos, y cada una de ellas describe su forma, tamaño y posición. Se reproduce el código utilizado para representarla.

```
gd=zeros(10,7);
gd(:,1)=[3 4 0 a a 0 0 b b]'; %el central
ly=1.1*d;%el exceso, para intersectar los objetos
for i=2:4%los de arriba
    gd(:,i)=[3 4 bp/2+L*(i-2) bp/2+L*(i-2)+(L-bp) bp/2+L*(i-2)+(L-bp) bp/2+L*(i-2) b-d b-d b-d+ly b-d+ly]';
end
for i=5:7%los de abajo
    gd(:,i)=[3 4 bp/2+L*(i-10) bp/2+L*(i-10)+(L-bp) bp/2+L*(i-10)+(L-bp) bp/2+L*(i-10) d-ly d-ly d d]';
end
```

A continuación, es necesaria una variable que identifique cada columna de la matriz anterior con un nombre:

```
ns=double(str2mat('R1','R2','R3','R4','R5','R6','R7'))';
```

Posteriormente, se especifica la operación lógica entre todos los objetos.

```
sf='R1-R2-R3-R4-R5-R6-R7';
```

Y, finalmente, se construye la matriz de geometría descompuesta:

```
d1=decsd(gd,sf,ns);
```

En siguiente lugar, hay que mallar la geometría. PDETOOL dispone de una herramienta de mallado que proporciona el siguiente resultado:

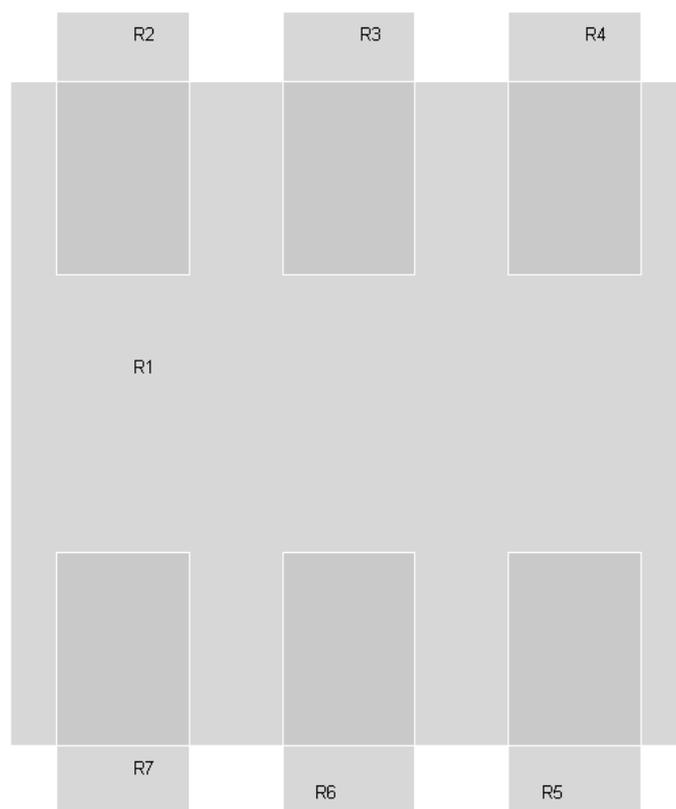


Fig. 2.71. Geometría de una guía irregular construida como resultado de operaciones lógicas entre rectángulos.

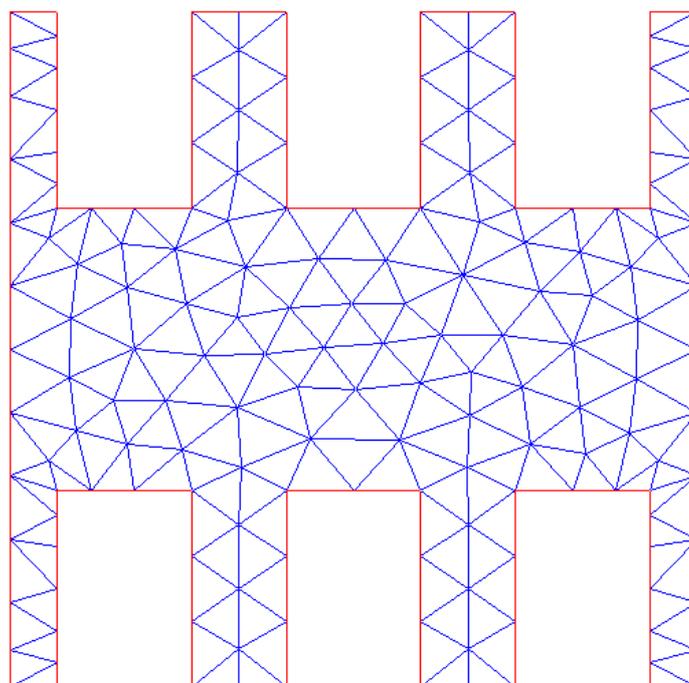


Fig. 2.72. Mallado de una guía irregular proporcionado por PDETOOL.

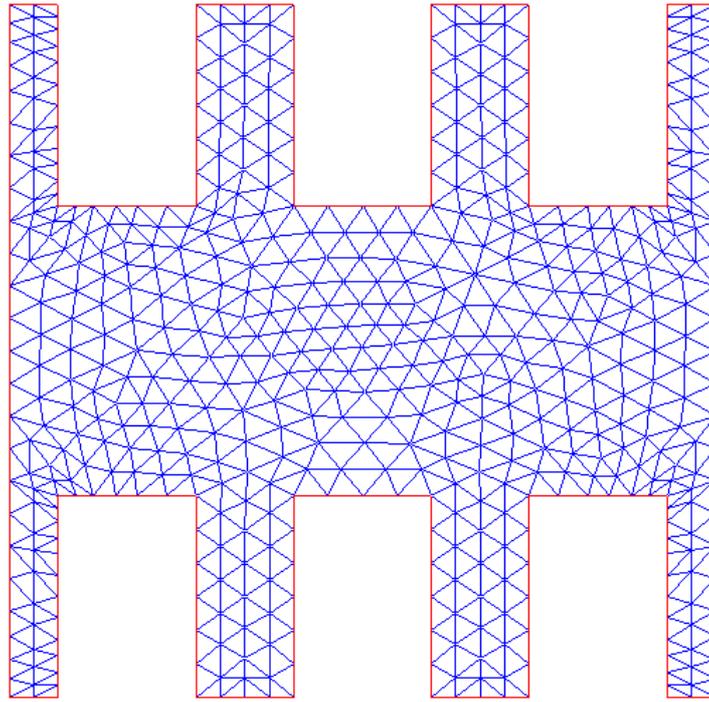


Fig. 2.73. Mallado de una guía irregular refinado una vez.

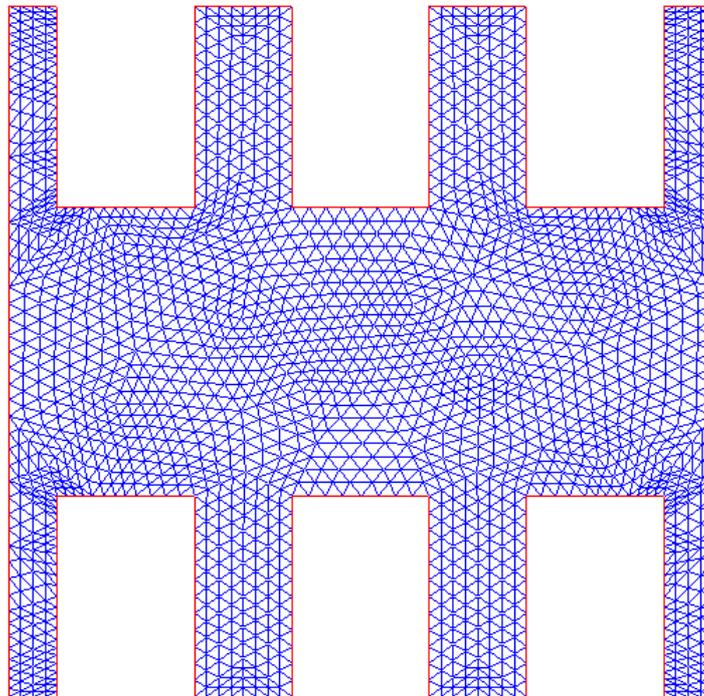


Fig. 2.74. Mallado de una guía irregular refinado dos veces.

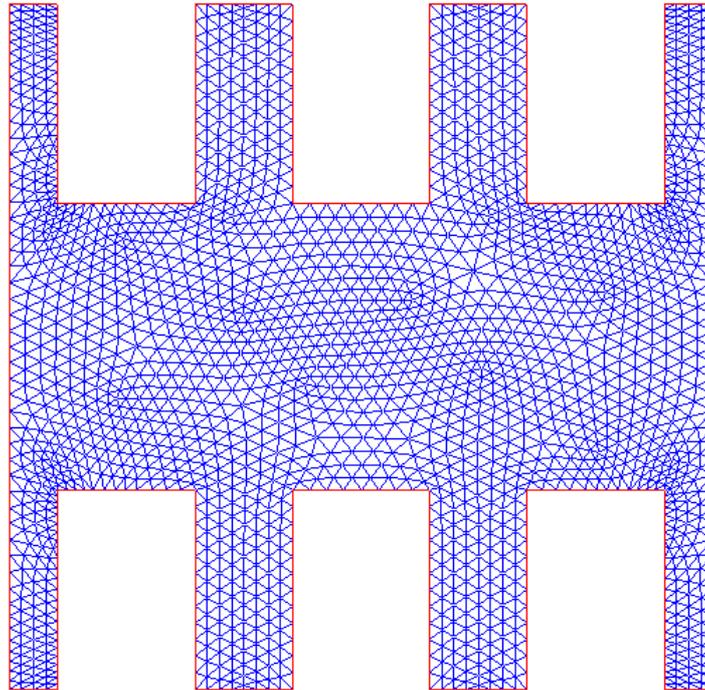


Fig. 2.75. Mallado de una guía irregular refinado dos veces, con reposicionamiento de nodos.

Como ya se sabe, la precisión de los resultados en el FEM depende de la densidad del mallado. PDETOOL puede refinar un mallado con la herramienta *refinemesh* de manera muy simple: uniendo los puntos de cada triángulo, obtiene cuatro triángulos más pequeños en su lugar. Este sistema de refinado tiene el inconveniente de que, donde en principio había triángulos más pequeños, tienden a formarse grupos de triángulos más pequeños aún, con lo que finalmente, los triángulos se agrupan en conglomerados. Un mallado de calidad ha de tener una densidad más uniforme a lo largo de la geometría. Para ello, existe la herramienta *jigglemesh*, que realiza un reposicionamiento de los nodos del mallado buscando uniformizar las áreas de todos los triángulos.

Por tanto, la secuencia de instrucciones es la siguiente:

```
[p,e,t]=initmesh(dl); % iniciamos el mallado
p=jigglemesh(p,e,t); % recolocamos los nodos
for i=1:Nref
    [p,e,t]=refinemesh(dl,p,e,t);
    p=jigglemesh(p,e,t); % recolocamos los nodos
end
```

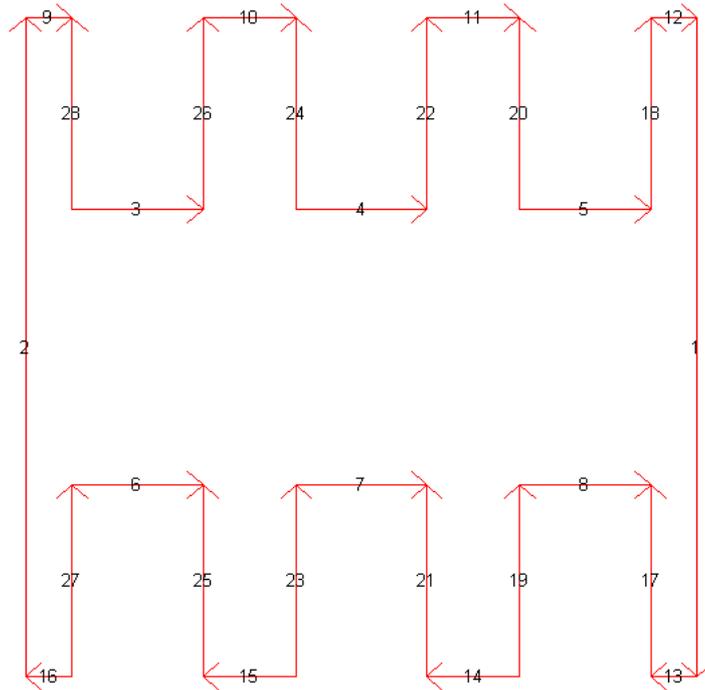


Fig. 2.76. Segmentos que dividen el contorno de una guía irregular.

Una vez se tiene la geometría de la guía, hay que resolver el problema de valor propio en ella. En primer lugar, se asignan condiciones de contorno. PDETOOL permite asignar condiciones de contorno por separado a cada uno de los segmentos individuales que componen el contorno. En el caso que ocupa a este problema, todos los segmentos se ponen con condiciones Dirichlet homogéneas (modos TM) y posteriormente, Neumann homogéneas (modos TE).

La matriz de condiciones de contorno tiene tantas columnas como segmentos en los que se divide el contorno (28). Según la estructura de la matriz de condiciones de contorno definida anteriormente, las matrices de condiciones de contorno tendrían la siguiente estructura:

```

bl_dir=[1 1 1 1 1 1 48 48 49 48]';
bl_neu=[1 0 1 1 48 48 48 48 49 48]';
    
```

Recuérdese que 48 y 49 son las entradas en la tabla ASCII de los caracteres '0' y '1', respectivamente.

Ya sólo queda resolver los dos problemas de valor propio, para los modos TE y TM:

```

[Ez_TM,l_TM]=pdeeig(bl_dir,p,e,t,'1','0','1',[0 kc]^2);% TM
[Hz_TE,l_TE]=pdeeig(bl_neu,p,e,t,'1','0','1',[ 0 kc]^2);% TE
    
```

Recuérdese la sintaxis de la función *pdeeig*, descrita anteriormente. Nótese que se ha de especificar un intervalo de búsqueda de valores propios (cuadrados de los números de onda de corte). La precisión depende del número de

soluciones encontradas por PDETOOL en la resolución del problema de valor propio. Por tanto, se tienen dos parámetros de los que depende la precisión de los resultados: el número de veces que se refina el mallado N_{ref} y el número de onda de corte máximo, k_c .

Estos parámetros, que pueden parecer independientes, no lo son. Por un lado, conviene que k_c tenga un valor suficientemente alto para que haya un número suficiente de modos que participen de la descripción de los campos. Sin embargo, los modos de orden alto tienen una variación espacial muy rápida, de forma que, para poder ser caracterizados bien, necesitan un mallado suficientemente fino. Por tanto, N_{ref} deberá ser también suficientemente elevado. Por el contrario, si la guía se describe bien con un k_c bajo, no será necesario un mallado muy denso para describir todos los modos con precisión.

Una vez calculados los modos, se procede al cálculo de los campos transversales, realizando los gradientes de los campos axiales. Ello se hace con ayuda de la función de PDETOOL *pdegrad*, que proporciona las derivadas parciales en x e y de una función de dos variables dada en un mallado triangular.

Seguidamente, se evalúan las funciones analíticas de los modos en guía rectangular sobre los mismos puntos en los que se poseen los campos en la guía irregular. Por último, se construye la matriz de acoplo modal realizando las integrales correspondientes de forma numérica.

2.5.6. Resultados

Se ha considerado el siguiente ejemplo de filtro doblemente corrugado: $w=86.36$ mm, $g=43.18$ mm, $b=12$ mm, $d=28$ mm, $L=w/3$, con tres etapas (cuatro filas de postes). Los accesos son en guía WR340 y se realiza el estudio en un entorno de $f=2.45$ GHz. Los detalles de este tipo de estructuras se encuentran en el apartado 3.5.

Se representa la atenuación del filtro en transmisión (S_{21}) para diferentes valores de k_c y de tamaño del mallado. En todos los casos, tras realizar el último refinamiento, se realiza un reposicionamiento de los nodos. Se representan barridos en frecuencia de 2 a 3 GHz para los valores de $k_c=4, 6, 8$ y 10 , a su vez para $0, 1$ y 2 refinados del mallado, que se dibujan también.

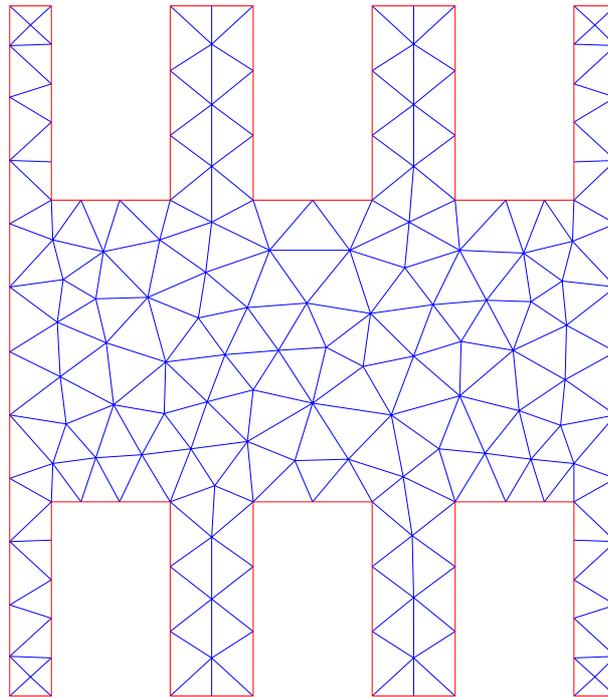


Fig. 2.77. Mallado del filtro corrugado en WR-340 para $N_{ref}=0$. $w=86.36$ mm, $g=43.18$ mm, $b=12$ mm, $d=28$ mm, $L=w/3$.

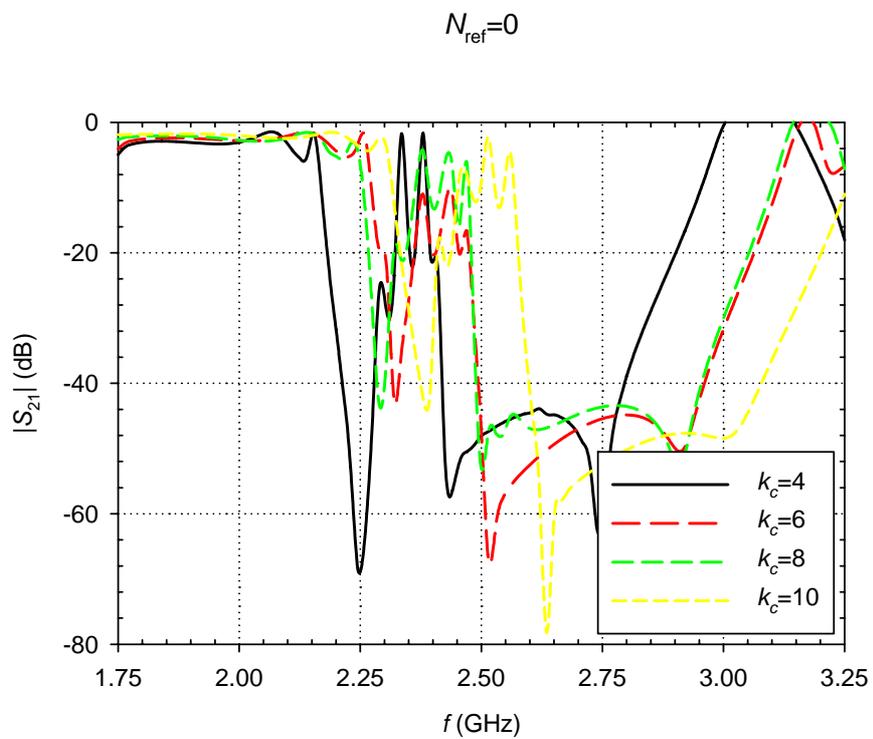


Fig. 2.78. Respuesta del filtro corrugado en la Fig. 2.77. Cuatro filas de postes.

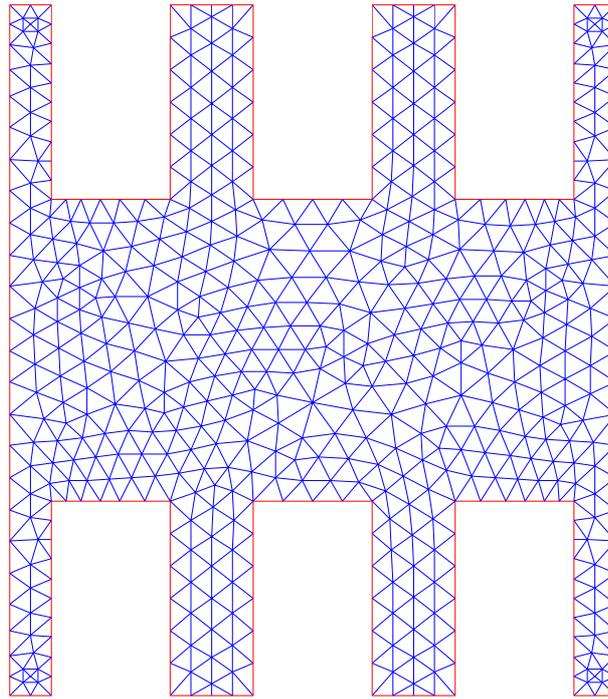


Fig. 2.79. Mallado del filtro corrugado en WR-340 para $N_{ref}=1$. $w=86.36$ mm, $g=43.18$ mm, $b=12$ mm, $d=28$ mm, $L=w/3$.

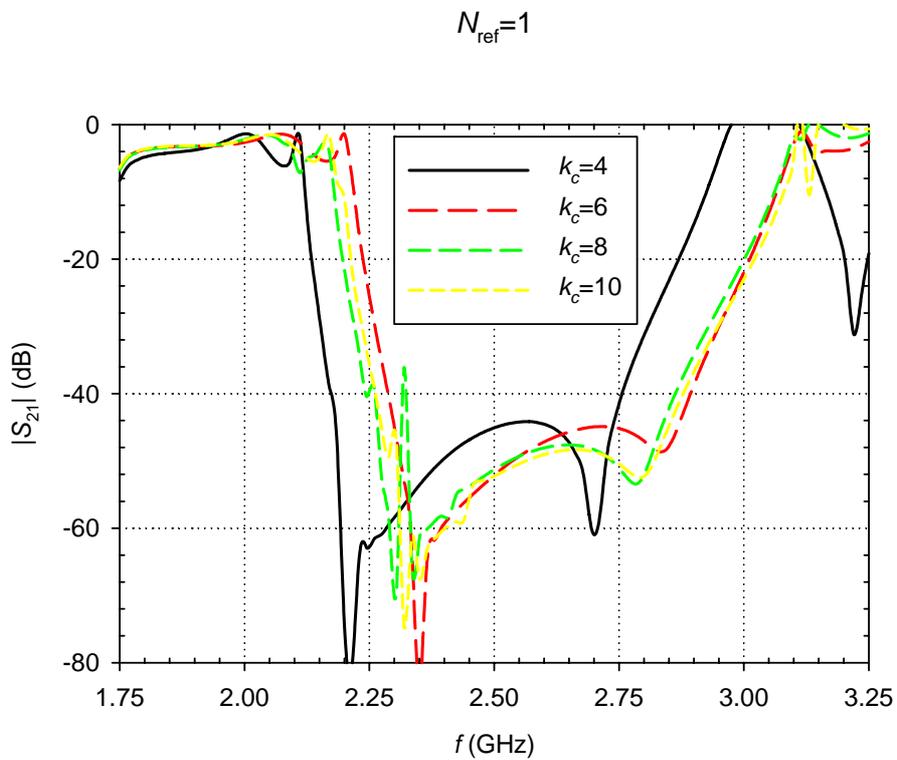


Fig. 2.80. Respuesta del filtro corrugado en la Fig. 2.79. Cuatro filas de postes.

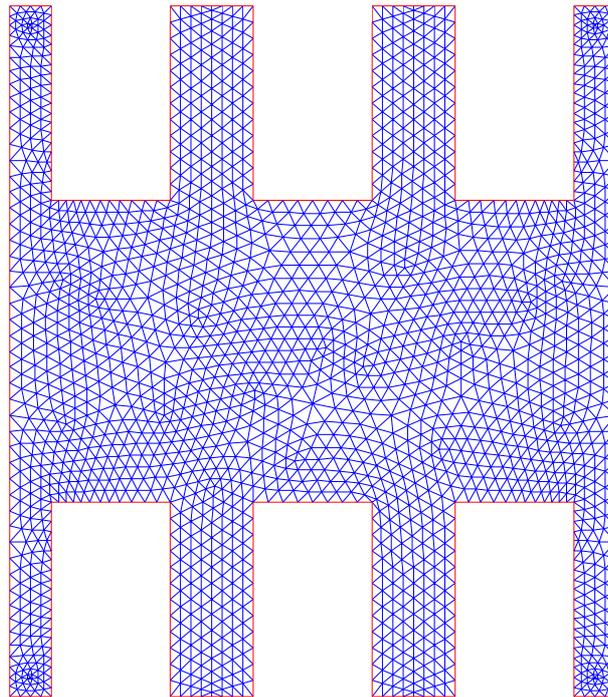


Fig. 2.81. Mallado del filtro corrugado en WR-340 para $N_{ref}=0$. $w=86.36$ mm, $g=43.18$ mm, $b=12$ mm, $d=28$ mm, $L=w/3$.

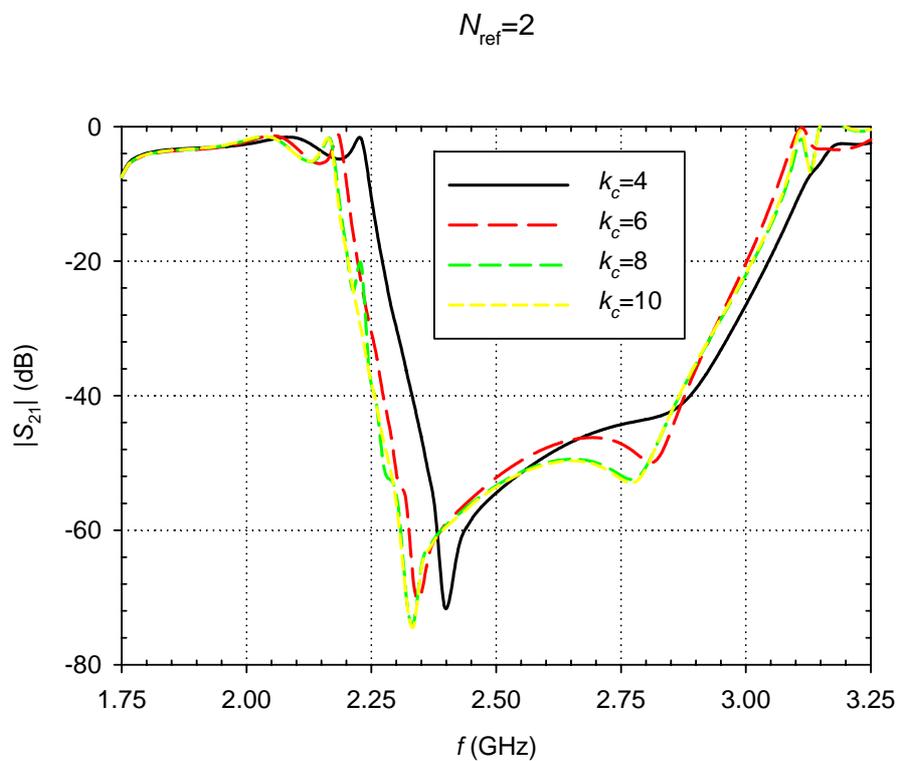


Fig. 2.82. Respuesta del filtro corrugado en la Fig. 2.81. Cuatro filas de postes.

Puede comprobarse que un mallado sin refinar, $N_{ref}=0$, es claramente insuficiente para la obtención de unos buenos resultados. Los modos no están bien descritos, y aparecen gráficas con un trazo irregular, que no se corresponden con la estructura de un filtro. Por ello, aunque se aumente el número de modos, no parece que se converja a ninguna respuesta, ya que los modos superiores están peor descritos aún que los de orden bajo.

Para el caso de un refinamiento, $N_{ref}=1$, las respuestas se suavizan bastante, y parece haber cierta convergencia cuando el número de modos aumenta, además de que se empieza a advertir la respuesta real del filtro. Esto podría valer para obtener resultados preliminares. Sin embargo, siguen apareciendo algunos picos espurios que hacen ver que el mallado es aún insuficiente para unos buenos resultados.

Para dos refinamientos, $N_{ref}=2$, las respuestas se han suavizado, y se puede observar que los resultados han convergido totalmente para $k_c=6$. Esta convergencia más rápida que en los casos anteriores se debe a que todos los modos considerados están bien descritos con este mallado, y por tanto, son capaces de aportar información a la respuesta total.

3. APLICACIONES

3.1. LA MULTIALIMENTACIÓN

3.1.1. Introducción

En aplicaciones de calentamiento por microondas, los aplicadores multimodo se utilizan para realizar el procesado de materiales cuyas dimensiones son de varias longitudes de onda [1].

El calentamiento por microondas es un proceso complejo que depende de muchos parámetros físicos que son a su vez condicionados por ciertos factores, como por la geometría del material y del aplicador, o por la forma en que esta cavidad es excitada. Debido a que el tamaño eléctrico de la estructura es de varias longitudes de onda, es difícil conseguir distribuciones de campo eléctrico uniformes debido al gran número de modos en propagación, cuya interferencia provoca numerosos máximos y mínimos en el campo eléctrico, lo que conlleva numerosos puntos fríos y calientes en el cálculo de la temperatura con el tiempo.

Debido a esto, existen técnicas para propiciar un calentamiento uniforme [1]. Los agitadores de modos y el plato rotatorio se encuentran entre ellas. El principal problema es la dificultad para analizar este tipo de situaciones de forma rigurosa, lo que hace que el comportamiento sea no siempre predecible.

Otra técnica para mejorar el calentamiento se basan en el empleo de más de una guía que excite a la cavidad, la llamada *multialimentación* [118]-[120]. El posicionamiento y la orientación de las guías de entrada son importantes, ya que condicionan la distribución de campo en la cavidad, de forma que pueden emplearse como parámetros de diseño.

Existen algunas aportaciones en cavidades vacías [118]-[122], o bien, en cavidades con varios materiales [123]-[124]. En este trabajo, se presenta una herramienta rápida para mejorar la uniformidad de la distribución de campo eléctrico en cavidades multimodo excitadas con múltiples fuentes. La herramienta recurre al análisis modal de dispositivos en guía de onda para geometrías rectangulares, y la optimización se realiza con algoritmos genéticos. Con este sistema, es posible encontrar posiciones óptimas de las guías que excitan al aplicador, que genera la distribución de temperatura más uniforme posible en el material.

3.1.2. Análisis y optimización de cavidades multialimentadas

Mediante el Análisis Circuital Generalizado es posible calcular el campo eléctrico y los parámetros S de una cavidad multimodo excitada por guías de onda en sus paredes. Específicamente, el análisis se restringe a cavidad y guías de onda rectangulares, de paredes conductoras perfectas. Según la Fig. 3.1, todas las guías de onda se sitúan en la cara $z=0$ de la cavidad. Una pieza de material rectangular, de dimensiones (a_s, b_s, c_s) se sitúa con su punto más cercano al origen en (x_s, y_s, z_s) . Además, se imponen que las paredes de las guías incidentes han de ser paralelas a las de la cavidad.

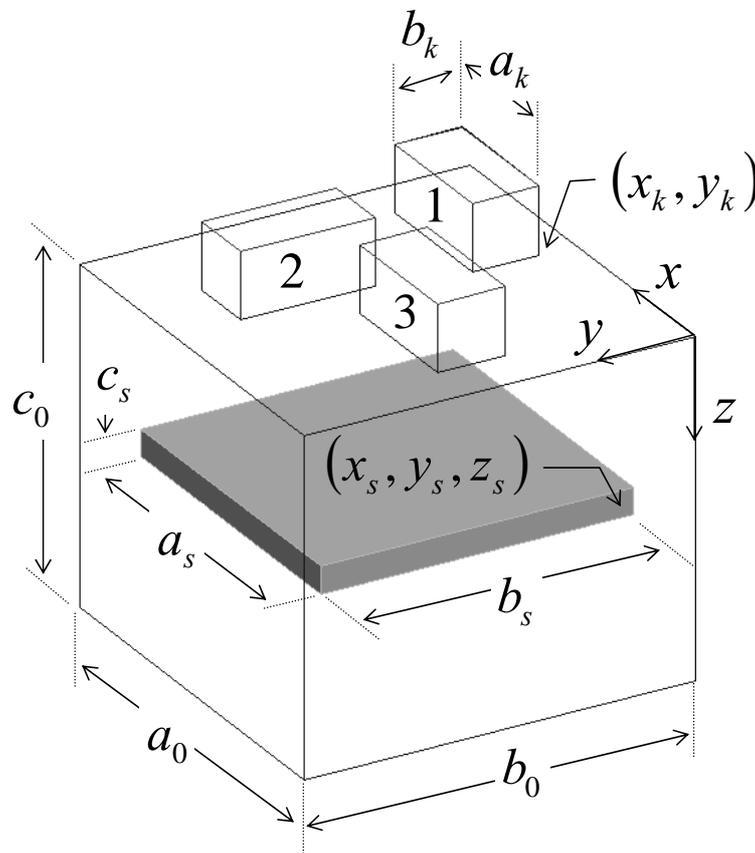


Fig. 3.1. Esquema de un horno con varias fuentes. Dimensiones de la cavidad a_0 , b_0 , y c_0 . Guías incidentes en $z=0$. Dimensiones del material a_s , b_s y c_s , en la posición (x_s, y_s, z_s) .

Dicha estructura puede ser descompuesta en las siguientes redes, que se enlazan de forma consecutiva:

- Una guía N -furcada [13], [31], en $z=0$.
- Un tramo de guía vacía entre $0 < z < z_s$.

- Un tramo de guía inhomogénea entre $z_s < z < z_s + a_s$.
- Un tramo de guía vacío entre $z_s + a_s < z < c_0$.
- Un cortocircuito en $z = c_0$.

El análisis de esta estructura implica el cálculo de su matriz de dispersión generalizada respecto de los modos de las guías incidentes. Una vez se calcula esta matriz, el campo dentro de la cavidad se calcula dada una cierta excitación procedente de las guías. La transición N -fucada se ha resuelto en el apartado dedicado al análisis modal, y la guía inhomogénea se ha resuelto en el apartado del método de los modos acoplados.

Se parte de la matriz S del tramo de guía inhomogénea correspondiente a la cavidad, con los accesos pegados al material. Esta matriz se aleja una distancia l_1 del puerto 1 y una distancia l_2 del puerto 2:

$$S' = PSP \quad (3.1)$$

con

$$P = \begin{pmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

y

$$\left. \begin{aligned} P_1 &= \text{diag}(e^{-\gamma_k l_1}) \\ P_2 &= \text{diag}(e^{-\gamma_k l_2}) \end{aligned} \right\} \quad (3.3)$$

Para ser consistente con la notación de la Fig. 3.1, se ha de cumplir que $l_1 + c_s + l_2 = c_0$.

Posteriormente, se cortocircuita el acceso 2:

$$S'' = S'_{11} - S'_{12} (I + S'_{22})^{-1} S'_{21} \quad (3.4)$$

Esta matriz tiene el tamaño mitad de la anterior, puesto que se refiere a sólo un acceso.

La matriz siguiente:

$$Y'' = 2(I + S'')^{-1} - I \quad (3.5)$$

es la matriz de admitancia de la cavidad sin tener en cuenta la transición.

Posteriormente, se tiene en cuenta la transición:

$$Y_t = Y''^{-1} M^t Y_I Y'' M \quad (3.6)$$

donde Y_I es la matriz diagonal de admitancias modales en el acceso I (cavidad) y Y_{II} es la matriz diagonal de admitancias modales en el acceso II (guías incidentes).

Finalmente, la matriz total de la cavidad es

$$S_t = 2(I + Y_t) - I \quad (3.7)$$

A continuación, se calcula el campo eléctrico en la muestra dada una excitación por las guías incidentes, \mathbf{a}_{II} . Se hace:

$$\mathbf{b}_{II} = S_t \mathbf{a}_{II} \quad (3.8)$$

La tensión total en la transición en el lado de las guías es:

$$\mathbf{v}_{II} = \mathbf{a}_{II} + \mathbf{b}_{II} \quad (3.9)$$

Y la tensión al otro lado de la transición es:

$$\mathbf{v}_I = M \mathbf{v}_{II} \quad (3.10)$$

Y la corriente se obtiene con la admitancia de la cavidad:

$$\mathbf{i}_I = -Y'' \mathbf{v}_I \quad (3.11)$$

El signo negativo se ha puesto para exigir sentido positivo de las ondas huyendo de la transición.

Se calculan las ondas incidente y reflejada:

$$\mathbf{b}_I = \frac{\mathbf{v}_I + \mathbf{i}_I}{2} \quad (3.12)$$

$$\mathbf{a}_I = \frac{\mathbf{v}_I - \mathbf{i}_I}{2} \quad (3.13)$$

Se llevan las ondas hasta el plano de transición con la muestra:

$$\mathbf{b}'_I = P_1 \mathbf{b}_I \quad (3.14)$$

$$\mathbf{a}'_I = P_1^{-1} \mathbf{a}_I \quad (3.15)$$

Como los campos eléctrico y magnético tangenciales son iguales a ambos lados de la muestra, y están expresados respecto de las mismas funciones base, los coeficientes coinciden:

$$\mathbf{b}_{mat}(l_1) = \mathbf{b}'_I \quad (3.16)$$

$$\mathbf{a}_{mat}(l_1) = \mathbf{a}'_I \quad (3.17)$$

Y se calculan los coeficientes de tensión y corriente

$$\mathbf{v}_{mat}(l_1) = \mathbf{b}_{mat}(l_1) + \mathbf{a}_{mat}(l_1) \quad (3.18)$$

$$\mathbf{i}_{mat}(l_1) = \mathbf{b}_{mat}(l_1) - \mathbf{a}_{mat}(l_1) \quad (3.19)$$

Donde, en los coeficientes modales en el tramo de la muestra se pone explícitamente la dependencia espacial.

Para calcular el campo en $l_1 < z < l_1 + c_s$, hay que propagar estos campos según las constantes de propagación de la guía inhomogénea. Sus constantes de propagación $\gamma_{mat,k}$ han sido ya calculadas al resolver la propagación. Simplemente hay que tener en cuenta que las amplitudes de los modos axiales no son las mismas que las de los modos transversales, como en el caso de una guía vacía. En este caso, la relación viene dada por (2.244).

Una vez calculado el campo eléctrico en la cavidad, se calcula la densidad de potencia dieléctrica disipada en él –calor generado–, que viene dada por la ecuación de Poynting, y que es la excitación de la ecuación del calor:

$$Q = \frac{1}{2} \omega \varepsilon_0 \varepsilon'' |\mathbf{E}|^2 \quad (3.20)$$

donde ω es la frecuencia angular y \mathbf{E} es el vector de campo eléctrico. Para un calentamiento uniforme, es necesario que el calor generado sea una función lo más constante posible en la región de interés.

3.1.3. Resultados

Dado un conjunto de valores de campo para diferentes posiciones del espacio, la uniformidad de éstos se puede evaluar con la desviación típica de la muestra (σ). Los resultados numéricos muestran que diferentes configuraciones y tamaños de la guía y la cavidad dan lugar a valores similares de este parámetro. Este valor presenta muchos mínimos locales en función de los parámetros de diseño, de forma que los algoritmos de tipo gradiente se desaconsejan para encontrar el mínimo global.

Los algoritmos genéticos (GA) [125] han demostrado su eficiencia para resolver problemas lineales y no lineales y han ganado popularidad recientemente como una técnica de optimización robusta para problemas de física, ingeniería, economía, etc. Además, permiten llegar a la solución sin introducir ningún valor inicial. Su mayor desventaja es que requieren un compromiso entre precisión de la solución y tiempo de cálculo.

Los GA precisan de la definición de una función objetivo, que sepa evaluar la bondad de las simulaciones. Dejando tomar valores en un margen a ciertas variables del problema, se obtienen diferentes valores de la función objetivo.

Para una potencia inyectada por las fuentes de P_{in} y una potencia reflejada a ellas de P_{out} , se define la eficiencia del proceso como

$$\eta = 1 - \frac{P_{out}}{P_{in}} \quad (3.21)$$

La densidad de potencia representada en esa figura ha sido normalizada respecto a la potencia incidente partido el volumen total de la muestra, según la ecuación

$$Q' = \frac{Q}{P_{in}/V} \quad (3.22)$$

De este modo, la eficiencia de la red de alimentación se ilustra con esta representación. Valores más altos de este parámetro implican mayor absorción de energía por parte del material.

Como es sabido, el conjunto de la cavidad es un sistema lineal, por lo que una determinada variación en la excitación produce una variación proporcional en los campos en la cavidad. Como se quiere una función que mida únicamente la uniformidad, es necesario dividir la desviación típica σ por el valor medio μ . Por tanto, una posible función objetivo f es en coeficiente de variación:

$$f = \frac{\sigma}{\mu} \quad (3.23).$$

Cuando el campo es completamente uniforme, $\sigma=0$, y por tanto, $f=0$. Por otro lado, la función no está acotada superiormente, puesto que la desviación típica no lo está, para un nivel medio determinado.

Se puede también considerar la siguiente función objetivo: la relación entre el valor máximo y el mínimo del campo eléctrico en el volumen considerado:

$$f = \frac{\min(|\mathbf{E}|)}{\max(|\mathbf{E}|)} \quad (3.24)$$

Cuando el campo es uniforme, el mínimo y el máximo son iguales, por lo que la función objetivo es cercana a 1. Por otro lado, cuando el campo varía de forma muy abrupta, los máximos y mínimos están muy distantes, por lo que la función objetivo toma valores cercanos a 0.

La herramienta de simulación ha sido implementada en MATLAB[®] y se ha acoplado con la librería de algoritmos genéticos comercial de The Mathworks, Inc.

Se presentan resultados para dos tipos de configuraciones: estática y dinámica. En la cavidad estática, se tiene una muestra que permanece siempre

en la misma posición, y en la cavidad estática, el calentamiento es tipo túnel, con la muestra que viaja en una dirección por dentro de la cavidad.

3.1.3.1. Cavidad estática

3.1.3.1.1. Cavidad totalmente rellena

En este apartado, se considera un ejemplo sencillo de cavidad. Se trata de una cavidad cúbica de $a_0=b_0=c_0=400$ mm, excitada por tres fuentes situadas únicamente en la cara $z=0$, con un material que rellena toda su sección transversal, $a_s=a$, y $b_s=b$, de profundidad $c_s=10$ mm, centrado en z : $z_s=(c_0-c_s)/2$, según la Fig 3.1 [126]. La permitividad relativa de la muestra es $\epsilon_r = 3 - j0.1$.

A pesar de que el material ocupa toda la sección transversal, la región donde se busca uniformizar el campo eléctrico tiene 250 mm de longitud en x y en y , y 10 mm de espesor en z , en la zona centrada de la muestra. Este caso es particularmente difícil de optimizar, puesto que las bajas pérdidas provocan valores de onda estacionaria altos, lo que dificulta la uniformización del campo. Hay que tener en cuenta que la herramienta de simulación desarrollada contempla el material con las mismas dimensiones transversales que la cavidad. Esto en un caso real no se daría, sino que la cavidad tendría la sección transversal parcialmente rellena.

La Fig. 3.2 muestra el valor de densidad de potencia en función de las coordenadas transversales (x,y) en la capa central del material $z=z_s+a_s/2$. El posicionamiento de las fuentes en la cara $z=0$ es simétrico, según la Fig. 3.3a). Esta simulación corresponde a la n° 1 en la Tabla 3. Se puede ver que la uniformidad alcanzada es poca, $\sigma=0.417$. Esto produciría indeseados puntos fríos y calientes en el calentamiento. La eficiencia es pequeña, $\eta=0.06$, y por ello, con esta distribución de fuentes, la mayor parte de la energía emitida por las fuentes les sería reflejada, lo cual explica los valores tan bajos en la Fig. 3.2.

Tras este ejemplo simétrico, se procede a la optimización de la distribución de campo eléctrico en la región de interés. Se ha comprobado que existen multitud de configuraciones que dan lugar a mínimos locales, por lo que conviene realizar varias optimizaciones y comparar los resultados entre ellas. A estas optimizaciones, se les ha de definir una determinada función objetivo. Tras muchas pruebas, se ha constatado que la función dada por (3.24) se comporta mejor en los GA. En todos los casos, se dispone una guía de onda de polarización perpendicular a las otras dos, ya que esto favorece la excitación de

un juego más completo de modos en la cavidad, cuya combinación favorezca la uniformidad [118]-[122]. En este trabajo, también se ha constatado este hecho.

Además de las posiciones de las guías, otros parámetros de diseño son la longitud de la cavidad en z (c_0) y la posición de la región a optimizar dentro de ella (x_s, y_s, z_s).

La fila n° 7 en la Tabla 3 corresponde a la optimización que proporciona mejores resultados. La Fig. 3.3b) muestra el posicionamiento de las guías para esta configuración. La densidad de potencia normalizada de la mejor simulación se representa en la Fig. 3.4. Es interesante ver que tanto la uniformidad ($\sigma/\mu=0.1$) como la eficiencia ($\eta=0.78$) mejoran utilizando la función objetivo f en la rutina de optimización. En el resto de filas de la tabla, se muestran los resultados de otras optimizaciones.

n°	f	σ	η	c (mm)	x_s (mm)	y_s (mm)	z_s (mm)
1	0.003	0.417	0.06	400	75	75	20
2	0.296	0.145	0.80	354	97	86	26
3	0.336	0.111	0.70	354	85	109	26
4	0.258	0.145	0.88	355	91	76	27
5	0.202	0.164	0.86	355	75	75	33
6	0.178	0.191	0.89	367	75	94	21
7	0.359	0.103	0.78	354	87	83	26
8	0.257	0.146	0.94	355	92	89	32
9	0.230	0.154	0.86	355	85	98	33
10	0.272	0.131	0.78	355	84	100	27
11	0.204	0.196	0.78	357	83	80	21
12	0.303	0.143	0.75	356	75	96	27

Tabla 3. Valores de las optimizaciones de la cavidad estática. La primera fila corresponde a un caso simétrico no optimizado.

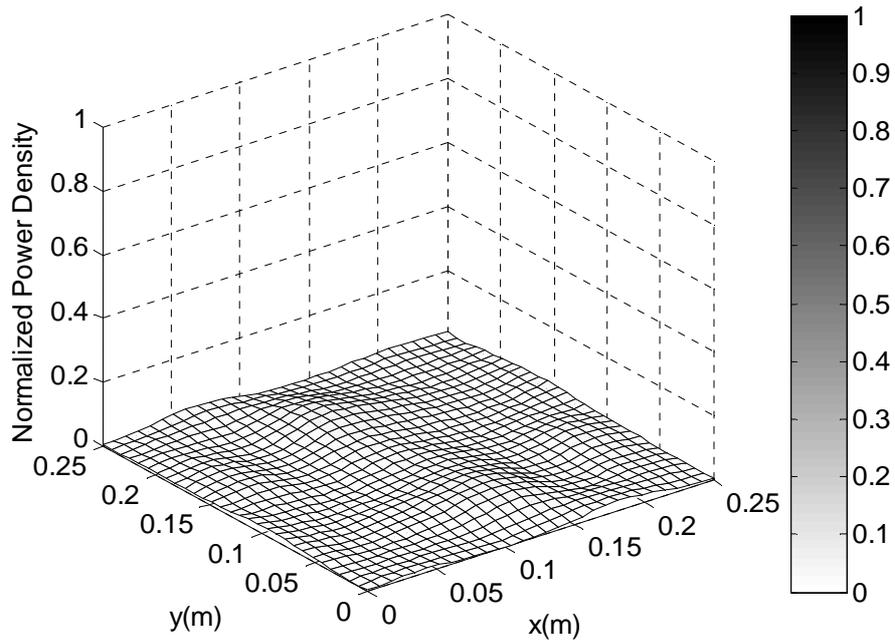


Fig. 3.2. Densidad de potencia normalizada en la muestra para la fila n° 1 en la Tabla 3 (caso simétrico).

La Fig. 3.5 muestra el acoplo mutuo entre las dos guías dispuestas horizontalmente de Fig. 3.3a), en el rango de frecuencias de 2.4 GHz a 2.5 GHz. Se muestran los resultados obtenidos con la herramienta desarrollada y los obtenidos utilizando el simulador CONCERTO[®] de Vector Fields [127], que dan validez a los resultados obtenidos.

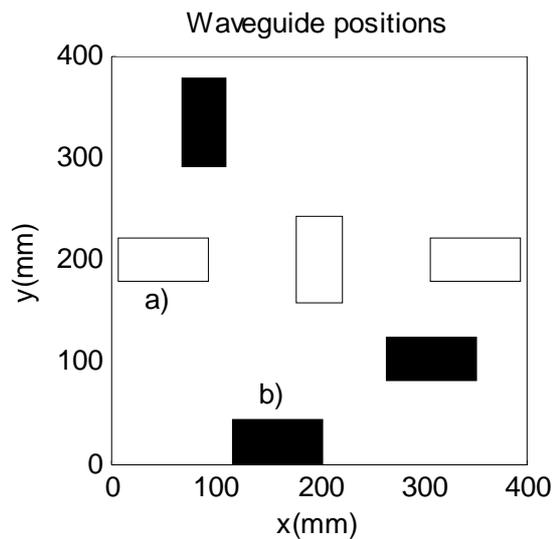


Fig. 3.3. Posiciones de las guías de alimentación en la cara I de la cavidad. a) n° 1 y b) n° 7 en la Tabla 3.

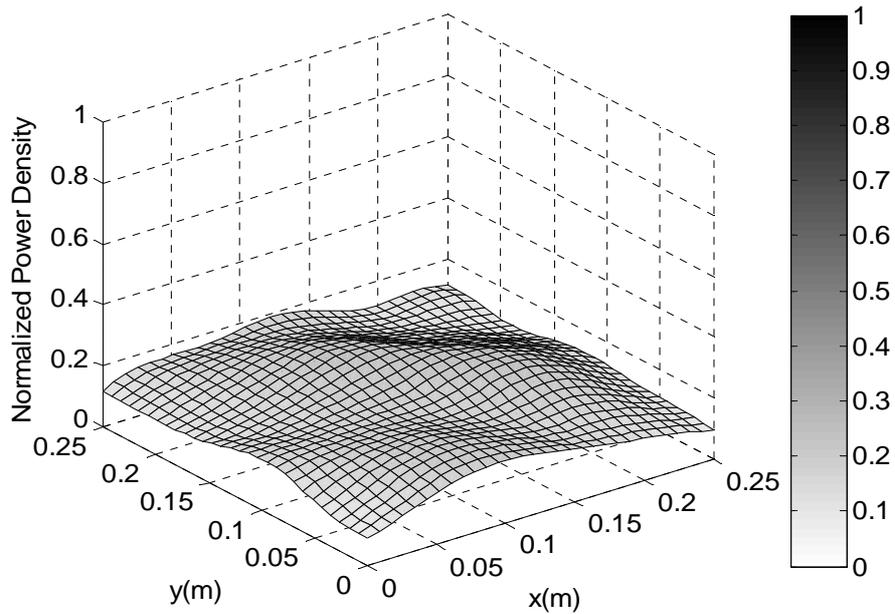


Fig. 3.4. Densidad de potencia normalizada para la fila n° 7 en la Tabla 3 (caso optimizado).

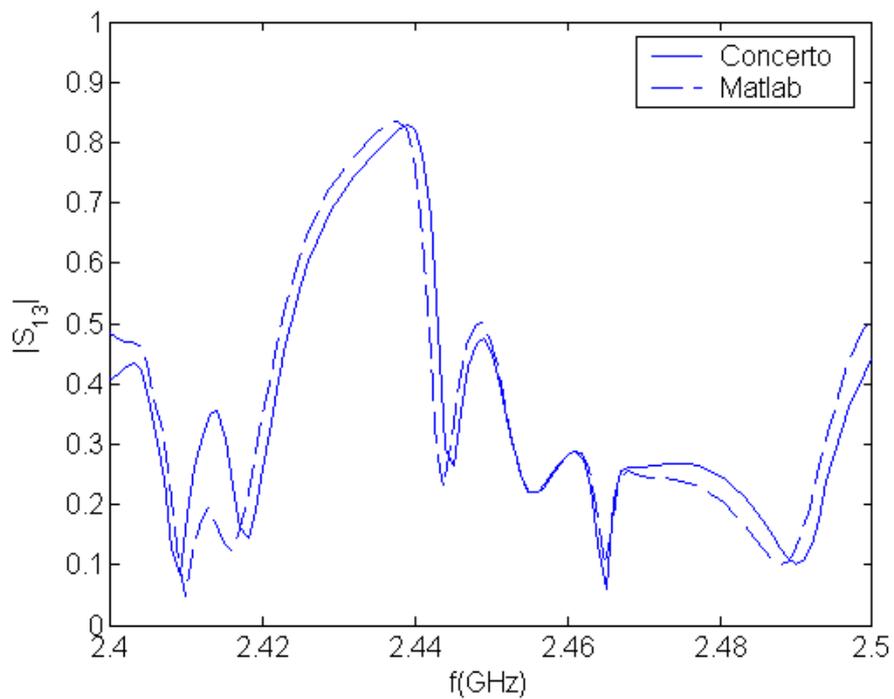


Fig. 3.5. Acoplo entre las guías de misma polarización para la fila n° 1 en la Tabla 3.

La Fig. 3.6 muestra la convergencia de los algoritmos genéticos de las optimizaciones 6 y 7 de la Tabla 3. Concretamente, se trata del valor de la función objetivo correspondiente al mejor individuo de cada generación. Se observa una tendencia rápida inicial, mientras que las últimas generaciones realizan el ajuste fino de los resultados.

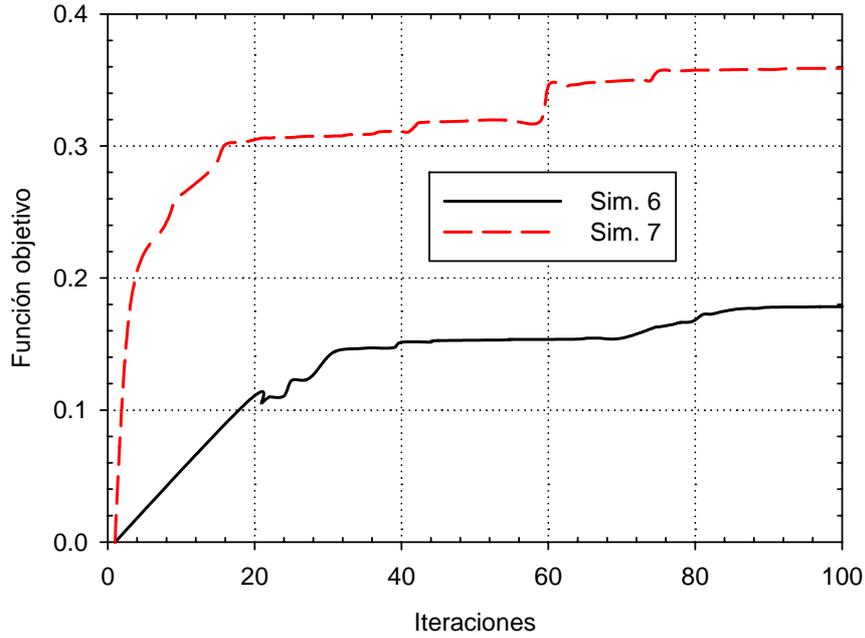


Fig. 3.6. Densidad de potencia normalizada para la fila n° 7 en la Tabla 3 (caso optimizado).

3.1.3.1.2. Cavidad parcialmente rellena

En este apartado, se va a simular un horno microondas sin restricciones para el material en cuanto a sus dimensiones [128]. Es decir, la cavidad está parcialmente rellena en todas las dimensiones. Se trata de una cavidad cúbica, $a_0=b_0=c_0=250$ mm, con tres guías indicentes WR-340 en $(x_1,y_1)=(31.82,183.41)$ mm, $(x_2,y_2)=(63.41, 41.82)$ mm, y $(x_3,y_3)=(131.82,103.41)$ mm. Como en el caso anterior, existe una guía –la segunda– con polarización cruzada [118]-[122]. Las dimensiones del material son $a_s=b_s=200$ mm, $c_s=20$ mm en la posición centrada, $x_s=(a_0-a_s)/2$, $y_s=(b_0-b_s)/2$, $z_s=(c_0-c_s)/2$. El material es dieléctrico, de permitividad $\epsilon_r=15-j$. Este modelo se aproxima más al de una situación real.

La Fig. 9 muestra las pérdidas de retorno del puerto 1 y el acoplamiento entre los puertos 2 y 3. Se adjuntan también los resultados comparativos calculados con CONCERTO. Se puede comprobar la gran fidelidad de los resultados.

La Fig. 3.8a) muestra la densidad de potencia disipada en el material dieléctrico ($z=c_0/2$), calculada de forma modal, y la Fig 3.8b) muestra la misma magnitud calculada con FDTD. Se aprecian ligeras diferencias, pero es claramente apreciable la concentración de máximos en la esquina superior izquierda.

En esta estructura, la geometría impone condiciones muy fuertes, de manera que fue necesario utilizar $k_c=16$, lo que supone unos 400 modos, usando todo el juego TE y TM.

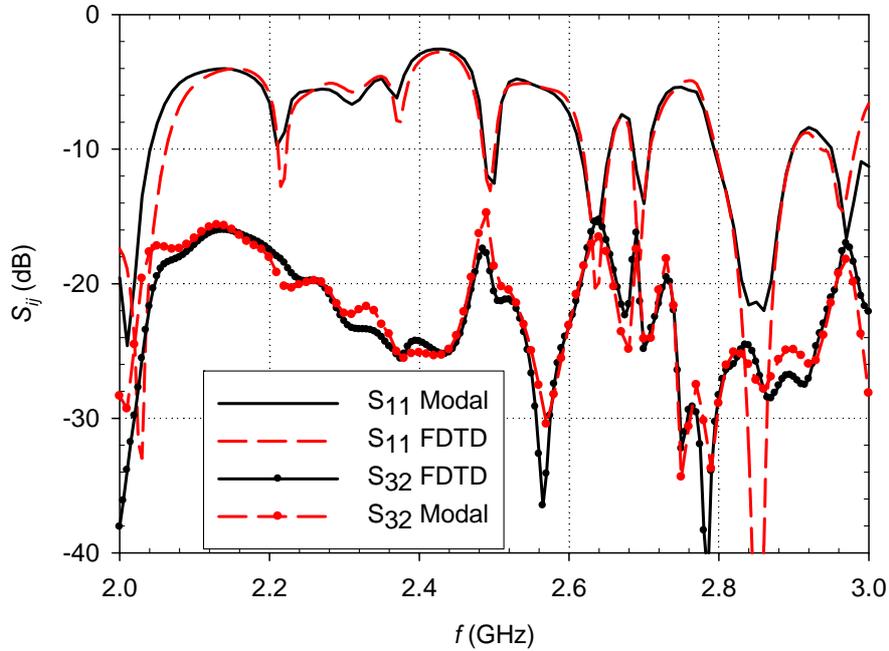


Fig. 3.7. Módulo de los parámetros S del ejemplo en Fig. 3.1, comparando MM y FDTD. $a_0=b_0=c_0=250$ mm, tres guías indicentes WR-340 en $(x_1,y_1)=(31.82,183.41)$ mm, $(x_2,y_2)=(63.41, 41.82)$ mm, y $(x_3,y_3)=(131.82,103.41)$ mm. La segunda guía tiene polarización cruzada. $a_s=b_s=200$ mm, $c_s=20$ mm. Posición $x_s=(a_0-a_s)/2$, $y_s=(b_0-b_s)/2$, $z_s=(c_0-c_s)/2$. Dieléctrico de permitividad $\epsilon_r=15-j$.

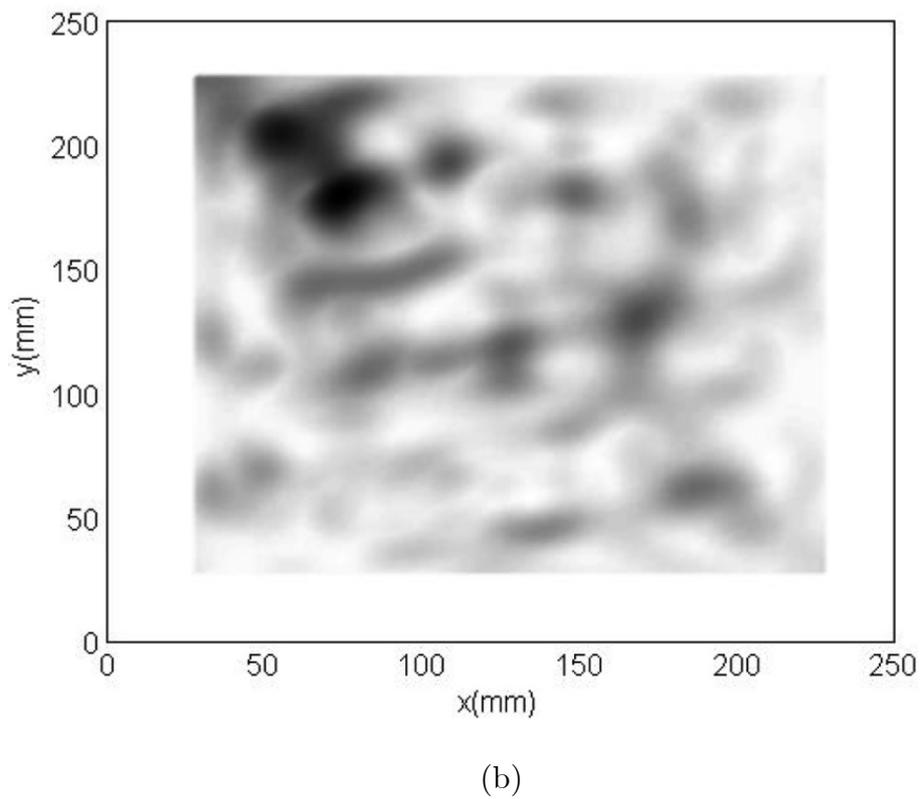
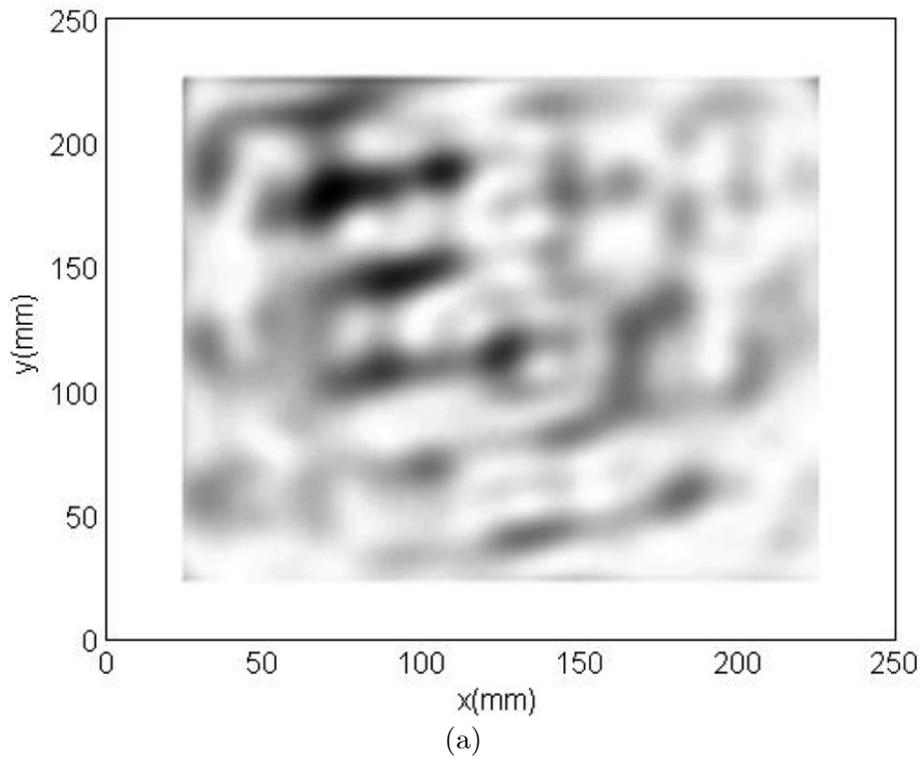


Fig. 3.8. Densidad de potencia disipada en la capa central del material ($z=c_0/2$) en el horno microondas descrito en la Fig. 3.1. Frecuencia $f=2.45$ GHz. (a) Modal (b) FDTD.

3.1.3.2. Túnel de microondas

El calentamiento por microondas en los túneles es un proceso dinámico donde muestras consecutivas viajan en una dirección del túnel. Esta dimensión es, normalmente, mayor que las otras dos. Por tanto, es necesario calcular el campo eléctrico en todas las posiciones de la muestra, ya que cada posición de ésta en el túnel se corresponde con una situación física diferente. La Fig. 3.9 muestra el esquema de un túnel de microondas.

Se supone que las muestras consecutivas que se introducen en el túnel no dejan espacios entre ellas, de forma que se puede considerar que lo que hay es un único bloque dieléctrico que llena completamente la cavidad en una dimensión. En la Fig. 3.1, se considera que esta dimensión es la x , de $x=0$ hasta $x=a$. Al dejar el túnel, una muestra concreta ha recibido todas las contribuciones de campo eléctrico de todas sus posiciones en la cavidad.

Es sabido que la excitación de la ecuación del calor depende del módulo al cuadrado del campo eléctrico. Además, si se considera que las propiedades térmicas de la muestra varían lentamente con respecto al movimiento de la muestra, se puede suponer que la muestra, al final del recorrido ha *recibido* un campo eléctrico medio de la forma

$$E_{av} = \sqrt{\sum_i |\mathbf{E}_i|^2} \quad (3.25)$$

Para demostrar la funcionalidad del método, se exponen dos ejemplos [122]. Las muestras están centradas en los ejes y y z . Existen tres excitaciones a través de guías WR-340 a 2.45 GHz, que se sitúan en el plano $z=0$. Como en los ejemplos anteriores, dos de ellas llevan polarización y y la otra, polarización x [118]-[122]. El tamaño del túnel es $(a_0, b_0, c_0)=(1000, 400, 400)$ mm, y la muestra es una lámina de $(a_s, b_s, c_s)=(250, 250, 30)$ mm.

Para simular el efecto del desplazamiento de la muestra a lo largo del eje x , se considera un bloque dieléctrico de $(a_s, b_s, c_s)=(1000, 250, 30)$ mm. Se calcula el campo en dicha estructura y luego se obtiene el valor medio en el eje x , para la muestra del tamaño expuesto, E_{av} . Como función objetivo de los GA, se coge la misma función objetivo (3.24).

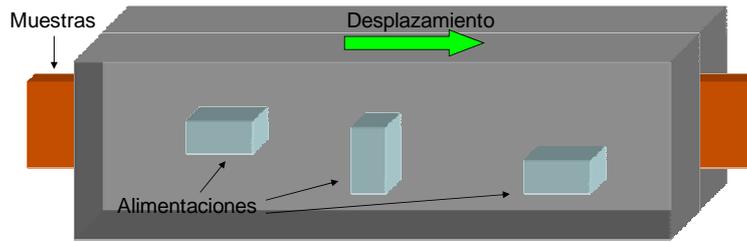


Fig. 3.9. Túnel de microondas multialimentado, con una serie de muestras que viajan a lo largo de una dirección.

La Fig. 3.10 se corresponde con una disposición geométrica regular de las fuentes, cuyos resultados se muestran en la Fig. 3.11. La Tabla 4 muestra, en su primera fila, los resultados correspondientes. Las tres primeras columnas muestran las posiciones de las guías y la cuarta muestra el valor de la uniformidad, según la Fig. 3.1 muestra el campo medio después de dejar el túnel. Puede comprobarse que el campo dista mucho de ser uniforme.

La Fig. 3.12 se corresponde con una optimización con algoritmos genéticos cuyos resultados se muestran en la Fig. 3.13. La Tabla 4 muestra, en su segunda fila, los resultados correspondientes. Puede comprobarse que la uniformidad ha mejorado. Este campo eléctrico medio lleva consigo un calentamiento de las muestras mucho más uniforme.

Simulación	(x_1, y_1) (mm)	(x_2, y_2) (mm)	(x_3, y_3) (mm)	f
Regular	(206.8,478.4)	(478.4,456.8)	(706.84,78.4)	0.36
Óptima	(889.8,499.5)	(623.0,477.4)	(30.4,459.8)	0.66

Tabla 4. Valores de las simulaciones del túnel

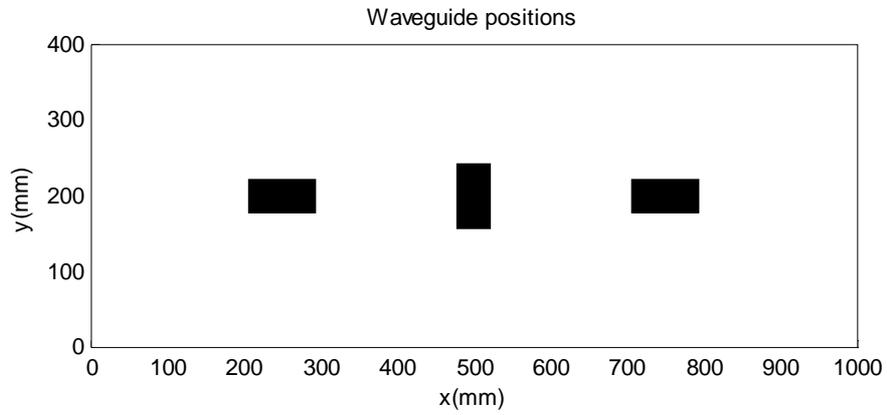


Fig. 3.10. Posicionamiento intuitivo de las fuentes del túnel, primera fila de la Tabla 4.

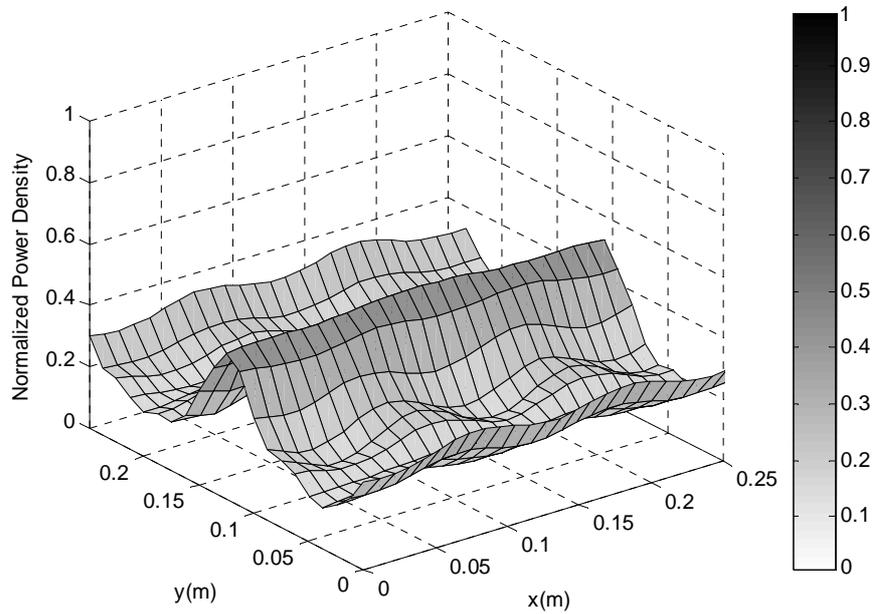


Fig. 3.11. Densidad de potencia media normalizada para el posicionamiento intuitivo de las fuentes en el túnel, primera fila de la Tabla 4.

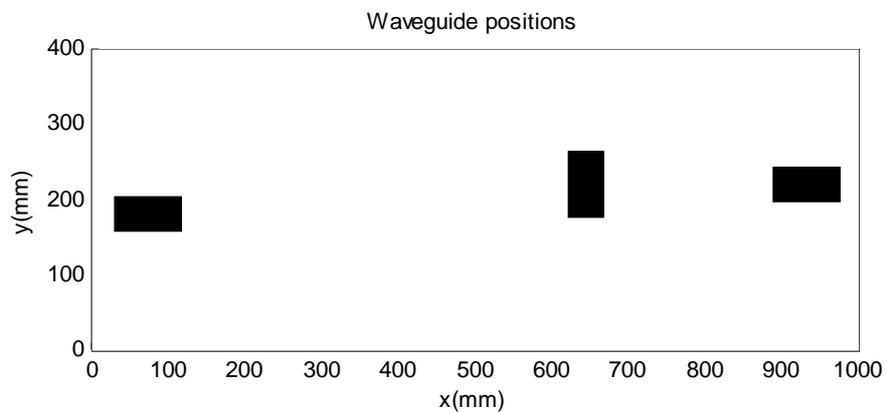


Fig. 3.12. Posicionamiento óptimo de las fuentes en el túnel, segunda fila de la Tabla 4.

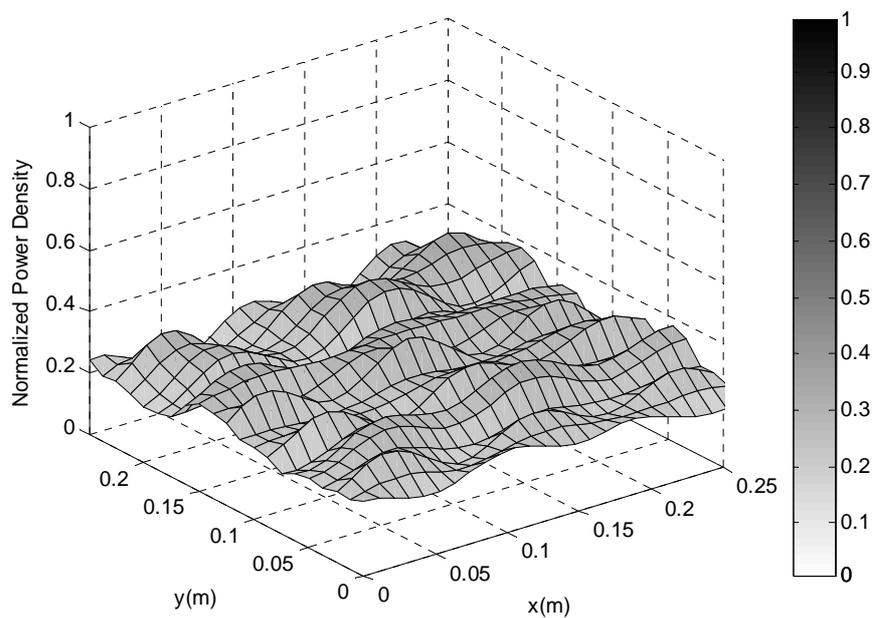


Fig. 3.13. Densidad de potencia media normalizada para el posicionamiento óptimo de las fuentes en el túnel, segunda fila de la Tabla 4.

3.1.4. Conclusiones

Se ha desarrollado una herramienta rápida de cálculo del campo eléctrico en cavidades multimodo excitadas con múltiples fuentes. Se ha propuesto un algoritmo de optimización basado en los GA para buscar distribuciones de campo eléctrico uniformes. La integración de las dos rutinas ha resultado ser eficiente para el diseño de cavidades multimodo, tanto estáticas como túneles. En todos los ejemplos, el algoritmo de optimización consiguió una significativa reducción de la desviación típica del campo eléctrico, lo que implica una sustancial mejora en el proceso de calentamiento.

Este trabajo abre nuevas perspectivas para la mejora de la uniformidad de distribuciones de campo eléctrico, así como reducción del acoplo entre las fuentes, u otros parámetros del proceso que se deseen mejorar.

3.2. DISPOSITIVOS DE MULTIGUÍAS

La Fig. 3.14 muestra un corte longitudinal en plano E de un acoplador direccional de 6-dB de líneas bifurcadas [30], [35].

Este dispositivo consiste en dos guías rectangular incidentes (puertos 1 y 4) que incrementan su altura mediante transformadores de impedancia (saltos en plano E) y que convergen en otra guía de mayor altura. Esta guía grande se divide en dos guías de nuevo, y se repite el proceso varias veces con diferentes dimensiones. Existe un plano de simetría S' .

Para el modelado de esta estructura con el acoplo modal, se divide toda la estructura en discontinuidades en guía y tramos de guía homogéneos de una longitud determinada. La Fig. 3.15 muestra esta división circuital. Cada bloque pequeño representa un salto en plano E y cada bloque grande es una union de guías bifurcadas ($N=2$). La respuesta total se obtiene conectando todas las redes de la Fig. 3.15 [128].

La Fig. 3.16 muestra las pérdidas de retorno (S_{11}), el factor de transmisión (S_{21}) y el factor de acoplo (S_{31}) de este acoplador direccional. Dada la invarianza en la dimensión mayor de las guías incidentes, la base de los modos TE_{1n} y TM_{1n} describe fielmente la estructura. Se consideraron 50 modos base en cada puerto, lo que, dada la base elegida, implica $k_c=25$. La misma estructura se ha simulado con CONCERTO. Se representan estos resultados también en la Fig. 3.16 para realizar la comparación. Se puede comprobar la gran similitud de los resultados entre las dos respuestas. Para valores muy bajos (p.e. S_{11} bajo -35 dB), se aprecian pequeñas diferencias, que son típicas entre los diferentes métodos aproximados de análisis.

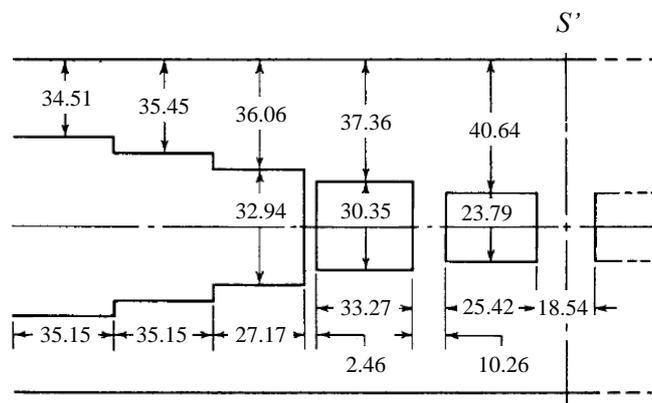


Fig. 3.14. Vista longitudinal de un acoplador direccional de 6-dB (corte en plano E). S' es un plano de simetría. Guías incidentes WR-280 (71.12 x 35.56). Dimensiones en mm.

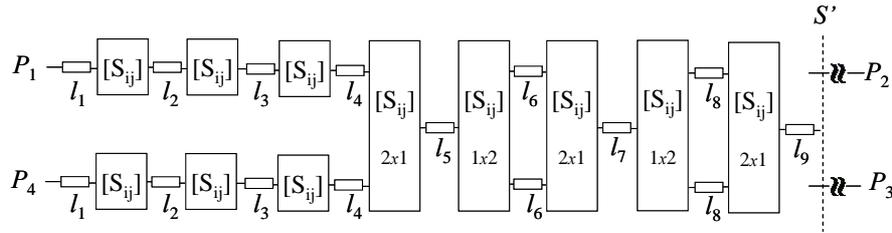


Fig. 3.15. Diagrama de bloques del acoplador de la Fig. 3.14. $l_1=0$, $l_2=35.15$, $l_3=35.15$, $l_4=27.17$, $l_5=2.46$, $l_6=33.27$, $l_7=10.26$, $l_8=25.42$, $l_9=9.27$. Dimensiones en mm.

No existe una regla general que determine cuántos modos son necesarios para unos resultados aceptables, sino que depende de todos los parámetros electromagnéticos y geométricos de cada problema concreto. Por esta razón, es necesario realizar un análisis de la convergencia en cada caso antes de obtener los resultados deseados. Este estudio consiste en analizar la estructura empleando un número variable de modos, y observar cuándo los resultados permanecen estables.

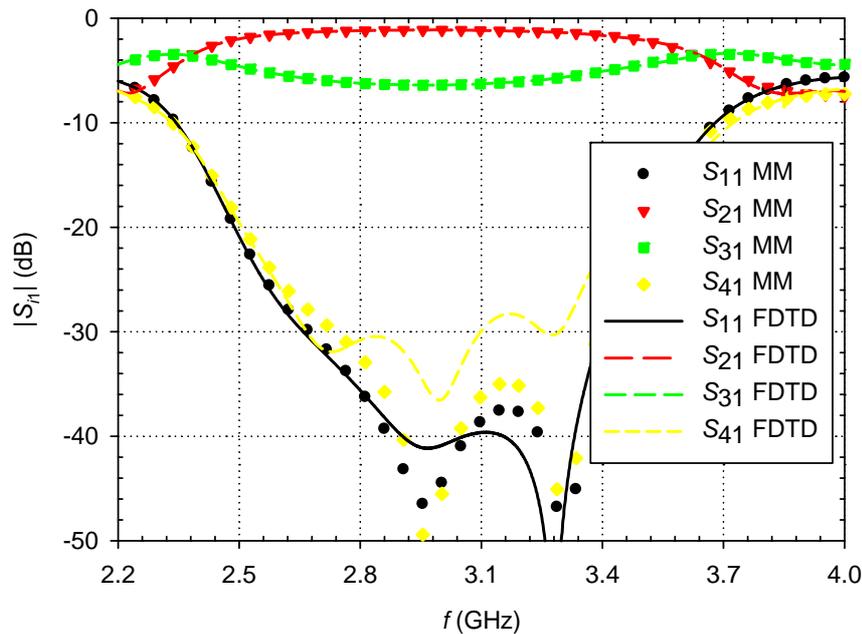


Fig. 3.16. Pérdidas de retorno (S_{11}), pérdidas de transmisión (S_{21}) y acoplamiento (S_{31}) del acoplador direccional de la Fig. 3.14. Comparación entre MM y FDTD.

La Fig 3.17 muestra el estudio de la convergencia de los parámetros S_{j1} en función del número de modos, a la frecuencia $f=3$ GHz (caso peor, debido a la alta atenuación). Se puede ver que S_{21} y S_{31} , que tienen valores moderados, convergen rápidamente, y con solamente $k_c=6$, las respuestas se estabilizan. Sin embargo, S_{11} , que está por debajo de -40 dB, necesita más modos para poder

converger -en escala logarítmica. En escala lineal, todos los parámetros convergen a la misma velocidad.

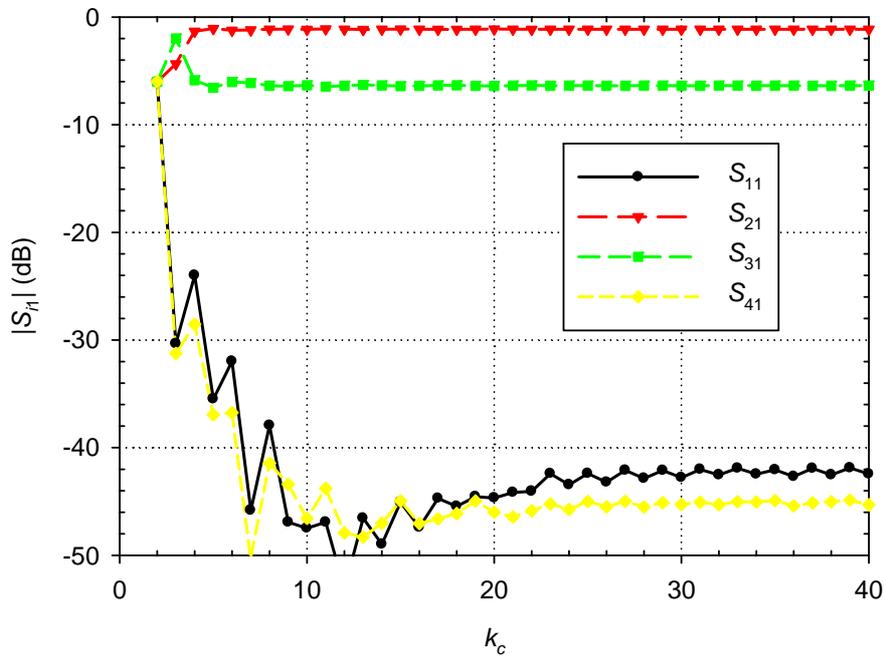


Fig. 3.17. Convergencia de los parámetros S para la estructura de la Fig. 3.14, en función del número de modos. Frecuencia $f=3$ GHz.

Respecto al coste computacional, para 50 modos es de unos 250 ms por punto de frecuencia. Este coste incluye la resolución de todas las discontinuidades y su posterior unión. Para este número de modos, el almacenamiento en memoria es poco significativo. Respecto a CONCERTO, el tiempo de cálculo fue aproximadamente unas diez veces superior. Este tiempo podría haberse reducido drásticamente escogiendo muchos menos modos, sin que las respuestas con valores mayores se vieran afectadas. En escala logarítmica, se apreciarían mayores diferencias en las respuestas de valores más bajos.

3.3. MEDIDA INVERSA DE PARÁMETROS ELECTROMAGNÉTICOS

3.3.1. Recuperación de parámetros

La determinación de los valores de la permitividad ($\epsilon_r = \epsilon_r' - j\epsilon_r''$) y permeabilidad ($\mu_r = \mu_r' - j\mu_r''$) de un material a frecuencias de microondas es un problema que tiene importantes aplicaciones en la industria y el mundo científico, como la medida del contenido de humedad [129], la medida de propiedades dieléctricas y magnéticas de materiales absorbentes [130] o los procesos de secado industriales [131].

Muchos métodos han sido ya desarrollados para la medida de ϵ_r y μ_r a las frecuencias de microondas. Los métodos más ampliamente usados son los métodos en cavidad resonante [132], los métodos en espacio libre [133], los métodos en coaxial abierto [134] y los métodos en línea de transmisión [135]-[137]. Los métodos en cavidad resonante son los más precisos pero son únicamente aplicables en una banda de frecuencias muy estrecha, la de la resonancia. Para rangos de frecuencia grandes, se requeriría la construcción de muchos resonadores que resonaran a diferentes bandas. Los métodos en espacio libre son menos precisos debido a reflexiones y difracciones no deseadas de la onda incidente sobre la muestra, que además ha de tener un espesor muy uniforme a lo largo de la sección transversal. Por otro lado, los métodos de coaxial abierto se usan mucho para medidas no destructivas en banda ancha. Sin embargo, la sensibilidad del sensor coaxial está fuertemente condicionada por los radios del coaxial y la frecuencia de trabajo. La elección de estos parámetros es compleja y requiere una configuración óptima [134].

Los métodos en línea de transmisión se usan desde hace más de treinta años. Se trata de un tramo de guía de onda o cargado con una muestra que rellena completamente la sección transversal, de forma que la interfaz entre el cavío y el material no genera modos superiores, por lo que se puede asumir propagación monomodo para la excitación con un modo en concreto. Sin embargo, el requisito de tener que llenar completamente la sección transversal es muy difícil de satisfacer en ciertos tipos de materiales y en la práctica, siempre existen huecos de aire entre la guía y las paredes de la guía, que dan lugar a la

excitación de modos superiores, lo que limita la validez del método. Es posible reducir la altura [138] o la anchura [139] de la muestra, de forma que la guía esté parcialmente rellena. En el primer caso, la incidencia con el modo TE_{10} provoca la excitación de modos TE_{1n} y TE_{1n} . En el segundo, se excitan solamente los TE_{m0} . El problema es que cuando se realiza el análisis modal descomponiendo el campo según las diferentes regiones, aparece una ecuación trascendente con una ambigüedad que es necesario resolver con una aproximación perturbacional.

3.3.2. Resultados

En este trabajo, se realiza la determinación de los parámetros electromagnéticos de un material isótropo por medio del análisis mediante el método de modos acoplados. El procedimiento de medida se resume en dos pasos: en un primero, se calculan los parámetros S de la estructura, que son función de ϵ_r y μ_r . El segundo paso recupera ϵ_r y μ_r con un proceso de minimización que hace cuadrar las medidas de parámetros S con los parámetros S calculados con la rutina de análisis a partir de los valores de ϵ_r y μ_r estimados.

El método descrito anteriormente se ha usado [140] para medir la permitividad y permeabilidad complejas de materiales típicos como el PTFE o el PVC, cuyas propiedades son bien conocidas [137], [139] y sirve para validar el método de recuperación. Las medidas de parámetros S se han realizado sobre puertos WR-340, entre un rango de frecuencias de 2 GHz a 3 GHz, con un analizador de redes vectorial ZVRE Rhode & Schwarz. El proceso de calibración es el típico through-reflect-line.

Los materiales se sitúan en una guía de onda no estándar $a=86.36$ mm y $b=25$ mm, que también es monomodo en esta banda de frecuencias. La reducción de la altura favorece la atenuación más rápida de los modos con variación vertical. Dado que la medida se hace en WR-340, existen saltos en los puertos 1 y 2. Ambas están centradas, es decir, $x_0=y_0=0$, siguiendo la nomenclatura de la Fig. 2.4. Según la Fig. 2.15, Las muestras de PTFE y PVC tienen el tamaño $a_s=40$ mm, $b_s=b$ y $c=86.36$ mm, en la posición $x_s=(a-a_s)/2$ (centrada), $y_s=0$.

Con esta geometría, los materiales quedan caracterizados totalmente con el juego TE_{m0} . Únicamente incide el modo TE_{10} por los puertos, pero las transiciones en guía de 43.18 mm a 25 mm hace que se excite todo el juego de modos TE_{mn} y TM_{mn} . Por tanto, a la hora de encadenar los cuadripolos

Modelado con técnicas modales de estructuras de microondas basadas en guías N-furcadas arbitrariamente rellenas con materiales

representados por la muestra y las transiciones, se realiza una conversión de modos de TE_{m0} a todo el juego TE_{mm} y TM_{mm} . Esta conversión no consiste más que en añadir ceros en aquellas entradas de las matrices que corresponden a los modos adicionales.

La Fig. 3.18 muestra una fotografía del sistema experimental implementado, con el analizador de redes y los dos puertos en guía, con sus transiciones a coaxial, entre los que se coloca la guía a medir. La Fig. 3.19 muestra el material dentro de la guía de onda.

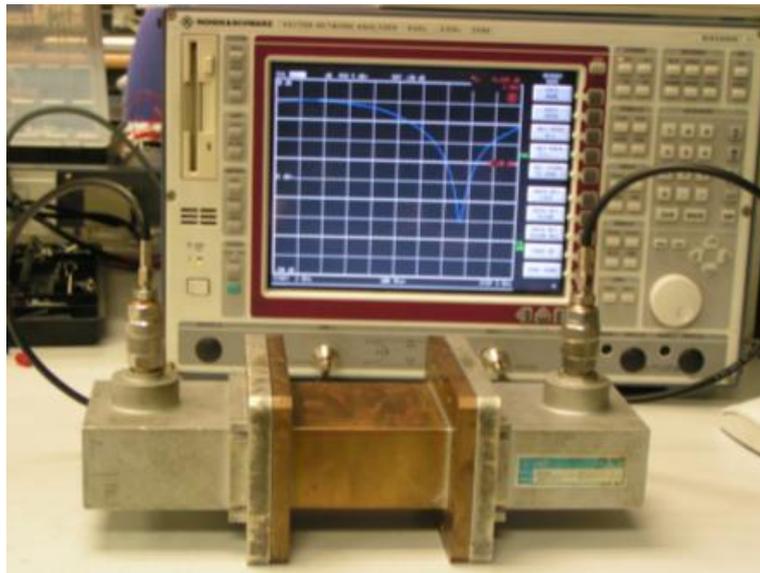


Fig. 3.18. Sistema de medida en guía rectangular.

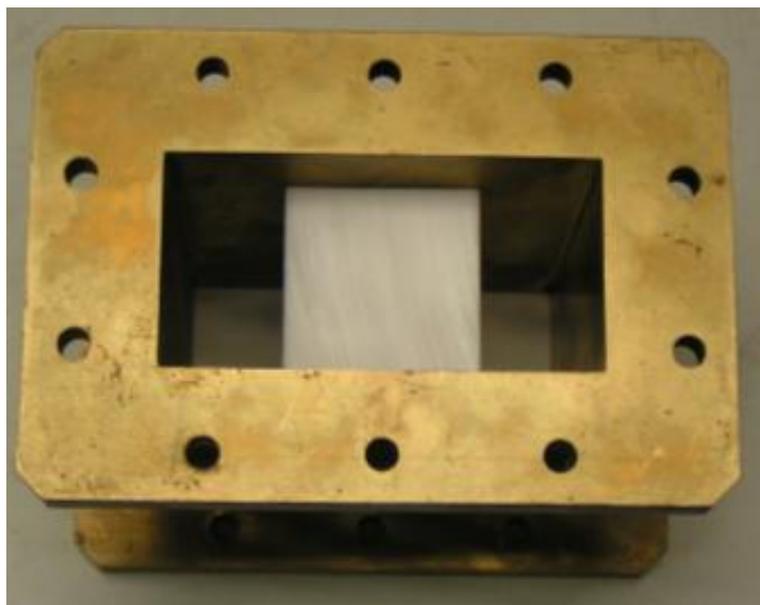


Fig. 3.19. Guía rectangular parcialmente rellena.

Una vez se realiza la medida de los materiales, hay que realizar la recuperación (problema inverso). Contrariamente a los métodos en línea de transmisión donde se supone propagación monomodo, no es posible expresar ϵ_r y μ_r en función de los parámetros S de forma analítica. Por tanto, el proceso inverso ha de hacerse numéricamente y se recurre a la minimización de una función:

$$F(\epsilon_r', \epsilon_r'', \mu_r', \mu_r'') = |S_{11}^{meas} - S_{11}| + |S_{21}^{meas} - S_{21}| \quad (3.26)$$

donde $\epsilon_r', \epsilon_r'', \mu_r', \mu_r''$ son los parámetros electromagnéticos de la muestra, S_{11}^{meas} y S_{21}^{meas} son los parámetros S medidos utilizando el analizador de redes y S_{11} y S_{21} son los parámetros S simulados con el método de modos acoplados.

El algoritmo de minimización empleado se basa en una minimización multidimensional con restricciones por algoritmo de gradiente, disponible comercialmente en la librería de optimización de MATLAB®.

Las Figs. 3.20-3.21 muestran los parámetros S de la muestra de PTFE, esperados, medidos y recuperados. Los parámetros esperados son los simulados suponiendo unos valores típicos para el PTFE, $\epsilon_r = 2.06 - j10^{-4}$, $\mu_r = 1$. Los parámetros medidos son los procedentes directamente del analizador, mientras que los recuperados son los simulados con los parámetros recuperados con el proceso de minimización. La Fig. 3.22 muestra la permitividad y permeabilidad recuperadas del PTFE para cada frecuencia. Se comprueba que el error en la parte real de la permitividad es menor del 0.40 %, y en la parte real de la permeabilidad, menor del 2.80 %. Por otro lado, puede verse que las partes imaginarias tienen valores muy pequeños, como era de esperar.

Las Figs. 3.23-3.24 muestran los parámetros S del PVC, esperados, medidos y recuperados, y la Fig. 3.25 muestra la permitividad y permeabilidad del PVC recuperadas en función de la frecuencia. Sabiendo que el PVC tiene unos valores $\epsilon_r = 2.9 - j0.029$, $\mu_r = 1$. El error en la parte real de la permitividad es menor del 1.20 %, y en la parte real de la permeabilidad es menor del 2.70 %.

Una limitación del método, en concordancia con los métodos de transmisión-reflexión y los métodos en guía parcialmente rellena, es que el error en la parte imaginaria es grande para materiales con muy bajas pérdidas [139]. Si se desea conocer estos valores con precisión, aunque no afecten en casos prácticos, es necesario usar métodos en cavidad resonante, con todos los inconvenientes asociados.

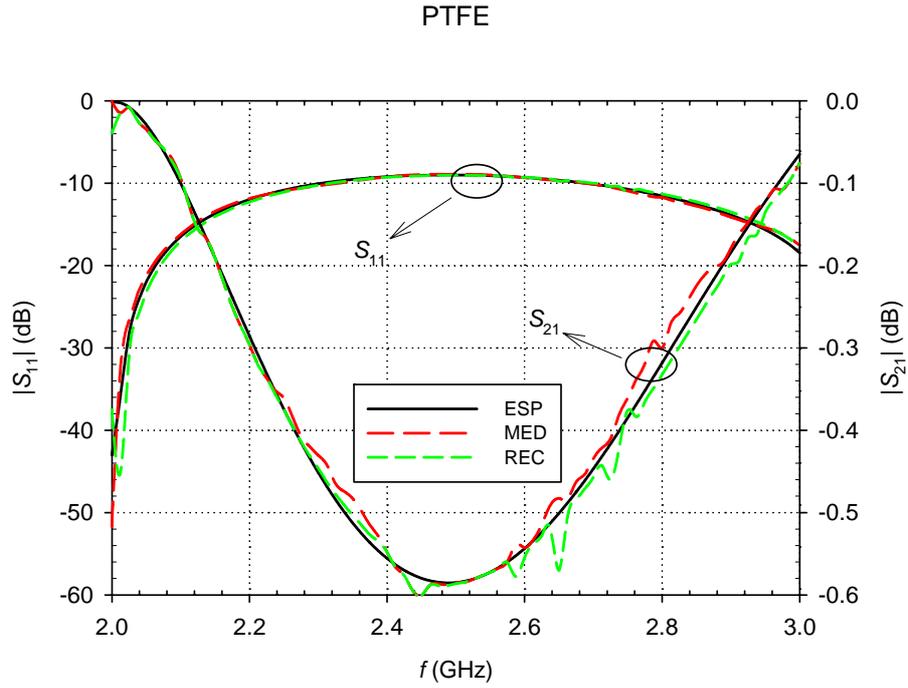


Fig. 3.20. Parámetros S esperados, medidos y recuperados de un tramo de guía inhomogénea rellena de PTFE (módulo). Guía $a=86.36$ mm, $b=25$ mm, material de $a_s=40$ mm, $b_s=b$ y $c=86.36$ mm, en la posición $x_s=(a-a_s)/2$ (centrada), $y_s=0$.

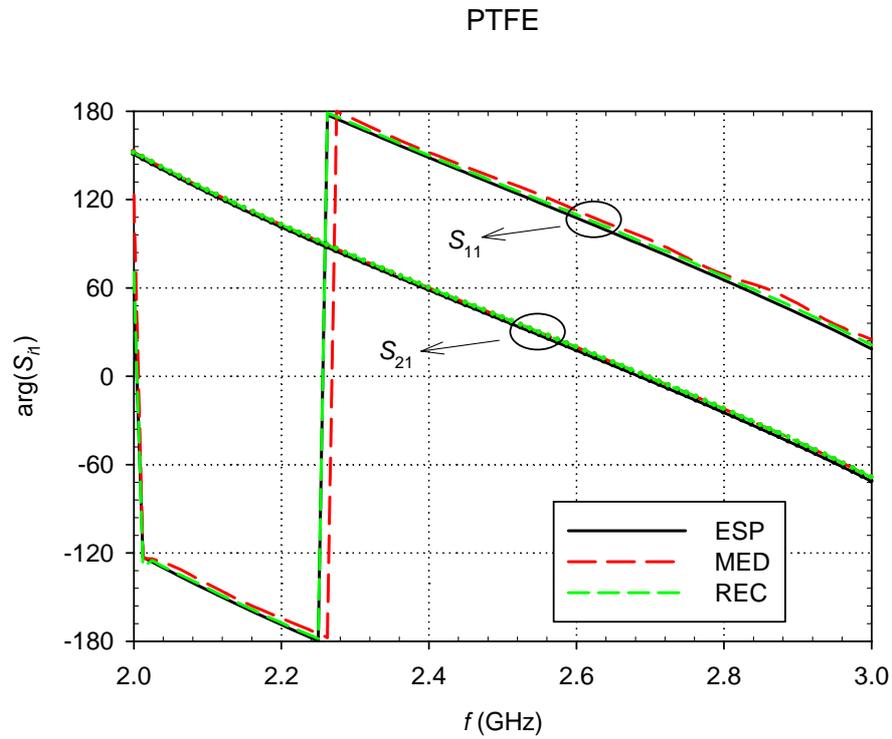


Fig. 3.21. Parámetros S esperados, medidos y recuperados de un tramo de guía inhomogénea rellena de PTFE (fase). Guía $a=86.36$ mm, $b=25$ mm, material de $a_s=40$ mm, $b_s=b$ y $c=86.36$ mm, en la posición $x_s=(a-a_s)/2$ (centrada), $y_s=0$.

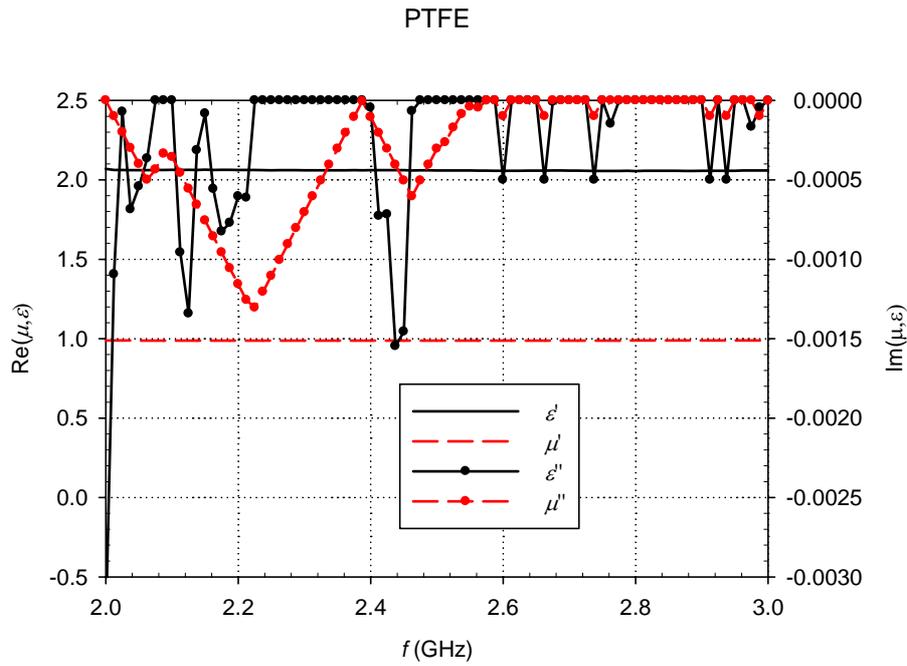


Fig. 3.22. Valores recuperados del PTFE en función de la frecuencia, según los valores de las Figs. 3.20-3.21.

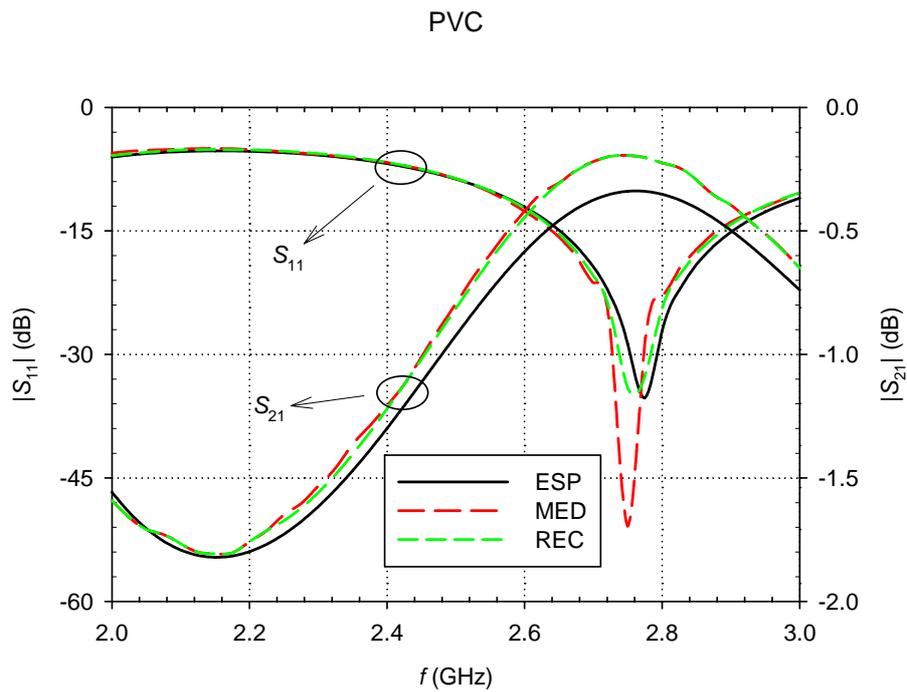


Fig. 3.23. Parámetros S esperados, medidos y recuperados de un tramo de guía inhomogénea rellena de PVC (módulo). Guía $a=86.36$ mm, $b=25$ mm, material de $a_s=40$ mm, $b_s=b$ y $c=86.36$ mm, en la posición $x_s=(a-a_s)/2$ (centrada), $y_s=0$.

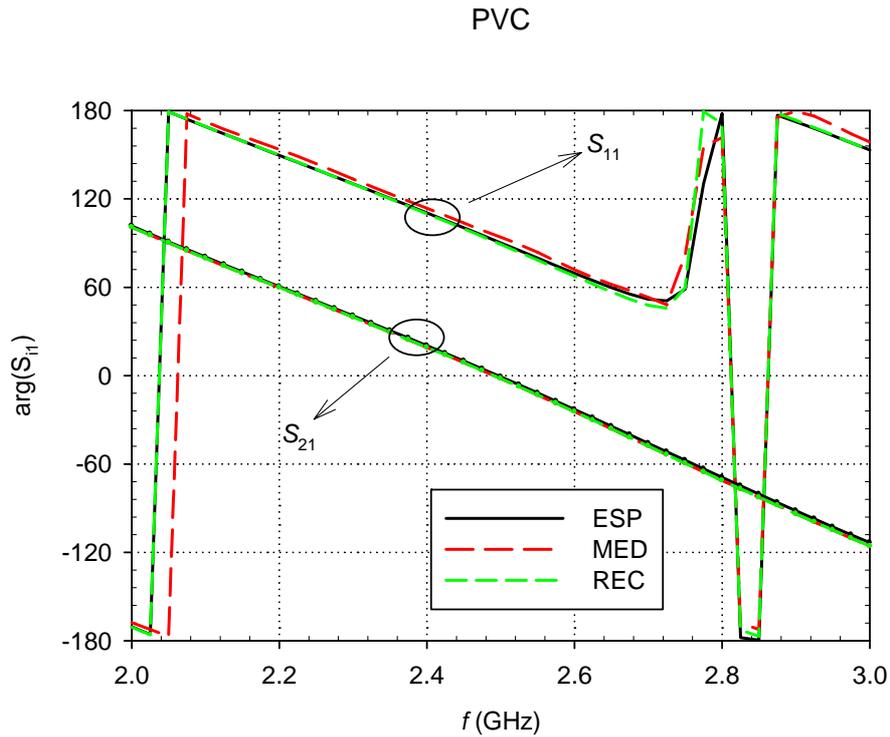


Fig. 3.24. Parámetros S esperados, medidos y recuperados de un tramo de guía inhomogénea rellena de PVC (fase). Guía $a=86.36$ mm, $b=25$ mm, material de $a_s=40$ mm, $b_s=b$ y $c=86.36$ mm, en la posición $x_s=(a-a_s)/2$ (centrada), $y_s=0$.

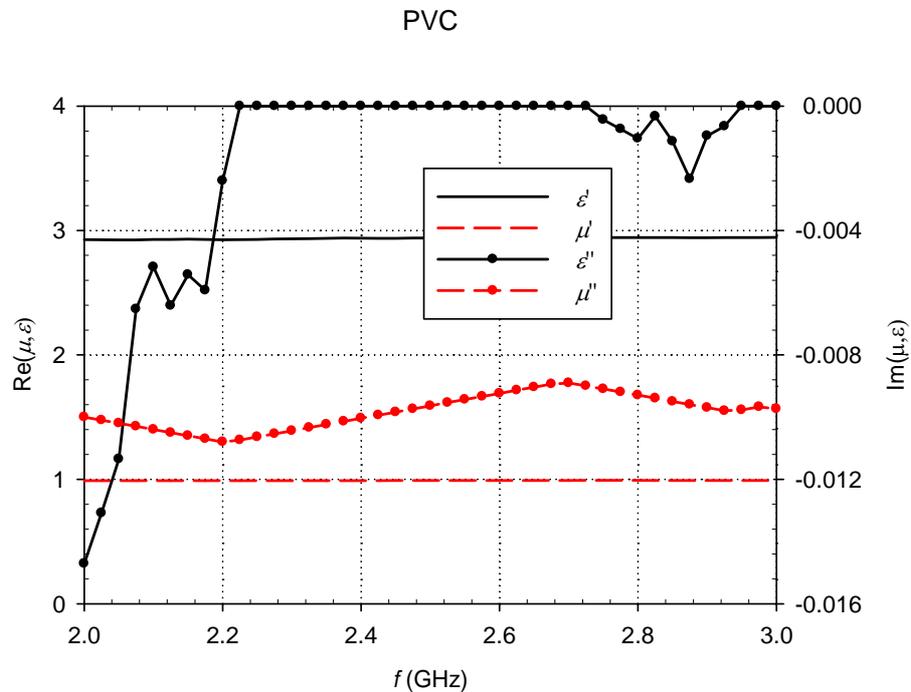


Fig. 3.25. Valor recuperado del PVC en función de la frecuencia, según los valores de las Figs. 3.23-3.24.

3.4. FILTROS DE ENTRADA/SALIDA

3.4.1. Introducción

En algunas aplicaciones industriales, tales como el vulcanizado de polímeros, se deposita el material en la cavidad, se cierra ésta y se excita, de forma que no existe radiación de energía electromagnética al exterior. Sin embargo, existen los sistemas de flujo continuo. En estos sistemas, el material entra y sale de la cavidad de un modo continuo, de forma que es imposible confinar totalmente la energía electromagnética en ésta. Ejemplos de estos sistemas son la desinfección de tierras o el secado de pieles. La cavidad tiene, entonces, tres puertos: uno por donde se introduce la energía, y otros dos por donde entra y sale el material. Estos dos últimos puertos están comunicados directamente con el exterior, de forma que puede producirse radiación. El objetivo es que, a efectos de las microondas, los puertos estén cargados con una impedancia reactiva, de forma que toda la energía sea reflejada hacia dentro de la cavidad.

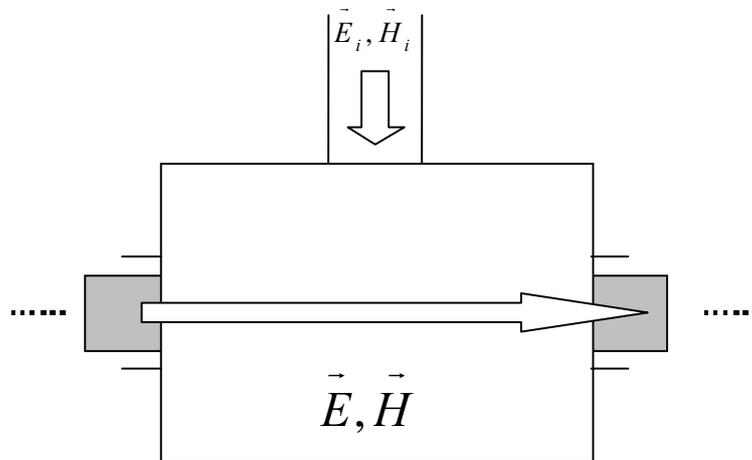


Fig. 3.26. Aplicador abierto con filtros corrugados de entrada-salida.

Estos puertos, por los que pasa el material, son todo lo pequeños que permita éste. Sin embargo, cuanto más grandes sean, puede pasar más flujo de material o materiales más grandes, de forma que el proceso sea más eficiente y posibilite más aplicaciones. Sin embargo, si el tamaño aumenta, lo hace el área

efectiva de la antena equivalente que supone el puerto de la cavidad hacia fuera, por lo que las dimensiones de estos puertos son un parámetro crítico.

En sistemas de calentamiento, se utilizan altas potencias, lo que, unido a la alta receptividad de los tejidos del cuerpo humano de la radiación, hace necesario diseñar algún tipo de dispositivo que reduzca la radiación al exterior.

Las siguientes técnicas, aplicadas por separado o conjuntamente, pueden reducir la radiación al exterior:

- Restricción del tamaño de la apertura a unas dimensiones suficientemente pequeñas como para que el tramo de guía que es el puerto esté al corte para todos los modos de ésta y a la frecuencia dada.
- Restricción de una dimensión de la apertura a un tamaño menor que media longitud de onda, de forma que las pérdidas se restringen a un plano de polarización.
- Para aperturas anchas y de poca altura, diseñar la cavidad, de forma que las líneas de corriente del muro interior de ésta tengan componente normal a la apertura nula, en la posición de la misma. Esta técnica no es implementable en la práctica en cavidades multimodo.
- Incluir un filtro reactivo en cada apertura que rechace la energía a la frecuencia de interés.
- Proveer la apertura de un sistema absorbente que atenúe la energía que pueda salir.

Los filtros reactivos consisten en un conjunto de stubs de igual longitud distribuidos de forma periódica. El conjunto tiene una respuesta en frecuencia que depende de forma crítica de las dimensiones, como la longitud y anchura de los stubs, la distancia entre ellos y el número de periodos que tenga el filtro. Estos filtros se llaman filtros *simplemente corrugados*. La principal desventaja que tienen estos filtros es que el diseño puede ser optimizado para un único modo –generalmente, el fundamental–, y los demás son radiados al exterior.

Para atenuar el resto de los modos, el diseño se extiende a los llamados filtros *doblemente corrugados*, que presentan también variaciones en la otra dimensión horizontal. Debido a su geometría, permiten reflejar la energía asociada a todos los modos TE_{m0} . De estos, existe otra variante, que provoca mayor atenuación, que es situar stubs también en la pared inferior de la guía.

La Fig. 3.27 muestra las tres vistas de un filtro doblemente corrugado. Se aprecia que este dispositivo se construye a partir de una sección rectangular

$w \times (g+2d)$, en la que se introducen postes de base cuadrada de lados b , y de altura d . Estos postes se distribuyen a una distancia L unos de otros, dejando un espacio de $b/2$ entre los últimos postes a cada lado y las paredes de la guía. Según la figura, se aprecia que L ha de ser divisor de w para que el filtro esté bien construido. De hecho, w/L es el número de postes que se ponen transversalmente. En el caso particular de la Fig. 3.27, $w/L=3$. Estos postes dejan un espacio libre de sección $w \times g$ para el paso del material, que se toma como puerto de referencia para el cálculo y la medida de parámetros S .

En la dirección longitudinal, se pueden encadenar tantas filas de postes como se quiera. Un número mayor de filas implica mayor atenuación, pero también un tamaño mayor del filtro. En el caso particular de la Fig. 3.27, se tienen cuatro filas de postes.

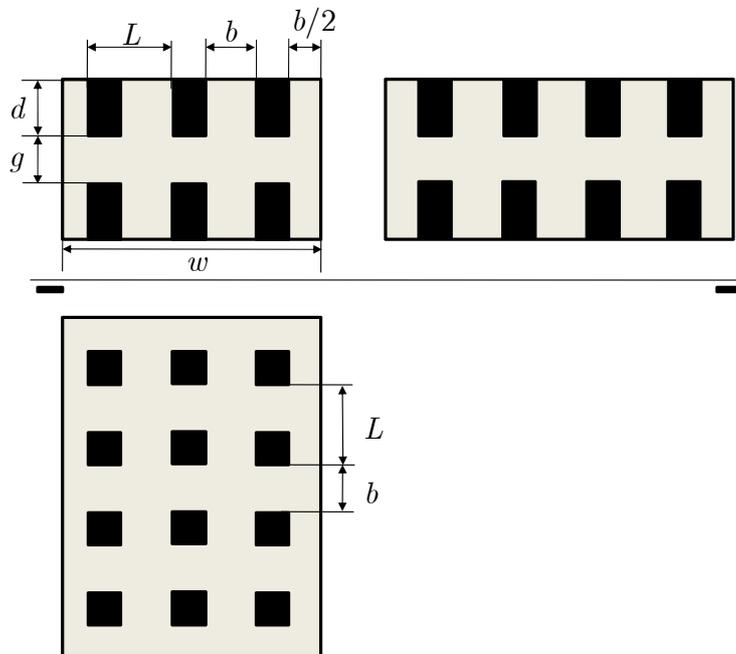


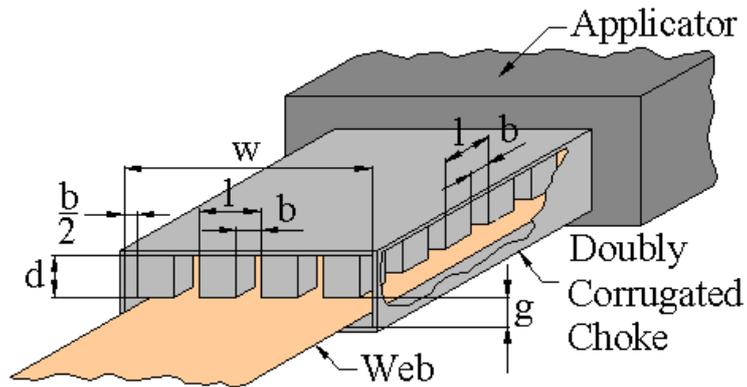
Fig. 3.27. Alzado, planta y perfil de un filtro doblemente corrugado.

3.4.2. Análisis

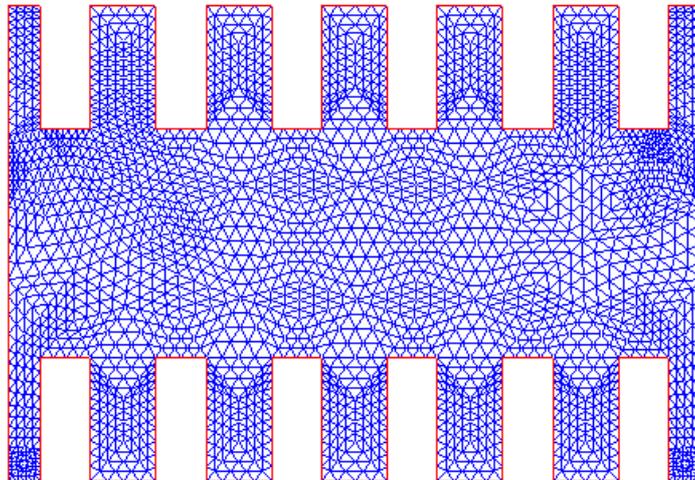
Cuando la estructura se descompone en discontinuidades longitudinales, se obtiene una guía de sección rectangular y otra de sección irregular. La Fig. 3.28b) muestra la sección transversal de esta última guía. Es evidente que no existe descripción analítica para los modos de esta guía. Sin embargo, en vez de realizar el análisis de todo con un método de discretización, es posible obtener los modos de la Fig. 3.28b) de forma numérica resolviendo un problema de valor

propio en el plano mediante una herramienta numérica como FEM. La Fig. 3.28b) muestra el mallado usado para resolver este problema.

Una vez que los modos de esta guía irregular han sido calculados, se puede tratar como una guía de onda más. La respuesta total se obtiene conectando tramos de esta guía con tramos de guía rectangular $w_x(g+2d)$. Los puertos del filtro son dos guías rectangulares más pequeñas de (w_xg) .



(a)



(b)

Fig. 3.28. a) Esquema general de un filtro corrugado. b) Mallado del FEM de la correspondiente guía irregular.

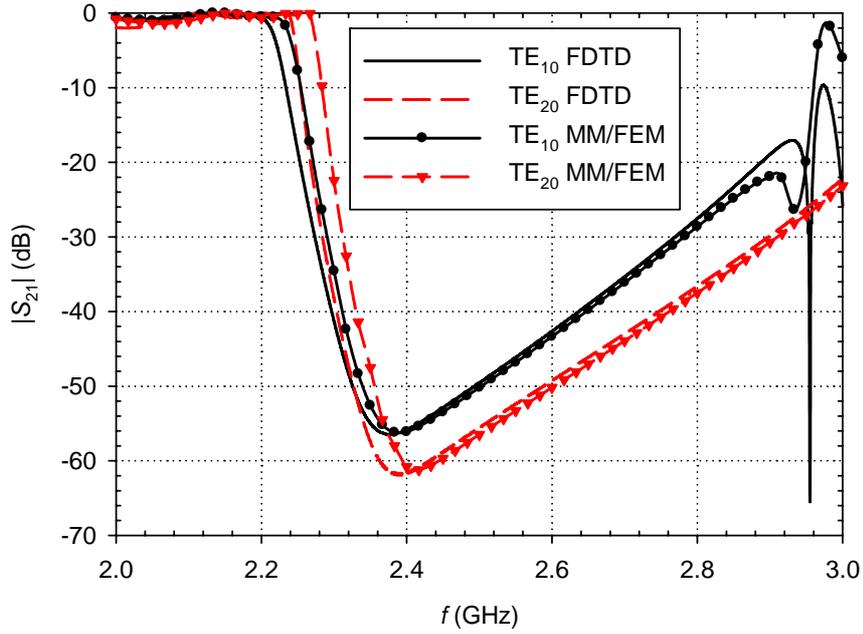


Fig. 3.29. Atenuación del filtro para los modos en propagación TE_{10} y TE_{20} . Comparación con FDTD. Dimensiones $w=160$ mm, $h=50$ mm, $L=w/6$, $d=27$ mm, $b=15$ mm. 6 filas de postes.

Se presenta un ejemplo de aplicación [128] en el que se emplea el MM para modelar un choke que evita la radiación al exterior de energía electromagnética en los puertos de entrada/salida de un aplicador de microondas [141]. La Fig. 3.28a) muestra un esquema general de este tipo de dispositivos. Las dimensiones del puerto abierto son $w=160$ mm (anchura) y $g=50$ mm (altura). El filtro se compone de corrugaciones en las paredes superior e inferior, y consiste en 6 bloques rectangulares de $l=w/6$, $b=15$ mm, y $d=27$ mm. En la dimensión longitudinal, hay 6 filas de postes.

La Fig. 3.29 muestra la atenuación del filtro para los modos de los accesos que se propagan en el rango de frecuencias considerado: TE_{10} y TE_{20} . Se han empleado 127 modos en los puertos abiertos ($w \times g$) ($k_c=16$), 172 modos en la guía corrugada y 270 en la guía rectangular $w \times (g+2d)$, de forma que se asegura la convergencia relativa. La atenuación del filtro a $f=2.45$ GHz es mayor de 50 dB en ambos modos, lo que asegura que no se está radiando una cantidad significativa de energía. Se compara la respuesta obtenida con los resultados de CONCERTO. La gran similitud entre las respuestas confirma la capacidad del método para analizar este tipo de estructuras. El tiempo de cómputo fue sobre 2 s por frecuencia, que supuso algo menos de la mitad del tiempo total que en CONCERTO. La carga de almacenamiento en memoria fue de unos 15 MB.

4. CONCLUSIONES Y LÍNEAS FUTURAS

En este trabajo, se han implementado métodos modales para el análisis de circuitos en guía de onda. Estos dos métodos son el *método de adaptación modal* y el *método de modos acoplados*.

El método de adaptación modal ha servido para el análisis rápido y eficiente de discontinuidades en la sección transversal de guías de onda, incluyendo el caso de la guía *N*-furcada. Con esta herramienta, se han podido analizar las alimentaciones de los hornos de microondas y las transiciones entre guías de onda de diferente forma y tamaño, de directa aplicación en los problemas prácticos resueltos.

El método de modos acoplados ha servido para el análisis rápido y eficiente de guías de onda rellenas de materiales. Las aplicaciones en este trabajo han sido dos: la primera de ellas trata del estudio del campo eléctrico en un aplicador multimodo, considerando éste como una guía de onda de sección grande. Una vez calculado el campo eléctrico en la región de interés, se ensambla con una rutina de optimización para obtener la mayor uniformidad posible en función de las diferentes dimensiones y posiciones. La segunda las aplicaciones del método trata de la caracterización de materiales en guía de onda no uniformemente rellena, es decir, de la recuperación de los parámetros electromagnéticos de éste a partir de unas medidas y de un proceso inverso iterativo. Respecto de este método, se sugiere investigar las siguientes mejoras:

- Los modos $TE_{m,m}$ y $TM_{m,m}$ tienen el mismo aspecto en sus componentes transversales. Por tanto, parece que, a la hora de expresar un campo arbitrario como combinación lineal de estos modos, existe cierta redundancia, ya que la energía correspondiente a esa frecuencia espacial (ambos tienen el mismo k_c) se reparte entre ambos. Se sugiere la utilización de un único juego de modos con todas las componentes vectoriales, en vez de *repartir* la energía entre los TE y TM. Con ello, tal vez se consiguiera reducir el número de modos totales al número de modos TE actuales.
- En todos los resultados de este trabajo, se tienen materiales rectangulares. El campo en toda la guía se expresa como suma de funciones sinusoidales, lo que varían suavemente, mientras que el material varía de forma abrupta. Tal vez, si se introduce un término con una función escalón, se estaría *ayudando*

al campo a seguir esa variación del material, y las funciones sinusoidales se encargarían del *ajuste fino*, con lo que se podría esperar una reducción del número de éstas.

- En (2.205), se integra B_z en toda la sección de la guía para encontrar una relación que relacione las componentes transversales con las axiales. Sin embargo, esta elección es arbitraria, puesto que se podría integrar D_z en su lugar, lo que derivaría otras expresiones distintas. Aunque el campo H_0 es único, numéricamente cabe esperar comportamientos diferentes en ambos casos. Tal vez se podría adoptar un caso intermedio y obtener H_0 como una ponderación de ambas integraciones, dependiendo del material.
- La formulación usada en este trabajo tiene el problema de que el campo magnético sobre las paredes perfectamente conductoras que forman una guía de onda no cumplen las condiciones de contorno. El motivo es que los desarrollos de partida del campo electromagnético son el campo eléctrico \mathbf{E} y el campo magnético \mathbf{H} correspondientes a los modos de la guía vacía. Las componentes normales de \mathbf{H} para estos modos son nulas sobre las paredes conductoras porque el medio en contacto con las paredes es isótropo. Pero si el medio es anisótropo o quiral, las componentes normales de \mathbf{H} sobre las paredes no son nulas. Si se introdujeran en el desarrollo de \mathbf{H} unos términos como los de \mathbf{E} , se proporcionarían las funciones base adecuadas para prever estas componentes normales no nulas. Un posible inconveniente que se piensa que existiría sería el aumento en el tamaño del autosistema final.
- El autosistema final se ha de resolver para cada valor de la frecuencia, como todos los métodos en este dominio. Para un barrido en frecuencia, esto puede significar un coste importante. Se podría pensar en un desarrollo en polos de la matriz de acoplo M , a semejanza de lo realizado en [13], cap. 6. De esta manera, se obtendrían una serie de coeficientes del desarrollo, independientes de la frecuencia, y una sola vez en todo el barrido.

5. PUBLICACIONES

5.1. REVISTAS INTERNACIONALES

- **J. Pitarch**, Miguel Contelles-Cervera, Felipe L. Peñaranda-Foix, and José M. Catalá-Civera, “Determination of the permittivity and permeability for waveguides partially loaded with isotropic samples,” *Meas. Sci. & Technol.* Vol. 17, 2006, pp. 145-152.
- **J. Pitarch**, Beatriz García-Baños, Miguel Contelles-Cervera, R. Pérez-Páez, and F. Peñaranda-Foix, “Analysis and Optimization of Electric Field Distributions in Multimode Microwave Heating Applicators Excited by Multiple Input Sources”, in ITECKNE, ISBN: 1692-1789, pp. 24-32, 2006.
- **Jaime Pitarch**, José. M. Catalá-Civera, Felipe L. Peñaranda-Foix and Beatriz García-Baños, “Modeling Microwave Power Structures Based on K-Furcated Waveguides Arbitrarily Filled with Materials by Modal Techniques”, *Journal of Microwave Power and Electromagnetic Energy*, to be published.
- **Jaime Pitarch**, J. M. Catalá-Civera, F. L. Peñaranda-Foix and M. A. Solano, “Efficient Modal Analysis of Bianisotropic Waveguides by the Coupled-Mode Method,” *IEEE Trans. Microw. Theory Tech.*, vol. 55, n° 1, pp. 108-116.

5.2. CONGRESOS NACIONALES E INTERNACIONALES

- Jose M. Catala-Civera, **J. Pitarch**, T. Canos, F. Penaranda-Foix, J. V. Balbastre, Elias De los Reyes, “Improving the heating uniformity in Multimode Applicators by the optimization of the position of multiple feeds,” *Progress in Electromagnetics Research Symposium*, 13 -16 October 2003, Honolulu, Hawaii, USA
- **J. Pitarch**, Antoni J. Canós, Felipe L. Peñaranda-Foix, Jose M. Catalá-Civera and Juan V. Balbastre, “Synthesis of uniform electric field

distributions in microwave multimode applicators by multifed techniques,” *9th international conf. on microwave and high frequency heating organised on behalf of Ampere*, September 2003, Loughborough, UK

- José. M. Catalá-Civera, **J. Pitarch**, M. Contelles-Cervera, F. Peñaranda-Foix, and J.V. Balbastre, “On the possibilities of multifeeding techniques to improve the electric field uniformity in multimode microwave applicators,” *10th International Conference on Microwave and High Frequency Heating Organised on Behalf of Ampere*, September 2005, Modena, Italy
- **J. Pitarch**, José M. Catalá, Antoni J. Canós, Miguel Contelles, “Análisis y optimización de distribuciones de campo eléctrico en cavidades multimodo excitadas con múltiples fuentes,” *XX Simposium Nacional de la URSI*, 2005, Gandía (Spain)
- A. J. Lozano, A. Díaz, J. V. Balbastre, L. Nuño, A. Calvo, **J. Pitarch**, “Damping of resonances in a metallic enclosure through conductive polymers,” *35th European Microwave Conference*, Paris, October 2005
- Antonio José Lozano, Alejandro Díaz, Juan Vicente Balbastre, Luis Nuño, **J. Pitarch**, Vincent Kulak, “Aproximación 2D a la eficacia de apantallamiento de carcasas metálicas,” *XX Simposium Nacional de la URSI*, 2005, Gandía (Spain)
- **J. Pitarch**, B. García-Baños, R. Pérez, J. M. Catalá, M. A. Solano, “Caracterización modal eficiente de guías de onda bianisótropas”, *XXI Simposium Nacional de Radio de la Unión Científica Internacional de Radio, URSI*, Oviedo. 2006.
- **Jaime Pitarch**, José. M. Catalá-Civera, Felipe L. Peñaranda-Foix and Beatriz García-Baños, “Modeling Microwave Power Structures Based on K-Furcated Waveguides Arbitrarily Filled with Materials by Modal Techniques”, *11th International Conference on Microwave and High Frequency Heating Organised on Behalf of Ampere*, September 2007, Oradea, Romania.

6. REFERENCIAS

- [1] A. C. Metaxas and R. J. Meredith, *Industrial Microwave Heating*, Peter Peregrinus Ltd., 1993.
- [2] J. Thuery. *Microwaves: Industrial, Scientific and Medical applications*, Artech House, Inc., 1992.
- [3] I. J. Chabinsky, “Applications of microwave energy. Past, present and future. Brave new worlds”, *Microwave Processing of Materials Vol. 124 of Symposium Proceedings of Materials*, Research Society, 1990, pp. 17-32.
- [4] J. A. Jolly, “Economics and Energy Utilization Aspects of the Application of Microwaves: A tutorial Review”, *Journal of Microwave Power*, Vol. 11 No. 3, 1976.
- [5] G. Roussy, G. & J. A. Pearce, *Foundations and Industrial Applications of Microwaves and Radio Frequency Fields*, John Wiley & Sons, 1995
- [6] J. R. White. “Why materials heat”, *Proceedings of the IMPI Symposium*, Canada, 1973, pp. 40-65.
- [7] A. L. VanKoughnett., “Fundamentals of microwave heating”, *Proceedings of the IMPI Symposium*, Canada, 1973, pp. 17-38.
- [8] N. Marcuvitz, *Waveguide Handbook*, McGraw-Hill, N.Y., 1951.
- [9] R. E. Collin, *Field Theory of Guided Waves*, 2nd ed. New York: IEEE Press, 1991.
- [10] K. Kunz and R. J. Luebbers, *Finite Difference Time Method for Electromagnetics*, 1st ed. London. CRC ed. Inc., 1991.
- [11] J. Volakis et al., *Finite Element Method for Electromagnetics* , 1st ed. New York: IEEE Press, 1998.
- [12] R. C. Hansen, *Geometric theory of diffracttion*,IEEE Press, 1981.
- [13] G. Conciauro, M. Guglielmi, R. Sorrentino, *Advanced modal analysis*, ed. John Wiley & Sons, Ltd., 2000.
- [14] W. C. Hahn, “A new method for the calculation of cavity resonators”, *J. Appl. Phys.*, Vol. 12, Enero 1941, pp. 62-68.
- [15] P. J. B. Clarricoats, K. R: Slinn, “Numerical solution of waveguide-discontinuity problems”, *Proc. IEE*. Vol. 114, Jul. 1967, pp. 878-886.

- [16] A. Wexler, "Solution of waveguide discontinuities by modal analysis", *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, vol. 15, n° 9, sep. 1967, pp. 508-517.
- [17] P. H. Mastermann, P. J. B. Clarricoats, "Computer field-matching solution of waveguide transverse discontinuities", *Proc. IEE*. Vol. 118, Jan. 1971, pp. 51-63.
- [18] Y. C. Shih and K. G. Gray, "Convergence of numerical solutions of step-type waveguide discontinuity problems by modal analysis", *IEEE Microw. Symp. Dig.* Boston, MA, pp. 233-235, 1983.
- [19] T. Shibata, T. Itoh, "Generalized Scattering Matrix Modeling Circuits Using FDTD Field Simulators" *IEEE Trans. Microw. Theory Tech.*, vol. 46, n° 11, No, pp. 1742-1751, Nov. 1998.
- [20] R. R. Mansour and R. H. Macphie, "An Improved Transmission Matrix Formulation of Cascaded Discontinuities and its Application to E-Plane Circuits", *IEEE Trans. Microw. Theory Tech.* vol, 34 n°12, pp. 1490-1498, Dic. 1986.
- [21] M. H elard, J. Citerne, O. Picon and V. Fouad Hanna, "Theoretical and Experimental Investigations of Finline Discontinuities", *IEEE Trans. Microw. Theory Tech.* vol, 33 n° 10, pp. 994-1003, Oct. 1985.
- [22] S. W. Lee, W. R. Jones, and J. J. Campbell, "Convergence of Numerical Solution of Iris-Discontinuity Problems", Hughes Aircraft Co., Fullerton, CA. FR 70-14-594, 1970.
- [23] M. Leroy., "On the convergence of numerical results in modal analysis", *IEEE Trans. Antennas and Propagation*, vol. 31, pp. 655-659, Jul. 1983.
- [24] R. Sorrentino, M. Mongiardo, F. Alessandri and G. Schiavon, "An Investigation of the Numerical Properties of the Mode-Matching Technique", *IJNM*, vol. 4, pp. 19-43, 1991.
- [25] Alessandri, F.; Mongiardo, M.; Sorrentino, R.: "Computer-aided design of beam forming networks for modern satellite antennas", *IEEE Trans. Microw. Theory Tech.* Vol. 40, n° 6, pp. 1117-1127, Jun. 1992.
- [26] Gentili, G.G.; Melloni, A.: "Analysis of the X-junction between two rectangular waveguides and a circular waveguide", *IEEE Microw. and Guided Wave Lett.* Vol. 7, n° 8, pp. 245-247, Aug 1997.
- [27] F. Alessandri, M. Mongiardo and R. Sorrentino, "A Technique for the Fullwave Automatic Synthesis of Waveguide Components: Application to Fixed Phase Shifters", *IEEE Trans. Microw. Theory Tech.* vol, 40 n°7, pp. 1484-1495, Jul. 1992.

- [28] Rebollar, J.M.; Esteban, J.; Page, J.E.: “Fullwave analysis of three and four-port rectangular waveguide junctions”. *IEEE Trans. Microw. Theory Tech.* Vol. 42, n° 2, pp. 256-263, Feb. 1994.
- [29] G. G. Gentilli, “Properties of TE-TM Mode-Matching Techniques”, *IEEE Trans. Microw. Theory Tech.* vol, 39 n°9, pp. 1669-1673, Sep. 1991.
- [30] J. Esteban, J.M. Rebollar: Generalized Scattering Matrix of Generalized Two-Port Discontinuities: Application to Four-Port and Nonsymmetric Six-Port Couplers. *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, vol. 39, pp. 1725-1734, Oct. 1991.
- [31] F. Dai, Scattering and transmission matrix representation of multiguide junctions, *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, vol. 40, pp. 1538-1544, Jul. 1992.
- [32] R. Safavi-Naini and R. H. MacPhie, “Scattering at Rectangular-to-Rectangular Waveguide Junctions”, *IEEE Trans. Microw. Theory Tech.* vol, 30 n°11, pp. 2060-2063, Nov. 1982.
- [33] R. Mittra: “Relative Convergence of the Solution of a Doubly Infinite Set of Equations”, *J. Res. Nat. Bur. Stand.*, 67D, pp. 245-254, 1963.
- [34] R. Mittra and S.W. Lee, *Analytical Techniques in the Theory of Guided Waves*, Macmillan, New York, 1971
- [35] F. Alessandri, G. Bartolucci, and R. Sorrentino: “Admittance Matrix Formulation of Waveguide Discontinuity Problems: Computer-Aided Design of Branch Guide Directional Couplers”, *IEEE Trans. Microw. Theory Tech.* vol, 36, n°2, pp. 394-403, Feb. 1988.
- [36] G. F. Vanblaricum, and J. Mittra, “A Modified Residue-Calculus Technique for Solving a Class of Boundary Value Problems – Part I: waveguide discontinuities”, *IEEE Trans. Microw. Theory Tech.* vol, 17 n°6, pp. 302-309, Jun. 1969.
- [37] H. Patzelt and F. Arndt, “Double-Plane Steps in Rectangular Waveguides and Their Application for Transformers, Irises and Filters” *IEEE Trans. Microw. Theory Tech.*, vol. 30, pp. 771–776, May 1982.
- [38] R. Vahldieck, J. Bornemann, F. Arndt and D. Gravelholz, “W-Band Low-Insertion-Loss E-Plane Filter”, *IEEE Trans. Microw. Theory Tech.* vol, 32 n°1, pp. 133-135, Jan. 1984.
- [39] Arndt, F.; Tucholke, U.; Wriedt, T.: “Broadband dual-depth E-plane corrugated square waveguide polariser”, *Elect. Lett.* Vol. 20, n° 11, pp. 458-459, May 1984.

- [40] G. L. James, "On the Problem of Applying Mode-Matching Techniques in Analyzing Conical Waveguide Discontinuities", *IEEE Trans. Microw. Theory Tech.* vol, 31 n°9, pp. 718-723, Sep. 1983.
- [41] Y. C. Shih and T. Itoh, "Analysis of Cascaded and Offset Microstrip Step Discontinuities by the Generalized Scattering Matrix Technique", *IEEE Trans. Microw. Theory Tech.* vol, 34 n°2, Feb. 1986.
- [42] Chu, T.S.; Itoh, T.: "Analysis of cascaded and offset microstrip step discontinuities by the generalized scattering matrix technique", *IEEE Trans. Microw. Theory Tech.* Vol. 34, n° 2. Feb. 1986.
- [43] E. Kühn, and V. Hombach, "Computer aided analysis of corrugated horns with axial or ring-loaded radial slots", *Int. Conf. on Antennas and propagation*, ICAP, p. 12, 1983.
- [44] G. V. Elefthearides, A. S. Omar, L. P. B. Katehi and G. M. Reibeiz, "Some Important Properties of Waveguide Junction Generalized Scattering Matrices in the Context of Mode-Matching Technique", *IEEE Trans. Microw. Theory Tech.* vol, 42 n°2, pp. 351-353, Feb. 1994.
- [45] G. A. Gesell, and I. R. Ciric, "Multiple Waveguide Discontinuity Modeling with Restricted Mode Iteration", *IEEE Trans. Microw. Theory Tech.* vol, 42 n°2, pp. 351-353, Feb. 1994.
- [46] Rozzi, T.E.: "Equivalent network for interacting thick inductive irises". *IEEE Trans. Microw. Theory Tech.* Vol. 20, n° 5, pp. 323-330, May 1972.
- [47] Rozzi, T.E.; Mecklebraüker, W.F.G.: "Wide-band network modeling of interacting inductive irises and steps". *IEEE Trans. Microw. Theory Tech.* Vol. 23, n° 2, pp. 235-245, Feb. 1975.
- [48] Navarro, M.S.; Rozzi, T.E.; Lo, Y.T.: "Propagation in a rectangular waveguide periodically loaded with resonant irises". *IEEE Trans. Microw. Theory Tech.* Vol. 28, n° 8, pp. 323-330, Aug 1980.
- [49] S. A. Schelkunoff, "Generalized telegraphist's equations for waveguides", *Bell Syst. Tech. J.*, vol. 31, pp. 784-801, July 1952
- [50] M. A. Solano, A. Vegas and A. Prieto, "Numerical Analysis of Discontinuities in a Rectangular Waveguide Loaded with Isotropic or Anisotropic obstacles by Means of the Coupled-Mode Method and the Mode-Matching Method", *Int. J. Numerical Modelling: Electronic Networks, Devices and Fields*, Vol. 7, Nov/Dec 1994, pp. 433-452
- [51] J. A. Pereda, A. Vegas and A. Prieto, "On the Derivation of the Generalized Telegraphist's Equations for Full-Wave Analysis of

Chirowaveguides”, *IEEE Microwave and Guided Wave Letters*, Vol. 6, no. 4, April 1993, pp. 165-167

- [52] Y. Xu and R. Bosisio, “An Efficient Method for Study of General Bi-Anisotropic Waveguides”, *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, Vol. 43, no. 4, April 1995, pp. 873-879.
- [53] K. Ogusu, “Numerical Analysis of Rectangular Dielectric Waveguide and its Modifications”, *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, Vol. 25, no. 11, Nov 1977, pp. 875-885.
- [54] T. X. Wu and D. L. Jaggard, “A Comprehensive Study on Discontinuities in Chirowaveguides”, *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, vol. 50, pp. 2320-2330, Oct. 2002.
- [55] A. Jöstingmeier and A.S. Omar, “Analysis of Inhomogeneously Filled Cavities Coupled to Waveguides Using the VIE Formulation”, *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, Vol. 41, no. 6/7, June/July 1993, pp. 1207-1214
- [56] D. Cheng and Jin-Au Kong, “Covariant descriptions of bianisotropic media,” *Proceedings of the IEEE*, vol. 56, pp. 248–251, Mar 1968.
- [57] J. A. Arnaud and A. A. M. Salen, “Theorems for bianisotropic media,” *Proceedings of the IEEE*, vol. 60, pp. 639–640, May 1972.
- [58] R. D. Graglia, P. L.E. Uslenghi, R. E. Zich, “Dispersion relation for bianisotropic materials and its symmetry properties,” *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 39, pp. 83–90, Jan 1991.
- [59] E.O. Kamenetskii, “Nonreciprocal microwave bianisotropic materials: reciprocity theorem and network reciprocity,” *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 49, pp. 361–366, Mar 2001.
- [60] D. L. Jaggard, A. R. Mickelson, and C. H. Papas, “On electromagnetic waves in chiral media,” *Appl. Phys.*, vol. 18, pp. 211–216, 1979.
- [61] I. V. Lindell and A. J. Vitanen, “Duality transformations for general bi-isotropic (nonreciprocal chiral) media,” *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 40, pp. 91–95, Jan 1992.
- [62] A.H. Sihvola, “Bi-isotropic mixtures,” *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 40, pp. 188–197, Feb 1992.
- [63] A.J. Bahr, K.R. Clausing, “An approximate model for artificial chiral material,” *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 42, pp. 1592–1599, Dec 1994.

- [64] D. Pisssoort, F. Olyslager, “Study of eigenmodes in periodic waveguides using the Lorentz reciprocity theorem,” *IEEE Trans. Microw. Theory Tech.*, vol. 52, pp. 542–553, Feb. 2004.
- [65] A. Alu, F. Bilotti, L. Vegni, “Extended method of line procedure for the analysis of microwave components with bianisotropic inhomogeneous media,” *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 51, pp. 1582–1589, July 2003.
- [66] Cheng-Nan Chiu, C.-I.G. Hsu, “Scattering and shielding properties of a chiral-coated fiber-reinforced plastic composite cylinder,” *IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility*, vol. 47, pp. 123–130, Feb 2005.
- [67] Hsin-Lung Su; K.H. Lin, “Equivalent circuit representation of anisotropic media and chiral media and its application in polarization transformations,” *IEEE Microwave and Wireless Components Letters*, vol. 15, pp. 57–58, Feb 2005.
- [68] Ming Zang; K.K. Tamma, “Curvilinear lattice in chiral carbon nanotubes,” *IEEE Transactions on Nanotechnology*, vol. 3, pp. 425–431, Dec 2004.
- [69] N. Engheta, D.L. Jaggard, M.W. Kowarz, “Electromagnetic waves in Faraday chiral media,” *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 40, pp. 367–374, April 1992.
- [70] W. E. Hord and F. J. Rosenbaum, “Approximation technique for dielectric loaded waveguides,” *IEEE Trans. Microw. Theory Tech.*, vol. 16, pp. 228–233, Apr.1968.
- [71] R. M. Arnold and F. J. Rosenbaum, “Nonreciprocal wave propagation in semiconductor loaded waveguides in the presence of a transverse magnetic field,” *IEEE Trans. Microw. Theory Tech.*, vol. n° 19, pp. 57–65, Jan. 1971.
- [72] —, “An approximate analysis of dielectric-ridge loaded waveguide,” *IEEE Trans. Microw. Theory Tech.*, vol. 20, pp. 699–701, Oct. 1972.
- [73] J. B. Ness and M. W. Gunn, “Microwave propagation in rectangular waveguide containing a semiconductor subject to a transverse magnetic field,” *IEEE Trans. Microw. Theory Tech.*, vol. 23, pp. 767–772, Sept. 1975.
- [74] F. Gauthier, M. Besse and Y. Garault, “Analysis of an inhomogeneously loaded rectangular waveguide with dielectric and metallic losses,” *IEEE Trans. Microw. Theory Tech.*, vol. 25, pp. 904–907, Nov. 1977.
- [75] A. D. Bresler, G. H. Joshi and N. Marcuvitz, “Orthogonality properties of modes in passive and active uniform waveguides,” *J. of Appl. Phys.*, vol. 29, pp. 794–799, May 1958.

- [76] J. L. Amalric, H. Baudrand and M. Hollinger, “Various aspects of coupled-mode theory for anisotropic partially-filled waveguides. Application to a semi-conductor loaded wave-guide with perpendicular induction”, in *Proc. of 7th European Microw. Conference. Copenhagen. Denmark. 1977*, pp. 146–150.
- [77] J.-W. Tao, J. Atechian, R. Ratovondrahanta and H. Baudrand, “Transverse operator study of a large class of multidielectric waveguides,” *IEE Proceedings Pt. H*, vol. 137, pp. 311–317, Oct. 1990.
- [78] J.-W. Tao, R. Andriamanjato and H. Baudrand, “General waveguide problems studies by transverse operator method,” *IEEE Trans. Magn.*, vol. 47, pp. 2503–2511, Dec. 1999.
- [79] J. Rodríguez, M. A. Solano and A. Prieto, “Characterization of discontinuities in dielectric waveguides using Schelkunoff’s method: application to tapers and transitions,” *Int. J. Electron.*, vol. 66, pp. 807–820, May 1989.
- [80] Y. Xu and G. Zhang, “A rigorous method for computation of ferrite toroidal phase shifters,” *IEEE Trans. Microw. Theory Tech.*, vol. 36, pp. 929–933, Jun. 1988.
- [81] Y. Xu and R. G. Bosisio, “An efficient method for study of general bi-anisotropic waveguides,” *IEEE Trans. Microw. Theory Tech.*, vol. 43, pp. 873–879, Apr. 1995.
- [82] H. Chaloupka, “A coupled-line model for the scattering by dielectric and ferromagnetic obstacles in waveguides,” *AEÜ*, vol. 34, pp. 145–151, Apr. 1980.
- [83] A. Vegas, A. Prieto and M. A. Solano, “Rigorous analysis of scattering by partial height magnetized ferrite posts in rectangular waveguide,” *Elect. Lett.*, vol. 28, pp. 913–915, May 1992.
- [84] M. A. Solano, A. Vegas and A. Prieto, “Modelling multiple discontinuities in rectangular waveguide partially filled with non-reciprocal ferrites,” *IEEE Trans. Microw. Theory Tech.*, vol. 41, pp. 797–802, May 1993.
- [85] Miguel. A. Solano, “Caracterización de discontinuidades entre guías de onda con medios anisótropos,” *Tesis doctoral*, Universidad de Cantabria, Dic. 1991.
- [86] A. Gómez, “Nuevas formulaciones del método de modos acoplados aplicadas al estudio de la propagación electromagnética en medios bi-isótropos contenidos en guía de onda rectangular,” *Tesis doctoral*, Universidad de Cantabria, Mar. 2005.
- [87] A. Gómez, M. A. Solano and A. Vegas, “New formulation of the coupled mode method for the analysis of chirowaveguides,” *Proc. of SPIE—The*

- International Society for Optical Engineering. Complex Mediums III: Beyond Linear Isotropic Dielectrics. Seattle, Washington, 2002, pp 290–301.
- [88] A. Vegas, A. Prieto and M. A. Solano, “Optimisation of the coupled-mode method for the analysis of waveguides partially filled with dielectrics of high permittivity: application to the study of discontinuities,” *IEE Proceedings Pt. H*, vol. 140, pp. 401–406, Oct. 1993.
- [89] M. A. Solano, A. Vegas and A. Gómez, comments on “A Comprehensive Study of Discontinuities in Chirrowaveguides”, *IEEE Trans. Microw. Theory Tech.*, vol. 54, pp.1297–1298, Mar. 2006.
- [90] J. Pitarch, J. M. Catalá-Civera, F. L. Peñaranda-Foix and M. A. Solano, “Efficient Modal Analysis of Bianisotropic Waveguides by the Coupled-Mode Method,” *IEEE Trans. Microw. Theory Tech.*, vol. 55 n°1, pp. 108–116, Jan. 2007.
- [91] J.D. Adam, L.E. Davis, G.F. Dionne, E.F. Schloemann, S.N. Stitzer, “Ferrite devices and materials,” *IEEE Trans. Microw. Theory Tech.*, vol. 50, pp. 721–737, Mar. 2002.
- [92] M. Faraday, *Experimental researches in electricity*, Ed. Taylor and Francis, London UK, 1855.
- [93] W. Thompson, “On the theory of the electric telegraph” *Math. and Phys. Papers* vol.2, p. 61, 1855.
- [94] W. Thompson, “On the peristaltic induction of electric currents in submarine telegraph wires” *Math. and Phys. Papers* vol.2, p.87, 1855.
- [95] O. Heaviside, *Electrical papers, vol. 1*, Ed. Macmillan, London, UK, 1892.
- [96] K. Siakavara and J. Sahalos, “The Discontinuity Problem of a Rectangular Dielectric Post in a Rectangular Waveguide,” *IEEE Trans. Microw. Theory Tech.*, Vol. 39, n° 9, Sept. 1991, pp. 1617-1622
- [97] L. Lewin, *Theory of Waveguide*. London: Newnes-Butterworth, 1975.
- [98] W. B. Dou and Edward K. N. Yung, *FDTD Analysis for Multiple Arbitrarily Shaped Posts in a Waveguide*. Microwave and Optical Technology Letters, Vol. 27, No. 3, Nov. 5 2000, pp. 216-220.
- [99] Andreas Christ and Hans. L. Hartnagel, “Three-dimensional finite-difference method for the analysis of microwave-device embedding,” *IEEE Trans. Microw. Theory Tech.*, vol. 35, pp. 686–696, May 1987.
- [100] S. Xu and X. Sheng, “Coupling of Edge-Element and Mode-Matching for Multistep Dielectric Discontinuity in Guiding Structures”, *IEEE Trans. Microw. Theory Tech.*, Vol. 45, n° 2, Feb. 1997, pp. 284-287.

- [101] Lord Kelvin: *Baltimore Lectures on Molecular Dynamics and the Wave Theory of Light*, C.J. Clay and Sons, Cambridge University Press, Warehouse, London, 1904.
- [102] D.L. Jaggard, A.R. Mickelson y C.H. Papas: “On electromagnetic waves in chiral media”, *Appl. Phys.*, vol. 18, pp. 211–216, 1979.
- [103] N. Engheta y P. Pelet: “Modes in Chirowaveguides”, *Optics Lett.*, vol. 14, no. 11, pp. 593–595, Jun. 1989.
- [104] V.K. Varadan, A. Lakhtakia y V.V. Varadan: “Propagation in a parallelplate waveguide wholly filled with a chiral medium”, *J. of Wave-Material Interaction*, vol. 3, no.3, pp. 267–272, Julio 1988; *errata*. vol. 3, no. 4, pp. 351, 235 Oct. 1988.
- [105] N. Engheta y P. Pelet: “The Theory of Chirowaveguides”, *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. 38, no. 1, pp. 90–98, Jan. 1990.
- [106] J. Svedin: “A numerically efficient finite-element formulation for the general waveguide problem without spurious modes”, *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, vol. 37, no. 11, pp. 1708–1715, Nov. 1989.
- [107] J. Svedin: “Finite element analysis of chirowaveguides”, *Electron. Lett.*, vol. 26, no. 13, pp. 928–929, Jun. 1990.
- [108] A. Grande, I. Barba, A.C.L. Cabecceira, J. Represa, P.P.M. So y W.J.R. Hoefer: “FDTD Modeling of transient microwave signals in dispersive and lossy biisotropics media”, *IEEE Trans. Microw. Theory and Techn.*, vol. 52, no. 3, pp. 773–784, Mar. 2004.
- [109] Werner S. Weiglhofer, “Isotropic Chiral Media and Scalar Hertz Potentials”, *J. Phys. A.: Math. Gen.* 21, 1988, pp. 2249-2251.
- [110] Jin Au Kong, *Theorems of Bianisotropic Media*. Proceedings of the IEEE, Vol. 60, n° 9, Sept. 1972, pp. 1036-1046.
- [111] I. V. Lindell and F. M. Dahl, *Conditions for the Parameter Dyadics of Lossy Bianisotropic Media*. Microwave and Optical Technology Letters, Vol. 29, No. 3, May 5, 2001, pp. 175-178.
- [112] A. Lakhtakia, V. V. Varadan and V. K. Varadan, *Field Equations, Huygens’s Principle, Integral Equations, and Theorems for Radiation and Scattering of Electromagnetic Waves in Isotropic Chiral Media*. J. Opt. Soc. Am. A, Vol. 5, No. 2, Feb. 1988, pp. 175-184.
- [113] A. H. Sihvola y I.V. Lindel: “Biisotropic constitutive relations”, *Microwave Opt. Technol. Lett.*, vol. 4, no. 8, pp.295–297, Jul. 1991.

- [114] J. Mazur and D. Pietrzak, "Field displacement phenomenon in a rectangular waveguide containing a thin plate of Ω medium," *IEEE Microw. Guided Lett.*, vol. 6, pp. 34–36, Jan 2006.
- [115] J. A. Dieudonne, *Fundamentos de Análisis moderno*, Ed. Reverté, Barcelona, 1966.
- [116] Partial Differential Equation Toolbox (PDE). MATLAB. [Online]. Available: <http://www.mathworks.com>.
- [117] W. E. Arnoldi, "The principle of minimized iteration in the solution of the matrix eigenvalue problem," *Quarterly of Applied Mathematics*, vol. 9, pp. 17–25, 1951.
- [118] T.V. Chow-Ting-Chan and H.C. Reader, *Understanding Microwave heating Cavities*, London: Artech House, 2000, pp. 126-163.
- [119] T.V. Chow-Ting-Chan and H.C. Reader, "Modelling of Modes and Perspectives on Multiple-Feeds in Microwave Ovens," *J. Microwave Power Electromagnetic Energy*, vol. 31, 1996, pp.238-250.
- [120] J.M. Catalá Civera, J. Pitarch, A.J. Canós, F. Peñaranda Foix, J.V. Balbastre, and E. de los Reyes, "Improving the heating uniformity in multimode microwave applicators by the optimization of the position of multiple feeds," in *Proc. Progress in Electromagnetic Research Symposium Conf.*, 2003, p. 51.
- [121] J. Pitarch, Antoni J. Canós, Felipe L. Peñaranda-Foix, Jose M. Catalá-Civera and Juan V. Balbastre, "Synthesis of uniform electric field distributions in microwave multimode applicators by multifed techniques," *Proc. 9th Int. Conf. on Microw. and High Freq. Heat. Organised on Behalf of Ampere*, Loughbobough, UK, 2003.
- [122] J. M. Catalá-Civera, J. Pitarch, M. Contelles-Cervera, F. Peñaranda-Foix, and J.V. Balbastre, "On the possibilities of multifeeding techniques to improve the electric field uniformity in multimode microwave applicators", *Proc. 10th Int. Conf. on Microw. and High Freq. Heat. Organised on Behalf of Ampere*, Modena, Italy, 2005.
- [123] María. E. Requena-Pérez, Antonio Alberó-Ortiz, Juan Monzó-cabrera and Alejandro Díaz-Morcillo, "Combined Use of Genetic Algorithms and Gradient Descent Optimization Methods for Accurate Inverse permittivity Measurement", *IEEE Trans. Microw. Theory Tech.* vol, 55 n°1, pp. 85-91, Jan. 2007.
- [124] E. Domínguez-Tortajada, P. Plaza-González, A. Díaz-Morcillo and J. V. Balbastre, "Optimisation of electric field uniformity in microwave heating

systems by means of multi-feeding and genetic algorithms”, *Int. J. of Mat. And Prod. Techn.* vol, 29 n° 3, pp. 149-162, Mar. 2007.

- [125] Yahya Rahmat-Samii and Eric Michielssen, *Electromagnetic, Optimization by Genetic Algorithms*. Wiley-Interscience, 1999.
- [126] J. Pitarch, José M. Catalá, Antoni J. Canós, Miguel Contelles, *Análisis y optimización de distribuciones de campo eléctrico en cavidades multimodo excitadas con múltiples fuentes*, XX Symposium Nacional de la URSI, 2005, Gandía.
- [127] Concerto User manual, Vector Fields Limited, Oxford, England, 2003.
- [128] Jaime Pitarch, José. M. Catalá-Civera, Felipe L. Peñaranda-Foix and Beatriz García-Baños, “Modeling Microwave Power Structures Based on K-Furcated Waveguides Arbitrarily Filled with Materials by Modal Techniques”, *Journal of Microwave Power and Electromagnetic Energy*, to be published.
- [129] J.M. Catalá-Civera, A.J. Canós-Marín, L. Sempere and E. de los Reyes, “Microwave resonator for the non-invasive evaluation of degradation processes in liquid composites”, *IEEE Electronics Letters*, Vol. 37, no. 2, pp. 99-100, January 2001
- [130] Yong Wang, M.N. Afsat and R. Grignon, “Complex permittivity and permeability of carbonyl iron powders at microwave frequencies”, *IEEE Antennas and Propagation Society International Symposium*, June 2003, Vol. 4, pp. 619-622
- [131] J. Monzó, A. Díaz, J.V. Balbastre, D. Sánchez-Hernández and E. de los Reyes, “Selective Heating and Moisture Levelling in Microwave-Assisted Drying of Laminar Materials: Explicit Model”, *8th International Conference on Microwave and High Frequency Heating AMPERE*, Bayreuth (Germany), September 2001
- [132] J.M. Catalá-Civera, A.J. Canós, F. Peñaranda-Foix and P. Plaza, “Microwave Non-Destructive Evaluation of Moisture Content in Liquid Composites in Cylindrical Cavity at a Single Frequency”, *8th International Conference on Microwave and High Frequency Heating AMPERE*, Bayreuth (Germany), September 2001
- [133] D.K. Ghodgaonkar, V.V. Varadan and V.K. Varadan, “Free-space measurement of complex permittivity and complex permeability of magnetic materials at microwave frequencies”, *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, Vol. 39, no. 2, pp. 387-394, April 1990

- [134] Beatriz García-Baños, José M. Catalá-Civera, Antoni J. Canós and Felipe Peñaranda-Foix, “Design rules for the optimization of the sensitivity of open-ended coaxial microwave sensors for monitoring changes in dielectric materials”, *IOP Measurement, Science and Technology*, Vol. 16, pp. 1186-1192, 11 April 2005
- [135] A.M. Nicholson and G.F. Ross, “Measurement of the intrinsic properties of materials by time-domain techniques”, *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, Vol. 19, pp. 377-382, November 1970
- [136] W.B. Weir, “Automatic Measurement of Complex Dielectric Constant and Permeability at Microwave Frequencies”, *Proceedings of the IEEE*, Vol. 62, no. 1, January 1974
- [137] J. Baker-Jarvis, E.J. Vanzura and W.A. Kissick, “Improved Technique for Determining Complex Permittivity with the Transmission/Reflection Method”, *IEEE Trans. Microw. Theory Tech.*, Vol. 38, no. 8, Aug. 1990.
- [138] J.M. Jarem, J.B. Johnson Jr. and W.S. Albritton, “Measuring the Permittivity and Permeability of a Sample at Ka Band Using a Partially Filled Waveguide”, *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, Vol. 43, no. 12, pp. 2654-2667, December 1995
- [139] J.M Catalá-Civera, A.J. Canós, F.L. Peñaranda-Foix and E. de los Reyes-Davó “Accurate Determination of the Complex Permittivity of Materials with Transmission Reflection Measurements in Partially Filled Rectangular Waveguides”, *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, Vol. 51, no. 1, pp.16-24, January 2003.
- [140] J. Pitarch, Miguel Contelles-Cervera, Felipe L. Peñaranda-Foix, and José M. Catalá-Civera, “Determination of the permittivity and permeability for waveguides partially loaded with isotropic samples,” *Meas. Sci. Technol.* 17 (2006) 145-152.
- [141] P. Soto, V. E. Boria, J. M. Catalá-Civera, N. Chouaib, M. Guglielmi and B. Gimeno “Analysis, Design, and Experimental Verification of Microwave Filters for Safety Issues in Open-Ended Waveguide Systems”, *IEEE Trans. Microw. Theory Tech.* vol, 48, n°11, pp. 2133-2140, Nov. 2000.

7. ANEXOS

7.1. INTEGRALES DE ACOPLO DEL MÉTODO DE MODOS ACOPLADOS

El CMM es un método general para cualquier tipo de estructura guiada y de materiales que ésta contenga. A la hora de hacer las integrales de acoplo, es necesario particularizar para una estructura determinada. En este documento, todas las simulaciones se han realizado para una guía rectangular que contiene un material también rectangular dentro de ella, con paredes paralelas, según la

En la Fig. 2.15, se muestra una guía rectangular axb , con un material de sección rectangular cuyos lados son paralelos a los de la guía, que se extiende en el rectángulo $[x,y] \in [x_s, x_s+a_s] \times [y_s, y_s+b_s]$. En este rectángulo, los parámetros electromagnéticos μ , η , ε y ξ son matrices constantes, y fuera de él, se encuentra el vacío, en el que $\mu=\mu_0$, $\eta=0$, $\varepsilon=\varepsilon_0$ y $\xi=0$.

Para cada una de las dieciséis matrices de acoplo definidas, hay que distinguir entre todos los acoplos posibles entre modos TE y TM, lo que da lugar a un total de sesenta y cuatro casos posibles.

Las funciones base empleadas para desarrollar los campos son las siguientes:

Modos TE

$$\left. \begin{aligned} e_{x,k}^{(h)} &= -\frac{k_{y,k}}{k_{c,k}} \sqrt{\frac{\varepsilon_m \varepsilon_n}{ab}} \cos(k_{x,k} x) \operatorname{sen}(k_{y,k} y) \\ e_{y,k}^{(h)} &= \frac{k_{x,k}}{k_{c,k}} \sqrt{\frac{\varepsilon_m \varepsilon_n}{ab}} \operatorname{sen}(k_{x,k} x) \cos(k_{y,k} y) \\ e_{z,k}^{(h)} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (7.1)$$

$$\left. \begin{aligned} h_{x,k}^{(h)} &= -Z_k^{-1} \frac{k_{x,k}}{k_{c,k}} \sqrt{\frac{\varepsilon_m \varepsilon_n}{ab}} \operatorname{sen}(k_{x,k} x) \cos(k_{y,k} y) \\ h_{y,k}^{(h)} &= -Z_k^{-1} \frac{k_{y,k}}{k_{c,k}} \sqrt{\frac{\varepsilon_m \varepsilon_n}{ab}} \cos(k_{x,k} x) \operatorname{sen}(k_{y,k} y) \\ h_{z,k}^{(h)} &= -\frac{k_{c,k}}{\gamma_k} Z_k^{-1} \sqrt{\frac{\varepsilon_m \varepsilon_n}{ab}} \cos(k_{x,k} x) \cos(k_{y,k} y) \end{aligned} \right\} \quad (7.2)$$

Modos TM

$$\left. \begin{aligned} e_{x,k}^{(e)} &= \frac{k_{x,k}}{k_{c,k}} \frac{2}{\sqrt{ab}} \cos(k_{x,k} x) \operatorname{sen}(k_{y,k} y) \\ e_{y,k}^{(e)} &= \frac{k_{y,k}}{k_{c,k}} \frac{2}{\sqrt{ab}} \operatorname{sen}(k_{x,k} x) \cos(k_{y,k} y) \\ e_{z,k}^{(e)} &= -\frac{k_{c,k}}{\gamma_k} \frac{2}{\sqrt{ab}} \operatorname{sen}(k_{x,k} x) \operatorname{sen}(k_{y,k} y) \end{aligned} \right\} \quad (7.3)$$

$$\left. \begin{aligned} h_{x,k}^{(e)} &= -Z_k^{-1} \frac{k_{y,k}}{k_{c,k}} \frac{2}{\sqrt{ab}} \operatorname{sen}(k_{x,k} x) \cos(k_{y,k} y) \\ h_{y,k}^{(e)} &= Z_k^{-1} \frac{k_{x,k}}{k_{c,k}} \frac{2}{\sqrt{ab}} \cos(k_{x,k} x) \operatorname{sen}(k_{y,k} y) \\ h_{z,k}^{(e)} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (7.4)$$

Se va a suponer que el dominio –bidimensional– de integración se divide en dos zonas: la zona del material bianisótropo, Ω_M , y la zona del vacío, Ω_0 , de forma que $\Omega_M \cup \Omega_0 = \Omega$. Se suponen los materiales homogéneos, es decir, de valores constantes en Ω_M .

Los parámetros electromagnéticos se dividen en dos tipos a la hora de realizar las integrales de acoplo: los que se anulan en Ω_0 , como son η , χ y los que dependen solamente de ellos y aquellos que toman un valor distinto de cero en Ω_0 , como son ε , μ y sus derivados.

Las integrales de acoplo se extienden a toda la sección transversal. En general, implican Para el primer caso, sea p el parámetro en cuestión y f_1 y f_2 , las funciones que se integran. Las integrales se convierten en integrales del tipo:

$$I_1 = \int_{\Omega} p f_1 f_2 \, dS = \int_{\Omega_M} p f_1 f_2 \, dS \quad (7.5)$$

Es decir, la integral se reduce al dominio rectangular del material.

Para el caso de los materiales que no se anulan en Ω_0 se tiene que:

$$I_2 = \int_{\Omega} q g_1 g_2 \, dS = \int_{\Omega_M} q g_1 g_2 \, dS + q_0 \int_{\Omega_0} g_1 g_2 \, dS \quad (7.6)$$

Pero realizar una integral en Ω_0 es muy laborioso, puesto que es una corona rectangular. Para ello, se hace:

$$\begin{aligned}
 I_2 &= \int_{\Omega} qg_1g_2 \, dS = \int_{\Omega_M} qg_1g_2 \, dS + \int_{\Omega_0} qg_1g_2 \, dS = \\
 &= \int_{\Omega_M} qg_1g_2 \, dS + q_0 \int_{\Omega_0} g_1g_2 \, dS = \\
 &= \int_{\Omega_M} qg_1g_2 \, dS + q_0 \int_{\Omega_0} g_1g_2 \, dS + q_0 \int_{\Omega_M} g_1g_2 \, dS - q_0 \int_{\Omega_M} g_1g_2 \, dS = \\
 &\int_{\Omega_M} (q - q_0)g_1g_2 \, dS + q_0 \int_{\Omega} g_1g_2 \, dS
 \end{aligned} \tag{7.7}$$

De esta manera, se evita realizar integrales en Ω_0 , que resultarían muy incómodas, y se expresa todo en función de integrales en Ω y Ω_M , que son dominios rectangulares.

Estas ecuaciones son solamente un esquema del proceso seguido en estos casos. Las funciones implicadas, incluidos los parámetros constitutivos, son matrices y vectores, entre los que se realizan productos vectoriales, escalares u ordinarios, pero el proceso a seguir en ellas es el descrito.

7.1.1. Formulación directa

En el vacío, los materiales valen lo siguiente:

$$\left. \begin{aligned}
 \mu_t &= \mu_0 \\
 \eta_t &= 0 \\
 \varepsilon_t &= \varepsilon_0 \\
 \xi_t &= 0
 \end{aligned} \right\} \tag{7.8}$$

y

$$\left. \begin{aligned}
 \lambda_b &= 0 \\
 \lambda_d &= 0 \\
 \lambda_h &= 0 \\
 \lambda_e &= 0 \\
 \chi_{tz} &= 0 \\
 \sigma_{tz} &= 0 \\
 \tau_{zt} &= 0 \\
 \varphi_{zt} &= 0 \\
 \nu_z &= \mu_0^{-1} \\
 \psi_z &= 0 \\
 \varsigma_z &= \varepsilon_0^{-1} \\
 \varpi_z &= 0
 \end{aligned} \right\} \tag{7.9}$$

Las integrales de acoplo se descomponen de la forma

$$M_{\lambda_e}^{kn} = -\gamma_k \int_{\Omega} \lambda_e e_n e_{z,k} dS = -\gamma_k \int_{\Omega_M} \lambda_e e_n e_{z,k} dS \quad (7.10)$$

$$M_{\zeta_z}^{kn} = -\frac{1}{j\omega} Z_n^{-1} \gamma_n \gamma_k \int_{\Omega} \zeta_z e_{z,n} e_{z,k} dS = -\frac{1}{j\omega} Z_n^{-1} \gamma_n \gamma_k I_{\zeta_z}^{kn} \quad (7.11)$$

con

$$\begin{aligned} I_{\zeta_z}^{kn} &= \int_{\Omega} \zeta_z e_{z,n} e_{z,k} dS = \zeta_z \int_{\Omega_M} e_{z,n} e_{z,k} dS + \varepsilon_0^{-1} \int_{\Omega_0} e_{z,n} e_{z,k} dS = \\ &= \zeta_z \int_{\Omega_M} e_{z,n} e_{z,k} dS + \varepsilon_0^{-1} \int_{\Omega_0} e_{z,n} e_{z,k} dS + \\ &+ \varepsilon_0^{-1} \int_{\Omega_M} e_{z,n} e_{z,k} dS - \varepsilon_0^{-1} \int_{\Omega_M} e_{z,n} e_{z,k} dS = \\ &= (\zeta_z - \varepsilon_0^{-1}) \int_{\Omega_M} e_{z,n} e_{z,k} dS + \varepsilon_0^{-1} \int_{\Omega} e_{z,n} e_{z,k} dS = \\ &= (\zeta_z - \varepsilon_0^{-1}) \int_{\Omega_M} e_{z,n} e_{z,k} dS + \varepsilon_0^{-1} \left(\frac{k_{c,k}}{\gamma_k} \right)^2 \delta_{kn} \end{aligned} \quad (7.12)$$

Agrupando,

$$\begin{aligned} M_{\zeta_z}^{kn} &= -\frac{1}{j\omega} Z_n^{-1} \gamma_n \gamma_k \left[(\zeta_z - \varepsilon_0^{-1}) \int_{\Omega_M} e_{z,n} e_{z,k} dS + \varepsilon_0^{-1} \left(\frac{k_{c,k}}{\gamma_k} \right)^2 \delta_{kn} \right] = \\ &= -\frac{1}{j\omega} Z_n^{-1} \gamma_n \gamma_k (\zeta_z - \varepsilon_0^{-1}) \int_{\Omega_M} e_{z,n} e_{z,k} dS - \frac{1}{j\omega} Z_n^{-1} k_{c,k}^2 \varepsilon_0^{-1} \delta_{kn} = \\ &= (\zeta_z - \varepsilon_0^{-1}) \hat{I}_{\zeta_z}^{kn} - \frac{1}{j\omega} Z_n^{-1} k_{c,k}^2 \varepsilon_0^{-1} \delta_{kn} \end{aligned} \quad (7.13)$$

$$M_{\varphi_{zt}}^{kn} = -\gamma_k \int_{\Omega} \varphi_{zt} \mathbf{h}_n e_{z,k} dS = -\gamma_k \int_{\Omega_M} \varphi_{zt} \mathbf{h}_n e_{z,k} dS \quad (7.14)$$

$$M_{\varpi_z}^{kn} = -\frac{1}{j\omega} Z_n \gamma_n \gamma_k \int_{\Omega} \varpi_z h_{z,n} e_{z,k} dS = -\frac{1}{j\omega} Z_n \gamma_n \gamma_k \int_{\Omega_M} \varpi_z h_{z,n} e_{z,k} dS \quad (7.15)$$

$$M_{\mu_t}^{kn} = -j\omega \int_{\Omega} \mathbf{e}_k \cdot \mu_t \mathbf{h}_n \times \hat{z} dS = -j\omega I_{\mu_t}^{kn} \quad (7.16)$$

con

$$\begin{aligned} I_{\mu_t}^{kn} &= \int_{\Omega} \mathbf{e}_k \cdot \mu_t \mathbf{h}_n \times \hat{z} dS = \int_{\Omega_M} \mathbf{e}_k \cdot \mu_t \mathbf{h}_n \times \hat{z} dS + \int_{\Omega_0} \mathbf{e}_k \cdot \mu_0 I \mathbf{h}_n \times \hat{z} dS = \\ &= \int_{\Omega_M} \mathbf{e}_k \cdot \mu_t \mathbf{h}_n \times \hat{z} dS + \int_{\Omega_0} \mathbf{e}_k \cdot \mu_0 I \mathbf{h}_n \times \hat{z} dS + \\ &+ \int_{\Omega_M} \mathbf{e}_k \cdot \mu_0 I \mathbf{h}_n \times \hat{z} dS - \int_{\Omega_M} \mathbf{e}_k \cdot \mu_0 I \mathbf{h}_n \times \hat{z} dS = \\ &= \int_{\Omega_M} \mathbf{e}_k \cdot (\mu_t - \mu_0 I) \mathbf{h}_n \times \hat{z} dS + \int_{\Omega} \mathbf{e}_k \cdot \mu_0 I \mathbf{h}_n \times \hat{z} dS \end{aligned} \quad (7.17)$$

El segundo término vale

$$\int_{\Omega} \mathbf{e}_k \cdot \mu_0 I \mathbf{h}_n \times \hat{z} dS = \mu_0 \int_{\Omega} \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{h}_n \times \hat{z} dS = \mu_0 Z_n^{-1} \int_{\Omega} \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}_n = \mu_0 Z_k^{-1} \delta_{kn} \quad (7.18)$$

De forma que

Modelado con técnicas modales de estructuras de microondas basadas en guías N-furcadas arbitrariamente rellenas con materiales

$$I_{\mu_t}^{kn} = \int_{\Omega_M} \mathbf{e}_k \cdot (\boldsymbol{\mu}_t - \mu_0 \mathbf{I}) \mathbf{h}_n \times \hat{\mathbf{z}} \, dS + \mu_0 Z_k^{-1} \delta_{kn} \quad (7.19)$$

$$M_{\lambda_b}^{kn} = -Z_n \gamma_n \int_{\Omega} \mathbf{e}_k \cdot \lambda_b h_{z,n} \times \hat{\mathbf{z}} \, dS = -Z_n \gamma_n \int_{\Omega_M} \mathbf{e}_k \cdot \lambda_b h_{z,n} \times \hat{\mathbf{z}} \, dS \quad (7.20)$$

$$M_{\eta_t}^{kn} = -j\omega \int_{\Omega} \mathbf{e}_k \cdot \eta_t \mathbf{e}_n \times \hat{\mathbf{z}} \, dS = -j\omega \int_{\Omega_M} \mathbf{e}_k \cdot \eta_t \mathbf{e}_n \times \hat{\mathbf{z}} \, dS \quad (7.21)$$

$$M_{\chi_{tz}}^{kn} = -Z_n^{-1} \gamma_n \int_{\Omega} \mathbf{e}_k \cdot \chi_{tz} e_{z,n} \times \hat{\mathbf{z}} \, dS = -Z_n^{-1} \gamma_n \int_{\Omega_M} \mathbf{e}_k \cdot \chi_{tz} e_{z,n} \times \hat{\mathbf{z}} \, dS \quad (7.22)$$

$$M_{\lambda_h}^{kn} = -\gamma_k Z_k^2 \int_{\Omega} \lambda_h \mathbf{h}_n h_{z,k} \, dS = -\gamma_k Z_k^2 \int_{\Omega_M} \lambda_h \mathbf{h}_n h_{z,k} \, dS = \quad (7.23)$$

$$M_{\nu_z}^{kn} = -\frac{1}{j\omega} Z_n \gamma_n \gamma_k Z_k^2 \int_{\Omega} \nu_z h_{z,n} h_{z,k} \, dS = -\frac{1}{j\omega} Z_n \gamma_n \gamma_k Z_k^2 I_{\nu_z}^{kn} \quad (7.24)$$

con

$$\begin{aligned} I_{\nu_z}^{kn} &= \int_{\Omega} \nu_z h_{z,n} h_{z,k} \, dS = \nu_z \int_{\Omega_M} h_{z,n} h_{z,k} \, dS + \mu_0^{-1} \int_{\Omega_0} h_{z,n} h_{z,k} \, dS = \\ &= \nu_z \int_{\Omega_M} h_{z,n} h_{z,k} \, dS + \mu_0^{-1} \int_{\Omega_0} h_{z,n} h_{z,k} \, dS + \\ &+ \mu_0^{-1} \int_{\Omega_M} h_{z,n} h_{z,k} \, dS - \mu_0^{-1} \int_{\Omega_M} h_{z,n} h_{z,k} \, dS = \\ &= (\nu_z - \mu_0^{-1}) \int_{\Omega_M} h_{z,n} h_{z,k} \, dS + \mu_0^{-1} \int_{\Omega} h_{z,n} h_{z,k} \, dS = \end{aligned} \quad (7.25)$$

$$\begin{aligned} &= (\nu_z - \mu_0^{-1}) \int_{\Omega_M} h_{z,n} h_{z,k} \, dS + \mu_0^{-1} \left(\frac{k_{c,k}}{\gamma_k} Z_k^{-1} \right)^2 \delta_{kn} = \\ &= (\nu_z - \mu_0^{-1}) \hat{I}_{\nu_z}^{kn} + \mu_0^{-1} \left(\frac{k_{c,k}}{\gamma_k} Z_k^{-1} \right)^2 \delta_{kn} \end{aligned}$$

$$M_{\tau_{zt}}^{kn} = -\gamma_k Z_k^2 \int_{\Omega} \tau_{zt} \mathbf{e}_n h_{z,k} \, dS = -\gamma_k Z_k^2 \int_{\Omega_M} \tau_{zt} \mathbf{e}_n h_{z,k} \, dS \quad (7.26)$$

$$M_{\psi_z}^{kn} = -\frac{1}{j\omega} Z_k^2 Z_n^{-1} \gamma_k \gamma_n \int_{\Omega} \psi_z e_{z,n} h_{z,k} \, dS = -\frac{1}{j\omega} Z_k^2 Z_n^{-1} \gamma_k \gamma_n \int_{\Omega_M} \psi_z e_{z,n} h_{z,k} \, dS \quad (7.27)$$

$$M_{\varepsilon_t}^{kn} = j\omega Z_k^2 \int_{\Omega} \mathbf{h}_k \cdot \varepsilon_t \mathbf{e}_n \times \hat{\mathbf{z}} \, dS = j\omega Z_k^2 I_{\varepsilon_t}^{kn} \quad (7.28)$$

con

$$\begin{aligned} I_{\varepsilon_t}^{kn} &= \int_{\Omega} \mathbf{h}_k \cdot \varepsilon_t \mathbf{e}_n \times \hat{\mathbf{z}} \, dS = \int_{\Omega_M} \mathbf{h}_k \cdot \varepsilon_t \mathbf{e}_n \times \hat{\mathbf{z}} \, dS + \int_{\Omega_0} \mathbf{h}_k \cdot \varepsilon_0 \mathbf{I} \mathbf{e}_n \times \hat{\mathbf{z}} \, dS = \\ &= \int_{\Omega_M} \mathbf{h}_k \cdot \varepsilon_t \mathbf{e}_n \times \hat{\mathbf{z}} \, dS + \int_{\Omega_0} \mathbf{h}_k \cdot \varepsilon_0 \mathbf{I} \mathbf{e}_n \times \hat{\mathbf{z}} \, dS + \\ &+ \int_{\Omega_M} \mathbf{h}_k \cdot \varepsilon_0 \mathbf{I} \mathbf{e}_n \times \hat{\mathbf{z}} \, dS - \int_{\Omega_M} \mathbf{h}_k \cdot \varepsilon_0 \mathbf{I} \mathbf{e}_n \times \hat{\mathbf{z}} \, dS = \\ &= \int_{\Omega_M} \mathbf{h}_k \cdot (\varepsilon_t - \varepsilon_0 \mathbf{I}) \mathbf{e}_n \times \hat{\mathbf{z}} \, dS + \int_{\Omega_M} \mathbf{h}_k \cdot \varepsilon_0 \mathbf{I} \mathbf{e}_n \times \hat{\mathbf{z}} \, dS \end{aligned} \quad (7.29)$$

El segundo término vale

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_M} \mathbf{h}_k \cdot \varepsilon_0 I \mathbf{e}_n \times \hat{\mathbf{z}} \, dS &= \varepsilon_0 \int_{\Omega_M} \mathbf{h}_k \cdot \mathbf{e}_n \times \hat{\mathbf{z}} \, dS = \\ &= -\varepsilon_0 Z_n \int_{\Omega_M} \mathbf{h}_k \cdot \mathbf{h}_n \, dS = -\varepsilon_0 Z_n Z_k^{-2} \delta_{ik} = -\varepsilon_0 Z_k^{-1} \delta_{ik} \end{aligned} \quad (7.30)$$

De forma que

$$I_{\varepsilon_t}^{kn} = \int_{\Omega_M} \mathbf{h}_k \cdot (\varepsilon_t - \varepsilon_0 I) \mathbf{e}_n \times \hat{\mathbf{z}} \, dS - \varepsilon_0 Z_k^{-1} \delta_{ik} = \hat{I}_{\varepsilon_t}^{kn} - \varepsilon_0 Z_k^{-1} \delta_{ik} \quad (7.31)$$

$$M_{\lambda_d}^{kn} = Z_k^2 Z_n^{-1} \gamma_n \int_{\Omega} \mathbf{h}_k \cdot \lambda_d \mathbf{e}_{z,n} \times \hat{\mathbf{z}} \, dS = Z_k^2 Z_n^{-1} \gamma_n \int_{\Omega_M} \mathbf{h}_k \cdot \lambda_d \mathbf{e}_{z,n} \times \hat{\mathbf{z}} \, dS \quad (7.32)$$

$$M_{\xi_t}^{kn} = j\omega Z_k^2 \int_{\Omega} \mathbf{h}_k \cdot \xi_t \mathbf{h}_n \times \hat{\mathbf{z}} \, dS = j\omega Z_k^2 \int_{\Omega_M} \mathbf{h}_k \cdot \xi_t \mathbf{h}_n \times \hat{\mathbf{z}} \, dS \quad (7.33)$$

$$M_{\sigma_{tz}}^{kn} = Z_k^2 Z_n \gamma_n \int_{\Omega} \mathbf{h}_k \cdot \sigma_{tz} \mathbf{h}_{z,n} \times \hat{\mathbf{z}} \, dS + Z_k^2 Z_n \gamma_n \int_{\Omega_M} \mathbf{h}_k \cdot \sigma_{tz} \mathbf{h}_{z,n} \times \hat{\mathbf{z}} \, dS \quad (7.34)$$

• **Matriz** $M_{\lambda_e}^{kn}$

Su expresión es

$$\begin{aligned} M_{\lambda_e}^{kn} &= -\gamma_k \int_{\Omega_M} \lambda_e \mathbf{e}_n \mathbf{e}_{z,k} \, dS = \\ &= -\gamma_k \int_{\Omega_M} (\lambda_{e,x} \mathbf{e}_{x,n} + \lambda_{e,y} \mathbf{e}_{y,n}) \mathbf{e}_{z,k} \, dS \end{aligned} \quad (7.35)$$

Esta matriz únicamente tiene valores no nulos para los casos TM-TE y TM-TM.

Caso TM-TE

$$\begin{aligned} M_{\lambda_e}^{kn} &= -\gamma_k \int_{\Omega_M} \lambda_e \mathbf{e}_n \mathbf{e}_{z,k} \, dS = \\ &= -\gamma_k \int_{\Omega_M} (\lambda_{e,x} \mathbf{e}_{x,n} + \lambda_{e,y} \mathbf{e}_{y,n}) \mathbf{e}_{z,k} \, dS = \\ &= -\gamma_k \int_{\Omega_M} \left\{ \begin{aligned} &\left(\lambda_{e,x} \left[-\frac{k_{y,n}}{k_{c,n}} \sqrt{\frac{\varepsilon_{m'} \varepsilon_{n'}}{ab}} \cos(k_{x,n} x) \text{sen}(k_{y,n} y) \right] + \right. \\ &\left. + \lambda_{e,y} \left[\frac{k_{x,n}}{k_{c,n}} \sqrt{\frac{\varepsilon_{m'} \varepsilon_{n'}}{ab}} \text{sen}(k_{x,n} x) \cos(k_{y,n} y) \right] \right) \\ &\cdot \left[-\frac{k_{c,k}}{\gamma_k} \frac{2}{\sqrt{ab}} \text{sen}(k_{x,k} x) \text{sen}(k_{y,k} y) \right] \end{aligned} \right\} dS = \\ &= \gamma_k \frac{k_{c,k}}{\gamma_k} \frac{2}{\sqrt{ab}} \left(-\lambda_{e,x} \frac{k_{y,n}}{k_{c,n}} \sqrt{\frac{\varepsilon_{m'} \varepsilon_{n'}}{ab}} I_{srx} I_{ssy} + \lambda_{e,y} \frac{k_{x,n}}{k_{c,n}} \sqrt{\frac{\varepsilon_{m'} \varepsilon_{n'}}{ab}} I_{ssx} I_{scy} \right) = \\ &= \frac{k_{c,k}}{k_{c,n}} \frac{2\sqrt{\varepsilon_{m'} \varepsilon_{n'}}}{ab} \left(-\lambda_{e,x} k_{y,n} I_{srx} I_{ssy} + \lambda_{e,y} k_{x,n} I_{ssx} I_{scy} \right) \end{aligned} \quad (7.36)$$

Caso TM-TM

$$\begin{aligned}
 M_{\lambda_e}^{kn} &= -\gamma_k \int_{\Omega_M} \lambda_e \mathbf{e}_n e_{z,k} dS = \\
 &= -\gamma_k \int_{\Omega_M} (\lambda_{e,x} e_{x,n} + \lambda_{e,y} e_{y,n}) e_{z,k} dS = \\
 &= -\gamma_k \int_{\Omega_M} \left\{ \begin{aligned} &\left[\lambda_{e,x} \left[\frac{k_{x,n}}{k_{c,n}} \frac{2}{\sqrt{ab}} \cos(k_{x,n}x) \text{sen}(k_{y,n}y) \right] + \right. \\ &+ \lambda_{e,y} \left[\frac{k_{y,n}}{k_{c,n}} \frac{2}{\sqrt{ab}} \text{sen}(k_{x,n}x) \cos(k_{y,n}y) \right] \\ &\left. \cdot \left[-\frac{k_{c,k}}{\gamma_k} \frac{2}{\sqrt{ab}} \text{sen}(k_{x,k}x) \text{sen}(k_{y,k}y) \right] \right\} dS = \\
 &= \gamma_k \frac{k_{c,k}}{\gamma_k} \frac{2}{\sqrt{ab}} \left(\lambda_{e,x} \frac{k_{x,n}}{k_{c,n}} \frac{2}{\sqrt{ab}} I_{sxx} I_{ssy} + \lambda_{e,y} \frac{k_{y,n}}{k_{c,n}} \frac{2}{\sqrt{ab}} I_{ssx} I_{scy} \right) = \\
 &= \frac{k_{c,k}}{k_{c,n}} \frac{4}{ab} (\lambda_{e,x} k_{x,n} I_{sxx} I_{ssy} + \lambda_{e,y} k_{y,n} I_{ssx} I_{scy}) \tag{7.37}
 \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

• **Matriz** $\hat{I}_{\zeta_z}^{kn}$

Esta matriz solamente es no nula para el caso TM-TM

$$\begin{aligned}
 \hat{I}_{\zeta_z}^{kn} &= \int_{\Omega_M} e_{z,n} e_{z,k} dS \\
 &= \int_{\Omega_M} \left[\frac{k_{c,k}}{\gamma_k} \frac{2}{\sqrt{ab}} \text{sen}(k_{x,k}x) \text{sen}(k_{y,k}y) \right] \left[\frac{k_{c,n}}{\gamma_n} \frac{2}{\sqrt{ab}} \text{sen}(k_{x,n}x) \text{sen}(k_{y,n}y) \right] dS \\
 &= \frac{k_{c,k}}{\gamma_k} \frac{2}{\sqrt{ab}} \frac{k_{c,n}}{\gamma_n} \frac{2}{\sqrt{ab}} I_{ssx} I_{ssy} = \\
 &= \frac{4}{ab} \frac{k_{c,k} k_{c,n}}{\gamma_k \gamma_n} I_{ssx} I_{ssy} \tag{7.38}
 \end{aligned}$$

Agrupando,

$$\begin{aligned}
 M_{\zeta_z}^{kn} &= -\frac{1}{j\omega} Z_n^{-1} \gamma_n \gamma_k \left[(\zeta_z - \epsilon_0^{-1}) \hat{I}_{\zeta_z}^{kn} + \epsilon_0^{-1} \left(\frac{k_{c,k}}{\gamma_k} \right)^2 \delta_{kn} \right] = \\
 &= -\frac{1}{j\omega} Z_n^{-1} \gamma_n \gamma_k (\zeta_z - \epsilon_0^{-1}) \hat{I}_{\zeta_z}^{kn} - \frac{1}{j\omega} Z_n^{-1} k_{c,k}^2 \epsilon_0^{-1} \delta_{kn} = \\
 &= -\frac{1}{j\omega} (\zeta_z - \epsilon_0^{-1}) Z_n^{-1} k_{c,k} k_{c,n} \frac{4}{ab} I_{ssx} I_{ssy} - \frac{1}{j\omega} Z_n^{-1} k_{c,k}^2 \epsilon_0^{-1} \delta_{kn} \tag{7.39}
 \end{aligned}$$

• **Matriz** $M_{\varphi_{zt}}^{kn}$

$$\begin{aligned} M_{\varphi_{zt}}^{kn} &= -\gamma_k \int_{\Omega} \varphi_{zt} \mathbf{h}_n e_{z,k} dS = \\ &= -\gamma_k \int_{\Omega} \left(\varphi_{zt,x} h_{x,n} + \varphi_{zt,y} h_{y,n} \right) e_{z,k} dS \end{aligned}$$

Esta matriz solamente es no nula para los casos TM-TE y TM-TM

Caso TM-TE

$$\begin{aligned} M_{\varphi_{zt}}^{kn(eh)} &= -\gamma_k \int_{\Omega} \left(\varphi_{zt,x} h_{x,n} + \varphi_{zt,y} h_{y,n} \right) e_{z,k} dS = \\ &= -\gamma_k \int_{\Omega} \left\{ \begin{aligned} &\left(\varphi_{zt,x} \left[-Z_n^{-1} \frac{k_{x,n}}{k_{c,n}} \sqrt{\frac{\varepsilon_{m'} \varepsilon_{n'}}{ab}} \text{sen}(k_{x,n} x) \cos(k_{y,n} y) \right] + \right. \\ &\left. + \varphi_{zt,y} \left[-Z_n^{-1} \frac{k_{y,n}}{k_{c,n}} \sqrt{\frac{\varepsilon_{m'} \varepsilon_{n'}}{ab}} \cos(k_{x,n} x) \text{sen}(k_{y,n} y) \right] \right) \\ &\cdot \left[-\frac{k_{c,k}}{\gamma_k} \frac{2}{\sqrt{ab}} \text{sen}(k_{x,k} x) \text{sen}(k_{y,k} y) \right] \end{aligned} \right\} dS = \tag{7.40} \\ &= \gamma_k \frac{k_{c,k}}{\gamma_k} \frac{2}{\sqrt{ab}} \left(-\varphi_{zt,x} Z_n^{-1} \frac{k_{x,n}}{k_{c,n}} \sqrt{\frac{\varepsilon_{m'} \varepsilon_{n'}}{ab}} I_{ssx} I_{scy} - \varphi_{zt,y} Z_n^{-1} \frac{k_{y,n}}{k_{c,n}} \sqrt{\frac{\varepsilon_{m'} \varepsilon_{n'}}{ab}} I_{scx} I_{ssy} \right) \\ &= -\frac{k_{c,k}}{k_{c,n}} Z_n^{-1} \frac{2\sqrt{\varepsilon_{m'} \varepsilon_{n'}}}{ab} \left(\varphi_{zt,x} k_{x,n} I_{ssx} I_{scy} + \varphi_{zt,y} k_{y,n} I_{scx} I_{ssy} \right) \end{aligned}$$

Caso TM-TM

$$\begin{aligned} M_{\varphi_{zt}}^{kn(ee)} &= -\gamma_k \int_{\Omega} \left(\varphi_{zt,x} h_{x,n} + \varphi_{zt,y} h_{y,n} \right) e_{z,k} dS = \\ &= -\gamma_k \int_{\Omega} \left\{ \begin{aligned} &\left(\varphi_{zt,x} \left[-Z_n^{-1} \frac{k_{y,n}}{k_{c,n}} \frac{2}{\sqrt{ab}} \text{sen}(k_{x,n} x) \cos(k_{y,n} y) \right] + \right) \\ &\left(\varphi_{zt,y} \left[Z_n^{-1} \frac{k_{x,n}}{k_{c,n}} \frac{2}{\sqrt{ab}} \cos(k_{x,n} x) \text{sen}(k_{y,n} y) \right] \right) \\ &\cdot \left[-\frac{k_{c,k}}{\gamma_k} \frac{2}{\sqrt{ab}} \text{sen}(k_{x,k} x) \text{sen}(k_{y,k} y) \right] \end{aligned} \right\} dS = \tag{7.41} \\ &= \gamma_k \frac{k_{c,k}}{\gamma_k} \frac{2}{\sqrt{ab}} \left(-\varphi_{zt,x} Z_n^{-1} \frac{k_{y,n}}{k_{c,n}} \frac{2}{\sqrt{ab}} I_{ssx} I_{scy} + \varphi_{zt,y} Z_n^{-1} \frac{k_{x,n}}{k_{c,n}} \frac{2}{\sqrt{ab}} I_{scx} I_{ssy} \right) \\ &= \frac{k_{c,k}}{k_{c,n}} Z_n^{-1} \frac{4}{ab} \left(-\varphi_{zt,x} k_{y,n} I_{ssx} I_{scy} + \varphi_{zt,y} k_{x,n} I_{scx} I_{ssy} \right) \end{aligned}$$

• **Matriz** $M_{\varpi_z}^{kn}$

Esta matriz solamente es no nula para el caso TM-TE

$$\begin{aligned}
 M_{\varpi_z}^{kn} &= -\frac{1}{j\omega} Z_n \gamma_n \gamma_k \int_{\Omega} \varpi_z h_{z,n} e_{z,k} dS = \\
 &= -\frac{1}{j\omega} Z_n \gamma_n \gamma_k \int_{\Omega} \left\{ \begin{array}{l} \varpi_z \left[\frac{k_{c,n}}{\gamma_n} Z_n^{-1} \sqrt{\frac{\varepsilon_{m'} \varepsilon_{n'}}{ab}} \cos(k_{x,n} x) \cos(k_{y,n} y) \right] \cdot \\ \cdot \left[\frac{k_{c,k}}{\gamma_k} \frac{2}{\sqrt{ab}} \text{sen}(k_{x,k} x) \text{sen}(k_{y,k} y) \right] \end{array} \right\} dS = \quad (7.42) \\
 &= -\frac{1}{j\omega} Z_n \gamma_n \gamma_k \frac{k_{c,n}}{\gamma_n} Z_n^{-1} \sqrt{\frac{\varepsilon_{m'} \varepsilon_{n'}}{ab}} \frac{k_{c,k}}{\gamma_k} \frac{2}{\sqrt{ab}} \varpi_z I_{scx} I_{scy} = \\
 &= -\frac{1}{j\omega} k_{c,n} k_{c,k} \frac{2\sqrt{\varepsilon_{m'} \varepsilon_{n'}}}{ab} \varpi_z I_{scx} I_{scy}
 \end{aligned}$$

• **Matriz** $\hat{I}_{\mu_t}^{kn}$

$$\begin{aligned}
 \hat{I}_{\mu_t}^{kn} &= \int_{\Omega_M} \mathbf{e}_k \cdot (\boldsymbol{\mu}_t - \mu_0 \mathbf{I}) \mathbf{h}_n \times \hat{\mathbf{z}} dS = \\
 &= \int_{\Omega_M} \mathbf{e}_k \cdot \left[\left((\mu_{t,xx} - \mu_0) h_{x,n} + \mu_{t,xy} h_{y,n} \right) \hat{\mathbf{x}} + \left(\mu_{t,yx} h_{x,n} + (\mu_{t,yy} - \mu_0) h_{y,n} \right) \hat{\mathbf{y}} \right] \times \hat{\mathbf{z}} dS = \\
 &= \int_{\Omega_M} \mathbf{e}_k \cdot \left[(\mu_{t,yx} h_{x,n} + (\mu_{t,yy} - \mu_0) h_{y,n}) \hat{\mathbf{x}} - \left((\mu_{t,xx} - \mu_0) h_{x,n} + \mu_{t,xy} h_{y,n} \right) \hat{\mathbf{y}} \right] dS = \quad (7.43) \\
 &= \int_{\Omega_M} \left[e_{x,k} \left(\mu_{t,yx} h_{x,n} + (\mu_{t,yy} - \mu_0) h_{y,n} \right) - e_{y,k} \left((\mu_{t,xx} - \mu_0) h_{x,n} + \mu_{t,xy} h_{y,n} \right) \right] dS
 \end{aligned}$$

En esta matriz, hay que distinguir entre los cuatro casos posibles de acoplos TE y TM.

Caso TE-TE

$$\begin{aligned}
\hat{I}_{\mu_t}^{kn(hh)} &= \int_{\Omega_M} \left[e_{x,k} (\mu_{t,yx} h_{x,n} + (\mu_{t,yy} - \mu_0) h_{y,n}) - \right. \\
&\quad \left. - e_{y,k} ((\mu_{t,xx} - \mu_0) h_{x,n} + \mu_{t,xy} h_{y,n}) \right] dS = \\
&= \int_{\Omega_M} \left[\begin{aligned} & \left[-\frac{k_{y,k}}{k_{c,k}} \sqrt{\frac{\varepsilon_m \varepsilon_n}{ab}} \cos(k_{x,k} x) \text{sen}(k_{y,k} y) \right] \\ & \left(\mu_{t,yx} \left[-Z_n^{-1} \frac{k_{x,n}}{k_{c,n}} \sqrt{\frac{\varepsilon_m \varepsilon_{n'}}{ab}} \text{sen}(k_{x,n} x) \cos(k_{y,n} y) \right] + \right. \\ & \left. + (\mu_{t,yy} - \mu_0) \left[-Z_n^{-1} \frac{k_{y,n}}{k_{c,n}} \sqrt{\frac{\varepsilon_m \varepsilon_{n'}}{ab}} \cos(k_{x,n} x) \text{sen}(k_{y,n} y) \right] \right) \\ & - \left[\frac{k_{x,k}}{k_{c,k}} \sqrt{\frac{\varepsilon_m \varepsilon_n}{ab}} \text{sen}(k_{x,k} x) \cos(k_{y,k} y) \right] \\ & \left((\mu_{t,xx} - \mu_0) \left[-Z_n^{-1} \frac{k_{x,n}}{k_{c,n}} \sqrt{\frac{\varepsilon_m \varepsilon_{n'}}{ab}} \text{sen}(k_{x,n} x) \cos(k_{y,n} y) \right] + \right. \\ & \left. + \mu_{t,xy} \left[-Z_n^{-1} \frac{k_{y,n}}{k_{c,n}} \sqrt{\frac{\varepsilon_m \varepsilon_{n'}}{ab}} \cos(k_{x,n} x) \text{sen}(k_{y,n} y) \right] \right) \end{aligned} \right] dS = \\
&= \left[\begin{aligned} & \frac{k_{y,k}}{k_{c,k}} \sqrt{\frac{\varepsilon_m \varepsilon_n}{ab}} \left(\mu_{t,yx} Z_n^{-1} \frac{k_{x,n}}{k_{c,n}} \sqrt{\frac{\varepsilon_m \varepsilon_{n'}}{ab}} I_{csx} I_{scy} + \right. \\ & \left. + (\mu_{t,yy} - \mu_0) Z_n^{-1} \frac{k_{y,n}}{k_{c,n}} \sqrt{\frac{\varepsilon_m \varepsilon_{n'}}{ab}} I_{ccx} I_{ssy} \right) + \\ & + \frac{k_{x,k}}{k_{c,k}} \sqrt{\frac{\varepsilon_m \varepsilon_n}{ab}} \left((\mu_{t,xx} - \mu_0) Z_n^{-1} \frac{k_{x,n}}{k_{c,n}} \sqrt{\frac{\varepsilon_m \varepsilon_{n'}}{ab}} I_{ssx} I_{ccy} + \right. \\ & \left. + \mu_{t,xy} Z_n^{-1} \frac{k_{y,n}}{k_{c,n}} \sqrt{\frac{\varepsilon_m \varepsilon_{n'}}{ab}} I_{scx} I_{csy} \right) \end{aligned} \right] = \\
&= \frac{\sqrt{\varepsilon_m \varepsilon_n \varepsilon_m' \varepsilon_n'}}{ab k_{c,k} k_{c,n} Z_n} \left(k_{y,k} k_{x,n} \mu_{t,yx} I_{csx} I_{scy} + k_{y,k} k_{y,n} (\mu_{t,yy} - \mu_0) I_{ccx} I_{ssy} + \right. \\
&\quad \left. + k_{x,k} k_{x,n} (\mu_{t,xx} - \mu_0) I_{ssx} I_{ccy} + k_{x,k} k_{y,n} \mu_{t,xy} I_{scx} I_{csy} \right)
\end{aligned} \tag{7.44}$$

Caso TE-TM

$$\begin{aligned}
 \hat{I}_{\mu_t}^{kn(he)} &= \int_{\Omega_M} \begin{bmatrix} e_{x,k} (\mu_{t,yx} h_{x,n} + (\mu_{t,yy} - \mu_0) h_{y,n}) - \\ - e_{y,k} ((\mu_{t,xx} - \mu_0) h_{x,n} + \mu_{t,xy} h_{y,n}) \end{bmatrix} dS = \\
 &= \int_{\Omega_M} \left\{ \begin{aligned} &\left[-\frac{k_{y,k}}{k_{c,k}} \sqrt{\frac{\epsilon_m \epsilon_n}{ab}} \cos(k_{x,k} x) \text{sen}(k_{y,k} y) \right] \cdot \\ &\left(\mu_{t,yx} \left[-Z_n^{-1} \frac{k_{y,n}}{k_{c,n}} \frac{2}{\sqrt{ab}} \text{sen}(k_{x,n} x) \cos(k_{y,n} y) \right] + \right. \\ &\left. + (\mu_{t,yy} - \mu_0) \left[Z_n^{-1} \frac{k_{x,n}}{k_{c,n}} \frac{2}{\sqrt{ab}} \cos(k_{x,n} x) \text{sen}(k_{y,n} y) \right] \right) \\ &- \left[\frac{k_{x,k}}{k_{c,k}} \sqrt{\frac{\epsilon_m \epsilon_n}{ab}} \text{sen}(k_{x,k} x) \cos(k_{y,k} y) \right] \cdot \\ &\left((\mu_{t,xx} - \mu_0) \left[-Z_n^{-1} \frac{k_{y,n}}{k_{c,n}} \frac{2}{\sqrt{ab}} \text{sen}(k_{x,n} x) \cos(k_{y,n} y) \right] + \right. \\ &\left. + \mu_{t,xy} \left[Z_n^{-1} \frac{k_{x,n}}{k_{c,n}} \frac{2}{\sqrt{ab}} \cos(k_{x,n} x) \text{sen}(k_{y,n} y) \right] \right) \end{aligned} \right\} dS = \\
 &= \left[\begin{aligned} &\frac{k_{y,k}}{k_{c,k}} \sqrt{\frac{\epsilon_m \epsilon_n}{ab}} \left(\mu_{t,yx} Z_n^{-1} \frac{k_{y,n}}{k_{c,n}} \frac{2}{\sqrt{ab}} I_{cse} I_{scy} - \right. \\ &\left. - (\mu_{t,yy} - \mu_0) Z_n^{-1} \frac{k_{x,n}}{k_{c,n}} \frac{2}{\sqrt{ab}} I_{ccx} I_{ssy} \right) + \\ &+ \frac{k_{x,k}}{k_{c,k}} \sqrt{\frac{\epsilon_m \epsilon_n}{ab}} \left((\mu_{t,xx} - \mu_0) Z_n^{-1} \frac{k_{y,n}}{k_{c,n}} \frac{2}{\sqrt{ab}} I_{ssx} I_{ccy} - \right. \\ &\left. - \mu_{t,xy} Z_n^{-1} \frac{k_{x,n}}{k_{c,n}} \frac{2}{\sqrt{ab}} I_{scx} I_{csy} \right) \end{aligned} \right] = \\
 &= \frac{2\sqrt{\epsilon_m \epsilon_n}}{abk_{c,k} k_{c,n} Z_n} \left(k_{y,k} k_{y,n} \mu_{t,yx} I_{cse} I_{scy} - k_{y,k} k_{x,n} (\mu_{t,yy} - \mu_0) I_{ccx} I_{ssy} + \right. \\
 &\quad \left. + k_{x,k} k_{y,n} (\mu_{t,xx} - \mu_0) I_{ssx} I_{ccy} - k_{x,k} k_{x,n} \mu_{t,xy} I_{scx} I_{csy} \right)
 \end{aligned} \tag{7.45}$$

Caso TM-TE

$$\begin{aligned}
 \hat{I}_{\mu_t}^{kn(eh)} &= \int_{\Omega} \left[e_{x,k} \left(\mu_{t,yx} h_{x,n} + (\mu_{t,yy} - \mu_0) h_{y,n} \right) - \right. \\
 &\quad \left. - e_{y,k} \left((\mu_{t,xx} - \mu_0) h_{x,n} + \mu_{t,xy} h_{y,n} \right) \right] dS = \\
 &= \int_{\Omega} \left\{ \begin{aligned} &\left[\frac{k_{x,k}}{k_{c,k}} \frac{2}{\sqrt{ab}} \cos(k_{x,k} x) \text{sen}(k_{y,k} y) \right] \cdot \\ &\left(\mu_{t,yx} \left[-Z_n^{-1} \frac{k_{x,n}}{k_{c,n}} \sqrt{\frac{\epsilon_{m'} \epsilon_{n'}}{ab}} \text{sen}(k_{x,n} x) \cos(k_{y,n} y) \right] + \right. \\ &\quad \left. + (\mu_{t,yy} - \mu_0) \left[-Z_n^{-1} \frac{k_{y,n}}{k_{c,n}} \sqrt{\frac{\epsilon_{m'} \epsilon_{n'}}{ab}} \cos(k_{x,n} x) \text{sen}(k_{y,n} y) \right] \right) \\ &- \left[\frac{k_{y,k}}{k_{c,k}} \frac{2}{\sqrt{ab}} \text{sen}(k_{x,k} x) \cos(k_{y,k} y) \right] \cdot \\ &\left((\mu_{t,xx} - \mu_0) \left[-Z_n^{-1} \frac{k_{x,n}}{k_{c,n}} \sqrt{\frac{\epsilon_{m'} \epsilon_{n'}}{ab}} \text{sen}(k_{x,n} x) \cos(k_{y,n} y) \right] + \right) \\ &\quad \left. + \mu_{t,xy} \left[-Z_n^{-1} \frac{k_{y,n}}{k_{c,n}} \sqrt{\frac{\epsilon_{m'} \epsilon_{n'}}{ab}} \cos(k_{x,n} x) \text{sen}(k_{y,n} y) \right] \right) \end{aligned} \right\} dS = \\
 &= \left[\frac{k_{x,k}}{k_{c,k}} \frac{2}{\sqrt{ab}} \left(-\mu_{t,yx} Z_n^{-1} \frac{k_{x,n}}{k_{c,n}} \sqrt{\frac{\epsilon_{m'} \epsilon_{n'}}{ab}} I_{csx} I_{scy} - \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - (\mu_{t,yy} - \mu_0) Z_n^{-1} \frac{k_{y,n}}{k_{c,n}} \sqrt{\frac{\epsilon_{m'} \epsilon_{n'}}{ab}} I_{ccx} I_{ssy} \right) + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{k_{y,k}}{k_{c,k}} \frac{2}{\sqrt{ab}} \left(+ (\mu_{t,xx} - \mu_0) Z_n^{-1} \frac{k_{x,n}}{k_{c,n}} \sqrt{\frac{\epsilon_{m'} \epsilon_{n'}}{ab}} I_{ssx} I_{ccy} + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \mu_{t,xy} Z_n^{-1} \frac{k_{y,n}}{k_{c,n}} \sqrt{\frac{\epsilon_{m'} \epsilon_{n'}}{ab}} I_{scx} I_{csy} \right) \right] = \\
 &= \frac{2\sqrt{\epsilon_{m'} \epsilon_{n'}}}{ab k_{c,k} k_{c,n} Z_n} \left(-k_{x,k} k_{x,n} \mu_{t,yx} I_{csx} I_{scy} - k_{x,k} k_{y,n} (\mu_{t,yy} - \mu_0) I_{ccx} I_{ssy} + \right. \\
 &\quad \left. + k_{y,k} k_{x,n} (\mu_{t,xx} - \mu_0) I_{ssx} I_{ccy} + k_{y,k} k_{y,n} \mu_{t,xy} I_{scx} I_{csy} \right)
 \end{aligned} \tag{7.46}$$

Caso TM-TM

$$\begin{aligned}
 \hat{I}_{\mu}^{kn(he)} &= \int_{\Omega} \left[e_{x,k} (\mu_{t,yx} h_{x,n} + (\mu_{t,yy} - \mu_0) h_{y,n}) - \right. \\
 &\quad \left. - e_{y,k} ((\mu_{t,xx} - \mu_0) h_{x,n} + \mu_{t,xy} h_{y,n}) \right] dS = \\
 &= \int_{\Omega} \left\{ \begin{aligned} &\left[\frac{k_{x,k}}{k_{c,k}} \frac{2}{\sqrt{ab}} \cos(k_{x,k} x) \text{sen}(k_{y,k} y) \right] \cdot \\ &\left(\mu_{t,yx} \left[-Z_n^{-1} \frac{k_{y,n}}{k_{c,n}} \frac{2}{\sqrt{ab}} \text{sen}(k_{x,n} x) \cos(k_{y,n} y) \right] + \right. \\ &\quad \left. + (\mu_{t,yy} - \mu_0) \left[Z_n^{-1} \frac{k_{x,n}}{k_{c,n}} \frac{2}{\sqrt{ab}} \cos(k_{x,n} x) \text{sen}(k_{y,n} y) \right] \right) \\ &- \left[\frac{k_{y,k}}{k_{c,k}} \frac{2}{\sqrt{ab}} \text{sen}(k_{x,k} x) \cos(k_{y,k} y) \right] \cdot \\ &\left((\mu_{t,xx} - \mu_0) \left[-Z_n^{-1} \frac{k_{y,n}}{k_{c,n}} \frac{2}{\sqrt{ab}} \text{sen}(k_{x,n} x) \cos(k_{y,n} y) \right] + \right. \\ &\quad \left. + \mu_{t,xy} \left[Z_n^{-1} \frac{k_{x,n}}{k_{c,n}} \frac{2}{\sqrt{ab}} \cos(k_{x,n} x) \text{sen}(k_{y,n} y) \right] \right) \end{aligned} \right\} dS = \\
 &= \left[\begin{aligned} &\frac{k_{x,k}}{k_{c,k}} \frac{2}{\sqrt{ab}} \left(-\mu_{t,yx} Z_n^{-1} \frac{k_{y,n}}{k_{c,n}} \frac{2}{\sqrt{ab}} I_{csx} I_{scy} + \right. \\ &\quad \left. + (\mu_{t,yy} - \mu_0) Z_n^{-1} \frac{k_{x,n}}{k_{c,n}} \frac{2}{\sqrt{ab}} I_{ccx} I_{ssy} \right) + \\ &+ \frac{k_{y,k}}{k_{c,k}} \frac{2}{\sqrt{ab}} \left((\mu_{t,xx} - \mu_0) Z_n^{-1} \frac{k_{y,n}}{k_{c,n}} \frac{2}{\sqrt{ab}} I_{ssx} I_{ccy} - \right. \\ &\quad \left. - \mu_{t,xy} Z_n^{-1} \frac{k_{x,n}}{k_{c,n}} \frac{2}{\sqrt{ab}} I_{scx} I_{csy} \right) \end{aligned} \right] = \tag{7.47} \\
 &= \frac{4}{abk_{c,k} k_{c,n} Z_n} \left(-k_{x,k} k_{y,n} \mu_{t,yx} I_{csx} I_{scy} + k_{x,k} k_{x,n} (\mu_{t,yy} - \mu_0) I_{ccx} I_{ssy} + \right. \\
 &\quad \left. + k_{y,k} k_{y,n} (\mu_{t,xx} - \mu_0) I_{ssx} I_{ccy} - k_{y,k} k_{x,n} \mu_{t,xy} I_{scx} I_{csy} \right)
 \end{aligned}$$

• **Matriz** $M_{\lambda_b}^{kn}$

$$\begin{aligned}
 M_{\lambda_b}^{kn} &= -Z_n \gamma_n \int_{\Omega_M} \mathbf{e}_k \cdot \lambda_b h_{z,n} \times \hat{\mathbf{z}} dS = \\
 &= -Z_n \gamma_n \int_{\Omega_M} \mathbf{e}_k \cdot (\lambda_{b,x} \hat{\mathbf{x}} + \lambda_{b,y} \hat{\mathbf{y}}) h_{z,n} \times \hat{\mathbf{z}} dS = \\
 &= -Z_n \gamma_n \int_{\Omega_M} \mathbf{e}_k \cdot (\lambda_{b,y} \hat{\mathbf{x}} - \lambda_{b,x} \hat{\mathbf{y}}) h_{z,n} dS = \\
 &= -Z_n \gamma_n \int_{\Omega_M} (e_{x,k} \lambda_{b,y} - e_{y,k} \lambda_{b,x}) h_{z,n} dS
 \end{aligned} \tag{7.48}$$

Caso TE-TE

$$\begin{aligned}
 M_{\lambda_b}^{kn(hh)} &= -Z_n \gamma_n \int_{\Omega_M} \left(e_{x,k} \lambda_{b,y} - e_{y,k} \lambda_{b,x} \right) h_{z,n} dS = \\
 &= -Z_n \gamma_n \int_{\Omega_M} \left\{ \begin{aligned} &\left[-\frac{k_{y,k}}{k_{c,k}} \sqrt{\frac{\varepsilon_m \varepsilon_n}{ab}} \cos(k_{x,k} x) \operatorname{sen}(k_{y,k} y) \right] \lambda_{b,y} - \\ &\left[-\frac{k_{x,k}}{k_{c,k}} \sqrt{\frac{\varepsilon_m \varepsilon_n}{ab}} \operatorname{sen}(k_{x,k} x) \cos(k_{y,k} y) \right] \lambda_{b,x} \\ &\cdot \left[-\frac{k_{c,n}}{\gamma_n} Z_n^{-1} \sqrt{\frac{\varepsilon_{m'} \varepsilon_{n'}}{ab}} \cos(k_{x,n} x) \cos(k_{y,n} y) \right] \end{aligned} \right\} dS = \\
 &= -Z_n \gamma_n \left[\lambda_{b,y} \frac{k_{c,n}}{\gamma_n} Z_n^{-1} \sqrt{\frac{\varepsilon_{m'} \varepsilon_{n'}}{ab}} \left(\frac{k_{y,k}}{k_{c,k}} \sqrt{\frac{\varepsilon_m \varepsilon_n}{ab}} I_{ccx} I_{scy} + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \lambda_{b,x} \frac{k_{x,k}}{k_{c,k}} \sqrt{\frac{\varepsilon_m \varepsilon_n}{ab}} I_{scx} I_{ccy} \right) \right] = \\
 &= -\frac{k_{c,n}}{k_{c,k}} \frac{\sqrt{\varepsilon_{m'} \varepsilon_{n'} \varepsilon_m \varepsilon_n}}{ab} \left(\lambda_{b,y} k_{y,k} I_{ccx} I_{scy} + \lambda_{b,x} k_{x,k} I_{scx} I_{ccy} \right)
 \end{aligned} \tag{7.49}$$

Caso TM-TE

$$\begin{aligned}
 M_{\lambda_b}^{kn(he)} &= -Z_n \gamma_n \int_{\Omega_M} \left(e_{x,k} \lambda_{b,y} - e_{y,k} \lambda_{b,x} \right) h_{z,n} dS = \\
 &= -Z_n \gamma_n \int_{\Omega_M} \left\{ \begin{aligned} &\left[\frac{k_{x,k}}{k_{c,k}} \frac{2}{\sqrt{ab}} \cos(k_{x,k} x) \operatorname{sen}(k_{y,k} y) \right] \lambda_{b,y} - \\ &\left[\frac{k_{y,k}}{k_{c,k}} \frac{2}{\sqrt{ab}} \operatorname{sen}(k_{x,k} x) \cos(k_{y,k} y) \right] \lambda_{b,x} \\ &\cdot \left[-\frac{k_{c,n}}{\gamma_n} Z_n^{-1} \sqrt{\frac{\varepsilon_{m'} \varepsilon_{n'}}{ab}} \cos(k_{x,n} x) \cos(k_{y,n} y) \right] \end{aligned} \right\} dS = \\
 &= Z_n \gamma_n \left[\frac{k_{c,n}}{\gamma_n} Z_n^{-1} \sqrt{\frac{\varepsilon_{m'} \varepsilon_{n'}}{ab}} \left(\lambda_{b,y} \frac{k_{x,k}}{k_{c,k}} \frac{2}{\sqrt{ab}} I_{ccx} I_{scy} - \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \lambda_{b,x} \frac{k_{y,k}}{k_{c,k}} \frac{2}{\sqrt{ab}} I_{scx} I_{ccy} \right) \right] = \\
 &= \frac{k_{c,n}}{k_{c,k}} \frac{2\sqrt{\varepsilon_{m'} \varepsilon_{n'}}}{ab} \left(\lambda_{b,y} k_{x,k} I_{ccx} I_{scy} - \lambda_{b,x} k_{y,k} I_{scx} I_{ccy} \right)
 \end{aligned} \tag{7.50}$$

Modelado con técnicas modales de estructuras de microondas basadas en guías N-furcadas arbitrariamente rellenas con materiales

• **Matriz** $M_{\eta_i}^{kn}$

$$\begin{aligned}
M_{\eta_i}^{kn} &= -j\omega \int_{\Omega_M} \mathbf{e}_k \cdot \eta_t \mathbf{e}_n \times \hat{\mathbf{z}} dS = \\
&= -j\omega \int_{\Omega_M} \mathbf{e}_k \cdot \left[(\eta_{t,yx} e_{x,n} + \eta_{t,yy} e_{y,n}) \hat{\mathbf{x}} - (\eta_{t,xx} e_{x,n} + \eta_{t,xy} e_{y,n}) \hat{\mathbf{y}} \right] dS = \\
&= -j\omega \int_{\Omega_M} \left[e_{k,x} (\eta_{t,yx} e_{x,n} + \eta_{t,yy} e_{y,n}) - e_{k,y} (\eta_{t,xx} e_{x,n} + \eta_{t,xy} e_{y,n}) \right] dS
\end{aligned} \tag{7.51}$$

Esta matriz tiene valores no nulos para los cuatro casos posibles de acoplos TE y TM.

Caso TE-TE

$$\begin{aligned}
M_{\eta_i}^{kn(hh)} &= -j\omega \int_{\Omega_M} \left[e_{k,x} (\eta_{t,yx} e_{x,n} + \eta_{t,yy} e_{y,n}) - e_{k,y} (\eta_{t,xx} e_{x,n} + \eta_{t,xy} e_{y,n}) \right] dS = \\
&= -j\omega \int_{\Omega_M} \left\{ \begin{aligned} &\left[-\frac{k_{y,k}}{k_{c,k}} \sqrt{\frac{\varepsilon_m \varepsilon_n}{ab}} \cos(k_{x,k} x) \text{sen}(k_{y,k} y) \right] \cdot \\ &\left(\eta_{t,yx} \left[-\frac{k_{y,n}}{k_{c,n}} \sqrt{\frac{\varepsilon_{m'} \varepsilon_{n'}}{ab}} \cos(k_{x,n} x) \text{sen}(k_{y,n} y) \right] + \right. \\ &\left. + \eta_{t,yy} \left[\frac{k_{x,n}}{k_{c,n}} \sqrt{\frac{\varepsilon_{m'} \varepsilon_{n'}}{ab}} \text{sen}(k_{x,n} x) \cos(k_{y,n} y) \right] \right) \\ &- \left[\frac{k_{x,k}}{k_{c,k}} \sqrt{\frac{\varepsilon_m \varepsilon_n}{ab}} \text{sen}(k_{x,k} x) \cos(k_{y,k} y) \right] \cdot \\ &\left(\eta_{t,xx} \left[-\frac{k_{y,n}}{k_{c,n}} \sqrt{\frac{\varepsilon_{m'} \varepsilon_{n'}}{ab}} \cos(k_{x,n} x) \text{sen}(k_{y,n} y) \right] + \right. \\ &\left. + \eta_{t,xy} \left[\frac{k_{x,n}}{k_{c,n}} \sqrt{\frac{\varepsilon_{m'} \varepsilon_{n'}}{ab}} \text{sen}(k_{x,n} x) \cos(k_{y,n} y) \right] \right) \end{aligned} \right\} dS = \\
&= -j\omega \left[\frac{k_{y,k}}{k_{c,k}} \sqrt{\frac{\varepsilon_m \varepsilon_n}{ab}} \left(\eta_{t,yx} \frac{k_{y,n}}{k_{c,n}} \sqrt{\frac{\varepsilon_{m'} \varepsilon_{n'}}{ab}} I_{ccx} I_{ssy} - \eta_{t,yy} \frac{k_{x,n}}{k_{c,n}} \sqrt{\frac{\varepsilon_{m'} \varepsilon_{n'}}{ab}} I_{csx} I_{scy} \right) + \right. \\
&\quad \left. \frac{k_{x,k}}{k_{c,k}} \sqrt{\frac{\varepsilon_m \varepsilon_n}{ab}} \left(\eta_{t,xx} \frac{k_{y,n}}{k_{c,n}} \sqrt{\frac{\varepsilon_{m'} \varepsilon_{n'}}{ab}} I_{scx} I_{csy} - \eta_{t,xy} \frac{k_{x,n}}{k_{c,n}} \sqrt{\frac{\varepsilon_{m'} \varepsilon_{n'}}{ab}} I_{ssx} I_{ccy} \right) \right] = \tag{7.52} \\
&= -j\omega \frac{\sqrt{\varepsilon_m \varepsilon_n \varepsilon_{m'} \varepsilon_{n'}}}{ab k_{c,k} k_{c,n}} \left[k_{y,k} \left(\eta_{t,yx} k_{y,n} I_{ccx} I_{ssy} - \eta_{t,yy} k_{x,n} I_{csx} I_{scy} \right) + \right. \\
&\quad \left. + k_{x,k} \left(\eta_{t,xx} k_{y,n} I_{scx} I_{csy} - \eta_{t,xy} k_{x,n} I_{ssx} I_{ccy} \right) \right]
\end{aligned}$$

Caso TE-TM

$$\begin{aligned}
M_{\eta_i}^{kn(he)} &= -j\omega \int_{\Omega_M} \left[e_{k,x} (\eta_{t,yx} e_{x,n} + \eta_{t,yy} e_{y,n}) - e_{k,y} (\eta_{t,xx} e_{x,n} + \eta_{t,xy} e_{y,n}) \right] dS = \\
&= -j\omega \int_{\Omega_M} \left\{ \begin{aligned} &\left[-\frac{k_{y,k}}{k_{c,k}} \sqrt{\frac{\varepsilon_m \varepsilon_n}{ab}} \cos(k_{x,k} x) \text{sen}(k_{y,k} y) \right] \cdot \\ &\left(\eta_{t,yx} \left[\frac{k_{x,n}}{k_{c,n}} \frac{2}{\sqrt{ab}} \cos(k_{x,n} x) \text{sen}(k_{y,n} y) \right] + \right. \\ &\left. + \eta_{t,yy} \left[\frac{k_{y,n}}{k_{c,n}} \frac{2}{\sqrt{ab}} \text{sen}(k_{x,n} x) \cos(k_{y,n} y) \right] \right) \\ &- \left[\frac{k_{x,k}}{k_{c,k}} \sqrt{\frac{\varepsilon_m \varepsilon_n}{ab}} \text{sen}(k_{x,k} x) \cos(k_{y,k} y) \right] \cdot \\ &\left(\eta_{t,xx} \left[\frac{k_{x,n}}{k_{c,n}} \frac{2}{\sqrt{ab}} \cos(k_{x,n} x) \text{sen}(k_{y,n} y) \right] + \right. \\ &\left. + \eta_{t,xy} \left[\frac{k_{y,n}}{k_{c,n}} \frac{2}{\sqrt{ab}} \text{sen}(k_{x,n} x) \cos(k_{y,n} y) \right] \right) \end{aligned} \right\} dS = \\
&= -j\omega \left[\begin{aligned} &\frac{k_{y,k}}{k_{c,k}} \sqrt{\frac{\varepsilon_m \varepsilon_n}{ab}} \left(-\eta_{t,yx} \frac{k_{x,n}}{k_{c,n}} \frac{2}{\sqrt{ab}} I_{ccx} I_{ssy} - \eta_{t,yy} \frac{k_{y,n}}{k_{c,n}} \frac{2}{\sqrt{ab}} I_{csx} I_{scy} \right) + \\ &\frac{k_{x,k}}{k_{c,k}} \sqrt{\frac{\varepsilon_m \varepsilon_n}{ab}} \left(-\eta_{t,xx} \frac{k_{x,n}}{k_{c,n}} \frac{2}{\sqrt{ab}} I_{scx} I_{csy} - \eta_{t,xy} \frac{k_{y,n}}{k_{c,n}} \frac{2}{\sqrt{ab}} I_{ssx} I_{ccy} \right) \end{aligned} \right] = \quad (7.53) \\
&= j\omega \frac{2\sqrt{\varepsilon_m \varepsilon_n}}{ab k_{c,k} k_{c,n}} \left[\begin{aligned} &k_{y,k} \left(\eta_{t,yx} k_{x,n} I_{ccx} I_{ssy} + \eta_{t,yy} k_{y,n} I_{csx} I_{scy} \right) + \\ &k_{x,k} \left(\eta_{t,xx} k_{x,n} I_{scx} I_{csy} + \eta_{t,xy} k_{y,n} I_{ssx} I_{ccy} \right) \end{aligned} \right]
\end{aligned}$$

Caso TM-TE

$$\begin{aligned}
 M_{\eta_t}^{kn(eh)} &= -j\omega \int_{\Omega_M} \left[e_{k,x} (\eta_{t,yx} e_{x,n} + \eta_{t,yy} e_{y,n}) - e_{k,y} (\eta_{t,xx} e_{x,n} + \eta_{t,xy} e_{y,n}) \right] dS = \\
 &= -j\omega \int_{\Omega_M} \left\{ \begin{aligned} &\left[\frac{k_{x,k}}{k_{c,k}} \frac{2}{\sqrt{ab}} \cos(k_{x,k} x) \text{sen}(k_{y,k} y) \right] \cdot \\ &\left(\eta_{t,yx} \left[-\frac{k_{y,n}}{k_{c,n}} \sqrt{\frac{\epsilon_m' \epsilon_n'}{ab}} \cos(k_{x,n} x) \text{sen}(k_{y,n} y) \right] + \right. \\ &\left. + \eta_{t,yy} \left[\frac{k_{x,n}}{k_{c,n}} \sqrt{\frac{\epsilon_m' \epsilon_n'}{ab}} \text{sen}(k_{x,n} x) \cos(k_{y,n} y) \right] \right) \\ &- \left[\frac{k_{y,k}}{k_{c,k}} \frac{2}{\sqrt{ab}} \text{sen}(k_{x,k} x) \cos(k_{y,k} y) \right] \cdot \\ &\left(\eta_{t,xx} \left[-\frac{k_{y,n}}{k_{c,n}} \sqrt{\frac{\epsilon_m' \epsilon_n'}{ab}} \cos(k_{x,n} x) \text{sen}(k_{y,n} y) \right] + \right. \\ &\left. + \eta_{t,xy} \left[\frac{k_{x,n}}{k_{c,n}} \sqrt{\frac{\epsilon_m' \epsilon_n'}{ab}} \text{sen}(k_{x,n} x) \cos(k_{y,n} y) \right] \right) \end{aligned} \right\} dS = \\
 &= -j\omega \left[\frac{k_{x,k}}{k_{c,k}} \frac{2}{\sqrt{ab}} \left(-\eta_{t,yx} \frac{k_{y,n}}{k_{c,n}} \sqrt{\frac{\epsilon_m' \epsilon_n'}{ab}} I_{ccx} I_{ssy} + \eta_{t,yy} \frac{k_{x,n}}{k_{c,n}} \sqrt{\frac{\epsilon_m' \epsilon_n'}{ab}} I_{csx} I_{scy} \right) + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{k_{y,k}}{k_{c,k}} \frac{2}{\sqrt{ab}} \left(\eta_{t,xx} \frac{k_{y,n}}{k_{c,n}} \sqrt{\frac{\epsilon_m' \epsilon_n'}{ab}} I_{scx} I_{csy} - \eta_{t,xy} \frac{k_{x,n}}{k_{c,n}} \sqrt{\frac{\epsilon_m' \epsilon_n'}{ab}} I_{ssx} I_{ccy} \right) \right] = (7.54) \\
 &= -j\omega \frac{2\sqrt{\epsilon_m' \epsilon_n'}}{abk_{c,k}k_{c,n}} \left[k_{x,k} \left(-\eta_{t,yx} k_{y,n} I_{ccx} I_{ssy} + \eta_{t,yy} k_{x,n} I_{csx} I_{scy} \right) + \right. \\
 &\quad \left. + k_{y,k} \left(\eta_{t,xx} k_{y,n} I_{scx} I_{csy} - \eta_{t,xy} k_{x,n} I_{ssx} I_{ccy} \right) \right]
 \end{aligned}$$

Caso TM-TM

$$\begin{aligned}
 M_{\eta_t}^{kn(ee)} &= -j\omega \int_{\Omega_M} \left[e_{k,x} (\eta_{t,yx} e_{x,n} + \eta_{t,yy} e_{y,n}) - e_{k,y} (\eta_{t,xx} e_{x,n} + \eta_{t,xy} e_{y,n}) \right] dS = \\
 &= -j\omega \int_{\Omega_M} \left\{ \begin{aligned} &\left[\frac{k_{x,k}}{k_{c,k}} \frac{2}{\sqrt{ab}} \cos(k_{x,k} x) \text{sen}(k_{y,k} y) \right] \cdot \\ &\left(\eta_{t,yx} \left[\frac{k_{x,n}}{k_{c,n}} \frac{2}{\sqrt{ab}} \cos(k_{x,n} x) \text{sen}(k_{y,n} y) \right] + \right. \\ &\left. + \eta_{t,yy} \left[\frac{k_{y,n}}{k_{c,n}} \frac{2}{\sqrt{ab}} \text{sen}(k_{x,n} x) \cos(k_{y,n} y) \right] \right) \\ &- \left[\frac{k_{y,k}}{k_{c,k}} \frac{2}{\sqrt{ab}} \text{sen}(k_{x,k} x) \cos(k_{y,k} y) \right] \cdot \\ &\left(\eta_{t,xx} \left[\frac{k_{x,n}}{k_{c,n}} \frac{2}{\sqrt{ab}} \cos(k_{x,n} x) \text{sen}(k_{y,n} y) \right] + \right. \\ &\left. + \eta_{t,xy} \left[\frac{k_{y,n}}{k_{c,n}} \frac{2}{\sqrt{ab}} \text{sen}(k_{x,n} x) \cos(k_{y,n} y) \right] \right) \end{aligned} \right\} dS = \\
 &= -j\omega \left[\frac{k_{x,k}}{k_{c,k}} \frac{2}{\sqrt{ab}} \left(\eta_{t,yx} \frac{k_{x,n}}{k_{c,n}} \frac{2}{\sqrt{ab}} I_{ccx} I_{ssy} + \eta_{t,yy} \frac{k_{y,n}}{k_{c,n}} \frac{2}{\sqrt{ab}} I_{csx} I_{scy} \right) + \right. \\
 &\quad \left. \frac{k_{y,k}}{k_{c,k}} \frac{2}{\sqrt{ab}} \left(-\eta_{t,xx} \frac{k_{x,n}}{k_{c,n}} \frac{2}{\sqrt{ab}} I_{scx} I_{csy} - \eta_{t,xy} \frac{k_{y,n}}{k_{c,n}} \frac{2}{\sqrt{ab}} I_{ssx} I_{ccy} \right) \right] = \tag{7.55} \\
 &= -j\omega \frac{4}{abk_{c,k}k_{c,n}} \left[k_{x,k} \left(\eta_{t,yx} k_{x,n} I_{ccx} I_{ssy} + \eta_{t,yy} k_{y,n} I_{csx} I_{scy} \right) - \right. \\
 &\quad \left. - k_{y,k} \left(\eta_{t,xx} k_{x,n} I_{scx} I_{csy} + \eta_{t,xy} k_{y,n} I_{ssx} I_{ccy} \right) \right]
 \end{aligned}$$

• **Matriz** $M_{\chi_{tz}}^{kn}$

$$\begin{aligned}
 M_{\chi_{tz}}^{kn} &= -Z_n^{-1} \gamma_n \int_{\Omega_M} \mathbf{e}_k \cdot \chi_{tz} \mathbf{e}_{z,n} \times \hat{\mathbf{z}} dS = \\
 &= -Z_n^{-1} \gamma_n \int_{\Omega_M} \mathbf{e}_k \cdot (\chi_{tz,x} \hat{\mathbf{x}} + \chi_{tz,y} \hat{\mathbf{y}}) \mathbf{e}_{z,n} \times \hat{\mathbf{z}} dS = \\
 &= -Z_n^{-1} \gamma_n \int_{\Omega_M} \mathbf{e}_k \cdot (\chi_{tz,y} \hat{\mathbf{x}} - \chi_{tz,x} \hat{\mathbf{y}}) \mathbf{e}_{z,n} dS = \\
 &= -Z_n^{-1} \gamma_n \int_{\Omega_M} \left(e_{x,k} \chi_{tz,y} - e_{y,k} \chi_{tz,x} \right) \mathbf{e}_{z,n} dS
 \end{aligned} \tag{7.56}$$

Esta matriz tiene valores no nulos para los casos TE-TM y TM-TM

Caso TE-TM

$$\begin{aligned}
 M_{\chi_{tz}}^{kn(he)} &= -Z_n^{-1} \gamma_n \int_{\Omega_M} \left(e_{x,k} \chi_{tz,y} - e_{y,k} \chi_{tz,x} \right) e_{z,n} dS = \\
 &= -Z_n^{-1} \gamma_n \int_{\Omega_M} \left\{ \begin{aligned} &\left(\left[-\frac{k_{y,k}}{k_{c,k}} \sqrt{\frac{\epsilon_m \epsilon_n}{ab}} \cos(k_{x,k} x) \text{sen}(k_{y,k} y) \right] \chi_{tz,y} - \right. \\ &\left. - \left[\frac{k_{x,k}}{k_{c,k}} \sqrt{\frac{\epsilon_m \epsilon_n}{ab}} \text{sen}(k_{x,k} x) \cos(k_{y,k} y) \right] \chi_{tz,x} \right) \\ &\cdot \left(-\frac{k_{c,n}}{\gamma_n} \frac{2}{\sqrt{ab}} \text{sen}(k_{x,n} x) \text{sen}(k_{y,n} y) \right) \end{aligned} \right\} dS = \\
 &= -Z_n^{-1} \gamma_n \left[\chi_{tz,y} \frac{k_{c,n}}{\gamma_n} \frac{2}{\sqrt{ab}} \left(\frac{k_{y,k}}{k_{c,k}} \sqrt{\frac{\epsilon_m \epsilon_n}{ab}} I_{csx} I_{ssy} + \chi_{tz,x} \frac{k_{x,k}}{k_{c,k}} \sqrt{\frac{\epsilon_m \epsilon_n}{ab}} I_{ssx} I_{csy} \right) \right] = \\
 &= -Z_n^{-1} \frac{2\sqrt{\epsilon_m \epsilon_n}}{ab} \frac{k_{c,n}}{k_{c,k}} \left(\chi_{tz,y} k_{y,k} I_{csx} I_{ssy} + \chi_{tz,x} k_{x,k} I_{ssx} I_{csy} \right)
 \end{aligned} \tag{7.57}$$

Caso TM-TM

$$\begin{aligned}
 M_{\chi_{tz}}^{kn(he)} &= -Z_n^{-1} \gamma_n \int_{\Omega_M} \left(e_{x,k} \chi_{tz,y} - e_{y,k} \chi_{tz,x} \right) e_{z,n} dS = \\
 &= -Z_n^{-1} \gamma_n \int_{\Omega_M} \left\{ \begin{aligned} &\left(\left[\frac{k_{x,k}}{k_{c,k}} \frac{2}{\sqrt{ab}} \cos(k_{x,k} x) \text{sen}(k_{y,k} y) \right] \chi_{tz,y} - \right. \\ &\left. - \left[\frac{k_{y,k}}{k_{c,k}} \frac{2}{\sqrt{ab}} \text{sen}(k_{x,k} x) \cos(k_{y,k} y) \right] \chi_{tz,x} \right) \\ &\cdot \left(-\frac{k_{c,n}}{\gamma_n} \frac{2}{\sqrt{ab}} \text{sen}(k_{x,n} x) \text{sen}(k_{y,n} y) \right) \end{aligned} \right\} dS = \\
 &= -Z_n^{-1} \gamma_n \left[\frac{k_{c,n}}{\gamma_n} \frac{2}{\sqrt{ab}} \left(-\chi_{tz,y} \frac{k_{x,k}}{k_{c,k}} \frac{2}{\sqrt{ab}} I_{csx} I_{ssy} + \chi_{tz,x} \frac{k_{y,k}}{k_{c,k}} \frac{2}{\sqrt{ab}} I_{ssx} I_{csy} \right) \right] = \\
 &= -Z_n^{-1} \frac{4}{ab} \frac{k_{c,n}}{k_{c,k}} \left(-\chi_{tz,y} k_{x,k} I_{csx} I_{ssy} + \chi_{tz,x} k_{y,k} I_{ssx} I_{csy} \right)
 \end{aligned} \tag{7.58}$$

• **Matriz** $M_{\lambda_h}^{kn}$

$$\begin{aligned} M_{\lambda_h}^{kn} &= -\gamma_k Z_k^2 \int_{\Omega_M} \lambda_h \mathbf{h}_n \mathbf{h}_{z,k} dS = \\ &= -\gamma_k Z_k^2 \int_{\Omega_M} (\lambda_{h,x} h_{x,n} + \lambda_{h,y} h_{y,n}) \mathbf{h}_{z,k} dS \end{aligned} \quad (7.59)$$

Esta matriz tiene valores no nulos para el caso TE-TE y TE-TM.

Caso TE-TE

$$\begin{aligned} M_{\lambda_h}^{kn(hh)} &= -\gamma_k Z_k^2 \int_{\Omega_M} (\lambda_{h,x} h_{x,n} + \lambda_{h,y} h_{y,n}) \mathbf{h}_{z,k} dS = \\ &= -\gamma_k Z_k^2 \int_{\Omega_M} \left\{ \begin{aligned} &\left(\lambda_{h,x} \left[-Z_n^{-1} \frac{k_{x,n}}{k_{c,n}} \sqrt{\frac{\epsilon_m \epsilon_n}{ab}} \operatorname{sen}(k_{x,n} x) \cos(k_{y,n} y) \right] + \right. \\ &\left. + \lambda_{h,y} \left[-Z_n^{-1} \frac{k_{y,n}}{k_{c,n}} \sqrt{\frac{\epsilon_m \epsilon_n}{ab}} \cos(k_{x,n} x) \operatorname{sen}(k_{y,n} y) \right] \right) \\ &\cdot \left[-\frac{k_{c,k}}{\gamma_k} Z_k^{-1} \sqrt{\frac{\epsilon_m \epsilon_n}{ab}} \cos(k_{x,k} x) \cos(k_{y,k} y) \right] \end{aligned} \right\} dS = \\ &= -\gamma_k Z_k^2 \left[\frac{k_{c,k}}{\gamma_k} Z_k^{-1} \sqrt{\frac{\epsilon_m \epsilon_n}{ab}} \left(\begin{aligned} &Z_n^{-1} \frac{k_{x,n}}{k_{c,n}} \sqrt{\frac{\epsilon_m \epsilon_n}{ab}} \lambda_{h,x} I_{csx} I_{ccy} + \\ &+ Z_n^{-1} \frac{k_{y,n}}{k_{c,n}} \sqrt{\frac{\epsilon_m \epsilon_n}{ab}} \lambda_{h,y} I_{ccx} I_{csy} \end{aligned} \right) \right] = \\ &= -Z_k Z_n^{-1} \frac{k_{c,k}}{k_{c,n}} \frac{\sqrt{\epsilon_m \epsilon_n \epsilon_m \epsilon_n}}{ab} (k_{x,n} \lambda_{h,x} I_{csx} I_{ccy} + k_{y,n} \lambda_{h,y} I_{ccx} I_{csy}) \end{aligned} \quad (7.60)$$

Caso TE-TM

$$\begin{aligned}
 M_{\lambda_n}^{kn(he)} &= -\gamma_k Z_k^2 \int_{\Omega_M} \left(\lambda_{h,x} h_{x,n} + \lambda_{h,y} h_{y,n} \right) h_{z,k} dS = \\
 &= -\gamma_k Z_k^2 \int_{\Omega_M} \left\{ \begin{aligned} &\left(\lambda_{h,x} \left[-Z_n^{-1} \frac{k_{y,n}}{k_{c,n}} \frac{2}{\sqrt{ab}} \operatorname{sen}(k_{x,n}x) \cos(k_{y,n}y) \right] + \right. \\ &\left. + \lambda_{h,y} \left[Z_n^{-1} \frac{k_{x,n}}{k_{c,n}} \frac{2}{\sqrt{ab}} \cos(k_{x,n}x) \operatorname{sen}(k_{y,n}y) \right] \right) \\ &\cdot \left[-\frac{k_{c,k}}{\gamma_k} Z_k^{-1} \sqrt{\frac{\varepsilon_m \varepsilon_n}{ab}} \cos(k_{x,k}x) \cos(k_{y,k}y) \right] \end{aligned} \right\} dS = \\
 &= -\gamma_k Z_k^2 \left[\frac{k_{c,k}}{\gamma_k} Z_k^{-1} \sqrt{\frac{\varepsilon_m \varepsilon_n}{ab}} \begin{pmatrix} Z_n^{-1} \frac{k_{y,n}}{k_{c,n}} \frac{2}{\sqrt{ab}} \lambda_{h,x} I_{csx} I_{ccy} - \\ -Z_n^{-1} \frac{k_{x,n}}{k_{c,n}} \frac{2}{\sqrt{ab}} \lambda_{h,y} I_{ccx} I_{csy} \end{pmatrix} \right] = \\
 &= -Z_k Z_n^{-1} \frac{k_{c,k}}{k_{c,n}} \frac{2\sqrt{\varepsilon_m \varepsilon_n}}{ab} \left(k_{y,n} \lambda_{h,x} I_{csx} I_{ccy} - k_{x,n} \lambda_{h,y} I_{ccx} I_{csy} \right) \tag{7.61}
 \end{aligned}$$

• **Matriz** $M_{v_z}^{kn}$

$$\hat{I}_{v_z}^{kn} = \int_{\Omega_M} h_{z,n} h_{z,k} dS \tag{7.62}$$

Esta matriz únicamente tiene valores no nulos en el caso TE-TE

$$\begin{aligned}
 \hat{I}_{v_z}^{kn(hh)} &= \int_{\Omega_M} h_{z,n} h_{z,k} dS = \\
 &= \int_{\Omega_M} \left[-\frac{k_{c,k}}{\gamma_k} Z_k^{-1} \sqrt{\frac{\varepsilon_m \varepsilon_n}{ab}} \cos(k_{x,k}x) \cos(k_{y,k}y) \right] \\
 &= \int_{\Omega_M} \left[-\frac{k_{c,n}}{\gamma_n} Z_n^{-1} \sqrt{\frac{\varepsilon_{m'} \varepsilon_{n'}}{ab}} \cos(k_{x,n}x) \cos(k_{y,n}y) \right] dS = \\
 &= \frac{k_{c,k}}{\gamma_k} Z_k^{-1} \sqrt{\frac{\varepsilon_m \varepsilon_n}{ab}} \frac{k_{c,n}}{\gamma_n} Z_n^{-1} \sqrt{\frac{\varepsilon_{m'} \varepsilon_{n'}}{ab}} I_{ccx} I_{ccy} = \\
 &= \frac{k_{c,k}}{\gamma_k} Z_k^{-1} \frac{k_{c,n}}{\gamma_n} Z_n^{-1} \frac{\sqrt{\varepsilon_m \varepsilon_n \varepsilon_{m'} \varepsilon_{n'}}}{ab} I_{ccx} I_{ccy}
 \end{aligned} \tag{7.63}$$

Agrupando,

$$I_{v_z}^{kn} = \left(v_z - \mu_0^{-1} \right) \frac{k_{c,k}}{\gamma_k} Z_k^{-1} \frac{k_{c,n}}{\gamma_n} Z_n^{-1} \frac{\sqrt{\varepsilon_m \varepsilon_n \varepsilon_{m'} \varepsilon_{n'}}}{ab} I_{ccx} I_{ccy} + \mu_0^{-1} \left(\frac{k_{c,k}}{\gamma_k} Z_k^{-1} \right)^2 \delta_{kn}$$

y

$$\begin{aligned}
 M_{v_z}^{kn} &= -\frac{1}{j\omega} Z_n \gamma_n \gamma_k Z_k^2 \left[\left(v_z - \mu_0^{-1} \right) \frac{k_{c,k}}{\gamma_k} Z_k^{-1} \frac{k_{c,n}}{\gamma_n} Z_n^{-1} \frac{\sqrt{\varepsilon_m \varepsilon_n \varepsilon_{m'} \varepsilon_{n'}}}{ab} I_{ccx} I_{ccy} + \right. \\
 &\quad \left. + \mu_0^{-1} \left(\frac{k_{c,k}}{\gamma_k} Z_k^{-1} \right)^2 \delta_{kn} \right] = \\
 &= -\frac{1}{j\omega} Z_k (v_z - \mu_0^{-1}) k_{c,k} k_{c,n} \frac{\sqrt{\varepsilon_m \varepsilon_n \varepsilon_{m'} \varepsilon_{n'}}}{ab} I_{ccx} I_{ccy} - \frac{1}{j\omega} \mu_0^{-1} Z_k k_{c,k}^2 \delta_{kn}
 \end{aligned} \tag{7.64}$$

• **Matriz** $M_{\tau_{zt}}^{kn}$

$$\begin{aligned}
 M_{\tau_{zt}}^{kn} &= -\gamma_k Z_k^2 \int_{\Omega_M} \tau_{zt} e_n h_{z,k} dS = \\
 &= -\gamma_k Z_k^2 \int_{\Omega_M} \left(\tau_{zt,x} e_{x,n} + \tau_{zt,y} e_{y,n} \right) h_{z,k} dS
 \end{aligned} \tag{7.65}$$

Esta matriz tiene valores no nulos para el caso TE-TE- y TE-TM.

Caso TE-TE

$$\begin{aligned}
 M_{\tau_{zt}}^{kn(hh)} &= -\gamma_k Z_k^2 \int_{\Omega_M} \left(\tau_{zt,x} e_{x,n} + \tau_{zt,y} e_{y,n} \right) h_{z,k} dS = \\
 &= -\gamma_k Z_k^2 \int_{\Omega_M} \left\{ \begin{aligned} &\left(\tau_{zt,x} \left[-\frac{k_{y,n}}{k_{c,n}} \sqrt{\frac{\varepsilon_{m'} \varepsilon_{n'}}{ab}} \cos(k_{x,n} x) \text{sen}(k_{y,n} y) \right] + \right. \\ &\left. + \tau_{zt,y} \left[\frac{k_{x,n}}{k_{c,n}} \sqrt{\frac{\varepsilon_{m'} \varepsilon_{n'}}{ab}} \text{sen}(k_{x,n} x) \cos(k_{y,n} y) \right] \right) \\ &\cdot \left[-\frac{k_{c,k}}{\gamma_k} Z_k^{-1} \sqrt{\frac{\varepsilon_m \varepsilon_n}{ab}} \cos(k_{x,k} x) \cos(k_{y,k} y) \right] \end{aligned} \right\} dS = \\
 &= \gamma_k Z_k^2 \frac{k_{c,k}}{\gamma_k} Z_k^{-1} \sqrt{\frac{\varepsilon_m \varepsilon_n}{ab}} \left[-\tau_{zt,x} \frac{k_{y,n}}{k_{c,n}} \sqrt{\frac{\varepsilon_{m'} \varepsilon_{n'}}{ab}} I_{ccx} I_{csy} + \right. \\
 &\quad \left. + \tau_{zt,y} \frac{k_{x,n}}{k_{c,n}} \sqrt{\frac{\varepsilon_{m'} \varepsilon_{n'}}{ab}} I_{csx} I_{ccy} \right] = \\
 &= Z_k \frac{k_{c,k}}{k_{c,n}} \frac{\sqrt{\varepsilon_m \varepsilon_n \varepsilon_{m'} \varepsilon_{n'}}}{ab} \left[-\tau_{zt,x} k_{y,n} I_{ccx} I_{csy} + \tau_{zt,y} k_{x,n} I_{csx} I_{ccy} \right]
 \end{aligned} \tag{7.66}$$

Caso TE-TM

$$\begin{aligned}
 M_{\tau_{zt}}^{kn(he)} &= -\gamma_k Z_k^2 \int_{\Omega_M} (\tau_{zt,x} e_{x,n} + \tau_{zt,y} e_{y,n}) h_{z,k} dS = \\
 &= -\gamma_k Z_k^2 \int_{\Omega_M} \left\{ \begin{aligned} &\left(\tau_{zt,x} \left[\frac{k_{x,n}}{k_{c,n}} \frac{2}{\sqrt{ab}} \cos(k_{x,n}x) \text{sen}(k_{y,n}y) \right] + \right. \\ &\left. + \tau_{zt,y} \left[\frac{k_{y,n}}{k_{c,n}} \frac{2}{\sqrt{ab}} \text{sen}(k_{x,n}x) \cos(k_{y,n}y) \right] \right) \\ &\cdot \left[-\frac{k_{c,k}}{\gamma_k} Z_k^{-1} \sqrt{\frac{\epsilon_m \epsilon_n}{ab}} \cos(k_{x,k}x) \cos(k_{y,k}y) \right] \end{aligned} \right\} dS = \\
 &= \gamma_k Z_k^2 \frac{k_{c,k}}{\gamma_k} Z_k^{-1} \sqrt{\frac{\epsilon_m \epsilon_n}{ab}} \left[\tau_{zt,x} \frac{k_{x,n}}{k_{c,n}} \frac{2}{\sqrt{ab}} I_{ccx} I_{csy} + \tau_{zt,y} \frac{k_{y,n}}{k_{c,n}} \frac{2}{\sqrt{ab}} I_{csx} I_{ccy} \right] = \\
 &= Z_k \frac{k_{c,k}}{k_{c,n}} \frac{2\sqrt{\epsilon_m \epsilon_n}}{ab} \left[\tau_{zt,x} k_{x,n} I_{ccx} I_{csy} + \tau_{zt,y} k_{y,n} I_{csx} I_{ccy} \right]
 \end{aligned} \tag{7.67}$$

• **Matriz** $M_{\psi_z}^{kn}$

$$M_{\psi_z}^{kn} = -\frac{1}{j\omega} Z_k^2 Z_n^{-1} \gamma_k \gamma_n \int_{\Omega_M} \psi_z e_{z,n} h_{z,k} dS \tag{7.68}$$

Únicamente tiene valores no nulos para el caso TE-TM

$$\begin{aligned}
 M_{\psi_z}^{kn(he)} &= -\frac{1}{j\omega} Z_k^2 Z_n^{-1} \gamma_k \gamma_n \int_{\Omega_M} \psi_z e_{z,n} h_{z,k} dS = \\
 &= -\frac{1}{j\omega} Z_k^2 Z_n^{-1} \gamma_k \gamma_n \int_{\Omega_M} \left\{ \begin{aligned} &\psi_z \left[-\frac{k_{c,n}}{\gamma_n} \frac{2}{\sqrt{ab}} \text{sen}(k_{x,n}x) \text{sen}(k_{y,n}y) \right] \cdot \\ &\cdot \left[-\frac{k_{c,k}}{\gamma_k} Z_k^{-1} \sqrt{\frac{\epsilon_m \epsilon_n}{ab}} \cos(k_{x,k}x) \cos(k_{y,k}y) \right] \end{aligned} \right\} dS = \\
 &= -\frac{1}{j\omega} Z_k^2 Z_n^{-1} \gamma_k \gamma_n \psi_z \frac{k_{c,n}}{\gamma_n} \frac{2}{\sqrt{ab}} \frac{k_{c,k}}{\gamma_k} Z_k^{-1} \sqrt{\frac{\epsilon_m \epsilon_n}{ab}} I_{csx} I_{csy} = \\
 &= -\frac{1}{j\omega} Z_k Z_n^{-1} \psi_z k_{c,n} k_{c,k} \frac{2\sqrt{\epsilon_m \epsilon_n}}{ab} I_{csx} I_{csy}
 \end{aligned} \tag{7.69}$$

• **Matriz** $M_{\varepsilon_i}^{kn}$

$$\begin{aligned}
 \hat{I}_{\varepsilon_i}^{kn} &= \int_{\Omega_M} \mathbf{h}_k \cdot (\boldsymbol{\varepsilon}_t - \boldsymbol{\varepsilon}_0 \mathbf{I}) \mathbf{e}_n \times \hat{\mathbf{z}} \, dS = \\
 &= \int_{\Omega_M} \mathbf{h}_k \cdot \left[\left((\boldsymbol{\varepsilon}_{t,xx} - \varepsilon_0) \mathbf{e}_{x,n} + \boldsymbol{\varepsilon}_{t,xy} \mathbf{e}_{y,n} \right) \hat{\mathbf{x}} + \left(\boldsymbol{\varepsilon}_{t,yx} \mathbf{e}_{x,n} + (\boldsymbol{\varepsilon}_{t,yy} - \varepsilon_0) \mathbf{e}_{y,n} \right) \hat{\mathbf{y}} \right] \times \hat{\mathbf{z}} \, dS = \\
 &= \int_{\Omega_M} \mathbf{h}_k \cdot \left[\left(\boldsymbol{\varepsilon}_{t,yx} \mathbf{e}_{x,n} + (\boldsymbol{\varepsilon}_{t,yy} - \varepsilon_0) \mathbf{e}_{y,n} \right) \hat{\mathbf{x}} - \left((\boldsymbol{\varepsilon}_{t,xx} - \varepsilon_0) \mathbf{e}_{x,n} + \boldsymbol{\varepsilon}_{t,xy} \mathbf{e}_{y,n} \right) \hat{\mathbf{y}} \right] \, dS = \\
 &= \int_{\Omega_M} \left[h_{x,k} \left(\boldsymbol{\varepsilon}_{t,yx} \mathbf{e}_{x,n} + (\boldsymbol{\varepsilon}_{t,yy} - \varepsilon_0) \mathbf{e}_{y,n} \right) - h_{y,k} \left((\boldsymbol{\varepsilon}_{t,xx} - \varepsilon_0) \mathbf{e}_{x,n} + \boldsymbol{\varepsilon}_{t,xy} \mathbf{e}_{y,n} \right) \right] \, dS
 \end{aligned} \tag{7.70}$$

Esta matriz tiene que distinguirse para los cuatro casos de acoplos TE y TM.

Caso TE-TE

$$\begin{aligned}
 \hat{I}_{\varepsilon_i}^{kn(hh)} &= \int_{\Omega_M} \left[h_{x,k} \left(\boldsymbol{\varepsilon}_{t,yx} \mathbf{e}_{x,n} + (\boldsymbol{\varepsilon}_{t,yy} - \varepsilon_0) \mathbf{e}_{y,n} \right) - h_{y,k} \left((\boldsymbol{\varepsilon}_{t,xx} - \varepsilon_0) \mathbf{e}_{x,n} + \boldsymbol{\varepsilon}_{t,xy} \mathbf{e}_{y,n} \right) \right] \, dS = \\
 &= \int_{\Omega_M} \left[\begin{aligned} &\left[-Z_k^{-1} \frac{k_{x,k}}{k_{c,k}} \sqrt{\frac{\boldsymbol{\varepsilon}_m \boldsymbol{\varepsilon}_n}{ab}} \operatorname{sen}(k_{x,k} x) \cos(k_{y,k} y) \right] \\ &\left(\boldsymbol{\varepsilon}_{t,yx} \left[-\frac{k_{y,n}}{k_{c,n}} \sqrt{\frac{\boldsymbol{\varepsilon}_{m'} \boldsymbol{\varepsilon}_{n'}}{ab}} \cos(k_{x,n} x) \operatorname{sen}(k_{y,n} y) \right] + \right. \\ &\left. + (\boldsymbol{\varepsilon}_{t,yy} - \varepsilon_0) \left[\frac{k_{x,n}}{k_{c,n}} \sqrt{\frac{\boldsymbol{\varepsilon}_{m'} \boldsymbol{\varepsilon}_{n'}}{ab}} \operatorname{sen}(k_{x,n} x) \cos(k_{y,n} y) \right] \right) \\ &\left[-Z_k^{-1} \frac{k_{y,k}}{k_{c,k}} \sqrt{\frac{\boldsymbol{\varepsilon}_m \boldsymbol{\varepsilon}_n}{ab}} \cos(k_{x,k} x) \operatorname{sen}(k_{y,k} y) \right] \\ &\left((\boldsymbol{\varepsilon}_{t,xx} - \varepsilon_0) \left[-\frac{k_{y,n}}{k_{c,n}} \sqrt{\frac{\boldsymbol{\varepsilon}_{m'} \boldsymbol{\varepsilon}_{n'}}{ab}} \cos(k_{x,n} x) \operatorname{sen}(k_{y,n} y) \right] + \right. \\ &\left. + \boldsymbol{\varepsilon}_{t,xy} \left[\frac{k_{x,n}}{k_{c,n}} \sqrt{\frac{\boldsymbol{\varepsilon}_{m'} \boldsymbol{\varepsilon}_{n'}}{ab}} \operatorname{sen}(k_{x,n} x) \cos(k_{y,n} y) \right] \right) \end{aligned} \right] \, dS = \\
 &= \left[\begin{aligned} &Z_k^{-1} \frac{k_{x,k}}{k_{c,k}} \sqrt{\frac{\boldsymbol{\varepsilon}_m \boldsymbol{\varepsilon}_n}{ab}} \left(\boldsymbol{\varepsilon}_{t,yx} \frac{k_{y,n}}{k_{c,n}} \sqrt{\frac{\boldsymbol{\varepsilon}_{m'} \boldsymbol{\varepsilon}_{n'}}{ab}} I_{scx} I_{csy} - \right. \\ &\left. - (\boldsymbol{\varepsilon}_{t,yy} - \varepsilon_0) \frac{k_{x,n}}{k_{c,n}} \sqrt{\frac{\boldsymbol{\varepsilon}_{m'} \boldsymbol{\varepsilon}_{n'}}{ab}} I_{ssx} I_{ccy} \right) + \\ &+ Z_k^{-1} \frac{k_{y,k}}{k_{c,k}} \sqrt{\frac{\boldsymbol{\varepsilon}_m \boldsymbol{\varepsilon}_n}{ab}} \left(-(\boldsymbol{\varepsilon}_{t,xx} - \varepsilon_0) \frac{k_{y,n}}{k_{c,n}} \sqrt{\frac{\boldsymbol{\varepsilon}_{m'} \boldsymbol{\varepsilon}_{n'}}{ab}} I_{ccx} I_{ssy} + \right. \\ &\left. + \boldsymbol{\varepsilon}_{t,xy} \frac{k_{x,n}}{k_{c,n}} \sqrt{\frac{\boldsymbol{\varepsilon}_{m'} \boldsymbol{\varepsilon}_{n'}}{ab}} I_{csx} I_{scy} \right) \end{aligned} \right] = \\
 &= Z_k^{-1} \frac{\sqrt{\boldsymbol{\varepsilon}_m \boldsymbol{\varepsilon}_n \boldsymbol{\varepsilon}_{m'} \boldsymbol{\varepsilon}_{n'}}}{ab k_{c,k} k_{c,n}} \left[\begin{aligned} &k_{x,k} \left(\boldsymbol{\varepsilon}_{t,yx} k_{y,n} I_{scx} I_{csy} - k_{x,n} (\boldsymbol{\varepsilon}_{t,yy} - \varepsilon_0) I_{ssx} I_{ccy} \right) + \\ &+ k_{y,k} \left(-(\boldsymbol{\varepsilon}_{t,xx} - \varepsilon_0) k_{y,n} I_{ccx} I_{ssy} + \boldsymbol{\varepsilon}_{t,xy} k_{x,n} I_{csx} I_{scy} \right) \end{aligned} \right]
 \end{aligned} \tag{7.71}$$

Caso TE-TM

$$\begin{aligned}
 \hat{I}_{\varepsilon_i}^{kn(he)} &= \int_{\Omega_M} \left[h_{x,k} \left(\varepsilon_{t,yx} e_{x,n} + (\varepsilon_{t,yy} - \varepsilon_0) e_{y,n} \right) - h_{y,k} \left((\varepsilon_{t,xx} - \varepsilon_0) e_{x,n} + \varepsilon_{t,xy} e_{y,n} \right) \right] dS = \\
 &= \int_{\Omega_M} \left[\begin{array}{l} \left[-Z_k^{-1} \frac{k_{x,k}}{k_{c,k}} \sqrt{\frac{\varepsilon_m \varepsilon_n}{ab}} \operatorname{sen}(k_{x,k} x) \cos(k_{y,k} y) \right] \\ \left(\varepsilon_{t,yx} \left[\frac{k_{x,n}}{k_{c,n}} \frac{2}{\sqrt{ab}} \cos(k_{x,n} x) \operatorname{sen}(k_{y,n} y) \right] + \right. \\ \left. + (\varepsilon_{t,yy} - \varepsilon_0) \left[\frac{k_{y,n}}{k_{c,n}} \frac{2}{\sqrt{ab}} \operatorname{sen}(k_{x,n} x) \cos(k_{y,n} y) \right] \right) \\ - \left[-Z_k^{-1} \frac{k_{y,k}}{k_{c,k}} \sqrt{\frac{\varepsilon_m \varepsilon_n}{ab}} \cos(k_{x,k} x) \operatorname{sen}(k_{y,k} y) \right] \\ \left((\varepsilon_{t,xx} - \varepsilon_0) \left[\frac{k_{x,n}}{k_{c,n}} \frac{2}{\sqrt{ab}} \cos(k_{x,n} x) \operatorname{sen}(k_{y,n} y) \right] + \right. \\ \left. + \varepsilon_{t,xy} \left[\frac{k_{y,n}}{k_{c,n}} \frac{2}{\sqrt{ab}} \operatorname{sen}(k_{x,n} x) \cos(k_{y,n} y) \right] \right) \end{array} \right] dS = \\
 &= \left[\begin{array}{l} -Z_k^{-1} \frac{k_{x,k}}{k_{c,k}} \sqrt{\frac{\varepsilon_m \varepsilon_n}{ab}} \left(\varepsilon_{t,yx} \frac{k_{x,n}}{k_{c,n}} \frac{2}{\sqrt{ab}} I_{scx} I_{csy} + (\varepsilon_{t,yy} - \varepsilon_0) \frac{k_{y,n}}{k_{c,n}} \frac{2}{\sqrt{ab}} I_{ssx} I_{ccy} \right) + \\ + Z_k^{-1} \frac{k_{y,k}}{k_{c,k}} \sqrt{\frac{\varepsilon_m \varepsilon_n}{ab}} \left((\varepsilon_{t,xx} - \varepsilon_0) \frac{k_{x,n}}{k_{c,n}} \frac{2}{\sqrt{ab}} I_{ccx} I_{ssy} + \varepsilon_{t,xy} \frac{k_{y,n}}{k_{c,n}} \frac{2}{\sqrt{ab}} I_{cscx} I_{scy} \right) \end{array} \right] = (7.72) \\
 &= Z_k^{-1} \frac{2\sqrt{\varepsilon_m \varepsilon_n}}{ab k_{c,k} k_{c,n}} \left[\begin{array}{l} -k_{x,k} \left(\varepsilon_{t,yx} k_{x,n} I_{scx} I_{csy} + k_{y,n} (\varepsilon_{t,yy} - \varepsilon_0) I_{ssx} I_{ccy} \right) + \\ + k_{y,k} \left((\varepsilon_{t,xx} - \varepsilon_0) k_{x,n} I_{ccx} I_{ssy} + \varepsilon_{t,xy} k_{y,n} I_{cscx} I_{scy} \right) \end{array} \right]
 \end{aligned}$$

Caso TM-TE

$$\begin{aligned}
 \hat{I}_{\varepsilon_t}^{kn(eh)} &= \int_{\Omega_M} \left[h_{x,k} (\varepsilon_{t,yx} e_{x,n} + (\varepsilon_{t,yy} - \varepsilon_0) e_{y,n}) - h_{y,k} ((\varepsilon_{t,xx} - \varepsilon_0) e_{x,n} + \varepsilon_{t,xy} e_{y,n}) \right] dS = \\
 &= \int_{\Omega_M} \left[\begin{aligned} & \left[-Z_k^{-1} \frac{k_{y,k}}{k_{c,k}} \frac{2}{\sqrt{ab}} \operatorname{sen}(k_{x,k} x) \cos(k_{y,k} y) \right] \\ & \left(\varepsilon_{t,yx} \left[-\frac{k_{y,n}}{k_{c,n}} \sqrt{\frac{\varepsilon_{m'} \varepsilon_{n'}}{ab}} \cos(k_{x,n} x) \operatorname{sen}(k_{y,n} y) \right] + \right. \\ & \left. + (\varepsilon_{t,yy} - \varepsilon_0) \left[\frac{k_{x,n}}{k_{c,n}} \sqrt{\frac{\varepsilon_{m'} \varepsilon_{n'}}{ab}} \operatorname{sen}(k_{x,n} x) \cos(k_{y,n} y) \right] \right) \\ & - \left[Z_k^{-1} \frac{k_{x,k}}{k_{c,k}} \frac{2}{\sqrt{ab}} \cos(k_{x,k} x) \operatorname{sen}(k_{y,k} y) \right] \\ & \left((\varepsilon_{t,xx} - \varepsilon_0) \left[-\frac{k_{y,n}}{k_{c,n}} \sqrt{\frac{\varepsilon_{m'} \varepsilon_{n'}}{ab}} \cos(k_{x,n} x) \operatorname{sen}(k_{y,n} y) \right] + \right. \\ & \left. + \varepsilon_{t,xy} \left[\frac{k_{x,n}}{k_{c,n}} \sqrt{\frac{\varepsilon_{m'} \varepsilon_{n'}}{ab}} \operatorname{sen}(k_{x,n} x) \cos(k_{y,n} y) \right] \right) \end{aligned} \right] dS = \\
 &= \left[\begin{aligned} & Z_k^{-1} \frac{k_{y,k}}{k_{c,k}} \frac{2}{\sqrt{ab}} \left(\varepsilon_{t,yx} \frac{k_{y,n}}{k_{c,n}} \sqrt{\frac{\varepsilon_{m'} \varepsilon_{n'}}{ab}} I_{scx} I_{csy} - \right. \\ & \left. - (\varepsilon_{t,yy} - \varepsilon_0) \frac{k_{x,n}}{k_{c,n}} \sqrt{\frac{\varepsilon_{m'} \varepsilon_{n'}}{ab}} I_{ssx} I_{ccy} \right) + \\ & + Z_k^{-1} \frac{k_{x,k}}{k_{c,k}} \frac{2}{\sqrt{ab}} \left(+ (\varepsilon_{t,xx} - \varepsilon_0) \frac{k_{y,n}}{k_{c,n}} \sqrt{\frac{\varepsilon_{m'} \varepsilon_{n'}}{ab}} I_{ccx} I_{ssy} - \right. \\ & \left. - \varepsilon_{t,xy} \frac{k_{x,n}}{k_{c,n}} \sqrt{\frac{\varepsilon_{m'} \varepsilon_{n'}}{ab}} I_{csx} I_{scy} \right) \end{aligned} \right] = \\
 &= Z_k^{-1} \frac{2\sqrt{\varepsilon_{m'} \varepsilon_{n'}}}{ab k_{c,k} k_{c,n}} \left[\begin{aligned} & k_{y,k} (\varepsilon_{t,yx} k_{y,n} I_{scx} I_{csy} - k_{x,n} (\varepsilon_{t,yy} - \varepsilon_0) I_{ssx} I_{ccy}) + \\ & + k_{x,k} ((\varepsilon_{t,xx} - \varepsilon_0) k_{y,n} I_{ccx} I_{ssy} - \varepsilon_{t,xy} k_{x,n} I_{csx} I_{scy}) \end{aligned} \right] \tag{7.73}
 \end{aligned}$$

Caso TM-TM

$$\begin{aligned}
 \hat{I}_{\varepsilon_i}^{kn(ee)} &= \int_{\Omega_M} \left[h_{x,k} (\varepsilon_{t,yx} e_{x,n} + (\varepsilon_{t,yy} - \varepsilon_0) e_{y,n}) - h_{y,k} ((\varepsilon_{t,xx} - \varepsilon_0) e_{x,n} + \varepsilon_{t,xy} e_{y,n}) \right] dS = \\
 &= \int_{\Omega_M} \left[\begin{array}{l} \left[-Z_k^{-1} \frac{k_{y,k}}{k_{c,k}} \frac{2}{\sqrt{ab}} \text{sen}(k_{x,k} x) \cos(k_{y,k} y) \right] \\ \left(\varepsilon_{t,yx} \left[\frac{k_{x,n}}{k_{c,n}} \frac{2}{\sqrt{ab}} \cos(k_{x,n} x) \text{sen}(k_{y,n} y) \right] + \right. \\ \left. + (\varepsilon_{t,yy} - \varepsilon_0) \left[\frac{k_{y,n}}{k_{c,n}} \frac{2}{\sqrt{ab}} \text{sen}(k_{x,n} x) \cos(k_{y,n} y) \right] \right) \\ - \left[Z_k^{-1} \frac{k_{x,k}}{k_{c,k}} \frac{2}{\sqrt{ab}} \cos(k_{x,k} x) \text{sen}(k_{y,k} y) \right] \\ \left((\varepsilon_{t,xx} - \varepsilon_0) \left[\frac{k_{x,n}}{k_{c,n}} \frac{2}{\sqrt{ab}} \cos(k_{x,n} x) \text{sen}(k_{y,n} y) \right] + \right) \\ \left. + \varepsilon_{t,xy} \left[\frac{k_{y,n}}{k_{c,n}} \frac{2}{\sqrt{ab}} \text{sen}(k_{x,n} x) \cos(k_{y,n} y) \right] \right) \end{array} \right] dS = \\
 &= \left[\begin{array}{l} -Z_k^{-1} \frac{k_{y,k}}{k_{c,k}} \frac{2}{\sqrt{ab}} \left(\varepsilon_{t,yx} \frac{k_{x,n}}{k_{c,n}} \frac{2}{\sqrt{ab}} I_{scx} I_{csy} + (\varepsilon_{t,yy} - \varepsilon_0) \frac{k_{y,n}}{k_{c,n}} \frac{2}{\sqrt{ab}} I_{ssx} I_{ccy} \right) + \\ -Z_k^{-1} \frac{k_{x,k}}{k_{c,k}} \frac{2}{\sqrt{ab}} \left(+ (\varepsilon_{t,xx} - \varepsilon_0) \frac{k_{x,n}}{k_{c,n}} \frac{2}{\sqrt{ab}} I_{ccx} I_{ssy} + \varepsilon_{t,xy} \frac{k_{y,n}}{k_{c,n}} \frac{2}{\sqrt{ab}} I_{csx} I_{scy} \right) \end{array} \right] = \quad (7.74) \\
 &= Z_k^{-1} \frac{4}{ab k_{c,k} k_{c,n}} \left[\begin{array}{l} -k_{y,k} (\varepsilon_{t,yx} k_{y,n} I_{scx} I_{csy} + k_{x,n} (\varepsilon_{t,yy} - \varepsilon_0) I_{ssx} I_{ccy}) - \\ -k_{x,k} ((\varepsilon_{t,xx} - \varepsilon_0) k_{y,n} I_{ccx} I_{ssy} + \varepsilon_{t,xy} k_{x,n} I_{csx} I_{scy}) \end{array} \right]
 \end{aligned}$$

• **Matriz** $M_{\lambda_d}^{kn}$

$$\begin{aligned}
 M_{\lambda_d}^{kn} &= Z_k^2 Z_n^{-1} \gamma_n \int_{\Omega_M} \mathbf{h}_k \cdot \lambda_d e_{z,n} \times \hat{z} dS = \\
 &= Z_k^2 Z_n^{-1} \gamma_n \int_{\Omega_M} \mathbf{h}_k \cdot (\lambda_{d,x} \hat{\mathbf{x}} + \lambda_{d,y} \hat{\mathbf{y}}) e_{z,n} \times \hat{z} dS = \\
 &= Z_k^2 Z_n^{-1} \gamma_n \int_{\Omega_M} \mathbf{h}_k \cdot (\lambda_{d,y} \hat{\mathbf{x}} - \lambda_{d,x} \hat{\mathbf{y}}) e_{z,n} dS = \\
 &= Z_k^2 Z_n^{-1} \gamma_n \int_{\Omega_M} (h_{x,k} \lambda_{d,y} - h_{y,k} \lambda_{d,x}) e_{z,n} dS
 \end{aligned} \quad (7.75)$$

Esta matriz tiene valores no nulos para el caso de acoplos TE-TM y TM-TM.

Caso TE-TM

$$\begin{aligned}
 M_{\lambda_d}^{kn(he)} &= Z_k^2 Z_n^{-1} \gamma_n \int_{\Omega_M} (h_{x,k} \lambda_{d,y} - h_{y,k} \lambda_{d,x}) e_{z,n} dS = \\
 &= Z_k^2 Z_n^{-1} \gamma_n \int_{\Omega_M} \left\{ \left(\left[-Z_k^{-1} \frac{k_{x,k}}{k_{c,k}} \sqrt{\frac{\epsilon_m \epsilon_n}{ab}} \text{sen}(k_{x,k} x) \cos(k_{y,k} y) \right] \lambda_{d,y} - \right. \right. \\
 &\quad \left. \left[-Z_k^{-1} \frac{k_{y,k}}{k_{c,k}} \sqrt{\frac{\epsilon_m \epsilon_n}{ab}} \cos(k_{x,k} x) \text{sen}(k_{y,k} y) \right] \lambda_{d,x} \right) \\
 &\quad \cdot \left[-\frac{k_{c,n}}{\gamma_n} \frac{2}{\sqrt{ab}} \text{sen}(k_{x,n} x) \text{sen}(k_{y,n} y) \right] \right\} dS = \\
 &= Z_k^2 Z_n^{-1} \gamma_n \frac{k_{c,n}}{\gamma_n} \frac{2}{\sqrt{ab}} \begin{bmatrix} + Z_k^{-1} \frac{k_{x,k}}{k_{c,k}} \sqrt{\frac{\epsilon_m \epsilon_n}{ab}} \lambda_{d,y} I_{ssx} I_{csy} - \\ - Z_k^{-1} \frac{k_{y,k}}{k_{c,k}} \sqrt{\frac{\epsilon_m \epsilon_n}{ab}} \lambda_{d,x} I_{csx} I_{ssy} \end{bmatrix} = \\
 &= Z_k Z_n^{-1} \frac{k_{c,n}}{k_{c,k}} \frac{2\sqrt{\epsilon_m \epsilon_n}}{ab} \left[k_{x,k} \lambda_{d,y} I_{ssx} I_{csy} - k_{y,k} \lambda_{d,x} I_{csx} I_{ssy} \right] \tag{7.76}
 \end{aligned}$$

Caso TM-TM

$$\begin{aligned}
 M_{\lambda_d}^{kn(ee)} &= Z_k^2 Z_n^{-1} \gamma_n \int_{\Omega_M} (h_{x,k} \lambda_{d,y} - h_{y,k} \lambda_{d,x}) e_{z,n} dS = \\
 &= Z_k^2 Z_n^{-1} \gamma_n \int_{\Omega_M} \left\{ \left(\left[-Z_k^{-1} \frac{k_{y,k}}{k_{c,k}} \frac{2}{\sqrt{ab}} \text{sen}(k_{x,k} x) \cos(k_{y,k} y) \right] \lambda_{d,y} - \right. \right. \\
 &\quad \left. \left[Z_k^{-1} \frac{k_{x,k}}{k_{c,k}} \frac{2}{\sqrt{ab}} \cos(k_{x,k} x) \text{sen}(k_{y,k} y) \right] \lambda_{d,x} \right) \\
 &\quad \cdot \left[-\frac{k_{c,n}}{\gamma_n} \frac{2}{\sqrt{ab}} \text{sen}(k_{x,n} x) \text{sen}(k_{y,n} y) \right] \right\} dS = \\
 &= Z_k^2 Z_n^{-1} \gamma_n \frac{k_{c,n}}{\gamma_n} \frac{2}{\sqrt{ab}} \begin{bmatrix} + Z_k^{-1} \frac{k_{y,k}}{k_{c,k}} \frac{2}{\sqrt{ab}} \lambda_{d,y} I_{ssx} I_{csy} + \\ + Z_k^{-1} \frac{k_{x,k}}{k_{c,k}} \frac{2}{\sqrt{ab}} \lambda_{d,x} I_{csx} I_{ssy} \end{bmatrix} = \\
 &= Z_k Z_n^{-1} \frac{k_{c,n}}{k_{c,k}} \frac{4}{ab} \left[k_{y,k} \lambda_{d,y} I_{ssx} I_{csy} + k_{x,k} \lambda_{d,x} I_{csx} I_{ssy} \right] \tag{7.77}
 \end{aligned}$$

• **Matriz** $M_{\xi_t}^{kn}$

$$\begin{aligned}
 M_{\xi_t}^{kn} &= j\omega Z_k^2 \int_{\Omega_M} \mathbf{h}_k \cdot \xi_t \mathbf{h}_n \times \hat{\mathbf{z}} dS = \\
 &= j\omega Z_k^2 \int_{\Omega_M} \mathbf{h}_k \cdot \left[\left(\xi_{t,xx} h_{x,n} + \xi_{t,xy} h_{y,n} \right) \hat{\mathbf{x}} + \left(\xi_{t,yx} h_{x,n} + \xi_{t,yy} h_{y,n} \right) \hat{\mathbf{y}} \right] \times \hat{\mathbf{z}} dS = \\
 &= j\omega Z_k^2 \int_{\Omega_M} \mathbf{h}_k \cdot \left[\left(\xi_{t,yx} h_{x,n} + \xi_{t,yy} h_{y,n} \right) \hat{\mathbf{x}} - \left(\xi_{t,xx} h_{x,n} + \xi_{t,xy} h_{y,n} \right) \hat{\mathbf{y}} \right] dS = \\
 &= j\omega Z_k^2 \int_{\Omega_M} \left[h_{x,k} \left(\xi_{t,yx} h_{x,n} + \xi_{t,yy} h_{y,n} \right) - h_{y,k} \left(\xi_{t,xx} h_{x,n} + \xi_{t,xy} h_{y,n} \right) \right] dS
 \end{aligned} \tag{7.78}$$

Se consideran los cuatro casos posibles de acoplos TE y TM.

Caso TE-TE

$$\begin{aligned}
 M_{\xi_t}^{kn(hh)} &= j\omega Z_k^2 \int_{\Omega_M} \left[h_{x,k} \left(\xi_{t,yx} h_{x,n} + \xi_{t,yy} h_{y,n} \right) - h_{y,k} \left(\xi_{t,xx} h_{x,n} + \xi_{t,xy} h_{y,n} \right) \right] dS = \\
 &= j\omega Z_k^2 \int_{\Omega_M} \left\{ \begin{aligned} &\left[-Z_k^{-1} \frac{k_{x,k}}{k_{c,k}} \sqrt{\frac{\epsilon_m \epsilon_n}{ab}} \operatorname{sen}(k_{x,k} x) \cos(k_{y,k} y) \right] \cdot \\ &\left(\xi_{t,yx} \left[-Z_n^{-1} \frac{k_{x,n}}{k_{c,n}} \sqrt{\frac{\epsilon_m' \epsilon_n'}{ab}} \operatorname{sen}(k_{x,n} x) \cos(k_{y,n} y) \right] + \right. \\ &\left. + \xi_{t,yy} \left[-Z_n^{-1} \frac{k_{y,n}}{k_{c,n}} \sqrt{\frac{\epsilon_m' \epsilon_n'}{ab}} \cos(k_{x,n} x) \operatorname{sen}(k_{y,n} y) \right] \right) \\ &- \left[-Z_k^{-1} \frac{k_{y,k}}{k_{c,k}} \sqrt{\frac{\epsilon_m \epsilon_n}{ab}} \cos(k_{x,k} x) \operatorname{sen}(k_{y,k} y) \right] \cdot \\ &\left(\xi_{t,xx} \left[-Z_n^{-1} \frac{k_{x,n}}{k_{c,n}} \sqrt{\frac{\epsilon_m' \epsilon_n'}{ab}} \operatorname{sen}(k_{x,n} x) \cos(k_{y,n} y) \right] + \right. \\ &\left. + \xi_{t,xy} \left[-Z_n^{-1} \frac{k_{y,n}}{k_{c,n}} \sqrt{\frac{\epsilon_m' \epsilon_n'}{ab}} \cos(k_{x,n} x) \operatorname{sen}(k_{y,n} y) \right] \right) \end{aligned} \right\} dS = \\
 &= j\omega Z_k^2 \left[\begin{aligned} &Z_k^{-1} \frac{k_{x,k}}{k_{c,k}} \sqrt{\frac{\epsilon_m \epsilon_n}{ab}} \left(\xi_{t,yx} Z_n^{-1} \frac{k_{x,n}}{k_{c,n}} \sqrt{\frac{\epsilon_m' \epsilon_n'}{ab}} I_{ssx} I_{ccy} + \right. \\ &\left. + \xi_{t,yy} Z_n^{-1} \frac{k_{y,n}}{k_{c,n}} \sqrt{\frac{\epsilon_m' \epsilon_n'}{ab}} I_{scx} I_{csy} \right) \\ &- Z_k^{-1} \frac{k_{y,k}}{k_{c,k}} \sqrt{\frac{\epsilon_m \epsilon_n}{ab}} \left(\xi_{t,xx} Z_n^{-1} \frac{k_{x,n}}{k_{c,n}} \sqrt{\frac{\epsilon_m' \epsilon_n'}{ab}} I_{cscx} I_{scy} + \right. \\ &\left. + \xi_{t,xy} Z_n^{-1} \frac{k_{y,n}}{k_{c,n}} \sqrt{\frac{\epsilon_m' \epsilon_n'}{ab}} I_{ccx} I_{ssy} \right) \end{aligned} \right] = \\
 &= j\omega Z_k Z_n^{-1} \frac{\sqrt{\epsilon_m \epsilon_n \epsilon_m' \epsilon_n'}}{ab k_{c,k} k_{c,n}} \left[\begin{aligned} &k_{x,k} \left(\xi_{t,yx} k_{x,n} I_{ssx} I_{ccy} + \xi_{t,yy} k_{y,n} I_{scx} I_{csy} \right) - \\ &- k_{y,k} \left(\xi_{t,xx} k_{x,n} I_{cscx} I_{scy} + \xi_{t,xy} k_{y,n} I_{ccx} I_{ssy} \right) \end{aligned} \right]
 \end{aligned} \tag{7.79}$$

Caso TE-TM

$$\begin{aligned}
 M_{\xi_t}^{kn(he)} &= j\omega Z_k^2 \int_{\Omega_M} \left[h_{x,k} \left(\xi_{t,yx} h_{x,n} + \xi_{t,yy} h_{y,n} \right) - h_{y,k} \left(\xi_{t,xx} h_{x,n} + \xi_{t,xy} h_{y,n} \right) \right] dS = \\
 &= j\omega Z_k^2 \int_{\Omega_M} \left\{ \begin{aligned} &\left[-Z_k^{-1} \frac{k_{x,k}}{k_{c,k}} \sqrt{\frac{\epsilon_m \epsilon_n}{ab}} \operatorname{sen}(k_{x,k} x) \cos(k_{y,k} y) \right] \cdot \\ &\left(\xi_{t,yx} \left[-Z_n^{-1} \frac{k_{y,n}}{k_{c,n}} \frac{2}{\sqrt{ab}} \operatorname{sen}(k_{x,n} x) \cos(k_{y,n} y) \right] + \right. \\ &\left. + \xi_{t,yy} \left[Z_n^{-1} \frac{k_{x,n}}{k_{c,n}} \frac{2}{\sqrt{ab}} \cos(k_{x,n} x) \operatorname{sen}(k_{y,n} y) \right] \right) \\ &- \left[-Z_k^{-1} \frac{k_{y,k}}{k_{c,k}} \sqrt{\frac{\epsilon_m \epsilon_n}{ab}} \cos(k_{x,k} x) \operatorname{sen}(k_{y,k} y) \right] \cdot \\ &\left(\xi_{t,xx} \left[-Z_n^{-1} \frac{k_{y,n}}{k_{c,n}} \frac{2}{\sqrt{ab}} \operatorname{sen}(k_{x,n} x) \cos(k_{y,n} y) \right] + \right. \\ &\left. + \xi_{t,xy} \left[Z_n^{-1} \frac{k_{x,n}}{k_{c,n}} \frac{2}{\sqrt{ab}} \cos(k_{x,n} x) \operatorname{sen}(k_{y,n} y) \right] \right) \end{aligned} \right\} dS = \\
 &= j\omega Z_k^2 \left[\begin{aligned} &Z_k^{-1} \frac{k_{x,k}}{k_{c,k}} \sqrt{\frac{\epsilon_m \epsilon_n}{ab}} \left(\xi_{t,yx} Z_n^{-1} \frac{k_{y,n}}{k_{c,n}} \frac{2}{\sqrt{ab}} I_{ssx} I_{ccy} - \right. \\ &\left. - \xi_{t,yy} Z_n^{-1} \frac{k_{x,n}}{k_{c,n}} \frac{2}{\sqrt{ab}} I_{scx} I_{csy} \right) \\ &- Z_k^{-1} \frac{k_{y,k}}{k_{c,k}} \sqrt{\frac{\epsilon_m \epsilon_n}{ab}} \left(\xi_{t,xx} Z_n^{-1} \frac{k_{y,n}}{k_{c,n}} \frac{2}{\sqrt{ab}} I_{ssx} I_{ccy} - \right. \\ &\left. - \xi_{t,xy} Z_n^{-1} \frac{k_{x,n}}{k_{c,n}} \frac{2}{\sqrt{ab}} I_{scx} I_{csy} \right) \end{aligned} \right] = \tag{7.80} \\
 &= j\omega Z_k Z_n^{-1} \frac{2\sqrt{\epsilon_m \epsilon_n}}{ab k_{c,k} k_{c,n}} \left[\begin{aligned} &k_{x,k} \left(\xi_{t,yx} k_{y,n} I_{ssx} I_{ccy} - \xi_{t,yy} k_{x,n} I_{scx} I_{csy} \right) - \\ &- k_{y,k} \left(\xi_{t,xx} k_{y,n} I_{scx} I_{csy} - \xi_{t,xy} k_{x,n} I_{ccx} I_{ssy} \right) \end{aligned} \right]
 \end{aligned}$$

Caso TM-TE

$$\begin{aligned}
 M_{\xi_t}^{kn(eh)} &= j\omega Z_k^2 \int_{\Omega_M} \left[h_{x,k} (\xi_{t,yx} h_{x,n} + \xi_{t,yy} h_{y,n}) - h_{y,k} (\xi_{t,xx} h_{x,n} + \xi_{t,xy} h_{y,n}) \right] dS = \\
 &= j\omega Z_k^2 \int_{\Omega_M} \left\{ \begin{aligned} &\left[-Z_k^{-1} \frac{k_{y,k}}{k_{c,k}} \frac{2}{\sqrt{ab}} \operatorname{sen}(k_{x,k} x) \cos(k_{y,k} y) \right] \cdot \\ &\left(\xi_{t,yx} \left[-Z_n^{-1} \frac{k_{x,n}}{k_{c,n}} \sqrt{\frac{\epsilon_m' \epsilon_n'}{ab}} \operatorname{sen}(k_{x,n} x) \cos(k_{y,n} y) \right] + \right. \\ &\left. + \xi_{t,yy} \left[-Z_n^{-1} \frac{k_{y,n}}{k_{c,n}} \sqrt{\frac{\epsilon_m' \epsilon_n'}{ab}} \cos(k_{x,n} x) \operatorname{sen}(k_{y,n} y) \right] \right) \\ &- \left[Z_k^{-1} \frac{k_{x,k}}{k_{c,k}} \frac{2}{\sqrt{ab}} \cos(k_{x,k} x) \operatorname{sen}(k_{y,k} y) \right] \cdot \\ &\left(\xi_{t,xx} \left[-Z_n^{-1} \frac{k_{x,n}}{k_{c,n}} \sqrt{\frac{\epsilon_m' \epsilon_n'}{ab}} \operatorname{sen}(k_{x,n} x) \cos(k_{y,n} y) \right] + \right. \\ &\left. + \xi_{t,xy} \left[-Z_n^{-1} \frac{k_{y,n}}{k_{c,n}} \sqrt{\frac{\epsilon_m' \epsilon_n'}{ab}} \cos(k_{x,n} x) \operatorname{sen}(k_{y,n} y) \right] \right) \end{aligned} \right\} dS = \\
 &= j\omega Z_k^2 \left[\begin{aligned} &Z_k^{-1} \frac{k_{y,k}}{k_{c,k}} \frac{2}{\sqrt{ab}} \left(\xi_{t,yx} Z_n^{-1} \frac{k_{x,n}}{k_{c,n}} \sqrt{\frac{\epsilon_m' \epsilon_n'}{ab}} I_{ssx} I_{ccy} + \right. \\ &\left. + \xi_{t,yy} Z_n^{-1} \frac{k_{y,n}}{k_{c,n}} \sqrt{\frac{\epsilon_m' \epsilon_n'}{ab}} I_{scx} I_{csy} \right) \\ &+ Z_k^{-1} \frac{k_{x,k}}{k_{c,k}} \frac{2}{\sqrt{ab}} \left(\xi_{t,xx} Z_n^{-1} \frac{k_{x,n}}{k_{c,n}} \sqrt{\frac{\epsilon_m' \epsilon_n'}{ab}} I_{ssx} I_{ccy} + \right. \\ &\left. + \xi_{t,xy} Z_n^{-1} \frac{k_{y,n}}{k_{c,n}} \sqrt{\frac{\epsilon_m' \epsilon_n'}{ab}} I_{scx} I_{csy} \right) \end{aligned} \right] = \\
 &= j\omega Z_k Z_n^{-1} \frac{2\sqrt{\epsilon_m' \epsilon_n'}}{ab k_{c,k} k_{c,n}} \left[k_{y,k} \left(\xi_{t,yx} k_{x,n} I_{ssx} I_{ccy} + \xi_{t,yy} k_{y,n} I_{scx} I_{csy} \right) + \right. \\
 &\quad \left. + k_{x,k} \left(\xi_{t,xx} k_{x,n} I_{scx} I_{csy} + \xi_{t,xy} k_{y,n} I_{ccx} I_{ssy} \right) \right]
 \end{aligned} \tag{7.81}$$

Caso TM-TM

$$\begin{aligned}
 M_{\xi_t}^{kn(he)} &= j\omega Z_k^2 \int_{\Omega_M} \left[h_{x,k} (\xi_{t,yx} h_{x,n} + \xi_{t,yy} h_{y,n}) - h_{y,k} (\xi_{t,xx} h_{x,n} + \xi_{t,xy} h_{y,n}) \right] dS = \\
 &= j\omega Z_k^2 \int_{\Omega_M} \left\{ \begin{aligned} &\left[-Z_k^{-1} \frac{k_{y,k}}{k_{c,k}} \frac{2}{\sqrt{ab}} \operatorname{sen}(k_{x,k} x) \cos(k_{y,k} y) \right] \cdot \\ &\left(\xi_{t,yx} \left[-Z_n^{-1} \frac{k_{y,n}}{k_{c,n}} \frac{2}{\sqrt{ab}} \operatorname{sen}(k_{x,n} x) \cos(k_{y,n} y) \right] + \right. \\ &\left. + \xi_{t,yy} \left[Z_n^{-1} \frac{k_{x,n}}{k_{c,n}} \frac{2}{\sqrt{ab}} \cos(k_{x,n} x) \operatorname{sen}(k_{y,n} y) \right] \right) \\ &- \left[Z_k^{-1} \frac{k_{x,k}}{k_{c,k}} \frac{2}{\sqrt{ab}} \cos(k_{x,k} x) \operatorname{sen}(k_{y,k} y) \right] \cdot \\ &\left(\xi_{t,xx} \left[-Z_n^{-1} \frac{k_{y,n}}{k_{c,n}} \frac{2}{\sqrt{ab}} \operatorname{sen}(k_{x,n} x) \cos(k_{y,n} y) \right] + \right. \\ &\left. + \xi_{t,xy} \left[Z_n^{-1} \frac{k_{x,n}}{k_{c,n}} \frac{2}{\sqrt{ab}} \cos(k_{x,n} x) \operatorname{sen}(k_{y,n} y) \right] \right) \end{aligned} \right\} dS = \\
 &= j\omega Z_k^2 \int_{\Omega_M} \left[\begin{aligned} &Z_k^{-1} \frac{k_{y,k}}{k_{c,k}} \frac{2}{\sqrt{ab}} \left(\xi_{t,yx} Z_n^{-1} \frac{k_{y,n}}{k_{c,n}} \frac{2}{\sqrt{ab}} I_{ssx} I_{ccy} - \right. \\ &\left. - \xi_{t,yy} Z_n^{-1} \frac{k_{x,n}}{k_{c,n}} \frac{2}{\sqrt{ab}} I_{scx} I_{csy} \right) + \\ &+ Z_k^{-1} \frac{k_{x,k}}{k_{c,k}} \frac{2}{\sqrt{ab}} \left(\xi_{t,xx} Z_n^{-1} \frac{k_{y,n}}{k_{c,n}} \frac{2}{\sqrt{ab}} I_{ssx} I_{ccy} - \right. \\ &\left. - \xi_{t,xy} Z_n^{-1} \frac{k_{x,n}}{k_{c,n}} \frac{2}{\sqrt{ab}} I_{scx} I_{csy} \right) \end{aligned} \right] = \tag{7.82} \\
 &= j\omega Z_k Z_n^{-1} \frac{4}{ab k_{c,k} k_{c,n}} \left[\begin{aligned} &k_{y,k} (\xi_{t,yx} k_{y,n} I_{ssx} I_{ccy} - \xi_{t,yy} k_{x,n} I_{scx} I_{csy}) + \\ &+ k_{x,k} (\xi_{t,xx} k_{y,n} I_{scx} I_{csy} - \xi_{t,xy} k_{x,n} I_{ccx} I_{ssy}) \end{aligned} \right]
 \end{aligned}$$

• **Matriz** $M_{\sigma_{tz}}^{kn}$

$$\begin{aligned}
 M_{\sigma_{tz}}^{kn} &= Z_k^2 Z_n \gamma_n \int_{\Omega_M} \mathbf{h}_k \cdot \boldsymbol{\sigma}_{tz} h_{z,n} \times \hat{\mathbf{z}} dS = \\
 &= Z_k^2 Z_n \gamma_n \int_{\Omega_M} \mathbf{h}_k \cdot (\boldsymbol{\sigma}_{tz,x} \hat{\mathbf{x}} + \boldsymbol{\sigma}_{tz,y} \hat{\mathbf{y}}) h_{z,n} \times \hat{\mathbf{z}} dS = \\
 &= Z_k^2 Z_n \gamma_n \int_{\Omega_M} \mathbf{h}_k \cdot (\boldsymbol{\sigma}_{tz,y} \hat{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\sigma}_{tz,x} \hat{\mathbf{y}}) h_{z,n} dS = \tag{7.83} \\
 &= Z_k^2 Z_n \gamma_n \int_{\Omega_M} (h_{x,k} \boldsymbol{\sigma}_{tz,y} - h_{y,k} \boldsymbol{\sigma}_{tz,x}) h_{z,n} dS
 \end{aligned}$$

Esta matriz tiene valores no nulos para los acoplos TE-TE y TM-TE.

Caso TE-TE

$$\begin{aligned}
 M_{\sigma_{tz}}^{km(hh)} &= Z_k^2 Z_n \gamma_n \int_{\Omega_M} \left(h_{x,k} \sigma_{tz,y} - h_{y,k} \sigma_{tz,x} \right) h_{z,n} dS = \\
 &= Z_k^2 Z_n \gamma_n \int_{\Omega_M} \left\{ \begin{array}{l} \left[-Z_k^{-1} \frac{k_{x,k}}{k_{c,k}} \sqrt{\frac{\epsilon_m \epsilon_n}{ab}} \operatorname{sen}(k_{x,k} x) \cos(k_{y,k} y) \right] \sigma_{tz,y} - \\ \left[-Z_k^{-1} \frac{k_{y,k}}{k_{c,k}} \sqrt{\frac{\epsilon_m \epsilon_n}{ab}} \cos(k_{x,k} x) \operatorname{sen}(k_{y,k} y) \right] \sigma_{tz,x} \\ \cdot \left[-\frac{k_{c,n}}{\gamma_n} Z_n^{-1} \sqrt{\frac{\epsilon_m' \epsilon_n'}{ab}} \cos(k_{x,n} x) \cos(k_{y,n} y) \right] \end{array} \right\} dS = \\
 &= Z_k^2 Z_n \gamma_n \frac{k_{c,n}}{\gamma_n} Z_n^{-1} \sqrt{\frac{\epsilon_m' \epsilon_n'}{ab}} \left[\begin{array}{l} Z_k^{-1} \frac{k_{x,k}}{k_{c,k}} \sqrt{\frac{\epsilon_m \epsilon_n}{ab}} \sigma_{tz,y} I_{scx} I_{ccy} - \\ - Z_k^{-1} \frac{k_{y,k}}{k_{c,k}} \sqrt{\frac{\epsilon_m \epsilon_n}{ab}} \sigma_{tz,x} I_{ccx} I_{scy} \end{array} \right] = \\
 &= Z_k \frac{k_{c,n}}{k_{c,k}} \frac{\sqrt{\epsilon_m \epsilon_n \epsilon_m' \epsilon_n'}}{ab} \left[k_{x,k} \sigma_{tz,y} I_{scx} I_{ccy} - k_{y,k} \sigma_{tz,x} I_{ccx} I_{scy} \right] \tag{7.84}
 \end{aligned}$$

Caso TM-TE

$$\begin{aligned}
 M_{\sigma_{tz}}^{km(eh)} &= Z_k^2 Z_n \gamma_n \int_{\Omega_M} \left(h_{x,k} \sigma_{tz,y} - h_{y,k} \sigma_{tz,x} \right) h_{z,n} dS = \\
 &= Z_k^2 Z_n \gamma_n \int_{\Omega_M} \left\{ \begin{array}{l} \left[-Z_k^{-1} \frac{k_{y,k}}{k_{c,k}} \frac{2}{\sqrt{ab}} \operatorname{sen}(k_{x,k} x) \cos(k_{y,k} y) \right] \sigma_{tz,y} - \\ \left[Z_k^{-1} \frac{k_{x,k}}{k_{c,k}} \frac{2}{\sqrt{ab}} \cos(k_{x,k} x) \operatorname{sen}(k_{y,k} y) \right] \sigma_{tz,x} \\ \cdot \left[-\frac{k_{c,n}}{\gamma_n} Z_n^{-1} \sqrt{\frac{\epsilon_m' \epsilon_n'}{ab}} \cos(k_{x,n} x) \cos(k_{y,n} y) \right] \end{array} \right\} dS = \\
 &= Z_k^2 Z_n \gamma_n \frac{k_{c,n}}{\gamma_n} Z_n^{-1} \sqrt{\frac{\epsilon_m' \epsilon_n'}{ab}} \left[\begin{array}{l} Z_k^{-1} \frac{k_{y,k}}{k_{c,k}} \frac{2}{\sqrt{ab}} \sigma_{tz,y} I_{scx} I_{ccy} + \\ + Z_k^{-1} \frac{k_{x,k}}{k_{c,k}} \frac{2}{\sqrt{ab}} \sigma_{tz,x} I_{ccx} I_{scy} \end{array} \right] = \\
 &= Z_k \frac{k_{c,n}}{k_{c,k}} \frac{2\sqrt{\epsilon_m' \epsilon_n'}}{ab} \left[k_{y,k} \sigma_{tz,y} I_{scx} I_{ccy} + k_{x,k} \sigma_{tz,x} I_{ccx} I_{scy} \right] \tag{7.85}
 \end{aligned}$$

7.1.2. Formulación indirecta

- **Matriz** $M_{\varepsilon_{zt}}^{kn}$

$$\begin{aligned}
 M_{\varepsilon_{zt}}^{kn} &= \int_{\Omega_M} \varepsilon_{zt} \mathbf{e}_n e_{z,k} dS = \\
 &= \int_{\Omega_M} \left(\varepsilon_{zt,x} e_{x,n} + \varepsilon_{zt,y} e_{y,n} \right) e_{z,k} dS
 \end{aligned} \tag{7.86}$$

Esta matriz únicamente tiene valores no nulos para los casos TM-TE y TM-TM.

Caso TM-TE

$$\begin{aligned}
 M_{\varepsilon_{zt}}^{kn} &= \int_{\Omega_M} \varepsilon_{zt} \mathbf{e}_n e_{z,k} dS = \\
 &= \int_{\Omega_M} \left(\varepsilon_{zt,x} e_{x,n} + \varepsilon_{zt,y} e_{y,n} \right) e_{z,k} dS = \\
 &= \int_{\Omega_M} \left\{ \begin{array}{l} \left(\varepsilon_{zt,x} \left[-\frac{k_{y,n}}{k_{c,n}} \sqrt{\frac{\varepsilon_{m'} \varepsilon_{n'}}{ab}} \cos(k_{x,n} x) \text{sen}(k_{y,n} y) \right] + \right. \\ \left. + \varepsilon_{zt,y} \left[\frac{k_{x,n}}{k_{c,n}} \sqrt{\frac{\varepsilon_{m'} \varepsilon_{n'}}{ab}} \text{sen}(k_{x,n} x) \cos(k_{y,n} y) \right] \right) \cdot \\ \left. \left[-\frac{k_{c,k}}{\gamma_k} \frac{2}{\sqrt{ab}} \text{sen}(k_{x,k} x) \text{sen}(k_{y,k} y) \right] \right\} dS = \\
 &= -\frac{k_{c,k}}{\gamma_k} \frac{2}{\sqrt{ab}} \left(-\varepsilon_{zt,x} \frac{k_{y,n}}{k_{c,n}} \sqrt{\frac{\varepsilon_{m'} \varepsilon_{n'}}{ab}} I_{scx} I_{ssy} + \varepsilon_{zt,y} \frac{k_{x,n}}{k_{c,n}} \sqrt{\frac{\varepsilon_{m'} \varepsilon_{n'}}{ab}} I_{ssx} I_{scy} \right) = \\
 &= -\frac{k_{c,k}}{k_{c,n}} \frac{2\sqrt{\varepsilon_{m'} \varepsilon_{n'}}}{ab} \gamma_k^{-1} \left(-\varepsilon_{zt,x} k_{y,n} I_{scx} I_{ssy} + \varepsilon_{zt,y} k_{x,n} I_{ssx} I_{scy} \right)
 \end{aligned} \tag{7.87}$$

Caso TM-TM

$$\begin{aligned}
 M_{\varepsilon_{zt}}^{kn} &= \int_{\Omega_M} \varepsilon_{zt} \mathbf{e}_n \mathbf{e}_{z,k} dS = \\
 &= \int_{\Omega_M} \left(\varepsilon_{zt,x} \mathbf{e}_{x,n} + \varepsilon_{zt,y} \mathbf{e}_{y,n} \right) \mathbf{e}_{z,k} dS = \\
 &= \int_{\Omega_M} \left\{ \begin{array}{l} \left(\varepsilon_{zt,x} \left[\frac{k_{x,n}}{k_{c,n}} \frac{2}{\sqrt{ab}} \cos(k_{x,n}x) \text{sen}(k_{y,n}y) \right] + \right. \\ \left. + \varepsilon_{zt,y} \left[\frac{k_{y,n}}{k_{c,n}} \frac{2}{\sqrt{ab}} \text{sen}(k_{x,n}x) \cos(k_{y,n}y) \right] \right) \\ \cdot \left[-\frac{k_{c,k}}{\gamma_k} \frac{2}{\sqrt{ab}} \text{sen}(k_{x,k}x) \text{sen}(k_{y,k}y) \right] \end{array} \right\} dS = \\
 &= (-\gamma_k)^{-1} \frac{k_{c,k}}{\gamma_k} \frac{2}{\sqrt{ab}} \left(\varepsilon_{zt,x} \frac{k_{x,n}}{k_{c,n}} \frac{2}{\sqrt{ab}} I_{sxx} I_{ssy} + \varepsilon_{zt,y} \frac{k_{y,n}}{k_{c,n}} \frac{2}{\sqrt{ab}} I_{ssx} I_{scy} \right) = \\
 &= -\frac{k_{c,k}}{k_{c,n}} \frac{4}{ab} \gamma_k^{-1} \left(\varepsilon_{zt,x} k_{x,n} I_{sxx} I_{ssy} + \varepsilon_{zt,y} k_{y,n} I_{ssx} I_{scy} \right) \tag{7.88}
 \end{aligned}$$

• **Matriz** $M_{\xi_{zt}}^{kn}$

$$\begin{aligned}
 M_{\xi_{zt}}^{kn} &= \int_{\Omega} \xi_{zt} \mathbf{h}_n \mathbf{e}_{z,k} dS = \\
 &= \int_{\Omega} \left(\xi_{zt,x} \mathbf{h}_{x,n} + \xi_{zt,y} \mathbf{h}_{y,n} \right) \mathbf{e}_{z,k} dS \tag{7.89}
 \end{aligned}$$

Esta matriz solamente es no nula para los casos TM-TE y TM-TM

Caso TM-TE

$$\begin{aligned}
 M_{\xi_{zt}}^{kn(eh)} &= \int_{\Omega} \left(\xi_{zt,x} \mathbf{h}_{x,n} + \xi_{zt,y} \mathbf{h}_{y,n} \right) \mathbf{e}_{z,k} dS = \\
 &= \int_{\Omega} \left\{ \begin{array}{l} \left(\xi_{zt,x} \left[-Z_n^{-1} \frac{k_{x,n}}{k_{c,n}} \sqrt{\frac{\varepsilon_m \varepsilon_{n'}}{ab}} \text{sen}(k_{x,n}x) \cos(k_{y,n}y) \right] + \right) \\ \left(+ \xi_{zt,y} \left[-Z_n^{-1} \frac{k_{y,n}}{k_{c,n}} \sqrt{\frac{\varepsilon_m \varepsilon_{n'}}{ab}} \cos(k_{x,n}x) \text{sen}(k_{y,n}y) \right] \right) \\ \cdot \left[-\frac{k_{c,k}}{\gamma_k} \frac{2}{\sqrt{ab}} \text{sen}(k_{x,k}x) \text{sen}(k_{y,k}y) \right] \end{array} \right\} dS = \\
 &= -\frac{k_{c,k}}{\gamma_k} \frac{2}{\sqrt{ab}} \left(-\xi_{zt,x} Z_n^{-1} \frac{k_{x,n}}{k_{c,n}} \sqrt{\frac{\varepsilon_m \varepsilon_{n'}}{ab}} I_{ssx} I_{scy} - \xi_{zt,y} Z_n^{-1} \frac{k_{y,n}}{k_{c,n}} \sqrt{\frac{\varepsilon_m \varepsilon_{n'}}{ab}} I_{sxx} I_{ssy} \right) \\
 &= \frac{k_{c,k}}{\gamma_k k_{c,n}} Z_n^{-1} \frac{2\sqrt{\varepsilon_m \varepsilon_{n'}}}{ab} \left(\xi_{zt,x} k_{x,n} I_{ssx} I_{scy} + \xi_{zt,y} k_{y,n} I_{sxx} I_{ssy} \right) \tag{7.90}
 \end{aligned}$$

Caso TM-TM

$$\begin{aligned}
M_{\xi_{zt}}^{kn(ee)} &= \int_{\Omega} \left(\xi_{zt,x} h_{x,n} + \xi_{zt,y} h_{y,n} \right) e_{z,k} dS = \\
&= \int_{\Omega} \left\{ \begin{aligned} &\left(\xi_{zt,x} \left[-Z_n^{-1} \frac{k_{y,n}}{k_{c,n}} \frac{2}{\sqrt{ab}} \text{sen}(k_{x,n}x) \cos(k_{y,n}y) \right] + \right. \\ &\left. + \xi_{zt,y} \left[Z_n^{-1} \frac{k_{x,n}}{k_{c,n}} \frac{2}{\sqrt{ab}} \cos(k_{x,n}x) \text{sen}(k_{y,n}y) \right] \right) \cdot \\ &\left. \cdot \left[-\frac{k_{c,k}}{\gamma_k} \frac{2}{\sqrt{ab}} \text{sen}(k_{x,k}x) \text{sen}(k_{y,k}y) \right] \right\} dS = \\
&= -\frac{k_{c,k}}{\gamma_k} \frac{2}{\sqrt{ab}} \left(-\xi_{zt,x} Z_n^{-1} \frac{k_{y,n}}{k_{c,n}} \frac{2}{\sqrt{ab}} I_{ssx} I_{scy} + \xi_{zt,y} Z_n^{-1} \frac{k_{x,n}}{k_{c,n}} \frac{2}{\sqrt{ab}} I_{scx} I_{ssy} \right) \\
&= -\frac{k_{c,k}}{\gamma_k k_{c,n}} Z_n^{-1} \frac{4}{ab} \left(-\xi_{zt,x} k_{y,n} I_{ssx} I_{scy} + \xi_{zt,y} k_{x,n} I_{scx} I_{ssy} \right)
\end{aligned} \right. \tag{7.91}
\end{aligned}$$

- **Matriz** $M_{\xi_{zz}}^{kn}$

Esta matriz solamente es no nula para el caso TM-TE

$$\begin{aligned}
M_{\xi_{zz}}^{kn} &= \int_{\Omega} \xi_{zz} h_{z,n} e_{z,k} dS = \\
&= \int_{\Omega} \left\{ \begin{aligned} &\xi_{zz} \left[\frac{k_{c,n}}{\gamma_n} Z_n^{-1} \sqrt{\frac{\epsilon_{m'} \epsilon_{n'}}{ab}} \cos(k_{x,n}x) \cos(k_{y,n}y) \right] \cdot \\ &\left. \cdot \left[\frac{k_{c,k}}{\gamma_k} \frac{2}{\sqrt{ab}} \text{sen}(k_{x,k}x) \text{sen}(k_{y,k}y) \right] \right\} dS = \\
&= \frac{k_{c,n}}{\gamma_n} Z_n^{-1} \sqrt{\frac{\epsilon_{m'} \epsilon_{n'}}{ab}} \frac{k_{c,k}}{\gamma_k} \frac{2}{\sqrt{ab}} \xi_{zz} I_{scx} I_{scy} = \\
&= \left(Z_n \gamma_n \gamma_k \right)^{-1} k_{c,n} k_{c,k} \frac{2 \sqrt{\epsilon_{m'} \epsilon_{n'}}}{ab} \xi_{zz} I_{scx} I_{scy}
\end{aligned} \right. \tag{7.92}
\end{aligned}$$

• **Vector** $V_{\xi_{zz}}^k$

Solamente es no nulo para el caso TM

$$\begin{aligned}
 V_{\xi_{zz}}^k &= \int_{\Omega} \xi_{zz} e_{z,k} dS = \int_{\Omega_M} \xi_{zz} e_{z,k} dS = \\
 &= \int_{\Omega_M} \xi_{zz} \left[-\frac{k_{c,k}}{\gamma_k} \frac{2}{\sqrt{ab}} \text{sen}(k_{x,k} x) \text{sen}(k_{y,k} y) \right] dS = \\
 &= -\frac{k_{c,k}}{\gamma_k} \frac{2}{\sqrt{ab}} \xi_{zz} I_{sx} I_{sy}
 \end{aligned} \tag{7.93}$$

• **Matriz** $M_{\varepsilon_{zz}}^{kn}$

Esta matriz es no nula solamente para el caso TM-TM

$$\begin{aligned}
 I_{\varepsilon_{zz}}^{kn} &= \int_{\Omega} \varepsilon_{zz} e_{z,n} e_{z,k} dS = \varepsilon_{zz} \int_{\Omega_M} e_{z,n} e_{z,k} dS + \varepsilon_0 \int_{\Omega_0} e_{z,n} e_{z,k} dS = \\
 &= \varepsilon_{zz} \int_{\Omega_M} e_{z,n} e_{z,k} dS + \varepsilon_0 \int_{\Omega_0} e_{z,n} e_{z,k} dS + \varepsilon_0 \int_{\Omega_M} e_{z,n} e_{z,k} dS - \varepsilon_0 \int_{\Omega_M} e_{z,n} e_{z,k} dS = \\
 &= (\varepsilon_{zz} - \varepsilon_0) \int_{\Omega_M} e_{z,n} e_{z,k} dS + \varepsilon_0 \int_{\Omega} e_{z,n} e_{z,k} dS = \\
 &= (\varepsilon_{zz} - \varepsilon_0) \int_{\Omega_M} e_{z,n} e_{z,k} dS + \varepsilon_0 \left(\frac{k_{c,k}}{\gamma_k} \right)^2 \delta_{kn}
 \end{aligned} \tag{7.94}$$

Agrupando,

$$M_{\varepsilon_{zz}}^{kn} = (\varepsilon_{zz} - \varepsilon_0) \int_{\Omega_M} e_{z,n} e_{z,k} dS + \varepsilon_0 \left(\frac{k_{c,k}}{\gamma_k} \right)^2 \delta_{kn} = (\varepsilon_{zz} - \varepsilon_0) \hat{I}_{\varepsilon_{zz}}^{kn} + \varepsilon_0 \left(\frac{k_{c,k}}{\gamma_k} \right)^2 \delta_{kn} \tag{7.95}$$

$$\begin{aligned}
 \hat{I}_{\varepsilon_{zz}}^{kn} &= \int_{\Omega_M} e_{z,n} e_{z,k} dS \\
 &= \int_{\Omega_M} \left[\frac{k_{c,k}}{\gamma_k} \frac{2}{\sqrt{ab}} \text{sen}(k_{x,k} x) \text{sen}(k_{y,k} y) \right] \left[\frac{k_{c,n}}{\gamma_n} \frac{2}{\sqrt{ab}} \text{sen}(k_{x,n} x) \text{sen}(k_{y,n} y) \right] dS \\
 &= \frac{k_{c,k}}{\gamma_k} \frac{2}{\sqrt{ab}} \frac{k_{c,n}}{\gamma_n} \frac{2}{\sqrt{ab}} I_{ssx} I_{ssy} = \\
 &= \frac{4}{ab} \frac{k_{c,k} k_{c,n}}{\gamma_k \gamma_n} I_{ssx} I_{ssy}
 \end{aligned} \tag{7.96}$$

• **Matriz** $M_{\mu_{zt}}^{kn}$

$$\begin{aligned} M_{\mu_{zt}}^{kn} &= \int_{\Omega_M} \mu_{zt} \mathbf{h}_n \mathbf{h}_{z,k} dS = \\ &= \int_{\Omega_M} \left(\mu_{zt,x} h_{x,n} + \mu_{zt,y} h_{y,n} \right) \mathbf{h}_{z,k} dS \end{aligned} \quad (7.97)$$

Esta matriz tiene valores no nulos para el caso TE-TE y TE-TM.

Caso TE-TE

$$\begin{aligned} M_{\mu_{zt}}^{kn(hh)} &= \int_{\Omega_M} \left(\mu_{zt,x} h_{x,n} + \mu_{zt,y} h_{y,n} \right) \mathbf{h}_{z,k} dS = \\ &= \int_{\Omega_M} \left\{ \begin{aligned} &\left(\mu_{zt,x} \left[-Z_n^{-1} \frac{k_{x,n}}{k_{c,n}} \sqrt{\frac{\epsilon_m \epsilon_{n'}}{ab}} \operatorname{sen}(k_{x,n} x) \cos(k_{y,n} y) \right] + \right. \\ &\left. + \mu_{zt,y} \left[-Z_n^{-1} \frac{k_{y,n}}{k_{c,n}} \sqrt{\frac{\epsilon_m \epsilon_{n'}}{ab}} \cos(k_{x,n} x) \operatorname{sen}(k_{y,n} y) \right] \right) \\ &\cdot \left[-\frac{k_{c,k}}{\gamma_k} Z_k^{-1} \sqrt{\frac{\epsilon_m \epsilon_n}{ab}} \cos(k_{x,k} x) \cos(k_{y,k} y) \right] \end{aligned} \right\} dS = \\ &= \left[\frac{k_{c,k}}{\gamma_k} Z_k^{-1} \sqrt{\frac{\epsilon_m \epsilon_n}{ab}} \left(\begin{aligned} &Z_n^{-1} \frac{k_{x,n}}{k_{c,n}} \sqrt{\frac{\epsilon_m \epsilon_{n'}}{ab}} \mu_{zt,x} I_{csx} I_{ccy} + \\ &+ Z_n^{-1} \frac{k_{y,n}}{k_{c,n}} \sqrt{\frac{\epsilon_m \epsilon_{n'}}{ab}} \mu_{zt,y} I_{ccx} I_{csy} \end{aligned} \right) \right] = \\ &= Z_k^{-1} Z_n^{-1} \gamma_k^{-1} \frac{k_{c,k}}{k_{c,n}} \frac{\sqrt{\epsilon_m \epsilon_n \epsilon_m \epsilon_{n'}}}{ab} \left(k_{x,n} \mu_{zt,x} I_{csx} I_{ccy} + k_{y,n} \mu_{zt,y} I_{ccx} I_{csy} \right) \end{aligned} \quad (7.98)$$

Caso TE-TM

$$\begin{aligned}
 M_{\mu_{zt}}^{kn(he)} &= \int_{\Omega_M} \left(\mu_{zt,x} h_{x,n} + \mu_{zt,y} h_{y,n} \right) h_{z,k} dS = \\
 &= \int_{\Omega_M} \left\{ \begin{aligned} &\left(\mu_{zt,x} \left[-Z_n^{-1} \frac{k_{y,n}}{k_{c,n}} \frac{2}{\sqrt{ab}} \operatorname{sen}(k_{x,n}x) \cos(k_{y,n}y) \right] + \right. \\ &\left. + \mu_{zt,y} \left[Z_n^{-1} \frac{k_{x,n}}{k_{c,n}} \frac{2}{\sqrt{ab}} \cos(k_{x,n}x) \operatorname{sen}(k_{y,n}y) \right] \right) \\ &\cdot \left[-\frac{k_{c,k}}{\gamma_k} Z_k^{-1} \sqrt{\frac{\epsilon_m \epsilon_n}{ab}} \cos(k_{x,k}x) \cos(k_{y,k}y) \right] \end{aligned} \right\} dS = \\
 &= \left[\frac{k_{c,k}}{\gamma_k} Z_k^{-1} \sqrt{\frac{\epsilon_m \epsilon_n}{ab}} \begin{pmatrix} Z_n^{-1} \frac{k_{y,n}}{k_{c,n}} \frac{2}{\sqrt{ab}} \mu_{zt,x} I_{csx} I_{ccy} - \\ - Z_n^{-1} \frac{k_{x,n}}{k_{c,n}} \frac{2}{\sqrt{ab}} \mu_{zt,y} I_{ccx} I_{csy} \end{pmatrix} \right] = \\
 &= Z_k^{-1} Z_n^{-1} \gamma_k^{-1} \frac{k_{c,k}}{k_{c,n}} \frac{2\sqrt{\epsilon_m \epsilon_n}}{ab} \left(k_{y,n} \mu_{zt,x} I_{csx} I_{ccy} - k_{x,n} \mu_{zt,y} I_{ccx} I_{csy} \right)
 \end{aligned} \tag{7.99}$$

• **Matriz** $M_{\eta_{zt}}^{kn}$

$$\begin{aligned} M_{\eta_{zt}}^{kn} &= \int_{\Omega_M} \eta_{zt} \mathbf{e}_n h_{z,k} dS = \\ &= \int_{\Omega_M} \left(\eta_{zt,x} e_{x,n} + \eta_{zt,y} e_{y,n} \right) h_{z,k} dS \end{aligned} \quad (7.100)$$

Esta matriz tiene valores no nulos para el caso TE-TE y TE-TM.

Caso TE-TE

$$\begin{aligned} M_{\eta_{zt}}^{kn(hh)} &= \int_{\Omega_M} \left(\eta_{zt,x} e_{x,n} + \eta_{zt,y} e_{y,n} \right) h_{z,k} dS = \\ &= \int_{\Omega_M} \left\{ \begin{aligned} &\left(\eta_{zt,x} \left[-\frac{k_{y,n}}{k_{c,n}} \sqrt{\frac{\epsilon_m \epsilon_n}{ab}} \cos(k_{x,n}x) \text{sen}(k_{y,n}y) \right] + \right. \\ &\left. + \eta_{zt,y} \left[\frac{k_{x,n}}{k_{c,n}} \sqrt{\frac{\epsilon_m \epsilon_n}{ab}} \text{sen}(k_{x,n}x) \cos(k_{y,n}y) \right] \right) \\ &\cdot \left[-\frac{k_{c,k}}{\gamma_k} Z_k^{-1} \sqrt{\frac{\epsilon_m \epsilon_n}{ab}} \cos(k_{x,k}x) \cos(k_{y,k}y) \right] \end{aligned} \right\} dS = \\ &= -\frac{k_{c,k}}{\gamma_k} Z_k^{-1} \sqrt{\frac{\epsilon_m \epsilon_n}{ab}} \left[-\eta_{zt,x} \frac{k_{y,n}}{k_{c,n}} \sqrt{\frac{\epsilon_m \epsilon_n}{ab}} I_{ccx} I_{csy} + \eta_{zt,y} \frac{k_{x,n}}{k_{c,n}} \sqrt{\frac{\epsilon_m \epsilon_n}{ab}} I_{csx} I_{ccy} \right] = \\ &= -\gamma_k^{-1} Z_k^{-1} \frac{k_{c,k}}{k_{c,n}} \frac{\sqrt{\epsilon_m \epsilon_n \epsilon_m \epsilon_n}}{ab} \left[-\eta_{zt,x} k_{y,n} I_{ccx} I_{csy} + \eta_{zt,y} k_{x,n} I_{csx} I_{ccy} \right] \end{aligned} \quad (7.101)$$

Caso TE-TM

$$\begin{aligned} M_{\eta_{zt}}^{kn(he)} &= \int_{\Omega_M} \left(\eta_{zt,x} e_{x,n} + \eta_{zt,y} e_{y,n} \right) h_{z,k} dS = \\ &= \int_{\Omega_M} \left\{ \begin{aligned} &\left(\eta_{zt,x} \left[\frac{k_{x,n}}{k_{c,n}} \frac{2}{\sqrt{ab}} \cos(k_{x,n}x) \text{sen}(k_{y,n}y) \right] + \right. \\ &\left. + \eta_{zt,y} \left[\frac{k_{y,n}}{k_{c,n}} \frac{2}{\sqrt{ab}} \text{sen}(k_{x,n}x) \cos(k_{y,n}y) \right] \right) \\ &\cdot \left[-\frac{k_{c,k}}{\gamma_k} Z_k^{-1} \sqrt{\frac{\epsilon_m \epsilon_n}{ab}} \cos(k_{x,k}x) \cos(k_{y,k}y) \right] \end{aligned} \right\} dS = \\ &= -\frac{k_{c,k}}{\gamma_k} Z_k^{-1} \sqrt{\frac{\epsilon_m \epsilon_n}{ab}} \left[\eta_{zt,x} \frac{k_{x,n}}{k_{c,n}} \frac{2}{\sqrt{ab}} I_{ccx} I_{csy} + \eta_{zt,y} \frac{k_{y,n}}{k_{c,n}} \frac{2}{\sqrt{ab}} I_{csx} I_{ccy} \right] = \\ &= -\gamma_k^{-1} Z_k^{-1} \frac{k_{c,k}}{k_{c,n}} \frac{2\sqrt{\epsilon_m \epsilon_n}}{ab} \left[\eta_{zt,x} k_{x,n} I_{ccx} I_{csy} + \eta_{zt,y} k_{y,n} I_{csx} I_{ccy} \right] \end{aligned} \quad (7.102)$$

Modelado con técnicas modales de estructuras de microondas basadas en guías N-furcadas arbitrariamente rellenas con materiales

- **Matriz** $M_{\eta_{zz}}^{kn}$

$$M_{\eta_{zz}}^{kn} = \int_{\Omega_M} \eta_{zz} e_{z,n} h_{z,k} dS$$

Únicamente tiene valores no nulos para el caso TE-TM

$$\begin{aligned} M_{\eta_{zz}}^{kn(hc)} &= \int_{\Omega_M} \eta_{zz} e_{z,n} h_{z,k} dS = \\ &= \int_{\Omega_M} \left\{ \eta_{zz} \left[-\frac{k_{c,n}}{\gamma_n} \frac{2}{\sqrt{ab}} \text{sen}(k_{x,n}x) \text{sen}(k_{y,n}y) \right] \cdot \right. \\ &\quad \left. \left[-\frac{k_{c,k}}{\gamma_k} Z_k^{-1} \sqrt{\frac{\epsilon_m \epsilon_n}{ab}} \cos(k_{x,k}x) \cos(k_{y,k}y) \right] \right\} dS = \\ &= \frac{2}{\sqrt{ab}} \eta_{zz} \frac{k_{c,n}}{\gamma_n} \frac{k_{c,k}}{\gamma_k} Z_k^{-1} \sqrt{\frac{\epsilon_m \epsilon_n}{ab}} I_{csx} I_{csy} = \eta_{zz} \frac{k_{c,n}}{\gamma_n} \frac{k_{c,k}}{\gamma_k} Z_k^{-1} \frac{2\sqrt{\epsilon_m \epsilon_n}}{ab} I_{csx} I_{csy} \end{aligned} \quad (7.103)$$

- **Matriz** $M_{\mu_{zz}}^{kn}$

$$M_{\mu_{zz}}^{kn} = \int_{\Omega} \mu_{zz} h_{z,k} h_{z,n} dS$$

Esta matriz únicamente tiene valores no nulos en el caso TE-TE

$$\hat{I}_{V_z}^{kn} = \int_{\Omega_M} h_{z,n} h_{z,k} dS \quad (7.104)$$

$$\begin{aligned} \hat{I}_{V_z}^{kn(hh)} &= \int_{\Omega_M} h_{z,n} h_{z,k} dS = \\ &= \int_{\Omega_M} \left[-\frac{k_{c,k}}{\gamma_k} Z_k^{-1} \sqrt{\frac{\epsilon_m \epsilon_n}{ab}} \cos(k_{x,k}x) \cos(k_{y,k}y) \right] \\ &\quad \left[-\frac{k_{c,n}}{\gamma_n} Z_n^{-1} \sqrt{\frac{\epsilon_{m'} \epsilon_{n'}}{ab}} \cos(k_{x,n}x) \cos(k_{y,n}y) \right] dS = \\ &= \frac{k_{c,k}}{\gamma_k} Z_k^{-1} \sqrt{\frac{\epsilon_m \epsilon_n}{ab}} \frac{k_{c,n}}{\gamma_n} Z_n^{-1} \sqrt{\frac{\epsilon_{m'} \epsilon_{n'}}{ab}} I_{ccx} I_{ccy} = \\ &= \frac{k_{c,k}}{\gamma_k} Z_k^{-1} \frac{k_{c,n}}{\gamma_n} Z_n^{-1} \frac{\sqrt{\epsilon_m \epsilon_n \epsilon_{m'} \epsilon_{n'}}}{ab} I_{ccx} I_{ccy} \end{aligned} \quad (7.105)$$

Agupando,

$$M_{\mu_{zz}}^{kn} = (\mu_{zz} - \mu_0) \frac{k_{c,k}}{\gamma_k} Z_k^{-1} \frac{k_{c,n}}{\gamma_n} Z_n^{-1} \frac{\sqrt{\epsilon_m \epsilon_n \epsilon_{m'} \epsilon_{n'}}}{ab} I_{ccx} I_{ccy} + \mu_0 \left(\frac{k_{c,k}}{\gamma_k} Z_k^{-1} \right)^2 \delta_{kn} \quad (7.106)$$

• **Vector** $V_{\mu_{zz}}^k$

Este vector tiene valores no nulos solamente para el caso TE

$$\begin{aligned}
 V_{\mu_{zz}}^k &= \int_{\Omega} \mu_{zz} h_{z,k} dS = \int_{\Omega_M} \mu_{zz} h_{z,k} dS + \int_{\Omega_0} \mu_0 h_{z,k} dS = \\
 &= \int_{\Omega_M} \mu_{zz} h_{z,k} dS + \int_{\Omega_0} \mu_0 h_{z,k} dS + \int_{\Omega_M} \mu_0 h_{z,k} dS - \int_{\Omega_M} \mu_0 h_{z,k} dS = \\
 &= \int_{\Omega_M} (\mu_{zz} - \mu_0) h_{z,k} dS + \int_{\Omega} \mu_0 h_{z,k} dS
 \end{aligned} \tag{7.107}$$

Pero resulta que

$$\int_{\Omega} h_{z,k} dS = 0 \tag{7.108}$$

de forma que

$$\begin{aligned}
 V_{\mu_{zz}}^k &= \int_{\Omega_M} (\mu_{zz} - \mu_0) h_{z,k} dS = \\
 &= \int_{\Omega_M} (\mu_{zz} - \mu_0) \left[-\frac{k_{c,k}}{\gamma_k} Z_k^{-1} \sqrt{\frac{\epsilon_m \epsilon_n}{ab}} \cos(k_{x,k} x) \cos(k_{y,k} y) \right] dS = \\
 &= -(\mu_{zz} - \mu_0) \frac{k_{c,k}}{\gamma_k} Z_k^{-1} \sqrt{\frac{\epsilon_m \epsilon_n}{ab}} I_{cx} I_{cy}
 \end{aligned} \tag{7.109}$$

• **Vector** $V_{\mu_{zt}}^n$

$$V_{\mu_{zt}}^n = \int_{\Omega} \mu_{zt} \mathbf{h}_n dS = \int_{\Omega_M} \mu_{zt} \mathbf{h}_n dS = \int_{\Omega_M} (\mu_{zt,x} h_{x,n} + \mu_{zt,y} h_{y,n}) dS \tag{7.110}$$

Se distingue entre casos TE y TM

Caso TE

$$\begin{aligned}
 V_{\mu_{zt}}^n &= \int_{\Omega_M} \mu_{zt} \mathbf{h}_n dS = \\
 &= \int_{\Omega_M} \left(\mu_{zt,x} \left[-Z_n^{-1} \frac{k_{x,n}}{k_{c,n}} \sqrt{\frac{\epsilon_m' \epsilon_n'}{ab}} \text{sen}(k_{x,n} x) \cos(k_{y,n} y) \right] + \right. \\
 &\quad \left. + \mu_{zt,y} \left[-Z_n^{-1} \frac{k_{y,n}}{k_{c,n}} \sqrt{\frac{\epsilon_m' \epsilon_n'}{ab}} \cos(k_{x,n} x) \text{sen}(k_{y,n} y) \right] \right) dS = \\
 &= -\sqrt{\frac{\epsilon_m' \epsilon_n'}{ab}} Z_n^{-1} \left(\mu_{zt,x} \frac{k_{x,n}}{k_{c,n}} I_{sx} I_{cy} + \mu_{zt,y} \frac{k_{y,n}}{k_{c,n}} I_{cx} I_{sy} \right)
 \end{aligned} \tag{7.111}$$

Caso TM

$$\begin{aligned}
 V_{\mu_{zt}}^n &= \int_{\Omega_M} \mu_{zt} \mathbf{h}_n \, dS = \\
 &= \int_{\Omega_M} \left(\begin{array}{c} \mu_{zt,x} \left[-Z_n^{-1} \frac{k_{y,n}}{k_{c,n}} \frac{2}{\sqrt{ab}} \operatorname{sen}(k_{x,n}x) \cos(k_{y,n}y) \right] + \\ + \mu_{zt,y} \left[Z_n^{-1} \frac{k_{x,n}}{k_{c,n}} \frac{2}{\sqrt{ab}} \cos(k_{x,n}x) \operatorname{sen}(k_{y,n}y) \right] \end{array} \right) dS = \\
 &= \frac{2}{\sqrt{ab}} Z_n^{-1} \left(-\mu_{zt,x} \frac{k_{y,n}}{k_{c,n}} I_{sx} I_{cy} + \mu_{zt,y} \frac{k_{x,n}}{k_{c,n}} I_{cx} I_{sy} \right)
 \end{aligned} \tag{7.112}$$

- **Vector** $V_{\mu_{zz}}^k = \int_{\Omega} \mu_{zz} h_{z,k} \, dS$

Es no nulo para el caso TE

$$\begin{aligned}
 V_{\mu_{zz}}^k &= \int_{\Omega} \mu_{zz} h_{z,k} \, dS = \int_{\Omega_M} \mu_{zz} h_{z,k} \, dS + \int_{\Omega_0} \mu_0 h_{z,k} \, dS = \\
 &= \int_{\Omega_M} \mu_{zz} h_{z,k} \, dS + \int_{\Omega_0} \mu_0 h_{z,k} \, dS + \int_{\Omega_M} \mu_0 h_{z,k} \, dS - \int_{\Omega_M} \mu_0 h_{z,k} \, dS = \\
 &= \int_{\Omega_M} (\mu_{zz} - \mu_0) h_{z,k} \, dS + \int_{\Omega} \mu_0 h_{z,k} \, dS
 \end{aligned} \tag{7.113}$$

Pero resulta que

$$\int_{\Omega} h_{z,k} \, dS = 0 \tag{7.114}$$

de forma que

$$\begin{aligned}
 V_{\mu_{zz}}^k &= \int_{\Omega_M} (\mu_{zz} - \mu_0) h_{z,k} \, dS = \\
 &= \int_{\Omega_M} (\mu_{zz} - \mu_0) \left[-\frac{k_{c,k}}{\gamma_k} Z_k^{-1} \sqrt{\frac{\mathcal{E}_m \mathcal{E}_n}{ab}} \cos(k_{x,k}x) \cos(k_{y,k}y) \right] dS = \\
 &= -(\mu_{zz} - \mu_0) \frac{k_{c,k}}{\gamma_k} Z_k^{-1} \sqrt{\frac{\mathcal{E}_m \mathcal{E}_n}{ab}} I_{cx} I_{cy}
 \end{aligned} \tag{7.115}$$

- **Constante** θ

$$\begin{aligned}
 \theta &= \int_{\Omega} \mu_{zz} \, dS = \int_{\Omega_M} \mu_{zz} \, dS + \int_{\Omega_0} \mu_0 \, dS = \\
 &= \int_{\Omega_M} \mu_{zz} \, dS + \int_{\Omega_0} \mu_0 \, dS + \int_{\Omega_M} \mu_0 \, dS - \int_{\Omega_M} \mu_0 \, dS = \\
 &= \int_{\Omega_M} (\mu_{zz} - \mu_0) \, dS + \int_{\Omega} \mu_0 \, dS = \\
 &= (\mu_{zz} - \mu_0) a_s b_s + \mu_0 ab
 \end{aligned} \tag{7.116}$$

• **Vector** $V_{\eta_{zt}}^n$

$$V_{\eta_{zt}}^n = \int_{\Omega} \eta_{zt} e_n dS = \int_{\Omega} (\eta_{zt,x} e_{x,n} + \eta_{zt,y} e_{y,n}) dS$$

Este vector tiene valores no nulos para los modos TE y TM

Caso TE

$$\begin{aligned} V_{\eta_{zt}}^{n(h)} &= \int_{\Omega} (\eta_{zt,x} e_{x,n} + \eta_{zt,y} e_{y,n}) dS = \\ &= \int_{\Omega} \left(\eta_{zt,x} \left[-\frac{k_{y,n}}{k_{c,n}} \sqrt{\frac{\epsilon_{m'} \epsilon_{n'}}{ab}} \cos(k_{x,n} x) \text{sen}(k_{y,n} y) \right] + \right. \\ &\quad \left. + \eta_{zt,y} \left[\frac{k_{x,n}}{k_{c,n}} \sqrt{\frac{\epsilon_{m'} \epsilon_{n'}}{ab}} \text{sen}(k_{x,n} x) \cos(k_{y,n} y) \right] \right) dS = \\ &= -\frac{k_{y,n}}{k_{c,n}} \sqrt{\frac{\epsilon_{m'} \epsilon_{n'}}{ab}} \eta_{zt,x} I_{cx} I_{sy} + \frac{k_{x,n}}{k_{c,n}} \sqrt{\frac{\epsilon_{m'} \epsilon_{n'}}{ab}} \eta_{zt,y} I_{sx} I_{cy} = \\ &= \frac{1}{k_{c,n}} \sqrt{\frac{\epsilon_{m'} \epsilon_{n'}}{ab}} (-k_{y,n} \eta_{zt,x} I_{cx} I_{sy} + k_{x,n} \eta_{zt,y} I_{sx} I_{cy}) \end{aligned} \quad (7.117)$$

Caso TM

$$\begin{aligned} V_{\eta_{zt}}^{n(h)} &= \int_{\Omega} (\eta_{zt,x} e_{x,n} + \eta_{zt,y} e_{y,n}) dS = \\ &= \int_{\Omega} \left(\eta_{zt,x} \left[\frac{k_{x,n}}{k_{c,n}} \frac{2}{\sqrt{ab}} \cos(k_{x,k} x) \text{sen}(k_{y,k} y) \right] + \right. \\ &\quad \left. + \eta_{zt,y} \left[\frac{k_{y,n}}{k_{c,n}} \frac{2}{\sqrt{ab}} \text{sen}(k_{x,k} x) \cos(k_{y,k} y) \right] \right) dS = \\ &= \frac{k_{x,n}}{k_{c,n}} \frac{2}{\sqrt{ab}} \eta_{zt,x} I_{cx} I_{sy} + \frac{k_{y,n}}{k_{c,n}} \frac{2}{\sqrt{ab}} \eta_{zt,y} I_{sx} I_{cy} = \\ &= \frac{1}{k_{c,n}} \frac{2}{\sqrt{ab}} (k_{x,n} \eta_{zt,x} I_{cx} I_{sy} + k_{y,n} \eta_{zt,y} I_{sx} I_{cy}) \end{aligned} \quad (7.118)$$

• **Vector** $V_{\eta_{zz}}^n = \int_{\Omega} \eta_{zz} e_{z,n} dS$

Solamente es no nulo para el caso TM

$$\begin{aligned} V_{\eta_{zz}}^n &= \int_{\Omega} \eta_{zz} e_{z,n} dS = \int_{\Omega_M} \eta_{zz} e_{z,n} dS = \\ &= \int_{\Omega_M} \eta_{zz} \left[-\frac{k_{c,n}}{\gamma_n} \frac{2}{\sqrt{ab}} \text{sen}(k_{x,n} x) \text{sen}(k_{y,n} y) \right] dS = -\frac{k_{c,n}}{\gamma_n} \frac{2}{\sqrt{ab}} \eta_{zz} I_{sx} I_{sy} \end{aligned} \quad (7.119)$$

• **Matriz** $M_{\mu_{tt}}^{kn}$

Es no nula para los cuatro casos de acoplos entre modos TE y TM

$$\begin{aligned}
 M_{\mu_{tt}}^{kn} &= \int_{\Omega} \mathbf{e}_k \cdot \mu_{tt} \mathbf{h}_n \times \hat{\mathbf{z}} dS = \int_{\Omega_M} \mathbf{e}_k \cdot \mu_{tt} \mathbf{h}_n \times \hat{\mathbf{z}} dS + \int_{\Omega_0} \mathbf{e}_k \cdot \mu_0 \mathbf{I} \mathbf{h}_n \times \hat{\mathbf{z}} dS = \\
 &= \int_{\Omega_M} \mathbf{e}_k \cdot \mu_{tt} \mathbf{h}_n \times \hat{\mathbf{z}} dS + \int_{\Omega_0} \mathbf{e}_k \cdot \mu_0 \mathbf{I} \mathbf{h}_n \times \hat{\mathbf{z}} dS + \\
 &+ \int_{\Omega_M} \mathbf{e}_k \cdot \mu_0 \mathbf{I} \mathbf{h}_n \times \hat{\mathbf{z}} dS - \int_{\Omega_M} \mathbf{e}_k \cdot \mu_0 \mathbf{I} \mathbf{h}_n \times \hat{\mathbf{z}} dS = \\
 &= \int_{\Omega_M} \mathbf{e}_k \cdot (\mu_{tt} - \mu_0 \mathbf{I}) \mathbf{h}_n \times \hat{\mathbf{z}} dS + \int_{\Omega} \mathbf{e}_k \cdot \mu_0 \mathbf{I} \mathbf{h}_n \times \hat{\mathbf{z}} dS
 \end{aligned} \tag{7.120}$$

El segundo término vale

$$\int_{\Omega} \mathbf{e}_k \cdot \mu_0 \mathbf{I} \mathbf{h}_n \times \hat{\mathbf{z}} dS = \mu_0 \int_{\Omega} \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{h}_n \times \hat{\mathbf{z}} dS = \mu_0 Z_n^{-1} \int_{\Omega} \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}_n = \mu_0 Z_k^{-1} \delta_{kn} \tag{7.121}$$

De forma que

$$\begin{aligned}
 M_{\mu_{tt}}^{kn} &= \int_{\Omega_M} \mathbf{e}_k \cdot (\mu_{tt} - \mu_0 \mathbf{I}) \mathbf{h}_n \times \hat{\mathbf{z}} dS + \mu_0 Z_k^{-1} \delta_{kn} \\
 I_{\mu_{tt}}^{kn} &= \int_{\Omega_M} \mathbf{e}_k \cdot (\mu_{tt} - \mu_0 \mathbf{I}) \mathbf{h}_n \times \hat{\mathbf{z}} dS = \\
 &= \int_{\Omega_M} \mathbf{e}_k \cdot \left[\begin{aligned} &((\mu_{tt,xx} - \mu_0) h_{x,n} + \mu_{t,xy} h_{y,n}) \hat{\mathbf{x}} + \\ &+ (\mu_{tt,yx} h_{x,n} + (\mu_{tt,yy} - \mu_0) h_{y,n}) \hat{\mathbf{y}} \end{aligned} \right] \times \hat{\mathbf{z}} dS = \\
 &= \int_{\Omega_M} \mathbf{e}_k \cdot \left[\begin{aligned} &(\mu_{tt,yx} h_{x,n} + (\mu_{tt,yy} - \mu_0) h_{y,n}) \hat{\mathbf{x}} - \\ &- ((\mu_{tt,xx} - \mu_0) h_{x,n} + \mu_{tt,xy} h_{y,n}) \hat{\mathbf{y}} \end{aligned} \right] dS = \\
 &= \int_{\Omega_M} \left[\begin{aligned} &e_{x,k} (\mu_{tt,yx} h_{x,n} + (\mu_{tt,yy} - \mu_0) h_{y,n}) - \\ &- e_{y,k} ((\mu_{tt,xx} - \mu_0) h_{x,n} + \mu_{tt,xy} h_{y,n}) \end{aligned} \right] dS
 \end{aligned} \tag{7.122}$$

Caso TE-TE

$$\begin{aligned}
 I_{\mu_{tt}}^{kn(hh)} &= \int_{\Omega_M} \left[e_{x,k} \left(\mu_{tt,yx} h_{x,n} + (\mu_{tt,yy} - \mu_0) h_{y,n} \right) - \right. \\
 &\quad \left. - e_{y,k} \left((\mu_{tt,xx} - \mu_0) h_{x,n} + \mu_{tt,xy} h_{y,n} \right) \right] dS = \\
 &= \int_{\Omega_M} \left\{ \begin{aligned} &\left[-\frac{k_{y,k}}{k_{c,k}} \sqrt{\frac{\varepsilon_m \varepsilon_n}{ab}} \cos(k_{x,k} x) \operatorname{sen}(k_{y,k} y) \right] \cdot \\ &\left(\mu_{tt,yx} \left[-Z_n^{-1} \frac{k_{x,n}}{k_{c,n}} \sqrt{\frac{\varepsilon_{m'} \varepsilon_{n'}}{ab}} \operatorname{sen}(k_{x,n} x) \cos(k_{y,n} y) \right] + \right. \\ &\quad \left. + (\mu_{tt,yy} - \mu_0) \left[-Z_n^{-1} \frac{k_{y,n}}{k_{c,n}} \sqrt{\frac{\varepsilon_{m'} \varepsilon_{n'}}{ab}} \cos(k_{x,n} x) \operatorname{sen}(k_{y,n} y) \right] \right) \\ &\left[\frac{k_{x,k}}{k_{c,k}} \sqrt{\frac{\varepsilon_m \varepsilon_n}{ab}} \operatorname{sen}(k_{x,k} x) \cos(k_{y,k} y) \right] \cdot \\ &\left((\mu_{tt,xx} - \mu_0) \left[-Z_n^{-1} \frac{k_{x,n}}{k_{c,n}} \sqrt{\frac{\varepsilon_{m'} \varepsilon_{n'}}{ab}} \operatorname{sen}(k_{x,n} x) \cos(k_{y,n} y) \right] + \right. \\ &\quad \left. + \mu_{tt,xy} \left[-Z_n^{-1} \frac{k_{y,n}}{k_{c,n}} \sqrt{\frac{\varepsilon_{m'} \varepsilon_{n'}}{ab}} \cos(k_{x,n} x) \operatorname{sen}(k_{y,n} y) \right] \right) \end{aligned} \right\} dS = \\
 &= \left[\begin{aligned} &\frac{k_{y,k}}{k_{c,k}} \sqrt{\frac{\varepsilon_m \varepsilon_n}{ab}} \left(\mu_{tt,yx} Z_n^{-1} \frac{k_{x,n}}{k_{c,n}} \sqrt{\frac{\varepsilon_{m'} \varepsilon_{n'}}{ab}} I_{csx} I_{scy} + \right. \\ &\quad \left. + (\mu_{tt,yy} - \mu_0) Z_n^{-1} \frac{k_{y,n}}{k_{c,n}} \sqrt{\frac{\varepsilon_{m'} \varepsilon_{n'}}{ab}} I_{ccx} I_{ssy} \right) + \\ &+ \frac{k_{x,k}}{k_{c,k}} \sqrt{\frac{\varepsilon_m \varepsilon_n}{ab}} \left((\mu_{tt,xx} - \mu_0) Z_n^{-1} \frac{k_{x,n}}{k_{c,n}} \sqrt{\frac{\varepsilon_{m'} \varepsilon_{n'}}{ab}} I_{ssx} I_{ccy} + \right. \\ &\quad \left. + \mu_{tt,xy} Z_n^{-1} \frac{k_{y,n}}{k_{c,n}} \sqrt{\frac{\varepsilon_{m'} \varepsilon_{n'}}{ab}} I_{srx} I_{csy} \right) \end{aligned} \right] = \\
 &= \frac{\sqrt{\varepsilon_m \varepsilon_n \varepsilon_{m'} \varepsilon_{n'}}}{ab k_{c,k} k_{c,n} Z_n} \left(k_{y,k} k_{x,n} \mu_{tt,yx} I_{csx} I_{scy} + k_{y,k} k_{y,n} (\mu_{tt,yy} - \mu_0) I_{ccx} I_{ssy} + \right. \\
 &\quad \left. + k_{x,k} k_{x,n} (\mu_{tt,xx} - \mu_0) I_{ssx} I_{ccy} + k_{x,k} k_{y,n} \mu_{tt,xy} I_{srx} I_{csy} \right)
 \end{aligned} \tag{7.123}$$

Caso TE-TM

$$\begin{aligned}
 I_{\mu_{tt}}^{kn(he)} &= \int_{\Omega_M} \left[e_{x,k} \left(\mu_{tt,yx} h_{x,n} + (\mu_{tt,yy} - \mu_0) h_{y,n} \right) - \right. \\
 &\quad \left. - e_{y,k} \left((\mu_{tt,xx} - \mu_0) h_{x,n} + \mu_{tt,xy} h_{y,n} \right) \right] dS = \\
 &= \int_{\Omega_M} \left\{ \begin{aligned} &\left[-\frac{k_{y,k}}{k_{c,k}} \sqrt{\frac{\epsilon_m \epsilon_n}{ab}} \cos(k_{x,k} x) \text{sen}(k_{y,k} y) \right] \cdot \\ &\left(\mu_{tt,yx} \left[-Z_n^{-1} \frac{k_{y,n}}{k_{c,n}} \frac{2}{\sqrt{ab}} \text{sen}(k_{x,n} x) \cos(k_{y,n} y) \right] + \right. \\ &\quad \left. + (\mu_{tt,yy} - \mu_0) \left[Z_n^{-1} \frac{k_{x,n}}{k_{c,n}} \frac{2}{\sqrt{ab}} \cos(k_{x,n} x) \text{sen}(k_{y,n} y) \right] \right) - \\ &\left[\frac{k_{x,k}}{k_{c,k}} \sqrt{\frac{\epsilon_m \epsilon_n}{ab}} \text{sen}(k_{x,k} x) \cos(k_{y,k} y) \right] \cdot \\ &\left((\mu_{tt,xx} - \mu_0) \left[-Z_n^{-1} \frac{k_{y,n}}{k_{c,n}} \frac{2}{\sqrt{ab}} \text{sen}(k_{x,n} x) \cos(k_{y,n} y) \right] + \right. \\ &\quad \left. + \mu_{tt,xy} \left[Z_n^{-1} \frac{k_{x,n}}{k_{c,n}} \frac{2}{\sqrt{ab}} \cos(k_{x,n} x) \text{sen}(k_{y,n} y) \right] \right) \end{aligned} \right\} dS = \\
 &= \left[\begin{aligned} &\frac{k_{y,k}}{k_{c,k}} \sqrt{\frac{\epsilon_m \epsilon_n}{ab}} \left(\mu_{tt,yx} Z_n^{-1} \frac{k_{y,n}}{k_{c,n}} \frac{2}{\sqrt{ab}} I_{csx} I_{scy} - \right. \\ &\quad \left. - (\mu_{tt,yy} - \mu_0) Z_n^{-1} \frac{k_{x,n}}{k_{c,n}} \frac{2}{\sqrt{ab}} I_{ccx} I_{ssy} \right) + \\ &+ \frac{k_{x,k}}{k_{c,k}} \sqrt{\frac{\epsilon_m \epsilon_n}{ab}} \left((\mu_{tt,xx} - \mu_0) Z_n^{-1} \frac{k_{y,n}}{k_{c,n}} \frac{2}{\sqrt{ab}} I_{ssx} I_{ccy} - \right. \\ &\quad \left. - \mu_{tt,xy} Z_n^{-1} \frac{k_{x,n}}{k_{c,n}} \frac{2}{\sqrt{ab}} I_{srx} I_{csy} \right) \end{aligned} \right] = \\
 &= \frac{2\sqrt{\epsilon_m \epsilon_n}}{abk_{c,k}k_{c,n}Z_n} \left(k_{y,k}k_{y,n}\mu_{tt,yx}I_{csx}I_{scy} - k_{y,k}k_{x,n}(\mu_{tt,yy} - \mu_0)I_{ccx}I_{ssy} + \right. \\
 &\quad \left. + k_{x,k}k_{y,n}(\mu_{tt,xx} - \mu_0)I_{ssx}I_{ccy} - k_{x,k}k_{x,n}\mu_{tt,xy}I_{srx}I_{csy} \right)
 \end{aligned} \tag{7.124}$$

Caso TM-TE

$$\begin{aligned}
 I_{\mu_{tt}}^{kn(eh)} &= \int_{\Omega} \left[e_{x,k} \left(\mu_{tt,yx} h_{x,n} + (\mu_{tt,yy} - \mu_0) h_{y,n} \right) - \right. \\
 &\quad \left. - e_{y,k} \left((\mu_{tt,xx} - \mu_0) h_{x,n} + \mu_{tt,xy} h_{y,n} \right) \right] dS = \\
 &= \int_{\Omega} \left\{ \begin{aligned} &\left[\frac{k_{x,k}}{k_{c,k}} \frac{2}{\sqrt{ab}} \cos(k_{x,k} x) \text{sen}(k_{y,k} y) \right] \cdot \\ &\left(\mu_{tt,yx} \left[-Z_n^{-1} \frac{k_{x,n}}{k_{c,n}} \sqrt{\frac{\varepsilon_{m'} \varepsilon_{n'}}{ab}} \text{sen}(k_{x,n} x) \cos(k_{y,n} y) \right] + \right. \\ &\quad \left. + (\mu_{tt,yy} - \mu_0) \left[-Z_n^{-1} \frac{k_{y,n}}{k_{c,n}} \sqrt{\frac{\varepsilon_{m'} \varepsilon_{n'}}{ab}} \cos(k_{x,n} x) \text{sen}(k_{y,n} y) \right] \right) \\ &- \left[\frac{k_{y,k}}{k_{c,k}} \frac{2}{\sqrt{ab}} \text{sen}(k_{x,k} x) \cos(k_{y,k} y) \right] \cdot \\ &\left((\mu_{tt,xx} - \mu_0) \left[-Z_n^{-1} \frac{k_{x,n}}{k_{c,n}} \sqrt{\frac{\varepsilon_{m'} \varepsilon_{n'}}{ab}} \text{sen}(k_{x,n} x) \cos(k_{y,n} y) \right] + \right) \\ &\quad \left. + \mu_{tt,xy} \left[-Z_n^{-1} \frac{k_{y,n}}{k_{c,n}} \sqrt{\frac{\varepsilon_{m'} \varepsilon_{n'}}{ab}} \cos(k_{x,n} x) \text{sen}(k_{y,n} y) \right] \right) \end{aligned} \right\} dS = \\
 &= \left[\begin{aligned} &\frac{k_{x,k}}{k_{c,k}} \frac{2}{\sqrt{ab}} \left(-\mu_{tt,yx} Z_n^{-1} \frac{k_{x,n}}{k_{c,n}} \sqrt{\frac{\varepsilon_{m'} \varepsilon_{n'}}{ab}} I_{csx} I_{scy} - \right. \\ &\quad \left. - (\mu_{tt,yy} - \mu_0) Z_n^{-1} \frac{k_{y,n}}{k_{c,n}} \sqrt{\frac{\varepsilon_{m'} \varepsilon_{n'}}{ab}} I_{ccx} I_{ssy} \right) + \\ &+ \frac{k_{y,k}}{k_{c,k}} \frac{2}{\sqrt{ab}} \left((\mu_{tt,xx} - \mu_0) Z_n^{-1} \frac{k_{x,n}}{k_{c,n}} \sqrt{\frac{\varepsilon_{m'} \varepsilon_{n'}}{ab}} I_{ssx} I_{ccy} + \right. \\ &\quad \left. + \mu_{tt,xy} Z_n^{-1} \frac{k_{y,n}}{k_{c,n}} \sqrt{\frac{\varepsilon_{m'} \varepsilon_{n'}}{ab}} I_{scx} I_{csy} \right) \end{aligned} \right] = \\
 &= \frac{2\sqrt{\varepsilon_{m'} \varepsilon_{n'}}}{abk_{c,k} k_{c,n} Z_n} \left(-k_{x,k} k_{x,n} \mu_{tt,yx} I_{csx} I_{scy} - k_{x,k} k_{y,n} (\mu_{tt,yy} - \mu_0) I_{ccx} I_{ssy} + \right. \\
 &\quad \left. + k_{y,k} k_{x,n} (\mu_{tt,xx} - \mu_0) I_{ssx} I_{ccy} + k_{y,k} k_{y,n} \mu_{tt,xy} I_{scx} I_{csy} \right)
 \end{aligned} \tag{7.125}$$

Caso TM-TM

$$\begin{aligned}
 I_{\mu_{tt}}^{kn(he)} &= \int_{\Omega} \left[e_{x,k} \left(\mu_{tt,yx} h_{x,n} + (\mu_{tt,yy} - \mu_0) h_{y,n} \right) - e_{y,k} \left((\mu_{tt,xx} - \mu_0) h_{x,n} + \mu_{tt,xy} h_{y,n} \right) \right] dS = \\
 &= \int_{\Omega} \left\{ \begin{aligned} &\left[\frac{k_{x,k}}{k_{c,k}} \frac{2}{\sqrt{ab}} \cos(k_{x,k} x) \text{sen}(k_{y,k} y) \right] \cdot \\ &\left(\mu_{tt,yx} \left[-Z_n^{-1} \frac{k_{y,n}}{k_{c,n}} \frac{2}{\sqrt{ab}} \text{sen}(k_{x,n} x) \cos(k_{y,n} y) \right] + \right. \\ &\left. + (\mu_{tt,yy} - \mu_0) \left[Z_n^{-1} \frac{k_{x,n}}{k_{c,n}} \frac{2}{\sqrt{ab}} \cos(k_{x,n} x) \text{sen}(k_{y,n} y) \right] \right) - \\ &\left[\frac{k_{y,k}}{k_{c,k}} \frac{2}{\sqrt{ab}} \text{sen}(k_{x,k} x) \cos(k_{y,k} y) \right] \cdot \\ &\left((\mu_{tt,xx} - \mu_0) \left[-Z_n^{-1} \frac{k_{y,n}}{k_{c,n}} \frac{2}{\sqrt{ab}} \text{sen}(k_{x,n} x) \cos(k_{y,n} y) \right] + \right. \\ &\left. + \mu_{tt,xy} \left[Z_n^{-1} \frac{k_{x,n}}{k_{c,n}} \frac{2}{\sqrt{ab}} \cos(k_{x,n} x) \text{sen}(k_{y,n} y) \right] \right) \end{aligned} \right\} dS = \\
 &= \left[\begin{aligned} &\frac{k_{x,k}}{k_{c,k}} \frac{2}{\sqrt{ab}} \left(-\mu_{tt,yx} Z_n^{-1} \frac{k_{y,n}}{k_{c,n}} \frac{2}{\sqrt{ab}} I_{csx} I_{scy} + \right. \\ &\left. + (\mu_{tt,yy} - \mu_0) Z_n^{-1} \frac{k_{x,n}}{k_{c,n}} \frac{2}{\sqrt{ab}} I_{ccx} I_{ssy} \right) + \\ &+ \frac{k_{y,k}}{k_{c,k}} \frac{2}{\sqrt{ab}} \left((\mu_{tt,xx} - \mu_0) Z_n^{-1} \frac{k_{y,n}}{k_{c,n}} \frac{2}{\sqrt{ab}} I_{ssx} I_{ccy} - \right. \\ &\left. - \mu_{tt,xy} Z_n^{-1} \frac{k_{x,n}}{k_{c,n}} \frac{2}{\sqrt{ab}} I_{scx} I_{csy} \right) \end{aligned} \right] = \\
 &= \frac{4}{abk_{c,k} k_{c,n} Z_n} \left(-k_{x,k} k_{y,n} \mu_{tt,yx} I_{csx} I_{scy} + k_{x,k} k_{x,n} (\mu_{tt,yy} - \mu_0) I_{ccx} I_{ssy} + \right. \\
 &\left. + k_{y,k} k_{y,n} (\mu_{tt,xx} - \mu_0) I_{ssx} I_{ccy} - k_{y,k} k_{x,n} \mu_{tt,xy} I_{scx} I_{csy} \right)
 \end{aligned} \tag{7.126}$$

• **Matriz** $M_{\mu_{tz}}^{kn}$

Es no nula para los casos TE-TE y TM-TE

$$\begin{aligned}
M_{\mu_{tz}}^{kn} &= \int_{\Omega_M} \mathbf{e}_k \cdot \boldsymbol{\mu}_{tz} h_{z,n} \times \hat{\mathbf{z}} \, dS = \\
&= \int_{\Omega_M} \mathbf{e}_k \cdot (\mu_{tz,x} \hat{\mathbf{x}} + \mu_{tz,y} \hat{\mathbf{y}}) h_{z,n} \times \hat{\mathbf{z}} \, dS = \\
&= \int_{\Omega_M} \mathbf{e}_k \cdot (\mu_{tz,y} \hat{\mathbf{x}} - \mu_{tz,x} \hat{\mathbf{y}}) h_{z,n} \, dS = . \\
&= \int_{\Omega_M} (e_{x,k} \mu_{tz,y} - e_{y,k} \mu_{tz,x}) h_{z,n} \, dS
\end{aligned} \tag{7.127}$$

Caso TE-TE

$$\begin{aligned}
M_{\mu_{tz}}^{kn(hh)} &= \int_{\Omega_M} (e_{x,k} \mu_{tz,y} - e_{y,k} \mu_{tz,x}) h_{z,n} \, dS = \\
&= \int_{\Omega_M} \left\{ \begin{array}{l} \left[-\frac{k_{y,k}}{k_{c,k}} \sqrt{\frac{\epsilon_m \epsilon_n}{ab}} \cos(k_{x,k} x) \text{sen}(k_{y,k} y) \right] \mu_{tz,y} - \\ - \left[\frac{k_{x,k}}{k_{c,k}} \sqrt{\frac{\epsilon_m \epsilon_n}{ab}} \text{sen}(k_{x,k} x) \cos(k_{y,k} y) \right] \mu_{tz,x} \\ \cdot \left[-\frac{k_{c,n}}{\gamma_n} Z_n^{-1} \sqrt{\frac{\epsilon_m' \epsilon_n'}{ab}} \cos(k_{x,n} x) \cos(k_{y,n} y) \right] \end{array} \right\} dS = \\
&= \left[\frac{k_{c,n}}{\gamma_n} Z_n^{-1} \sqrt{\frac{\epsilon_m' \epsilon_n'}{ab}} \left(\mu_{tz,y} \frac{k_{y,k}}{k_{c,k}} \sqrt{\frac{\epsilon_m \epsilon_n}{ab}} I_{ccx} I_{scy} + \mu_{tz,x} \frac{k_{x,k}}{k_{c,k}} \sqrt{\frac{\epsilon_m \epsilon_n}{ab}} I_{scx} I_{ccy} \right) \right] = \\
&= \frac{k_{c,n}}{k_{c,k}} \frac{\sqrt{\epsilon_m \epsilon_n \epsilon_m' \epsilon_n'}}{ab} (Z_n \gamma_n)^{-1} \left(\mu_{tz,y} k_{y,k} I_{ccx} I_{scy} + \mu_{tz,x} k_{x,k} I_{scx} I_{ccy} \right)
\end{aligned} \tag{7.128}$$

Caso TM-TE

$$\begin{aligned}
 M_{\mu_{tz}}^{km(he)} &= \int_{\Omega_M} \left(e_{x,k} \mu_{tz,y} - e_{y,k} \mu_{tz,x} \right) h_{z,n} dS = \\
 &= \int_{\Omega_M} \left\{ \begin{aligned} &\left[\frac{k_{x,k}}{k_{c,k}} \frac{2}{\sqrt{ab}} \cos(k_{x,k} x) \text{sen}(k_{y,k} y) \right] \mu_{tz,y} - \\ &\left[\frac{k_{y,k}}{k_{c,k}} \frac{2}{\sqrt{ab}} \text{sen}(k_{x,k} x) \cos(k_{y,k} y) \right] \mu_{tz,x} \\ &\left[-\frac{k_{c,n}}{\gamma_n} Z_n^{-1} \sqrt{\frac{\epsilon_m \epsilon_n}{ab}} \cos(k_{x,n} x) \cos(k_{y,n} y) \right] \end{aligned} \right\} dS = \\
 &= - \left[\frac{k_{c,n}}{\gamma_n} Z_n^{-1} \sqrt{\frac{\epsilon_m \epsilon_n}{ab}} \left(\mu_{tz,y} \frac{k_{x,k}}{k_{c,k}} \frac{2}{\sqrt{ab}} I_{ccx} I_{scy} - \mu_{tz,x} \frac{k_{y,k}}{k_{c,k}} \frac{2}{\sqrt{ab}} I_{scx} I_{ccy} \right) \right] = \\
 &= - \frac{k_{c,n}}{k_{c,k}} \frac{2 \sqrt{\epsilon_m \epsilon_n}}{ab} (Z_n \gamma_n)^{-1} \left(\mu_{tz,y} k_{x,k} I_{ccx} I_{scy} - \mu_{tz,x} k_{y,k} I_{scx} I_{ccy} \right)
 \end{aligned} \tag{7.129}$$

• **Vector** $V_{\mu_{tz}}^k$

$$\begin{aligned}
 V_{\mu_{tz}}^k &= \int_{\Omega} \mathbf{e}_k \cdot \boldsymbol{\mu}_{tz} \times \hat{\mathbf{z}} dS = \int_{\Omega_M} \mathbf{e}_k \cdot \boldsymbol{\mu}_{tz} \times \hat{\mathbf{z}} dS = \\
 &= \int_{\Omega_M} \mathbf{e}_k \cdot (\mu_{tz,y} \hat{\mathbf{x}} - \mu_{tz,x} \hat{\mathbf{y}}) dS = \int_{\Omega_M} \left(e_{x,k} \mu_{tz,y} - e_{y,k} \mu_{tz,x} \right) dS
 \end{aligned} \tag{7.130}$$

Se divide entre el caso TE y el caso TM

Caso TE

$$\begin{aligned}
 V_{\mu_{tz}}^k &= \int_{\Omega_M} \left(\begin{aligned} &\left[-\frac{k_{y,k}}{k_{c,k}} \sqrt{\frac{\epsilon_m \epsilon_n}{ab}} \cos(k_{x,k} x) \text{sen}(k_{y,k} y) \right] \mu_{tz,y} - \\ &\left[\frac{k_{x,k}}{k_{c,k}} \sqrt{\frac{\epsilon_m \epsilon_n}{ab}} \text{sen}(k_{x,k} x) \cos(k_{y,k} y) \right] \mu_{tz,x} \end{aligned} \right) dS = \\
 &= - \sqrt{\frac{\epsilon_m \epsilon_n}{ab}} \left(\mu_{tz,y} \frac{k_{y,k}}{k_{c,k}} I_{cx} I_{sy} + \mu_{tz,x} \frac{k_{x,k}}{k_{c,k}} I_{sx} I_{cy} \right)
 \end{aligned} \tag{7.131}$$

Caso TM

$$\begin{aligned}
 V_{\mu_{tz}}^k &= \int_{\Omega_M} \left(\begin{aligned} &\left[\frac{k_{x,k}}{k_{c,k}} \frac{2}{\sqrt{ab}} \cos(k_{x,k} x) \operatorname{sen}(k_{y,k} y) \right] \mu_{tz,y} - \\ &\left[\frac{k_{y,k}}{k_{c,k}} \frac{2}{\sqrt{ab}} \operatorname{sen}(k_{x,k} x) \cos(k_{y,k} y) \right] \mu_{tz,x} \end{aligned} \right) dS = \\
 &= \frac{2}{\sqrt{ab}} \left(\mu_{tz,y} \frac{k_{x,k}}{k_{c,k}} I_{cx} I_{sy} - \mu_{tz,x} \frac{k_{y,k}}{k_{c,k}} I_{sx} I_{cy} \right)
 \end{aligned} \tag{7.132}$$

• **Matriz** $M_{\eta_{tt}}^{kn}$

$$\begin{aligned}
 M_{\eta_{tt}}^{kn} &= \int_{\Omega_M} \mathbf{e}_k \cdot \eta_{tt} \mathbf{e}_n \times \hat{\mathbf{z}} dS = \\
 &= \int_{\Omega_M} \mathbf{e}_k \cdot \left[(\eta_{tt,yx} e_{x,n} + \eta_{tt,yy} e_{y,n}) \hat{\mathbf{x}} - (\eta_{tt,xx} e_{x,n} + \eta_{tt,xy} e_{y,n}) \hat{\mathbf{y}} \right] dS = \\
 &= \int_{\Omega_M} \left[e_{k,x} (\eta_{tt,yx} e_{x,n} + \eta_{tt,yy} e_{y,n}) - e_{k,y} (\eta_{tt,xx} e_{x,n} + \eta_{tt,xy} e_{y,n}) \right] dS
 \end{aligned} \tag{7.133}$$

Esta matriz tiene valores no nulos para los cuatro casos posibles de acoplos TE y TM.

Caso TE-TE

$$\begin{aligned}
 M_{\eta_{tt}}^{kn(hh)} &= \int_{\Omega_M} \left[e_{k,x} \left(\eta_{tt,yx} e_{x,n} + \eta_{tt,yy} e_{y,n} \right) - e_{k,y} \left(\eta_{tt,xx} e_{x,n} + \eta_{tt,xy} e_{y,n} \right) \right] dS = \\
 &= \int_{\Omega_M} \left\{ \begin{aligned} &\left[-\frac{k_{y,k}}{k_{c,k}} \sqrt{\frac{\epsilon_m \epsilon_n}{ab}} \cos(k_{x,k} x) \text{sen}(k_{y,k} y) \right] \cdot \\ &\left(\eta_{tt,yx} \left[-\frac{k_{y,n}}{k_{c,n}} \sqrt{\frac{\epsilon_{m'} \epsilon_{n'}}{ab}} \cos(k_{x,n} x) \text{sen}(k_{y,n} y) \right] + \right. \\ &\left. + \eta_{tt,yy} \left[\frac{k_{x,n}}{k_{c,n}} \sqrt{\frac{\epsilon_{m'} \epsilon_{n'}}{ab}} \text{sen}(k_{x,n} x) \cos(k_{y,n} y) \right] \right) \\ &- \left[\frac{k_{x,k}}{k_{c,k}} \sqrt{\frac{\epsilon_m \epsilon_n}{ab}} \text{sen}(k_{x,k} x) \cos(k_{y,k} y) \right] \cdot \\ &\left(\eta_{tt,xx} \left[-\frac{k_{y,n}}{k_{c,n}} \sqrt{\frac{\epsilon_{m'} \epsilon_{n'}}{ab}} \cos(k_{x,n} x) \text{sen}(k_{y,n} y) \right] + \right. \\ &\left. + \eta_{tt,xy} \left[\frac{k_{x,n}}{k_{c,n}} \sqrt{\frac{\epsilon_{m'} \epsilon_{n'}}{ab}} \text{sen}(k_{x,n} x) \cos(k_{y,n} y) \right] \right) \end{aligned} \right\} dS = \\
 &= \left[\begin{aligned} &+ \frac{k_{y,k}}{k_{c,k}} \sqrt{\frac{\epsilon_m \epsilon_n}{ab}} \left(\eta_{tt,yx} \frac{k_{y,n}}{k_{c,n}} \sqrt{\frac{\epsilon_{m'} \epsilon_{n'}}{ab}} I_{ccx} I_{ssy} - \eta_{tt,yy} \frac{k_{x,n}}{k_{c,n}} \sqrt{\frac{\epsilon_{m'} \epsilon_{n'}}{ab}} I_{csx} I_{scy} \right) + \\ &+ \frac{k_{x,k}}{k_{c,k}} \sqrt{\frac{\epsilon_m \epsilon_n}{ab}} \left(\eta_{tt,xx} \frac{k_{y,n}}{k_{c,n}} \sqrt{\frac{\epsilon_{m'} \epsilon_{n'}}{ab}} I_{scx} I_{csy} - \eta_{tt,xy} \frac{k_{x,n}}{k_{c,n}} \sqrt{\frac{\epsilon_{m'} \epsilon_{n'}}{ab}} I_{ssx} I_{ccy} \right) \end{aligned} \right] = (7.134) \\
 &= \frac{\sqrt{\epsilon_m \epsilon_n \epsilon_{m'} \epsilon_{n'}}}{ab k_{c,k} k_{c,n}} \left[\begin{aligned} &k_{y,k} \left(\eta_{tt,yx} k_{y,n} I_{ccx} I_{ssy} - \eta_{tt,yy} k_{x,n} I_{csx} I_{scy} \right) + \\ &+ k_{x,k} \left(\eta_{tt,xx} k_{y,n} I_{scx} I_{csy} - \eta_{tt,xy} k_{x,n} I_{ssx} I_{ccy} \right) \end{aligned} \right]
 \end{aligned}$$

Caso TE-TM

$$\begin{aligned}
 M_{\eta_{tt}}^{kn(he)} &= \int_{\Omega_M} \left[e_{k,x} (\eta_{tt,yx} e_{x,n} + \eta_{tt,yy} e_{y,n}) - e_{k,y} (\eta_{tt,xx} e_{x,n} + \eta_{tt,xy} e_{y,n}) \right] dS = \\
 &= \int_{\Omega_M} \left\{ \begin{aligned} &\left[-\frac{k_{y,k}}{k_{c,k}} \sqrt{\frac{\epsilon_m \epsilon_n}{ab}} \cos(k_{x,k} x) \text{sen}(k_{y,k} y) \right] \cdot \\ &\left(\eta_{tt,yx} \left[\frac{k_{x,n}}{k_{c,n}} \frac{2}{\sqrt{ab}} \cos(k_{x,n} x) \text{sen}(k_{y,n} y) \right] + \right. \\ &\left. + \eta_{tt,yy} \left[\frac{k_{y,n}}{k_{c,n}} \frac{2}{\sqrt{ab}} \text{sen}(k_{x,n} x) \cos(k_{y,n} y) \right] \right) \\ &\left[\frac{k_{x,k}}{k_{c,k}} \sqrt{\frac{\epsilon_m \epsilon_n}{ab}} \text{sen}(k_{x,k} x) \cos(k_{y,k} y) \right] \cdot \\ &\left(\eta_{tt,xx} \left[\frac{k_{x,n}}{k_{c,n}} \frac{2}{\sqrt{ab}} \cos(k_{x,n} x) \text{sen}(k_{y,n} y) \right] + \right. \\ &\left. + \eta_{tt,xy} \left[\frac{k_{y,n}}{k_{c,n}} \frac{2}{\sqrt{ab}} \text{sen}(k_{x,n} x) \cos(k_{y,n} y) \right] \right) \end{aligned} \right\} dS = \\
 &= \left[\begin{aligned} &+ \frac{k_{y,k}}{k_{c,k}} \sqrt{\frac{\epsilon_m \epsilon_n}{ab}} \left(-\eta_{tt,yx} \frac{k_{x,n}}{k_{c,n}} \frac{2}{\sqrt{ab}} I_{ccx} I_{ssy} - \eta_{tt,yy} \frac{k_{y,n}}{k_{c,n}} \frac{2}{\sqrt{ab}} I_{csx} I_{scy} \right) + \\ &+ \frac{k_{x,k}}{k_{c,k}} \sqrt{\frac{\epsilon_m \epsilon_n}{ab}} \left(-\eta_{tt,xx} \frac{k_{x,n}}{k_{c,n}} \frac{2}{\sqrt{ab}} I_{scx} I_{csy} - \eta_{tt,xy} \frac{k_{y,n}}{k_{c,n}} \frac{2}{\sqrt{ab}} I_{ssx} I_{ccy} \right) \end{aligned} \right] = \quad (7.135) \\
 &= -\frac{2\sqrt{\epsilon_m \epsilon_n}}{ab k_{c,k} k_{c,n}} \left[\begin{aligned} &k_{y,k} \left(\eta_{tt,yx} k_{x,n} I_{ccx} I_{ssy} + \eta_{tt,yy} k_{y,n} I_{csx} I_{scy} \right) + \\ &k_{x,k} \left(\eta_{tt,xx} k_{x,n} I_{scx} I_{csy} + \eta_{tt,xy} k_{y,n} I_{ssx} I_{ccy} \right) \end{aligned} \right]
 \end{aligned}$$

Caso TM-TE

$$\begin{aligned}
 M_{\eta_{tt}}^{kn(eh)} &= \int_{\Omega_M} \left[e_{k,x} \left(\eta_{tt,yx} e_{x,n} + \eta_{tt,yy} e_{y,n} \right) - e_{k,y} \left(\eta_{tt,xx} e_{x,n} + \eta_{tt,xy} e_{y,n} \right) \right] dS = \\
 &= \int_{\Omega_M} \left\{ \begin{aligned} &\left[\frac{k_{x,k}}{k_{c,k}} \frac{2}{\sqrt{ab}} \cos(k_{x,k} x) \text{sen}(k_{y,k} y) \right] \cdot \\ &\left(\eta_{tt,yx} \left[-\frac{k_{y,n}}{k_{c,n}} \sqrt{\frac{\epsilon_m' \epsilon_{n'}}{ab}} \cos(k_{x,n} x) \text{sen}(k_{y,n} y) \right] + \right. \\ &\left. + \eta_{tt,yy} \left[\frac{k_{x,n}}{k_{c,n}} \sqrt{\frac{\epsilon_m' \epsilon_{n'}}{ab}} \text{sen}(k_{x,n} x) \cos(k_{y,n} y) \right] \right) \\ &- \left[\frac{k_{y,k}}{k_{c,k}} \frac{2}{\sqrt{ab}} \text{sen}(k_{x,k} x) \cos(k_{y,k} y) \right] \cdot \\ &\left(\eta_{tt,xx} \left[-\frac{k_{y,n}}{k_{c,n}} \sqrt{\frac{\epsilon_m' \epsilon_{n'}}{ab}} \cos(k_{x,n} x) \text{sen}(k_{y,n} y) \right] + \right. \\ &\left. + \eta_{tt,xy} \left[\frac{k_{x,n}}{k_{c,n}} \sqrt{\frac{\epsilon_m' \epsilon_{n'}}{ab}} \text{sen}(k_{x,n} x) \cos(k_{y,n} y) \right] \right) \end{aligned} \right\} dS = \\
 &= \left[\frac{k_{x,k}}{k_{c,k}} \frac{2}{\sqrt{ab}} \left(-\eta_{tt,yx} \frac{k_{y,n}}{k_{c,n}} \sqrt{\frac{\epsilon_m' \epsilon_{n'}}{ab}} I_{ccx} I_{ssy} + \eta_{tt,yy} \frac{k_{x,n}}{k_{c,n}} \sqrt{\frac{\epsilon_m' \epsilon_{n'}}{ab}} I_{csx} I_{scy} \right) + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{k_{y,k}}{k_{c,k}} \frac{2}{\sqrt{ab}} \left(\eta_{tt,xx} \frac{k_{y,n}}{k_{c,n}} \sqrt{\frac{\epsilon_m' \epsilon_{n'}}{ab}} I_{scx} I_{csy} - \eta_{tt,xy} \frac{k_{x,n}}{k_{c,n}} \sqrt{\frac{\epsilon_m' \epsilon_{n'}}{ab}} I_{ssx} I_{ccy} \right) \right] = \quad (7.136) \\
 &= \frac{2\sqrt{\epsilon_m' \epsilon_{n'}}}{abk_{c,k}k_{c,n}} \left[k_{x,k} \left(-\eta_{tt,yx} k_{y,n} I_{ccx} I_{ssy} + \eta_{tt,yy} k_{x,n} I_{csx} I_{scy} \right) + \right. \\
 &\quad \left. + k_{y,k} \left(\eta_{tt,xx} k_{y,n} I_{scx} I_{csy} - \eta_{tt,xy} k_{x,n} I_{ssx} I_{ccy} \right) \right]
 \end{aligned}$$

Caso TM-TM

$$\begin{aligned}
 M_{\eta_t}^{kn(ee)} &= \int_{\Omega_M} \left[e_{k,x} (\eta_{t,yx} e_{x,n} + \eta_{t,yy} e_{y,n}) - e_{k,y} (\eta_{t,xx} e_{x,n} + \eta_{t,xy} e_{y,n}) \right] dS = \\
 &= \int_{\Omega_M} dS = \\
 &= \left[+ \frac{k_{x,k}}{k_{c,k}} \frac{2}{\sqrt{ab}} \left(\eta_{t,yx} \frac{k_{x,n}}{k_{c,n}} \frac{2}{\sqrt{ab}} I_{ccx} I_{ssy} + \eta_{t,yy} \frac{k_{y,n}}{k_{c,n}} \frac{2}{\sqrt{ab}} I_{csx} I_{scy} \right) + \right. \\
 &= \left. + \frac{k_{y,k}}{k_{c,k}} \frac{2}{\sqrt{ab}} \left(-\eta_{t,xx} \frac{k_{x,n}}{k_{c,n}} \frac{2}{\sqrt{ab}} I_{scx} I_{csy} - \eta_{t,xy} \frac{k_{y,n}}{k_{c,n}} \frac{2}{\sqrt{ab}} I_{ssx} I_{ccy} \right) \right] = \\
 &= \frac{4}{abk_{c,k}k_{c,n}} \left[k_{x,k} (\eta_{t,yx} k_{x,n} I_{ccx} I_{ssy} + \eta_{t,yy} k_{y,n} I_{csx} I_{scy}) - k_{y,k} (\eta_{t,xx} k_{x,n} I_{scx} I_{csy} + \eta_{t,xy} k_{y,n} I_{ssx} I_{ccy}) \right]
 \end{aligned} \tag{7.137}$$

• **Matriz** $M_{\eta_{tz}}^{kn}$

$$\begin{aligned}
 M_{\eta_{tz}}^{kn} &= \int_{\Omega_M} \mathbf{e}_k \cdot \eta_{tz} \mathbf{e}_{z,n} \times \hat{\mathbf{z}} dS = \int_{\Omega_M} \mathbf{e}_k \cdot (\eta_{tz,x} \hat{\mathbf{x}} + \eta_{tz,y} \hat{\mathbf{y}}) \mathbf{e}_{z,n} \times \hat{\mathbf{z}} dS = \\
 &= \int_{\Omega_M} \mathbf{e}_k \cdot (\eta_{tz,y} \hat{\mathbf{x}} - \eta_{tz,x} \hat{\mathbf{y}}) \mathbf{e}_{z,n} dS = \int_{\Omega_M} (e_{x,k} \eta_{tz,y} - e_{y,k} \eta_{tz,x}) \mathbf{e}_{z,n} dS
 \end{aligned} \tag{7.138}$$

Esta matriz tiene valores no nulos para los casos TE-TM y TM-TM

Caso TE-TM

$$\begin{aligned}
 M_{\eta_{tz}}^{kn(he)} &= \int_{\Omega_M} (e_{x,k} \eta_{tz,y} - e_{y,k} \eta_{tz,x}) \mathbf{e}_{z,n} dS = \\
 &= \int_{\Omega_M} \left\{ \left(\left[-\frac{k_{y,k}}{k_{c,k}} \sqrt{\frac{\epsilon_m \epsilon_n}{ab}} \cos(k_{x,k} x) \text{sen}(k_{y,k} y) \right] \eta_{tz,y} - \right. \right. \\
 &= \left. \left. - \left[\frac{k_{x,k}}{k_{c,k}} \sqrt{\frac{\epsilon_m \epsilon_n}{ab}} \text{sen}(k_{x,k} x) \cos(k_{y,k} y) \right] \eta_{tz,x} \right) \cdot \left(-\frac{k_{c,n}}{\gamma_n} \frac{2}{\sqrt{ab}} \text{sen}(k_{x,n} x) \text{sen}(k_{y,n} y) \right) \right\} dS = \\
 &= \left[\eta_{tz,y} \frac{k_{c,n}}{\gamma_n} \frac{2}{\sqrt{ab}} \left(\frac{k_{y,k}}{k_{c,k}} \sqrt{\frac{\epsilon_m \epsilon_n}{ab}} I_{csx} I_{ssy} + \eta_{tz,x} \frac{k_{x,k}}{k_{c,k}} \sqrt{\frac{\epsilon_m \epsilon_n}{ab}} I_{ssx} I_{csy} \right) \right] = \\
 &= \frac{1}{\gamma_n} \frac{2\sqrt{\epsilon_m \epsilon_n}}{ab} \frac{k_{c,n}}{k_{c,k}} (\eta_{tz,y} k_{y,k} I_{csx} I_{ssy} + \eta_{tz,x} k_{x,k} I_{ssx} I_{csy})
 \end{aligned} \tag{7.139}$$

Caso TM-TM

$$\begin{aligned}
 M_{\eta_{tz}}^{kn(he)} &= \int_{\Omega_M} \left(e_{x,k} \eta_{tz,y} - e_{y,k} \eta_{tz,x} \right) e_{z,n} dS = \\
 &= \int_{\Omega_M} \left\{ \begin{aligned} &\left[\frac{k_{x,k}}{k_{c,k}} \frac{2}{\sqrt{ab}} \cos(k_{x,k} x) \text{sen}(k_{y,k} y) \right] \eta_{tz,y} - \\ &\left[\frac{k_{y,k}}{k_{c,k}} \frac{2}{\sqrt{ab}} \text{sen}(k_{x,k} x) \cos(k_{y,k} y) \right] \eta_{tz,x} \\ &\cdot \left(-\frac{k_{c,n}}{\gamma_n} \frac{2}{\sqrt{ab}} \text{sen}(k_{x,n} x) \text{sen}(k_{y,n} y) \right) \end{aligned} \right\} dS = \\
 &= \left[\frac{k_{c,n}}{\gamma_n} \frac{2}{\sqrt{ab}} \left(-\eta_{tz,y} \frac{k_{x,k}}{k_{c,k}} \frac{2}{\sqrt{ab}} I_{csx} I_{ssy} + \eta_{tz,x} \frac{k_{y,k}}{k_{c,k}} \frac{2}{\sqrt{ab}} I_{ssx} I_{csy} \right) \right] = \\
 &= \frac{1}{\gamma_n} \frac{4}{ab} \frac{k_{c,n}}{k_{c,k}} \left(-\eta_{tz,y} k_{x,k} I_{csx} I_{ssy} + \eta_{tz,x} k_{y,k} I_{ssx} I_{csy} \right)
 \end{aligned} \tag{7.140}$$

• **Matriz** $M_{\varepsilon_{tt}}^{kn}$

$$\begin{aligned}
 M_{\varepsilon_{tt}}^{kn} &= \int_{\Omega} \mathbf{h}_k \cdot \varepsilon_{tt} \mathbf{e}_n \times \hat{z} dS = \int_{\Omega_M} \mathbf{h}_k \cdot \varepsilon_{tt} \mathbf{e}_n \times \hat{z} dS + \int_{\Omega_0} \mathbf{h}_k \cdot \varepsilon_0 I \mathbf{e}_n \times \hat{z} dS = \\
 &= \int_{\Omega_M} \mathbf{h}_k \cdot \varepsilon_{tt} \mathbf{e}_n \times \hat{z} dS + \int_{\Omega_0} \mathbf{h}_k \cdot \varepsilon_0 I \mathbf{e}_n \times \hat{z} dS + \\
 &+ \int_{\Omega_M} \mathbf{h}_k \cdot \varepsilon_0 I \mathbf{e}_n \times \hat{z} dS - \int_{\Omega_M} \mathbf{h}_k \cdot \varepsilon_0 I \mathbf{e}_n \times \hat{z} dS = \\
 &= \int_{\Omega_M} \mathbf{h}_k \cdot (\varepsilon_{tt} - \varepsilon_0 I) \mathbf{e}_n \times \hat{z} dS + \int_{\Omega_M} \mathbf{h}_k \cdot \varepsilon_0 I \mathbf{e}_n \times \hat{z} dS
 \end{aligned} \tag{7.141}$$

El segundo término vale

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega_M} \mathbf{h}_k \cdot \varepsilon_0 I \mathbf{e}_n \times \hat{z} dS &= \varepsilon_0 \int_{\Omega_M} \mathbf{h}_k \cdot \mathbf{e}_n \times \hat{z} dS = \\
 &= -\varepsilon_0 Z_n \int_{\Omega_M} \mathbf{h}_k \cdot \mathbf{h}_n dS = -\varepsilon_0 Z_n Z_k^{-2} \delta_{nk} = -\varepsilon_0 Z_k^{-1} \delta_{nk}
 \end{aligned} \tag{7.142}$$

De forma que

$$M_{\varepsilon_{tt}}^{kn} = \int_{\Omega_M} \mathbf{h}_k \cdot (\varepsilon_{tt} - \varepsilon_0 I) \mathbf{e}_n \times \hat{z} dS - \varepsilon_0 Z_k^{-1} \delta_{nk} = I_{\varepsilon_{tt}}^{kn} - \varepsilon_0 Z_k^{-1} \delta_{nk} \tag{7.143}$$

$$\begin{aligned}
 I_{\varepsilon_{tt}}^{kn} &= \int_{\Omega_M} \mathbf{h}_k \cdot (\varepsilon_{tt} - \varepsilon_0 \mathbf{I}) \mathbf{e}_n \times \hat{\mathbf{z}} \, dS = \\
 &= \int_{\Omega_M} \mathbf{h}_k \cdot \left[\left((\varepsilon_{tt,xx} - \varepsilon_0) e_{x,n} + \varepsilon_{tt,xy} e_{y,n} \right) \hat{\mathbf{x}} + \left(\varepsilon_{tt,yx} e_{x,n} + (\varepsilon_{tt,yy} - \varepsilon_0) e_{y,n} \right) \hat{\mathbf{y}} \right] \times \hat{\mathbf{z}} \, dS = \\
 &= \int_{\Omega_M} \mathbf{h}_k \cdot \left[\left(\varepsilon_{tt,yx} e_{x,n} + (\varepsilon_{tt,yy} - \varepsilon_0) e_{y,n} \right) \hat{\mathbf{x}} - \left((\varepsilon_{tt,xx} - \varepsilon_0) e_{x,n} + \varepsilon_{tt,xy} e_{y,n} \right) \hat{\mathbf{y}} \right] \, dS = \\
 &= \int_{\Omega_M} \left[h_{x,k} \left(\varepsilon_{tt,yx} e_{x,n} + (\varepsilon_{tt,yy} - \varepsilon_0) e_{y,n} \right) - h_{y,k} \left((\varepsilon_{tt,xx} - \varepsilon_0) e_{x,n} + \varepsilon_{tt,xy} e_{y,n} \right) \right] \, dS
 \end{aligned}
 \tag{7.144}$$

Esta matriz tiene que existe para los cuatro casos de acoplos TE y TM.

Caso TE-TE

$$\begin{aligned}
 I_{\varepsilon_{tt}}^{kn(hh)} &= \int_{\Omega_M} \left[\begin{array}{l} h_{x,k} \left(\varepsilon_{tt,yx} e_{x,n} + (\varepsilon_{tt,yy} - \varepsilon_0) e_{y,n} \right) - \\ - h_{y,k} \left((\varepsilon_{tt,xx} - \varepsilon_0) e_{x,n} + \varepsilon_{tt,xy} e_{y,n} \right) \end{array} \right] \, dS = \\
 &= \int_{\Omega_M} \left\{ \begin{array}{l} \left[-Z_k^{-1} \frac{k_{x,k}}{k_{c,k}} \sqrt{\frac{\varepsilon_m \varepsilon_n}{ab}} \operatorname{sen}(k_{x,k} x) \cos(k_{y,k} y) \right] \cdot \\ \left(\varepsilon_{tt,yx} \left[-\frac{k_{y,n}}{k_{c,n}} \sqrt{\frac{\varepsilon_{m'} \varepsilon_{n'}}{ab}} \cos(k_{x,n} x) \operatorname{sen}(k_{y,n} y) \right] + \right. \\ \left. + (\varepsilon_{tt,yy} - \varepsilon_0) \left[\frac{k_{x,n}}{k_{c,n}} \sqrt{\frac{\varepsilon_{m'} \varepsilon_{n'}}{ab}} \operatorname{sen}(k_{x,n} x) \cos(k_{y,n} y) \right] \right) \\ - \left[-Z_k^{-1} \frac{k_{y,k}}{k_{c,k}} \sqrt{\frac{\varepsilon_m \varepsilon_n}{ab}} \cos(k_{x,k} x) \operatorname{sen}(k_{y,k} y) \right] \cdot \\ \left((\varepsilon_{tt,xx} - \varepsilon_0) \left[-\frac{k_{y,n}}{k_{c,n}} \sqrt{\frac{\varepsilon_{m'} \varepsilon_{n'}}{ab}} \cos(k_{x,n} x) \operatorname{sen}(k_{y,n} y) \right] + \right) \\ \left. + \varepsilon_{tt,xy} \left[\frac{k_{x,n}}{k_{c,n}} \sqrt{\frac{\varepsilon_{m'} \varepsilon_{n'}}{ab}} \operatorname{sen}(k_{x,n} x) \cos(k_{y,n} y) \right] \right) \end{array} \right\} \, dS = \\
 &= \left[\begin{array}{l} Z_k^{-1} \frac{k_{x,k}}{k_{c,k}} \sqrt{\frac{\varepsilon_m \varepsilon_n}{ab}} \left(\varepsilon_{tt,yx} \frac{k_{y,n}}{k_{c,n}} \sqrt{\frac{\varepsilon_{m'} \varepsilon_{n'}}{ab}} I_{scx} I_{csy} - \right. \\ \left. - (\varepsilon_{tt,yy} - \varepsilon_0) \frac{k_{x,n}}{k_{c,n}} \sqrt{\frac{\varepsilon_{m'} \varepsilon_{n'}}{ab}} I_{ssx} I_{ccy} \right) + \\ + Z_k^{-1} \frac{k_{y,k}}{k_{c,k}} \sqrt{\frac{\varepsilon_m \varepsilon_n}{ab}} \left(-(\varepsilon_{tt,xx} - \varepsilon_0) \frac{k_{y,n}}{k_{c,n}} \sqrt{\frac{\varepsilon_{m'} \varepsilon_{n'}}{ab}} I_{ccx} I_{ssy} + \right. \\ \left. + \varepsilon_{tt,xy} \frac{k_{x,n}}{k_{c,n}} \sqrt{\frac{\varepsilon_{m'} \varepsilon_{n'}}{ab}} I_{csx} I_{scy} \right) \end{array} \right] = \\
 &= Z_k^{-1} \frac{\sqrt{\varepsilon_m \varepsilon_n \varepsilon_{m'} \varepsilon_{n'}}}{ab k_{c,k} k_{c,n}} \left[\begin{array}{l} k_{x,k} \left(\varepsilon_{tt,yx} k_{y,n} I_{scx} I_{csy} - k_{x,n} (\varepsilon_{tt,yy} - \varepsilon_0) I_{ssx} I_{ccy} \right) + \\ + k_{y,k} \left(-(\varepsilon_{tt,xx} - \varepsilon_0) k_{y,n} I_{ccx} I_{ssy} + \varepsilon_{tt,xy} k_{x,n} I_{csx} I_{scy} \right) \end{array} \right]
 \end{aligned}
 \tag{7.145}$$

Caso TE-TM

$$\begin{aligned}
 I_{\varepsilon_t}^{kn(he)} &= \int_{\Omega_M} \left[h_{x,k} \left(\varepsilon_{tt,yx} e_{x,n} + (\varepsilon_{tt,yy} - \varepsilon_0) e_{y,n} \right) - \right. \\
 &\quad \left. - h_{y,k} \left((\varepsilon_{tt,xx} - \varepsilon_0) e_{x,n} + \varepsilon_{tt,xy} e_{y,n} \right) \right] dS = \\
 &= \int_{\Omega_M} \left\{ \begin{aligned} &\left[-Z_k^{-1} \frac{k_{x,k}}{k_{c,k}} \sqrt{\frac{\varepsilon_m \varepsilon_n}{ab}} \operatorname{sen}(k_{x,k} x) \cos(k_{y,k} y) \right] \cdot \\ &\left(\varepsilon_{tt,yx} \left[\frac{k_{x,n}}{k_{c,n}} \frac{2}{\sqrt{ab}} \cos(k_{x,n} x) \operatorname{sen}(k_{y,n} y) \right] + \right. \\ &\quad \left. + (\varepsilon_{tt,yy} - \varepsilon_0) \left[\frac{k_{y,n}}{k_{c,n}} \frac{2}{\sqrt{ab}} \operatorname{sen}(k_{x,n} x) \cos(k_{y,n} y) \right] \right) \\ &\left[-Z_k^{-1} \frac{k_{y,k}}{k_{c,k}} \sqrt{\frac{\varepsilon_m \varepsilon_n}{ab}} \cos(k_{x,k} x) \operatorname{sen}(k_{y,k} y) \right] \cdot \\ &\left((\varepsilon_{tt,xx} - \varepsilon_0) \left[\frac{k_{x,n}}{k_{c,n}} \frac{2}{\sqrt{ab}} \cos(k_{x,n} x) \operatorname{sen}(k_{y,n} y) \right] + \right. \\ &\quad \left. + \varepsilon_{tt,xy} \left[\frac{k_{y,n}}{k_{c,n}} \frac{2}{\sqrt{ab}} \operatorname{sen}(k_{x,n} x) \cos(k_{y,n} y) \right] \right) \end{aligned} \right\} dS = \\
 &= \left[\begin{aligned} &-Z_k^{-1} \frac{k_{x,k}}{k_{c,k}} \sqrt{\frac{\varepsilon_m \varepsilon_n}{ab}} \left(\varepsilon_{tt,yx} \frac{k_{x,n}}{k_{c,n}} \frac{2}{\sqrt{ab}} I_{scx} I_{csy} + \right. \\ &\quad \left. + (\varepsilon_{tt,yy} - \varepsilon_0) \frac{k_{y,n}}{k_{c,n}} \frac{2}{\sqrt{ab}} I_{ssx} I_{ccy} \right) + \\ &+ Z_k^{-1} \frac{k_{y,k}}{k_{c,k}} \sqrt{\frac{\varepsilon_m \varepsilon_n}{ab}} \left((\varepsilon_{tt,xx} - \varepsilon_0) \frac{k_{x,n}}{k_{c,n}} \frac{2}{\sqrt{ab}} I_{ccx} I_{ssy} + \right. \\ &\quad \left. + \varepsilon_{tt,xy} \frac{k_{y,n}}{k_{c,n}} \frac{2}{\sqrt{ab}} I_{csx} I_{scy} \right) \end{aligned} \right] = \\
 &= Z_k^{-1} \frac{2\sqrt{\varepsilon_m \varepsilon_n}}{ab k_{c,k} k_{c,n}} \left[-k_{x,k} \left(\varepsilon_{tt,yx} k_{x,n} I_{scx} I_{csy} + k_{y,n} (\varepsilon_{tt,yy} - \varepsilon_0) I_{ssx} I_{ccy} \right) + \right. \\
 &\quad \left. + k_{y,k} \left((\varepsilon_{tt,xx} - \varepsilon_0) k_{x,n} I_{ccx} I_{ssy} + \varepsilon_{tt,xy} k_{y,n} I_{csx} I_{scy} \right) \right]
 \end{aligned} \tag{7.146}$$

Caso TM-TE

$$\begin{aligned}
 I_{\varepsilon_i}^{kn(eh)} &= \int_{\Omega_M} \left[h_{x,k} \left(\varepsilon_{tt,yx} e_{x,n} + (\varepsilon_{tt,yy} - \varepsilon_0) e_{y,n} \right) - \right. \\
 &\quad \left. - h_{y,k} \left((\varepsilon_{tt,xx} - \varepsilon_0) e_{x,n} + \varepsilon_{tt,xy} e_{y,n} \right) \right] dS = \\
 &= \int_{\Omega_M} \left\{ \begin{aligned} &\left[-Z_k^{-1} \frac{k_{y,k}}{k_{c,k}} \frac{2}{\sqrt{ab}} \operatorname{sen}(k_{x,k} x) \cos(k_{y,k} y) \right] \cdot \\ &\left(\varepsilon_{tt,yx} \left[-\frac{k_{y,n}}{k_{c,n}} \sqrt{\frac{\varepsilon_{m'} \varepsilon_{n'}}{ab}} \cos(k_{x,n} x) \operatorname{sen}(k_{y,n} y) \right] + \right. \\ &\quad \left. + (\varepsilon_{tt,yy} - \varepsilon_0) \left[\frac{k_{x,n}}{k_{c,n}} \sqrt{\frac{\varepsilon_{m'} \varepsilon_{n'}}{ab}} \operatorname{sen}(k_{x,n} x) \cos(k_{y,n} y) \right] \right) \\ &- \left[Z_k^{-1} \frac{k_{x,k}}{k_{c,k}} \frac{2}{\sqrt{ab}} \cos(k_{x,k} x) \operatorname{sen}(k_{y,k} y) \right] \cdot \\ &\left((\varepsilon_{tt,xx} - \varepsilon_0) \left[-\frac{k_{y,n}}{k_{c,n}} \sqrt{\frac{\varepsilon_{m'} \varepsilon_{n'}}{ab}} \cos(k_{x,n} x) \operatorname{sen}(k_{y,n} y) \right] + \right. \\ &\quad \left. + \varepsilon_{tt,xy} \left[\frac{k_{x,n}}{k_{c,n}} \sqrt{\frac{\varepsilon_{m'} \varepsilon_{n'}}{ab}} \operatorname{sen}(k_{x,n} x) \cos(k_{y,n} y) \right] \right) \end{aligned} \right\} dS = \\
 &= \left[\begin{aligned} &Z_k^{-1} \frac{k_{y,k}}{k_{c,k}} \frac{2}{\sqrt{ab}} \left(\varepsilon_{tt,yx} \frac{k_{y,n}}{k_{c,n}} \sqrt{\frac{\varepsilon_{m'} \varepsilon_{n'}}{ab}} I_{scx} I_{csy} - \right. \\ &\quad \left. - (\varepsilon_{tt,yy} - \varepsilon_0) \frac{k_{x,n}}{k_{c,n}} \sqrt{\frac{\varepsilon_{m'} \varepsilon_{n'}}{ab}} I_{ssx} I_{ccy} \right) + \\ &+ Z_k^{-1} \frac{k_{x,k}}{k_{c,k}} \frac{2}{\sqrt{ab}} \left(+ (\varepsilon_{tt,xx} - \varepsilon_0) \frac{k_{y,n}}{k_{c,n}} \sqrt{\frac{\varepsilon_{m'} \varepsilon_{n'}}{ab}} I_{ccx} I_{ssy} - \right. \\ &\quad \left. - \varepsilon_{tt,xy} \frac{k_{x,n}}{k_{c,n}} \sqrt{\frac{\varepsilon_{m'} \varepsilon_{n'}}{ab}} I_{csx} I_{scy} \right) \end{aligned} \right] = \\
 &= Z_k^{-1} \frac{2\sqrt{\varepsilon_{m'} \varepsilon_{n'}}}{ab k_{c,k} k_{c,n}} \left[k_{y,k} \left(\varepsilon_{tt,yx} k_{y,n} I_{scx} I_{csy} - k_{x,n} (\varepsilon_{tt,yy} - \varepsilon_0) I_{ssx} I_{ccy} \right) + \right. \\
 &\quad \left. + k_{x,k} \left((\varepsilon_{tt,xx} - \varepsilon_0) k_{y,n} I_{ccx} I_{ssy} - \varepsilon_{tt,xy} k_{x,n} I_{csx} I_{scy} \right) \right]
 \end{aligned} \tag{7.147}$$

Caso TM-TM

$$\begin{aligned}
 I_{\varepsilon_{tt}}^{kn(ee)} &= \int_{\Omega_M} \left[h_{x,k} \left(\varepsilon_{tt,yx} e_{x,n} + \left(\varepsilon_{tt,yy} - \varepsilon_0 \right) e_{y,n} \right) - \right. \\
 &\quad \left. - h_{y,k} \left(\left(\varepsilon_{tt,xx} - \varepsilon_0 \right) e_{x,n} + \varepsilon_{tt,xy} e_{y,n} \right) \right] dS = \\
 &= \int_{\Omega_M} \left\{ \begin{aligned} &\left[-Z_k^{-1} \frac{k_{y,k}}{k_{c,k}} \frac{2}{\sqrt{ab}} \operatorname{sen}(k_{x,k} x) \cos(k_{y,k} y) \right] \cdot \\ &\left(\varepsilon_{tt,yx} \left[\frac{k_{x,n}}{k_{c,n}} \frac{2}{\sqrt{ab}} \cos(k_{x,n} x) \operatorname{sen}(k_{y,n} y) \right] + \right. \\ &\left. + \left(\varepsilon_{tt,yy} - \varepsilon_0 \right) \left[\frac{k_{y,n}}{k_{c,n}} \frac{2}{\sqrt{ab}} \operatorname{sen}(k_{x,n} x) \cos(k_{y,n} y) \right] \right) \\ &- \left[Z_k^{-1} \frac{k_{x,k}}{k_{c,k}} \frac{2}{\sqrt{ab}} \cos(k_{x,k} x) \operatorname{sen}(k_{y,k} y) \right] \cdot \\ &\left(\left(\varepsilon_{tt,xx} - \varepsilon_0 \right) \left[\frac{k_{x,n}}{k_{c,n}} \frac{2}{\sqrt{ab}} \cos(k_{x,n} x) \operatorname{sen}(k_{y,n} y) \right] + \right. \\ &\left. + \varepsilon_{tt,xy} \left[\frac{k_{y,n}}{k_{c,n}} \frac{2}{\sqrt{ab}} \operatorname{sen}(k_{x,n} x) \cos(k_{y,n} y) \right] \right) \end{aligned} \right\} dS = \\
 &= \left[\begin{aligned} &-Z_k^{-1} \frac{k_{y,k}}{k_{c,k}} \frac{2}{\sqrt{ab}} \left(\varepsilon_{tt,yx} \frac{k_{x,n}}{k_{c,n}} \frac{2}{\sqrt{ab}} I_{scx} I_{csy} + \right. \\ &\left. + \left(\varepsilon_{tt,yy} - \varepsilon_0 \right) \frac{k_{y,n}}{k_{c,n}} \frac{2}{\sqrt{ab}} I_{ssx} I_{ccy} \right) + \\ &-Z_k^{-1} \frac{k_{x,k}}{k_{c,k}} \frac{2}{\sqrt{ab}} \left(\left(\varepsilon_{tt,xx} - \varepsilon_0 \right) \frac{k_{x,n}}{k_{c,n}} \frac{2}{\sqrt{ab}} I_{ccx} I_{ssy} + \right. \\ &\left. + \varepsilon_{tt,xy} \frac{k_{y,n}}{k_{c,n}} \frac{2}{\sqrt{ab}} I_{csx} I_{scy} \right) \end{aligned} \right] = \tag{7.148} \\
 &= -Z_k^{-1} \frac{4}{ab k_{c,k} k_{c,n}} \left[\begin{aligned} &k_{y,k} \left(\varepsilon_{tt,yx} k_{x,n} I_{scx} I_{csy} + k_{y,n} \left(\varepsilon_{tt,yy} - \varepsilon_0 \right) I_{ssx} I_{ccy} \right) + \\ &+ k_{x,k} \left(\left(\varepsilon_{tt,xx} - \varepsilon_0 \right) k_{x,n} I_{ccx} I_{ssy} + \varepsilon_{tt,xy} k_{y,n} I_{csx} I_{scy} \right) \end{aligned} \right]
 \end{aligned}$$

• **Matriz** $M_{\varepsilon_{tz}}^{kn}$

$$\begin{aligned}
 M_{\varepsilon_{tz}}^{kn} &= \int_{\Omega_M} \mathbf{h}_k \cdot \varepsilon_{tz} e_{z,n} \times \hat{z} dS = \\
 &= \int_{\Omega_M} \mathbf{h}_k \cdot \left(\varepsilon_{tz,x} \hat{\mathbf{x}} + \varepsilon_{tz,y} \hat{\mathbf{y}} \right) e_{z,n} \times \hat{z} dS = \\
 &= \int_{\Omega_M} \mathbf{h}_k \cdot \left(\varepsilon_{tz,y} \hat{\mathbf{x}} - \varepsilon_{tz,x} \hat{\mathbf{y}} \right) e_{z,n} dS = \\
 &= \int_{\Omega_M} \left(\varepsilon_{tz,y} h_{x,k} - \varepsilon_{tz,x} h_{y,k} \right) e_{z,n} dS
 \end{aligned} \tag{7.149}$$

Esta matriz tiene valores no nulos para el caso de acoplos TE-TM y TM-TM.

Caso TE-TM

$$\begin{aligned}
 M_{\varepsilon_{tz}}^{kn(he)} &= \int_{\Omega_M} \left(h_{x,k} \varepsilon_{tz,y} - h_{y,k} \varepsilon_{tz,x} \right) e_{z,n} dS = \\
 &= \int_{\Omega_M} \left\{ \begin{aligned} &\left[-Z_k^{-1} \frac{k_{x,k}}{k_{c,k}} \sqrt{\frac{\varepsilon_m \varepsilon_n}{ab}} \operatorname{sen}(k_{x,k} x) \cos(k_{y,k} y) \right] \varepsilon_{tz,y} - \\ &\left[-Z_k^{-1} \frac{k_{y,k}}{k_{c,k}} \sqrt{\frac{\varepsilon_m \varepsilon_n}{ab}} \cos(k_{x,k} x) \operatorname{sen}(k_{y,k} y) \right] \varepsilon_{tz,x} \\ &\cdot \left[-\frac{k_{c,n}}{\gamma_n} \frac{2}{\sqrt{ab}} \operatorname{sen}(k_{x,n} x) \operatorname{sen}(k_{y,n} y) \right] \end{aligned} \right\} dS = \\
 &= \frac{k_{c,n}}{\gamma_n} \frac{2}{\sqrt{ab}} \left[+Z_k^{-1} \frac{k_{x,k}}{k_{c,k}} \sqrt{\frac{\varepsilon_m \varepsilon_n}{ab}} \varepsilon_{tz,y} I_{ssx} I_{csy} - Z_k^{-1} \frac{k_{y,k}}{k_{c,k}} \sqrt{\frac{\varepsilon_m \varepsilon_n}{ab}} \varepsilon_{tz,x} I_{csx} I_{ssy} \right] = \\
 &= Z_k^{-1} \gamma_n^{-1} \frac{k_{c,n}}{k_{c,k}} \frac{2\sqrt{\varepsilon_m \varepsilon_n}}{ab} \left[k_{x,k} \varepsilon_{tz,y} I_{ssx} I_{csy} - k_{y,k} \varepsilon_{tz,x} I_{csx} I_{ssy} \right]
 \end{aligned} \tag{7.150}$$

Caso TM-TM

$$\begin{aligned}
 M_{\varepsilon_{tz}}^{kn(ee)} &= \int_{\Omega_M} \left(h_{x,k} \varepsilon_{tz,y} - h_{y,k} \varepsilon_{tz,x} \right) e_{z,n} dS = \\
 &= \int_{\Omega_M} \left\{ \begin{aligned} &\left[-Z_k^{-1} \frac{k_{y,k}}{k_{c,k}} \frac{2}{\sqrt{ab}} \operatorname{sen}(k_{x,k} x) \cos(k_{y,k} y) \right] \varepsilon_{tz,y} - \\ &\left[Z_k^{-1} \frac{k_{x,k}}{k_{c,k}} \frac{2}{\sqrt{ab}} \cos(k_{x,k} x) \operatorname{sen}(k_{y,k} y) \right] \varepsilon_{tz,x} \\ &\cdot \left[-\frac{k_{c,n}}{\gamma_n} \frac{2}{\sqrt{ab}} \operatorname{sen}(k_{x,n} x) \operatorname{sen}(k_{y,n} y) \right] \end{aligned} \right\} dS = \\
 &= \frac{k_{c,n}}{\gamma_n} \frac{2}{\sqrt{ab}} \left[+Z_k^{-1} \frac{k_{y,k}}{k_{c,k}} \frac{2}{\sqrt{ab}} \varepsilon_{tz,y} I_{ssx} I_{csy} + Z_k^{-1} \frac{k_{x,k}}{k_{c,k}} \frac{2}{\sqrt{ab}} \varepsilon_{tz,x} I_{csx} I_{ssy} \right] = \\
 &= Z_k^{-1} \gamma_n^{-1} \frac{k_{c,n}}{k_{c,k}} \frac{4}{ab} \left[k_{y,k} \varepsilon_{tz,y} I_{ssx} I_{csy} + k_{x,k} \varepsilon_{tz,x} I_{csx} I_{ssy} \right]
 \end{aligned} \tag{7.151}$$

• **Matriz** $M_{\xi_{tt}}^{kn}$

$$\begin{aligned}
 M_{\xi_{tt}}^{kn} &= \int_{\Omega_M} \mathbf{h}_k \cdot \xi_{tt} \mathbf{h}_n \times \hat{\mathbf{z}} dS = \\
 &= \int_{\Omega_M} \mathbf{h}_k \cdot \left[(\xi_{tt,xx} h_{x,n} + \xi_{tt,xy} h_{y,n}) \hat{\mathbf{x}} + (\xi_{tt,yx} h_{x,n} + \xi_{tt,yy} h_{y,n}) \hat{\mathbf{y}} \right] \times \hat{\mathbf{z}} dS = \\
 &= \int_{\Omega_M} \mathbf{h}_k \cdot \left[(\xi_{tt,yx} h_{x,n} + \xi_{tt,yy} h_{y,n}) \hat{\mathbf{x}} - (\xi_{tt,xx} h_{x,n} + \xi_{tt,xy} h_{y,n}) \hat{\mathbf{y}} \right] dS = \\
 &= \int_{\Omega_M} \left[h_{x,k} (\xi_{tt,yx} h_{x,n} + \xi_{tt,yy} h_{y,n}) - h_{y,k} (\xi_{tt,xx} h_{x,n} + \xi_{tt,xy} h_{y,n}) \right] dS
 \end{aligned} \tag{7.152}$$

Se consideran los cuatro casos posibles de acoplos TE y TM.

Caso TE-TE

$$\begin{aligned}
 M_{\xi_t}^{kn(hh)} &= \int_{\Omega_M} \left[h_{x,k} (\xi_{tt,yx} h_{x,n} + \xi_{tt,yy} h_{y,n}) - h_{y,k} (\xi_{tt,xx} h_{x,n} + \xi_{tt,xy} h_{y,n}) \right] dS = \\
 &= \int_{\Omega_M} \left\{ \begin{aligned} &\left[-Z_k^{-1} \frac{k_{x,k}}{k_{c,k}} \sqrt{\frac{\epsilon_m \epsilon_n}{ab}} \text{sen}(k_{x,k} x) \cos(k_{y,k} y) \right] \cdot \\ &\left(\xi_{tt,yx} \left[-Z_n^{-1} \frac{k_{x,n}}{k_{c,n}} \sqrt{\frac{\epsilon_{m'} \epsilon_{n'}}{ab}} \text{sen}(k_{x,n} x) \cos(k_{y,n} y) \right] + \right. \\ &\left. + \xi_{tt,yy} \left[-Z_n^{-1} \frac{k_{y,n}}{k_{c,n}} \sqrt{\frac{\epsilon_{m'} \epsilon_{n'}}{ab}} \cos(k_{x,n} x) \text{sen}(k_{y,n} y) \right] \right) - \\ &\left[-Z_k^{-1} \frac{k_{y,k}}{k_{c,k}} \sqrt{\frac{\epsilon_m \epsilon_n}{ab}} \cos(k_{x,k} x) \text{sen}(k_{y,k} y) \right] \cdot \\ &\left(\xi_{tt,xx} \left[-Z_n^{-1} \frac{k_{x,n}}{k_{c,n}} \sqrt{\frac{\epsilon_{m'} \epsilon_{n'}}{ab}} \text{sen}(k_{x,n} x) \cos(k_{y,n} y) \right] + \right. \\ &\left. + \xi_{t,xy} \left[-Z_n^{-1} \frac{k_{y,n}}{k_{c,n}} \sqrt{\frac{\epsilon_{m'} \epsilon_{n'}}{ab}} \cos(k_{x,n} x) \text{sen}(k_{y,n} y) \right] \right) \end{aligned} \right\} dS = \\
 &= \left[\begin{aligned} &Z_k^{-1} \frac{k_{x,k}}{k_{c,k}} \sqrt{\frac{\epsilon_m \epsilon_n}{ab}} \left(\xi_{tt,yx} Z_n^{-1} \frac{k_{x,n}}{k_{c,n}} \sqrt{\frac{\epsilon_{m'} \epsilon_{n'}}{ab}} I_{ssx} I_{ccy} + \right. \\ &\left. + \xi_{tt,yy} Z_n^{-1} \frac{k_{y,n}}{k_{c,n}} \sqrt{\frac{\epsilon_{m'} \epsilon_{n'}}{ab}} I_{scx} I_{csy} \right) - \\ &- Z_k^{-1} \frac{k_{y,k}}{k_{c,k}} \sqrt{\frac{\epsilon_m \epsilon_n}{ab}} \left(\xi_{tt,xx} Z_n^{-1} \frac{k_{x,n}}{k_{c,n}} \sqrt{\frac{\epsilon_{m'} \epsilon_{n'}}{ab}} I_{csc} I_{scy} + \right. \\ &\left. + \xi_{t,xy} Z_n^{-1} \frac{k_{y,n}}{k_{c,n}} \sqrt{\frac{\epsilon_{m'} \epsilon_{n'}}{ab}} I_{ccx} I_{ssy} \right) \end{aligned} \right] = \\
 &= Z_k^{-1} Z_n^{-1} \frac{\sqrt{\epsilon_m \epsilon_n \epsilon_{m'} \epsilon_{n'}}}{ab k_{c,k} k_{c,n}} \left[\begin{aligned} &k_{x,k} (\xi_{tt,yx} k_{x,n} I_{ssx} I_{ccy} + \xi_{tt,yy} k_{y,n} I_{scx} I_{csy}) - \\ &- k_{y,k} (\xi_{tt,xx} k_{x,n} I_{csc} I_{scy} + \xi_{t,xy} k_{y,n} I_{ccx} I_{ssy}) \end{aligned} \right]
 \end{aligned} \tag{7.153}$$

Caso TE-TM

$$\begin{aligned}
M_{\xi_{tt}}^{kn(he)} &= \int_{\Omega_M} \left[h_{x,k} \left(\xi_{tt,yx} h_{x,n} + \xi_{tt,yy} h_{y,n} \right) - \right. \\
&\quad \left. - h_{y,k} \left(\xi_{tt,xx} h_{x,n} + \xi_{tt,xy} h_{y,n} \right) \right] dS = \\
&= \int_{\Omega_M} \left\{ \begin{aligned} &\left[-Z_k^{-1} \frac{k_{x,k}}{k_{c,k}} \sqrt{\frac{\epsilon_m \epsilon_n}{ab}} \operatorname{sen}(k_{x,k} x) \cos(k_{y,k} y) \right] \cdot \\ &\left(\xi_{tt,yx} \left[-Z_n^{-1} \frac{k_{y,n}}{k_{c,n}} \frac{2}{\sqrt{ab}} \operatorname{sen}(k_{x,n} x) \cos(k_{y,n} y) \right] + \right. \\ &\quad \left. + \xi_{tt,yy} \left[Z_n^{-1} \frac{k_{x,n}}{k_{c,n}} \frac{2}{\sqrt{ab}} \cos(k_{x,n} x) \operatorname{sen}(k_{y,n} y) \right] \right) \\ &\left[-Z_k^{-1} \frac{k_{y,k}}{k_{c,k}} \sqrt{\frac{\epsilon_m \epsilon_n}{ab}} \cos(k_{x,k} x) \operatorname{sen}(k_{y,k} y) \right] \cdot \\ &\left(\xi_{tt,xx} \left[-Z_n^{-1} \frac{k_{y,n}}{k_{c,n}} \frac{2}{\sqrt{ab}} \operatorname{sen}(k_{x,n} x) \cos(k_{y,n} y) \right] + \right. \\ &\quad \left. + \xi_{tt,xy} \left[Z_n^{-1} \frac{k_{x,n}}{k_{c,n}} \frac{2}{\sqrt{ab}} \cos(k_{x,n} x) \operatorname{sen}(k_{y,n} y) \right] \right) \end{aligned} \right\} dS = \\
&= \left[\begin{aligned} &Z_k^{-1} \frac{k_{x,k}}{k_{c,k}} \sqrt{\frac{\epsilon_m \epsilon_n}{ab}} \left(\xi_{tt,yx} Z_n^{-1} \frac{k_{y,n}}{k_{c,n}} \frac{2}{\sqrt{ab}} I_{ssx} I_{ccy} - \right. \\ &\quad \left. - \xi_{tt,yy} Z_n^{-1} \frac{k_{x,n}}{k_{c,n}} \frac{2}{\sqrt{ab}} I_{scx} I_{csy} \right) \\ &- Z_k^{-1} \frac{k_{y,k}}{k_{c,k}} \sqrt{\frac{\epsilon_m \epsilon_n}{ab}} \left(\xi_{tt,xx} Z_n^{-1} \frac{k_{y,n}}{k_{c,n}} \frac{2}{\sqrt{ab}} I_{ssx} I_{ccy} - \right. \\ &\quad \left. - \xi_{tt,xy} Z_n^{-1} \frac{k_{x,n}}{k_{c,n}} \frac{2}{\sqrt{ab}} I_{scx} I_{csy} \right) \end{aligned} \right] = \\
&= Z_k^{-1} Z_n^{-1} \frac{2\sqrt{\epsilon_m \epsilon_n}}{ab k_{c,k} k_{c,n}} \left[\begin{aligned} &k_{x,k} \left(\xi_{tt,yx} k_{y,n} I_{ssx} I_{ccy} - \xi_{tt,yy} k_{x,n} I_{scx} I_{csy} \right) - \\ &- k_{y,k} \left(\xi_{tt,xx} k_{y,n} I_{scx} I_{csy} - \xi_{tt,xy} k_{x,n} I_{ccx} I_{ssy} \right) \end{aligned} \right]
\end{aligned} \tag{7.154}$$

Caso TM-TE

$$\begin{aligned}
 M_{\xi_u}^{kn(eh)} &= \int_{\Omega_M} \left[h_{x,k} \left(\xi_{tt,yx} h_{x,n} + \xi_{tt,yy} h_{y,n} \right) - \right. \\
 &\quad \left. - h_{y,k} \left(\xi_{tt,xx} h_{x,n} + \xi_{tt,xy} h_{y,n} \right) \right] dS = \\
 &= \int_{\Omega_M} \left\{ \begin{aligned} &\left[-Z_k^{-1} \frac{k_{y,k}}{k_{c,k}} \frac{2}{\sqrt{ab}} \text{sen}(k_{x,k}x) \cos(k_{y,k}y) \right] \cdot \\ &\left(\xi_{tt,yx} \left[-Z_n^{-1} \frac{k_{x,n}}{k_{c,n}} \sqrt{\frac{\varepsilon_{m'} \varepsilon_{n'}}{ab}} \text{sen}(k_{x,n}x) \cos(k_{y,n}y) \right] + \right. \\ &\quad \left. + \xi_{tt,yy} \left[-Z_n^{-1} \frac{k_{y,n}}{k_{c,n}} \sqrt{\frac{\varepsilon_{m'} \varepsilon_{n'}}{ab}} \cos(k_{x,n}x) \text{sen}(k_{y,n}y) \right] \right) \\ &\left[Z_k^{-1} \frac{k_{x,k}}{k_{c,k}} \frac{2}{\sqrt{ab}} \cos(k_{x,k}x) \text{sen}(k_{y,k}y) \right] \cdot \\ &\left(\xi_{tt,xx} \left[-Z_n^{-1} \frac{k_{x,n}}{k_{c,n}} \sqrt{\frac{\varepsilon_{m'} \varepsilon_{n'}}{ab}} \text{sen}(k_{x,n}x) \cos(k_{y,n}y) \right] + \right. \\ &\quad \left. + \xi_{tt,xy} \left[-Z_n^{-1} \frac{k_{y,n}}{k_{c,n}} \sqrt{\frac{\varepsilon_{m'} \varepsilon_{n'}}{ab}} \cos(k_{x,n}x) \text{sen}(k_{y,n}y) \right] \right) \end{aligned} \right\} dS = \\
 &= \left[\begin{aligned} &Z_k^{-1} \frac{k_{y,k}}{k_{c,k}} \frac{2}{\sqrt{ab}} \left(\xi_{tt,yx} Z_n^{-1} \frac{k_{x,n}}{k_{c,n}} \sqrt{\frac{\varepsilon_{m'} \varepsilon_{n'}}{ab}} I_{ssx} I_{ccy} + \right. \\ &\quad \left. + \xi_{tt,yy} Z_n^{-1} \frac{k_{y,n}}{k_{c,n}} \sqrt{\frac{\varepsilon_{m'} \varepsilon_{n'}}{ab}} I_{scx} I_{csy} \right) \\ &+ Z_k^{-1} \frac{k_{x,k}}{k_{c,k}} \frac{2}{\sqrt{ab}} \left(\xi_{tt,xx} Z_n^{-1} \frac{k_{x,n}}{k_{c,n}} \sqrt{\frac{\varepsilon_{m'} \varepsilon_{n'}}{ab}} I_{ssx} I_{ccy} + \right. \\ &\quad \left. + \xi_{tt,xy} Z_n^{-1} \frac{k_{y,n}}{k_{c,n}} \sqrt{\frac{\varepsilon_{m'} \varepsilon_{n'}}{ab}} I_{scx} I_{csy} \right) \end{aligned} \right] = \\
 &= Z_k^{-1} Z_n^{-1} \frac{2\sqrt{\varepsilon_{m'} \varepsilon_{n'}}}{abk_{c,k}} \left[\begin{aligned} &k_{y,k} \left(\xi_{tt,yx} k_{x,n} I_{ssx} I_{ccy} + \xi_{tt,yy} k_{y,n} I_{scx} I_{csy} \right) + \\ &+ k_{x,k} \left(\xi_{tt,xx} k_{x,n} I_{scx} I_{csy} + \xi_{tt,xy} k_{y,n} I_{ccx} I_{ssy} \right) \end{aligned} \right]
 \end{aligned} \tag{7.155}$$

Caso TM-TM

$$\begin{aligned}
 M_{\xi_{tz}}^{kn(he)} &= \int_{\Omega_M} \left[h_{x,k} \left(\xi_{tt,yx} h_{x,n} + \xi_{tt,yy} h_{y,n} \right) - \right. \\
 &\quad \left. - h_{y,k} \left(\xi_{tt,xx} h_{x,n} + \xi_{tt,xy} h_{y,n} \right) \right] dS = \\
 &= \int_{\Omega_M} \left\{ \begin{aligned} &\left[-Z_k^{-1} \frac{k_{y,k}}{k_{c,k}} \frac{2}{\sqrt{ab}} \text{sen}(k_{x,k} x) \cos(k_{y,k} y) \right] \cdot \\ &\left(\xi_{tt,yx} \left[-Z_n^{-1} \frac{k_{y,n}}{k_{c,n}} \frac{2}{\sqrt{ab}} \text{sen}(k_{x,n} x) \cos(k_{y,n} y) \right] + \right. \\ &\quad \left. + \xi_{tt,yy} \left[Z_n^{-1} \frac{k_{x,n}}{k_{c,n}} \frac{2}{\sqrt{ab}} \cos(k_{x,n} x) \text{sen}(k_{y,n} y) \right] \right) \\ &\left[Z_k^{-1} \frac{k_{x,k}}{k_{c,k}} \frac{2}{\sqrt{ab}} \cos(k_{x,k} x) \text{sen}(k_{y,k} y) \right] \cdot \\ &\left(\xi_{tt,xx} \left[-Z_n^{-1} \frac{k_{y,n}}{k_{c,n}} \frac{2}{\sqrt{ab}} \text{sen}(k_{x,n} x) \cos(k_{y,n} y) \right] + \right. \\ &\quad \left. + \xi_{tt,xy} \left[Z_n^{-1} \frac{k_{x,n}}{k_{c,n}} \frac{2}{\sqrt{ab}} \cos(k_{x,n} x) \text{sen}(k_{y,n} y) \right] \right) \end{aligned} \right\} dS = \\
 &= \left[\begin{aligned} &Z_k^{-1} \frac{k_{y,k}}{k_{c,k}} \frac{2}{\sqrt{ab}} \left(\xi_{tt,yx} Z_n^{-1} \frac{k_{y,n}}{k_{c,n}} \frac{2}{\sqrt{ab}} I_{ssx} I_{ccy} - \right. \\ &\quad \left. - \xi_{tt,yy} Z_n^{-1} \frac{k_{x,n}}{k_{c,n}} \frac{2}{\sqrt{ab}} I_{scx} I_{csy} \right) + \\ &+ Z_k^{-1} \frac{k_{x,k}}{k_{c,k}} \frac{2}{\sqrt{ab}} \left(\xi_{tt,xx} Z_n^{-1} \frac{k_{y,n}}{k_{c,n}} \frac{2}{\sqrt{ab}} I_{ssx} I_{ccy} - \right. \\ &\quad \left. - \xi_{tt,xy} Z_n^{-1} \frac{k_{x,n}}{k_{c,n}} \frac{2}{\sqrt{ab}} I_{scx} I_{csy} \right) \end{aligned} \right] = \\
 &= Z_k^{-1} Z_n^{-1} \frac{4}{abk_{c,k}} \left[\begin{aligned} &k_{y,k} \left(\xi_{tt,yx} k_{y,n} I_{ssx} I_{ccy} - \xi_{tt,yy} k_{x,n} I_{scx} I_{csy} \right) + \\ &+ k_{x,k} \left(\xi_{tt,xx} k_{y,n} I_{csx} I_{scy} - \xi_{tt,xy} k_{x,n} I_{ccx} I_{ssy} \right) \end{aligned} \right] \tag{7.156}
 \end{aligned}$$

• **Matriz** $M_{\xi_{tz}}^{kn}$

$$\begin{aligned}
 M_{\xi_{tz}}^{kn} &= \int_{\Omega_M} \mathbf{h}_k \cdot \xi_{tz} h_{z,n} \times \hat{z} dS = \int_{\Omega_M} \mathbf{h}_k \cdot \left(\xi_{tz,x} \hat{\mathbf{x}} + \xi_{tz,y} \hat{\mathbf{y}} \right) h_{z,n} \times \hat{z} dS = \\
 &= \int_{\Omega_M} \mathbf{h}_k \cdot \left(\xi_{tz,y} \hat{\mathbf{x}} - \xi_{tz,x} \hat{\mathbf{y}} \right) h_{z,n} dS = \int_{\Omega_M} \left(h_{x,k} \xi_{tz,y} - h_{y,k} \xi_{tz,x} \right) h_{z,n} dS \tag{7.157}
 \end{aligned}$$

Esta matriz tiene valores no nulos para los acoplos TE-TE y TM-TE.

Caso TE-TE

$$\begin{aligned}
 M_{\xi_{tz}}^{km(hh)} &= \int_{\Omega_M} \left(h_{x,k} \xi_{tz,y} - h_{y,k} \xi_{tz,x} \right) h_{z,n} dS = \\
 &= \int_{\Omega_M} \left\{ \begin{array}{l} \left[-Z_k^{-1} \frac{k_{x,k}}{k_{c,k}} \frac{\sqrt{\varepsilon_m \varepsilon_n}}{ab} \operatorname{sen}(k_{x,k} x) \cos(k_{y,k} y) \right] \xi_{tz,y} - \\ \left[-Z_k^{-1} \frac{k_{y,k}}{k_{c,k}} \frac{\sqrt{\varepsilon_m \varepsilon_n}}{ab} \cos(k_{x,k} x) \operatorname{sen}(k_{y,k} y) \right] \xi_{tz,x} \\ \cdot \left[-\frac{k_{c,n}}{\gamma_n} Z_n^{-1} \sqrt{\frac{\varepsilon_{m'} \varepsilon_{n'}}{ab}} \cos(k_{x,n} x) \cos(k_{y,n} y) \right] \end{array} \right\} dS = \\
 &= \frac{k_{c,n}}{\gamma_n} Z_n^{-1} \sqrt{\frac{\varepsilon_{m'} \varepsilon_{n'}}{ab}} \begin{bmatrix} Z_k^{-1} \frac{k_{x,k}}{k_{c,k}} \frac{\sqrt{\varepsilon_m \varepsilon_n}}{ab} \xi_{tz,y} I_{scx} I_{ccy} - \\ -Z_k^{-1} \frac{k_{y,k}}{k_{c,k}} \frac{\sqrt{\varepsilon_m \varepsilon_n}}{ab} \xi_{tz,x} I_{ccx} I_{scy} \end{bmatrix} = \\
 &= Z_k^{-1} Z_n^{-1} \gamma_n^{-1} \frac{k_{c,n}}{k_{c,k}} \frac{\sqrt{\varepsilon_m \varepsilon_n \varepsilon_{m'} \varepsilon_{n'}}}{ab} \left[k_{x,k} \xi_{tz,y} I_{scx} I_{ccy} - k_{y,k} \xi_{tz,x} I_{ccx} I_{scy} \right] \tag{7.158}
 \end{aligned}$$

Caso TM-TE

$$\begin{aligned}
 M_{\xi_{tz}}^{km(eh)} &= \int_{\Omega_M} \left(h_{x,k} \xi_{tz,y} - h_{y,k} \xi_{tz,x} \right) h_{z,n} dS = \\
 &= \int_{\Omega_M} \left\{ \begin{array}{l} \left[-Z_k^{-1} \frac{k_{y,k}}{k_{c,k}} \frac{2}{\sqrt{ab}} \operatorname{sen}(k_{x,k} x) \cos(k_{y,k} y) \right] \xi_{tz,y} - \\ \left[Z_k^{-1} \frac{k_{x,k}}{k_{c,k}} \frac{2}{\sqrt{ab}} \cos(k_{x,k} x) \operatorname{sen}(k_{y,k} y) \right] \xi_{tz,x} \\ \cdot \left[-\frac{k_{c,n}}{\gamma_n} Z_n^{-1} \sqrt{\frac{\varepsilon_{m'} \varepsilon_{n'}}{ab}} \cos(k_{x,n} x) \cos(k_{y,n} y) \right] \end{array} \right\} dS = \\
 &= \frac{k_{c,n}}{\gamma_n} Z_n^{-1} \sqrt{\frac{\varepsilon_{m'} \varepsilon_{n'}}{ab}} \begin{bmatrix} Z_k^{-1} \frac{k_{y,k}}{k_{c,k}} \frac{2}{\sqrt{ab}} \xi_{tz,y} I_{scx} I_{ccy} + \\ + Z_k^{-1} \frac{k_{x,k}}{k_{c,k}} \frac{2}{\sqrt{ab}} \xi_{tz,x} I_{ccx} I_{scy} \end{bmatrix} = \\
 &= Z_k^{-1} Z_n^{-1} \gamma_n^{-1} \frac{k_{c,n}}{k_{c,k}} \frac{2\sqrt{\varepsilon_{m'} \varepsilon_{n'}}}{ab} \left[k_{y,k} \xi_{tz,y} I_{scx} I_{ccy} + k_{x,k} \xi_{tz,x} I_{ccx} I_{scy} \right] \tag{7.159}
 \end{aligned}$$

• **Vector** $V_{\xi_{tz}}^k$

$$V_{\xi_{tz}}^k = \int_S \mathbf{h}_k \cdot \xi_{tz} \times \hat{\mathbf{z}} dS = \int_S (h_{x,k} \xi_{tz,y} - h_{y,k} \xi_{tz,x}) dS \quad (7.160)$$

Este vector es no nulo para los casos TE y TM

Caso TE

$$\begin{aligned} V_{\xi_{tz}}^k &= \int_S \mathbf{h}_k \cdot \xi_{tz} \times \hat{\mathbf{z}} dS = \int_S (h_{x,k} \xi_{tz,y} - h_{y,k} \xi_{tz,x}) dS = \\ &= \int_S \left(\begin{array}{l} \left[-Z_k^{-1} \frac{k_{x,k}}{k_{c,k}} \sqrt{\frac{\epsilon_m \epsilon_n}{ab}} \operatorname{sen}(k_{x,k} x) \cos(k_{y,k} y) \right] \xi_{tz,y} - \\ \left[-Z_k^{-1} \frac{k_{y,k}}{k_{c,k}} \sqrt{\frac{\epsilon_m \epsilon_n}{ab}} \cos(k_{x,k} x) \operatorname{sen}(k_{y,k} y) \right] \xi_{tz,x} \end{array} \right) dS = \\ &= -\xi_{tz,y} Z_k^{-1} \frac{k_{x,k}}{k_{c,k}} \sqrt{\frac{\epsilon_m \epsilon_n}{ab}} I_{sx} I_{cy} + \xi_{tz,x} Z_k^{-1} \frac{k_{y,k}}{k_{c,k}} \sqrt{\frac{\epsilon_m \epsilon_n}{ab}} I_{cx} I_{sy} = \\ &= \frac{Z_k^{-1}}{k_{c,k}} \sqrt{\frac{\epsilon_m \epsilon_n}{ab}} \left(-\xi_{tz,y} k_{x,k} I_{sx} I_{cy} + \xi_{tz,x} k_{y,k} I_{cx} I_{sy} \right) \end{aligned} \quad (7.161)$$

Caso TM

$$\begin{aligned} V_{\xi_{tz}}^k &= \int_S \mathbf{h}_k \cdot \xi_{tz} \times \hat{\mathbf{z}} dS = \int_S (h_{x,k} \xi_{tz,y} - h_{y,k} \xi_{tz,x}) dS = \\ &= \int_S \left(\begin{array}{l} \left[-Z_k^{-1} \frac{k_{y,k}}{k_{c,k}} \frac{2}{\sqrt{ab}} \operatorname{sen}(k_{x,k} x) \cos(k_{y,k} y) \right] \xi_{tz,y} - \\ \left[Z_k^{-1} \frac{k_{x,k}}{k_{c,k}} \frac{2}{\sqrt{ab}} \cos(k_{x,k} x) \operatorname{sen}(k_{y,k} y) \right] \xi_{tz,x} \end{array} \right) dS = \\ &= -\xi_{tz,y} Z_k^{-1} \frac{k_{y,k}}{k_{c,k}} \frac{2}{\sqrt{ab}} I_{sx} I_{cy} - \xi_{tz,x} Z_k^{-1} \frac{k_{x,k}}{k_{c,k}} \frac{2}{\sqrt{ab}} I_{cx} I_{sy} = \\ &= -\frac{Z_k^{-1}}{k_{c,k}} \frac{2}{\sqrt{ab}} \left(\xi_{tz,y} k_{y,k} I_{sx} I_{cy} + \xi_{tz,x} k_{x,k} I_{cx} I_{sy} \right) \end{aligned} \quad (7.162)$$

7.1.3. Formulación restringida

Para modos TE_{m0} , las funciones base son las siguientes:

$$e_{y,k}^{(h)} = \sqrt{\frac{2}{a}} \operatorname{sen}(k_{x,k} x) \quad (7.163)$$

$$\left. \begin{aligned} h_{x,k}^{(h)} &= -Z_k^{-1} \sqrt{\frac{2}{a}} \operatorname{sen}(k_{x,k} x) \\ h_{z,k}^{(h)} &= -\frac{k_{c,k}}{\gamma_k} Z_k^{-1} \sqrt{\frac{2}{a}} \cos(k_{x,k} x) \end{aligned} \right\} \quad (7.164)$$

$$e_{y,n}^{(h)} = \sqrt{\frac{2}{a}} \operatorname{sen}(k_{x,n} x) \quad (7.165)$$

$$\left. \begin{aligned} h_{x,n}^{(h)} &= -Z_n^{-1} \sqrt{\frac{2}{a}} \operatorname{sen}(k_{x,n} x) \\ h_{z,n}^{(h)} &= -\frac{k_{c,n}}{\gamma_n} Z_n^{-1} \sqrt{\frac{2}{a}} \cos(k_{x,n} x) \end{aligned} \right\} \quad (7.166)$$

En el vacío, los parámetros valen

$$\begin{aligned} \mu_a &= 0 \\ \mu_b &= \mu_0 \\ \mu_c &= \frac{1}{\mu_0} \\ \mu_d &= 0 \end{aligned} \quad (7.167)$$

Por tanto,

- **Matriz** $M_{\mu_a}^{kn}$

$$\begin{aligned} M_{\mu_a}^{kn} &= \int_{\Omega} \mu_a h_{x,n} h_{z,k} dS = \\ &= b\mu_a \int_{\Omega_M} \left(-Z_n^{-1} \sqrt{\frac{2}{a}} \operatorname{sen}(k_{x,n} x) \right) \left(-\frac{k_{c,k}}{\gamma_k} Z_k^{-1} \sqrt{\frac{2}{a}} \cos(k_{x,k} x) \right) dx = \\ &= \frac{2}{a} \mu_a Z_n^{-1} \frac{k_{c,k}}{\gamma_k} Z_k^{-1} \int_{\Omega_M} \operatorname{sen}(k_{x,n} x) \cos(k_{x,k} x) dx = \frac{2}{a} \mu_a Z_n^{-1} \frac{k_{c,k}}{\gamma_k} Z_k^{-1} I_{cst} \end{aligned} \quad (7.168)$$

• **Matriz** $M_{\mu_b}^{kn}$

$$\begin{aligned}
 M_{\mu_b}^{kn} &= \int_{\Omega} \mu_b h_{z,n} h_{z,k} dS = \mu_b \int_{\Omega_M} h_{z,n} h_{z,k} dS + \mu_0 \int_{\Omega_0} h_{z,n} h_{z,k} dS = \\
 &= \mu_b \int_{\Omega_M} h_{z,n} h_{z,k} dS + \mu_0 \int_{\Omega_0} h_{z,n} h_{z,k} dS + \\
 &+ \mu_0 \int_{\Omega_M} h_{z,n} h_{z,k} dS - \mu_0 \int_{\Omega_M} h_{z,n} h_{z,k} dS = \\
 &= (\mu_b - \mu_0) \int_{\Omega_M} h_{z,n} h_{z,k} dS + \mu_0 \int_{\Omega} h_{z,n} h_{z,k} dS = \\
 &= (\mu_b - \mu_0) I_{\mu_b}^{kn} + \mu_0 \left(\frac{k_{c,k}}{Z_k \gamma_k} \right)^2 \delta_{nk}
 \end{aligned} \tag{7.169}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}
 I_{\mu_b}^{kn} &= \int_{\Omega_M} h_{z,n} h_{z,k} dS = \\
 &= \int_{\Omega_M} \left(-\frac{k_{c,n}}{\gamma_n} Z_n^{-1} \sqrt{\frac{2}{a}} \cos(k_{x,n} x) \right) \left(-\frac{k_{c,k}}{\gamma_k} Z_k^{-1} \sqrt{\frac{2}{a}} \cos(k_{x,k} x) \right) dS = \\
 &= \frac{2}{a} \frac{k_{c,k}}{\gamma_k} Z_k^{-1} \frac{k_{c,n}}{\gamma_n} Z_n^{-1} I_{c^c x}
 \end{aligned} \tag{7.170}$$

• **Vector** $V_{\mu_b}^k$

$$\begin{aligned}
 V_{\mu_b}^k &= \int_{\Omega} \mu_b h_{z,k} dS = \mu_b \int_{\Omega_M} h_{z,k} dS + \mu_0 \int_{\Omega_0} h_{z,k} dS = \\
 &= \mu_b \int_{\Omega_M} h_{z,k} dS + \mu_0 \int_{\Omega_0} h_{z,k} dS + \mu_0 \int_{\Omega_M} h_{z,k} dS - \mu_0 \int_{\Omega_M} h_{z,k} dS = \\
 &= (\mu_b - \mu_0) \int_{\Omega_M} h_{z,k} dS + \mu_0 \int_{\Omega} h_{z,k} dS = (\mu_b - \mu_0) \int_{\Omega_M} h_{z,k} dS = \\
 &= -(\mu_b - \mu_0) \frac{k_{c,k}}{\gamma_k} Z_k^{-1} \sqrt{\frac{2}{a}} I_{c^c x}
 \end{aligned} \tag{7.171}$$

• **Matriz** $M_{\mu_c}^{kn}$

$$\begin{aligned}
 M_{\mu_c}^{kn} &= \int_{\Omega} \mu_c h_{x,n} h_{x,k} dS = \mu_c \int_{\Omega_M} h_{x,n} h_{x,k} dS + \mu_0^{-1} \int_{\Omega_0} h_{x,n} h_{x,k} dS = \\
 &= \mu_c \int_{\Omega_M} h_{x,n} h_{x,k} dS + \mu_0^{-1} \int_{\Omega_0} h_{x,n} h_{x,k} dS + \\
 &+ \mu_0^{-1} \int_{\Omega_M} h_{x,n} h_{x,k} dS - \mu_0^{-1} \int_{\Omega_M} h_{x,n} h_{x,k} dS = \\
 &= (\mu_c - \mu_0^{-1}) \int_{\Omega_M} h_{x,n} h_{x,k} dS + \mu_0^{-1} \int_{\Omega} h_{x,n} h_{x,k} dS = \\
 &= (\mu_c - \mu_0^{-1}) I_{\mu_c}^{kn} + \mu_0^{-1} \int_{\Omega} h_{x,n} h_{x,k} dS = \\
 &(\mu_c - \mu_0^{-1}) I_{\mu_c}^{kn} + \mu_0^{-1} \int_{\Omega} \left(-Z_n^{-1} \sqrt{\frac{2}{a}} \text{sen}(k_{x,n} x) \right) \left(-Z_k^{-1} \sqrt{\frac{2}{a}} \text{sen}(k_{x,k} x) \right) dS = \\
 &= (\mu_c - \mu_0^{-1}) I_{\mu_c}^{kn} + \mu_0^{-1} Z_k^{-2} \delta_{nk}
 \end{aligned} \tag{7.172}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}
 I_{\mu_c}^{kn} &= \int_{\Omega_M} h_{x,n} h_{x,k} dS = \\
 &= \int_{\Omega_M} \left(-Z_n^{-1} \sqrt{\frac{2}{a}} \text{sen}(k_{x,n} x) \right) \left(-Z_k^{-1} \sqrt{\frac{2}{a}} \text{sen}(k_{x,k} x) \right) dS = \\
 &= \frac{2}{a} Z_n^{-1} Z_k^{-1} I_{ssx}
 \end{aligned} \tag{7.173}$$

• **Matriz** $M_{\mu_d}^{kn}$

$$\begin{aligned}
 M_{\mu_d}^{kn} &= \int_{\Omega} \mu_d h_{z,n} h_{x,k} dS = \\
 &= \mu_d \int_{\Omega_M} \left(-\frac{k_{c,n}}{\gamma_n} Z_n^{-1} \sqrt{\frac{2}{a}} \cos(k_{x,n} x) \right) \left(-Z_k^{-1} \sqrt{\frac{2}{a}} \text{sen}(k_{x,k} x) \right) dx = \\
 &= \frac{2}{a} \mu_d \frac{k_{c,n}}{\gamma_n} Z_n^{-1} Z_k^{-1} \int_{\Omega_M} \cos(k_{x,n} x) \text{sen}(k_{x,k} x) dx = \frac{2}{a} \mu_d \frac{k_{c,n}}{\gamma_n} Z_n^{-1} Z_k^{-1} I_{scx}
 \end{aligned} \tag{7.174}$$

• **Vector** $V_{\mu_d}^k$

$$\begin{aligned}
 V_{\mu_d}^k &= \int_{\Omega} \mu_d h_{x,k} dS = \mu_d \int_{\Omega_M} h_{x,k} dS = \mu_d \int_{\Omega_M} \left(-Z_k^{-1} \sqrt{\frac{2}{a}} \text{sen}(k_{x,k} x) \right) dS = \\
 &= -\mu_d Z_k^{-1} \sqrt{\frac{2}{a}} I_{sx}
 \end{aligned} \tag{7.175}$$

• **Matriz** M_ε^{kn}

$$\begin{aligned}
 M_\varepsilon^{kn} &= \int_{\Omega} \varepsilon e_{y,k} e_{y,n} dS = \varepsilon \int_{\Omega_M} e_{y,k} e_{y,n} dS + \varepsilon_0 \int_{\Omega_0} e_{y,k} e_{y,n} dS = \\
 &= \varepsilon \int_{\Omega_M} e_{y,k} e_{y,n} dS + \varepsilon_0 \int_{\Omega_0} e_{y,k} e_{y,n} dS + \varepsilon_0 \int_{\Omega_M} e_{y,k} e_{y,n} dS - \varepsilon_0 \int_{\Omega_M} e_{y,k} e_{y,n} dS = (7.176) \\
 &= (\varepsilon - \varepsilon_0) \int_{\Omega_M} e_{y,k} e_{y,n} dS + \varepsilon_0 \int_{\Omega} e_{y,k} e_{y,n} dS = (\varepsilon - \varepsilon_0) I_\varepsilon^{kn} + \varepsilon_0 \delta_{nk}
 \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$I_\varepsilon^{kn} = \int_{\Omega_M} e_{y,k} e_{y,n} dS = \int_{\Omega_M} \sqrt{\frac{2}{a}} \operatorname{sen}(k_{x,k} x) \sqrt{\frac{2}{a}} \operatorname{sen}(k_{x,n} x) dS = \frac{2}{a} I_{ssx} \quad (7.177)$$

• **Vector** $V_{\mu_a}^k$

$$\begin{aligned}
 V_{\mu_a}^k &= \int_{\Omega} \mu_a h_{x,k} dS = \mu_a \int_{\Omega_M} h_{x,k} dS = \\
 &= -\mu_a Z_k^{-1} \sqrt{\frac{2}{a}} \int_{\Omega_M} \operatorname{sen}(k_{x,k} x) dS = -\mu_a Z_k^{-1} \sqrt{\frac{2}{a}} I_{sx} \quad (7.178)
 \end{aligned}$$

• **Constante** θ

$$\begin{aligned}
 \theta &= \int_{\Omega} \mu_b dS = \mu_b \int_{\Omega_M} dS + \mu_0 \int_{\Omega_0} dS = \\
 &= \mu_b \int_{\Omega_M} dS + \mu_0 \int_{\Omega_0} dS + \mu_0 \int_{\Omega_M} dS - \mu_0 \int_{\Omega_M} dS = \\
 &= (\mu_b - \mu_0) \int_{\Omega_M} dS + \mu_0 \int_{\Omega} dS = (\mu_b - \mu_0) a_s + \mu_0 a \quad (7.179)
 \end{aligned}$$

7.2. INTEGRALES DE ACOPLO DEL MÉTODO DE ADAPTACIÓN MODAL

La Fig. 2.4 muestra un salto entre dos guías rectangulares. En este caso, las integrales de acoplo tienen solución analítica. En este desarrollo, se supone que la guía de menor sección es la guía 1, y la de mayor sección, la guía 2. Se supone también que la 1 está incluida completamente en la 2.

Es necesario distinguir entre modos TE (e) y TM (h) para realizar el acoplo, puesto que el desarrollo es distinto para ellos.

En la guía 1, en el plano de la unión ($z=0$), los campos eléctricos tangenciales tienen componentes en x e y :

$$\mathbf{E}_{1,t} = e_{1,x} \hat{\mathbf{x}} + e_{1,y} \hat{\mathbf{y}}. \quad (7.180)$$

Sea $O_1(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}})$ un sistema de referencia cartesiano, con origen de coordenadas en la esquina inferior izquierda la guía rectangular menor ($x_1=0, y_1=0$). Las expresiones normalizadas más usuales, toman en $O_1(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}})$ la siguiente forma:

Modos TM_{mn} (e), ($m=1,2,\dots; n=1,2,\dots$):

$$\left. \begin{aligned} e_{1,x}^{(e)} &= k_{x1} N_1 \cos(k_{x1} x_1) \operatorname{sen}(k_{y1} y_1) \\ e_{1,y}^{(e)} &= k_{y1} N_1 \operatorname{sen}(k_{x1} x_1) \cos(k_{y1} y_1) \end{aligned} \right\} \quad (7.181)$$

Modos TE_{mn} (h), ($m=0,1,\dots; n=0,1,\dots; (m,n) \neq (0,0)$):

$$\left. \begin{aligned} e_{1,x}^{(h)} &= -k_{y1} N_1 \cos(k_{x1} x_1) \operatorname{sen}(k_{y1} y_1) \\ e_{1,y}^{(h)} &= k_{x1} N_1 \operatorname{sen}(k_{x1} x_1) \cos(k_{y1} y_1) \end{aligned} \right\} \quad (7.182)$$

Siendo

$$\varepsilon_p = \begin{cases} 1, & p = 0 \\ 2, & p \neq 0 \end{cases}, \quad (7.183)$$

$$N_1 = \frac{\sqrt{\varepsilon_m \varepsilon_n}}{\sqrt{a_1 b_1 k_{c1}}} \quad (7.184)$$

$$k_{x1} = \frac{m\pi}{a_1}; k_{y1} = \frac{n\pi}{b_1}; k_{c1}^2 = k_{x1}^2 + k_{y1}^2. \quad (7.185)$$

Del mismo modo, el campo eléctrico tangencial de la guía rectangular mayor (guía 2), en la unión ($z=0$), puede escribirse como

$$\mathbf{E}_{2,t} = e_{2,x} \hat{\mathbf{x}} + e_{2,y} \hat{\mathbf{y}}. \quad (7.186)$$

donde

Sea $O_2(\hat{x}, \hat{y})$ un sistema de referencia cartesiano, con origen de coordenadas en la esquina inferior izquierda de la guía rectangular mayor ($x_2=0, y_2=0$). Las expresiones normalizadas más usuales, toman en $O_2(\hat{x}, \hat{y})$ la siguiente forma:

Modos TM_{mn} (e), ($m=1,2,\dots; n=1,2,\dots$):

$$\left. \begin{aligned} e_{2,x}^{(e)} &= k_{x_2} N_2 \cos(k_{x_2} x_2) \text{sen}(k_{y_2} y_2) \\ e_{2,y}^{(e)} &= k_{y_2} N_2 \text{sen}(k_{x_2} x_2) \cos(k_{y_2} y_2) \end{aligned} \right\} \quad (7.187)$$

Modos TE_{mn} (h), ($m=0,1,\dots; n=0,1,\dots; (m,n) \neq (0,0)$):

$$\left. \begin{aligned} e_{2,x}^{(h)} &= -k_{y_2} N_2 \cos(k_{x_2} x_2) \text{sen}(k_{y_1} y_1) \\ e_{2,y}^{(h)} &= k_{x_2} N_2 \text{sen}(k_{x_2} x_2) \cos(k_{y_1} y_1) \end{aligned} \right\} \quad (7.188)$$

siendo

$$\varepsilon_p = \begin{cases} 1, & p = 0 \\ 2, & p \neq 0 \end{cases}, \quad (7.189)$$

$$N_2 = \frac{\sqrt{\varepsilon_m \varepsilon_n}}{\sqrt{a_2 b_2} k_{c_2}} \quad (7.190)$$

$$k_{x_2} = \frac{p\pi}{a_2}; k_{y_2} = \frac{p\pi}{b_2}; k_{c_2}^2 = k_{x_2}^2 + k_{y_2}^2. \quad (7.191)$$

Es necesario trabajar en ambas guías con el mismo sistema de coordenadas. Dado que las integrales de acoplo se definen sobre la superficie de apertura, esto es la superficie de la guía menor, es conveniente que el origen de coordenadas común sea el de la guía menor. Por tanto, se va a efectuar un cambio en el sistema de referencia de estas expresiones.

Para pasar del sistema $O_2(\hat{x}, \hat{y})$ al sistema $O_1(\hat{x}, \hat{y})$, se realiza el cambio de variable

$$x_2 = x_1 + d_x, \quad y_2 = y_1 + d_y \quad (7.192)$$

siendo d_x, d_y las diferencias entre ambos orígenes de abscisas y ordenadas, respectivamente, dadas por

$$d_x = \frac{a_2 - a_1}{2} + x_0, \quad d_y = \frac{b_2 - b_1}{2} + y_0. \quad (7.193)$$

Con ello, el campo eléctrico tangencial en la guía rectangular mayor, referido al sistema de referencia de la guía rectangular menor $O_1(\hat{x}, \hat{y})$ es

Modos TM_{pq} , ($p=1,2,\dots$; $q=1,2,\dots$):

$$e_{2,x}^{(e)} = N_2 k_{x2} \left[\cos(k_{x2} x_1) \cos(k_{x2} d_x) - \text{sen}(k_{x2} x_1) \text{sen}(k_{x2} d_x) \right] \cdot \left[\text{sen}(k_{y2} y_1) \cdot \cos(k_{y2} d_y) + \cos(k_{y2} y_1) \text{sen}(k_{y2} d_y) \right] \quad (7.194)$$

$$e_{2,y}^{(e)} = N_2 k_{y2} \left[\text{sen}(k_{x2} x_1) \cos(k_{x2} d_x) + \cos(k_{x2} x_1) \text{sen}(k_{x2} d_x) \right] \cdot \left[\cos(k_{y2} y_1) \cos(k_{y2} d_y) - \text{sen}(k_{y2} y_1) \text{sen}(k_{y2} d_y) \right] \quad (7.195)$$

Modos TE_{pq} (h), ($p=0,1,\dots$; $q=0,1,\dots$; $(p,q) \neq (0,0)$):

$$e_{2,x}^{(e)} = -N_2 k_{y2} \left[\cos(k_{x2} x_1) \cos(k_{x2} d_x) - \text{sen}(k_{x2} x_1) \text{sen}(k_{x2} d_x) \right] \cdot \left[\text{sen}(k_{y2} y_1) \cos(k_{y2} d_y) + \cos(k_{y2} y_1) \text{sen}(k_{y2} d_y) \right] \quad (7.196)$$

$$e_{2,y}^{(e)} = N_2 k_{x2} \left[\text{sen}(k_{x2} x_1) \cos(k_{x2} d_x) + \cos(k_{x2} x_1) \text{sen}(k_{x2} d_x) \right] \cdot \left[\cos(k_{y2} y_1) \cos(k_{y2} d_y) - \text{sen}(k_{y2} y_1) \text{sen}(k_{y2} d_y) \right] \quad (7.197)$$

Ya es posible comenzar a realizar las integrales de acoplo. Divididas en los cuatro casos posibles de acoplos entre modos TE y TM, las submatrices de acoplo son:

$$M_{hh,pqmn} = \int_{S_2} \mathbf{e}_{2,pq}^{(h)} \cdot \mathbf{e}_{1,mn}^{(h)} dS \quad (7.198)$$

$$M_{he,pqmn} = \int_{S_2} \mathbf{e}_{2,pq}^{(h)} \cdot \mathbf{e}_{1,mn}^{(e)} dS \quad (7.199)$$

$$M_{eh,pqmn} = \int_{S_2} \mathbf{e}_{2,pq}^{(e)} \cdot \mathbf{e}_{1,mn}^{(h)} dS \quad (7.200)$$

$$M_{ee,pqmn} = \int_{S_2} \mathbf{e}_{2,pq}^{(e)} \cdot \mathbf{e}_{1,mn}^{(e)} dS \quad (7.201)$$

Operando, se comprueba que $M_{he,pqmn} = 0$, lo que viene a ser un caso particular de lo demostrado en [29] para guías de onda de secciones arbitrarias.

Las soluciones a las integrales son:

$$M_{hh} = \begin{cases} N_1 N_2 I_A I_B \frac{k_{x2}}{k_{x2}^2 - k_{x1}^2} \frac{k_{y2}}{k_{y2}^2 - k_{y1}^2} (k_{x1}^2 + k_{y1}^2), k_{x1} \neq k_{x2}; k_{y1} \neq k_{y2} \\ N_1 N_2 I_A \cos(k_{y2} d_y) \frac{b_1}{\epsilon_n} \frac{k_{x2}}{k_{x2}^2 - k_{x1}^2} (k_{x1}^2 + k_{y1}^2), k_{x1} \neq k_{x2}; k_{y1} = k_{y2} \\ N_1 N_2 I_B \cos(k_{x2} d_x) \frac{a_1}{\epsilon_m} \frac{k_{y2}}{k_{y2}^2 - k_{y1}^2} (k_{x1}^2 + k_{y1}^2), k_{x1} = k_{x2}; k_{y1} \neq k_{y2} \\ N_1 N_2 \cos(k_{x2} d_x) \cos(k_{y2} d_y) \frac{a_1 b_1}{\epsilon_m \epsilon_n} (k_{x1}^2 + k_{y1}^2), k_{x1} = k_{x2}; k_{y1} = k_{y2} \end{cases} \quad (7.202)$$

$$M_{he} = 0 \quad (7.203)$$

$$M_{eh} = \begin{cases} N_1 N_2 I_A I_B \frac{1}{k_{x2}^2 - k_{x1}^2} \frac{1}{k_{y2}^2 - k_{y1}^2} (-k_{x2}^2 k_{y1}^2 + k_{x1}^2 k_{y2}^2), k_{x1} \neq k_{x2}; k_{y1} \neq k_{y2} \\ N_1 N_2 I_A \cos(k_{y2} d_y) \frac{b_1}{2} \frac{k_{y2}}{k_{x2}^2 - k_{x1}^2} (k_{x1}^2 - k_{x2}^2), k_{x1} \neq k_{x2}; k_{y1} = k_{y2} \\ N_1 N_2 I_B \cos(k_{x2} d_x) \frac{a_1}{2} \frac{k_{x2}}{k_{y2}^2 - k_{y1}^2} (-k_{y1}^2 + k_{y2}^2), k_{x1} = k_{x2}; k_{y1} \neq k_{y2} \\ 0, k_{x1} = k_{x2}; k_{y1} = k_{y2} \end{cases} \quad (7.204)$$

$$M_{ee} = \begin{cases} N_1 N_2 I_A I_B \frac{k_{x1}}{k_{x2}^2 - k_{x1}^2} \frac{k_{y1}}{k_{y2}^2 - k_{y1}^2} (k_{x2}^2 + k_{y2}^2), k_{x1} \neq k_{x2}; k_{y1} \neq k_{y2} \\ N_1 N_2 I_A \cos(k_{y2} d_y) \frac{b_1}{2} \frac{k_{x1}}{k_{x2}^2 - k_{x1}^2} (k_{x2}^2 + k_{y2}^2), k_{x1} \neq k_{x2}; k_{y1} = k_{y2} \\ N_1 N_2 I_B \cos(k_{x2} d_x) \frac{a_1}{2} \frac{k_{y1}}{k_{y2}^2 - k_{y1}^2} (k_{x2}^2 + k_{y2}^2), k_{x1} = k_{x2}; k_{y1} \neq k_{y2} \\ N_1 N_2 \cos(k_{x2} d_x) \cos(k_{y2} d_y) \frac{a_1 b_1}{4} (k_{x2}^2 + k_{y2}^2), k_{x1} = k_{x2}; k_{y1} = k_{y2} \end{cases} \quad (7.205)$$

En las expresiones anteriores:

$$I_A = (-1)^m \operatorname{sen} \left[\frac{p\pi}{a_2} (a_1 + d_x) \right] - \operatorname{sen} \left(\frac{p\pi}{a_2} d_x \right) \quad (7.206)$$

$$I_B = (-1)^n \operatorname{sen} \left[\frac{q\pi}{b_2} (b_1 + d_y) \right] - \operatorname{sen} \left(\frac{q\pi}{b_2} d_y \right). \quad (7.207)$$

Casos particulares

Las expresiones anteriores se simplifican considerablemente o se anulan cuando las anchuras o las alturas de ambas guías son iguales o en el caso de uniones centradas.

• $a_1 = a_2$.

Se trata de un salto en la altura de las guías o salto plano E. En este caso, $d_x = 0$, $I_A = 0$, y las integrales de acoplo modal se simplifican de la forma siguiente:

$$M_{hh} = \begin{cases} 0, k_{x1} \neq k_{x2} \\ N_1 N_2 I_B \frac{a_1}{\varepsilon_m} \frac{k_{y2}}{k_{y2}^2 - k_{y1}^2} (k_{x1}^2 + k_{y1}^2), k_{x1} = k_{x2}; k_{y1} \neq k_{y2} \\ \cos(k_{y2} d_y) \frac{b_1}{\sqrt{b_1 b_2}}, k_{x1} = k_{x2}; k_{y1} = k_{y2} \end{cases} \quad (7.208)$$

Modelado con técnicas modales de estructuras de microondas basadas en guías N-furcadas arbitrariamente rellenas con materiales

$$M_{he} = 0 \quad (7.209)$$

$$M_{eh} = \begin{cases} 0, k_{x1} \neq k_{x2} \\ N_1 N_2 I_B \frac{a_1}{2} \frac{k_{x2}}{k_{y2}^2 - k_{y1}^2} (-k_{y1}^2 + k_{y2}^2), k_{x1} = k_{x2}; k_{y1} \neq k_{y2} \\ 0, k_{x1} = k_{x2}; k_{y1} = k_{y2} \end{cases} \quad (7.210)$$

$$M_{ee} = \begin{cases} 0, k_{x1} \neq k_{x2} \\ N_1 N_2 I_B \frac{a_1}{2} \frac{k_{y1}}{k_{y2}^2 - k_{y1}^2} (k_{x2}^2 + k_{y2}^2), k_{x1} = k_{x2}; k_{y1} \neq k_{y2} \\ \cos(k_{y2} d_y) \frac{b_1}{\sqrt{b_1 b_2}}, k_{x1} = k_{x2}; k_{y1} = k_{y2} \end{cases} \quad (7.211)$$

De ello se desprende que si el modo incidente es el fundamental TE_{10} , los únicos modos que aparecen a causa de la discontinuidad son del tipo TE_{1n} y TM_{1n} , dado que no se introduce variación en x . La energía eléctrica que almacenan los modos al corte es mayor que la energía magnética, por lo que la estructura tiene un carácter capacitivo.

• $b_1 = b_2$.

Ahora es un salto en la anchura de las guías o salto plano H . En este caso, $d_y = 0$, $I_B = 0$. Los elementos de M quedan:

$$M_{hh} = \begin{cases} 0, k_{y1} \neq k_{y2} \\ N_1 N_2 I_A \frac{b_1}{\epsilon_n} \frac{k_{x2}}{k_{x2}^2 - k_{x1}^2} (k_{x1}^2 + k_{y1}^2), k_{x1} \neq k_{x2}; k_{y1} = k_{y2} \\ \cos(k_{x2} d_x) \frac{a_1}{\sqrt{a_1 a_2}}, k_{x1} = k_{x2}; k_{y1} = k_{y2} \end{cases} \quad (7.212)$$

$$M_{he} = 0 \quad (7.213)$$

$$M_{eh} = \begin{cases} 0, k_{y1} \neq k_{y2} \\ N_1 N_2 I_A \frac{b_1}{2} \frac{k_{y2}}{k_{x2}^2 - k_{x1}^2} (k_{x1}^2 - k_{x2}^2), k_{x1} \neq k_{x2}; k_{y1} = k_{y2} \\ 0, k_{x1} = k_{x2}; k_{y1} = k_{y2} \end{cases} \quad (7.214)$$

$$M_{ee} = \begin{cases} 0, & k_{y1} \neq k_{y2} \\ N_1 N_2 I_A \frac{b_1}{2} \frac{k_{x1}}{k_{x2}^2 - k_{x1}^2} (k_{x2}^2 + k_{y2}^2), & k_{x1} \neq k_{x2}; k_{y1} = k_{y2} \\ \cos(k_{x2} d_x) \frac{a_1}{\sqrt{a_1 a_2}}, & k_{x1} = k_{x2}; k_{y1} = k_{y2} \end{cases} \quad (7.215)$$

De ello se desprende que si el modo incidente es el TE₁₀, los únicos modos que aparecen a causa de la discontinuidad son del tipo TE_{m0}, dado que no se introduce variación en y . Estos modos al corte, almacenan energía fundamentalmente magnética, por lo que el diafragma tiene un carácter inductivo.

• $x_0 = y_0 = 0$.

En el caso de una unión concéntrica se tiene $d_x = \frac{a_2 - a_1}{2}$, $d_y = \frac{b_2 - b_1}{2}$, y las integrales de acoplo quedan:

$$M_{hh} = \begin{cases} N_1 N_2 I'_A I'_B \frac{k_{x2}}{k_{x2}^2 - k_{x1}^2} \frac{k_{y2}}{k_{y2}^2 - k_{y1}^2} (k_{x1}^2 + k_{y1}^2), & k_{x1} \neq k_{x2}; k_{y1} \neq k_{y2} \\ N_1 N_2 I'_A \cos\left(\frac{n-q}{2} \pi\right) \frac{b_1}{\xi_n} \frac{k_{x2}}{k_{x2}^2 - k_{x1}^2} (k_{x1}^2 + k_{y1}^2), & k_{x1} \neq k_{x2}; k_{y1} = k_{y2} \\ N_1 N_2 I'_B \cos\left(\frac{m-p}{2} \pi\right) \frac{a_1}{\xi_n} \frac{k_{y2}}{k_{y2}^2 - k_{y1}^2} (k_{x1}^2 + k_{y1}^2), & k_{x1} = k_{x2}; k_{y1} \neq k_{y2} \\ N_1 N_2 \cos\left(\frac{m-p}{2} \pi\right) \cos\left(\frac{n-q}{2} \pi\right) \frac{a_1 b_1}{\xi_n \xi_n} (k_{x1}^2 + k_{y1}^2), & k_{x1} = k_{x2}; k_{y1} = k_{y2} \end{cases} \quad (7.216)$$

$$M_{he} = 0 \quad (7.217)$$

$$M_{eh} = \begin{cases} N_1 N_2 I'_A I'_B \frac{1}{k_{x2}^2 - k_{x1}^2} \frac{1}{k_{y2}^2 - k_{y1}^2} (-k_{x2}^2 k_{y1}^2 + k_{x1}^2 k_{y2}^2), & k_{x1} \neq k_{x2}; k_{y1} \neq k_{y2} \\ N_1 N_2 I'_A \cos\left(\frac{n-q}{2} \pi\right) \frac{b_1}{2} \frac{k_{y2}}{k_{x2}^2 - k_{x1}^2} (k_{x1}^2 - k_{x2}^2), & k_{x1} \neq k_{x2}; k_{y1} = k_{y2} \\ N_1 N_2 I'_B \cos\left(\frac{m-p}{2} \pi\right) \frac{a_1}{2} \frac{k_{x2}}{k_{y2}^2 - k_{y1}^2} (-k_{y1}^2 + k_{y2}^2), & k_{x1} = k_{x2}; k_{y1} \neq k_{y2} \\ 0, & k_{x1} = k_{x2}; k_{y1} = k_{y2} \end{cases} \quad (7.218)$$

$$M_{ee} = \begin{cases} N_1 N_2 I'_A I'_B \frac{k_{x1}}{k_{x2}^2 - k_{x1}^2} \frac{k_{y1}}{k_{y2}^2 - k_{y1}^2} (k_{x2}^2 + k_{y2}^2), & k_{x1} \neq k_{x2}; k_{y1} \neq k_{y2} \\ N_1 N_2 I'_A \cos\left(\frac{n-q}{2}\pi\right) \frac{b_1}{2} \frac{k_{x1}}{k_{x2}^2 - k_{x1}^2} (k_{x2}^2 + k_{y2}^2), & k_{x1} \neq k_{x2}; k_{y1} = k_{y2} \\ N_1 N_2 I'_B \cos\left(\frac{m-p}{2}\pi\right) \frac{a_1}{2} \frac{k_{y1}}{k_{y2}^2 - k_{y1}^2} (k_{x2}^2 + k_{y2}^2), & k_{x1} = k_{x2}; k_{y1} \neq k_{y2} \\ N_1 N_2 \cos\left(\frac{m-p}{2}\pi\right) \cos\left(\frac{n-q}{2}\pi\right) \frac{a_1 b_1}{4} (k_{x2}^2 + k_{y2}^2), & k_{x1} = k_{x2}; k_{y1} = k_{y2} \end{cases} \quad (7.219)$$

con

$$I'_A = [(-1)^m + 1] \operatorname{sen}\left(\frac{p\pi a_1}{2a_2}\right) \cos\left(\frac{p\pi}{2}\right) + [(-1)^m - 1] \cos\left(\frac{p\pi a_1}{2a_2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{p\pi}{2}\right) = \begin{cases} 2(-1)^{(p+1)/2} \cos\left(\frac{p\pi a_1}{2a_2}\right), & m \text{ impar, } p \text{ impar} \\ 2(-1)^{p/2} \operatorname{sen}\left(\frac{p\pi a_1}{2a_2}\right), & m \text{ par, } p \text{ par} \\ 0, & \text{resto} \end{cases} \quad (7.220)$$

$$I'_B = [(-1)^n + 1] \operatorname{sen}\left(\frac{q\pi b_1}{2b_2}\right) \cos\left(\frac{q\pi}{2}\right) + [(-1)^n - 1] \cos\left(\frac{q\pi b_1}{2b_2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{q\pi}{2}\right) = \begin{cases} 2 \cdot (-1)^{(q+1)/2} \cos\left(\frac{q\pi b_1}{2b_2}\right), & n \text{ impar, } q \text{ impar} \\ 2 \cdot (-1)^{q/2} \operatorname{sen}\left(\frac{q\pi b_1}{2b_2}\right), & n \text{ par, } q \text{ par} \\ 0, & \text{resto} \end{cases} \quad (7.221)$$

Es decir, los elementos de M , salvo M_{he} que siempre es cero, son nulos si las paridades de m y p , ó n y q son distintas.

Por tanto, si el modo incidente es el TE_{10} , los únicos modos que aparecen a causa de la discontinuidad son TE_{mn} , con $m=1, 3, 5, 7, \dots$, $n=0, 2, 4, 6, \dots$ y TM_{mn} , con $m=1, 3, 5, 7, \dots$, $n=2, 4, 6, \dots$

7.3. SOFTWARE DESARROLLADO

7.3.1. Método de adaptación modal

Utilizando las expresiones anteriores, se crearon los siguientes archivos de MATLAB.

 indices.m

Obtiene el conjunto de modos TE y TM de una guía rectangular cuyos números de onda de corte son menores o iguales a un valor dado.

 gm_Y_rec.m

Obtiene las constantes de propagación y las admitancias modales de una determinada guía rectangular.

 welldone.m

Devuelve el valor 1 si un conjunto de guías de onda forman una guía N-furcada y devuelve 0 si algunas de las guías pequeñas se solapan entre ellas o se salen del contorno de la guía grande.

Las N guías incidentes en una de las caras de la cavidad no pueden situarse de forma arbitraria. Para que el problema tenga sentido, no deben solaparse entre ellas ni exceder el dominio de la cavidad.

Dadas las N guías, se toman las $\binom{N}{2}$ posibles parejas, y sobre cada una de estas parejas, se estudian las siguientes condiciones:

Supónganse las dos guías llamadas 1 y 2, de dimensiones a_1, b_1 y a_2, b_2 , cuyos centros tienen las coordenadas (x_{01}, y_{01}) e (x_{02}, y_{02})

Solapamiento en x :

Debe cumplirse una de las dos condiciones siguientes:

$$x_{01} + \frac{a_1}{2} \leq x_{02} - \frac{a_2}{2} : \text{la guía 1 queda a la izquierda de la guía 2.}$$

$$x_{02} + \frac{a_2}{2} \leq x_{01} - \frac{a_1}{2} : \text{la guía 2 queda a la izquierda de la guía 1.}$$

Solapamiento en y :

Debe cumplirse una de las dos condiciones siguientes:

$$y_{01} + \frac{b_1}{2} \leq y_{02} - \frac{b_2}{2} : \text{la guía 1 queda por debajo de la guía 2.}$$

$$y_{02} + \frac{b_2}{2} \leq y_{01} - \frac{b_1}{2} : \text{la guía 2 queda por debajo de la guía 1.}$$

Para que dos guías no se solapen, debe cumplirse al menos una de estas cuatro condiciones.

Posteriormente, hay que controlar que una guía no exceda el dominio de la cavidad. Sean a_0 y b_0 las dimensiones de esa cara de la cavidad, a_1 y b_1 las dimensiones de la guía, y x_{01} , y_{01} las coordenadas de ésta respecto al centro de la cara de la cavidad.

Inclusión en x :

$$x_{01} - \frac{a_1}{2} \geq -\frac{a_0}{2} : \text{la guía no se sale por la izquierda.}$$

$$x_{01} + \frac{a_1}{2} \leq \frac{a_0}{2} : \text{la guía no se sale por la derecha.}$$

Inclusión en y :

$$y_{01} - \frac{b_1}{2} \geq -\frac{b_0}{2} : \text{la guía no se sale por abajo.}$$

$$y_{01} + \frac{b_1}{2} \leq \frac{b_0}{2} : \text{la guía no se sale por arriba.}$$

Para que la guía no exceda del dominio de la cavidad, deben cumplirse simultáneamente estas cuatro condiciones.

 plotwg.m

Representa gráficamente una guía N-furcada.

 Mrec2rec.m

Obtiene la matriz de acoplo modal de dos guías de onda rectangulares.

 Y_salto.m

Obtiene la matriz de admitancias generalizada de un salto en guía de onda rectangular. Las guías del acceso 1 pueden ser también una guía N-furcada.

 Y_stub.m

Obtiene la matriz de admitancias generalizada de un ensanchamiento en guía de onda de una determinada longitud. Los accesos pueden ser guías N-furcadas.

 Y_iris_fino.m

Obtiene la matriz de admitancias generalizada de un iris de longitud despreciable en guía rectangular. Este iris puede ser también una guía N-furcada.

 Y_iris_grueso.m

Obtiene la matriz de admitancias generalizada de un iris de longitud finita en guía rectangular. Este iris puede ser también una guía N-furcada.

 Y2S.m

Obtiene la matriz de dispersión generalizada de una red de dos puertos a partir de la matriz de admitancias generalizada correspondiente.

 S2Y.m

Obtiene la matriz de admitancias generalizada de una red de dos puertos a partir de la matriz de dispersión generalizada correspondiente.

 tetm2tetm.m

Dada una matriz multimodal, (S , Y , Z , etc...) expresada en función de un juego de modos TE y TM, la devuelve en función de otro conjunto de modos TE y TM.

7.3.2. Método de los modos acoplados

 S_gete_te_tm.m

Calcula los parámetros S de una guía de onda rectangular con un material bianisótropo rectangular en su interior, siguiendo la formulación indirecta.

 S_gete_te_m0.m

Calcula los parámetros S de una guía de onda rectangular con un material bianisótropo rectangular en su interior de altura completa, siguiendo la formulación restringida.

 Iacop.m

Este programa calcula las integrales de acoplo necesarias en el CMM.

7.3.3. Hibridación con elementos finitos

Filtro_corr.m

Este programa calcula la respuesta en frecuencia de un filtro corrugado en guía de onda, siguiendo la formulación híbrida MM/FEM.

Guia_corr.m

Este programa los perfiles de campo y sus correspondientes números de onda de corte de una guía corrugada utilizando el FEM. Posteriormente, acopla estos modos con los de una determinada guía rectangular utilizando el MM.