

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA

Dpto. de Ingeniería de Sistemas y Automática



TESIS DOCTORAL

**ESTIMACIÓN DE PARÁMETROS DINÁMICOS
EN ROBOTS MANIPULADORES**

Francesc Xavier Benimeli i Andreu

València, 2005

TESIS DOCTORAL

**ESTIMACIÓN DE PARÁMETROS DINÁMICOS
EN ROBOTS MANIPULADORES**

Por
Francesc Xavier Benimeli i Andreu

Ingeniero Industrial de la
UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA

Presentada en la
UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA

Para la obtención del grado de
DOCTOR INGENIERO INDUSTRIAL

Directores de Tesis
Dr. D. Vicente Mata Amela
Dr. D. Ángel Valera Fernández

València, 2005

Resumen

La identificación de los parámetros dinámicos que constituyen el modelo dinámico de un robot manipulador tiene por objeto la estimación de valores precisos de dichos parámetros a partir de medidas experimentales del movimiento del robot, siendo éste el único procedimiento práctico que permite la obtención de valores fiables de los mismos cuando el sistema mecánico presenta una mínima complejidad. La importancia de la identificación de parámetros dinámicos se manifiesta especialmente tanto en aplicaciones de control por dinámica inversa como en simulación dinámica. En esta tesis, se aborda la identificación de parámetros dinámicos, tanto desde el punto de vista teórico como experimental, en robots manipuladores con configuración de cadena cinemática abierta.

Por una parte, se desarrolla el modelo dinámico de un robot manipulador a partir de las ecuaciones de la dinámica de acuerdo al formalismo de Gibbs-Appell. Para ello, se asume el robot constituido por barras rígidas, modelándose independientemente el comportamiento dinámico de los actuadores. Se consideran asimismo algunos modelos de fricción lineales con respecto a sus coeficientes con objeto de modelar los fenómenos de fricción en los nudos. Posteriormente, las ecuaciones que constituyen dicho modelo dinámico son reescritas de forma lineal respecto a los parámetros dinámicos a identificar y en forma matricial, a fin de permitir la posterior aplicación de técnicas numéricas tanto de análisis y reducción como de resolución del sistema de ecuaciones así constituido.

Por otra parte, se tratan algunos aspectos fundamentales de la identificación de parámetros dinámicos tanto a nivel teórico como práctico. Así, se aborda la generación de trayectorias optimizadas, recurriéndose a la parametrización de las mismas mediante series finitas de Fourier, lo cual permite beneficiarse del carácter periódico de éstas. Asimismo, se propone un procedimiento para la resolución del sistema de ecuaciones mediante el cual se asegura la factibilidad física de los parámetros dinámicos

identificados. Dicho procedimiento se basa en la aplicación de técnicas de optimización no lineal con restricciones no lineales.

Finalmente, se plantean dos métodos de identificación: el primero de ellos de acuerdo al esquema de identificación directo, siendo el segundo una combinación entre los esquemas de identificación directo e indirecto.

Tanto el modelo dinámico del robot manipulador como los distintos métodos de identificación propuestos a lo largo de la tesis son validados mediante su aplicación experimental a la identificación de los parámetros dinámicos de un robot manipulador industrial PUMA 560 dotado de una arquitectura de control abierta. Los resultados obtenidos permiten extraer algunas conclusiones respecto a la implementación práctica de los mismos.

Abstract

The identification of the dynamic parameters constituting a robotic manipulator dynamic model has the purpose of accurately estimating the values of such parameters starting from experimental measurements of the robot motion and is the only practical method that allows obtaining reliable values for a mechanical system with a minimal complexity. The importance of dynamic parameter identification becomes obvious especially in inverse dynamics control as well as dynamic simulation applications. In this thesis, dynamic parameter identification is addressed, from both a theoretical and an experimental point of view, in open chain robotic manipulators.

On the one hand, the dynamic model of a robotic manipulator is developed starting from the dynamics equations according to the Gibbs-Appell formalism. Therefore, the robot is assumed to be constituted by rigid links, being the dynamic behaviour of the actuators independently modeled. Several friction models linear with respect to the coefficients are also considered in order to model friction phenomena at the joints. Later, the equations constituting this dynamic model are rewritten linearly with respect to the dynamic parameters to be identified and in matrix form, in order to allow the application of numerical algorithms both for the analysis and reduction and for the solution of the constituted equation system.

On the other hand, some fundamental aspects of dynamic parameter identification are addressed both theoretically and experimentally. Thus, the generation of optimized trajectories is addressed, making use of parameterization by means of finite Fourier series, which allows taking profit of their periodicity. Also, a procedure is proposed for the solution of the equation system which ensures the physical feasibility of the identified dynamic parameters. This procedure is based on the application of technics for non-linear optimization with non-linear constraints.

Finally, two identification methods are presented: the first one according to a direct identification scheme, while the second is a combination of the direct and the indirect identification schemes.

Both the robotic manipulator dynamic model and the different identification methods proposed in this thesis are validated by means of their experimental application to dynamic parameter identification in a PUMA 560 industrial robotic manipulator provided with an open control architecture. The obtained results allow to extract some conclusions with respect to their practical implementation.

Resum

La identificació dels paràmetres dinàmics que constitueixen el model dinàmic d'un robot manipulador té per objecte l'estimació de valors precisos d'aquests paràmetres a partir de mesures experimentals del moviment del robot, sent aquest l'únic procediment pràctic que permet l'obtenció de valors fiables quan el sistema mecànic presenta una mínima complexitat. La importància de la indentificació de paràmetres dinàmics es manifesta especialment tant en aplicacions de control per dinàmica inversa com a la simulació dinàmica. En aquesta tesi, s'aborda la identificació de paràmetres dinàmics, tant des del punt de vista teòric com experimental, en robots manipuladors amb configuració de cadena cinemàtica oberta.

D'una banda, es desenvolupa el model dinàmic del robot manipulador a partir de les equacions de la dinàmica d'acord al formalisme de Gibbs-Appell. Per això, s'assumeix el robot constituït per barres rígides i es modela independentment el comportament dinàmic dels actuadors. Es consideren, així mateix, alguns models de fricció lineals respecte als seus coeficients amb l'objecte de modelar els fenòmens de fricció a les articulacions. Posteriorment, les equacions que constitueixen el model dinàmic són reescrites en forma lineal respecte als paràmetres dinàmics a identificar i en forma matricial, a fi de permetre la posterior aplicació de tècniques numèriques tant d'anàlisi i reducció com de resolució del sistema d'equacions així constituït.

D'una altra banda, es tracten alguns aspectes fonamentals de la identificació de paràmetres dinàmics tant a nivell teòric com pràctic. Així, s'aborda la generació de trajectòries optimitzades, per a la qual es recorre a la parametrització d'aquestes mitjançant sèries finites de Fourier, la qual cosa permet beneficiar-se del caràcter periòdic d'aquestes. Així mateix, es proposa un procediment per a la resolució del sistema d'equacions mitjançant el qual s'assegura la factibilitat física dels paràmetres dinàmics identificats. Aquest procediment es basa en l'aplicació de tècniques d'optimització no lineal amb restriccions no lineals.

Finalment, es plantegen dos mètodes d'identificació: el primer d'ells d'acord a l'esquema d'identificació directe, mentre que el segon és una combinació entre els esquemes d'identificació directe i indirecte.

Tant el model dinàmic del robot manipulador com els distints mètodes d'identificació proposats al llarg de la tesi són validats mitjançant la seua aplicació experimental a la identificació dels paràmetres dinàmics d'un robot manipulador industrial PUMA 560 dotat d'una arquitectura de control oberta. Els resultats obtinguts permeten extraure algunes conclusions respecte a la implementació pràctica d'aquests.

Tabla de Contenidos

CAPÍTULO 1	INTRODUCCIÓN	1
1.1.	MOTIVACIÓN	1
1.2.	ANTECEDENTES	3
1.3.	OBJETIVOS	15
1.4.	ESTRUCTURA DE LA TESIS	18
CAPÍTULO 2	MODELADO DEL ROBOT MANIPULADOR	21
2.1.	MODELO CINEMÁTICO	22
2.2.	MODELO DINÁMICO	28
2.2.1.	Formulación de Gibbs-Appell	30
2.2.2.	Forma Lineal de las Ecuaciones del Movimiento Respecto a los Parámetros Inerciales. Modelo de Barras	35
2.2.3.	Forma Lineal de las Ecuaciones del Movimiento Respecto a los Parámetros Inerciales. Modelo de Actuadores	42
2.2.4.	Modelización de la Fricción	50
2.3.	REDUCCIÓN DEL MODELO	55
2.3.1.	Descomposición en Valores Singulares (SVD)	57
2.3.2.	Descomposición QR	60

2.3.3.	Parámetros Base para los Modelos Reducidos	63
CAPÍTULO 3 DISEÑO DE TRAYECTORIAS OPTIMIZADAS		69
3.1.	OPTIMIZACIÓN DE LA TRAYECTORIA	70
3.2.	PARAMETRIZACIÓN DE LA TRAYECTORIA	74
3.3.	EJEMPLOS DE APLICACIÓN	78
CAPÍTULO 4 ESQUEMAS DE IDENTIFICACIÓN		87
4.1.	IDENTIFICACIÓN DIRECTA	88
4.2.	IDENTIFICACIÓN INDIRECTA	91
4.2.1.	Identificación de la Gravedad y la Fricción	93
4.2.2.	Identificación del Resto del Modelo Dinámico	97
4.3.	FACTIBILIDAD FÍSICA DEL CONJUNTO DE PARÁMETROS BASE IDENTIFICADO	98
CAPÍTULO 5 RESULTADOS EXPERIMENTALES		107
5.1.	VALORES DE LOS PARÁMETROS BASE	109
5.1.1.	Modelo Dinámico de Barras Rígidas	110
5.1.2.	Modelo Dinámico de Barras Rígidas y Actuadores	111
5.1.3.	Modelo de Fricción	113

5.2.	VALIDACIÓN DEL MODELO	114
5.2.1.	Modelo Dinámico de Barras Rígidas sin Errores	114
5.2.2.	Modelo Dinámico de Barras Rígidas con Simulación de Errores de Medida	115
5.3.	RESULTADOS DE LA IDENTIFICACIÓN	121
5.3.1.	Modelado de la Fricción	123
5.3.2.	Comparación de los Métodos de Identificación Propuestos	136
5.3.3.	Modelo de los Actuadores	171
5.3.4.	Factibilidad Física	180
CAPÍTULO 6 CONCLUSIONES		189
CAPÍTULO 7 REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS		195
ANEXO A DATOS DE UN PUMA 560		203
A.1.	MODELO CINEMÁTICO DE LAS BARRAS	203
A.2.	MODELO CINEMÁTICO DE LOS ACTUADORES	204
A.3.	RESTRICCIONES CINEMÁTICAS	206
ANEXO B IDENTIFICACIÓN DE LA FRICCIÓN		209

ANEXO C	DESARROLLO DE UN SISTEMA ROBÓTICO INDUSTRIAL: PUMA 560	213
C.1.	ARQUITECTURA DEL PUMA 560	213
C.1.1.	Brazo Robot	213
C.1.2.	Unidad de Control	214
C.1.3.	Arquitectura Original	215
C.2.	ARQUITECTURA DE CONTROL ABIERTA	218
C.2.1.	Introducción	218
C.2.2.	Arquitectura de Control Propuesta	218

Lista de Símbolos Más Empleados

\bar{g}	Aceleración de la gravedad.
G	Función de Gibbs o energía de las aceleraciones.
q_i	Posición angular generalizada correspondiente a la barra i .
\dot{q}_i	Primera derivada de la posición generalizada para la barra i .
\ddot{q}_i	Segunda derivada de la posición generalizada para la barra i .
q_{r_i}	Posición angular definida para el rotor de la barra i .
${}^i\ddot{\vec{r}}_{O_i}$	Aceleración del origen del sistema de referencia local de la barra i .
${}^{r_i}\ddot{\vec{r}}_{O_{r_i}}$	Aceleración del origen del sistema de referencia local del rotor i .
${}^i\ddot{\vec{r}}_{G_i}$	Aceleración del centro de gravedad de la barra i .
${}^{r_i}\ddot{\vec{r}}_{G_{r_i}}$	Aceleración del centro de gravedad del rotor i .
${}^{i-1}\vec{r}_{O_{i-1},O_i}$	Vector de traslación que relaciona los sistemas de referencia locales de dos barras consecutivas.
${}^i\vec{r}_{O_i,G_i}$	Vector de posición del centro de gravedad de la barra i en el sistema de referencia local de la barra.
${}^j\vec{r}_{O_j,O_{s_i}}$	Vector de traslación que relaciona los sistemas de referencia locales del estátor i y la barra sobre la que se haya dispuesto.
${}^{i-1}\mathbf{R}_i$	Matriz de rotación que relaciona dos sistemas de referencia locales consecutivos.

${}^{s_i} \mathbf{R}_j$	Matriz de rotación que relaciona los sistemas de referencia locales del estátor i y la barra sobre la que éste se halla dispuesto.
${}^{r_i} \mathbf{R}_{s_i}$	Matriz de rotación que relaciona los sistemas de referencia locales del rotor i y el estátor correspondiente.
${}^{r_i} \mathbf{R}_j$	Matriz de rotación que relaciona los sistemas de referencia locales del rotor i y la barra sobre la que éste se halla dispuesto.
\mathbf{W}	Matriz de observación del sistema.
Γ_i	Relación de transmisión correspondiente a la articulación i .
$\vec{\tau}$	Vector de fuerzas generalizadas en los nudos.
$\vec{\tau}_f$	Vector de fuerzas generalizadas debidas a la fricción.
$\vec{\Phi}$	Vector de parámetros dinámicos del sistema.
$\vec{\Phi}_B$	Vector de parámetros base del sistema.
$\vec{\Phi}_f$	Vector que agrupa los coeficientes de fricción.
${}^i \vec{\omega}_i$	Velocidad angular de la barra i .
${}^{r_i} \vec{\omega}_{r_i}$	Velocidad angular del rotor i .
${}^i \dot{\vec{\omega}}_i$	Aceleración angular de la barra i .
${}^{r_i} \dot{\vec{\omega}}_{r_i}$	Aceleración angular del rotor i .

CAPÍTULO 1

INTRODUCCIÓN

1.1. MOTIVACIÓN

Dentro del término de parámetros físicos constantes se engloban todos aquellos que permiten la obtención de las ecuaciones que gobiernan el comportamiento dinámico del sistema mecánico, las cuales pueden ser aplicadas tanto al control como a la simulación dinámica. Estos parámetros se pueden agrupar en dos grandes categorías: Los parámetros geométricos y los parámetros dinámicos. Los primeros corresponden a aquellas dimensiones de los elementos que constituyen el sistema mecánico relevantes para la modelización del mismo. Dentro de los parámetros dinámicos se incluyen los inerciales (masas, localización de centros de gravedad y tensores de inercia) de los sólidos que forman los sistemas mecánicos y, eventualmente, constantes de muelles y amortiguadores y coeficientes de fricción. La determinación de las características geométricas de los sistemas mecánicos queda fuera del ámbito del presente trabajo, en primer lugar, porque el nivel de información geométrica disponible es muy superior al de los parámetros inerciales y de fricción y, en segundo lugar, porque la calibración cinemática constituye en estos momentos un campo de investigación ya maduro.

La identificación de parámetros inerciales y de fricción surge a mediados de los años 80 como respuesta a las dificultades planteadas en los campos del control y la simulación dinámicos. Por un lado, a raíz del desarrollo de esquemas más sofisticados para el control de robots manipuladores tales como los controladores por dinámica inversa, basados en el conocimiento de la dinámica del sistema físico, los aspectos de modelado y estimación precisa de los parámetros del modelo dinámico se han vuelto críticos. Una de las principales dificultades a la hora de implementar un control por dinámica inversa en robots manipuladores es la obtención de un modelo dinámico del robot capaz de describir el comportamiento dinámico real del robot con suficiente precisión. De hecho, la posibilidad de implementar un control dinámico en robots industriales ya existentes, permitiendo en consecuencia un incremento substancial en sus prestaciones sin alteración de su estructura mecánica, se asienta en la disponibilidad de datos sobre los parámetros que definen el modelo dinámico de los mismos.

Otro campo de aplicación donde se requieren estimaciones precisas de los parámetros del modelo dinámico es la simulación dinámica. En efecto, la simulación dinámica se ha convertido en una herramienta imprescindible en el diseño de sistemas mecánicos e incluso de los propios sistemas de control. La simulación dinámica permite sustituir costosos ensayos experimentales a la hora de ajustar los parámetros de funcionamiento de los sistemas (Hiller et al. 2002). Ahora bien, la validez de los resultados de dicha simulación dinámica depende no sólo de la modelización efectuada del sistema mecánico o del integrador empleado, aspectos ya ampliamente tratados, sino, y muy especialmente, de los parámetros considerados en el modelo dinámico del sistema mecánico. Sin un modelo dinámico suficientemente ajustado al sistema real, no será posible obtener previsiones realistas en cuanto a tiempos de ejecución de trayectorias, par suministrado por los actuadores, etc.

A diferencia de los parámetros geométricos, la información sobre los parámetros dinámicos proporcionada por los fabricantes es a menudo poco precisa o, como en el caso del modelado de los fenómenos de fricción, incluso inexistente. Por otro lado, si bien en Armstrong et al. 1986 se recurre al desensamblado de un robot manipulador PUMA 560

y a la posterior determinación experimental de los parámetros inerciales de cada uno de los elementos mediante ensayos mecánicos, en general puede afirmarse que una medida experimental directa de dichos parámetros en robots ya existentes resulta impracticable en la mayor parte de los casos, debido a la complejidad de las estructuras mecánicas involucradas, y constituye, en cualquier caso, una solución cuanto menos poco práctica, siendo además poco precisos los resultados obtenidos. Baste analizar la comparación establecida en Corke y Armstrong-Hélouvy 1994 o Corke y Armstrong-Hélouvy 1995 entre valores de los parámetros correspondientes a un PUMA 560 encontrados en la literatura publicados por distintas fuentes para apreciar la notable dispersión de los resultados obtenidos. Además, debe considerarse el hecho de que dichos parámetros dinámicos son asimismo susceptibles de sufrir variaciones a lo largo de la vida operativa del robot debido a eventuales colisiones y a la progresiva degradación de las partes mecánicas del mismo e incluso pueden variar substancialmente durante la operación del robot, como es el caso de los brazos robot empleados en manipulación de cargas, donde las características dinámicas de la carga deben también ser consideradas en el modelo del robot. Por todo lo anterior, se deduce la necesidad de un procedimiento de identificación que permita obtener estimaciones precisas de los parámetros dinámicos que definen el modelo dinámico utilizado ya sea en un algoritmo de control por dinámica inversa o en simulación.

1.2. ANTECEDENTES

A fin de plantear las ecuaciones de la dinámica que permiten la identificación de los parámetros dinámicos en un robot manipulador de cadena cinemática abierta, se consideran en la literatura dos métodos, tal como se describe en Kozlowski 1998: el método integral y el método diferencial. El primero de ellos está basado en el Teorema de las Fuerzas Vivas y tan sólo requiere información sobre las posiciones, velocidades y fuerzas actuantes en el sistema, tal como se detalla en Gautier y Khalil 1988, donde se

presenta un algoritmo para la identificación de los parámetros inerciales y de fricción del modelo dinámico de un robot que no requiere información acerca de las aceleraciones. Tanto en Khalil et al. 1990 como en Sheu y Walker 1989 o Sheu y Walker 1991, se utiliza el mismo principio para obtener el conjunto de parámetros base del modelo.

El método diferencial se basa en las ecuaciones del movimiento del sistema mecánico y requiere información acerca de las posiciones, velocidades, aceleraciones y fuerzas actuantes en el sistema. Dentro del método diferencial, se han aplicado varios principios de la dinámica a fin de obtener las ecuaciones del movimiento. Así, diversos autores han utilizado principalmente la formulación de Newton-Euler: en Luh et al. 1980, Olsen y Bekey 1986 y Atkeson et al. 1986 se presentan algoritmos para la identificación de los parámetros dinámicos en robots basados en distintos tipos de movimientos, mientras que en Khosla 1989 se propone un algoritmo para la categorización de los parámetros inerciales del modelo basándose en la identificabilidad de los mismos. En Grotjahn et al. 2004, se utiliza el principio de Jourdain o de las Potencias Virtuales a fin de obtener las ecuaciones de la dinámica. Otros autores, en cambio, han aplicado la formulación de Lagrange, como es el caso de Ha et al. 1989, donde se presenta un algoritmo de identificación, así como un procedimiento de reagrupación de parámetros, basados en dicha formulación. En todos estos trabajos, se han asumido modelos de barras rígidas donde, a lo sumo, se ha considerado un momento de inercia adicional a fin de modelar independientemente el efecto dinámico de los actuadores, tal como se describe en Gautier y Khalil 1988.

Debe observarse que el método integral permite la obtención de expresiones más simples, si bien a costa de una pérdida de información con respecto al método diferencial. De hecho, tal como se indica en Prüfer et al. 1994, el modelo integral presenta diversas desventajas frente al diferencial que han llevado a que en estos momentos sea este último el más comúnmente empleado. Por un lado, mientras en el modelo diferencial existen tantas ecuaciones como grados de libertad en el robot, en el integral tan solo existe una ecuación, lo cual lleva a la aparición de dependencias lineales entre los términos de fricción de distintas articulaciones, resultando en un incremento de la divergencia de los

parámetros identificados. Por otra parte, dado que la solución mediante el método integral persigue la minimización de los errores para la energía total del sistema, no se asegura que los parámetros así identificados permitan predecir de forma precisa los pares en los nudos, al contrario de lo que sucede con el método diferencial, donde se minimizan los errores correspondientes a los pares en los nudos. Además, el proceso de integración del cual se deduce el modelo integral tiene un efecto de amplificación de las señales de baja frecuencia que, junto a la atenuación de las señales de mayor frecuencia, dificulta la separación de las contribuciones de la fricción correspondientes a distintas articulaciones. Como consecuencia, aumenta la sensibilidad al ruido, lo cual se manifiesta como un incremento del número de condición de la matriz de observación.

De un modo general, la ecuación del movimiento que gobierna el movimiento de un sistema mecánico multicuerpo puede expresarse en la forma:

$$\mathbf{M}(\vec{q}, \vec{\Phi}, t) \cdot \ddot{\vec{q}} + \vec{c}(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, \vec{\Phi}, t) = \vec{\tau}(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, \vec{f}, \vec{\Phi}, t) \quad (1.1)$$

donde \mathbf{M} es la matriz de masas del sistema que depende (además de la geometría) de las coordenadas generalizadas \vec{q} empleadas para modelizar el mecanismo, del vector que agrupa los parámetros inerciales $\vec{\Phi}$ y del tiempo t . El vector \vec{c} agrupa las fuerzas centrífugas, de Coriolis, de fricción y gravitatorias y depende además de las velocidades generalizadas $\dot{\vec{q}}$, mientras que $\vec{\tau}$ es el vector de fuerzas generalizadas, que depende de las coordenadas y velocidades generalizadas, del vector de excitación externa aplicada \vec{f} , del vector de parámetros a identificar y del tiempo

Afortunadamente, la identificación de parámetros dinámicos se beneficia del hecho de que aunque las ecuaciones del movimiento de los sistemas mecánicos multicuerpo son altamente no lineales, éstas pueden ser expresadas en forma lineal respecto a un vector que agrupe los parámetros que se desea determinar, tal como se muestra en Atkeson et al. 1986. Dicha linealidad se extiende al caso en el que se estén asumiendo modelos de fricción lineales en sus coeficientes. Bajo este supuesto, la

ecuación (1.1) se puede expresar para cualquier sistema mecánico multicuerpo como el siguiente sistema de ecuaciones lineal respecto a los parámetros dinámicos y reescrito en forma matricial.

$$\mathbf{W}(\vec{q}, \vec{\dot{q}}, \vec{\ddot{q}}, t) \cdot \vec{\Phi} = \vec{\tau}(\vec{q}, \vec{\dot{q}}, \vec{f}, \vec{\Phi}, t) \quad (1.2)$$

siendo \mathbf{W} la denominada matriz de observación del sistema. La representación del modelo dinámico (1.2) es redundante en dichos parámetros dinámicos, esto es, existen infinitos conjuntos de parámetros dinámicos que satisfacen las ecuaciones de la dinámica. En definitiva, el sistema lineal (1.2) presenta un problema de deficiencia de rango en la matriz de coeficientes \mathbf{W} .

Dicha deficiencia de rango está motivada por el hecho que las restricciones cinemáticas que las uniones entre las partes mecánicas imponen sobre la estructura del robot manipulador hacen que algunos de los parámetros inerciales no afecten en absoluto al comportamiento dinámico del manipulador, mientras que otros lo hagan tan sólo en combinaciones lineales, no siendo por tanto identificables de forma independiente. Por ello, será necesario proceder a la reducción del modelo, previamente a la resolución del sistema de ecuaciones en (1.2), a fin de que tan sólo aparezca en él un conjunto mínimo de parámetros que identifiquen totalmente y de forma independiente el comportamiento del sistema mecánico, obteniéndose así una matriz de observación de rango completo.

La determinación de dicho conjunto mínimo de parámetros inerciales, denominados parámetros base, constituye un problema esencial en la identificación. Se han propuesto varios métodos para categorizar los parámetros inerciales del modelo dinámico de un robot manipulador a fin de determinar cuales de ellos pueden ser eliminados del mismo. Por un lado, existen los métodos simbólicos, en los cuales se deduce un conjunto mínimo de parámetros a partir de las ecuaciones del modelo dinámico mediante la eliminación y el reagrupamiento de algunos de los parámetros. En Khosla y Kanade 1985 y Khosla y Kanade 1987 dicho proceso tiene lugar de forma intuitiva a partir de las expresiones analíticas de las ecuaciones de la dinámica de acuerdo

a la formulación de Newton-Euler modificada. En Ha et al. 1989 se lleva a cabo una deducción similar a partir de la formulación de Lagrange, mientras que Khalil et al. 1990 parten de las expresiones de la energía cinética y potencial. En Lin 1994 y Lin 1995 se aplica igualmente la formulación de Newton-Euler para deducir un conjunto de parámetros base identificables. La principal desventaja de los métodos de reagrupamiento simbólico es que éste puede resultar poco práctico a medida que se aumenta el número de grados de libertad del manipulador debido a la complejidad que implica la manipulación simbólica de las expresiones obtenidas.

En Gautier y Khalil 1988 y Gautier y Khalil 1990, así como en Ha et al. 1989, se desarrolla, respectivamente para el método energético y para la formulación de Lagrange, un conjunto de reglas que permite la posterior reducción y agrupamiento de los parámetros para un modelo dinámico dado. Mayeda et al. 1990 se basa en la formulación de Lagrange para llegar a resultados equivalentes a los presentados en Gautier y Khalil 1990, si bien obteniendo expresiones explícitas de los parámetros base en forma cerrada. Khalil y Bennis 1995 parte de las expresiones de la energía para deducir similarmente reglas de reagrupamiento correspondientes a robots de cadena cinemática cerrada. Más recientemente, encontramos trabajos como Grotjahn et al. 2001 y Grotjahn y Heimann 2003, donde los autores proponen igualmente la aplicación de reglas de reagrupamiento para la obtención del conjunto de parámetros base respectivamente en robots serie y paralelos.

Por otro lado, se encuentran los métodos numéricos, donde los parámetros a ser eliminados o reagrupados son determinados por medio de técnicas matriciales de análisis de dependencia lineal como son la descomposición en valores singulares, o SVD, y la descomposición QR. Es el caso de Atkeson et al. 1986, donde se parte de la formulación de Newton-Euler aplicando tanto la regresión de Ridge como SVD, y Sheu y Walker 1991, utilizando SVD a partir del modelo integral, en los cuales no se definen, no obstante, las combinaciones lineales correspondientes a los parámetros base obtenidos tras la reducción. Ghodoussi y Nakamura 1991 presenta un método para la determinación de los parámetros base tanto en robots serie como paralelos y define el concepto de

parámetros principales de inercia, conjunto de parámetros base con propiedades específicas, considerando la sensibilidad de cada uno de los parámetros base definidos. En Gautier 1991, se muestra como el posterior análisis matricial de las descomposiciones QR o SVD permite obtener las expresiones explícitas de los parámetros base en función de los parámetros inerciales del modelo.

Una vez que se ha reescrito el modelo dinámico en forma lineal respecto a los parámetros dinámicos, es posible proceder a la determinación de dichos parámetros mediante la utilización del suficiente número de configuraciones de una trayectoria adecuadamente diseñada con el fin de obtener un sistema lineal de ecuaciones sobredeterminado. Incluso cuando el modelo dinámico ha sido reducido a los parámetros base, sigue siendo, no obstante, necesaria la utilización de datos que aseguren la independencia lineal e identificabilidad de dichos parámetros, lo cual puede únicamente ser conseguido a través de una conveniente selección de las trayectorias a seguir por el robot. En algunos trabajos, se han propuesto movimientos especiales, a veces diseñados de forma intuitiva, de una o varias articulaciones, los cuales, aplicados secuencialmente, permiten la identificación del conjunto de parámetros. Tanto Mayeda et al. 1984 como Olsen y Bekey 1986 identifican los parámetros dinámicos del modelo de un robot serie compuesto por barras rígidas y considerando fricción en las articulaciones mediante movimientos elegidos intuitivamente de acuerdo al sentido físico de cada tipo de parámetros, aunque en ambos casos no se tiene en cuenta explícitamente la determinación previa del conjunto de parámetros base del modelo. Lin 1992 propone un método de identificación secuencial basado en movimientos de una sola articulación cada vez, determinando en cada caso los parámetros independientes a identificar. En Otani y Kakizaki 1993, se hace uso de trayectorias sinusoidales simples con el fin de estudiar la influencia de las condiciones cinemáticas de la trayectoria sobre el condicionamiento numérico del problema de identificación y, en consecuencia, sobre la precisión de los resultados. También en Gautier y Khalil 1988, se utilizaba una combinación de distintos tipos de trayectorias simples, a saber polinómicas y sinusoidales, para cada una de las articulaciones del manipulador. Gautier y Presse 1991 recurren a trayectorias optimizadas, si bien aplicadas a subconjuntos de los parámetros a identificar a fin de

reducir el coste computacional de la optimización. La identificación tiene lugar, por tanto, de forma secuencial para cada uno de dichos subconjuntos, con lo que se ve igualmente afectada por el inconveniente de la propagación de errores entre pasos sucesivos del proceso de identificación.

Otros autores han sugerido el uso de trayectorias globales diseñadas de acuerdo a determinados criterios de optimización de manera que es posible la identificación de la totalidad de los parámetros base del modelo en un sólo experimento. Es el caso de Armstrong 1989, donde se utilizan trayectorias generales para cuya optimización se consideran las aceleraciones correspondientes a una serie de puntos a lo largo de la trayectoria, las cuales constituyen las variables del problema de optimización. El elevado número de grados de libertad del problema junto a la necesidad de obtener las correspondientes velocidades y posiciones mediante integración de las aceleraciones, así como el posterior ajuste de la trayectoria mediante interpolación hacen de éste un planteamiento de un coste computacional extraordinario en el que además no resulta sencillo satisfacer las restricciones cinemáticas del manipulador. Gautier y Khalil 1992, por su parte, se sirven de las posiciones y velocidades de una serie de puntos a lo largo de la trayectoria, igualmente general, como variables del problema de optimización. Con ello, se reduce considerablemente el coste computacional respecto al planteamiento anterior, si bien sigue siendo necesario el proceso de interpolación posterior que, en este caso, se resuelve mediante polinomios de quinto grado. En ambos casos, se considera el número de condición de la matriz de observación del sistema como criterio de optimización. En Presse y Gautier 1993, se presenta un método mediante el cual se tiene en cuenta, además, la información estadística conocida a priori a cerca del vector de parámetros a identificar, lo cual contribuye a minimizar las diferencias en cuanto a precisión relativa en la determinación de cada uno de los parámetros.

Swevers et al. 1997 introducen un procedimiento distinto a la hora de abordar la generación de trayectorias optimizadas, recurriendo a la parametrización de la trayectoria mediante series finitas de Fourier. Dicho procedimiento, además de disminuir notablemente el número de grados de libertad del problema de optimización y, con ello,

el coste computacional del mismo, presenta diversas ventajas principalmente debidas a la periodicidad de las trayectorias resultantes, permitiendo reducir el contenido en ruido de las medidas mediante el promediado temporal de las mismas, así como a la posibilidad de determinar fácilmente su contenido en frecuencia. Si bien, en este caso, las trayectorias resultantes no son obviamente generales como en los planteamientos anteriores, resulta posible, no obstante, alcanzar con relativa facilidad números de condición de la matriz de observación del sistema suficientemente bajos. Swevers et al. 1997 hacen uso de la anterior parametrización de la trayectoria, recurriendo como criterio de optimización a la disminución de la incertidumbre en la determinación de los parámetros en lugar del número de condición. Una parametrización similar se utiliza en Calafiore et al. 2001, donde igualmente se aplican los dos criterios de optimización mencionados anteriormente y se recurre a los algoritmos genéticos para la resolución del problema de optimización de la trayectoria.

En este punto, debe considerarse que la presencia en el sistema mecánico de elementos que contribuyen en un muy diferente medida sobre el comportamiento dinámico del sistema (por ejemplo, la inclusión de los actuadores en el modelo dinámico de los robots industriales), introduce una dificultad adicional a la hora de obtener trayectorias a partir de las cuales pueda construirse una matriz de observación con un número de condición bajo. Como es sabido, el número de condición de la matriz de observación establece una cota superior del nivel de error esperable en la identificación. La identificación de los parámetros que constituyen el modelo o modelos de fricción presentes en el sistema mecánico merece una mención especial por dos motivos: por un lado, la inclusión en el modelo dinámico de los parámetros de fricción repercute igualmente en un incremento del número de condición de la matriz de observación y, por otro lado y en especial, su medida resulta siempre comprometida incluso en sistemas mecánicos de una mínima complejidad.

La resolución del sistema lineal en los parámetros a identificar se realiza, de modo prácticamente general, mediante el método de Mínimos Cuadrados (LSM). En este punto, surge un problema muy escasamente tratado (véase Yoshida y Khalil 2000) como es la

factibilidad física de los parámetros identificados. Ya sea debido al nivel de error en los datos experimentales o a la no concordancia entre el sistema físico sobre el que se está trabajando y el modelo dinámico subyacente en la identificación, es posible que los parámetros obtenidos no sean físicamente consistentes (masas y momentos de inercia negativos, matrices de masa no definidas positivas, etc.). A pesar de ello, dicho conjunto de parámetros base identificados permitiría el cálculo del problema dinámico inverso mediante la aplicación de las mismas ecuaciones utilizadas en el proceso de identificación. Las dificultades aparecen cuando se intenta utilizar los parámetros base identificados en algoritmos estándar de control y simulación dinámicos. La no factibilidad de los mismos es una fuente de inestabilidad en ciertos esquemas de control, pero constituye un aspecto crítico cuando se aborda la simulación dinámica de sistemas mecánicos y, por tanto, resulta esencial garantizar la factibilidad física de los parámetros base obtenidos en el proceso de identificación.

Como se describe en Yoshida y Khalil 2000, una forma de determinar la factibilidad física del conjunto de parámetros base consiste en intentar obtener un conjunto de parámetros dinámicos con sentido físico a partir de los valores de los parámetros base tomando en consideración las combinaciones lineales de parámetros dinámicos correspondientes a cada parámetro base. No obstante, el procedimiento para obtener dicho conjunto de parámetros dinámicos en Yoshida y Khalil 2000 no resulta inmediato y la existencia de una solución no puede garantizarse. Si no fuera posible encontrar tal conjunto de parámetros dinámicos, se dice que el conjunto de parámetros base identificados no es físicamente factible, en cuyo caso los autores recomiendan la modificación del mismo a fin de conseguir que lo sea.

Los métodos de identificación, cuyos aspectos básicos han sido descritos hasta este punto, se pueden clasificar en dos grandes grupos de acuerdo a la secuencia de operaciones que lleva a la identificación del conjunto de parámetros base a identificar: Los métodos directos y los métodos indirectos. Los métodos de identificación directos pretenden la determinación simultánea a partir de un solo experimento de la totalidad de los parámetros base del modelo dinámico, incluyendo los parámetros de fricción. A fin de

que la excitación de los distintos parámetros del modelo sea suficiente, el movimiento del robot requiere de un diseño preciso, habitualmente llevado a cabo mediante un proceso de optimización de acuerdo a algún criterio determinado, tal como se ha mencionado anteriormente en referencia a los tipos de trayectorias. Este tipo de identificación aparece ya en los trabajos de Atkeson et al. 1986 y Gautier y Khalil 1988, si bien en éstos no se aborda el problema de la optimización de la trayectoria. En Armstrong 1989 y Gautier y Khalil 1992 la identificación directa del modelo se lleva a cabo mediante trayectorias globales de carácter general previamente optimizadas para dar lugar a un número de condición de la matriz de observación del sistema mínimo. Tanto en Swevers et al. 1997 como más tarde en Calafiore et al. 2001 y Olsen et al. 2002 la identificación directa se realiza mediante trayectorias optimizadas parametrizadas mediante funciones armónicas utilizando la reducción de la incertidumbre en los parámetros identificados como criterio de optimización. Este esquema de identificación precisa de un tiempo muy inferior con respecto a los métodos indirectos, puesto que el modelo completo es identificado a partir de un solo experimento. Por esta misma razón, los resultados obtenidos no se verán tampoco influenciados por el error de propagación asociado a los esquemas de identificación secuenciales (Khalil y Dombre 2002). Este último aspecto cobra especial relevancia en lo que se refiere a la identificación del modelo de fricción, ya que ésta constituye un fenómeno que experimenta variaciones considerables debido a diversos factores como puedan ser la temperatura, el estado de las superficies, la distribución del lubricante, el nivel de carga, etc., por lo cual será poco probable que ésta se mantenga constante en medidas correspondientes a distintos pasos del proceso de identificación. No obstante, debido al incremento de la complejidad del modelo a identificar, dado que se incluyen en una misma matriz de observación términos de diferente naturaleza, resulta más difícil obtener una trayectoria que asegure el adecuado condicionamiento numérico del problema, lo cual podría repercutir en el incremento de la incertidumbre de los resultados. Por otra parte, la optimización de dicha trayectoria supone una mayor carga computacional en comparación con el diseño de los movimientos de los métodos indirectos, a menudo determinados intuitivamente, si bien ésta no constituye un aspecto crítico del proceso de identificación por tener lugar fuera de línea.

Por su parte, los denominados métodos indirectos hacen distinción de la naturaleza de los parámetros a identificar, planteando una identificación secuencial con experimentos específicos diseñados para excitar cada uno de los distintos subconjuntos de parámetros base en particular, tal como se describe en Olsen y Bekey 1986, Lin 1992 o Otani y Kakizaki 1993. Se trata, en general, de movimientos simples de una o dos articulaciones cada vez, fácilmente generables por unidades de control estándar de cualquier robot industrial. Una de las motivaciones para la aplicación del método de identificación indirecto consiste en la reducción de la complejidad del modelo en cada uno de los pasos del proceso de identificación, ya que un menor número de parámetros a identificar implica generalmente un mejor condicionamiento numérico del problema y, por tanto, una menor incertidumbre en los parámetros identificados. En Gautier y Presse 1991, si bien se recurre a trayectorias optimizadas, éstas se aplican a cada articulación por separado, teniendo lugar la identificación de forma secuencial de la última a la primera articulación. Por otra parte, la identificación por separado del modelo de fricción permite el uso de movimientos más adecuados al modelo de fricción considerado, lo cual posibilitaría un mejor ajuste del mismo. Debe tenerse en cuenta, a este respecto, que la precisión del modelo de fricción utilizado resulta determinante en la precisión del resto de parámetros identificados. En Grotjahn et al. 2001 y Grotjahn et al. 2004 se presenta un método de identificación mediante el cual, asumiendo un modelo de fricción simétrico, se consiguen separar las contribuciones de fricción e inercia al par en los nudos, con lo cual es posible la identificación independiente de cada una de las respectivas partes del modelo dinámico. Las principales desventajas de los métodos de identificación indirectos, en cuanto a la precisión de los resultados, radican tanto en la propagación de errores como en la variabilidad de los fenómenos de fricción a través de los distintos pasos del proceso de identificación, lo cual supone una fuente adicional de error.

Hay que indicar que, salvo algunos comentarios en Khalil y Dombre 2002, una comparación exhaustiva entre métodos directos e indirectos de identificación no se ha realizado hasta este momento. En este punto parece razonable investigar las posibilidades de procedimientos de identificación que se podrían definir como mixtos y que podrían estructurarse en un proceso iterativo de dos etapas, en la primera de las cuales se

identificarían parámetros de fricción y parte de los parámetros inerciales y en la segunda se obtendrían los restantes parámetros inerciales y se establecería el nivel de error asociado al conjunto de parámetros obtenidos.

Todos los procedimientos de identificación mencionados anteriormente se basan en datos de posición, velocidad y aceleración y acciones externas actuantes. La dificultad en la medida experimental de estos datos depende en gran medida del sistema mecánico cuyos parámetros se quieren identificar. El caso de los robots industriales es probablemente el más simple dado que están equipados con sensores de posición con una buena precisión, aunque las medidas pueden verse afectadas por ruido de alta frecuencia. Por el contrario los sensores de velocidad o no están disponibles o, en todo caso, proporcionan una información sumamente ruidosa. Además, en los robots industriales no se emplean sensores para la medida de la aceleración en los nudos. Por lo tanto, las velocidades y aceleraciones en los nudos se obtienen generalmente mediante derivación numérica de las posiciones de los nudos. Sin embargo, dichas derivadas, y especialmente la segunda derivada de la posición, amplifican el ruido de alta frecuencia debido a que el proceso de diferenciación se comporta como un filtro de paso alto. Diversas soluciones se han propuesto a este problema, como por ejemplo filtrar las medidas de posición mediante un filtro de paso bajo Gautier et al. 1995 antes de efectuar la derivación numérica mediante diferencias finitas centrales. En este caso, cabe resaltar la importancia de la simulación a la hora de ajustar los parámetros del filtrado. En Swevers et al. 1997 y Olsen et al. 2002 se describe una aproximación distinta al anterior problema según la cual se recurre a la utilización de trayectorias periódicas con el fin de evitar la diferenciación numérica de la posición en el cálculo de las velocidades y aceleraciones.

Los trabajos realizados en el campo de la identificación de parámetros hasta este momento se han centrado, en su gran mayoría sobre los robots industriales con configuración de cadena cinemática abierta, sobre todo, en virtud de la necesidad que de estos parámetros se tiene a la hora de plantear un control dinámico. La identificación de parámetros inerciales y de fricción en otro tipo de mecanismos ha recibido una atención mucho menor (Serban et al. 1997). Dentro del campo de los mecanismos de cadena

cinemática cerrada cabe citar el caso de los robots paralelos donde si que se han producido algunas aportaciones (Bernard y Khalil 2001, Abdellatif et al. 2004, Grotjahn et al. 2004).

1.3. OBJETIVOS

El objetivo fundamental del presente trabajo consiste en el desarrollo y validación de una metodología que permita la identificación de parámetros dinámicos en robots manipuladores. Aunque, como se ha indicado, la identificación de parámetros dinámicos en robots industriales es una disciplina científica en la que se han producido ya notables avances quedan todavía numerosas cuestiones abiertas (consideración de la factibilidad física de los parámetros, comparación de métodos indirectos frente a directos o incluso nuevos procedimientos de identificación). La relevancia del objetivo propuesto se deriva de la que poseen tanto la simulación dinámica como el control avanzado para el diseño y control de sistemas mecánicos complejos, dada la dificultad e importancia de la obtención de datos precisos acerca de los parámetros dinámicos y teniendo además en cuenta que éstos son susceptibles de experimentar variaciones. Disponer de parámetros dinámicos que representen de un modo ajustado el comportamiento dinámico del sistema mecánico permitiría explotar plenamente las potencialidades que tanto la simulación dinámica como el control ofrecen en estos momentos a la industria.

En esta tesis, se propone una modelización dinámica completa de un robot manipulador industrial. Considerando el método diferencial, las ecuaciones del movimiento son obtenidas partiendo del formalismo dinámico de Gibbs-Appell. Se consideran un modelo de barras rígidas y se modelan independientemente los actuadores a fin de tener en cuenta el efecto giroscópico generado por éstos, así como eventuales desviaciones del centro de masa de los mismos respecto a su eje de rotación. La formulación de la dinámica de Gibbs-Appell permite una fácil integración de los actuadores en el modelo dinámico del manipulador. Asimismo, se incluye un modelo de

fricción lineal respecto a sus coeficientes a fin de modelar el par en los nudos debido a los fenómenos de fricción. Así pues, los parámetros dinámicos del modelo propuesto serán, por tanto, los parámetros inerciales (masas, localización de centros de gravedad y tensores de inercia) tanto de las barras como de los actuadores y los coeficientes del modelo de fricción.

Las ecuaciones de la dinámica que integran el modelo son reescritas en forma lineal con respecto a los parámetros dinámicos del modelo y el sistema de ecuaciones así constituido es expresado en forma matricial, lo cual simplifica considerablemente el proceso de identificación, ya que permitirá la aplicación de técnicas numéricas eficientes y sistemáticas a fin de analizar y reducir inicialmente el sistema de ecuaciones y finalmente proceder a la resolución del mismo para obtener el conjunto de parámetros base del modelo. Para la determinación del conjunto de parámetros base del modelo dinámico propuesto y la consiguiente reducción del sistema de ecuaciones, se aplica un método numérico basado principalmente en Gautier 1991 y Sheu y Walker 1991.

Se aborda igualmente la generación de trayectorias optimizadas, puesto que la aplicación de trayectorias adecuadamente diseñadas en los experimentos de identificación constituye un factor crucial a fin de obtener un sistema matricial de ecuaciones numéricamente bien condicionado cuya resolución conduzca a estimaciones precisas de los parámetros base del modelo. La parametrización de las trayectorias ha sido considerada como una solución adecuada a la hora de reducir la complejidad y carga computacional asociada al proceso de optimización, permitiendo al mismo tiempo conseguir un condicionamiento numérico satisfactorio. Se analizan dos tipos diferentes de funciones analíticas a fin de implementar la parametrización de las trayectorias: por un lado, funciones polinómicas y, por otro, series finitas de Fourier.

La identificación de parámetros dinámicos mediante la resolución del sistema de ecuaciones considerando la factibilidad física de los parámetros identificados es igualmente abordada. En concreto, se propone un procedimiento de identificación a fin de obtener un conjunto de parámetros dinámicos con sentido físico, el cual se ajuste a la

respuesta dinámica del robot, par medido en los nudos, y eventualmente mantenga la correspondencia con un conjunto de parámetros base dado. En el primer caso, se obtiene un nuevo conjunto de parámetros dinámicos físicamente factibles, mientras que el segundo caso sería comparable al procedimiento propuesto en Yoshida y Khalil 2000, ya que se mantiene la equivalencia con el conjunto de parámetros base en el nuevo conjunto de parámetros dinámicos obtenido. El procedimiento propuesto constituye un problema de optimización con función objetivo cuadrática sujeto a restricciones no lineales. La elección de la función objetivo permitiría la obtención de un nuevo conjunto de parámetros dinámicos independiente o bien de uno equivalente a un conjunto de parámetros base dado.

En cuanto a los esquemas de identificación empleados, en este trabajo se considera, por una parte, un método de identificación directo en un solo paso y, por otra, una variante de método indirecto que podría considerarse como una combinación de los esquemas de identificación directo e indirecto, y que será denominada en lo que sigue método indirecto. Según ésta, la identificación tiene lugar secuencialmente en dos pasos. El primer paso tiene por finalidad la estimación precisa de los parámetros del modelo de fricción, la cual se lleva a cabo, como en los métodos indirectos tradicionales, a partir de una serie de movimientos simples, cuyo diseño se basa en la anulación de aquellos términos de las ecuaciones del movimiento dependientes de las aceleraciones generalizadas, siguiendo un procedimiento similar al descrito en Grotjahn et al. 2001 y Grotjahn et al. 2004. A fin de permitir el uso de modelos de fricción asimétricos, también los parámetros gravitatorios del modelo se identifican conjuntamente con los de fricción en este primer paso del proceso. En el segundo paso de la identificación, se identifica el resto de los parámetros del modelo a partir de un solo movimiento, del mismo modo que en los métodos directos, tras la compensación de las medidas de par en los nudos mediante las partes gravitatoria y de fricción ya identificadas en el primer paso.

Los procedimientos propuestos serán validados y evaluados experimentalmente en un robot manipulador industrial PUMA 560 comparando acciones de control medidas con los resultados de un problema dinámico inverso considerando los parámetros

identificados. Para la realización de dichas pruebas, se utilizan trayectorias diferentes a las empleadas para efectuar la identificación en cada uno de los métodos desarrollados. De los experimentos realizados se pretende establecer ventajas e inconvenientes de cada uno de los procedimientos de identificación, en su caso introducir modificaciones y en definitiva establecer cual es el método de identificación más adecuado para este tipo de sistemas mecánicos.

1.4. ESTRUCTURA DE LA TESIS

Una vez introducidos la motivación y objetivos perseguidos, así como los antecedentes y estado del arte de algunos aspectos relativos a la identificación de parámetros dinámicos en robots manipuladores que han sido abordados en el presente trabajo, se procede a continuación a presentar la estructura en que éste ha sido organizado, junto con una breve descripción del contenido de cada capítulo. En el Capítulo 1, se describe el modelo cinemático y dinámico del robot manipulador, así como los fundamentos de la formulación dinámica de Gibbs-Appell, a partir de la cual ha sido obtenido el modelo dinámico. Igualmente, se trata la reducción de los modelos dinámicos propuestos mediante la determinación de los conjuntos de parámetros base correspondientes. El Capítulo 1 se ha dedicado a la generación de trayectorias optimizadas, diseñadas para mejorar el condicionamiento numérico del problema de identificación, mediante un procedimiento de optimización no lineal sujeto a restricciones no lineales. En el Capítulo 1, se describen los procedimientos propuestos para la identificación de los parámetros dinámicos. En concreto, se trata de un método de identificación directo en un solo paso y de un método de identificación indirecto en dos pasos. Se propone asimismo un procedimiento para la resolución del sistema lineal de ecuaciones asegurando la factibilidad física de los parámetros base identificados basado en un procedimiento de optimización no lineal sujeto a restricciones no lineales. El Capítulo 1 constituye la validación y evaluación de los distintos métodos de

identificación propuestos en el trabajo, mostrando los resultados experimentales obtenidos a partir de experimentos realizados en un robot manipulador industrial PUMA 560. Finalmente, en el Capítulo 1 se exponen las conclusiones extraídas del presente trabajo y se indican algunos aspectos que se han considerado susceptibles de ser mejorados o desarrollados en futuros trabajos. En el ANEXO A y el ANEXO B se incluyen algunas particularidades relativas, respectivamente, al modelado cinemático del robot PUMA 560 y a la implementación del experimento de identificación de la fricción. El ANEXO A describe la arquitectura de control utilizada en la fase experimental. Se trata de una arquitectura abierta donde la unidad de control está constituida por un PC, lo cual implica una gran libertad a la hora de implementar estrategias de control complejas.

CAPÍTULO 2

MODELADO DEL ROBOT MANIPULADOR

El objetivo del presente capítulo es la obtención de las ecuaciones del movimiento del robot en forma lineal respecto al conjunto de parámetros a identificar, tanto parámetros inerciales como coeficientes del modelo de fricción. Se considera un modelo dinámico en el cual se asume que el robot está constituido por barras rígidas con uniones ideales, incluyéndose en el mismo el comportamiento dinámico de los actuadores. Dicho modelo contempla asimismo la presencia de fricción en los pares cinemáticos del robot.

Las ecuaciones del movimiento del robot se obtienen a partir del formalismo de Gibbs-Appell. Cabe resaltar que dicho Principio de la Dinámica permite, de un modo sencillo, la inclusión de los actuadores dentro de la formulación dinámica. Una vez presentadas dichas ecuaciones en su forma original, se procede a obtener, de un modo eficiente, los respectivos modelos dinámicos lineales respecto a los parámetros físicos a identificar tanto para la barras como para los actuadores. Por lo que respecta a la modelización de la fricción en los pares cinemáticos, debe destacarse que la misma se ha restringido a modelos de fricción lineales respecto a sus coeficientes con la finalidad de posibilitar la inclusión de éstos en el modelo dinámico del robot durante el proceso de identificación.

Otro aspecto de gran relevancia lo constituye la dependencia lineal que habitualmente existe entre los parámetros físicos de sistemas mecánicos de un mínimo grado de complejidad. En este capítulo, se describen métodos numéricos mediante los cuales es posible determinar un modelo dinámico reducido función únicamente de aquellos parámetros, o eventualmente combinaciones lineales de ellos, linealmente independientes. Dichos parámetros linealmente independientes constituyen el conjunto de parámetros base identificables del modelo.

2.1. MODELO CINEMÁTICO

En esta sección, se lleva a cabo la descripción del modelo cinemático de un robot con configuración de cadena cinemática abierta incluyendo los actuadores. Como es habitual en el campo de la Robótica, se empleará la notación de Dénavit-Hartenberg, que en este tipo de mecanismos conduce a un conjunto mínimo de coordenadas generalizadas. En la Figura 2.1, puede verse el esquema de asignación seguido tanto en el caso de las barras del manipulador como en el de los actuadores. Como puede apreciarse en dicha figura, el modelo cinemático de las barras fue desarrollado de acuerdo a la notación de Denavit-Hartenberg modificada, convención de Craig, mientras que para el modelo cinemático de los actuadores se prefirió, en base a un mínimo ahorro computacional, el criterio de Denavit-Hartenberg estándar, de acuerdo a la convención de Paul. Teniendo en cuenta el tipo de robot sobre el que se realiza la aplicación experimental, se considerarán exclusivamente pares de revolución.

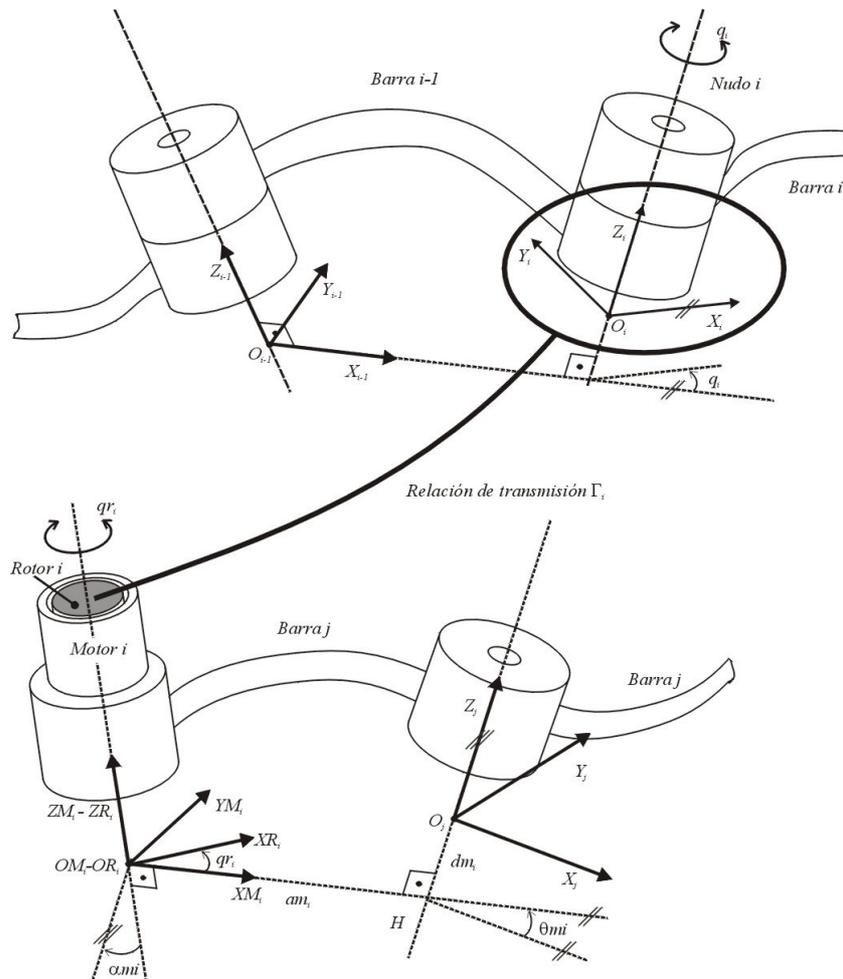


Figura 2.1. Esquema de la asignación de los sistemas de referencia locales de barras y rotores.

Una vez asignados los sistemas de referencia, tanto a barras como a rotores, según el criterio de Denavit-Hartenberg, la relación entre sistemas de referencia consecutivos viene definida, en cada caso, por el conjunto de parámetros a_i , α_i , d_i y q_i . De estos cuatro parámetros, los tres primeros son constantes, mientras que el cuarto corresponde a la coordenada generalizada. Los valores de dichos parámetros cinemáticos correspondientes a un robot manipulador PUMA 560 se detallan en la Tabla A.2 del ANEXO A.

En función de los anteriores cuatro parámetros, se define en cada caso un vector de traslación ${}^{i-1}\vec{r}_{O_{i-1},O_i}$ y una matriz de rotación ${}^{i-1}\mathbf{R}_i$ que relacionan dos sistemas de referencia locales consecutivos, los cuales, de acuerdo al criterio de Denavit-Hartenberg modificado, quedarían como sigue:

$${}^{i-1}\mathbf{R}_i = \begin{bmatrix} \cos q_i & -\sin q_i & 0 \\ \cos \alpha_i \cdot \sin q_i & \cos \alpha_i \cdot \cos q_i & -\sin \alpha_i \\ \sin \alpha_i \cdot \sin q_i & \sin \alpha_i \cdot \cos q_i & \cos \alpha_i \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

$${}^{i-1}\vec{r}_{O_{i-1},O_i} = \begin{bmatrix} a_i \\ d_i \sin \alpha_i \\ -d_i \cos \alpha_i \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

A partir de las anteriores expresiones, se determinan las variables cinemáticas que posteriormente serán utilizadas en el modelo dinámico del manipulador, a saber: velocidad angular, aceleración angular y aceleración lineal del centro de gravedad de cada barra, todas ellas expresadas respecto al origen del sistema de referencia local de la barra correspondiente. Estas variables cinemáticas pueden obtenerse de un modo recursivo mediante las expresiones que se muestran a continuación.

$$\begin{aligned} {}^i\vec{\omega}_i &= {}^i\mathbf{R}_{i-1} {}^{i-1}\vec{\omega}_{i-1} + {}^i\vec{z}_i \cdot \dot{q}_i \\ {}^i\dot{\vec{\omega}}_i &= {}^i\mathbf{R}_{i-1} {}^{i-1}\dot{\vec{\omega}}_{i-1} + {}^i\vec{z}_i \cdot \ddot{q}_i + {}^i\mathbf{R}_{i-1} {}^{i-1}\vec{\omega}_{i-1} \times ({}^i\vec{z}_i \cdot \dot{q}_i) \\ {}^i\ddot{\vec{r}}_{O_i} &= {}^i\mathbf{R}_{i-1} \left({}^{i-1}\ddot{\vec{r}}_{O_{i-1}} + {}^{i-1}\vec{\omega}_{i-1} \times ({}^{i-1}\vec{\omega}_{i-1} \times {}^{i-1}\vec{r}_{O_{i-1},O_i}) + {}^{i-1}\dot{\vec{\omega}}_{i-1} \times {}^{i-1}\vec{r}_{O_{i-1},O_i} \right) \\ {}^i\ddot{\vec{r}}_{G_i} &= {}^i\ddot{\vec{r}}_{O_i} + {}^i\vec{\omega}_i \times ({}^i\vec{\omega}_i \times {}^i\vec{r}_{O_i,G_i}) + {}^i\dot{\vec{\omega}}_i \times {}^i\vec{r}_{O_i,G_i} \end{aligned} \quad (2.3)$$

donde ${}^i\vec{\omega}_i$, ${}^i\dot{\vec{\omega}}_i$, ${}^i\ddot{\vec{r}}_{O_i}$ y ${}^i\ddot{\vec{r}}_{G_i}$ son respectivamente para la barra i la velocidad y aceleración angular, la aceleración del origen del sistema de referencia local asociado y la aceleración

del centro de gravedad expresadas respecto al origen del sistema de referencia local. ${}^i\vec{r}_{O_iG_i}$ es el vector de posición del centro de gravedad de la barra i respecto al sistema de referencia local. \dot{q}_i y \ddot{q}_i son respectivamente la velocidad y la aceleración generalizadas de la barra. Se tiene que ${}^i\vec{z}_i = [0 \ 0 \ 1]^T$ en todos los casos. Cabe indicar que dichas expresiones han sido particularizadas para el supuesto en que todos los pares cinemáticos del manipulador sean de revolución, si bien ello no debe suponer restricción alguna a la generalidad del desarrollo posterior.

La aplicación experimental posterior tiene lugar sobre un robot industrial de base fija. Sin embargo, y con el fin de incluir el peso de las barras en la formulación dinámica, se considera que la base del robot se ve afectada por las velocidades y aceleraciones que se muestran a continuación:

$${}^0\vec{\omega}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad {}^0\dot{\vec{\omega}}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad {}^0\ddot{\vec{r}}_{O_0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ g \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

Es decir, se supone una aceleración en la base del manipulador de igual valor absoluto y sentido opuesto al de la aceleración de la gravedad \vec{g} .

En el caso de los actuadores, su disposición para cada tipo específico de robot no responde a una sistemática estricta, por lo cual será necesario referirse, en lo que sigue, a un modelo concreto de robot. En la Figura A.1 del ANEXO A puede verse la localización de los motores sobre las barras de un robot manipulador PUMA 560. Como se aprecia, el motor que acciona la primera articulación se halla en la base del robot. Los motores correspondientes a las articulaciones segunda y tercera están dispuestos en la barra dos. Por su parte, la barra tres soporta los motores que actúan sobre las tres últimas articulaciones. Las constantes de par/intensidad, así como las relaciones de transmisión Γ_i correspondientes a los motores de cada una de las seis articulaciones de dicho robot manipulador se indican en Tabla A.4 y Tabla A.5 del ANEXO A.

Como se ha indicado, el modelo cinemático de los motores ha sido determinado en concordancia con el criterio de Denavit-Hartenberg estándar para la asignación de sistemas de referencia locales. Los valores de los parámetros cinemáticos del modelo de acuerdo a dicho criterio serían los mostrados en la Tabla A.6 del ANEXO A. Dichos parámetros relacionan, en cada caso, el sistema de referencia local ligado a la parte fija del motor con el sistema de referencia local correspondiente a la barra en la cual se halla ubicado el motor.

El sistema de referencia local ligado a un rotor tan sólo experimenta un movimiento de rotación respecto al sistema de referencia local ligado al estator correspondiente, el cual tiene lugar a lo largo del eje Z común, siendo los orígenes de ambos sistemas de referencia coincidentes. Los parámetros de Denavit-Hartenberg que relacionan los sistemas de referencia de los rotores respecto a los estatores serán, por tanto, todos nulos excepto q_{r_i} , correspondiente al giro efectuado por el rotor respecto al estátor y que viene, en consecuencia, dado por la posición angular del rotor q_{r_i} para cada barra i :

$$q_{r_i} = \Gamma_i q_i \quad (2.5)$$

siendo las relaciones de transmisión Γ_i , para cada barra i , las definidas en la Tabla A.4 del ANEXO A.

En consecuencia, se obtienen las siguientes matrices de rotación y vectores de traslación que relacionan los sistemas de referencia locales de los rotores r_i y estatores s_i con el sistema de referencia local de la barra j que los soporta en cada caso:

$${}^{s_i} \mathbf{R}_j = \begin{pmatrix} c\theta_{s_i} & s\theta_{s_i} & 0 \\ -s\theta_{s_i} c\alpha_{s_i} & c\theta_{s_i} c\alpha_{s_i} & s\alpha_{s_i} \\ s\theta_{s_i} s\alpha_{s_i} & -c\theta_{s_i} s\alpha_{s_i} & c\alpha_{s_i} \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

$${}^i \mathbf{R}_{s_i} = \begin{pmatrix} c\theta_{r_i} & s\theta_{r_i} & 0 \\ -s\theta_{r_i} & c\theta_{r_i} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

$${}^i \mathbf{R}_j = \begin{pmatrix} c\theta_{s_i} c\theta_{r_i} - s\theta_{s_i} c\alpha_{s_i} s\theta_{r_i} & s\theta_{s_i} c\theta_{r_i} + c\theta_{s_i} c\alpha_{s_i} s\theta_{r_i} & s\alpha_{s_i} s\theta_{r_i} \\ -c\theta_{s_i} s\theta_{r_i} - s\theta_{s_i} c\alpha_{s_i} c\theta_{r_i} & -s\theta_{s_i} s\theta_{r_i} + c\theta_{s_i} c\alpha_{s_i} c\theta_{r_i} & s\alpha_{s_i} c\theta_{r_i} \\ s\theta_{s_i} s\alpha_{s_i} & -c\theta_{s_i} s\alpha_{s_i} & c\alpha_{s_i} \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

$${}^j \vec{r}_{O_j O_{s_i}} = {}^j \vec{r}_{O_j O_{r_i}} = \begin{bmatrix} a_{s_i} c\theta_{s_i} \\ a_{s_i} s\theta_{s_i} \\ d_{s_i} \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

Los símbolos c y s han sido introducidos por razones de espacio y representan, respectivamente, las funciones matemáticas seno y coseno.

Teniendo en cuenta las anteriores matrices y vectores que definen la transformación entre los sistemas de referencia locales de los rotores y la barra que los soporta en cada caso, las siguientes expresiones permitirán calcular las velocidades y aceleraciones angulares, así como las aceleraciones lineales de los centros de gravedad de los rotores y de los orígenes de los sistemas de referencia locales de los rotores:

$$\begin{aligned} {}^i \vec{\omega}_{r_i} &= {}^i \mathbf{R}_{s_i} {}^s \mathbf{R}_j {}^j \vec{\omega}_j + {}^i \vec{z}_{r_i} \dot{q}_{r_i} \\ {}^i \dot{\vec{\omega}}_{r_i} &= {}^i \mathbf{R}_{s_i} {}^s \mathbf{R}_j {}^j \vec{\omega}_j \times {}^i \vec{z}_{r_i} \dot{q}_{r_i} + {}^i \mathbf{R}_{s_i} {}^s \mathbf{R}_j {}^j \dot{\vec{\omega}}_j + {}^i \vec{z}_{r_i} \ddot{q}_{r_i} \\ {}^i \ddot{\vec{r}}_{O_{r_i}} &= {}^i \mathbf{R}_{s_i} {}^s \mathbf{R}_j \left({}^j \ddot{\vec{r}}_{O_j} + {}^j \vec{\omega}_j \times \left({}^j \vec{\omega}_j \times {}^j \vec{r}_{O_j O_{r_i}} \right) + {}^j \dot{\vec{\omega}}_j \times {}^j \vec{r}_{O_j O_{r_i}} \right) \\ {}^i \ddot{\vec{r}}_{G_{r_i}} &= {}^i \mathbf{R}_{s_i} {}^s \mathbf{R}_j \left(\begin{aligned} & {}^j \ddot{\vec{r}}_{O_j} + {}^j \vec{\omega}_j \times \left({}^j \vec{\omega}_j \times \left({}^j \vec{r}_{O_j O_{r_i}} + {}^j \vec{r}_{O_{r_i} G_{r_i}} \right) \right) \\ & + {}^j \dot{\vec{\omega}}_j \times \left({}^j \vec{r}_{O_j O_{r_i}} + {}^j \vec{r}_{O_{r_i} G_{r_i}} \right) \\ & + {}^i \vec{z}_{r_i} \dot{q}_{r_i} \times \left({}^i \vec{z}_{r_i} \dot{q}_{r_i} \times {}^i \vec{r}_{O_{r_i} G_{r_i}} \right) + 2 \left({}^i \vec{\omega}_j \times {}^i \vec{z}_{r_i} \dot{q}_{r_i} \right) \times {}^i \vec{r}_{O_{r_i} G_{r_i}} \\ & + {}^i \vec{z}_{r_i} \ddot{q}_{r_i} \times {}^i \vec{r}_{O_{r_i} G_{r_i}} \end{aligned} \right) \end{aligned} \quad (2.10)$$

donde ${}^r_i \vec{\omega}_{r_i}$, ${}^r_i \dot{\vec{\omega}}_{r_i}$, ${}^r_i \ddot{\vec{r}}_{O_{r_i}}$ y ${}^r_i \ddot{\vec{r}}_{G_{r_i}}$ son respectivamente la velocidad y aceleración angular del rotor, la aceleración lineal del origen del sistema de referencia local del rotor y la aceleración del centro de gravedad del rotor. ${}^r_i \vec{r}_{O_{r_i}G_{r_i}}$ es el vector de posición del centro de gravedad del rotor en el sistema de referencia local del rotor. \dot{q}_{r_i} y \ddot{q}_{r_i} son, respectivamente, la velocidad y aceleración angular del rotor, las cuales se definen como $\dot{q}_{r_i} = \Gamma_i \dot{q}_i$ y $\ddot{q}_{r_i} = \Gamma_i \ddot{q}_i$. Se tiene que ${}^r_i \vec{z}_{r_i} = [0 \ 0 \ 1]^T$ en todos los casos. El índice j se refiere al sistema de referencia local asociado a la barra donde se halla ubicado el motor en cada caso.

2.2. MODELO DINÁMICO

Tal y como fue indicado previamente, diferentes autores han empleado distintos principios de la dinámica, como Newton-Euler o Jourdain, con la finalidad de generar las ecuaciones del movimiento de un sistema mecánico, las cuales posteriormente son expresadas en su forma lineal respecto a los parámetros a identificar. En este trabajo, se partió de las ecuaciones de Gibbs-Appell en virtud de que, pese a su relativamente escasa utilización en el campo de la Robótica, constituyen una de las formas más simples de las ecuaciones de la Dinámica, facilitando la inclusión del efecto de los actuadores en las mismas. Otras ventajas adicionales que aportan las ecuaciones de Gibbs-Appell pueden encontrarse en Provenzano 2001.

El modelo dinámico completo del robot manipulador de acuerdo a las ecuaciones de Gibbs-Appell, considerando barras rígidas, actuadores y fricción en los nudos, vendría dado por la siguiente expresión:

$$\tau_k = \tau_{l_k} + \tau_{r_k} + \tau_{f_k} = \underbrace{\sum_{i=1}^n \frac{\partial G_{l_i}}{\partial \ddot{q}_k}}_{\text{barras}} + \underbrace{\sum_{i=1}^n \frac{\partial G_{r_i}}{\partial \ddot{q}_k}}_{\text{rotores}} + \underbrace{F_{f_k}(\dot{q}_k)}_{\text{fricción}} \quad (2.11)$$

para $k = 1..n$, donde:

- τ_k , τ_{l_k} , τ_{r_k} y τ_{f_k} denotan, respectivamente, la fuerza generalizada total y las contribuciones debidas a barras rígidas, rotores y fenómenos de fricción correspondientes al nudo k -ésimo.
- G_{l_i} y G_{r_i} constituyen la función de Gibbs definida respectivamente para barras y para rotores, mientras que
- F_{f_k} representa la fuerza generalizada de fricción en el nudo k -ésimo.
- n es el número de grados de libertad del robot manipulador.

Tras desarrollar los términos de la anterior expresión, una que vez las ecuaciones han sido linealizadas y puestas en su forma matricial, tal como se describirá en los siguientes apartados, ésta quedará de la siguiente forma:

$$\bar{\tau} = \mathbf{W}(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, \ddot{\bar{q}}) \cdot \bar{\Phi} = \left[\begin{array}{c|c|c} \mathbf{W}_l & \mathbf{W}_r & \mathbf{W}_f \end{array} \right] \cdot \begin{bmatrix} \bar{\Phi}_l \\ \bar{\Phi}_r \\ \bar{\Phi}_f \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

donde $\bar{\tau}$ es el vector de fuerzas generalizadas o, en el caso del tipo de robots considerado, vector de pares en los nudos, \mathbf{W} es la denominada matriz de observación y $\bar{\Phi}$ el vector de parámetros dinámicos del sistema. Los subíndices l , r y f se refieren

respectivamente a las componentes debidas a barras, rotores y fricción de la magnitud correspondiente en cada caso.

En los siguientes apartados, se introducen los aspectos básicos de la formulación de Gibbs-Appell para, posteriormente, aplicarlos a la obtención de los modelos dinámicos de las barras y de los rotores de acuerdo a dicha formulación. En ambos casos se procederá a expresar, de un modo eficiente, las ecuaciones del movimiento en forma lineal respecto a los parámetros a identificar. Finalmente, se introducen los modelos de fricción que, teniendo en cuenta la limitación ya mencionada en cuanto a su carácter lineal respecto a los parámetros constitutivos, se emplean en el presente trabajo.

2.2.1. Formulación de Gibbs-Appell

Las ecuaciones de la dinámica de Gibbs-Appell se derivan de la definición de la función de Gibbs, también conocida como la energía de las aceleraciones. Cuando se escribe en su forma original para un sólido cualquiera compuesto de n partículas elementales con masa m_i y aceleración a_i y considerando un sistema de referencia inercial, ésta es:

$$G = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i a_i^2 \quad (2.13)$$

En el caso de un robot manipulador compuesto por n barras consideradas como sólidos rígidos, la función de Gibbs para la barra i viene dada por:

$$G_i = \frac{1}{2} \cdot m_i \cdot {}^0\ddot{r}_{G_i}^T \cdot {}^0\ddot{r}_{G_i} + \frac{1}{2} \cdot {}^0\dot{\omega}_i^T \cdot {}^0\mathbf{I}_{G_i} \cdot {}^0\dot{\omega}_i + {}^0\dot{\omega}_i^T \cdot \left[{}^0\dot{\omega}_i \times \left({}^0\mathbf{I}_{G_i} \cdot {}^0\dot{\omega}_i \right) \right] \quad (2.14)$$

donde m_i es la masa de la barra, ${}^0\mathbf{I}_{G_i}$ es su tensor centroidal de inercia, ${}^0\dot{\bar{\omega}}_i$ y ${}^0\ddot{\bar{\omega}}_i$ representan respectivamente la velocidad y aceleración angulares de la barra y ${}^0\ddot{r}_{G_i}$ es la aceleración del centro de masas de la barra. Todas estas magnitudes están expresadas considerando un sistema de referencia inercial.

Estas magnitudes tensoriales y vectoriales pueden ser expresadas considerando un sistema de referencia local situado en la barra i , de modo que la expresión anterior quedaría como sigue:

$$\begin{aligned} G_i = & \frac{1}{2}m_i({}^0\mathbf{R}_i \cdot {}^i\ddot{r}_{G_i})^T \cdot {}^0\mathbf{R}_i \cdot {}^i\ddot{r}_{G_i} + \\ & + \frac{1}{2}({}^0\mathbf{R}_i \cdot {}^i\dot{\bar{\omega}}_i)^T \cdot {}^0\mathbf{R}_i \cdot {}^i\mathbf{I}_{G_i} \cdot {}^0\mathbf{R}_i^T \cdot ({}^0\mathbf{R}_i \cdot {}^i\dot{\bar{\omega}}_i) + \\ & + ({}^0\mathbf{R}_i \cdot {}^i\dot{\bar{\omega}}_i)^T \cdot \left[{}^0\mathbf{R}_i \cdot {}^i\bar{\omega}_i \times ({}^0\mathbf{R}_i \cdot {}^i\mathbf{I}_{G_i} \cdot {}^0\mathbf{R}_i^T \cdot {}^0\mathbf{R}_i \cdot {}^i\bar{\omega}_i) \right] \end{aligned} \quad (2.15)$$

La expresión (2.15) puede ser reescrita de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} G_i = & \frac{1}{2}m_i \cdot {}^i\ddot{r}_{G_i}^T \cdot {}^0\mathbf{R}_i^T \cdot {}^0\mathbf{R}_i \cdot {}^i\ddot{r}_{G_i} + \\ & + \frac{1}{2} \cdot {}^i\dot{\bar{\omega}}_i^T \cdot {}^0\mathbf{R}_i^T \cdot {}^0\mathbf{R}_i \cdot {}^i\mathbf{I}_{G_i} \cdot {}^0\mathbf{R}_i^T \cdot {}^0\mathbf{R}_i \cdot {}^i\dot{\bar{\omega}}_i + \\ & + {}^i\dot{\bar{\omega}}_i^T \cdot {}^0\mathbf{R}_i^T \cdot \left[{}^0\mathbf{R}_i \cdot {}^i\bar{\omega}_i \times ({}^0\mathbf{R}_i \cdot {}^i\mathbf{I}_{G_i} \cdot {}^0\mathbf{R}_i^T \cdot {}^0\mathbf{R}_i \cdot {}^i\bar{\omega}_i) \right] \end{aligned} \quad (2.16)$$

Y, teniendo en cuenta la naturaleza ortogonal de la matriz de rotación, se tiene:

$$G_i = \frac{1}{2}m_i \cdot {}^i\ddot{r}_{G_i}^T \cdot {}^i\ddot{r}_{G_i} + \frac{1}{2} \cdot {}^i\dot{\bar{\omega}}_i^T \cdot {}^i\mathbf{I}_{G_i} \cdot {}^i\dot{\bar{\omega}}_i + {}^i\dot{\bar{\omega}}_i^T \cdot ({}^i\bar{\omega}_i \times {}^i\mathbf{I}_{G_i} \cdot {}^i\bar{\omega}_i) \quad (2.17)$$

donde ${}^i\ddot{r}_{G_i}$, ${}^i\bar{\omega}_i$, ${}^i\dot{\bar{\omega}}_i$ y ${}^i\mathbf{I}_{G_i}$ están expresados en el sistema de referencia local i .

La función de Gibbs para el sistema completo formado por n sólidos rígidos vendría dada por la siguiente expresión:

$$G = \sum_{i=1}^n G_i, \quad i = 1, 2 \dots n \quad (2.18)$$

Las ecuaciones del movimiento de Gibbs-Appell se obtienen derivando la función de Gibbs expresada anteriormente respecto a las aceleraciones generalizadas \ddot{q}_k , obteniendo de esta manera las fuerzas de inercia generalizadas que compensan las fuerzas exteriores generalizadas, esto es τ_k :

$$\tau_k = \sum_{i=k}^n \frac{\partial G_i}{\partial \ddot{q}_k}, \quad k = 1, 2 \dots n \quad (2.19)$$

Desarrollando la expresión, quedará:

$$\tau_k = \sum_{i=k}^n \left\{ \begin{array}{l} m_i \cdot {}^i \ddot{\mathbf{r}}_{G_i}^T \cdot \frac{\partial {}^i \ddot{\mathbf{r}}_{G_i}}{\partial \ddot{q}_k} + {}^i \dot{\boldsymbol{\omega}}_i^T \cdot {}^i \mathbf{I}_{G_i} \cdot \frac{\partial {}^i \dot{\boldsymbol{\omega}}_i}{\partial \ddot{q}_k} \\ + \left(\frac{\partial {}^i \dot{\boldsymbol{\omega}}_i}{\partial \ddot{q}_k} \right)^T \cdot [{}^i \bar{\boldsymbol{\omega}}_i \times ({}^i \mathbf{I}_{G_i} \cdot {}^i \bar{\boldsymbol{\omega}}_i)] \end{array} \right\} \quad (2.20)$$

Reorganizando los elementos de la expresión (2.20), pueden identificarse dos términos distintos, tal como se ve en la siguiente expresión:

$$\tau_k = \underbrace{\sum_{i=k}^n \left\{ \left(\frac{\partial {}^i \dot{\boldsymbol{\omega}}_i}{\partial \ddot{q}_k} \right)^T \cdot [{}^i \mathbf{I}_{G_i} \cdot {}^i \dot{\boldsymbol{\omega}}_i + {}^i \bar{\boldsymbol{\omega}}_i \times ({}^i \mathbf{I}_{G_i} \cdot {}^i \bar{\boldsymbol{\omega}}_i)] \right\}}_{A_k} + \underbrace{\sum_{i=k}^n \left\{ \left(\frac{\partial {}^i \ddot{\mathbf{r}}_{G_i}}{\partial \ddot{q}_k} \right)^T \cdot m_i \cdot {}^i \ddot{\mathbf{r}}_{G_i} \right\}}_{B_k} \quad (2.21)$$

A la hora de obtener las fuerzas generalizadas, las velocidades angulares, aceleraciones angulares, aceleraciones del origen de los sistemas de referencia locales de las barras y las aceleraciones del centro de masa de las barras se recurre a las conocidas expresiones recursivas, ya definidas en el apartado 2.1, de acuerdo a la notación de Denavit-Hartenberg modificada (convención de Craig).

El término $\frac{\partial {}^i \dot{\bar{\omega}}_i}{\partial \ddot{q}_k}$ puede ser obtenido partiendo de la expresión correspondiente a la aceleración angular de la barra. Esta derivada puede ser calculada por un procedimiento recursivo tal como se indica a continuación.

$$\begin{aligned} \frac{\partial {}^i \dot{\bar{\omega}}_i}{\partial \ddot{q}_k} &= [0 \ 0 \ 0]^T, & i < k \\ \frac{\partial {}^i \dot{\bar{\omega}}_i}{\partial \ddot{q}_k} &= {}^i \mathbf{R}_{i-1} \cdot {}^{i-1} \mathbf{R}_{i-2} \cdots {}^{k-1} \mathbf{R}_k \cdot \frac{\partial {}^k \dot{\bar{\omega}}_k}{\partial \ddot{q}_k}, & i > k \\ \frac{\partial {}^i \dot{\bar{\omega}}_i}{\partial \ddot{q}_k} &= {}^i \bar{z}_i, & i = k \end{aligned} \quad (2.22)$$

Por tanto, teniendo en cuenta la expresión (2.22), el anterior término A_k puede ser reescrito como:

$$A_k = \left(\frac{\partial {}^k \dot{\bar{\omega}}_k}{\partial \ddot{q}_k} \right)^T \cdot \sum_{i=k}^n \left\{ {}^k \mathbf{R}_i \cdot \left[{}^i \mathbf{I}_{G_i} \cdot {}^i \dot{\bar{\omega}}_i + {}^i \bar{\omega}_i \times ({}^i \mathbf{I}_{G_i} \cdot {}^i \bar{\omega}_i) \right] \right\} \quad (2.23)$$

El término B_k puede ser obtenido utilizando el desarrollo de $\frac{\partial {}^i \ddot{\bar{r}}_{G_i}}{\partial \ddot{q}_k}$, que constituye la derivada de la expresión correspondiente a la aceleración lineal del centro de masa de la barra i respecto a la aceleración generalizada del nudo k , es decir:

$$\frac{\partial {}^i \ddot{\vec{r}}_{G_i}}{\partial \ddot{q}_k} = \frac{\partial {}^i \ddot{\vec{r}}_{O_i}}{\partial \ddot{q}_k} + \frac{\partial {}^i \dot{\vec{\omega}}_i}{\partial \ddot{q}_k} \times {}^i \vec{r}_{O_i, G_i} \quad (2.24)$$

El término $\frac{\partial {}^i \ddot{\vec{r}}_{O_i}}{\partial \ddot{q}_k}$ se obtiene, por su parte, utilizando la expresión de la aceleración lineal del origen del sistema de referencia local de la barra:

$$\frac{\partial {}^i \ddot{\vec{r}}_{O_i}}{\partial \ddot{q}_k} = {}^i \mathbf{R}_{i-1} \cdot \left(\frac{\partial {}^{i-1} \ddot{\vec{r}}_{O_{i-1}}}{\partial \ddot{q}_k} + \frac{\partial {}^{i-1} \dot{\vec{\omega}}_{i-1}}{\partial \ddot{q}_k} \times {}^{i-1} \vec{r}_{O_{i-1}, O_i} \right) \quad (2.25)$$

Con lo cual, substituyendo la expresión (2.25) en (2.24) y simplificando, es posible expresar el término $\frac{\partial {}^i \ddot{\vec{r}}_{G_i}}{\partial \ddot{q}_k}$ de la siguiente forma:

$$\frac{\partial {}^i \ddot{\vec{r}}_{G_i}}{\partial \ddot{q}_k} = \frac{\partial {}^i \dot{\vec{\omega}}_i}{\partial \ddot{q}_k} \times {}^i \vec{r}_{O_{k-1}, G_i} \quad (2.26)$$

Cuando se substituye la expresión (2.26) en la descripción del término B_k de la ecuación (2.21) introducida anteriormente, se obtiene:

$$B_k = \sum_{i=k}^n \left\{ \left(\frac{\partial {}^i \dot{\vec{\omega}}_i}{\partial \ddot{q}_k} \right)^T \cdot \left({}^i \vec{r}_{O_{k-1}, G_i} \wedge m_i {}^i \ddot{\vec{r}}_{G_i} \right) \right\} \quad (2.27)$$

Considerando de nuevo la expresión (2.22), así como las propiedades del producto vectorial, quedaría:

$$B_k = \left(\frac{\partial {}^k \dot{\vec{\omega}}_k}{\partial \ddot{q}_k} \right)^T \cdot \sum_{i=k}^n \left[{}^k \mathbf{R}_i \cdot \left({}^i \vec{r}_{O_{k-1}, G_i} \times m_i {}^i \ddot{\vec{r}}_{G_i} \right) \right] \quad (2.28)$$

Aunque este aspecto queda fuera del ámbito de esta tesis, en Mata et al. 2002 se muestra como esta formulación conduciría a un algoritmo para la resolución del problema dinámico inverso en robots de complejidad computacional $O(n)$.

2.2.2. Forma Lineal de las Ecuaciones del Movimiento Respecto a los Parámetros Inerciales. Modelo de Barras

Mediante el desarrollo a partir de la ecuación de Gibbs presentado en el apartado 2.2.1, se ha llegado a la expresión (2.21) que ahora será reescrita de la forma:

$$\begin{aligned} \tau_{l_k} = & \sum_{i=k}^n \left\{ \left(\frac{\partial \cdot {}^i \bar{\omega}_i}{\partial \ddot{q}_k} \right)^T \cdot \left[{}^i \mathbf{I}_{G_i} \cdot {}^i \dot{\bar{\omega}}_i + {}^i \bar{\omega}_i \times ({}^i \mathbf{I}_{G_i} \cdot {}^i \bar{\omega}_i) \right] \right\} \\ & + \sum_{i=k}^n \left\{ \left(\frac{\partial \cdot {}^i \bar{r}_{G_i}}{\partial \ddot{q}_k} \right)^T \cdot m_i \cdot {}^i \ddot{r}_{G_i} \right\} \end{aligned} \quad (2.29)$$

A fin de sistematizar el proceso de identificación de los parámetros inerciales, tanto la reducción inicial del sistema como la posterior resolución del mismo, de las cuales se hablará con mayor detalle en el Capítulo 1, se efectuarán mediante operaciones matriciales. Para ello, es necesaria la reestructuración de las ecuaciones de la Dinámica, presentadas anteriormente, de manera que los parámetros a identificar aparezcan de forma lineal en las mismas. Con este fin, se expresan los componentes de las matrices de inercia de las barras respecto al origen del sistema de referencia local de la barra correspondiente, en lugar de respecto al centro de masa de la misma.

Retomando las expresiones (2.23) y (2.28), correspondientes respectivamente a los términos A_k y B_k obtenidos en el apartado anterior, y sustituyendo la siguiente expresión de la aceleración lineal del centro de gravedad de la barra i -ésima:

$${}^i\ddot{\mathbf{r}}_{G_i} = {}^i\ddot{\mathbf{r}}_{O_i} + {}^i\dot{\boldsymbol{\omega}}_i \times ({}^i\tilde{\boldsymbol{\omega}}_i \times {}^i\tilde{\mathbf{r}}_{O_i G_i}) + {}^i\dot{\tilde{\boldsymbol{\omega}}}_i \times {}^i\tilde{\mathbf{r}}_{O_i G_i} \quad (2.30)$$

se llega a la siguiente expresión de la suma de ambos términos:

$$A_k + B_k = \left(\frac{\partial {}^k \dot{\tilde{\boldsymbol{\omega}}}_k}{\partial \ddot{q}_k} \right)^T \cdot \sum_{i=k}^n {}^k \mathbf{R}_i \cdot \begin{bmatrix} m_i {}^i\tilde{\mathbf{r}}_{O_{j-1}G_i} \times ({}^i\dot{\tilde{\boldsymbol{\omega}}}_i \times {}^i\tilde{\mathbf{r}}_{O_i G_i}) \\ + {}^i\mathbf{I}_{G_i} {}^i\dot{\tilde{\boldsymbol{\omega}}}_i \\ + m_i {}^i\tilde{\mathbf{r}}_{O_{j-1}G_i} \times {}^i\tilde{\boldsymbol{\omega}}_i \times ({}^i\tilde{\boldsymbol{\omega}}_i \times {}^i\tilde{\mathbf{r}}_{O_i G_i}) \\ + {}^i\tilde{\boldsymbol{\omega}}_i \times {}^i\mathbf{I}_{G_i} {}^i\tilde{\boldsymbol{\omega}}_i \\ + m_i {}^i\tilde{\mathbf{r}}_{O_{j-1}G_i} \times {}^i\ddot{\mathbf{r}}_{O_i} \end{bmatrix} \quad (2.31)$$

Tomando en consideración el teorema de los ejes paralelos con el fin de expresar los tensores de inercia respecto al origen de los sistemas de referencia locales:

$${}^i\mathbf{I}_{O_i} = {}^i\mathbf{I}_{G_i} + m_i \cdot \left[({}^i\tilde{\mathbf{r}}_{O_i G_i}^T \cdot {}^i\tilde{\mathbf{r}}_{O_i G_i}) \cdot \mathbf{1} - ({}^i\tilde{\mathbf{r}}_{O_i G_i} \cdot {}^i\tilde{\mathbf{r}}_{O_i G_i}^T) \right] \quad (2.32)$$

donde ${}^i\mathbf{I}_{O_i}$ es el tensor de inercia de la barra i respecto al origen del sistema de referencia local de la propia barra y $\mathbf{1}$ es la matriz de identidad.

Considerando las dos propiedades siguientes del producto vectorial:

$$\begin{aligned} \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{a}) &= (\vec{a}^T \vec{a} \mathbf{1} - \vec{a} \vec{a}^T) \vec{b} \\ \vec{a} \times \vec{b} \times (\vec{b} \times \vec{a}) &= \vec{b} \times (\vec{a}^T \vec{a} \mathbf{1} - \vec{a} \vec{a}^T) \vec{b} \end{aligned} \quad (2.33)$$

la anterior expresión (2.31) puede ser reescrita como:

$$A_k + B_k = \left(\frac{\partial {}^k \dot{\tilde{\boldsymbol{\omega}}}_k}{\partial \ddot{q}_k} \right)^T \cdot \sum_{i=k}^n {}^k \mathbf{R}_i \cdot \begin{bmatrix} {}^i\mathbf{I}_{O_i} {}^i\dot{\tilde{\boldsymbol{\omega}}}_i + {}^i\tilde{\boldsymbol{\omega}}_i {}^i\mathbf{I}_{O_i} {}^i\tilde{\boldsymbol{\omega}}_i \\ + ({}^i\ddot{\mathbf{r}}_{O_i} - {}^i\tilde{\mathbf{r}}_{O_{j-1}O_i} ({}^i\dot{\tilde{\boldsymbol{\omega}}}_i + {}^i\tilde{\boldsymbol{\omega}}_i {}^i\tilde{\boldsymbol{\omega}}_i)) \cdot m_i {}^i\tilde{\mathbf{r}}_{O_i G_i} \\ + ({}^i\tilde{\mathbf{r}}_{O_{j-1}O_i} \cdot {}^i\ddot{\mathbf{r}}_{O_i}) \cdot m_i \end{bmatrix} \quad (2.34)$$

donde se han utilizado los siguientes operadores con objeto de convertir las operaciones con vectores en operaciones matriciales equivalentes:

$$\begin{aligned}\bar{\omega} &= [\omega_x \quad \omega_y \quad \omega_z]^T \\ \tilde{\omega} &= \begin{pmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{pmatrix} \\ \hat{\omega} &= \begin{pmatrix} \omega_x & \omega_y & \omega_z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \omega_x & 0 & \omega_y & \omega_z & 0 \\ 0 & 0 & \omega_x & 0 & \omega_y & \omega_z \end{pmatrix}\end{aligned}\quad (2.35)$$

Además, se introduce el siguiente vector que reagrupa las componentes distintas de la matriz de inercia en forma vectorial:

$${}^i \mathbf{I}_i = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{xy} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{xz} & I_{yz} & I_{zz} \end{pmatrix} \rightarrow {}^i \vec{I}_i = [I_{xx} \quad I_{xy} \quad I_{xz} \quad I_{yy} \quad I_{yz} \quad I_{zz}]^T \quad (2.36)$$

Así pues, los términos A_j y B_j pueden ser escritos del siguiente modo:

$$A_k = \left(\frac{\partial {}^k \dot{\omega}_k}{\partial \ddot{q}_k} \right)^T \cdot \sum_{i=k}^n {}^k \mathbf{R}_i \cdot \left[({}^i \dot{\omega}_i + {}^i \tilde{\omega}_i {}^i \dot{\omega}_i) {}^i \vec{I}_{O_i} \right] \quad (2.37)$$

$$B_k = \left(\frac{\partial {}^k \dot{\omega}_k}{\partial \ddot{q}_k} \right)^T \cdot \sum_{i=k}^n {}^k \mathbf{R}_i \cdot \left[\begin{aligned} & \left({}^i \ddot{r}_{O_i} - {}^i \tilde{r}_{O_{j-1}O_i} ({}^i \dot{\omega}_i + {}^i \tilde{\omega}_i {}^i \dot{\omega}_i) \right) \cdot m_i {}^i \vec{r}_{O_i G_i} \\ & + \left({}^i \tilde{r}_{O_{j-1}O_i} {}^i \ddot{r}_{O_i} \right) \cdot m_i \end{aligned} \right] \quad (2.38)$$

Finalmente, se suman ambos términos para obtener la siguiente expresión de las fuerzas generalizadas linealizada respecto a los parámetros inerciales:

$$\tau_{l_k} = \left(\frac{\partial {}^k \dot{\tilde{\omega}}_k}{\partial \ddot{q}_k} \right)^T \sum_{i=k}^n {}^k \mathbf{R}_i \begin{bmatrix} {}^i \hat{\eta}_i \cdot {}^i \bar{I}_i + ({}^i \tilde{r}_{O_k O_i} {}^i \tilde{\eta}_i - {}^i \tilde{r}_{O_i}) \cdot m_i {}^i \tilde{r}_{O_i G_i} \\ + {}^i \tilde{r}_{O_k O_i} {}^i \ddot{r}_{O_i} \cdot m_i \end{bmatrix} \quad (2.39)$$

donde:

$${}^k \hat{\eta}_i = ({}^k \dot{\hat{\omega}}_i + {}^k \tilde{\omega}_i {}^k \hat{\omega}_i), \quad {}^k \tilde{\eta}_i = ({}^k \dot{\tilde{\omega}}_i + {}^k \tilde{\omega}_i {}^k \tilde{\omega}_i) \quad (2.40)$$

Por consiguiente, el sistema de ecuaciones correspondiente al modelo de barras presentará, expresado en su forma matricial, la siguiente forma para una configuración $(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, \ddot{\bar{q}})$ dada del robot manipulador:

$$\bar{\tau}_l = \mathbf{W}_l(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, \ddot{\bar{q}}) \cdot \bar{\Phi}_l \quad (2.41)$$

donde $\bar{\tau}_l$ es el vector de fuerzas generalizadas, \mathbf{W}_l es la matriz de observación y $\bar{\Phi}_l$ es el vector de parámetros inerciales del sistema, el cual presenta, en este caso, la siguiente forma:

$$\bar{\Phi}_l = \left[{}^n \bar{I}_n \quad \dots \quad {}^1 \bar{I}_1 \quad m_n \cdot {}^n \tilde{r}_{O_n G_n} \quad m_n \quad \dots \quad m_1 \cdot {}^1 \tilde{r}_{O_1 G_1} \quad m_1 \right]^T \quad (2.42)$$

2.2.2.1. Descripción del algoritmo

En este apartado, se describe el algoritmo para la obtención de los términos que constituyen la anterior matriz de observación \mathbf{W}_l de acuerdo a las ecuaciones linealizadas obtenidas en el apartado anterior.

La matriz \mathbf{W}_l será obtenida como:

$$\mathbf{W}_l = \mathbf{D}_l \cdot \mathbf{A} \mathbf{B}_l \quad (2.43)$$

donde \mathbf{D}_l se define como:

$$\mathbf{D}_l = \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial^n \dot{\hat{\omega}}_n}{\partial \ddot{q}_n} \right)^T & \mathbf{0}_{1 \times 3} & \cdots & \mathbf{0}_{1 \times 3} \\ \mathbf{0}_{1 \times 3} & \left(\frac{\partial^{n-1} \dot{\hat{\omega}}_{n-1}}{\partial \ddot{q}_{n-1}} \right)^T & \cdots & \mathbf{0}_{1 \times 3} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0}_{1 \times 3} & \mathbf{0}_{1 \times 3} & \cdots & \left(\frac{\partial^1 \dot{\hat{\omega}}_1}{\partial \ddot{q}_1} \right)^T \end{pmatrix} \quad (2.44)$$

$$\text{con } \left(\frac{\partial^j \dot{\hat{\omega}}_j}{\partial \ddot{q}_j} \right)^T = [0 \quad 0 \quad 1] \text{ para todo } j = 1..n.$$

La matriz \mathbf{AB}_l está compuesta por dos submatrices correspondientes a cada uno de los términos recursivos A_j y B_j presentados anteriormente:

$$\mathbf{AB}_l = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A}_l & \mathbf{B}_l \end{array} \right] \quad (2.45)$$

La matriz \mathbf{A}_l está a su vez compuesta por $n \times n$ submatrices \mathbf{A}_{lij} definidas tal como se indica a continuación:

$$\mathbf{A}_l = \begin{pmatrix} {}^n \hat{\eta}_n & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ {}^{n-1} R_n {}^n \hat{\eta}_n & {}^{n-1} \hat{\eta}_{n-1} & \cdots & 0 & 0 \\ {}^{n-2} R_n {}^n \hat{\eta}_n & {}^{n-2} R_{n-1} {}^{n-1} \hat{\eta}_{n-1} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ {}^2 R_n {}^n \hat{\eta}_n & {}^2 R_{n-1} {}^{n-1} \hat{\eta}_{n-1} & \cdots & {}^2 \hat{\eta}_2 & 0 \\ {}^1 R_n {}^n \hat{\eta}_n & {}^1 R_{n-1} {}^{n-1} \hat{\eta}_{n-1} & \cdots & {}^1 R_2 {}^2 \hat{\eta}_2 & {}^1 \hat{\eta}_1 \end{pmatrix} \quad (2.46)$$

Por tanto, las distintas submatrices serán calculadas del siguiente modo ($i, j = 1, \dots, n$):

$$\begin{cases} \mathbf{A}_{lij} = 0 & i < j \\ \mathbf{A}_{lij} = {}^{n+1-j}\dot{\hat{\omega}}_{n+1-j} + {}^{n+1-j}\tilde{\omega}_{n+1-j} {}^{n+1-j}\hat{\omega}_{n+1-j} & i = j \\ \mathbf{A}_{lij} = {}^{n+1-i}R_{n+2-i} \mathbf{A}_{i-1,j} & i > j \end{cases} \quad (2.47)$$

En cuanto a la submatriz \mathbf{B}_l , ésta se compone igualmente de los $n \times n$ términos:

$$\mathbf{B}_{lij} = \left[\mathbf{B1}_{lij} \mid \mathbf{B2}_{lij} \right] \quad (2.48)$$

donde cada uno de los términos se ha descompuesto, a su vez, en una submatriz 3×3 , $\mathbf{B1}_{lij}$, y una submatriz columna 3×1 , $\mathbf{B2}_{lij}$. Estas submatrices se calcularán del modo que seguidamente se indica. Definiendo los dos términos auxiliares:

$${}^k\tilde{H}_i = {}^kR_i \left({}^i\tilde{r}_{O_k O_i} {}^i\tilde{\eta}_i - {}^i\tilde{r}_{O_i} \right), \quad {}^k\tilde{h}_i = {}^kR_i {}^i\tilde{r}_{O_k O_i} {}^i\tilde{r}_{O_i} \quad (2.49)$$

La matriz $\mathbf{B1}_l$, construida a partir de los términos $\mathbf{B1}_{lij}$, presentará la siguiente forma:

$$\mathbf{B1}_l = \begin{pmatrix} -{}^n\tilde{r}_{O_n} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ {}^{n-1}\tilde{H}_n & -{}^{n-1}\tilde{r}_{O_{n-1}} & \dots & 0 & 0 \\ {}^{n-2}\tilde{H}_n & {}^{n-2}\tilde{H}_{n-1} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ {}^2\tilde{H}_n & {}^2\tilde{H}_{n-1} & \dots & -{}^2\tilde{r}_{O_2} & 0 \\ {}^1\tilde{H}_n & {}^1\tilde{H}_{n-1} & \dots & {}^1\tilde{H}_2 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.50)$$

En cuanto a $\mathbf{B2}_l$, constituida por los términos $\mathbf{B2}_{lij}$, responderá a la siguiente estructura:

$$\mathbf{B2}_l = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ {}^{n-1}\bar{h}_n & 0 & \dots & 0 & 0 \\ {}^{n-2}\bar{h}_n & {}^{n-2}\bar{h}_{n-1} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ {}^2\bar{h}_n & {}^2\bar{h}_{n-1} & \dots & 0 & 0 \\ {}^1\bar{h}_n & {}^1\bar{h}_{n-1} & \dots & {}^1\bar{h}_2 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.51)$$

Definiendo los términos auxiliares η_{ij} :

$$\begin{cases} \eta_{ij} = {}^{n+1-j}\tilde{\omega}_{n+1-j} {}^{n+1-j}\tilde{\omega}_{n+1-j} + {}^{n+1-j}\dot{\tilde{\omega}}_{n+1-j} & i = j \\ \eta_{ij} = {}^{n+1-i}R_{n+2-i} \cdot \eta_{i-1,j} & i > j \end{cases} \quad (2.52)$$

$\mathbf{B1}_{lij}$ será calculado como:

$$\begin{cases} \mathbf{B1}_{lij} = 0 & i < j \\ \mathbf{B1}_{lij} = {}^{n+1-j}\ddot{\tilde{r}}_{O_{n+1-j}} & i = j \\ \mathbf{B1}_{lij} = {}^{n+1-i}R_{n+2-i} \mathbf{B1}_{i-1,j} - {}^{n+1-i}\tilde{r}_{O_{n+1-i}O_{n+2-i}} \eta_{ij} & i > j \end{cases} \quad (2.53)$$

En cuanto a $\mathbf{B2}_{lij}$, se define igualmente un término auxiliar δ_{ij} , el cual viene dado por:

$$\begin{cases} \delta_{ij} = {}^{n+1-i}\tilde{r}_{O_{n+1-i}O_{n+2-i}} & i = j + 1 \\ \delta_{ij} = {}^{n+1-i}\tilde{r}_{O_{n+1-i}O_{n+2-i}} {}^{n+1-i}R_{n+2-i} + {}^{n+1-i}R_{n+2-i} \delta_{i-1,j} & i > j + 1 \end{cases} \quad (2.54)$$

A partir del mismo, quedará entonces:

$$\begin{cases} \mathbf{B2}_{lij} = 0 & i \leq j \\ \mathbf{B2}_{lij} = -\delta_{ij} {}^{n-j}R_{n+1-j} {}^{n+1-j}\ddot{\tilde{r}}_{O_{n+1-j}} & i > j \end{cases} \quad (2.55)$$

La premultiplicación por la matriz \mathbf{D}_l consiste simplemente, en la práctica, en tomar tan sólo la tercera fila de cada una de las submatrices anteriormente calculadas.

2.2.3. Forma Lineal de las Ecuaciones del Movimiento Respecto a los Parámetros Inerciales. Modelo de Actuadores

En este apartado, se incorpora el modelo dinámico de los rotores, mediante el cual se pretende incrementar el grado de precisión en la determinación de los parámetros del robot manipulador. Este modelo dinámico tiene por objeto la modelización del par correspondiente al efecto giroscópico de los rotores, así como de eventuales excentricidades del eje de giro de los mismos.

Procediendo análogamente al caso del modelo de barras rígidas, la expresión del par debido a los rotores calculado a partir de la definición de la función de Gibbs para el caso de los rotores vendrá dada por:

$$\tau_{r_k} = \sum_{i=1}^n \left[\left(\frac{\partial {}^i \dot{\bar{\omega}}_i}{\partial \ddot{q}_k} \right)^T \left({}^i \mathbf{I}_{G_{r_i}} \cdot {}^i \dot{\bar{\omega}}_i + {}^i \bar{\omega}_i \times {}^i \mathbf{I}_{G_{r_i}} \cdot {}^i \bar{\omega}_i \right) + \left(\frac{\partial {}^i \ddot{\bar{r}}_{G_{r_i}}}{\partial \ddot{q}_k} \right)^T m_{r_i} \cdot {}^i \ddot{\bar{r}}_{G_{r_i}} \right] \quad (2.56)$$

Teniendo en cuenta las expresiones de las variables cinemáticas de los rotores, definidas en el apartado 2.1, las derivadas parciales que aparecen en la anterior expresión podrán calcularse del siguiente modo:

$$\frac{\partial {}^i \dot{\bar{\omega}}_i}{\partial \ddot{q}_k} = {}^i R_{m_i} {}^{m_i} R_j \frac{\partial {}^j \dot{\bar{\omega}}_j}{\partial \ddot{q}_k} + {}^i \bar{z}_{r_i} \frac{\partial \dot{q}_{r_i}}{\partial \ddot{q}_k} \quad (2.57)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial {}^i \ddot{\vec{r}}_{G_{r_i}}}{\partial \ddot{q}_k} = & {}^i R_{m_i} {}^{m_i} R_j \left[\frac{\partial {}^j \ddot{\vec{r}}_{O_j}}{\partial \ddot{q}_k} + \frac{\partial {}^j \dot{\vec{\omega}}_j}{\partial \ddot{q}_k} \times ({}^j \vec{r}_{O_j O_{r_i}} + {}^j \vec{r}_{O_{r_i} G_{r_i}}) \right] \\ & + {}^i \vec{z}_{r_i} \frac{\partial \ddot{q}_{r_i}}{\partial \ddot{q}_k} \times {}^i \vec{r}_{O_{r_i} G_{r_i}} \end{aligned} \quad (2.58)$$

donde:

$$\frac{\partial \ddot{q}_{r_i}}{\partial \ddot{q}_k} = \begin{cases} \Gamma_i & k = j \\ 0 & k \neq j \end{cases} \quad (2.59)$$

Las variables cinemáticas correspondientes a las barras del manipulador, así como sus derivadas, se calcularán de forma análoga a como se indica en la descripción del modelo dinámico de las barras del manipulador de acuerdo a las ecuaciones de Gibbs-Appell (apartado 2.2.1).

Utilizando el teorema de los ejes paralelos, a fin de linealizar las ecuaciones respecto a los parámetros inerciales, así como las propiedades del producto vectorial, es posible llegar a las siguientes expresiones del par debido al efecto de los rotores:

$$\begin{aligned} \tau_{r_k} = & ({}^k \vec{z}_{r_k} \Gamma_k)^T \left[{}^k \hat{\eta}_{r_k} \cdot {}^k \vec{I}_{r_k} - {}^k \ddot{\vec{r}}_{O_{r_k}} \cdot m_{r_k} \cdot {}^k \vec{r}_{O_{r_k} G_{r_k}} \right] + \\ & \sum_{j=k}^n \sum_{r_i \in M_j} ({}^i \vec{z}_{r_i})^T \left[\begin{aligned} & {}^i \hat{\eta}_{r_i} \cdot {}^i \vec{I}_{r_i} + {}^i \vec{r}_{O_k O_{r_i}} \cdot {}^i \ddot{\vec{r}}_{O_{r_i}} \cdot m_{r_i} \\ & + ({}^i \vec{r}_{O_k O_{r_i}} \cdot {}^j \hat{\eta}_{r_i} - {}^i \ddot{\vec{r}}_{O_{r_i}}) \cdot m_{r_i} \cdot {}^i \vec{r}_{O_{r_i} G_{r_i}} \end{aligned} \right] \end{aligned} \quad (2.60)$$

donde M_j representa el conjunto de actuadores que se encuentran dispuestos sobre la barra j , esto es $\{r_i\} / \mu_{r_i} = j$, siendo μ_{r_i} la barra donde se ubica el actuador r_i . Las siguientes variables han sido introducidas con el fin de simplificar las expresiones:

$${}^i \hat{\eta}_{r_i} = ({}^i \dot{\vec{\omega}}_{r_i} + {}^i \vec{\omega}_{r_i} \cdot {}^i \hat{\omega}_{r_i}) \quad (2.61)$$

$${}^j_r \ddot{\eta}_{r_i} = {}^{r_i} \tilde{\omega}_j \cdot {}^{r_i} \tilde{\omega}_j + {}^{r_i} \tilde{\omega}_j + {}^{r_i} \tilde{z}_{r_i} \cdot {}^{r_i} \tilde{z}_{r_i} \cdot \dot{q}_{r_i}^2 + 2 \cdot {}^{r_i} \tilde{\omega}_j \cdot {}^{r_i} \tilde{z}_{r_i} \cdot \dot{q}_{r_i} + {}^{r_i} \tilde{z}_{r_i} \cdot \ddot{q}_{r_i} \quad (2.62)$$

Se asume que el actuador r_i que actúa sobre la barra k está situado en una de las primeras k barras, tal como es habitualmente el caso en la mayoría de robots manipuladores industriales. El resto de los nuevos términos introducidos en las expresiones anteriores se definen análogamente a los términos correspondientes del modelo de barras rígidas descrito en el apartado 2.2.2.

Así pues, el sistema de ecuaciones correspondiente al modelo dinámico de los rotores, expresado en su forma matricial, presentará la siguiente forma para una configuración $(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, \ddot{\vec{q}})$ del robot manipulador dada.

$$\vec{\tau}_r = \mathbf{W}_r(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, \ddot{\vec{q}}) \cdot \vec{\Phi}_r \quad (2.63)$$

donde $\vec{\tau}_r$ es el vector de fuerzas generalizadas, \mathbf{W}_r es la matriz de observación y $\vec{\Phi}_r$ es el vector de parámetros dinámicos del sistema, el cual presenta, en este caso, la siguiente forma:

$$\vec{\Phi}_r = \left[\begin{array}{cccccccc} {}^{r_n} \vec{I}_{r_n}^T & \cdots & {}^{r_1} \vec{I}_{r_1}^T & m_{r_n} \cdot {}^{r_n} \vec{r}_{O_{r_n} G_{r_n}}^T & m_{r_n} & \cdots & m_{r_1} \cdot {}^{r_1} \vec{r}_{O_{r_1} G_{r_1}}^T & m_{r_1} \end{array} \right]^T \quad (2.64)$$

2.2.3.1. Descripción del algoritmo

En este caso, no deberá olvidarse que las ecuaciones de la Dinámica correspondientes a los actuadores presentadas anteriormente se han obtenido como una particularización a la estructura cinemática de un robot industrial PUMA 560, así como para una disposición determinada de los actuadores sobre las barras del brazo robot. En consecuencia, deberá tenerse en cuenta en las expresiones deducidas en este apartado que

en todo momento se está asumiendo que el robot posee un número de grados de libertad $n = 6$.

Análogamente a como se planteó para el modelo dinámico de las barras, la matriz de observación para los rotores \mathbf{W}_r será obtenida como:

$$\mathbf{W}_r = \mathbf{D}_r \cdot \mathbf{A}\mathbf{B}_r \quad (2.65)$$

La matriz \mathbf{D}_r presenta la forma:

$$\mathbf{D}_r = \begin{pmatrix} [0 \ 0 \ 1] & \mathbf{0}_{\times 3} & \cdots & \mathbf{0}_{\times 3} \\ \mathbf{0}_{\times 3} & [0 \ 0 \ 1] & \cdots & \mathbf{0}_{\times 3} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ \mathbf{0}_{\times 3} & \mathbf{0}_{\times 3} & & [0 \ 0 \ 1] \end{pmatrix} \quad (2.66)$$

en tanto que ${}^i \tilde{\mathbf{z}}_i = [0 \ 0 \ 1]^T$ para cada $i = 1..n$.

La matriz $\mathbf{A}\mathbf{B}_r$ está compuesta igualmente por las submatrices \mathbf{A}_r y \mathbf{B}_r :

$$\mathbf{A}\mathbf{B}_r = [\mathbf{A}_r \quad | \quad \mathbf{B}_r] \quad (2.67)$$

La matriz \mathbf{A}_r estará a su vez compuesta por $n \times n$ submatrices $\mathbf{A}_{r,ij}$ definidas como se indica a continuación ($i, j = 1, \dots, n$):

$$\mathbf{A}_r = \begin{pmatrix} (\Gamma_n + p_{r_n}^{n-1} \mathbf{R}_{r_n})^{r_n} \hat{\eta}_{r_n} & \cdots & 0 & 0 \\ p_{r_n}^{n-2} \mathbf{R}_{r_n}^{r_n} \hat{\eta}_{r_n} & \cdots & 0 & 0 \\ p_{r_n}^{n-3} \mathbf{R}_{r_n}^{r_n} \hat{\eta}_{r_n} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ p_{r_n}^{2-1} \mathbf{R}_{r_n}^{r_n} \hat{\eta}_{r_n} & \cdots & (\Gamma_2 + p_{r_2}^{2-1} \mathbf{R}_{r_2})^{r_2} \hat{\eta}_{r_2} & 0 \\ p_{r_n}^{1-1} \mathbf{R}_{r_n}^{r_n} \hat{\eta}_{r_n} & \cdots & p_{r_2}^{1-1} \mathbf{R}_{r_2}^{r_2} \hat{\eta}_{r_2} & (\Gamma_1 + p_{r_1}^{1-1} \mathbf{R}_{r_1})^{r_1} \hat{\eta}_{r_1} \end{pmatrix} \quad (2.68)$$

donde $p_{r_k}^i$ se define, para $i, r_k = 1 \dots n$, como:

$$p_{r_k}^i = \begin{cases} 1 & \mu_{r_k} \geq i \\ 0 & \mu_{r_k} < i \end{cases} \quad (2.69)$$

De este modo, será, para $i = j$ ($j = 1 \dots n$):

$$\begin{cases} \mathbf{A}_{r_{ij}} = \Gamma_{n+1-j} \cdot {}^{r_{n+1-j}} \hat{\boldsymbol{\eta}}_{r_{n+1-j}} & j \neq 5 \\ \mathbf{A}_{r_{ij}} = \Gamma_2 \cdot {}^{r_2} \hat{\boldsymbol{\eta}}_{r_2} + {}^2 \mathbf{R}_{r_2} \cdot {}^{r_2} \hat{\boldsymbol{\eta}}_{r_2} & j = 5 \end{cases} \quad (2.70)$$

Para $j = 1, 2, 3$:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{r_{4,j}} &= {}^3 \mathbf{R}_{r_{n+1-j}} \cdot {}^{r_{n+1-j}} \hat{\boldsymbol{\eta}}_{r_{n+1-j}} \\ \mathbf{A}_{r_{5,j}} &= {}^2 \mathbf{R}_3 \cdot \mathbf{A}_{r_{4,j}} \\ \mathbf{A}_{r_{6,j}} &= {}^1 \mathbf{R}_2 \cdot \mathbf{A}_{r_{5,j}} \end{aligned} \quad (2.71)$$

Para $j = 4$:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{r_{5,j}} &= {}^2 \mathbf{R}_{r_{n+1-j}} \cdot {}^{r_{n+1-j}} \hat{\boldsymbol{\eta}}_{r_{n+1-j}} \\ \mathbf{A}_{r_{6,j}} &= {}^1 \mathbf{R}_2 \cdot \mathbf{A}_{r_{5,j}} \end{aligned} \quad (2.72)$$

Y, finalmente, para $j = 5$:

$$\mathbf{A}_{r_{6,j}} = {}^1 \mathbf{R}_{r_{n+1-j}} \cdot {}^{r_{n+1-j}} \hat{\boldsymbol{\eta}}_{r_{n+1-j}} \quad (2.73)$$

Por lo que respecta a la submatriz \mathbf{B}_r , ésta se compone asimismo de los $n \times n$ términos:

$$\mathbf{B}_{r_{ij}} = [\mathbf{B1}_{r_{ij}} \mid \mathbf{B2}_{r_{ij}}] \quad (2.74)$$

donde, como puede verse, cada término se ha descompuesto, a su vez, en una submatriz 3×3 , $\mathbf{B1}_{rij}$, y una submatriz columna 3×1 , $\mathbf{B2}_{rij}$.

Estos términos son calculados tal como se describe en las siguientes expresiones. La matriz $\mathbf{B1}_r$, construida a partir de los términos $\mathbf{B1}_{rij}$, es una matriz triangular inferior por bloques que presenta la siguiente estructura:

$$\mathbf{B1}_r = \begin{pmatrix} p_{r_n}^n \cdot \mu_{r_n} \cdot \tilde{H}_{r_n} - \Gamma_n \cdot r_n \cdot \tilde{r}_{O_{r_n}} & \cdots & 0 & 0 \\ p_{r_n}^{n-1} \cdot \mu_{r_n} \cdot \tilde{H}_{r_n} & \cdots & 0 & 0 \\ p_{r_n}^{n-2} \cdot \mu_{r_n} \cdot \tilde{H}_{r_n} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ p_{r_n}^2 \cdot \mu_{r_n} \cdot \tilde{H}_{r_n} & \cdots & p_{r_2}^2 \cdot \mu_{r_2} \cdot \tilde{H}_{r_2} - \Gamma_2 \cdot r_2 \cdot \tilde{r}_{O_{r_2}} & 0 \\ p_{r_n}^1 \cdot \mu_{r_n} \cdot \tilde{H}_{r_n} & \cdots & p_{r_2}^1 \cdot \mu_{r_2} \cdot \tilde{H}_{r_2} & p_{r_1}^1 \cdot \mu_{r_1} \cdot \tilde{H}_{r_1} - \Gamma_1 \cdot r_1 \cdot \tilde{r}_{O_{r_1}} \end{pmatrix} \quad (2.75)$$

donde:

$${}^k_j \tilde{H}_{r_i} = {}^k \mathbf{R}_{r_i} \left(r_i \tilde{r}_{O_k O_{r_i}} \cdot {}^{r_i}_j \tilde{\eta}_{r_i} - r_i \tilde{r}_{O_{r_i}} \right) \quad (2.76)$$

Por su parte, la matriz $\mathbf{B2}_r$ está integrada por los términos $\mathbf{B2}_{rij}$ y presenta igualmente una estructura triangular inferior por bloques de la forma:

$$\mathbf{B2}_r = \begin{pmatrix} p_{r_n}^n \cdot \bar{h}_{r_n} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ p_{r_n}^{n-1} \cdot \bar{h}_{r_n} & p_{r_{n-1}}^{n-1} \cdot \bar{h}_{r_{n-1}} & \cdots & 0 & 0 \\ p_{r_n}^{n-2} \cdot \bar{h}_{r_n} & p_{r_{n-1}}^{n-2} \cdot \bar{h}_{r_{n-1}} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ p_{r_n}^2 \cdot \bar{h}_{r_n} & p_{r_{n-1}}^2 \cdot \bar{h}_{r_{n-1}} & \cdots & p_{r_2}^2 \cdot \bar{h}_{r_2} & 0 \\ p_{r_n}^1 \cdot \bar{h}_{r_n} & p_{r_{n-1}}^1 \cdot \bar{h}_{r_{n-1}} & \cdots & p_{r_2}^1 \cdot \bar{h}_{r_2} & p_{r_1}^1 \cdot \bar{h}_{r_1} \end{pmatrix} \quad (2.77)$$

donde:

$${}^k \bar{h}_i = {}^k \mathbf{R}_{r_i} \cdot {}^{r_i} \tilde{r}_{O_k O_{r_i}} \cdot {}^{r_i} \ddot{r}_{O_{r_i}} \quad (2.78)$$

Con lo cual, el cálculo de los elementos $\mathbf{B1}_{rij}$ y $\mathbf{B2}_{rij}$ se efectuará de forma conjunta como se describe a continuación.

Para $i = j$ ($j=1..5$), será:

$$\begin{cases} \mathbf{B1}_{rij} = \Gamma_{n+1-j} \left(-{}^{r_{n+1-j}} \tilde{r}_{O_{n+1-j}} \right) & j \neq 5 \\ \mathbf{B1}_{rij} = \Gamma_2 \left(-{}^{r_2} \tilde{r}_{O_2} \right) + {}^2 \mathbf{R}_{r_2} \left({}^{r_2} \tilde{r}_{O_2 O_2} \cdot {}^{r_2} \tilde{\eta}_{r_2} - {}^{r_2} \ddot{r}_{O_2} \right) & j = 5 \end{cases} \quad (2.79)$$

Para $j = 1, 2, 3$, introduciendo los términos auxiliares \tilde{r}_{OO} y \mathbf{R} :

$$\begin{aligned} \tilde{r}_{OO} &= {}^{r_{n+1-j}} \tilde{r}_{O_3 O_{n+1-j}} \\ \mathbf{R} &= {}^3 \mathbf{R}_{r_{n+1-j}} \\ \mathbf{B1}_{r4,j} &= \mathbf{R} \left(\tilde{r}_{OO} \cdot {}^{r_{n+1-j}} \tilde{\eta}_{r_{n+1-j}} - {}^{r_{n+1-j}} \ddot{r}_{O_{n+1-j}} \right) \\ \mathbf{B2}_{r4,j} &= \mathbf{R} \left(\tilde{r}_{OO} \cdot {}^{r_{n+1-j}} \ddot{r}_{O_{n+1-j}} \right) \end{aligned} \quad (2.80)$$

$$\begin{aligned} \tilde{r}_{OO} &= \tilde{r}_{OO} + \mathbf{R}^T \cdot {}^3 \tilde{r}_{O_2 O_3} \\ \mathbf{R} &= {}^2 \mathbf{R}_3 \mathbf{R} \\ \mathbf{B1}_{r5,j} &= \mathbf{R} \left(\tilde{r}_{OO} \cdot {}^{r_{n+1-j}} \tilde{\eta}_{r_{n+1-j}} - {}^{r_{n+1-j}} \ddot{r}_{O_{n+1-j}} \right) \\ \mathbf{B2}_{r5,j} &= \mathbf{R} \left(\tilde{r}_{OO} \cdot {}^{r_{n+1-j}} \ddot{r}_{O_{n+1-j}} \right) \end{aligned} \quad (2.81)$$

$$\begin{aligned}
 \tilde{r}_{OO} &= \tilde{r}_{OO} + \mathbf{R}^T {}^2\tilde{r}_{O_1O_2} \\
 \mathbf{R} &= {}^1\mathbf{R}_2 \mathbf{R} \\
 \mathbf{B1}_{r6,j} &= \mathbf{R} \left(\tilde{r}_{OO} \cdot {}^{r_{n+1-j}}_3 \tilde{\eta}_{r_{n+1-j}} - {}^{r_{n+1-j}}\ddot{\tilde{r}}_{O_{r_{n+1-j}}} \right) \\
 \mathbf{B2}_{r6,j} &= \mathbf{R} \left(\tilde{r}_{OO} {}^{r_{n+1-j}}\ddot{\tilde{r}}_{O_{r_{n+1-j}}} \right)
 \end{aligned} \tag{2.82}$$

Para $j = 4$:

$$\begin{aligned}
 \tilde{r}_{OO} &= {}^{r_{n+1-j}}\tilde{r}_{O_2O_{r_{n+1-j}}} \\
 \mathbf{R} &= {}^2\mathbf{R}_{r_{n+1-j}} \\
 \mathbf{B1}_{r5,j} &= \mathbf{R} \left(\tilde{r}_{OO} \cdot {}^{r_{n+1-j}}_2 \tilde{\eta}_{r_{n+1-j}} - {}^{r_{n+1-j}}\ddot{\tilde{r}}_{O_{r_{n+1-j}}} \right) \\
 \mathbf{B2}_{r5,j} &= \mathbf{R} \left(\tilde{r}_{OO} {}^{r_{n+1-j}}\ddot{\tilde{r}}_{O_{r_{n+1-j}}} \right)
 \end{aligned} \tag{2.83}$$

$$\begin{aligned}
 \tilde{r}_{OO} &= \tilde{r}_{OO} + \mathbf{R}^T {}^2\tilde{r}_{O_1O_2} \\
 \mathbf{R} &= {}^1\mathbf{R}_2 \mathbf{R} \\
 \mathbf{B1}_{r6,j} &= \mathbf{R} \left(\tilde{r}_{OO} \cdot {}^{r_{n+1-j}}_2 \tilde{\eta}_{r_{n+1-j}} - {}^{r_{n+1-j}}\ddot{\tilde{r}}_{O_{r_{n+1-j}}} \right) \\
 \mathbf{B2}_{r6,j} &= \mathbf{R} \left(\tilde{r}_{OO} {}^{r_{n+1-j}}\ddot{\tilde{r}}_{O_{r_{n+1-j}}} \right)
 \end{aligned} \tag{2.84}$$

Finalmente, para $j = 5$:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{R} &= {}^2\mathbf{R}_{r_{n+1-j}} \\
 \tilde{r}_{OO} &= {}^{r_{n+1-j}}\tilde{r}_{O_2O_{r_{n+1-j}}} \\
 \mathbf{B2}_{r5,j} &= \mathbf{R} \left(\tilde{r}_{OO} {}^{r_{n+1-j}}\ddot{\tilde{r}}_{O_{r_{n+1-j}}} \right)
 \end{aligned} \tag{2.85}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{r}_{OO} &= \tilde{r}_{OO} + \mathbf{R}^T \tilde{r}_{O_1O_2} \\
\mathbf{R} &= {}^1\mathbf{R}_2 \mathbf{R} \\
\mathbf{B1}_{r6,j} &= \mathbf{R} \left(\tilde{r}_{OO} \cdot \frac{r_{n+1-j}}{2} \tilde{\eta}_{r_{n+1-j}} - r_{n+1-j} \ddot{r}_{O_{r_{n+1-j}}} \right) \\
\mathbf{B2}_{r6,j} &= \mathbf{R} \left(\tilde{r}_{OO} r_{n+1-j} \ddot{r}_{O_{r_{n+1-j}}} \right)
\end{aligned} \tag{2.86}$$

La premultiplicación por la matriz \mathbf{D}_r consiste simplemente, en la práctica, en tomar tan sólo la tercera fila de cada una de las submatrices anteriormente calculadas.

2.2.4. Modelización de la Fricción

El fenómeno de la fricción puede aparecer debido a una gran variedad de mecanismos físicos, como pueden ser la deformación elástica o plástica en el contacto entre superficies de partes mecánicas implicadas en el movimiento, y se ve además muy influenciado por factores internos como la presencia de lubricantes o sustancias contaminantes y su grado de distribución, así como indirectamente por otros factores como las variaciones térmicas, principalmente debidas al propio funcionamiento del robot.

El fenómeno de la fricción va a aparecer de forma inevitable en el comportamiento dinámico de cualquier mecanismo. En principio, es conveniente considerar un modelo de fricción que sea capaz de describir de la forma más ajustada posible dicho fenómeno, ya que, de lo contrario, la precisión con que podrán ser determinados el resto de parámetros dinámicos del modelo utilizado, parámetros inerciales, puede verse afectada considerablemente hasta el punto de hacer imposible la obtención de un conjunto de parámetros físicamente factibles, tal como se describirá en el apartado 5.3.4.

En definitiva, no resulta posible deducir un modelo de fricción simple a partir de principios físicos elementales. En su lugar, suele recurrirse a describir la fricción a partir de una serie de fenómenos observables desde un punto de vista macroscópico. En este sentido, los modelos de fricción se dividen en dinámicos y estáticos, según que el efecto de la variación de velocidad sea considerado o no. Dentro de los modelos estáticos, se encuentra una serie de modelos clásicos en los cuales se asume una mayor o menor idealización del fenómeno, donde se consideran dos componentes de la fricción: Por un lado, un término constante, llamado fricción de Coulomb, que no dependerá, por tanto, de la velocidad y , y por otro lado, la llamada fricción viscosa, cuya variación será lineal con la velocidad.

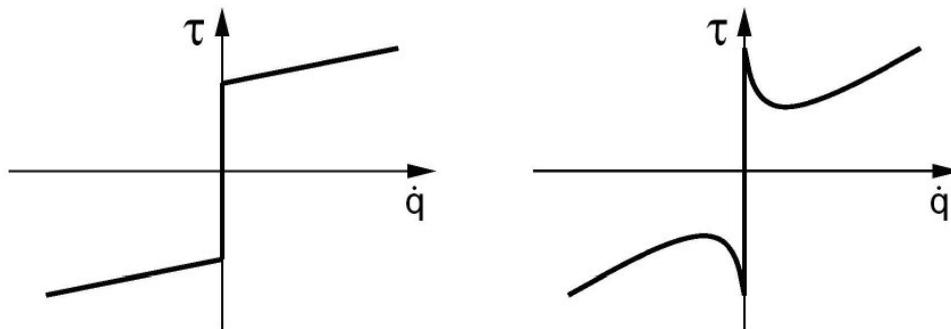


Figura 2.2. Gráficas par-velocidad para un modelo de fricción clásico (izquierda) y real (derecha).

En el presente trabajo, se ha optado por utilizar modelos de fricción cuyos coeficientes aparezcan de forma lineal en el modelo, ya que así se posibilita la integración del modelo de fricción en el modelo dinámico global del manipulador en su forma matricial, lo cual resulta enormemente útil a la hora de llevar a cabo una identificación directa. Se han considerado cuatro modelos de fricción distintos. En los dos primeros, se consideran dos términos correspondientes a la fricción viscosa y a la fricción de Coulomb, mientras que en los dos últimos se consideran tres términos, si bien, en este caso, carentes de sentido físico, siendo uno de ellos no lineal con la velocidad.

El primero de ellos es un modelo lineal simétrico, el cual viene descrito por la siguiente ecuación:

$$\tau_{f_i} = F_{i_1} \cdot \dot{q}_i + F_{i_2} \cdot \text{sign}(\dot{q}_i) \quad (2.87)$$

donde F_{i_1} y F_{i_2} corresponden a los coeficientes de fricción viscosa y de Coulomb, respectivamente, para la articulación i .

Por otro lado, se ha considerado asimismo el modelo de fricción propuesto en Lu et al. 1993, en el cual se asume un comportamiento asimétrico de la fricción con respecto al sentido de rotación de la articulación. En este caso, el par debido a la fricción vendría descrito por la ecuación:

$$\tau_{f_i} = \begin{cases} F_{i_1} \cdot \dot{q}_i + F_{i_2} & \dot{q}_i > 0 \\ F_{i_3} \cdot \dot{q}_i - F_{i_4} & \dot{q}_i < 0 \end{cases} \quad (2.88)$$

Los coeficientes F_{i_1} y F_{i_2} corresponden a la fricción viscosa y de Coulomb, respectivamente, cuando el sentido de rotación de la articulación es positivo, mientras que los coeficientes F_{i_3} y F_{i_4} corresponden, análogamente, al sentido de rotación negativo.

En la segunda gráfica de la Figura 2.2. Gráficas par-velocidad para un modelo de fricción clásico (izquierda) y real (derecha). Figura 2.2, se representa gráficamente la evolución real del par debido a la fricción con la velocidad angular de la articulación. Como puede verse, para valores de velocidad suficientemente cercanos a cero aparece la llamada zona de Stribeck, en la cual la fricción deja de comportarse de forma lineal con respecto a la velocidad. En dicha zona, la fricción dependerá más bien de la fuerza exterior aplicada. Esta zona de bajas velocidades, deberá ser, por tanto, evitada en lo posible durante la toma de datos para la identificación de los parámetros dinámicos, ya

que mediante los modelos de fricción anteriores no será posible describir dicho fenómeno.

El tercer modelo utilizado permite un mejor ajuste al par de fricción real mediante la inclusión de un tercer término no lineal respecto a la velocidad Grotjahn et al. 2001. El modelo vendría descrito por la siguiente expresión:

$$\tau_{f_i} = F_{i_1} \dot{q}_i + F_{i_2} \text{sign}(\dot{q}_i) + F_{i_3} \dot{q}_i^{1/3} \quad (2.89)$$

donde F_{i_1} , F_{i_2} y F_{i_3} son meramente coeficientes sin sentido físico. Análogamente, sería posible considerar este último modelo en su forma asimétrica, de acuerdo a la expresión:

$$\tau_{f_i} = \begin{cases} F_{i_1} \cdot \dot{q}_i + F_{i_2} + F_{i_3} \cdot \dot{q}_i^{1/3} & \dot{q}_i > 0 \\ F_{i_4} \cdot \dot{q}_i - F_{i_5} + F_{i_6} \cdot \dot{q}_i^{1/3} & \dot{q}_i < 0 \end{cases} \quad (2.90)$$

Generalizando, el sistema de ecuaciones correspondiente al modelo de fricción expresado en su forma matricial presentará, por tanto, la siguiente forma para una configuración $(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, \ddot{\vec{q}})$ del robot dada:

$$\vec{\tau}_f = \mathbf{W}_f(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, \ddot{\vec{q}}) \cdot \vec{\Phi}_f \quad (2.91)$$

donde $\vec{\tau}_f$ es el vector de fuerzas generalizadas, \mathbf{W}_f la matriz de observación y $\vec{\Phi}_f$ es el vector de parámetros del sistema, en este caso los coeficientes del modelo de fricción, el cual presenta la siguiente forma:

$$\vec{\Phi}_f = [F_{n_1} \cdots F_{n_m} \cdots F_{1_1} \cdots F_{1_m}]^T \quad (2.92)$$

siendo m el número de coeficientes del modelo considerado para cada una de las barras.

La observación de algunos fenómenos en el comportamiento de la fricción sugiere las limitaciones de los modelos estáticos. Como se observa en la Figura 2.3, ensayos experimentales muestran que la evolución del par de fricción con la velocidad presenta un fenómeno de histéresis, resultando el par de fricción menor para velocidades decrecientes.

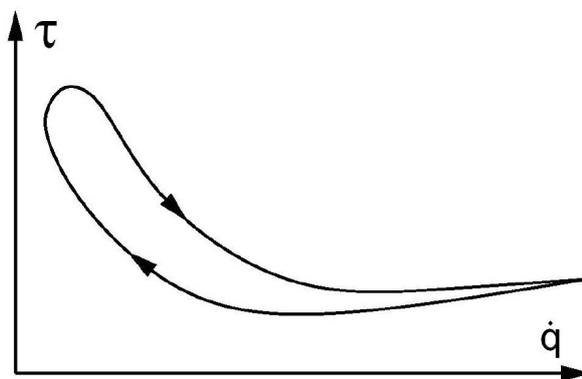


Figura 2.3. Fenómeno de histéresis en la evolución del par de fricción con la velocidad.

Un tratamiento alternativo, que no requeriría la adopción de un modelo de fricción lineal en sus parámetros, lo cual posibilitaría la utilización de modelos dinámicos más complejos, consiste en el cálculo de forma independiente del par debido a la fricción y la posterior corrección de las medidas de par en los nudos previamente a su utilización en el proceso de identificación mediante un modelo dinámico lineal en los parámetros. La identificación de los parámetros del modelo de fricción utilizado debe tener lugar, en este caso, igualmente de forma separada mediante ensayos específicos. En el apartado 4.2, se describe el denominado método de identificación indirecto, el cual corresponde a dicha forma de proceder.

Igualmente en este sentido, en Popovic y Goldenberg 1998 se presenta una modelización del par de fricción mediante series de Fourier, según la cual se contempla la dependencia de la fricción tanto respecto de la velocidad como de la posición angular. De acuerdo al método descrito, los coeficientes del modelo serían identificados, en este caso, mediante análisis espectral.

Un inconveniente a considerar respecto al esquema de identificación indirecto, en el cual el modelo de fricción y el resto del modelo dinámico son identificados por separado, consiste en el hecho de que las características de fricción del mecanismo por lo general no se mantendrán constantes para estos dos pasos del proceso de identificación, lo cual supone un factor de error adicional.

2.3. REDUCCIÓN DEL MODELO

Tal como se detallará en el Capítulo 1, a fin de llevar a cabo la identificación de los parámetros inerciales del modelo dinámico indicado anteriormente, el sistema de ecuaciones en forma matricial presentado en la ecuación (2.12) debe ir siendo agregado para un conjunto de configuraciones del brazo robot con el fin de obtener un sistema de ecuaciones sobredeterminado con la forma:

$${}^a\bar{\tau} = {}^a\mathbf{W} \cdot \bar{\Phi} \quad (2.93)$$

donde ${}^a\bar{\tau}$ es un vector columna obtenido mediante la agregación del vector $\bar{\tau}$ para el conjunto de configuraciones considerado y ${}^a\mathbf{W}$ es la matriz de observación obtenida similarmente agregando la matriz \mathbf{W} para dicho conjunto de configuraciones del brazo robot.

Este sistema de ecuaciones sobredeterminado no posee unas características numéricas adecuadas para su resolución directa, debido a su deficiencia de rango, así como a un pobre condicionamiento numérico de la matriz de observación ensamblada. Incluso en el caso que se intentase abordar la resolución directa del sistema, por ejemplo, mediante la denominada regresión de Ridge, en la cual se añade una pequeña cantidad a los elementos de la diagonal principal de la matriz a fin de hacerla invertible, ésta forma

de proceder no constituiría obviamente en modo alguno un método conveniente para la obtención de una solución precisa al sistema, cuya validez pudiera considerarse general.

La deficiencia de rango de la matriz de observación tiene su origen en el hecho de que algunos de los parámetros inerciales del modelo dinámico no tienen realmente influencia alguna sobre el modelo, mientras que otros solamente ejercen una influencia en combinaciones lineales con otros parámetros inerciales, aunque no independientemente. Por ello, un modo más adecuado de resolver el problema consiste en la reducción previa del modelo dinámico a fin de que tan sólo los parámetros inerciales independientes aparezcan en el mismo, con lo cual se asegura la obtención de una matriz de observación reducida \mathbf{W}_B de rango completo en la cual únicamente aparecen las columnas linealmente independientes de \mathbf{W} , las cuales corresponden a los parámetros inerciales linealmente independientes del modelo dinámico. Esto es equivalente al problema de encontrar una base de los parámetros inerciales del modelo dinámico, es decir, un conjunto de combinaciones lineales de parámetros inerciales del modelo que determinen el mismo totalmente y de forma independiente.

Con este propósito, se han aplicado los dos siguientes métodos numéricos:

- Descomposición en valores singulares (SVD)
- Descomposición QR

El segundo método resulta ser más eficiente en cuanto al número de cálculos matemáticos efectuados, si bien la descomposición en valores singulares es el método más apropiado en sistemas numéricamente mal condicionados.

Para la implementación de estos dos métodos, se ha seguido como referencia el método de obtención numérica de los parámetros base de Gautier presentado en Gautier 1991. Puede encontrarse una descripción más específica de la teoría de espacios vectoriales aplicada a la determinación de un conjunto de parámetros base en Sheu y Walker 1991.

Seguidamente, se lleva a cabo una descripción más detallada de estos dos métodos. La matriz de observación ${}^a\mathbf{W}$ utilizada para aplicar los métodos puede ser ensamblada a partir de un determinado número de configuraciones del brazo robot generadas aleatoriamente. Dicho número de configuraciones deberá ser al menos suficiente para permitir la obtención de un sistema sobredeterminado, aunque es aconsejable una cantidad sustancialmente mayor a fin de asegurar la validez general de los resultados obtenidos. Con objeto de evitar eventuales inconsistencias numéricas y una parte de la complejidad computacional implicada, el primer paso previo a la aplicación de los métodos consiste en la eliminación de las columnas nulas de la matriz de observación ${}^a\mathbf{W}$, las cuales corresponden a parámetros inerciales sin ninguna influencia sobre el modelo dinámico. Así pues, se partirá de esta matriz de observación inicialmente reducida ${}^a\mathbf{W}_z$ de dimensiones $r \times c$. Como criterio para la determinación de las columnas nulas, los elementos de cada columna se comparan con una cierta tolerancia, por ejemplo $\varepsilon \times 10^3$, siendo ε la precisión de la máquina.

2.3.1. Descomposición en Valores Singulares (SVD)

De acuerdo a la descomposición en valores singulares, la matriz ${}^a\mathbf{W}_z$ puede expresarse como un producto de matrices de la siguiente forma:

$${}^a\mathbf{W}_z = \mathbf{U} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{V}^T, \quad \mathbf{S} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Sigma} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (2.94)$$

donde \mathbf{U} y \mathbf{V} son respectivamente matrices ortogonales de dimensiones $r \times r$ y $c \times c$. $\boldsymbol{\Sigma}$ es una matriz diagonal $b \times b$, siendo $b < c$ el rango de la matriz ${}^a\mathbf{W}_z$. Los elementos de la diagonal de \mathbf{S} , σ_i , son los valores singulares de la matriz ${}^a\mathbf{W}_z$ dispuestos en orden decreciente, esto es:

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_c \geq 0 \quad (2.95)$$

El siguiente paso será, por tanto, llevar a cabo la descomposición en valores singulares de la matriz ${}^a\mathbf{W}_z$ para determinar, a partir de éstos, el rango de la misma. Nuevamente, el criterio para determinar cuáles de los valores singulares de ${}^a\mathbf{W}_z$ son cero consistirá, debido a los errores de redondeo introducidos en los cálculos, en comparar dichos valores con una cierta tolerancia t dada por:

$$t = r \cdot \varepsilon \cdot \sigma_1 \quad (2.96)$$

Una vez conocido el rango de ${}^a\mathbf{W}_z$, deberán ser elegidas las $c-b$ columnas linealmente independientes a ser eliminadas.

Descomponiendo la matriz \mathbf{V} y reordenando la anterior expresión de la descomposición en valores singulares de la siguiente forma:

$${}^a\mathbf{W}_z \cdot \mathbf{V} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{S}, \quad {}^a\mathbf{W}_z \cdot [\mathbf{V}_1 \quad \mathbf{V}_2] = \mathbf{U} \cdot \begin{bmatrix} \Sigma & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (2.97)$$

donde \mathbf{V}_1 y \mathbf{V}_2 son respectivamente matrices $c \times b$ y $c \times (c-b)$.

Puede observarse que:

$${}^a\mathbf{W}_z \cdot \mathbf{V}_2 = \mathbf{0} \quad (2.98)$$

es decir, las columnas de la submatriz \mathbf{V}_2 definen las relaciones lineales entre las columnas de la matriz de observación ${}^a\mathbf{W}_z$.

Considerando ahora una matriz de permutación \mathbf{P} , tal que:

$$\mathbf{P}^T \cdot \mathbf{V}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{V}_{21} \\ \mathbf{V}_{22} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P}^T \cdot \vec{\Phi} = \begin{bmatrix} \vec{\Phi}_1 \\ \vec{\Phi}_2 \end{bmatrix}, \quad {}^a \mathbf{W}_z \cdot \mathbf{P} = \begin{bmatrix} {}^a \mathbf{W}_{z1} & {}^a \mathbf{W}_{z2} \end{bmatrix} \quad (2.99)$$

donde \mathbf{V}_{21} , \mathbf{V}_{22} , ${}^a \mathbf{W}_{z1}$ y ${}^a \mathbf{W}_{z2}$ son respectivamente matrices $b \times (c-b)$, $(c-b) \times (c-b)$, $r \times b$ y $r \times (c-b)$, mientras que $\vec{\Phi}_1$ y $\vec{\Phi}_2$ son respectivamente vectores $b \times 1$ y $(c-b) \times 1$, resulta:

$${}^a \mathbf{W}_z \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{P}^T \cdot \mathbf{V}_2 = \mathbf{0} = {}^a \mathbf{W}_{z1} \cdot \mathbf{V}_{21} + {}^a \mathbf{W}_{z2} \cdot \mathbf{V}_{22} \quad (2.100)$$

Lo anterior conduce a la siguiente relación de dependencia lineal entre las columnas de la matriz ${}^a \mathbf{W}_z$:

$${}^a \mathbf{W}_{z2} = {}^a \mathbf{W}_{z1} \cdot (-\mathbf{V}_{21} \cdot \mathbf{V}_{22}^{-1}) \quad (2.101)$$

Dada una solución arbitraria cualquiera $\vec{\Phi}_D$ al sistema planteado en la ecuación (2.93), deberá cumplirse necesariamente:

$${}^a \mathbf{W}_z \cdot \vec{\Phi} = {}^a \mathbf{W}_z \cdot \vec{\Phi}_D, \quad \begin{bmatrix} {}^a \mathbf{W}_{z1} & {}^a \mathbf{W}_{z2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \vec{\Phi}_1 \\ \vec{\Phi}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^a \mathbf{W}_{z1} & {}^a \mathbf{W}_{z2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \vec{\Phi}_{D1} \\ \vec{\Phi}_{D2} \end{bmatrix} \quad (2.102)$$

Ello permite obtener la relación existente entre una solución arbitraria $\vec{\Phi}_D$ y la solución correspondiente a los parámetros inerciales del modelo dinámico conocidos a priori, $\vec{\Phi}$:

$$\vec{\Phi}_{D1} = \vec{\Phi}_1 + (-\mathbf{V}_{21} \cdot \mathbf{V}_{22}^{-1}) \cdot (\vec{\Phi}_2 - \vec{\Phi}_{D2}) \quad (2.103)$$

En particular, una de las posibles soluciones consistirá en aquella derivada de considerar los parámetros linealmente dependientes de la solución como cero, es decir, $\vec{\Phi}_{D_2} = \vec{0}$, con lo cual la base de parámetros solución del sistema vendrá dada por:

$$\vec{\Phi}_B = \vec{\Phi}_1 + \kappa \cdot \vec{\Phi}_2 \quad \kappa = -V_{21} \cdot V_{22}^{-1} \quad (2.104)$$

La estrategia consistirá, por tanto, en definir una matriz de permutación \mathbf{P} tal que permita la obtención de una submatriz regular V_{22} la cual contenga las filas linealmente independientes de V_2 de mayor índice. Dicha matriz de permutación determinará asimismo la submatriz ${}^a W_{z_2}$, es decir, la selección de columnas de ${}^a W_z$ a eliminar.

Con todo lo anterior, quedará finalmente el siguiente sistema reducido que permitirá identificar el conjunto de parámetros base:

$${}^a \vec{\tau} = {}^a W_{z_1} \cdot \vec{\Phi}_B \quad (2.105)$$

que será escrito como:

$${}^a \vec{\tau} = {}^a W_B \cdot \vec{\Phi}_B \quad (2.106)$$

donde ${}^a W_B$ constituye la matriz de observación reducida de rango completo del sistema.

2.3.2. Descomposición QR

De acuerdo a la descomposición QR, la matriz ${}^a W_z$ puede descomponerse en un producto de matrices de la siguiente forma:

$${}^a\mathbf{W}_z \cdot \mathbf{\Pi} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{R}, \quad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_1 & \mathbf{T}_2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (2.107)$$

donde $\mathbf{\Pi}$ es una matriz de permutación $c \times c$ tal que los elementos de la diagonal principal de \mathbf{R} , matriz de dimensión $r \times c$, se hallan en orden no creciente. \mathbf{Q} es una matriz ortogonal $r \times r$ y \mathbf{T}_1 es una matriz triangular superior $b \times b$, siendo $b < c$ el rango de la matriz ${}^a\mathbf{W}_z$.

El siguiente paso consistirá, por tanto, en llevar a cabo la descomposición QR de la matriz ${}^a\mathbf{W}_z$ a fin de determinar el rango de la misma. De forma similar, el criterio para determinar cuáles de los elementos de la diagonal de \mathbf{R} son cero consistirá, debido a los errores de redondeo introducidos, en comparar sus valores con una cierta tolerancia t dada por la expresión:

$$t = r \cdot |T_{11}| \cdot \varepsilon \quad (2.108)$$

Una vez conocido el rango de ${}^a\mathbf{W}_z$, deberán ser elegidas las $c-b$ columnas linealmente independientes a ser eliminadas. En este caso, se eligen simplemente aquellas columnas de ${}^a\mathbf{W}_z$ que corresponden a valores nulos de la diagonal de \mathbf{R} .

Si ahora se considera una matriz de permutación \mathbf{P} tal que:

$$\mathbf{Q} \cdot \mathbf{P} = [\mathbf{Q}_1 \quad \mathbf{Q}_2], \quad \mathbf{P}^T \cdot \vec{\Phi} = \begin{bmatrix} \vec{\Phi}_1 \\ \vec{\Phi}_2 \end{bmatrix}, \quad {}^a\mathbf{W}_z \cdot \mathbf{P} = [{}^a\mathbf{W}_{z1} \quad {}^a\mathbf{W}_{z2}] \quad (2.109)$$

donde ${}^a\mathbf{W}_{z1}$, ${}^a\mathbf{W}_{z2}$, \mathbf{Q}_1 y \mathbf{Q}_2 son respectivamente matrices $r \times b$, $r \times (c-b)$, $r \times b$ y $r \times (r-b)$, la anterior expresión de la descomposición QR puede escribirse en la siguiente forma:

$$[{}^a \mathbf{W}_{z1} \quad {}^a \mathbf{W}_{z2}] = [\mathbf{Q}_1 \quad \mathbf{Q}_2] \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{T}_1 & \mathbf{T}_2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (2.110)$$

Por lo tanto, se tiene:

$${}^a \mathbf{W}_{z1} = \mathbf{Q}_1 \cdot \mathbf{R}_1, \quad {}^a \mathbf{W}_{z2} = \mathbf{Q}_2 \cdot \mathbf{R}_2 \quad (2.111)$$

Ello permite deducir la siguiente relación de dependencia lineal entre las columnas de la matriz ${}^a \mathbf{W}_z$:

$${}^a \mathbf{W}_{z2} = {}^a \mathbf{W}_{z1} \cdot (\mathbf{R}_1^{-1} \cdot \mathbf{R}_2) \quad (2.112)$$

Dada una solución arbitraria $\vec{\Phi}_D$ al sistema planteado en la ecuación (2.93), deberá cumplirse necesariamente:

$${}^a \mathbf{W}_z \cdot \vec{\Phi} = {}^a \mathbf{W}_z \cdot \vec{\Phi}_D, \quad [{}^a \mathbf{W}_{z1} \quad {}^a \mathbf{W}_{z2}] \cdot \begin{bmatrix} \vec{\Phi}_1 \\ \vec{\Phi}_2 \end{bmatrix} = [{}^a \mathbf{W}_{z1} \quad {}^a \mathbf{W}_{z2}] \cdot \begin{bmatrix} \vec{\Phi}_{D1} \\ \vec{\Phi}_{D2} \end{bmatrix} \quad (2.113)$$

lo cual permite obtener la relación entre una solución arbitraria $\vec{\Phi}_D$ y la solución correspondiente a los parámetros inerciales del modelo dinámico conocidos a priori, $\vec{\Phi}$:

$$\vec{\Phi}_{D1} = \vec{\Phi}_1 + (\mathbf{R}_1^{-1} \cdot \mathbf{R}_2) \cdot (\vec{\Phi}_2 - \vec{\Phi}_{D2}) \quad (2.114)$$

En particular, una posible solución al sistema consiste en aquella derivada de considerar los parámetros linealmente dependientes de la solución como cero, esto es $\vec{\Phi}_{D2} = \vec{0}$, con lo cual la base de parámetros solución del sistema vendrá dada por:

$$\vec{\Phi}_B = \vec{\Phi}_1 + \boldsymbol{\kappa} \cdot \vec{\Phi}_2 \quad \boldsymbol{\kappa} = \mathbf{R}_1^{-1} \cdot \mathbf{R}_2 \quad (2.115)$$

Deberá, por tanto, definirse la matriz de permutación \mathbf{P} de tal forma que la submatriz \mathbf{R}_1 sea regular. Dicha matriz de permutación determinará asimismo la submatriz ${}^a\mathbf{W}_{z_2}$, esto es la selección de columnas de ${}^a\mathbf{W}_z$ a eliminar.

Con todo lo anterior, quedará finalmente el siguiente sistema de ecuaciones reducido que permitirá identificar el conjunto de parámetros base:

$${}^a\vec{\tau} = {}^a\mathbf{W}_{z_1} \cdot \vec{\Phi}_B \quad (2.116)$$

que será escrito como:

$${}^a\vec{\tau} = {}^a\mathbf{W}_B \cdot \vec{\Phi}_B \quad (2.117)$$

donde ${}^a\mathbf{W}_B$ es la matriz de observación reducida de rango completo del sistema.

2.3.3. Parámetros Base para los Modelos Reducidos

Partiendo de las anteriores expresiones 2.104 y 2.115, obtenidas respectivamente en el desarrollo de los métodos de descomposición en valores singulares y descomposición QR:

$$\vec{\Phi}_B = \vec{\Phi}_1 + \boldsymbol{\kappa} \cdot \vec{\Phi}_2 \quad (2.118)$$

puede observarse que la matriz $\boldsymbol{\kappa}$ expresa la relación existente entre el vector de parámetros inerciales del modelo dinámico y el vector de parámetros base correspondientes al modelo reducido. Así pues, esta matriz contiene la información necesaria a fin de determinar las combinaciones lineales de parámetros inerciales que corresponden a cada uno de los parámetros base del modelo reducido. De este modo,

resulta simple construir una matriz \mathbf{K} , partiendo de la anterior matriz $\mathbf{\kappa}$, que permita expresar dicha relación de la forma que seguidamente se indica:

$$\bar{\Phi}_B = \mathbf{K} \cdot \bar{\Phi} \quad (2.119)$$

A continuación, se indican los parámetros base correspondientes a los distintos modelos dinámicos propuestos en el presente trabajo. Los siguientes resultados han sido obtenidos por medio de la descomposición en valores singulares, aplicando el criterio de selección de los parámetros independientes que aparece en Gautier 1991, esto es, priorizando la eliminación de aquellos parámetros inerciales con una mayor complejidad computacional asociada en las ecuaciones de la dinámica. Como puede observarse, los parámetros base obtenidos para el modelo de barras rígidas, así como las correspondientes combinaciones lineales de parámetros inerciales, son plenamente coincidentes con los resultados proporcionados por Gautier tanto mediante métodos simbólicos como numéricos.

Los coeficientes de fricción no se han incluido en los análisis numéricos, ya que dichos parámetros afectan siempre independientemente al modelo, no apareciendo tampoco en combinaciones lineales con parámetros inerciales correspondientes a otros parámetros base.

2.3.3.1. Modelo Dinámico de Barras Rígidas

Tras aplicar el análisis numérico para detectar las dependencias lineales existentes entre columnas de la matriz de observación obtenida a partir del modelo dinámico de barras rígidas, tal como se describe en la sección 2.3.1, se encontró que el vector de parámetros base $\bar{\Phi}_{Bl}$ determina de forma independiente el comportamiento dinámico del robot manipulador. Los elementos de dicho vector, eventualmente constituidos por combinaciones lineales de parámetros inerciales, se muestran en la Tabla 2.1.

Se ha de tener en cuenta que los parámetros base $\bar{\Phi}_{Bl}$ (27:36) corresponden a los llamados parámetros gravitatorios del modelo dinámico de barras rígidas. Éstos determinan el comportamiento dinámico del manipulador bajo condiciones cinemáticas de velocidad y aceleración nulas, así como en el caso particular de que tan sólo una de las articulaciones se desplace a velocidad constante mientras el resto permanecen en reposo en una configuración determinada, tal como sucede en los experimentos de identificación de la fricción que serán descritos en la sección 4.2 de este trabajo.

2.3.3.2. Modelo Dinámico de Barras Rígidas y Rotores

Análogamente, el vector de parámetros base $\bar{\Phi}_{Blr}$ ha sido obtenido para el modelo dinámico de barras rígidas y rotores. El resultado se muestra en la

Tabla 2.2 y la Tabla 2.3.

Tabla 2.1. Parámetros base del modelo dinámico de barras rígidas de un robot PUMA 560.

$\bar{\Phi}_{Bl}$	Combinaciones Lineales de Parámetros Dinámicos
1:5	$Ixx_6 - Iyy_6, Ixy_6, Ixz_6, Iyz_6, Izz_6$
6:10	$Ixx_5 + Iyy_6 - Iyy_5, Ixy_5, Ixz_5, Iyz_5, Izz_5 + Iyy_6$
11:15	$Ixx_4 + Iyy_5 - Iyy_4, Ixy_4, Ixz_4, Iyz_4, Izz_4 + Iyy_5$
16	$Ixx_3 + Iyy_4 - Iyy_3 + 0.8636 \cdot mz_4 + 0.186038 \cdot (m_6 + m_5 + m_4)$
17:19	$Ixy_3 - 0.008774 \cdot (m_6 + m_5 + m_4) - 0.02032 \cdot mz_4, Ixz_3, Iyz_3$
20	$Izz_3 + Iyy_4 + 0.186864 \cdot (m_6 + m_5 + m_4) + 0.8636 \cdot mz_4$
21	$Ixx_2 - Iyy_2 + 0.186451 \cdot (m_6 + m_5 + m_4 + m_3)$
22:24	$Ixy_2, Ixz_2 - 0.064377 \cdot (m_6 + m_5 + m_4 + m_3) - 0.4318 \cdot mz_3, Iyz_2$
25	$Izz_2 + 0.186451 \cdot (m_6 + m_5 + m_4 + m_3)$
26	$Izz_1 + Iyy_3 + Iyy_2 + 0.209092 \cdot (m_6 + m_5 + m_4) + 0.29818 \cdot mz_3 + 0.208679 \cdot m_3$
27:32	$mx_6, my_6, mx_5, my_5 - mz_6, mx_4, my_4 + mz_5$

33:34	$mx_3 - 0.02032 \cdot (m_6 + m_5 + m_4), my_3 - mz_4 - 0.4318 \cdot (m_6 + m_5 + m_4)$
35:36	$mx_2 + 0.4318 \cdot (m_6 + m_5 + m_4 + m_3), my_2$

Tabla 2.2. Parámetros base del modelo dinámico de barras rígidas y rotores de un robot PUMA 560 (I).

$\bar{\Phi}_{Blr}$	Combinaciones Lineales de Parámetros Dinámicos (I)
1:5	$Ixx_6 - Iyy_6, Ixy_6, Ixz_6, Iyz_6, Izz_6$
6:10	$Ixx_5 + Iyy_6 - Iyy_5, Ixy_5, Ixz_5, Iyz_5, Izz_5 + Iyy_6$
11:15	$Ixx_4 + Iyy_5 - Iyy_4, Ixy_4, Ixz_4, Iyz_4, Izz_4 + Iyy_5$
16	$Ixx_3 + Iyy_4 - Iyy_3 + 0.8636 \cdot mz_4 + 0.186038 \cdot (m_6 + m_5 + m_4) +$ $+ Iyy_6^r + Iyy_5^r + Iyy_4^r - 0.002209 \cdot m_6^r - 0.0025 \cdot m_4^r$
17	$Ixy_3 - 0.008774 \cdot (m_6 + m_5 + m_4) - 0.02032 \cdot mz_4 - 0.047 \cdot mz_6^r + 0.05 \cdot mz_4^r$
18	$Ixz_3 + 0.000423 \cdot m_6^r - 0.0005 \cdot m_4^r$
19	$Iyz_3 + 0.009 \cdot mz_6^r - 0.02 \cdot mz_5^r + 0.01 \cdot mz_4^r$
20	$Izz_3 + Iyy_4 + 0.186864 \cdot (m_6 + m_5 + m_4) + 0.8636 \cdot mz_4 +$ $+ Iyy_6^r + Iyy_5^r + Iyy_4^r - 0.002209 \cdot m_6^r - 0.0025 \cdot m_4^r$
21	$Ixx_2 - Iyy_2 + 0.186451 \cdot (m_6 + m_5 + m_4 + m_3) - Iyy_3^r - Iyy_2^r + Izz_2^r$ $- 0.186451 \cdot (m_6^r + m_5^r + m_4^r) + 0.001024 \cdot m_3^r + 0.004761 \cdot m_2^r$
22	$Ixy_2 - 0.032 \cdot mz_3^r + 0.069 \cdot mz_2^r$
23	$Ixz_2 - 0.064377 \cdot (m_6 + m_5 + m_4 + m_3) - 0.4318 \cdot mz_3 + 107.8154 \cdot Izz_2^r$ $- 0.068263 \cdot m_6^r - 0.055741 \cdot m_5^r - 0.068695 \cdot m_4^r - 0.241 \cdot (mz_3^r + mz_2^r)$
24	$Iyz_2 - 0.007712 \cdot m_3^r + 0.016629 \cdot m_2^r$ $Izz_2 + 0.186451 \cdot (m_6 + m_5 + m_4 + m_3) +$
25	$+ Iyy_3^r + Iyy_2^r + 11624.160477 \cdot Izz_2^r$ $+ 0.186451 \cdot (m_6^r + m_5^r + m_4^r) + 0.001024 \cdot m_3^r + 0.004761 \cdot m_2^r$
26	$Izz_1 + Iyy_3 + Iyy_2 + 0.209092 \cdot (m_6 + m_5 + m_4) + 0.29818 \cdot mz_3 + 0.208679 \cdot m_3 +$ $+ Iyy_3^r + Iyy_2^r + 3920.0121 \cdot Izz_1^r +$ $+ 0.213653 \cdot m_6^r + 0.203115 \cdot m_5^r + 0.214261 \cdot m_4^r + 0.058081 \cdot (m_3^r + m_2^r)$
27:32	$mx_6, my_6, mx_5, my_5 - mz_6, mx_4, my_4 + mz_5$

$$\begin{aligned}
 33 \quad & mx_3 - 0.02032 \cdot (m_6 + m_5 + m_4) - 0.047 \cdot m_6^r + 0.05 \cdot m_4^r \\
 34 \quad & my_3 - mz_4 - 0.4318 \cdot (m_6 + m_5 + m_4) - mz_6^r - mz_5^r - mz_4^r \\
 35 \quad & mx_2 + 0.4318 \cdot (m_6 + m_5 + m_4 + m_3) + 0.4318 \cdot (m_6^r + m_5^r + m_4^r) + mz_3^r + mz_2^r \\
 36 \quad & my_2 + 0.032 \cdot m_3^r - 0.069 \cdot m_2^r
 \end{aligned}$$

Tabla 2.3. Parámetros base del modelo dinámico de barras rígidas y rotores de un robot PUMA 560 (II).

$\bar{\Phi}_{Bir}$	Combinaciones Lineales de Parámetros Dinámicos (II)
37:41	$Ixx_6^r - Iyy_6^r, Ixy_6^r, Ixz_6^r, Iyz_6^r, Izz_6^r$
42:46	$Ixx_5^r - Iyy_5^r, Ixy_5^r, Ixz_5^r, Iyz_5^r, Izz_5^r$
47:51	$Ixx_4^r - Iyy_4^r, Ixy_4^r, Ixz_4^r, Iyz_4^r, Izz_4^r$
52:56	$Ixx_3^r - Iyy_3^r, Ixy_3^r, Ixz_3^r, Iyz_3^r, Izz_3^r$
57:60	$Ixx_2^r - Iyy_2^r, Ixy_2^r, Ixz_2^r, Iyz_2^r$
61:70	$mx_6^r, my_6^r, mx_5^r, my_5^r, mx_4^r, my_4^r, mx_3^r, my_3^r, mx_2^r, my_2^r$

CAPÍTULO 3

DISEÑO DE TRAYECTORIAS OPTIMIZADAS

En este capítulo, se plantea como objetivo el diseño de trayectorias que permitan llevar a cabo la identificación de todos los parámetros base del modelo dinámico, minimizando la influencia de los errores de medida sobre los resultados del proceso de identificación. Como se describirá más adelante, el proceso de identificación requiere la determinación del sistema lineal en forma matricial (2.93), presentado en el Capítulo 1, para varias configuraciones del robot manipulador correspondientes a medidas tomadas a lo largo de una determinada trayectoria del robot. Dicho sistema matricial, tras su reducción a un sistema de rango completo de acuerdo a lo descrito en el apartado 2.3, adopta la siguiente forma, ya presentada en las ecuaciones (2.106) y (2.117):

$${}^a\vec{\tau} = {}^a\mathbf{W}_B \cdot \vec{\Phi}_B \quad (3.1)$$

Con el fin de minimizar la influencia de los errores de medida en la resolución del sistema anterior, es necesario diseñar la trayectoria que seguirá el robot durante el experimento de tal modo que ésta sea capaz de excitar los parámetros a identificar. Para ello, se aplicará el criterio más habitualmente utilizado, Gautier y Khalil 1992 y Otani y Kakizaki 1993, el cual consiste en asegurar un buen condicionamiento numérico de la

matriz de observación obtenida, así como un adecuado equilibrado de los elementos de la misma cuando fuera necesario. Esto se conseguirá a través del planteamiento de un proceso de optimización de la trayectoria con las restricciones necesarias a fin de respetar las limitaciones cinemáticas del robot.

Con objeto de limitar la complejidad computacional del anterior problema de optimización, suele recurrirse a la parametrización de la trayectoria de acuerdo a determinados tipos de funciones analíticas. En este capítulo, se describen los dos tipos de funciones que se consideraron en el presente trabajo: Por un lado, las funciones polinómicas y, por otro lado, las series finitas de Fourier. Asimismo, se describen las ventajas que presentan dichos tipos de trayectorias y se justifica la adopción del segundo tipo de función.

3.1. OPTIMIZACIÓN DE LA TRAYECTORIA

Tal como se describe en Gautier y Khalil 1992, el grado de excitación de la trayectoria, y por consiguiente el condicionamiento numérico del sistema de ecuaciones (3.1), sería medido a través del número de condición de la matriz de observación. Dicho número de condición repercutirá de forma decisiva sobre la precisión de los resultados obtenidos del proceso de identificación, ya que en la resolución de un sistema mal condicionado, los errores presentes en las medidas se transmiten a la solución del mismo proporcionalmente al número de condición.

En Swevers et al. 1997, se presenta un estimador alternativo de la excitación de la trayectoria, el denominado *estimador de máxima verosimilitud*, el cual permite tomar en consideración los errores en las variables, llevando a una reducción de los límites de incertidumbre de los parámetros estimados. Por su parte, en Olsen y Petersen 2001 se describe un método similar al anterior, aunque más general, mediante el cual los resultados mejoran ligeramente respecto al estimador de Swevers. Una descripción más

detallada de la implementación del método mediante el *estimador de máxima verosimilitud* puede encontrarse en Olsen et al. 2002. Cabe indicar, no obstante, que dichos métodos tan sólo suponen una mejora apreciable en los resultados respecto al método planteado en Gautier y Khalil 1992, cuyo coste computacional es menor, en aquellos casos en que el nivel de ruido presente en las medidas de las variables cinemáticas no pueda considerarse despreciable, como suele ser a menudo el caso, por lo cual su aplicación fue desestimada en el presente trabajo.

En consecuencia, el criterio que permitirá asegurar un óptimo condicionamiento numérico del sistema de ecuaciones a resolver será formalizado matemáticamente como un problema de optimización no lineal con restricciones no lineales donde la función objetivo a minimizar viene dada por la siguiente expresión:

$$f(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}) = \text{cond}({}^a \mathbf{W}_B) \quad (3.2)$$

donde f es la función objetivo, con $\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}$ las variables generalizadas y sus primeras y segundas derivadas temporales para el conjunto de configuraciones considerado en el ensamblado de la matriz de observación ${}^a \mathbf{W}_B$. La función cond representa el número de condición de una matriz. Como es sabido, el número de condición se define en términos de una norma matricial determinada. Aunque existe una diversidad de normas matriciales, el sentido del número de condición en cuanto a la repercusión de los errores en la solución del problema es igualmente válido para todas ellas. En este trabajo, se considera la definición de número de condición como el cociente entre los valores propios mayor y menor de la matriz de observación, λ_{\max} y λ_{\min} respectivamente, esto es:

$$\text{cond}({}^a \mathbf{W}_B) = \frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}} \quad (3.3)$$

La función f es, por tanto, una función no lineal de las variables de nudo $\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}$.

Además del número de condición de la matriz de observación, puede definirse un segundo término como medida del condicionamiento numérico del sistema de ecuaciones. Dicho término sería el factor de equilibrio S de la matriz de observación del sistema, el cual se define como el cociente entre el mayor y el menor de los valores absolutos de los elementos de la matriz, es decir:

$$S = \frac{|\mathbf{W}_{ij}|_{\max}}{|\mathbf{W}_{ij}|_{\min}} \quad (3.4)$$

donde $|\cdot|_{\max}$ y $|\cdot|_{\min}$ indican los elementos con respectivamente máximo y mínimo valor absoluto de una matriz y $|\mathbf{W}_{ij}|_{\min} \neq 0$.

Aunque en el caso del modelo dinámico de barras el factor de equilibrio de la matriz de observación puede llegar a adoptar valores suficientemente reducidos, cuando se considera el modelo de barras y actuadores, el equilibrado numérico de la matriz de observación empeora considerablemente. Ello se debe al distinto orden de magnitud que presentan los elementos de la matriz asociados al modelo de barras con respecto a los elementos asociados al modelo de los actuadores. En consecuencia, para llevar a cabo la identificación del modelo de barras y actuadores, se recurre al equilibrado de la matriz de observación previamente a la resolución del sistema de ecuaciones (3.1). Con ello se consigue reducir tanto el factor de equilibrado como el número de condición de la matriz de observación del sistema.

Como se ha indicado anteriormente, el problema de optimización planteado estará sujeto a una serie de restricciones cinemáticas tanto en el espacio cartesiano de trabajo como en el espacio de nudos del robot manipulador. Por lo que respecta a las restricciones cinemáticas en el espacio de nudos, éstas son las que afectan a las variables generalizadas, esto es posición, velocidad y aceleración angular para las distintas articulaciones del robot manipulador. Los valores numéricos que se han considerado para

dichas restricciones se muestran en Tabla A.7 y Tabla A.8 del ANEXO A. Las restricciones de posición angular fueron determinadas de acuerdo al modelo cinemático del robot manipulador PUMA 560. Por su parte, las restricciones de velocidad y aceleración angular responden a las limitaciones de potencia y características mecánicas de los actuadores.

Junto a las restricciones cinemáticas en el espacio de nudos indicadas anteriormente, deben considerarse asimismo las restricciones cinemáticas correspondientes al espacio de trabajo efectivo del elemento terminal del brazo robot. Ello requerirá la determinación de la posición en el espacio de trabajo de dicho elemento terminal mediante la resolución del problema cinemático directo. Dada la disposición del robot en el lugar de trabajo, las únicas restricciones cinemáticas en el espacio de trabajo a considerar vienen dadas por la posibilidad de colisión del elemento terminal del robot manipulador con la base del mismo, lo cual es posible evitar fijando una altura y radio mínimos de dicho elemento terminal en relación a la base y al eje de giro de la primera articulación, respectivamente.

La resolución del problema de optimización propuesto se ha llevado a cabo mediante una rutina de optimización no lineal con restricciones no lineales de la librería matemática comercial NAG, la cual está basada en el Método de Programación Secuencial Cuadrática (SQP) descrita en Schittkowski 2002. Este tipo de algoritmos se han mostrado adecuados a la hora de abordar problemas de optimización como el aquí planteado. Como variables de diseño, se consideran los parámetros característicos de las trayectorias, los cuales se describen en el siguiente apartado 3.2. En la generación de las trayectorias, se utilizaron diversas soluciones iniciales generadas aleatoriamente, aunque respetando las restricciones cinemáticas del robot, seleccionando posteriormente aquellas para las que se alcanzó un menor número de condición de la matriz de observación del sistema.

3.2. PARAMETRIZACIÓN DE LA TRAYECTORIA

De acuerdo al tipo de parametrización que se efectúa sobre la trayectoria a optimizar, pueden encontrarse en la literatura básicamente dos técnicas mediante las que puede llevarse a cabo el proceso de optimización. Una primera técnica, la cual constituye la forma más general de proceder, consiste en considerar una serie de configuraciones a lo largo de la trayectoria a optimizar. Las variables del problema de optimización serán las magnitudes cinemáticas generalizadas, a saber, aceleración angular en los nudos (Armstrong 1989), o bien posición y velocidad angular en los nudos (Presse y Gautier 1993). Mediante el enfoque de Armstrong, una vez optimizadas las aceleraciones angulares en el conjunto de configuraciones seleccionado, las velocidades y posiciones angulares correspondientes son obtenidas por integración de aquellas, siendo, en cualquier caso, una cuestión difícil el cumplimiento de las restricciones cinemáticas en los nudos. Además, se requiere un gran número de grados de libertad, lo cual incrementa considerablemente la complejidad del problema de optimización. Por lo que respecta al método en Presse y Gautier 1993, por otro lado, una vez determinadas las posiciones y velocidades angulares que minimizan la función objetivo, es necesario interpolar algún tipo de función analítica (polinomios de quinto orden en Presse y Gautier 1993) entre las configuraciones seleccionadas a fin de que se respeten asimismo las restricciones cinemáticas en los espacios intermedios entre configuraciones, aunque resultando, en este caso, más sencillo cumplir con dichas restricciones. La ventaja de la técnica anterior recae en el hecho de que cualquier trayectoria óptima podría ser teóricamente encontrada mediante el proceso de optimización, ya que no se impone ningún tipo de restricción sobre la forma de dicha trayectoria. Como desventajas, debe observarse, por un lado, el hecho de que el número de puntos de la trayectoria considerados determinará de forma directa el número de variables del problema de optimización, con lo cual éste puede llegar a ser muy elevado, y, por otro lado, la necesidad del posterior proceso de interpolación.

Mediante una segunda técnica, empleada en el presente trabajo, es posible reducir en cierto grado la complejidad del problema de optimización por medio de la parametrización de la trayectoria a optimizar de acuerdo a determinados tipos de funciones analíticas. Entre las ventajas que esta técnica presenta, puede citarse que ya no será necesario el proceso de interpolación al que anteriormente se hacía referencia, al tiempo que el número de variables del problema de optimización será ahora independiente del número de configuraciones del robot manipulador considerados para el ensamblado de la matriz de observación, ya que éstas serán, en este caso, los coeficientes de la función analítica utilizada para parametrizar la trayectoria. La principal desventaja frente a la técnica anterior radica obviamente en la reducción del espacio de soluciones a que será posible llegar a través del proceso de optimización, el cual quedará limitado al espacio cubierto por el tipo concreto de función utilizada para realizar la parametrización.

Una ventaja adicional de las trayectorias parametrizadas radica en el cálculo analítico de las velocidades y aceleraciones angulares. Dado que en robots industriales dichas magnitudes rara vez pueden ser medidas directamente, es generalmente necesario calcularlas a partir de las medidas de posición angular proporcionadas por los encoders. Dicha operación requiere de una derivación numérica que amplifica el ruido presente en la medida de posición angular, haciéndose así imprescindible un filtrado previo de la misma. No obstante, en el caso de las trayectorias parametrizadas, los valores de velocidad y aceleración angular pueden ser calculados de forma analítica, evitando de este modo la dificultad anterior. Así pues, bastará con ajustar, por ejemplo mediante LSM, una función del tipo correspondiente a la trayectoria en cuestión a los datos de posición angular medidos. La velocidad y aceleración angulares pueden ser entonces obtenidas con tan sólo derivar analíticamente la función ajustada para, a continuación, determinar el valor de las mismas en las configuraciones deseadas, en este caso las correspondientes a las medidas de posición.

En el presente trabajo, se evaluaron dos tipos distintos de funciones analíticas a fin de llevar a cabo la parametrización de la trayectoria en el espacio de nudos: una función polinómica de orden m , por un lado, y una serie finita de Fourier con m armónicos

Swevers et al. 1997, por otro. En ambos casos, la función cubre de forma continua la totalidad de la trayectoria considerada.

De acuerdo a la parametrización mediante funciones polinómicas, las variables generalizadas, a saber posición, velocidad y aceleración angular en los nudos, vendrán dadas por las siguientes expresiones:

$$q_i(t) = \sum_{j=0}^m a_{ij} \cdot t^j \quad (3.5)$$

$$\dot{q}_i(t) = \frac{1}{t_{\max}} \sum_{j=1}^m j \cdot a_{ij} \cdot t^{j-1} \quad (3.6)$$

$$\ddot{q}_i(t) = \frac{1}{t_{\max}^2} \sum_{j=2}^m j \cdot (j-1) \cdot a_{ij} \cdot t^{j-2} \quad (3.7)$$

donde $i = 1 \dots n$, con n el número de grados de libertad del robot manipulador, t es el tiempo parametrizado, con $t = 0 \dots 1$. El tiempo máximo real definido para la trayectoria viene dado por t_{\max} , tomándose el tiempo mínimo real siempre igual a cero. Los términos a_{ij} son los coeficientes de la función polinómica, los cuales, como se ha dicho, constituyen las variables del problema de optimización.

En cuanto a la parametrización mediante series de Fourier, las expresiones correspondientes de las variables generalizadas quedarían del siguiente modo:

$$q_i(t) = q_{i0} + \sum_{j=1}^m \left[\frac{a_{ij}}{2\pi f_f \cdot j} \sin(2\pi \cdot j \cdot t) - \frac{b_{ij}}{2\pi f_f \cdot j} \cos(2\pi \cdot j \cdot t) \right] \quad (3.8)$$

$$\dot{q}_i(t) = \sum_{j=1}^m \left[\frac{a_{ij}}{f_f} \cos(2\pi \cdot j \cdot t) + \frac{b_{ij}}{f_f} \sin(2\pi \cdot j \cdot t) \right] \quad (3.9)$$

$$\ddot{q}_i(t) = \sum_{j=1}^m \left[-\frac{2\pi \cdot j}{f_f} a_{ij} \cdot \sin(2\pi \cdot j \cdot t) + \frac{2\pi \cdot j}{f_f} b_{ij} \cdot \cos(2\pi \cdot j \cdot t) \right] \quad (3.10)$$

donde t , al igual que antes, es el tiempo parametrizado. La duración real de la trayectoria viene dada, en este caso, por la frecuencia fundamental de la serie de Fourier f_f . El término continuo q_{i0} , junto con los términos a_{ij} y b_{ij} , constituyen los coeficientes de la serie y, en consecuencia, las variables del problema de optimización.

La frecuencia fundamental de la serie de Fourier ha de ser común a todos los nudos a fin de asegurar la periodicidad de la trayectoria del manipulador. La elección de dicha frecuencia fundamental dependerá evidentemente del valor deseado del período de la trayectoria. Dado el caso, resultaría igualmente posible la omisión de ciertos armónicos de la serie a fin de controlar el contenido en frecuencia de la trayectoria generada.

La diferencia fundamental de las trayectorias parametrizadas mediante las series finitas de Fourier frente a las parametrizadas mediante funciones polinómicas radica en la periodicidad de las primeras. Este hecho aporta ventajas adicionales como la posibilidad de ajustar el ancho de banda de las trayectorias excitantes, lo cual permitiría bien hacer intervenir intencionadamente el efecto de la flexibilidad de las barras o bien evitar el mismo en lo posible, según el caso. Por otra parte, la periodicidad de la trayectoria posibilita el promediado de las medidas a lo largo de varios periodos de la misma, lo cual no solamente conduce a incrementar la proporción señal/ruido de los datos medidos, sino que, además, ofrece la posibilidad de estimar las características del ruido de la señal medida sin necesidad de llevar a cabo ensayos específicos para tal fin.

En realidad, puede verse el método de parametrización mediante series finitas de Fourier como una aproximación al método general, ya que, en principio, cualquier función puede ser aproximada mediante una serie infinita de Fourier. No obstante, resulta en general suficiente considerar unos pocos armónicos para obtener números de condición de la matriz de observación aceptablemente reducidos.

3.3. EJEMPLOS DE APLICACIÓN

En el presente trabajo, se ha llevado a cabo una optimización de trayectorias, sujeta a las restricciones cinemáticas en el espacio de nudos, recurriendo a la parametrización mediante los dos tipos de funciones descritos en el apartado 3.1. En concreto, se utilizó una función polinómica de quinto orden, así como una serie finita de Fourier con cinco armónicos, en la cual se consideran exactamente las mismas frecuencias para todos los nudos.

Tras llevar a cabo distintos ensayos y análisis de error para ambos tipos de trayectoria, no se encontró ninguna ventaja notable de las funciones polinómicas respecto de las series de Fourier, exceptuando el hecho de que el tiempo de cómputo del proceso de optimización es menor para las primeras, lo cual resulta lógico, puesto que el número de coeficientes de la función es menor y las restricciones sobre las variables del problema son exclusivamente lineales. No obstante, dado que la resolución del problema de optimización tiene lugar fuera de línea, éste no se revela como un factor decisivo. Por tanto, en consideración de las diversas ventajas expuestas en el apartado 3.1 para las series de Fourier, se estimó conveniente la adopción de las mismas para la realización de los distintos ensayos de identificación y tests de par calculado que se describen en el trabajo. En consecuencia, tan sólo se mostrarán algunos resultados correspondientes a las distintas trayectorias parametrizadas mediante series finitas de Fourier a las que se hace referencia en el Capítulo 1, dedicado a los resultados experimentales.

A fin de realizar la optimización de las trayectorias, se han considerado en todos los casos 250 configuraciones de la misma para el ensamblado de la matriz de observación del sistema ${}^a \mathbf{W}_B$, mientras que la frecuencia fundamental de la serie se ha establecido de manera que el período de la trayectoria descrita por el robot adopte un valor igual a 10s. La matriz de observación del sistema, de la cual se calcula el número de condición a fin de determinar el valor de función objetivo, se construye, en cada caso, de acuerdo al modelo dinámico considerado, tal como se describe en el Capítulo 2. Así pues, la matriz de observación será de dimensión 1500×36 para el modelo dinámico de barras y 1500×70 para el modelo de barras y actuadores. Dado el número de armónicos considerados en las series de Fourier, el número de variables de diseño del problema de optimización será de 66. La resolución de dicho problema de optimización se llevó a cabo mediante la rutina de optimización E04UCF de la librería matemática comercial NAG.

En la Tabla 3.1, pueden verse los números de condición obtenidos para un conjunto de diez trayectorias optimizadas para el modelo dinámico de barras. El modelo reducido corresponde, en este caso, al vector de parámetros base $\vec{\Phi}_{B1}$, el cual se muestra en el apartado 2.3.3.1. Las trayectorias TFL0 y TFL1 han sido utilizadas en algunos de los ejemplos mostrados en el Capítulo 1.

Tabla 3.1. Números de condición de la matriz de observación con distintas trayectorias optimizadas para el modelo de barras.

Tray.	TFL0	TFL1	TFL2	TFL3	TFL4	TFL5	TFL6	TFL7	TFL8	TFL9
Cond.	14.74	17.18	13.88	14.49	16.48	16.39	16.31	15.31	17.22	14.82

En Figura 3.1, Figura 3.2 y Figura 3.3 se muestran las gráficas de las variables cinemáticas, esto es, posición, velocidad y aceleración angular, correspondientes a las trayectorias optimizadas TFL0 y TFL1.

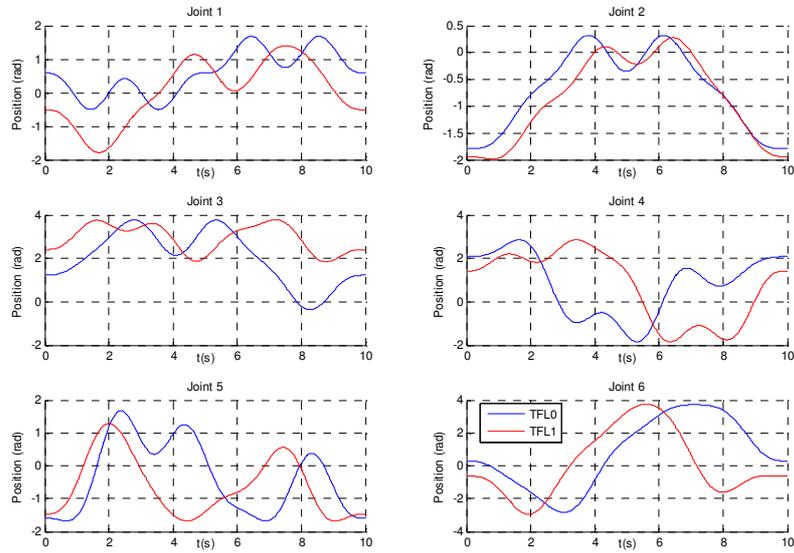


Figura 3.1. Posición angular correspondiente a las trayectorias optimizadas TFL0 y TFL1.

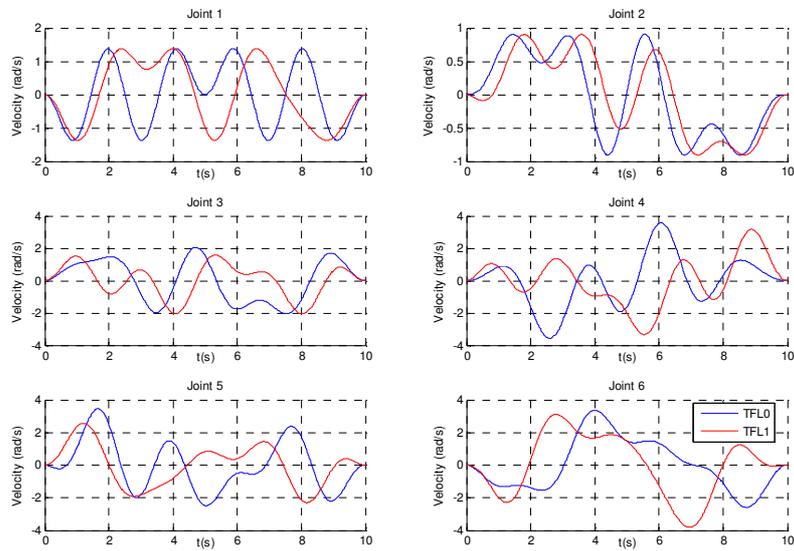


Figura 3.2. Velocidad angular correspondiente a las trayectorias optimizadas TFL0 y TFL1.

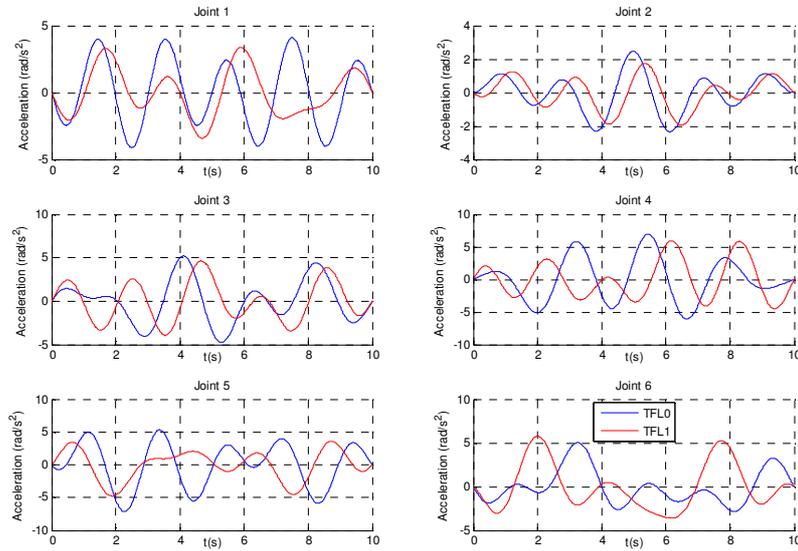


Figura 3.3. Aceleración angular correspondiente a las trayectorias optimizadas TFL0 y TFL1.

En la Figura 3.4, se muestra un esquema del robot donde puede apreciarse la trayectoria descrita por el elemento terminal del mismo en el espacio de trabajo para las trayectorias optimizadas TFL0 y TFL1.

La Tabla 3.2 muestra los resultados obtenidos excluyendo los parámetros de gravedad del modelo de barras, es decir, considerando únicamente los parámetros base $\vec{\Phi}_{B_l}(1:26)$, igualmente para un conjunto de diez trayectorias. A la hora de llevar a cabo los experimentos con este tipo de modelo, no obstante, se ha preferido utilizar las trayectorias optimizadas para el modelo de barras, ya que los números de condición obtenidos de este modo para la matriz de observación, aun siendo ligeramente mayores que los mostrados en la Tabla 3.2, pueden considerarse suficientemente reducidos.

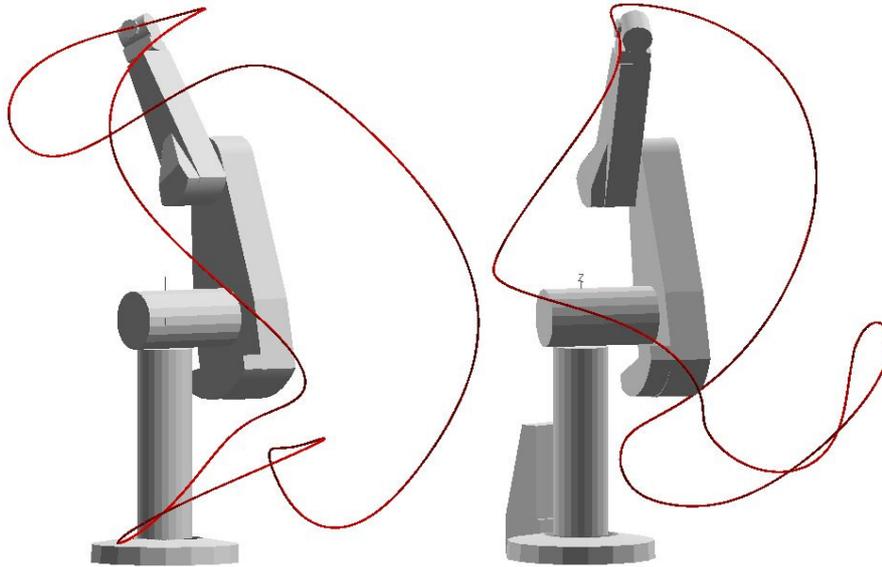


Figura 3.4. Trayectoria en espacio de trabajo descrita por el elemento terminal para las trayectorias TFL0 (izquierda) y TFL1 (derecha), optimizadas para el modelo dinámico de barras.

Tabla 3.2. Números de condición de la matriz de observación con distintas trayectorias optimizadas para el modelo de barras sin parámetros de gravedad.

Tray.	TFLi0	TFLi1	TFLi2	TFLi3	TFLi4	TFLi5	TFLi6	TFLi7	TFLi8	TFLi9
Cond.	3.49	3.72	3.80	3.56	3.60	3.72	3.30	3.60	3.61	3.74

Finalmente, en la Tabla 3.3 aparecen los resultados para un conjunto de ocho trayectorias optimizadas para el modelo de barras y rotores. En este caso, los parámetros base del modelo corresponden a $\vec{\Phi}_{Br}$, tal como se indica en el Apartado 2.3.3.2. Los números de condición que se muestran en este caso han sido obtenidos tras el equilibrado de la matriz de observación. La diferencia en el orden de magnitud de los elementos de la matriz correspondientes a barras y a rotores, hace que los números de condición obtenidos para la matriz no equilibrada sean superiores a los alcanzados para el modelo de barras en dos órdenes de magnitud. Las trayectorias TFR0, TFR1, TFR2 y TFR3 han sido utilizadas en los ejemplos del Capítulo 1 sobre el modelo de barras y rotores.

Tabla 3.3. Números de condición de la matriz de observación con distintas trayectorias optimizadas para el modelo de barras y rotores.

Tray.	TFR0	TFR1	TFR2	TFR3	TFR4	TFR5	TFR6	TFR7
Cond.	12.61	12.84	13.00	12.98	13.27	14.24	19.86	14.60

Las gráficas de las variables cinemáticas correspondientes a las trayectorias TFR0 y TFR1, optimizadas para el modelo dinámico de barras y rotores, pueden verse en Figura 3.5, Figura 3.6 y Figura 3.7. La trayectoria descrita por el elemento terminal del robot en el espacio de trabajo para las trayectorias optimizadas TFR0 y TFR1 se muestra esquemáticamente en la Figura 3.8.

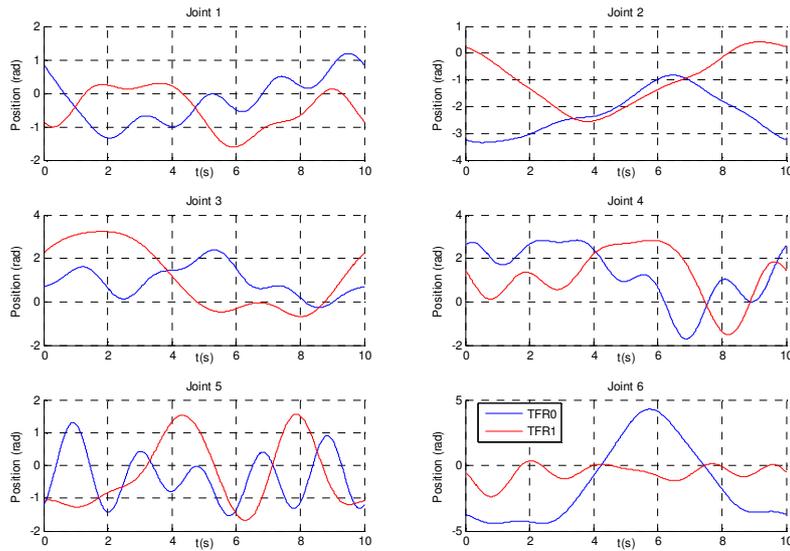


Figura 3.5. Posición angular correspondiente a las trayectorias optimizadas TFR0 y TFR1.

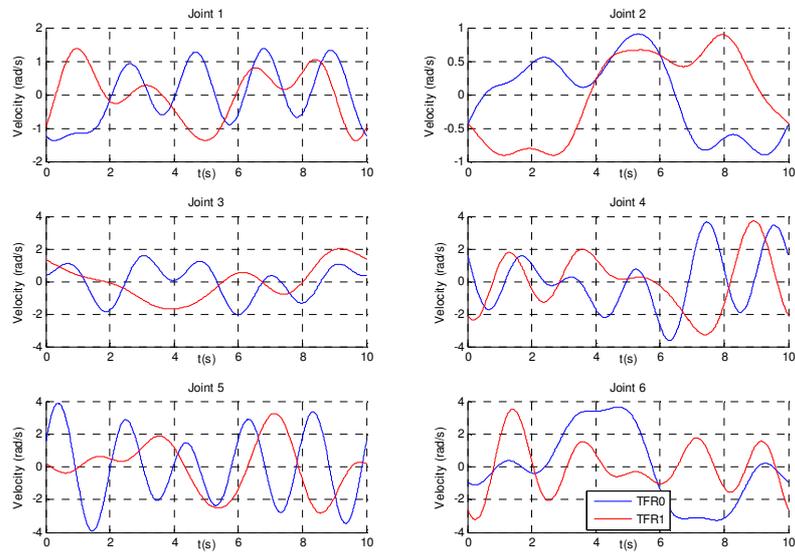


Figura 3.6. Velocidad angular correspondiente a las trayectorias optimizadas TFR0 y TFR1.

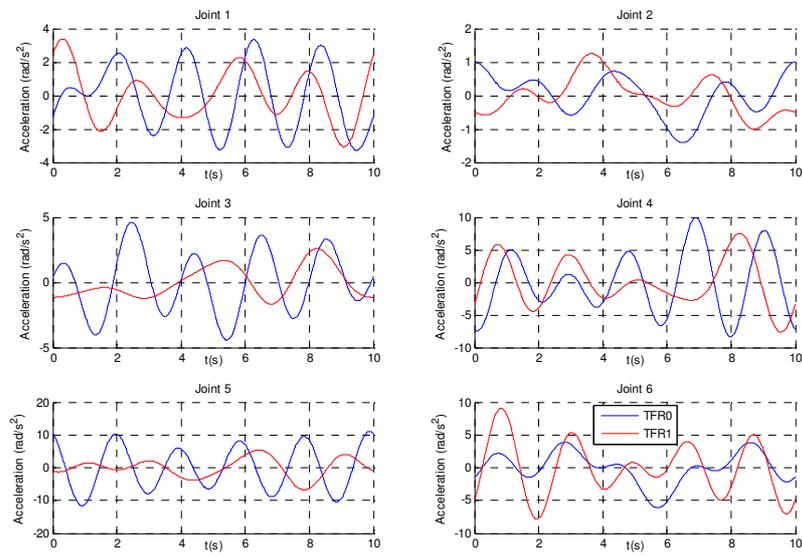


Figura 3.7. Aceleración angular correspondiente a las trayectorias optimizadas TFR0 y TFR1.

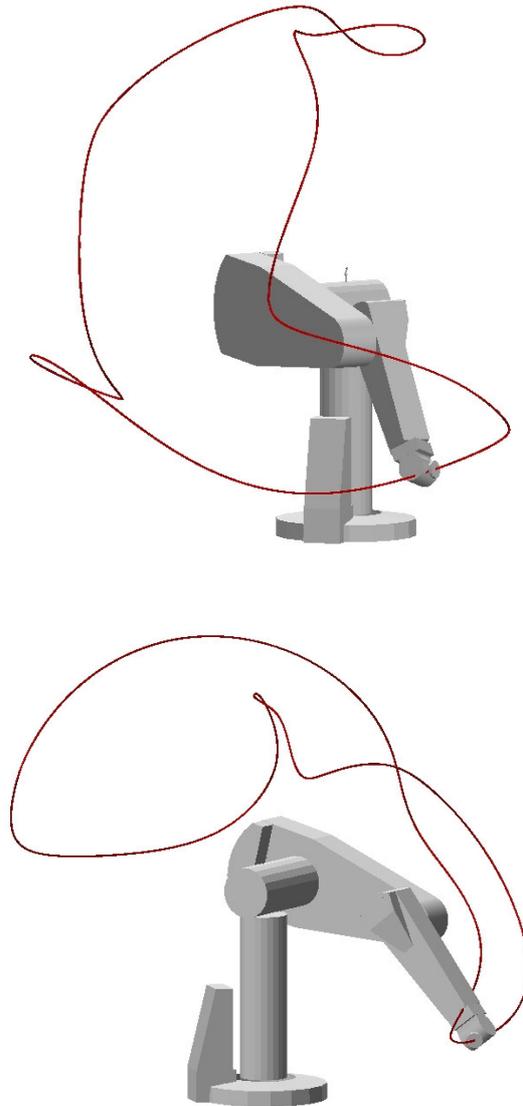


Figura 3.8. Trayectoria en espacio de trabajo descrita por el elemento terminal para las trayectorias TFR0 (arriba) y TFR1 (abajo), optimizadas para el modelo dinámico de barras y rotores.

CAPÍTULO 4

ESQUEMAS DE IDENTIFICACIÓN

En este capítulo se aborda la identificación propiamente dicha de los parámetros base del modelo dinámico. En concreto, se describe la implementación de los dos métodos de identificación propuestos en el presente trabajo, esto es, un método de identificación directo y una variante del esquema de identificación indirecto. En Abdellatif et al. 2004, se describen métodos similares implementados para manipuladores paralelos, si bien la nomenclatura de los mismos difiere respecto al presente trabajo.

El método de identificación directo se basa esencialmente en Gautier 1991, aunque las trayectorias optimizadas han sido parametrizadas mediante series finitas de Fourier, tal como se describe en Swevers et al. 1996, 1997. Éste constituye quizás el esquema de identificación más comúnmente empleado en el caso de robots manipuladores de cadena cinemática abierta, lo cual, unido a las ventajas que presenta frente a los esquemas de identificación indirectos, hizo que se estimara conveniente incluirlo como referencia en este trabajo. Si bien es cierto que en general se tiende a modelizar los actuadores de forma simplificada, incluso llegando a despreciar su efecto, los resultados experimentales muestran que es posible aplicar este método a la

identificación del modelo dinámico de barras y actuadores propuesto obteniendo resultados satisfactorios.

En cuanto al segundo método, éste puede considerarse como una combinación de los esquemas de identificación directo e indirecto, como se verá en el apartado 4.2. No obstante, se ha preferido incluirlo dentro de los esquemas de identificación indirecta por oposición al esquema clásico de identificación directa, por lo cual será denominado método indirecto en lo sucesivo. Se ha prescindido de implementar un método de identificación enteramente de acuerdo al esquema de identificación indirecta por considerar su aplicación práctica costosa y poco sistemática, requiriendo de un diseño específico para cada tipo de robot.

En el último apartado, se aborda la problemática de la factibilidad física del conjunto de parámetros identificados y se presenta un procedimiento alternativo para la resolución del sistema lineal correspondiente, el cual se basa en la aplicación de una rutina de optimización no lineal con restricciones no lineales y tiene por objeto la determinación de un conjunto de parámetros físicamente factibles que constituyan una solución con error mínimo del sistema lineal de ecuaciones.

4.1. IDENTIFICACIÓN DIRECTA

Como se describía en el Capítulo 1, mediante el método de identificación directo, el modelo dinámico del robot manipulador es identificado en su totalidad a partir de un solo experimento. En la Figura 4.1 puede verse un esquema general del método tal y como se ha implementado.

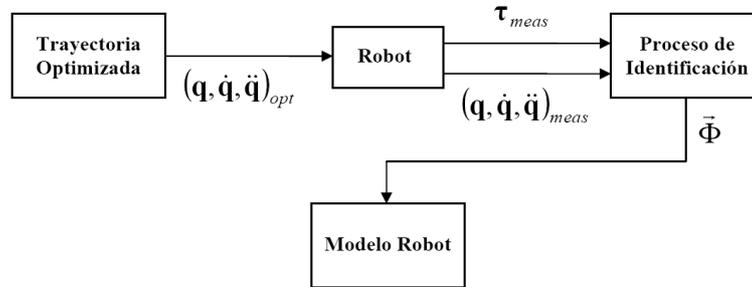


Figura 4.1. Esquema de identificación directa.

Partiendo de las ecuaciones del movimiento en forma lineal desarrolladas en el Capítulo 1, expresión (2.12), se obtiene una matriz de observación \mathbf{W}_i para cada una de las configuraciones del brazo robot consideradas $(\vec{q}_i, \dot{\vec{q}}_i, \ddot{\vec{q}}_i)$, con $i=1\dots m$. Dichas matrices estarán constituidas por tantas filas como grados de libertad posea el robot y tantas columnas como parámetros del modelo dinámico a ser identificados.

$$\vec{\tau}_i = \mathbf{W}_i \cdot \vec{\Phi} \quad (4.1)$$

donde el subíndice i se ha utilizado para referirse a una configuración particular del robot.

Como se detalla en el Apartado 2.3, el sistema de ecuaciones de la expresión (4.1) puede ser reducido a un sistema de ecuaciones de rango completo, donde tan sólo aparecen aquellos parámetros base del modelo que determinan el comportamiento dinámico del mismo de forma independiente, es decir, los mostrados en Tabla 2.1 para el modelo de barras y en

Tabla 2.2 y Tabla 2.3 para el modelo de barras y actuadores. Con ello, se llega al sistema de ecuaciones reducido:

$$\vec{\tau}_i = \mathbf{W}_{B_i} \cdot \vec{\Phi}_B \quad (4.2)$$

El siguiente paso consiste en la agregación de las matrices correspondientes al conjunto de configuraciones considerado para el proceso de identificación. La matriz resultante constituye la matriz de observación del sistema para dicho conjunto de configuraciones. Del mismo modo, se construye un vector de pares en los nudos a partir de los vectores de pares en los nudos correspondientes a cada una de las configuraciones consideradas. Así pues, se obtiene el sistema de ecuaciones definido por la siguiente expresión:

$${}^a \vec{\tau} = {}^a \mathbf{W}_B \cdot \vec{\Phi}_B \quad (4.3)$$

donde:

$${}^a \vec{\tau} = \begin{bmatrix} \vec{\tau}_1 \\ \vdots \\ \vec{\tau}_m \end{bmatrix} \quad {}^a \mathbf{W}_B = \begin{bmatrix} {}^a \mathbf{W}_{B1} \\ \vdots \\ {}^a \mathbf{W}_{Bm} \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

El número m de configuraciones debe ser elegido de tal modo que el número de filas de la matriz de observación sea mayor que el número de columnas, a fin de obtener un sistema de ecuaciones sobredeterminado. Dicho sistema lineal de ecuaciones será resuelto mediante la aplicación del LSM.

Con la finalidad de minimizar la influencia de los errores de medida sobre los parámetros identificados, la matriz de observación obtenida debería presentar un número de condición suficientemente reducido, así como un adecuado equilibrio numérico de sus elementos. El número de condición de la matriz de observación viene determinado por la trayectoria aplicada para realizar la identificación y, por consiguiente, solamente puede ser mejorado a través de un diseño conveniente de dicha trayectoria a fin de que ésta logre excitar suficientemente los parámetros a identificar. Tal como se apunta en Presse y Gautier 1993, incluso para números de condición reducidos, los errores de medida pueden afectar los resultados considerablemente si la matriz de observación no está adecuadamente equilibrada desde el punto de vista numérico. De manera similar, en

Presse y Gautier 1993 los autores proponen, como medio para mejorar el equilibrado de la matriz de observación, la multiplicación de las columnas por las estimaciones a priori de los parámetros a identificar. La resolución del sistema de ecuaciones daría, en este caso, las correcciones a aplicar a las estimaciones a priori a fin de obtener los valores de los parámetros base del modelo. En este trabajo, se ha recurrido al equilibrado numérico de las columnas de la matriz de observación tan sólo en el caso de la identificación del modelo dinámico de barras y actuadores, dado el elevado número de condición generalmente obtenido, si bien para la identificación del modelo dinámico de barras no se ha estimado necesario.

Cuando la trayectoria aplicada en el experimento de identificación es periódica, es posible disminuir considerablemente el efecto de los errores de medida mediante el promediado de las medidas correspondientes a varios períodos de la trayectoria. De este modo, la precisión de los resultados obtenidos puede verse significativamente mejorada sin necesidad de incrementar el tamaño de la matriz de observación del sistema y, en consecuencia, el del sistema de ecuaciones a resolver.

4.2. IDENTIFICACIÓN INDIRECTA

A continuación, se describe la variante propuesta del método indirecto para la identificación del modelo dinámico de un robot manipulador. Ésta se lleva a cabo en dos pasos: Primeramente, se realiza un experimento a partir del cual se estiman los parámetros de gravedad del modelo dinámico y los coeficientes del modelo de fricción. En el segundo paso, se obtienen datos de posición angular y par en los nudos de un experimento en el que se considera una trayectoria optimizada parametrizada mediante series finitas de Fourier. Las medidas de par en los nudos son compensadas mediante los términos de gravedad y fricción ya identificados del modelo dinámico con el fin de identificar el resto del modelo. En la Figura 4.2 puede verse un diagrama en el que se representa el esquema de identificación indirecta aplicado.

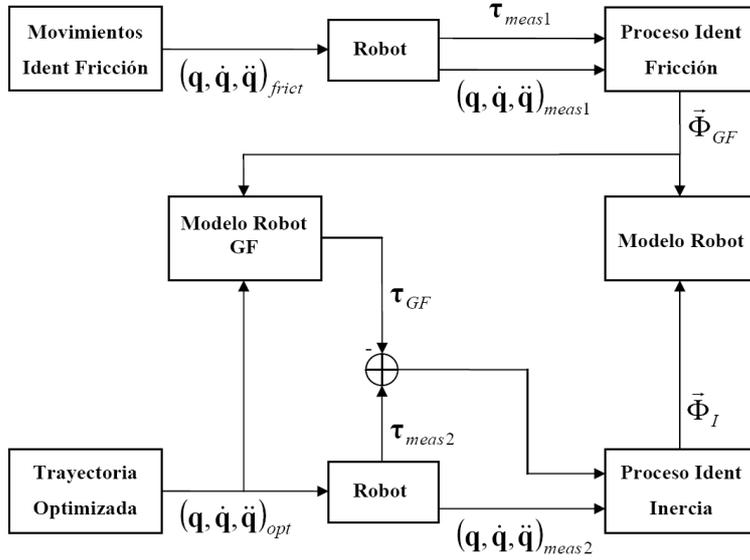


Figura 4.2. Esquema de identificación indirecta.

El sistema de ecuaciones planteado en el Apartado 4.1 para la identificación directa, obtenido a partir de las ecuaciones de la dinámica en forma lineal introducidas en el Capítulo 1, puede ser descompuesto en tres partes según la naturaleza del efecto dinámico implicado en cada caso de acuerdo a la siguiente expresión:

$$\bar{\tau}_i = \mathbf{W}_{B_i} \cdot \bar{\Phi}_B \equiv \begin{bmatrix} \bar{\tau}_{I_i} \\ \bar{\tau}_{G_i} \\ \bar{\tau}_{F_i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{W}_{B_{I_i}} & \mathbf{W}_{B_{G_i}} & \mathbf{W}_{B_{F_i}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \bar{\Phi}_{B_I} \\ \bar{\Phi}_{B_G} \\ \bar{\Phi}_{B_F} \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

donde $\bar{\Phi}_{B_I}$, $\bar{\Phi}_{B_G}$ y $\bar{\Phi}_{B_F}$ son, respectivamente, los parámetros base asociados a los elementos de la matriz de inercia, los parámetros gravitatorios y los de fricción. A su vez, $\mathbf{W}_{B_{I_i}}$, $\mathbf{W}_{B_{G_i}}$, $\mathbf{W}_{B_{F_i}}$ y $\bar{\tau}_{I_i}$, $\bar{\tau}_{G_i}$, $\bar{\tau}_{F_i}$ son los términos correspondientes de la matriz de observación y del vector de pares en los nudos del sistema. Los parámetros de fricción son los coeficientes del modelo de fricción aplicado, mientras que los parámetros gravitatorios son los detallados en el Apartado 4.2.1.

Se han aplicado los modelos dinámicos de barras y de barras y actuadores, así como dos modelos de fricción asimétricos distintos a fin de llevar a cabo el procedimiento de identificación indirecta propuesto. La utilización de modelos de fricción asimétricos implica una dificultad adicional para la identificación del propio modelo de fricción debido al hecho de que las contribuciones al par en los nudos correspondientes a los fenómenos de fricción y a la gravedad no pueden ser separadas. Como solución a este inconveniente, la identificación de los parámetros gravitatorios se realiza en el primer paso del proceso de identificación, conjuntamente con los parámetros de fricción. Los detalles concernientes a cada uno de los dos pasos del procedimiento de identificación indirecta propuesto se describen en los siguientes apartados.

4.2.1. Identificación de la Gravedad y la Fricción

La identificación de los coeficientes de fricción correspondientes a cada articulación se realiza secuencialmente empezando por el último nudo hasta llegar al primero. En cada paso, solamente una articulación es movida a velocidad constante, en tanto que el resto permanece en reposo en una configuración determinada. Los parámetros gravitatorios que afectan el movimiento de la articulación correspondiente son igualmente identificados junto con los coeficientes de fricción. A partir de un conjunto de configuraciones del manipulador, se construye una matriz de observación con información acerca de la gravedad y la fricción, así como un vector con las medidas de pares en los nudos, siendo el sistema lineal de ecuaciones así constituido posteriormente resuelto por medio de un algoritmo de LSM estándar. La optimización previa del conjunto de configuraciones considerado en cada paso podría ser tomada en cuenta a fin de asegurar un número de condición reducido de las matrices de observación, especialmente cuando se introducen modelos más complejos con un mayor número de parámetros a identificar.

El movimiento de cada articulación consiste en un perfil trapezoidal de velocidad, como se ve en la Figura 5.14, de modo que las medidas de par en los nudos son tomadas

de la región de velocidad constante de dicho movimiento, en el instante en que la articulación alcanza la configuración deseada. Este perfil trapezoidal es repetido para un conjunto de valores de velocidad constante distintos para ambos sentidos de rotación de la articulación, obteniendo así para cada uno de tales experimentos un par de medidas de par-velocidad que permitirán obtener las conocidas curvas de fricción par-velocidad correspondientes a cada articulación y configuración. La combinación de las medidas obtenidas para todos los valores de velocidad constante y todas las configuraciones de la articulación consideradas permite la obtención de una matriz de observación y vector de medidas de par en los nudos que constituyen el sistema de ecuaciones del cual se identifican los coeficientes del modelo de fricción y los parámetros de gravedad correspondientes a la articulación en movimiento.

Los parámetros base asociados al par de gravedad para cada articulación pueden ser determinados por medio de un análisis numérico de forma similar a como se describe en el Apartado 2.3 para la determinación de los parámetros base del modelo dinámico. Tras llevar a cabo dicho análisis numérico, se encontró que los parámetros base mostrados en Tabla 4.1 y Tabla 4.2 eran identificables para un movimiento a velocidad constante de cada uno de los nudos por separado, respectivamente para los modelos dinámicos de barras y de barras y rotores. Estos parámetros corresponden, respectivamente, a los parámetros base $\bar{\Phi}_{B_l}(27 : 36)$ y $\bar{\Phi}_{B_r}(27 : 36,57 : 70)$ del apartado 2.3.3. La primera articulación y su actuador correspondiente no se ven afectados por la aceleración de la gravedad, dada la estructura del robot manipulador considerado, por lo que la identificación de los parámetros base gravitatorios no se realiza para dicha articulación.

Como ya se ha mencionado, el procedimiento de identificación se inicia con el movimiento de la última articulación y prosigue hasta llegar a la segunda articulación. En cada paso, los parámetros gravitatorios identificados en los pasos anteriores son utilizados para compensar las medidas de par en los nudos, de modo que tan sólo los parámetros correspondientes a la articulación en movimiento deben ser identificados, lo

cual reduce el tamaño de la matriz de observación y, en consecuencia, mejora el condicionamiento numérico del sistema de ecuaciones a resolver.

Tabla 4.1. Parámetros base gravitatorios del modelo dinámico de barras determinados para el movimiento de una sola articulación a velocidad constante.

Art. Activa	Parámetros Base Gravitatorios
6	mx_6, my_6
5	mx_6, my_6 $mx_5, my_5 - mz_6$
4	mx_6, my_6 $mx_5, my_5 - mz_6$ $mx_4, my_4 + mz_5$
3	mx_6, my_6 $mx_5, my_5 - mz_6$ $mx_4, my_4 + mz_5$ $mx_3 - 0.02032 \cdot (m_6 + m_5 + m_4), my_3 - mz_4 - 0.4318 \cdot (m_6 + m_5 + m_4)$
2	mx_6, my_6 $mx_5, my_5 - mz_6$ $mx_4, my_4 + mz_5$ $mx_3 - 0.02032 \cdot (m_6 + m_5 + m_4), my_3 - mz_4 - 0.4318 \cdot (m_6 + m_5 + m_4)$ $mx_2 + 0.4318 \cdot (m_6 + m_5 + m_4 + m_3), my_2$

En el caso del modelo dinámico de barras, como puede observarse en la Tabla 4.1, solamente dos parámetros gravitatorios deben ser identificados en cada paso, además de los coeficientes de fricción. En cuanto al modelo de barras y actuadores, también los parámetros mx_i^r y my_i^r , correspondientes a la desalineación del eje de los rotores, aparecen como parámetros identificables. Para la segunda articulación, también los parámetros base asociados a los elementos del tensor de inercia ejercen una contribución al par de gravedad de la misma. No obstante, considerando los reducidos valores que estos parámetros base del modelo dinámico de los actuadores generalmente adoptan, podría ser aconsejable ignorarlos durante la identificación de los parámetros

gravitatorios, dado el elevado número de condición de las matrices de observación que su inclusión implica.

Tabla 4.2. Parámetros base gravitatorios del modelo dinámico de barras y actuadores determinados para el movimiento de una sola articulación a velocidad constante.

Art. Activa	Parámetros Base Gravitatorios
6	$mx_6, my_6, mx_6^r, my_6^r$
5	mx_6, my_6 $mx_5, my_5 - mz_6, mx_5^r, my_5^r$
4	mx_6, my_6 $mx_5, my_5 - mz_6$ $mx_4, my_4 + mz_5, mx_4^r, my_4^r$
3	$mx_6, my_6, mx_6^r, my_6^r$ $mx_5, my_5 - mz_6, mx_5^r, my_5^r$ $mx_4, my_4 + mz_5, mx_4^r, my_4^r$ $mx_3 - 0.02032 \cdot (m_6 + m_5 + m_4), my_3 - mz_4 - 0.4318 \cdot (m_6 + m_5 + m_4),$ mx_3^r, my_3^r
2	$mx_6, my_6, mx_6^r, my_6^r$ $mx_5, my_5 - mz_6, mx_5^r, my_5^r$ $mx_4, my_4 + mz_5, mx_4^r, my_4^r$ $mx_3 - 0.02032 \cdot (m_6 + m_5 + m_4), my_3 - mz_4 - 0.4318 \cdot (m_6 + m_5 + m_4),$ mx_3^r, my_3^r $mx_2 + 0.4318 \cdot (m_6 + m_5 + m_4 + m_3), my_2,$ $Ixx_2^r - Iyy_2^r, Ixy_2^r, Ixz_2^r, Iyz_2^r, mx_2^r, my_2^r$

4.2.2. Identificación del Resto del Modelo Dinámico

Este segundo paso de la identificación del modelo dinámico del robot manipulador es similar al método de identificación directo presentado en el Apartado 4.1. Se realiza un experimento mediante una trayectoria optimizada excitante a fin de obtener medidas de posición angular y par en los nudos del robot. La contribución al par en los nudos debida a la fricción y a la gravedad es calculada a partir de los parámetros estimados en el primer paso y utilizada posteriormente para compensar los valores medidos del par en los nudos. De esta manera, se obtiene un sistema de ecuaciones para cada configuración del brazo robot considerada que puede ser expresado como sigue:

$$\bar{\tau}_{I_i} = \mathbf{W}_{BI_i} \cdot \bar{\Phi}_{BI} \quad (4.6)$$

donde $\bar{\tau}_{I_i}$ es el vector de medidas de par en los nudos corregidas y \mathbf{W}_{BI_i} es la matriz de observación correspondiente al modelo reducido excluyendo las contribuciones de gravedad y fricción.

El vector de pares en los nudos y la matriz de observación son agregados análogamente para las m configuraciones consideradas a fin de ensamblar un sistema de ecuaciones con la siguiente forma:

$${}^a \bar{\tau}_I = {}^a \mathbf{W}_{BI} \cdot \bar{\Phi}_{BI} \quad (4.7)$$

donde:

$${}^a \bar{\tau}_I = \begin{bmatrix} \bar{\tau}_{I_1} \\ \vdots \\ \bar{\tau}_{I_m} \end{bmatrix} \quad {}^a \mathbf{W}_{BI} = \begin{bmatrix} \mathbf{W}_{BI_1} \\ \vdots \\ \mathbf{W}_{BI_m} \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

Al igual que en el método de identificación indirecto, el número m de configuraciones debe ser elegido de tal manera que se obtenga un sistema de ecuaciones sobredeterminado.

Finalmente, el sistema de ecuaciones anterior es resuelto a fin de identificar el resto de los parámetros base $\vec{\Phi}_{B_I}$, los cuales no aparecen en los modelos de fricción y gravedad ya identificados descritos anteriormente. Dichos parámetros base a estimar en este segundo paso corresponden a los parámetros base $\vec{\Phi}_{B_I}(1:26)$, para el modelo dinámico de barras, o $\vec{\Phi}_{B_r}(1:26,37:56)$, para el modelo dinámico de barras y actuadores, presentados en el Apartado 2.3.3.

4.3. FACTIBILIDAD FÍSICA DEL CONJUNTO DE PARÁMETROS BASE IDENTIFICADO

Dadas las características del problema de identificación, surge una nueva dificultad a considerar a la hora de resolver el sistema lineal de ecuaciones (3.1). En efecto, como ya se ha dicho, se trata de un sistema lineal de ecuaciones sobredeterminado, con lo cual existe un número infinito de soluciones al mismo, es decir, el conjunto de parámetros base obtenidos del proceso de identificación es indeterminado. Por otra parte, si se observan las combinaciones de parámetros dinámicos que definen cada uno de los parámetros base del modelo, tal como se muestra en el Apartado 2.3.3, es fácil ver que la equivalencia entre parámetros base y parámetros dinámicos correspondientes no es biunívoca. En otras palabras, dado un conjunto de parámetros base solución del sistema lineal de ecuaciones, existirá una infinidad de conjuntos de parámetros dinámicos equivalentes al mismo. La dificultad aparece por el hecho de que algunos de estos conjuntos de parámetros dinámicos pueden no tener sentido físico debido a la presencia de masas negativas o tensores de inercia no definidos positivos e

incluso, para ciertos conjuntos de parámetros base identificados, puede no existir ningún conjunto de parámetros dinámicos equivalente con sentido físico. En este último caso, el conjunto de parámetros base sería considerado físicamente no factible.

En principio, las ecuaciones del movimiento consideradas podrían ser reescritas a fin de que tan sólo los parámetros base del modelo aparezcan en ellas, con lo cual se reduciría la complejidad computacional del algoritmo de cálculo de las mismas y se permitiría la aplicación directa en ellas de los parámetros base identificados. No obstante, en algunas aplicaciones puede ser aconsejable, cuando no necesario, asegurar que el conjunto de parámetros base identificados corresponda a un conjunto de parámetros inerciales físicamente factibles. Éste sería el caso en aplicaciones de control por dinámica inversa, en las cuales se requiere que el tensor de inercia del sistema sea definido positivo, tal como sucede en cualquier sistema real, a fin de preservar la estabilidad del algoritmo de control. En aplicaciones de simulación dinámica, la factibilidad física de los parámetros dinámicos utilizados resulta crucial cuando se considera el proceso de integración de las ecuaciones del movimiento.

Como se muestra en Yoshida y Khalil 2000, una condición suficiente para asegurar la factibilidad física del conjunto de parámetros considerado es que las masas sean positivas y los tensores de inercia, expresados con respecto al centro de masa del cuerpo, definidos positivos para todos y cada uno de los elementos mecánicos considerados en el modelo dinámico del sistema robótico. Como es evidente, resulta necesario disponer de los valores de los parámetros dinámicos del modelo a fin de que sea posible verificar dicha condición. El método propuesto en Yoshida y Khalil 2000 para la determinación de la factibilidad física de un conjunto dado de parámetros base identificados consiste de hecho en tratar de encontrar, a partir de los valores de los parámetros base, un conjunto equivalente de parámetros dinámicos del modelo que sea físicamente factible, esto es, que cumpla la condición anterior.

Aunque el anterior test de factibilidad física requiere la determinación de dicho conjunto de parámetros dinámicos partiendo de los valores de los parámetros base,

resulta no obstante posible determinar la no factibilidad física de un conjunto de parámetros base dado a partir de los valores de algunos de dichos parámetros base. Como puede observarse a partir de Tabla 2.1,

Tabla 2.2 y Tabla 2.3, mostradas en el apartado 2.3.3, un valor negativo de alguno de los parámetros base $\bar{\Phi}_{Bl}(5; 10; 15; 25)$, mostrados en la Tabla 4.3, resultaría en la no factibilidad física del conjunto de parámetros base para el modelo dinámico de barras. En el caso del modelo dinámico de barras y actuadores, los parámetros base correspondientes que darían lugar a la infactibilidad física en caso de adoptar un valor negativo serían $\bar{\Phi}_{Blr}(5; 10; 15; 25; 41; 46; 51; 56)$, los cuales pueden verse en la Tabla 4.4.

Tabla 4.3. Parámetros base cuyo valor negativo imposibilita la factibilidad física del conjunto de parámetros base del modelo dinámico de barras para un robot manipulador PUMA 560.

$\bar{\Phi}_{Bl}$	Combinaciones Lineales de Parámetros Dinámicos
5	I_{zz_6}
10	$I_{zz_5} + I_{yy_6}$
15	$I_{zz_4} + I_{yy_5}$
25	$I_{zz_2} + 0.186451 \cdot (m_6 + m_5 + m_4 + m_3)$

Partiendo de datos experimentales analizados, parece razonable atribuir una mayor relevancia en la determinación de la factibilidad física de conjunto de parámetros base identificados a la precisión del modelo dinámico utilizado. En concreto, el ajuste del modelo de fricción utilizado al par de fricción real parece ser un factor clave en la determinación de los parámetros inerciales en lo que respecta a la factibilidad física de los mismos. Obviamente, dependiendo de la trayectoria empleada para llevar a cabo el experimento de identificación, ciertos fenómenos de fricción no modelada podrán

adquirir una mayor o menor influencia, lo cual explicaría la discrepancia en los resultados obtenidos para distintas trayectorias utilizando un mismo modelo dinámico del robot.

Tabla 4.4. Parámetros base cuyo valor negativo imposibilita la factibilidad física del conjunto de parámetros base del modelo dinámico de barras y actuadores para un robot manipulador PUMA 560.

$\bar{\Phi}_{Blr}$	Combinaciones Lineales de Parámetros Dinámicos
5	Izz_6
10	$Izz_5 + Iyy_6$
15	$Izz_4 + Iyy_5$
25	$Izz_2 + 0.186451 \cdot (m_6 + m_5 + m_4 + m_3) +$ $+ Iyy_3^r + Iyy_2^r + 11624.160477 \cdot Izz_2^r$ $+ 0.186451 \cdot (m_6^r + m_5^r + m_4^r) + 0.001024 \cdot m_3^r + 0.004761 \cdot m_2^r$
41	Izz_6^r
46	Izz_5^r
51	Izz_4^r
56	Izz_3^r

Una posible solución a este problema podría ser un diseño especial de la trayectoria optimizada aplicada en el experimento de identificación con objeto de evitar áreas del espacio de trabajo o movimientos particulares para los cuales los efectos dinámicos no modelados se manifiesten con una mayor influencia sobre la respuesta dinámica del sistema. Por otro lado, la mejora del modelo dinámico con el fin de aproximarse al comportamiento dinámico real del sistema robótico modelado, especialmente en referencia a los fenómenos de fricción, puede resultar primordial a la hora de evitar la no factibilidad física de los parámetros base identificados, si bien deben tenerse en cuenta las limitaciones impuestas por el carácter lineal exigido a los modelos de fricción empleados con respecto a sus parámetros.

A continuación, se propone una solución alternativa al problema de la factibilidad física de los parámetros identificados, la cual está basada en la resolución del sistema lineal de ecuaciones por medio de una rutina de optimización no lineal con restricciones

no lineales que permite la imposición de las restricciones sobre los parámetros base necesarias para asegurar la factibilidad física del conjunto de parámetros base identificados.

Como se describe en los Apartados 4.1 y 4.2.2 respectivamente para el método de identificación directo y, de forma similar, para el segundo paso del método de identificación indirecto, tras agregar el vector de medidas de par en los nudos y las matrices de observación correspondientes al conjunto de configuraciones del robot consideradas en el experimento de identificación, se obtiene un sistema lineal de ecuaciones de la siguiente forma:

$${}^a\vec{\tau} = {}^a\mathbf{W} \cdot \vec{\Phi} \quad (4.9)$$

donde ${}^a\vec{\tau}$ y ${}^a\mathbf{W}$ son el vector global r -dimensional de pares en los nudos y la matriz de observación global $r \times c$, respectivamente, con $r = n \times s$, s el número de configuraciones consideradas para la construcción del sistema lineal de ecuaciones y c el número de parámetros físicos considerados en el modelo, tal como se muestra en las expresiones (2.42), (2.64) y (2.92).

Como ya se ha explicado en el apartado 2.3, por medio de la descomposición SVD o QR, pueden detectarse las dependencias lineales existentes en la matriz de observación, de modo que algunos de los parámetros físicos pueden ser eliminados o reagrupados a fin de obtener un sistema lineal de ecuaciones reducido de rango completo que puede escribirse como sigue:

$${}^a\vec{\tau} = {}^a\mathbf{W} \cdot \mathbf{K}^T \cdot \mathbf{K} \cdot \vec{\Phi} = {}^a\mathbf{W}_B \cdot \vec{\Phi}_B \quad (4.10)$$

donde :

- ${}^a\mathbf{W}_B$ es la matriz de observación reducida $r \times b$ de rango completo, siendo b el número de del modelo,

- $\vec{\Phi}_B$ es el vector b -dimensional de parámetros base.
- \mathbf{K} es la matriz $b \times c$ que expresa la dependencia lineal entre las columnas de ${}^a\mathbf{W}$ y, en consecuencia, determina la correspondencia entre los parámetros base y los parámetros físicos del modelo dinámico del robot (véase la expresión 2.119).

En lugar de utilizar el método lineal de LSM para resolver el sistema lineal de ecuaciones planteado anteriormente, se plantea y resuelve un problema de optimización no lineal sujeto a restricciones no lineales. Al igual que en la resolución por LSM, se encuentra una solución al sistema (4.10) que minimiza el error (4.11) entre el par en los nudos medido y calculado dado como suma de cuadrados para el conjunto de datos considerado.

$$e_\tau = (\vec{\tau}_S - \mathbf{W}_B \cdot \vec{\Phi}'_B)^T \cdot (\vec{\tau}_S - \mathbf{W}_B \cdot \vec{\Phi}'_B) \quad (4.11)$$

donde $\vec{\Phi}'_B = \mathbf{K} \cdot \vec{\Phi}'$ es el vector de parámetros base actual y $\vec{\Phi}'$ es el vector de parámetros físicos actual, el cual constituye el conjunto de variables del problema de optimización.

Adicionalmente, puede considerarse un segundo término en la función objetivo en el caso de que se desee un ajuste a un conjunto de parámetros base previamente identificado. En tal caso, la divergencia entre ambos conjuntos de parámetros base sería igualmente computado como una suma de cuadrados de los errores correspondientes a cada parámetro tal como sigue:

$$e_\Phi = (\vec{\Phi}_B - \mathbf{L} \cdot \vec{\Phi}')^T \cdot (\vec{\Phi}_B - \mathbf{L} \cdot \vec{\Phi}') \quad (4.12)$$

donde $\vec{\Phi}_B$ es el vector de parámetros base de partida al que se pretende aproximar la solución del problema de optimización.

Así pues, la función objetivo del problema de optimización adoptaría la siguiente forma:

$$f(\bar{\Phi}') = \lambda_\tau \cdot e_\tau + \lambda_\Phi \cdot e_\Phi \quad (4.13)$$

donde λ_τ y λ_Φ son factores de ponderación.

Asimismo, se imponen al problema de optimización todas aquellas restricciones necesarias para asegurar la factibilidad física del conjunto de parámetros inerciales. Más precisamente, se garantiza el sentido físico de los parámetros inerciales, así como el que los tensores de inercia correspondientes a cada uno de los elementos individuales del sistema dinámico, esto es barras y actuadores, sean definidos positivos.

Llegados a este punto, el problema de optimización puede ser formalizado matemáticamente del siguiente modo:

$$\begin{aligned} \bar{\Phi}'_{opt} = \min_{\bar{\Phi}'} f(\bar{\Phi}') \\ \begin{cases} m_i, m_{r_i} > 0 \\ eig({}^i I_{G_i}), eig({}^i I_{G_{r_i}}) > 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (4.14)$$

donde la función *eig* devuelve los valores propios de una matriz y $i = 1..n$. El anteriormente planteado constituye un problema de optimización no lineal con restricciones. Los algoritmos basados en el método de SQP, Schittkowski 2002, han demostrado ser eficientes a la hora de resolver esta clase de problemas de optimización.

A fin de mejorar la convergencia del algoritmo propuesto en la expresión (4.13), se recurrió a la implementación de un algoritmo de optimización en dos pasos. Como solución inicial en el primer paso de la optimización, se considera un conjunto de parámetros basados en valores teóricos conocidos a priori y físicamente factibles

obtenidos de la literatura, Corke y Armstrong-Hélouvy 1994. En este primer paso, tan sólo se impone que las masas y momentos principales de inercia sean positivos a fin de obtener una solución intermedia, la cual se utiliza como solución inicial del segundo paso de la optimización. En este segundo paso, se impone que las masas y valores propios de los tensores de inercia de barras y rotores sean positivos con el fin de alcanzar la solución final. Esto puede ser expresado de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
 \text{Paso 1:} \quad & \bar{\Phi}'_{opt1} = \min_{\bar{\Phi}'} f(\bar{\Phi}') \\
 & \begin{cases} m_i, m_{r_i} > 0 \\ {}^i I_{Gxx_i}, {}^i I_{Gyy_i}, {}^i I_{Gzz_i}, {}^i I_{Gr_{xx_i}}, {}^i I_{Gr_{yy_i}}, {}^i I_{Gr_{zz_i}} > 0 \end{cases} \\
 \text{Paso 2:} \quad & \bar{\Phi}'_{opt2} = \min_{\bar{\Phi}'} f(\bar{\Phi}') \\
 & \begin{cases} m_i, m_{r_i} > 0 \\ eig({}^i I_{G_i}), eig({}^i I_{Gr_i}) > 0 \end{cases}
 \end{aligned} \tag{4.15}$$

El carácter positivo de los valores propios de los tensores de inercia puede ser determinado mediante el análisis de las raíces del polinomio característico de la matriz correspondiente aplicando el teorema de Routh. Alternativamente, también el carácter positivo de los tres determinantes superiores por la izquierda de la matriz resulta equivalente a lo anterior.

Aunque esta técnica conduce en general a soluciones aceptables al problema de identificación, tal como se muestra en el apartado 5.3.4, debería tenerse, no obstante, un especial cuidado de que el conjunto de parámetros identificado permita la predicción del par en los nudos con la suficiente precisión, particularmente en los casos en que la solución obtenida difiere en gran medida de la solución óptima proporcionada por LSM.

CAPÍTULO 5

RESULTADOS EXPERIMENTALES

A fin de comprobar los distintos procedimientos desarrollados en este trabajo, se han llevado a cabo diversos experimentos de identificación utilizando tanto datos simulados generados mediante el modelo dinámico del robot con parámetros conocidos a priori como datos medidos de un robot manipulador PUMA 560. En la Figura 5.1 y la Figura 5.2, se muestra un esquema del procedimiento experimental seguido respectivamente en cada caso. El primer esquema de identificación permite comprobar la validez del método de identificación en si, mientras que el segundo esquema permite contrastar la precisión del modelo dinámico propuesto con respecto a las medidas de par en los nudos tomadas del robot real.

Como se describe en el Capítulo 3, la trayectoria aplicada para llevar a cabo la identificación de los parámetros ha sido parametrizada mediante series finitas de Fourier. En cuanto al procedimiento de optimización, se ha tomado el número de condición de la matriz de observación del sistema como criterio de optimización y se han impuesto las restricciones cinemáticas pertinentes tanto en el espacio de nudos como en el espacio cartesiano de trabajo relativas al robot y a su entorno de trabajo. Se ha aplicado un algoritmo de optimización basado en SQP. En el Apartado 3.3, se muestran algunos

ejemplos de las trayectorias optimizadas utilizadas en los distintos experimentos descritos en este capítulo.

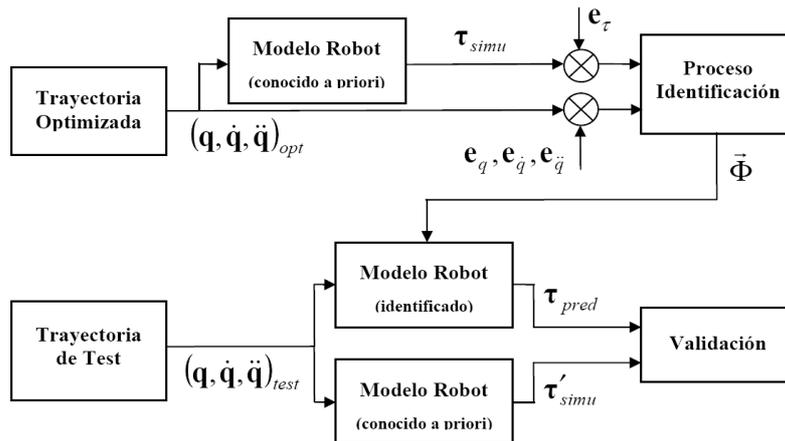


Figura 5.1. Esquema de validación con un modelo dinámico del robot con parámetros conocidos a priori.

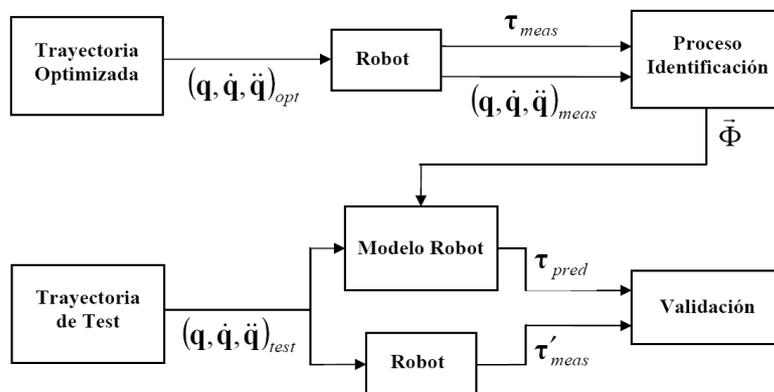


Figura 5.2. Esquema de validación utilizando un robot manipulador industrial.

Una vez que la matriz de observación ha sido calculada a partir de los datos de posición angular y par en los nudos de acuerdo al Capítulo 2, el proceso de identificación prosigue tal como se describe en el Capítulo 4, de acuerdo al esquema de identificación que se esté aplicando en cada caso (Benimeli et al. 2003, Mata et al. 2003).

En referencia al control del robot manipulador, se ha utilizado una arquitectura de control totalmente abierta (Valera et al. 1998, Valera et al. 2003), en la cual la unidad de control original del robot manipulador PUMA 560 ha sido reemplazada mediante un PC provisto de tarjetas de adquisición de datos, tal como se describe en el ANEXO C. De esta forma, se evita cualquier limitación asociada a una unidad de control industrial típica, resultando posible la implementación de algoritmos de control generales de una forma sencilla.

Tanto el software de control del robot como la mayor parte de los algoritmos propuestos en el presente trabajo fueron implementados mediante el lenguaje de programación C++, haciendo uso del entorno de programación Microsoft Visual C++ 6.0, sirviéndose de diversas rutinas matemáticas de la librería matemática comercial NAG Mark 20, así como de la rutina de optimización NLPQL. En muchos casos, dichos algoritmos fueron igualmente implementados, a efectos de desarrollo, depuración y verificación de resultados, utilizando MATLAB 7.0. Las expresiones de las ecuaciones del movimiento en su forma lineal respecto a los parámetros a identificar fueron obtenidas y simplificadas haciendo uso de las posibilidades de cálculo simbólico de la aplicación Macsyma 2.0.

5.1. VALORES DE LOS PARÁMETROS BASE

En esta Sección, se proporcionan los valores numéricos de los parámetros base determinados en el Apartado 2.3.3 partiendo de los valores conocidos a priori de los parámetros físicos del robot manipulador. Esto permitirá establecer una comparación con los valores de los parámetros base identificados en los ejemplos de simulación del Apartado 0.

5.1.1. Modelo Dinámico de Barras Rígidas

En la Tabla 5.1, se muestran los valores conocidos a priori de los parámetros inerciales definidos para el modelo dinámico de barras rígidas.

Tabla 5.1. Valores conocidos a priori de los parámetros inerciales del modelo dinámico de barras rígidas.

	Barra					
	1	2	3	4	5	6
I_{xx}	1.64268	0.84058	3.71704	0.18442	0.07355	0.00759
I_{xy}	0	0	-0.00055	0	0	0
I_{xz}	0	-0.32892	0	0	0	0
I_{yy}	0.5091	8.7375	0.3009	0.18442	0.0735	0.00759
I_{yz}	0	0	0	0	0	0
I_{zz}	1.64268	8.57562	3.71704	0.1273	0.12735	0.0141
m_x	0	2.20618	-0.00281	0	0	0
m_y	-0.56813	0	-1.7271	0	-0.00736	0
m_z	0	2.35279	0	-0.05996	0	0.01308
m	10.521	15.781	8.767	1.052	1.052	0.351

De acuerdo a las combinaciones lineales de parámetros inerciales correspondientes a los parámetros base del modelo de barras rígidas, mostradas en la Tabla 2.1, los valores de los parámetros base obtenidos partiendo de los valores de los parámetros inerciales conocidos a priori (Tabla 5.1) serían los mostrados en la Tabla 5.2.

Tabla 5.2. Valores calculados de los parámetros base del modelo dinámico de barras rígidas.

	Barra					
	1	2	3	4	5	6
I_{xx}	0	-9.9893	4.0055	0.0735	0.00764	0
I_{xy}	0	0	-0.02088	0	0	0
I_{xz}	0	-1.0514	0	0	0	0
I_{yy}	0	0	0	0	0	0
I_{yz}	0	0	0	0	0	0
I_{zz}	13.024	10.668	4.3084	0.2008	0.13494	0.0141
m_x	0	7.0518	-0.05269	0	0	0
m_y	0	0	-2.7272	0	-0.02044	0
m_z	0	0	0	0	0	0
m	0	0	0	0	0	0

5.1.2. Modelo Dinámico de Barras Rígidas y Actuadores

En la Tabla 5.3 y la

Tabla 5.4, pueden verse los valores de los parámetros inerciales conocidos a priori considerados para el modelo dinámico de barras rígidas y actuadores.

Tabla 5.3 Valores conocidos a priori de los parámetros inerciales del modelo dinámico de barras rígidas y actuadores (I).

	Barra					
	1	2	3	4	5	6
I_{xx}	1.64268	0.83169	3.70539	0.184418	0.073552	0.007587
I_{xy}	0	0	-0.00053	0	0	0
I_{xz}	0	-0.32058	0	0	0	0
I_{yy}	0.5091	8.72079	0.3009	0.184418	0.0735	0.007587
I_{yz}	0	0	0	0	0	0
I_{zz}	1.64268	8.56781	3.7054	0.1273	0.12735	0.0141
m_x	0	2.15026	-0.00271	0	0	0
m_y	-0.56813	0	-1.668	0	-0.00736	0
m_z	0	2.29315	0	-0.05996	0	0.013075
m	10.521	15.381	8.467	1.052	1.052	0.351

Tabla 5.4 Parámetros inerciales conocidos a priori del modelo de barras rígidas y actuadores (II).

	Barra					
	1	2	3	4	5	6
I_{xx_r}	0.09	0.09	0.09	0.009	0.009	0.009
I_{xy_r}	0	0	0	0	0	0
I_{xz_r}	0	0	0	0	0	0
I_{yy_r}	0.09	0.09	0.09	0.009	0.009	0.009
I_{yz_r}	0	0	0	0	0	0
I_{zz_r}	0.0002	0.0002	0.0002	0.00002	0.00002	0.00002
m_{x_r}	0	0	0	0	0	0
m_{y_r}	0	0	0	0	0	0
m_{z_r}	0.01	0.01	0.02	0.01	0.01	0.01
m_r	0.2	0.2	0.2	0.1	0.1	0.1

De acuerdo a la combinaciones lineales de parámetros inerciales correspondientes a los parámetros base del modelo dinámico de barras rígidas y actuadores, mostrados en la

Tabla 2.2 y la Tabla 2.3, los valores de los parámetros base obtenidos a partir de los valores conocidos a priori de los parámetros inerciales de la Tabla 5.3 serían los que aparecen en la Tabla 5.5 y la Tabla 5.6.

Tabla 5.5. Parámetros base calculados del modelo dinámico de barras rígidas y actuadores (I).

	Barra					
	1	2	3	4	5	6
I_{xx}	0	-10.16	4.0204	0.0735	0.007639	0
I_{xy}	0	5.00E-05	-0.02083	0	0	0
I_{xz}	0	-1.0286	-7.70E-06	0	0	0
I_{yy}	0	0	0	0	0	0
I_{yz}	0	0.001783	-1.00E-05	0	0	0
I_{zz}	13.995	13.166	4.3242	0.2008	0.13494	0.0141
m_x	0	7.0259	-0.0523	0	0	0
m_y	0	-0.0074	-2.6981	0	-0.02044	0
m_z	0	0	0	0	0	0
m	0	0	0	0	0	0

Tabla 5.6. Parámetros base calculados del modelo dinámico de barras rígidas y actuadores (II).

	Barra					
	1	2	3	4	5	6
I_{xx_r}	0	0	0	0	0	0
I_{xy_r}	0	0	0	0	0	0
I_{xz_r}	0	0	0	0	0	0
I_{yy_r}	0	0	0	0	0	0
I_{yz_r}	0	0	0	0	0	0
I_{zz_r}	0	0	0.0002	2.00E-05	2.00E-05	2.00E-05

mx_r	0	0	0	0	0	0
my_r	0	0	0	0	0	0
mz_r	0	0	0	0	0	0
m_r	0	0	0	0	0	0

5.1.3. Modelo de Fricción

En la Tabla 5.7 y la Tabla 5.8, se muestran los valores conocidos a priori aplicados respectivamente para los modelos de fricción F4 y F6 utilizados en los ejemplos de simulación de los apartados 0 y 5.3.4.

Tabla 5.7. Valores conocidos a priori de los coeficientes del model de fricción F4 considerados en los experimentos de simulación.

	Barra					
	1	2	3	4	5	6
$f1$	2.0	2.0	2.0	1.0	1.0	1.0
$f2$	3.0	3.0	3.0	2.0	2.0	2.0
$f3$	4.0	4.0	4.0	3.0	3.0	3.0
$f4$	5.0	5.0	5.0	4.0	4.0	4.0

Tabla 5.8. Valores conocidos a priori de los coeficientes del model de fricción F6 considerados en los experimentos de simulación.

	Barra					
	1	2	3	4	5	6
$f1$	8.0	10.0	3.0	-0.4	0.3	0.3
$f2$	1.0	1.0	1.0	0.2	0.5	3.0
$f3$	2.0	5.0	2.0	3.0	2.0	3.0
$f4$	5.0	20.0	2.0	-0.1	-0.2	-0.6
$f5$	2.0	-3.0	2.0	0.5	-0.5	-3.0
$f6$	4.0	10.0	1.0	2.0	3.0	7.0

5.2. VALIDACIÓN DEL MODELO

A fin de verificar la validez de los procedimientos de identificación propuestos, se ha realizado un experimento de identificación utilizando datos simulados a partir del modelo dinámico de barras con el modelo de fricción F4, presentados en los apartados 2.2.2 y 2.2.4 respectivamente. Los valores conocidos a priori considerados para los parámetros inerciales son los mostrados en la Tabla 5.1. El experimento de identificación se ha repetido en dos ocasiones: Por un lado, utilizando los datos generados sin errores y, por otro lado, introduciendo un ruido blanco cuyas características estadísticas son comparables a las determinadas a partir de medidas experimentales previas. Las magnitudes cinemáticas, a saber posición, velocidad y aceleración angular, son las correspondientes a la trayectoria optimizada TFL0, presentada en el Apartado 3.3.

5.2.1. Modelo Dinámico de Barras Rígidas sin Errores

Tal como se aprecia comparando la Tabla 5.9 y la Tabla 5.10 con las anteriores Tabla 5.2 y Tabla 5.7, cuando no se introducen errores en los datos simulados de posición angular y par en los nudos, resulta posible identificar los valores exactos de los parámetros base del modelo, excepto errores numéricos despreciables.

La Tabla 5.9 muestra los parámetros base correspondientes al modelo dinámico de barras rígidas con el modelo de fricción F4 identificados mediante el método de identificación directo a partir de datos simulados sin introducción de errores.

Tabla 5.9. Parámetros base identificados a partir de datos simulados sin errores mediante el método de identificación directo.

	Barra					
	1	2	3	4	5	6
<i>Ixx</i>	0	-9.98818	4.002811	0.073932	0.007222	-8.5E-05
<i>Ixy</i>	0	-0.00087	-0.02039	9.23E-06	-1.1E-05	-0.00032
<i>Ixz</i>	0	-1.04591	0.001129	7.34E-05	-0.00013	0.000239
<i>Iyy</i>	0	0	0	0	0	0
<i>Iyz</i>	0	-0.0002	4.12E-06	0.000598	0.000289	-0.00035
<i>Izz</i>	13.02479	10.66697	4.308781	0.201536	0.135678	0.013793
<i>mx</i>	0	7.052682	-0.05209	-3.8E-05	0.000149	-2.8E-05
<i>my</i>	0	-0.00066	-2.72743	-0.00017	-0.02064	-0.00038
<i>mz</i>	0	0	0	0	0	0
<i>m</i>	0	0	0	0	0	0
<i>f1</i>	2.02401	2.050551	2.033872	1.011364	1.007058	1.003651
<i>f2</i>	2.980846	2.930326	2.97703	1.995046	1.996586	1.997661
<i>f3</i>	4.054972	4.037963	4.026439	3.014612	3.005107	3.000868
<i>f4</i>	4.951861	4.941405	4.986388	3.994066	3.9987	3.998675

Los parámetros base identificados análogamente por medio del método de identificación indirecto pueden verse en la Tabla 5.10. A pesar de la similitud de ambos conjuntos de parámetros base identificados, la comparación de los residuos correspondientes a la raíz de la media de cuadrados (RMS) de los errores del test de par calculado para la trayectoria de test TFL1, mostrados en la Tabla 5.11, permite observar una precisión ligeramente mayor en el caso del método de identificación indirecto debido probablemente al mejor condicionamiento numérico de las matrices de observación en los diferentes pasos del proceso de identificación.

5.2.2. Modelo Dinámico de Barras Rígidas con Simulación de Errores de Medida

Los datos simulados de posición y par en los nudos utilizados en el experimento de identificación del Apartado 5.2.1 son ahora modificados añadiendo un ruido blanco. La señal de ruido blanco es calculada para cada articulación y magnitud como una

distribución normal con las desviaciones estándar mostradas en la Tabla 5.12. Los valores mostrados en dicha tabla han sido determinados de acuerdo a los valores medios obtenidos experimentalmente a partir del análisis de las características del ruido presente en medidas previas de estas magnitudes.

Tabla 5.10. Parámetros base identificados a partir de datos simulados sin errores mediante el método de identificación indirecto.

	Barra					
	1	2	3	4	5	6
<i>Ixx</i>	0	-9.9893	4.00622	0.073618	0.008006	0.000134
<i>Ixy</i>	0	0.000371	-0.02156	-0.00021	-1.4E-05	0.000157
<i>Ixz</i>	0	-1.05188	0.000764	0.000367	0.000181	-0.00018
<i>Iyy</i>	0	0	0	0	0	0
<i>Iyz</i>	0	-0.00035	0.000295	-2.3E-05	5.84E-05	7.53E-06
<i>Izz</i>	13.02398	10.66804	4.307999	0.200603	0.134953	0.014336
<i>mx</i>	0	7.051843	-0.05269	8.19E-16	4.25E-17	-7.2E-17
<i>my</i>	0	2.05E-15	-2.7272	1.08E-15	-0.02044	-2.9E-16
<i>mz</i>	0	0	0	0	0	0
<i>m</i>	0	0	0	0	0	0
<i>f1</i>	2	2	2	1	1	1
<i>f2</i>	3	3	3	2	2	2
<i>f3</i>	4	4	4	3	3	3
<i>f4</i>	5	5	5	4	4	4

Tabla 5.11. RMS para los distintos métodos de identificación utilizando datos simulados sin errores de medida aplicando la trayectoria TFL1.

	Art.					
	1	2	3	4	5	6
<i>Directo</i>	0.378867	0.265871	0.270911	0.20193	0.213356	0.116239
<i>Indirecto</i>	0.371752	0.260384	0.267117	0.200059	0.212481	0.11603

Tabla 5.12. Valores de desviación estándar utilizadas en la simulación de errores de medida respectivamente para las medidas de posición angular (rad) y par en los nudos (N·m).

	Barra					
	1	2	3	4	5	6
<i>Posición</i>	0.001	0.0002	0.0003	0.0002	0.0003	0.0007
<i>Par</i>	1.73002	2.9792	1.48354	0.35017	0.66244	0.70632

La Tabla 5.13 muestra los parámetros base correspondientes al modelo dinámico de barras rígidas con el modelo de fricción F4 identificados mediante el método de identificación directo a partir de datos simulados con errores de posición y par en los nudos.

Tabla 5.13. Parámetros base identificados a partir de datos simulados con errores mediante el método directo.

	Barra					
	1	2	3	4	5	6
<i>Ixx</i>	0	-10.0409	3.967256	0.052705	0.009092	-0.00689
<i>Ixy</i>	0	0.012	-0.00652	-0.02017	-0.00623	-0.00658
<i>Ixz</i>	0	-1.04166	-0.01313	-0.01581	-0.00392	-0.00039
<i>Iyy</i>	0	0	0	0	0	0
<i>Iyz</i>	0	0.042154	-0.00433	-0.00208	-0.00715	-0.00399
<i>Izz</i>	13.07384	10.5507	4.322531	0.197605	0.135511	0.017181
<i>mx</i>	0	7.058171	-0.04968	7.86E-06	-0.00344	-0.00054
<i>my</i>	0	-0.0204	-2.74258	-0.00826	-0.0207	0.000594
<i>mz</i>	0	0	0	0	0	0
<i>m</i>	0	0	0	0	0	0
<i>f1</i>	2.087192	1.931503	2.339596	0.989451	1.005925	1.030198
<i>f2</i>	2.941826	3.462772	2.709958	1.989062	2.010535	1.97015
<i>f3</i>	4.008407	3.81794	4.212395	2.940463	3.040999	2.963862
<i>f4</i>	4.960626	5.458999	4.784271	4.032567	3.996155	4.026717

Análogamente, en la Tabla 5.14 se presentan los parámetros base identificados a partir de datos simulados con errores mediante el método de identificación indirecto. En este caso, puede verse que las desviaciones en los valores numéricos de los parámetros base identificados con respecto a los valores conocidos a priori mostrados en la Tabla 5.2 y la Tabla 5.7 son apreciablemente mayores. La Tabla 5.15 muestra los residuos RMS determinados a partir del test de par calculado para cada uno de los métodos de identificación considerados.

Tabla 5.14. Parámetros base identificados a partir de datos simulados con errores con el método indirecto.

	Barra					
	1	2	3	4	5	6
<i>Ixx</i>	0	-9.95614	3.901857	0.026722	0.003621	0.023763
<i>Ixy</i>	0	0.049507	-0.04553	-0.02042	-0.00431	0.005632
<i>Ixz</i>	0	-0.97025	-0.07171	-0.02353	-0.01733	-0.01119
<i>Iyy</i>	0	0	0	0	0	0
<i>Iyz</i>	0	0.031597	-0.00762	0.001035	-0.00719	0.00359
<i>Izz</i>	13.0494	10.7514	4.296354	0.174954	0.116963	0.00477
<i>mx</i>	0	7.039758	-0.037	-0.0151	0.016054	-0.0053
<i>my</i>	0	0.033301	-2.73908	-0.00042	-0.02812	-0.01145
<i>mz</i>	0	0	0	0	0	0
<i>m</i>	0	0	0	0	0	0
<i>f1</i>	2.123851	2.105797	1.9289	0.984747	1.106824	1.023881
<i>f2</i>	2.874392	2.600096	3.241869	2.060482	1.966634	1.952196
<i>f3</i>	4.041261	2.947392	4.05737	2.963816	2.997987	2.981475
<i>f4</i>	5.312142	5.816739	5.171987	3.943034	3.957218	3.923701

Tabla 5.15. RMS para los distintos métodos de identificación utilizando datos simulados con simulación de errores de medida aplicando la trayectoria TFL1.

	Barra					
	1	2	3	4	5	6
<i>Directo</i>	0.598186	0.802464	0.529679	0.22874	0.31301	0.280956
<i>Indirecto</i>	0.653406	0.958877	0.65262	0.257709	0.349627	0.315594

En las siguientes gráficas, se representan los resultados correspondientes al test de par calculado. La Figura 5.3 muestra el par calculado para la trayectoria aplicada en el proceso de identificación, TFL0, utilizando los conjuntos de parámetros base obtenidos mediante los métodos de identificación directo e indirecto. El error o desviación correspondiente del par calculado con respecto al medido aparece en la Figura 5.4.

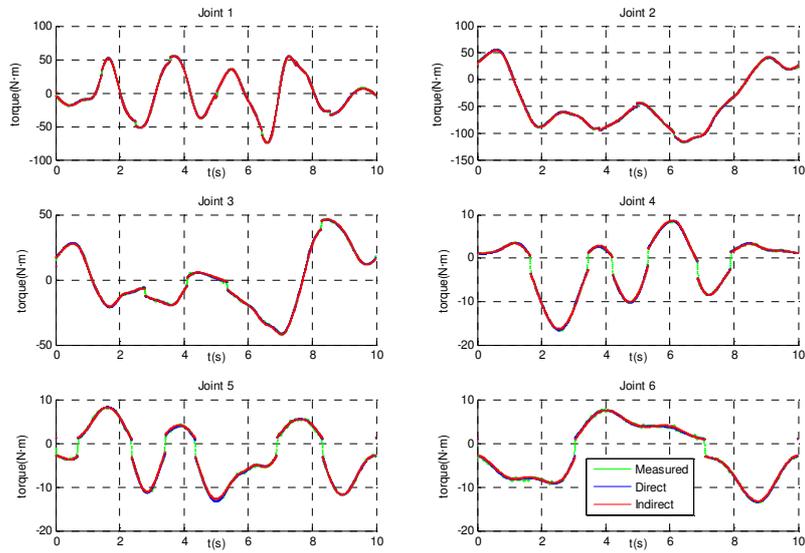


Figura 5.3. Test de par calculado para la trayectoria TFL0 utilizando los parámetros base identificados para el modelo dinámico de barras rígidas a partir de datos simulados con errores de medida.

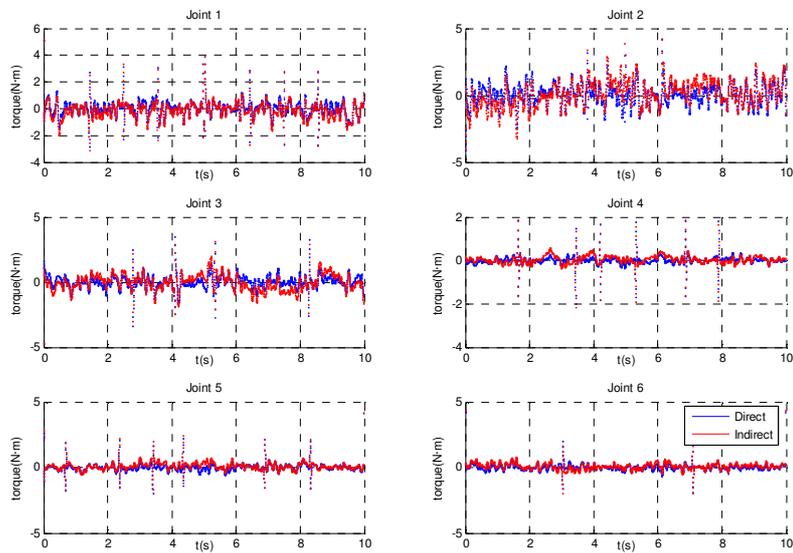


Figura 5.4. Errores del test de par calculado para la trayectoria TFL0 utilizando los parámetros base identificados para el modelo dinámico de barras rígidas a partir de datos simulados con errores.

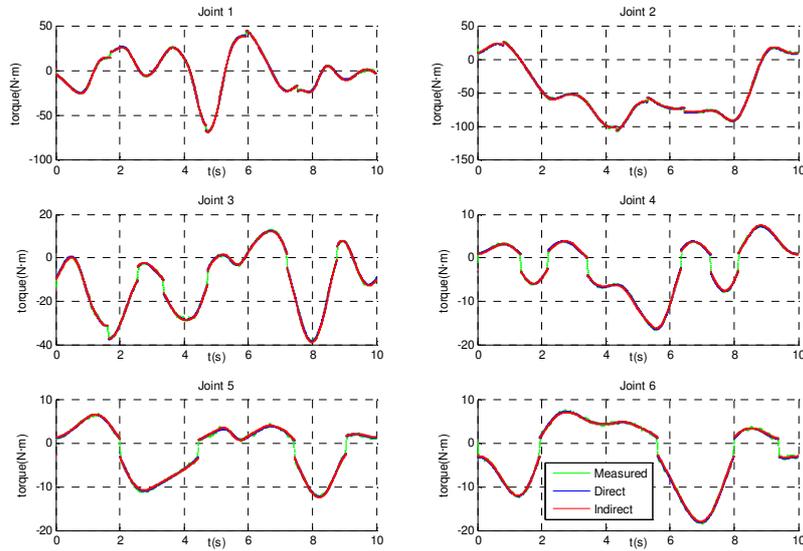


Figura 5.5. Test de par calculado para la trayectoria TFL1 utilizando los parámetros base identificados para el modelo dinámico de barras rígidas a partir de datos simulados con errores de medida.

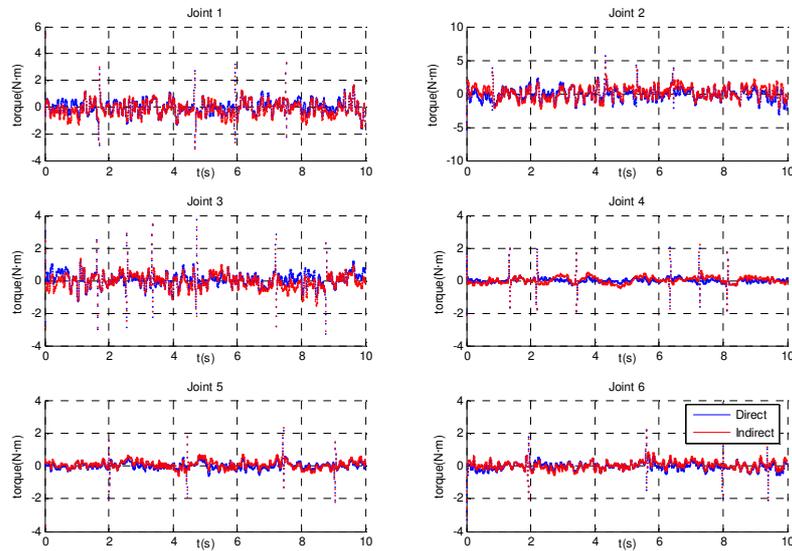


Figura 5.6. Errores del test de par calculado para la trayectoria TFL1 utilizando los parámetros base identificados para el modelo dinámico de barras rígidas a partir de datos simulados con errores.

En la Figura 5.5, se muestra la anterior comparación de pares, esta vez utilizando la trayectoria TFL1 como trayectoria de test, la cual es distinta de la aplicada en el proceso de identificación. Los errores de predicción pueden verse en la Figura 5.6, mientras que los valores medios de los residuos RMS correspondientes se indican en la Tabla 5.16.

Tabla 5.16. Valores medios de los residuos RMS para la trayectoria test TFL1 utilizando los parámetros base identificados para el modelo dinámico de barras rígidas a partir de datos simulados con errores de medida.

	Barra					
	1	2	3	4	5	6
<i>Directo</i>	0.59654	0.97169	0.59566	0.26921	0.25272	0.29081
<i>Indirecto</i>	0.65186	1.0766	0.61193	0.30948	0.29852	0.30804

Aunque no se observan diferencias importantes, el método directo ofrece en este caso una precisión ligeramente superior a pesar del peor condicionamiento numérico, como puede verse en la Tabla 5.16, lo cual se justifica por el efecto de la propagación de errores en el método indirecto. No obstante, ambos métodos permiten una predicción considerablemente precisa de los pares en los nudos incluso para trayectorias distintas a las empleadas en el experimento de identificación.

5.3. RESULTADOS DE LA IDENTIFICACIÓN

En el anterior Apartado 5.2, se ha establecido la validez de los algoritmos de identificación propuestos mediante la aplicación de los respectivos métodos utilizando datos de posición angular y pares en los nudos previamente simulados mediante un modelo dinámico del robot conocido a priori. Ello permite constatar que los parámetros base del modelo dinámico pueden ser identificados de forma precisa y que es asimismo posible predecir con precisión los pares en los nudos incluso para trayectorias diferentes a la empleada en el experimento de identificación.

En esta sección, el proceso de identificación se lleva a cabo a partir de datos de posición angular y pares en los nudos medidos experimentalmente de un robot manipulador PUMA 560. Las medidas de posición angular son obtenidas mediante encoders incrementales, cuyas resoluciones se muestran en la Tabla A.3, mientras que los pares en los nudos son estimados a partir de las acciones de control generadas por el algoritmo de control. La relación entre dichas acciones de control y la intensidad aplicada a los motores, así como entre estas últimas y los pares generados por los actuadores, pueden asumirse linealmente proporcionales y constantes para los motores de corriente continua utilizados como actuadores bajo las restricciones cinemáticas que se dan en la presente aplicación. Estas relaciones, así como las relaciones de transmisión correspondientes a cada articulación, se muestran respectivamente en la Tabla A.5 y la Tabla A.4 del ANEXO A.

Como se describe en el Apartado 3.2, la posición angular puede ser ajustada, por ejemplo mediante LSM, por medio de una función analítica del mismo tipo que la utilizada en la parametrización de la trayectoria de identificación, en este caso una serie finita de Fourier. Esto permite, como ventaja del uso de trayectorias parametrizadas, el cálculo de las velocidades y aceleraciones angulares en los nudos mediante la derivación analítica de la función correspondiente a la posición angular, evitando de este modo los inconvenientes asociados a la diferenciación numérica de datos medidos y la amplificación de ruido de alta frecuencia que ésta implica.

En los experimentos de identificación, cuyos resultados se muestran seguidamente, se miden 10 períodos de la trayectoria a fin de promediar temporalmente los datos medidos. Las medidas de par en los nudos son filtradas mediante un filtro paso bajo digital Butterworth de segundo orden con una frecuencia de corte de 10 Hz. La frecuencia de muestreo es de 200 muestras/s, con lo cual se miden un total de 2000 muestras para un período de la trayectoria de 10 s de duración.

5.3.1. Modelado de la Fricción

Con el fin de verificar la importancia y orden de magnitud de la influencia de los fenómenos de fricción en el par en los nudos, se lleva a cabo un primer experimento de identificación para el modelo dinámico de barras rígidas sin incluir ningún modelo de fricción.

Para la realización del experimento, se ha utilizado la trayectoria TFL0. Un análisis estadístico de los datos medidos revela los valores de desviación estándar de los errores de medida correspondientes a cada articulación que se muestran en la Tabla 5.17 para la posición angular y el par en los nudos, respectivamente.

Tabla 5.17. Desviación estándar de los errores de medida para posición angular (rad) y par en los nudos (N·m) determinados a partir de la trayectoria TFL0.

	Barra					
	1	2	3	4	5	6
<i>Posición</i>	0.00148	0.00023	0.00032	0.00016	0.00028	0.00043
<i>Par</i>	0.22359	0.15139	0.18114	0.09151	0.18921	0.14313

Tras aplicar el método de identificación directo, se obtuvieron los valores numéricos de los parámetros base mostrados en la Tabla 5.18. El número de condición de la matriz de observación fue 18.01097.

El test de par calculado proporciona los resultados que se indican a continuación. En la Figura 5.7, se compara el par medido con el par calculado mediante el modelo dinámico de barras rígidas sin modelado de la fricción. La Figura 5.8 muestra la desviación entre los pares comparados, mientras que en la Tabla 5.19 se indican los valores medios de los residuos RMS correspondientes a los errores de predicción de la Figura 5.8. Como puede observarse, aparecen grandes errores en los pares calculados, lo

cual se debe claramente a la no consideración en el modelo de los fenómenos de fricción, especialmente preponderantes en el caso de las tres últimas articulaciones del robot.

Tabla 5.18. Valores de los parámetros base identificados para el modelo dinámico de barras rígidas.

	Barra					
	1	2	3	4	5	6
<i>Ixx</i>	0	-1.40229	1.683768	0.103457	-0.21552	0.181172
<i>Ixy</i>	0	0.517376	0.093922	0.386771	-0.00309	-0.01876
<i>Ixz</i>	0	-2.72583	0.388163	0.46765	0.117179	0.000769
<i>Iyy</i>	0	0	0	0	0	0
<i>Iyz</i>	0	0.292523	0.4123	0.405774	0.269523	0.00783
<i>Izz</i>	1.432612	0.177824	-1.0775	0.626901	0.132447	0.419076
<i>mx</i>	0	3.7856	-0.21127	0.209903	-0.2264	-0.17204
<i>my</i>	0	-0.26123	-0.52772	0.137596	0.198137	0.062706
<i>mz</i>	0	0	0	0	0	0
<i>m</i>	0	0	0	0	0	0

Tabla 5.19. RMS para la trayectoria de identificación TFL0 utilizando el modelo dinámico de barras rígidas sin modelado de la fricción.

	Barra					
	1	2	3	4	5	6
<i>Modelo</i>	14.77004	6.268073	6.348004	5.418436	3.068634	4.246712

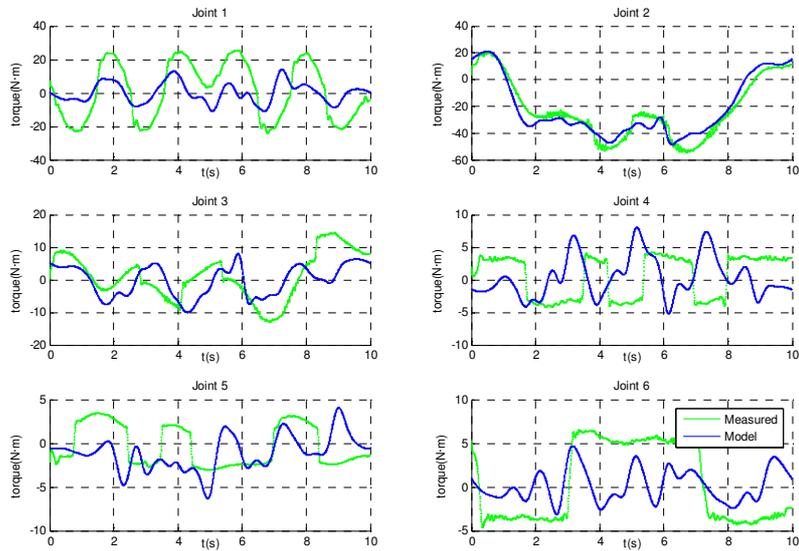


Figura 5.7. Test de par calculado con la trayectoria TFL0 para el modelo dinámico de barras rígidas sin modelado de la fricción.

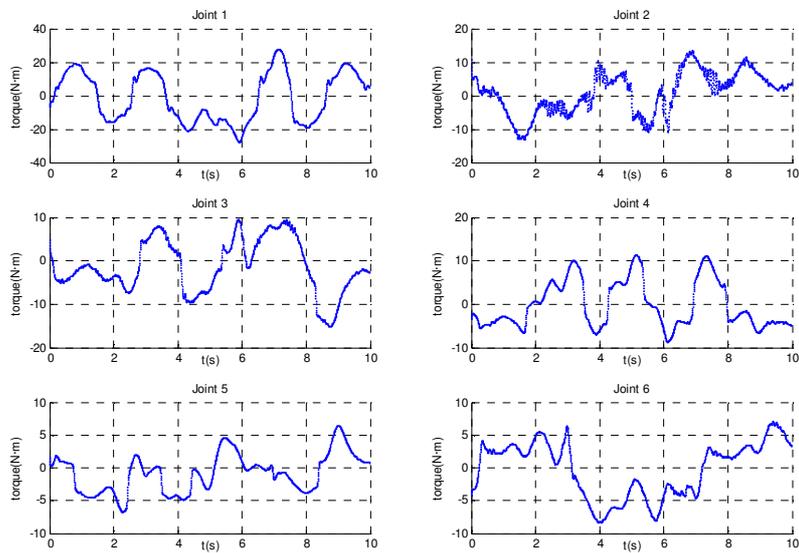


Figura 5.8. Errores del test de par calculado con la trayectoria TFL0 para el modelo dinámico de barras rígidas sin modelado de la fricción.

A continuación, el anterior proceso de identificación es repetido utilizando el modelo dinámico de barras rígidas junto con los cuatro modelos lineales de fricción considerados en este trabajo a fin de comparar la precisión alcanzada por cada uno de ellos. Tal como se explica en el apartado 2.2.4, se trata de un modelo de fricción clásico con términos de fricción seca y viscosa (F2), un modelo que incluye un tercer término proporcional a la raíz cuadrada de la velocidad angular (F3), ambos considerados como simétricos, y los respectivos modelos asimétricos correspondientes (F4 y F6).

En Tabla 5.20,

Tabla 5.21, Tabla 5.22 y Tabla 5.23, se muestran los conjuntos de parámetros base identificados por medio del método de identificación directo para los distintos modelos de fricción. Los números de condición de las matrices de observación obtenidas para cada uno de los modelos fueron respectivamente 107.8875, 947.8858, 156.3449 y 1367.541.

Tabla 5.20. Parámetros base identificados para el modelo dinámico de barras rígidas con el modelo de fricción F2.

	Barra					
	1	2	3	4	5	6
<i>Ixx</i>	0	-0.23661	-0.05186	-0.02519	0.006421	0.082337
<i>Ixy</i>	0	0.038947	0.15768	0.019074	0.005452	-0.00198
<i>Ixz</i>	0	-0.26506	-0.26231	-0.00337	-0.021	-0.03122
<i>Iyy</i>	0	0	0	0	0	0
<i>Iyz</i>	0	0.246268	-0.25767	0.045639	-0.03235	0.032045
<i>Izz</i>	1.100714	0.521654	0.075768	0.022256	0.03383	0.030588
<i>mx</i>	0	3.935693	-0.02187	0.015487	-0.01904	0.026177
<i>my</i>	0	-0.08822	-0.7825	0.081684	-0.03467	0.001696
<i>mz</i>	0	0	0	0	0	0
<i>m</i>	0	0	0	0	0	0
<i>f1</i>	5.832113	4.880866	3.251823	2.955552	1.81748	3.857371
<i>f2</i>	12.18767	3.41065	0.776926	0.295961	0.317772	0.444747

Tabla 5.21. Parámetros base identificados para el modelo dinámico de barras rígidas con el modelo de fricción F3.

	Barra					
	1	2	3	4	5	6
I_{xx}	0	-0.22158	-0.13591	-0.02745	0.005936	0.069883
I_{xy}	0	0.016306	0.15963	0.004591	0.004478	-0.00493
I_{xz}	0	-0.18935	-0.22748	-0.01092	-0.02068	-0.02531
I_{yy}	0	0	0	0	0	0
I_{yz}	0	0.194465	-0.26053	0.044096	-0.0334	0.023593
I_{zz}	1.141845	0.504591	0.112378	0.017097	0.041151	0.029538
m_x	0	3.939951	-0.01537	0.014314	-0.01498	0.026333
m_y	0	-0.10159	-0.79031	0.073247	-0.03705	-0.00787
m_z	0	0	0	0	0	0
m	0	0	0	0	0	0
f_1	-2.84301	-1.63617	1.044138	1.041531	1.373452	4.773743
f_2	5.376589	-4.32989	-0.55294	-0.45397	0.102287	0.802708
f_3	15.88236	13.58175	3.716678	2.828954	0.717294	-1.3527

Tabla 5.22. Parámetros base identificados para el modelo dinámico de barras rígidas con el modelo de fricción F4.

	Barra					
	1	2	3	4	5	6
I_{xx}	0	-0.35785	0.051172	-0.05259	0.033371	0.027137
I_{xy}	0	0.021497	0.16631	0.002676	-0.00522	0.012795
I_{xz}	0	-0.24795	-0.21942	-0.01965	-0.02437	-0.01617
I_{yy}	0	0	0	0	0	0
I_{yz}	0	0.207203	-0.16839	0.004945	-0.02293	0.015996
I_{zz}	1.139638	0.59889	0.1105	0.004035	0.016983	0.030874
m_x	0	3.823667	-0.03261	0.003377	-0.00833	0.005467
m_y	0	-0.14891	-0.80242	0.033391	-0.01672	0.004463
m_z	0	0	0	0	0	0
m	0	0	0	0	0	0
f_1	6.047542	4.996021	3.108466	2.976105	1.583249	5.098158
f_2	12.76186	2.099302	1.251897	0.257472	0.534429	0.232536
f_3	5.2298	4.952096	3.127734	2.779865	1.971336	3.22636
f_4	11.87085	4.269759	0.46629	0.349379	0.238073	0.324467

Tabla 5.23. Parámetros base identificados para el modelo dinámico de barras rígidas con el modelo de fricción F6.

	Barra					
	1	2	3	4	5	6
<i>Ixx</i>	0	-0.33972	-0.0388	-0.05937	0.033857	0.015436
<i>Ixy</i>	0	-0.00329	0.168053	-0.01297	-0.00914	0.006803
<i>Ixz</i>	0	-0.15064	-0.18864	-0.02814	-0.02364	-0.00603
<i>Iyy</i>	0	0	0	0	0	0
<i>Iyz</i>	0	0.149692	-0.17533	0.004487	-0.02674	0.009171
<i>Izz</i>	1.179431	0.59309	0.151889	-0.00643	0.02174	0.02962
<i>mx</i>	0	3.847512	-0.02517	0.000474	-0.00242	0.00519
<i>my</i>	0	-0.14729	-0.80918	0.026032	-0.02221	-0.01117
<i>mz</i>	0	0	0	0	0	0
<i>m</i>	0	0	0	0	0	0
<i>f1</i>	-4.32343	-2.9251	0.793421	0.882119	0.970208	4.956449
<i>f2</i>	4.660419	-7.80708	-0.27707	-0.57841	0.280544	0.189626
<i>f3</i>	18.97747	17.12604	4.039081	3.131537	0.890896	0.152612
<i>f4</i>	-3.10472	-2.7525	2.034435	1.694844	0.546999	1.62323
<i>f5</i>	5.290209	-4.59166	-0.23784	-0.07672	-0.52333	-0.48304
<i>f6</i>	15.28663	15.64097	1.930963	1.591185	2.349314	2.459783

A efectos de comprobación, se ha llevado a cabo un test de par calculado con cada uno de los modelos identificados utilizando la trayectoria TFL0, utilizada en el experimento de identificación, como trayectoria de test. La Figura 5.9 y la Figura 5.10 muestran respectivamente una comparación de los pares calculados y las correspondientes desviaciones respecto al par medido. La Tabla 5.24 presenta los residuos RMS correspondientes.

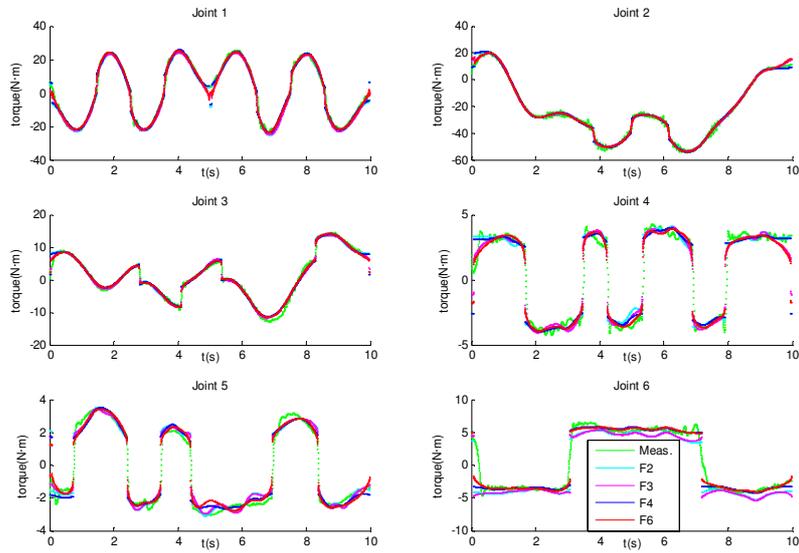


Figura 5.9. Test de par calculado con la trayectoria TFL0 para el modelo dinámico de barras rígidas con cuatro modelos de fricción distintos.

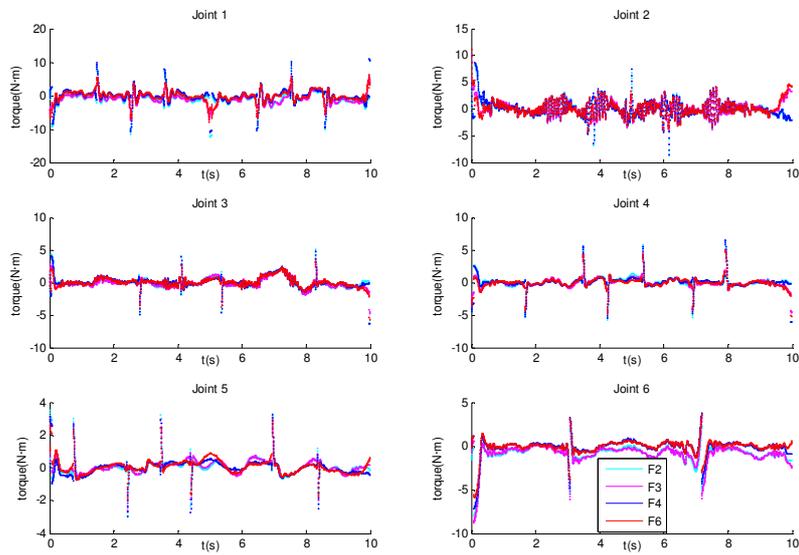


Figura 5.10. Errores del test de par calculado con la trayectoria TFL0 para el modelo dinámico de barras rígidas con cuatro modelos de fricción distintos.

Tabla 5.24. RMS con la trayectoria TFL0 para el modelo dinámico de barras rígidas con cuatro modelos de fricción distintos.

	Barra					
	1	2	3	4	5	6
<i>F2</i>	2.316919	1.534229	0.927956	1.012685	0.512143	1.38415
<i>F3</i>	1.916574	1.384496	0.810545	0.83659	0.482254	1.457176
<i>F4</i>	2.106354	1.548396	0.870564	0.956963	0.483125	1.024671
<i>F6</i>	1.719195	1.440531	0.797678	0.841438	0.452617	0.875346

A fin de comprobar los modelos en un caso más general, el test de par calculado es asimismo llevado a cabo utilizando la trayectoria TFL1. Como en el caso anterior, la Figura 5.11 y la Figura 5.12 muestran respectivamente una comparación de pares calculados y desviaciones de los pares calculados con respecto al par medido, mientras que la Tabla 5.25 contiene los valores medios correspondientes de los residuos RMS de los errores de par calculado.

Tabla 5.25. Valores medios de los residuos RMS con la trayectoria TFL1 para el modelo dinámico de barras rígidas con cuatro modelos de fricción distintos.

	Barra					
	1	2	3	4	5	6
<i>F2</i>	2.271675	1.860699	1.108678	0.990716	0.685753	1.559553
<i>F3</i>	1.985682	1.659125	0.897018	0.85242	0.622128	1.669533
<i>F4</i>	2.112343	1.768904	0.950302	0.938501	0.563129	1.428146
<i>F6</i>	1.82436	1.605818	0.790483	0.845789	0.49025	1.404206

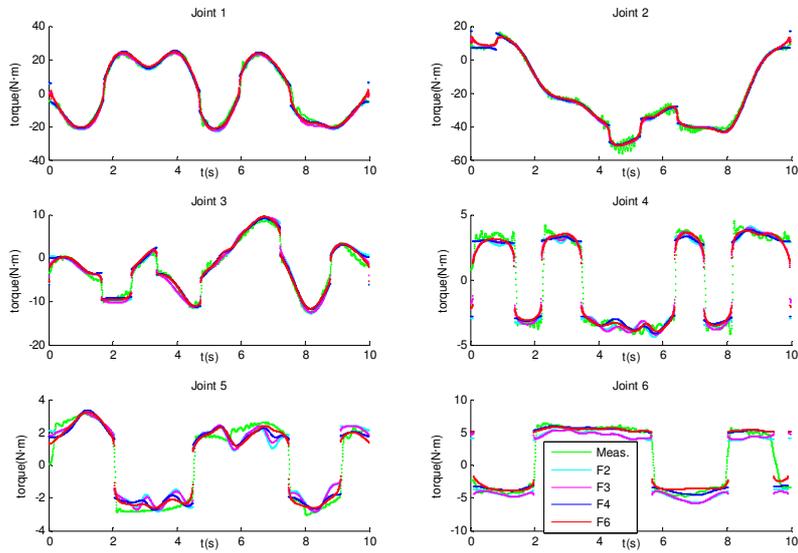


Figura 5.11. Test de par calculado con la trayectoria TFL1 para el modelo dinámico de barras rígidas con cuatro modelos de fricción distintos.

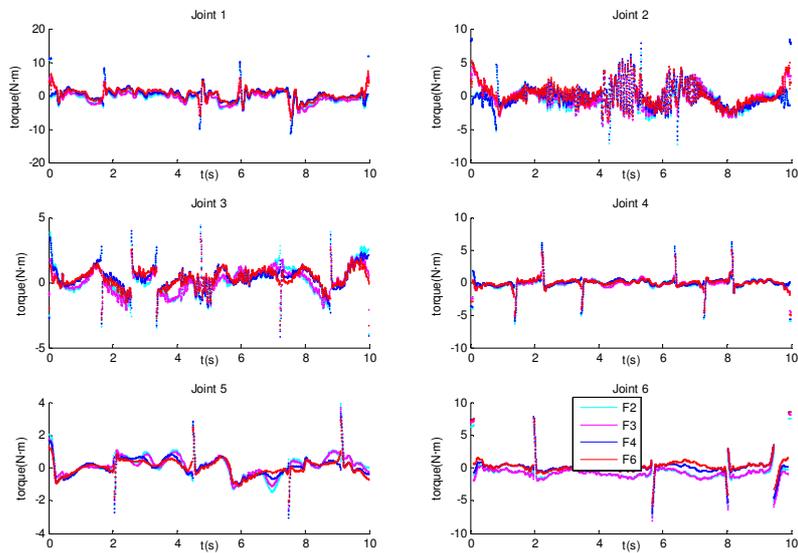


Figura 5.12. Errores del test de par calculado con la trayectoria TFL1 para el modelo dinámico de barras rígidas con cuatro modelos de fricción distintos.

La observación de los resultados sugiere que el uso de los modelos de fricción más complejos F3 y F6 resulta generalmente en un mejor ajuste del modelo dinámico a los datos medidos en comparación a los respectivos modelos F2 y F4. Igualmente, la aplicación de modelos de fricción asimétricos conduce a la reducción del error del par calculado. Aunque, debido a la naturaleza de LSM, la reducción del error podría ser atribuida al mayor número de parámetros en el modelo, debe observarse, como se aprecia en la Tabla 5.25 para los nudos 1 a 4, que el modelo de fricción F3 resulta en un mejor ajuste que el modelo de fricción simétrico F4. Como desventaja de los modelos de fricción F3 y F6, debe tenerse en cuenta el condicionamiento numérico de la matriz de observación asociada, ya que éste es casi un orden de magnitud superior al correspondiente a los respectivos modelos F2 y F4.

A continuación, con objeto de contrastar las diferencias existentes entre los métodos de identificación directo e indirecto propuestos en este trabajo en cuanto a modelado de la fricción, se proporcionan los resultados obtenidos del primer paso del método de identificación indirecto y se comparan con los resultados anteriores. Como se describe en el Apartado 4.2.1, en el método de identificación indirecto, la fricción en los nudos es identificada conjuntamente con los parámetros de gravedad del modelo dinámico del robot a fin de compensar el componente de gravedad del par en los nudos. Con este propósito, se lleva a cabo un conjunto de medidas a velocidad constante para cada articulación y para distintas configuraciones del robot.

En Tabla 5.27, Tabla 5.28, Tabla 5.29 y Tabla 5.30 se muestran los parámetros de gravedad y fricción identificados para cada uno de los modelos de fricción. Los números de condición de las matrices de observación obtenidas para cada modelo y articulación se indican en la Tabla 5.26.

Tabla 5.26. Números de condición de las matrices de observación obtenidas para cada modelo de fricción en el primer paso del método de identificación indirecto.

	Barra					
	1	2	3	4	5	6
<i>F2</i>	2.8867	19.208	19.604	11.426	16.294	11.281
<i>F3</i>	28.939	159.42	161.82	94.711	137.6	94.331
<i>F4</i>	2.8889	96.533	29.586	17.543	25.219	16.157
<i>F6</i>	28.96	231.46	229.73	134.59	195.25	137.56

Tabla 5.27. Parámetros base de gravedad y fricción identificados con el modelo de fricción F2 mediante el método indirecto.

	Barra					
	1	2	3	4	5	6
<i>mx</i>	0	3.92690	-0.03925	-0.01027	-0.04890	0.05580
<i>my</i>	0	-0.10838	-0.82272	-0.08192	-0.00802	0.07146
<i>f1</i>	3.46860	4.93900	2.10210	3.02930	2.20210	4.27920
<i>f2</i>	5.45800	1.64930	1.39950	0.10035	0.42048	0.11466

Tabla 5.28. Parámetros base de gravedad y fricción identificados con el modelo de fricción F3 mediante el método indirecto.

	Barra					
	1	2	3	4	5	6
<i>mx</i>	0	3.92690	-0.03925	-0.01028	-0.04875	0.05564
<i>my</i>	0	-0.10839	-0.82271	-0.08193	-0.00802	0.07147
<i>f1</i>	3.08820	4.74640	1.73060	3.16840	2.06920	5.51650
<i>f2</i>	5.16650	1.50050	1.11220	0.20773	0.31939	1.06560
<i>f3</i>	0.71305	0.36254	0.69936	-0.26171	0.24813	-2.32340

Tabla 5.29. Parámetros base de gravedad y fricción identificados con el modelo de fricción F4 mediante el método indirecto.

	Barra					
	1	2	3	4	5	6
<i>mx</i>	0	3.79590	-0.03752	0.00225	0.00467	-0.00886
<i>my</i>	0	-0.23932	-0.87385	-0.01236	-0.00066	0.00633
<i>f1</i>	3.50090	3.16540	2.05570	2.98530	2.11440	5.08010
<i>f2</i>	5.77580	1.88430	1.91750	0.10782	0.41737	0.19337
<i>f3</i>	3.43530	6.71270	2.14920	3.07330	2.28970	3.47320
<i>f4</i>	5.14210	1.41430	0.88037	0.09297	0.42350	0.04326

Tabla 5.30. Parámetros base de gravedad y fricción identificados con el modelo de fricción F6 mediante el método indirecto.

	Barra					
	1	2	3	4	5	6
m_x	0	3.79590	-0.03751	0.00223	0.00459	-0.00878
m_y	0	-0.23931	-0.87382	-0.01260	-0.00067	0.00657
f_1	2.88490	2.54990	1.56970	3.12660	2.07020	6.13350
f_2	5.30330	1.40840	1.54160	0.21688	0.38367	1.01310
f_3	1.15500	1.15900	0.91486	-0.26572	0.08265	-1.99060
f_4	3.29740	6.94350	1.89170	3.20960	2.07000	4.66230
f_5	5.03640	1.59300	0.68123	0.19814	0.25660	0.94588
f_6	0.25852	-0.43513	0.48466	-0.25640	0.41005	-2.21910

La Figura 5.13 muestra una comparación de los pares calculados mediante cada uno de los modelos de fricción considerados respecto al par medido. La gráfica corresponde, para cada articulación, a una de las configuraciones del robot para las cuales se llevaron a cabo las medidas. Para cada modelo, se ha representado asimismo el componente de gravedad calculado del par en los nudos a velocidad nula.

Los valores de los residuos RMS calculados para todas las configuraciones de cada articulación se muestran en la Tabla 5.31. Debe tenerse en cuenta, a diferencia de la comparación establecida en la Tabla 5.24 y la Tabla 5.25, que en este caso tan solo se están considerando los coeficientes de fricción y los parámetros de gravedad del modelo dinámico, lo cual permite un mejor juicio de la precisión relativa que puede ser alcanzada con cada uno de los modelos de fricción. No obstante, como se explica más adelante, debe observarse que las condiciones dinámicas presentes en los movimientos a velocidad constante utilizados para llevar a cabo la identificación quedan bastante alejadas de las que corresponden a movimientos generales con efectos relevantes debidos a la inercia.

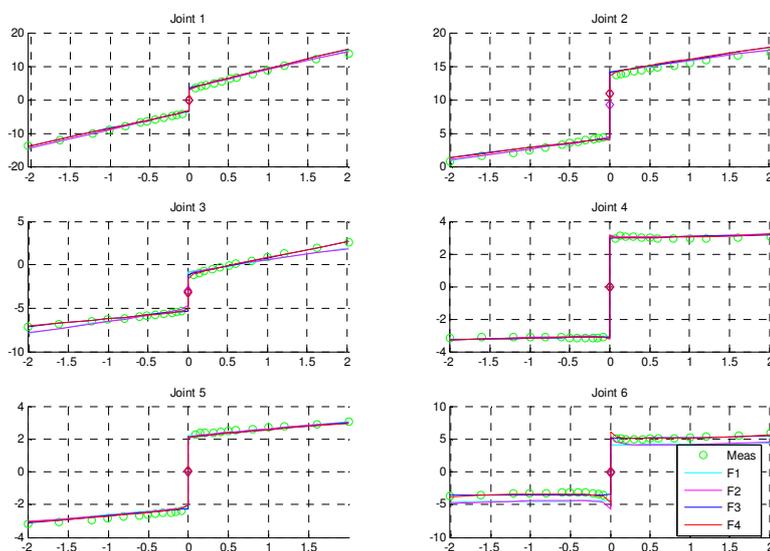


Figura 5.13. Comparación de par medido y calculado para los distintos modelos de fricción correspondiente a determinadas configuraciones del experimento de identificación de fricción del método indirecto.

Tabla 5.31. Valores medios de los residuos RMS para el experimento de identificación de fricción del método indirecto con cuatro modelos de fricción distintos.

	Barra					
	1	2	3	4	5	6
$F2$	0,52305	0,38388	0,39561	0,11484	0,087597	0,82216
$F3$	0,52099	0,38311	0,39292	0,11355	0,086139	0,80812
$F4$	0,40929	0,45539	0,1155	0,11216	0,068484	0,27826
$F6$	0,40564	0,45169	0,10496	0,11084	0,065814	0,24231

Como puede observarse, las conclusiones que pueden ser extraídas de la Tabla 5.31 difieren de las enunciadas anteriormente para el método de identificación directo. En principio, el modelo de fricción no lineal respecto a los coeficientes $F3$ no supone un incremento significativo de la precisión con respecto al modelo $F2$. Excepto para la segunda y cuarta articulaciones, el uso de modelos de fricción asimétricos implica una

reducción considerable de los errores de predicción del par con respecto a los modelos simétricos. El modelo F6 introduce tan sólo ligeras mejoras en comparación al modelo F4. En definitiva, parece por tanto razonable la utilización del modelo asimétrico F4 como compromiso entre la simplicidad tanto del modelo como del proceso de identificación y la precisión de los resultados de la identificación. Sin embargo, también podría considerarse la adopción de un modelo de fricción distinto para cada articulación con el fin de conseguir en cada caso una precisión óptima.

5.3.2. Comparación de los Métodos de Identificación Propuestos

En este apartado, se detallan y discuten los resultados obtenidos a partir de los métodos de identificación directo e indirecto propuestos. Algunos aspectos experimentales relativos tanto al método de identificación directo como al primer paso del método de identificación indirecto han sido ya introducidos en el Apartado 5.3.1, de modo que tan sólo se repetirán aquí aquellos detalles relevantes para la comparación. A fin de llevar a cabo dicha comparación, se ha aplicado el modelo dinámico de barras rígidas con el modelo de fricción F4.

Como se explicó en el apartado 4.1, en el método de identificación directo, la totalidad de los parámetros base del modelo dinámico considerado se obtienen mediante la resolución de un sistema lineal de ecuaciones construido a partir de datos medidos de un experimento con una sola trayectoria. En este caso, se ha utilizado la trayectoria optimizada parametrizada mediante series finitas de Fourier TFL0 para llevar a cabo el experimento de identificación, con la cual se obtiene un número de condición de la matriz de observación que constituye el sistema lineal de 156.3449. Los parámetros base del modelo obtenidos tras la resolución del sistema pueden verse en la Tabla 5.22.

Por otra parte, el método de identificación indirecto se realiza en dos pasos separados. En el primero de ellos, se determinan los parámetros gravitatorios y de fricción para cada barra llevando a cabo, en cada caso, un proceso de identificación

mediante datos medidos a partir de movimiento a velocidad constante en una serie de configuraciones del robot y para un conjunto determinado de valores de velocidad en ambos sentidos de rotación de la articulación. En el segundo paso, se identifica el resto del modelo dinámico del robot a partir de medidas tomadas de una sola trayectoria, aplicando asimismo la trayectoria TFL0, análogamente a como se describe para el método de identificación directo.

En el ANEXO B, se muestra, para cada una de las articulaciones, las configuraciones utilizadas para llevar a cabo las medidas a velocidad constante. Estas configuraciones fueron determinadas empíricamente a fin de conseguir un número de condición reducido de las matrices de observación resultantes. La aplicación de un proceso de optimización con la finalidad de encontrar un conjunto de configuraciones óptimas se consideró innecesario dado el escaso número de parámetros a identificar en cada caso y los bajos números de condición que generalmente se obtienen mediante un diseño intuitivo del experimento.

En cada configuración del robot considerada, la articulación activa se mueve con los valores de velocidad constante mostrados en la Tabla 5.32 en ambos sentidos de rotación y siguiendo un perfil trapezoidal de velocidad, tal como puede verse en la Figura 5.14.

Tabla 5.32. Valores de velocidad (rad/s) considerados para el experimento de identificación de fricción en el método indirecto.

Medida	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Velocidad	2	1.6	1.2	1	0.8	0.6	0.5	0.4	0.3	0.2	0.14	0.08

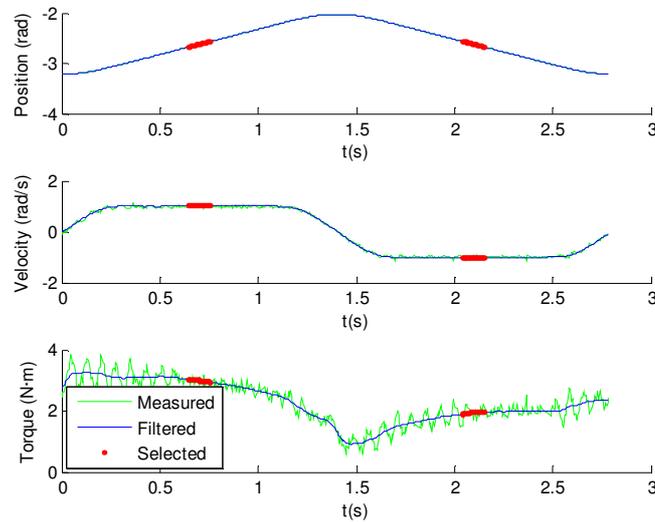


Figura 5.14. Ejemplo de un perfil trapezoidal de velocidad para el experimento de identificación de fricción en el método indirecto.

Los datos medidos en las proximidades de la configuración teórica dentro de un 10% de la amplitud del desplazamiento total de la articulación, indicados en las gráficas de la Figura 5.14 mediante marcas rojas, son promediados a fin de disminuir la influencia de eventuales errores de medida en la determinación de los valores de posición y velocidad angular y par en el nudo para la medida correspondiente. Las velocidades angulares y pares en los nudos así obtenidos permiten construir la curva de fricción característica de la articulación para una configuración dada, tal como se muestra en la Figura 5.15.

En aquellos casos en que el comportamiento de la fricción en las articulaciones pueda asumirse simétrico con respecto al sentido de rotación de la articulación, puede identificarse un modelo de fricción local para cada configuración particular. En un segundo paso, podría determinarse un modelo de fricción global a partir de los modelos de fricción estimados localmente considerando factores globales tales como la dependencia respecto de la configuración o los efectos inerciales. No obstante, en el caso

del robot manipulador PUMA 560, los resultados experimentales muestran una clara asimetría del comportamiento de la fricción para algunos de los nudos. Esto hace preferible un enfoque distinto, en el cual se identifica directamente un modelo de fricción en los nudos global. Con el fin de compensar el efecto de la gravedad sobre las medidas de los pares en los nudos, los parámetros gravitatorios del modelo son identificados simultáneamente junto con los coeficientes del modelo de fricción.

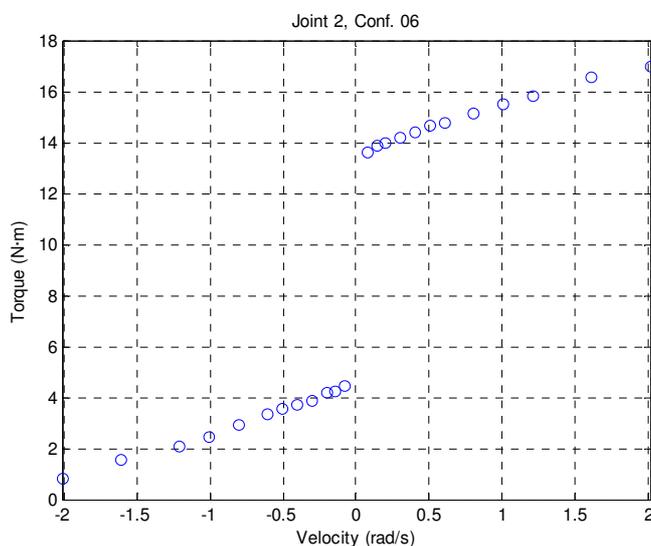


Figura 5.15. Ejemplo de curva de fricción par-velocidad en una articulación.

Así pues, los datos de posición y velocidad angulares y par en los nudos obtenidos a partir de las medidas para todos los valores de velocidad angular en ambos sentidos de rotación y para todas las configuraciones consideradas son utilizados para generar un sistema lineal de ecuaciones, cuya resolución por LSM permite obtener los parámetros base gravitatorios y los parámetros del modelo de fricción en los nudos mostrados en la Tabla 5.29. Los números de condición de las matrices de observación correspondientes a los respectivos sistemas lineales de ecuaciones para cada articulación se encuentran en la Tabla 5.26.

Con el fin de identificar el resto del modelo dinámico del robot, se ha utilizado la trayectoria TFL0, al igual que en el caso del método de identificación directo. Los parámetros gravitatorios y de fricción identificados en el primer paso son empleados para compensar las medidas de par en los nudos obtenidos para dicha trayectoria. La Figura 5.16 muestra una comparación de los pares en los nudos medidos con las contribuciones gravitatoria y de fricción al par en los nudos calculadas mediante las correspondientes partes del modelo identificadas en el primer paso. El par en los nudos debido al efecto de la inercia es el par restante tras compensar dichas contribuciones en el par medido.

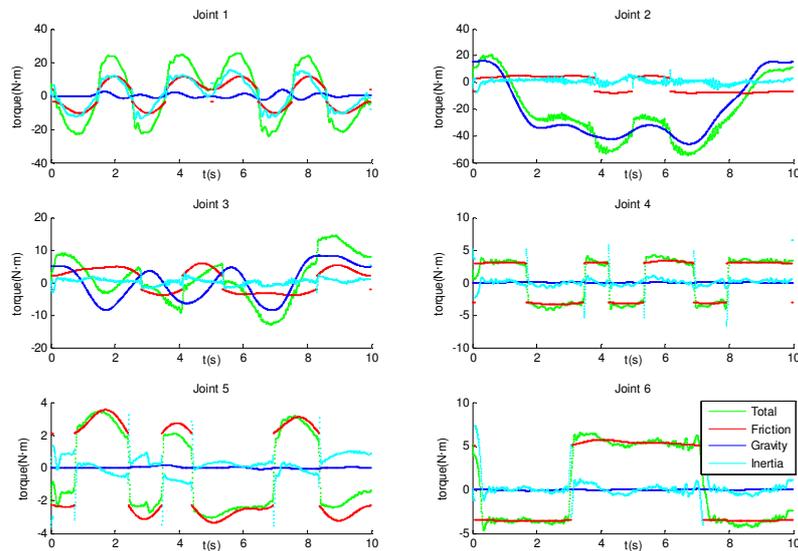


Figura 5.16. Pares medidos y contribuciones debidas a fricción, gravedad e inercia obtenidas para la trayectoria TFL0.

Los parámetros base del modelo dinámico obtenidos en este segundo paso de la identificación, esto es los parámetros base de inercia, pueden verse en la Tabla 5.33. El número de condición de la matriz de observación que constituye el sistema lineal de ecuaciones a partir del cual se determinan dichos parámetros es de 12.61036.

Tabla 5.33. Parámetros base de inercia identificados en el segundo paso del método de identificación indirecto.

	Barra					
	1	2	3	4	5	6
<i>Ixx</i>	0	-0.73238	0.38005	0.057734	-0.10327	0.078296
<i>Ixy</i>	0	0.085947	0.108683	0.200006	0.00844	-0.0055
<i>Ixz</i>	0	-0.86006	0.301183	0.127573	-0.0932	0.010288
<i>Iyy</i>	0	0	0	0	0	0
<i>Iyz</i>	0	0.510905	-0.07133	0.207737	0.14413	-0.00391
<i>Izz</i>	1.571159	0.011705	-0.04949	0.440722	0.185264	0.133328

A continuación, se comparan los resultados obtenidos mediante el método de identificación directo, parámetros base mostrados en la Tabla 5.22, y el método de identificación indirecto, parámetros base de Tabla 5.29 y Tabla 5.33, por medio del test de par calculado. Primeramente, se aplica la trayectoria TFL0, empleada en el experimento de identificación, como trayectoria test. La comparación entre pares medidos y calculados puede verse en la Figura 5.17, mientras que la Figura 5.18 muestra los errores de los pares calculado con respecto a los pares medidos. La Tabla 5.34 contiene los valores medios de los residuos RMS de los errores del test de par calculado mostrados en la Figura 5.18 para cada articulación.

Tabla 5.34. Valores medios de los residuos RMS de los errores del test de par calculado con la trayectoria TFL0 para los métodos de identificación directo e indirecto.

	Barra					
	1	2	3	4	5	6
<i>Directo</i>	2.106354	1.548396	0.870564	0.956963	0.483125	1.024671
<i>Indirecto</i>	7.603702	2.865768	1.526516	1.973643	1.090569	1.143489

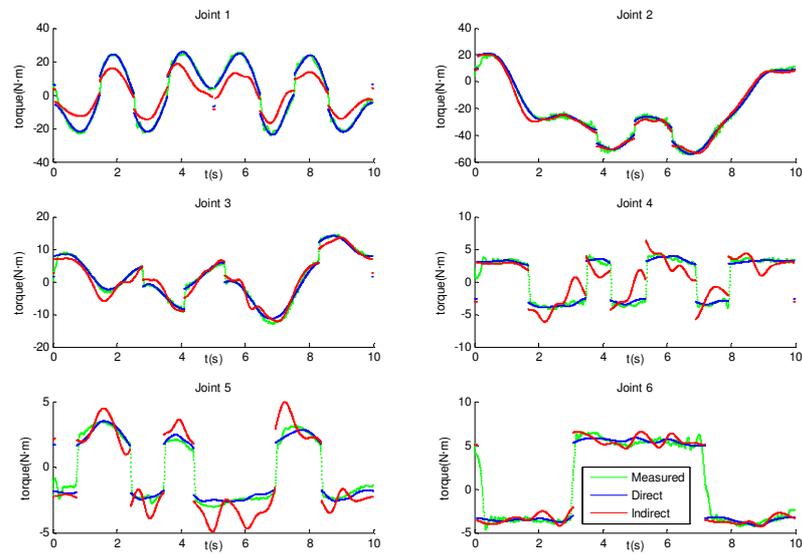


Figura 5.17. Test de par calculado con la trayectoria TFL0 para los métodos de identificación directo e indirecto.

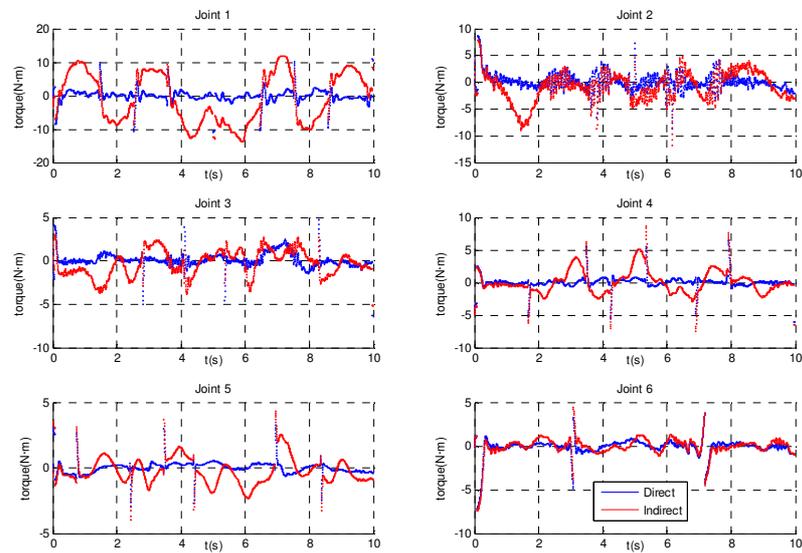


Figura 5.18. Errores del test de par calculado con la trayectoria TFL0 para los métodos de identificación directo e indirecto.

Con el fin de comprobar el comportamiento de los respectivos conjuntos de parámetros base identificados en un caso más general, el test de par calculado se repite utilizando una trayectoria igualmente parametrizada mediante series finitas de Fourier TFL1, aunque distinta de la empleada en los experimentos de identificación. Para evitar la similitud de la trayectoria de test con la trayectoria de identificación, el test de par calculado es posteriormente llevado a cabo mediante dos conjuntos de trayectorias en las que las articulaciones del robot se desplazan a través de su espacio de trabajo siguiendo respectivamente movimientos a velocidad constante y según trayectorias de tipo spline cúbico.

La Figura 5.19 y la Figura 5.20 muestran respectivamente la comparación entre los pares medidos y calculados y los errores de los pares calculados respecto a los medidos. Los residuos RMS correspondientes a los errores de par calculado pueden verse en la Tabla 5.35.

Tabla 5.35. Valores medios de los residuos RMS de los errores del test de par calculado con la trayectoria TFL1 para los métodos de identificación directo e indirecto.

	Barra					
	1	2	3	4	5	6
<i>Directo</i>	2.1333	1.5915	1.0123	1.1178	0.74999	1.2786
<i>Indirecto</i>	8.3391	2.9526	1.3162	1.6724	1.2089	1.3867

Como puede observarse en los anteriores tests de par calculado, el par calculado utilizando los parámetros base identificados por medio del método de identificación directo es más ajustado que el correspondiente al método indirecto, especialmente para la primera articulación.

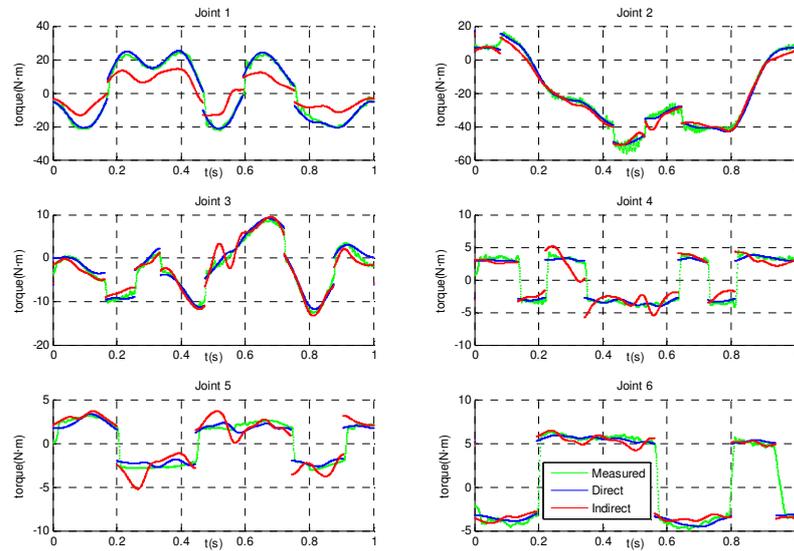


Figura 5.19. Test de par calculado con la trayectoria TFL1 para los métodos de identificación directo e indirecto.

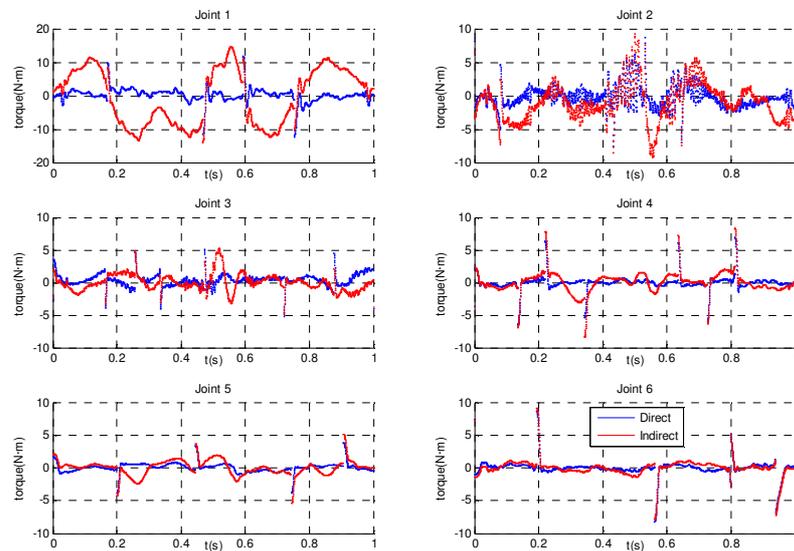


Figura 5.20. Errores del test de par calculado con la trayectoria TFL1 para los métodos de identificación directo e indirecto.

Los siguientes tests han sido llevados a cabo utilizando trayectorias de test a velocidad constante. Tal como se explicaba anteriormente, todas las articulaciones se mueven simultáneamente a velocidad constante, partiendo de uno de sus límites de posición angular hasta llegar al opuesto. En el primer test a velocidad constante (trayectoria TC1), el movimiento se llevó a cabo en 2.36 s, lo cual implica una velocidad constante de 2.0 rad/s para las articulaciones principales. La comparación de los pares medidos y calculados, así como los errores de par calculado, se muestran respectivamente en la Figura 5.21 y la Figura 5.22. Los residuos RMS de los errores de par calculado pueden verse en la Tabla 5.36.

Tabla 5.36. Valores medios de los residuos RMS de los errores del test de par calculado con la trayectoria a velocidad constante TC1 (2.0 rad/s) para los métodos de identificación directo e indirecto.

	Barra					
	1	2	3	4	5	6
<i>Directo</i>	5.6675	2.9962	1.6582	0.66083	0.52398	0.78044
<i>Indirecto</i>	13.432	8.1565	5.3926	3.6881	2.5216	1.0967

En el último test a velocidad constante (trayectoria TC2), el movimiento tuvo lugar en 47.13 s, resultando en una velocidad constante de 0.1 rad/s para las articulaciones principales. Los resultados pueden verse en la Figura 5.23 y la Figura 5.24. La Tabla 5.37 muestra los residuos RMS de los errores de par calculado.

Tabla 5.37. Valores medios de los residuos RMS de los errores del test de par calculado con la trayectoria a velocidad constante TC2 (0.1 rad/s) para los métodos de identificación directo e indirecto.

	Barra					
	1	2	3	4	5	6
<i>Directo</i>	2.8128	1.2546	1.206	0.68444	0.39441	0.83827
<i>Indirecto</i>	0.87431	2.2016	0.59859	0.70368	0.81708	0.81552

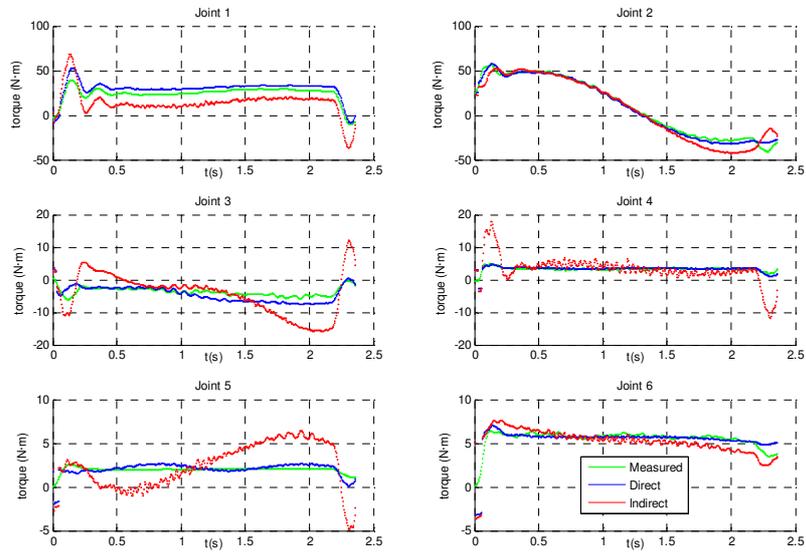


Figura 5.21. Test de par calculado con la trayectoria a velocidad constante TC1 (2.0 rad/s) para los métodos de identificación directo e indirecto.

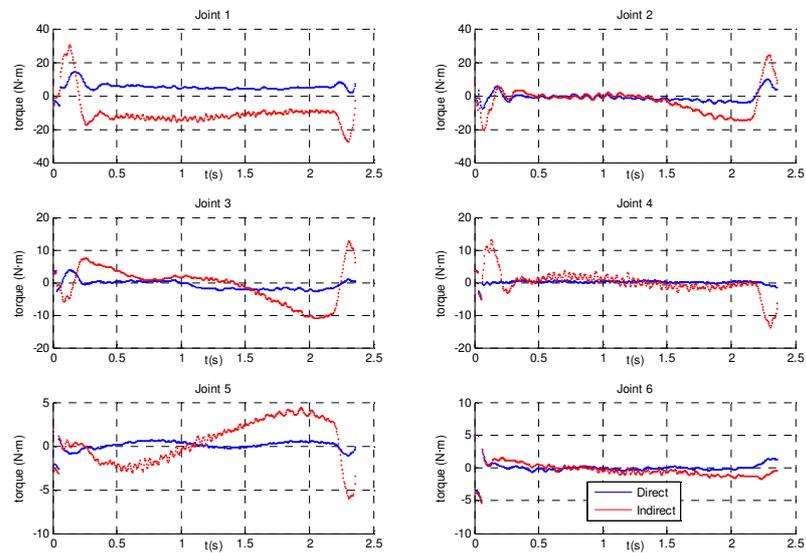


Figura 5.22. Errores del test de par calculado con la trayectoria a velocidad constante TC1 (2.0 rad/s) para los métodos de identificación directo e indirecto.

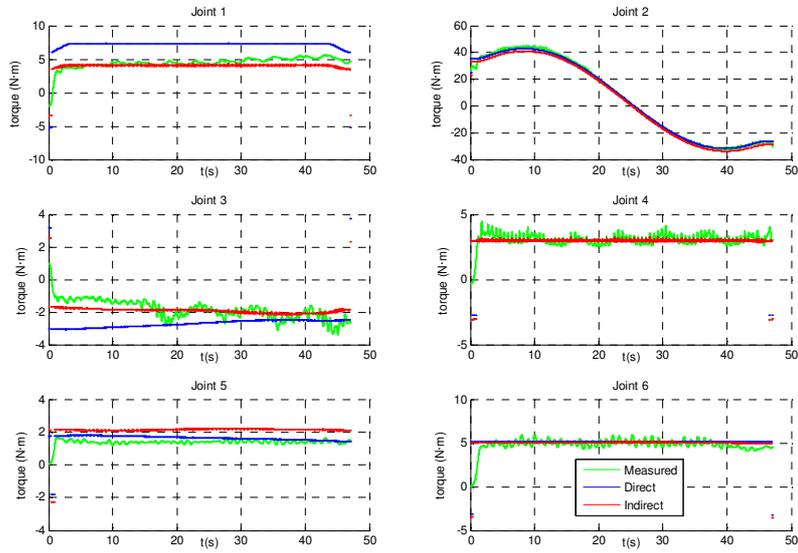


Figura 5.23. Test de par calculado con la trayectoria a velocidad constante TC2 (0.1 rad/s) para los métodos de identificación directo e indirecto.

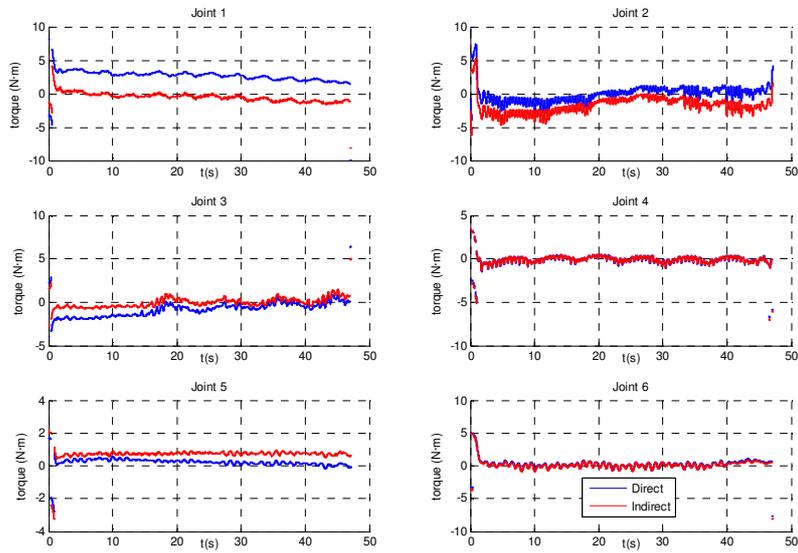


Figura 5.24. Errores del test de par calculado con la trayectoria a velocidad constante TC2 (0.1 rad/s) para los métodos de identificación directo e indirecto.

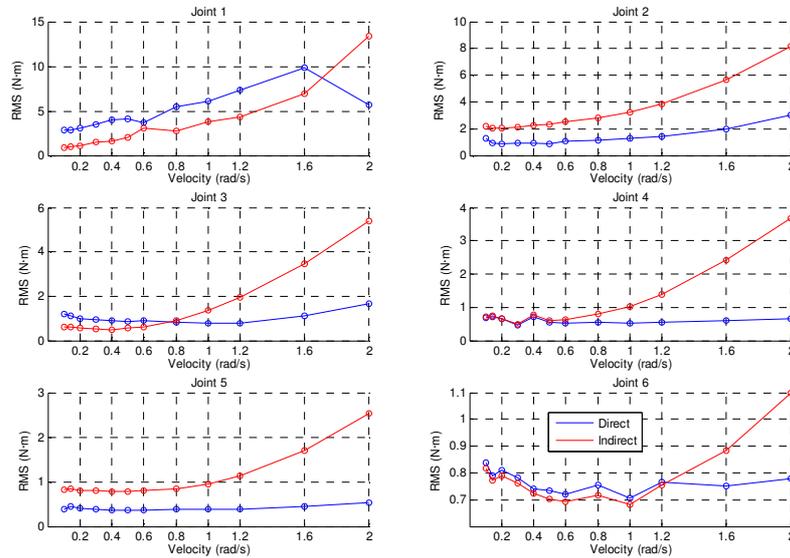


Figura 5.25. Evolución de los valores medios de los residuos RMS de los errores del test de par calculado con la velocidad angular para trayectorias a velocidad constante.

La Figura 5.25 muestra la evolución de los residuos RMS de los errores de los pares calculados mediante los métodos de identificación directo e indirecto con respecto a la velocidad angular de las articulaciones principales para trayectorias a velocidad constante. Puede verse que la precisión de los pares calculados disminuye claramente para el método indirecto a medida que aumenta el valor de la velocidad angular. Para el método directo, esta evolución es en general mucho más suave, a excepción de la primera articulación.

Finalmente, el test de par calculado se lleva a cabo utilizando trayectorias de tipo spline cúbico por considerar éstas representativas, ya que constituyen el tipo de trayectoria por defecto utilizado por la unidad de control estándar del robot manipulador PUMA 560. Como en el caso de las trayectorias a velocidad constante, el test es realizado para un conjunto de valores de velocidad angular. Las posiciones iniciales y finales de las articulaciones son asimismo muy similares a las de dicho experimento.

El primer movimiento (trayectoria TS1) se realiza en 2.835 s, lo que conlleva una velocidad angular media de alrededor de 1.6 rad/s para las articulaciones principales. La comparación de los pares medidos y calculados, así como los errores de par calculado, se muestran en la Figura 5.26 y la Figura 5.27, respectivamente. Los residuos RMS de los errores de par calculado pueden verse en la Tabla 5.38.

Tabla 5.38. Valores medios de los residuos RMS de los errores del test de par calculado con la trayectoria spline cúbica TS1 (1.6 rad/s) para los métodos de identificación directo e indirecto.

	Barra					
	1	2	3	4	5	6
<i>Directo</i>	5.9036	1.6732	1.6794	0.76636	0.39055	0.84671
<i>Indirecto</i>	10.089	4.5522	4.0594	2.1778	2.119	0.9531

El último movimiento (trayectoria TS2) tiene lugar en 45.38 s, dando lugar a una velocidad angular media de aproximadamente 0.1 rad/s para las articulaciones principales. Los resultados pueden verse en la Figura 5.28 y la Figura 5.29. La Tabla 5.39 muestra los correspondientes residuos RMS de los errores de par calculado.

Tabla 5.39. Valores medios de los residuos RMS de los errores del test de par calculado con la trayectoria spline cúbica TS2 (0.1 rad/s) para los métodos de identificación directo e indirecto.

	Barra					
	1	2	3	4	5	6
<i>Directo</i>	3.1455	0.91259	1.0934	0.67207	0.42606	1.0023
<i>Indirecto</i>	0.93231	2.178	0.56989	0.68284	0.85507	1.0037

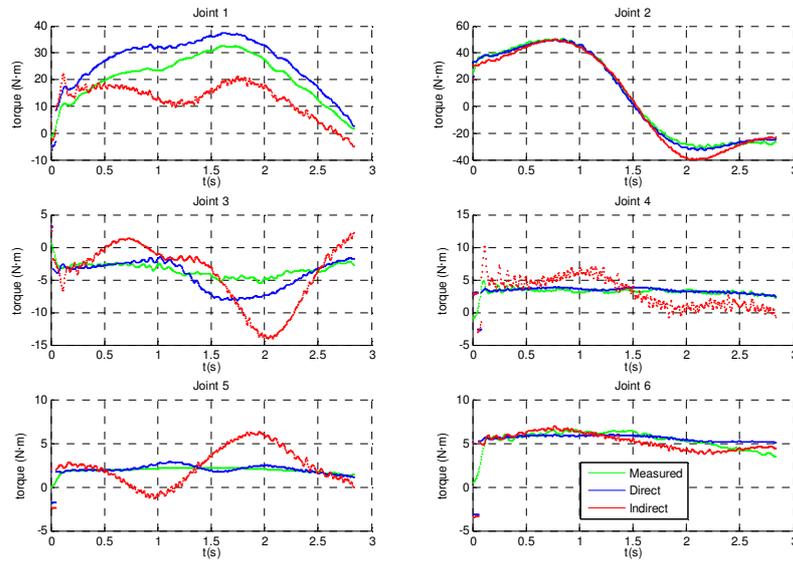


Figura 5.26. Test de par calculado con la trayectoria spline cúbica TS1 (1.6 rad/s) para los métodos de identificación directo e indirecto.

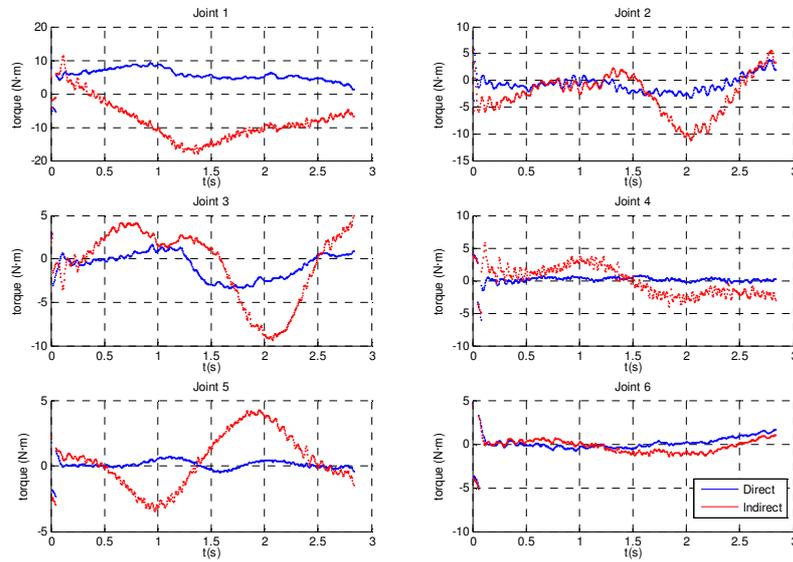


Figura 5.27. Errores del test de par calculado con la trayectoria spline cúbica TS1 (1.6 rad/s) para los métodos de identificación directo e indirecto.

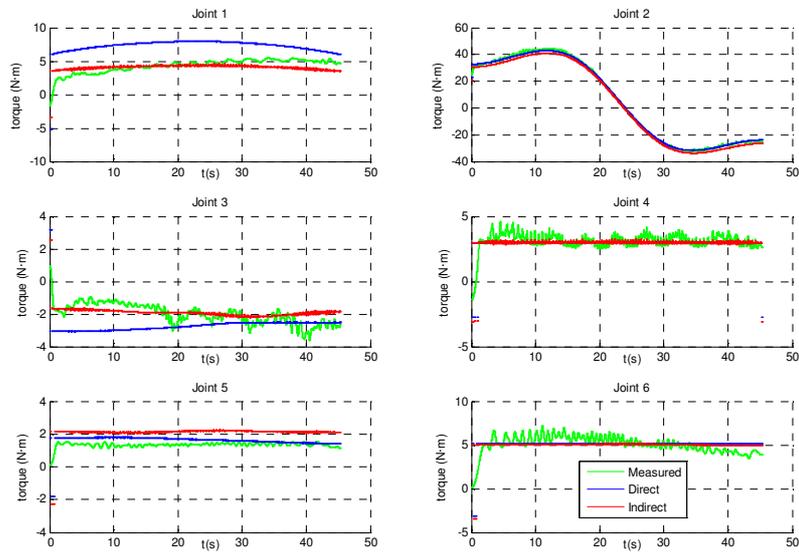


Figura 5.28. Test de par calculado con la trayectoria spline cúbica TS2 (0.1 rad/s) para los métodos de identificación directo e indirecto.

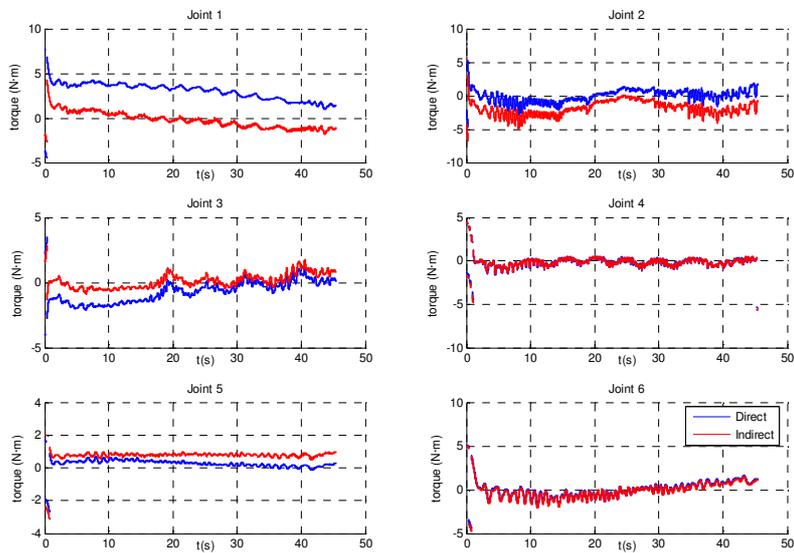


Figura 5.29. Errores del test de par calculado con la trayectoria spline cúbica TS2 (0.1 rad/s) para los métodos de identificación directo e indirecto.

La evolución de los residuos RMS de los errores de los pares calculados mediante los métodos de identificación directo e indirecto con respecto a la velocidad angular de las articulaciones principales para trayectoria de test del tipo spline cúbico se muestra en la Figura 5.30. Al igual que en el caso de las trayectorias a velocidad constante, puede observarse que los errores de par calculado aumentan generalmente con la velocidad angular mucho más rápidamente para el método indirecto.

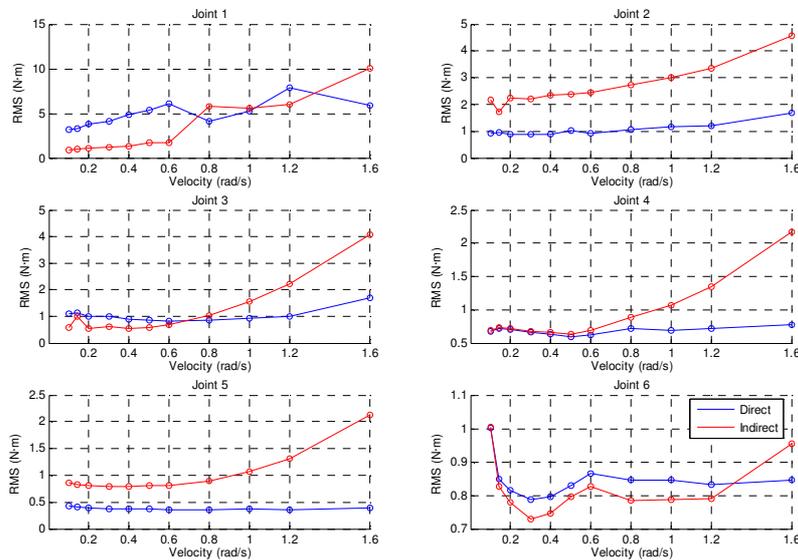


Figura 5.30. Evolución de los valores medios de los residuos RMS de los errores del test de par calculado con la velocidad angular para trayectorias spline cúbicas.

Una comparación de los resultados obtenidos con las trayectorias de test parametrizadas mediante series finitas de Fourier, a velocidad constante y de tipo spline cúbico permite observar la aparición de efectos similares para valores elevados de la velocidad angular, resultando en un empeoramiento progresivo de la precisión del par calculado mediante los parámetros identificados con el método de indirecto con respecto al directo. Para valores reducidos de velocidad, en cambio, la precisión del par calculado mediante el método indirecto se ve claramente mejorada, llegando a ser para algunas

articulaciones incluso mayor que la correspondiente al método directo. Este efecto resulta especialmente notable en el caso de la primera articulación.

Una explicación a este comportamiento puede encontrarse en el tipo de movimientos involucrados en los experimentos de identificación de fricción en cada uno de los métodos de identificación. En el método directo, la fricción es identificada, simultáneamente con el resto del modelo dinámico, utilizando datos medidos a partir de una trayectoria parametrizada mediante series finitas de Fourier, para las cuales la velocidad y la aceleración varían constantemente en todo el rango definido por los límites cinemáticos del robot. Esto implica la aparición de contribuciones considerables al par en los nudos debidas al efecto de la inercia de las partes móviles del robot. Por otra parte, en el método de identificación indirecto, la fricción es identificada utilizando movimientos a velocidad constante donde, además, solamente una articulación se encuentra cada vez en movimiento, de modo que puede asumirse razonablemente la ausencia de contribuciones debidas a efectos de la inercia en el par en los nudos.

Debido a la sustancialmente distinta naturaleza de los movimientos aplicados en cada uno de los métodos de identificación, parece razonable suponer que el par calculado a partir de un determinado conjunto de parámetros base identificado resultará más preciso para aquellos tipos de trayectorias que proporcionen condiciones dinámicas similares a las presentes en los movimientos utilizados en el experimento de identificación utilizado para obtener dicho conjunto de parámetros. Esto se ve confirmado por los resultados obtenidos a partir de las trayectorias a velocidad constante con valores reducidos de la velocidad angular, en los cuales los efectos de la inercia son tan solo ligeramente excitados, aproximándose así al comportamiento dinámico que se manifiesta en los movimientos aplicados para la identificación de la fricción en el método indirecto.

El pronunciado comportamiento anómalo observado en el caso de la primera articulación encuentra su explicación en la diferente estructura del mecanismo de transmisión para esta articulación, en particular debido a la presencia de un engranaje cónico (Popovic y Goldenberg 1998). La propia posición angular de la articulación, así

como las fuerzas externas actuantes sobre el mecanismo de transmisión pueden ejercer una notable influencia sobre sus características de fricción. Asimismo, las medidas del par de fricción en los experimentos descritos a continuación sugieren que también el estado de conservación del mecanismo podría ser responsable de los fenómenos no modelados de fricción que tienen lugar en dicha articulación.

Una consecuencia de este comportamiento no modelado de las características de fricción y, por tanto, el desajuste entre el par calculado a partir del método indirecto y el par medido para la primera articulación puede observarse comparando la Figura 5.16 y la Figura 5.17. Como puede verse, el par de fricción calculado en la Figura 5.16 para las tres últimas articulaciones, para las cuales los efectos inerciales y de gravedad tienen una importancia menor, se encuentra mucho más próximo al par medido que el par total calculado mediante el método indirecto mostrado en la Figura 5.17, el cual se obtiene incluyendo los parámetros base inerciales identificados en el segundo paso del método de identificación indirecto. Una explicación este efecto podría ser el hecho de que el conjunto de parámetros base inerciales del modelo dinámico está siendo modificado a fin de conseguir un ajuste óptimo al par incorrectamente compensado de la primera articulación.

De hecho, el comportamiento anteriormente descrito desaparece cuando se incluye un modelo de fricción en el segundo paso del método de identificación indirecto, tal como se muestra en el siguiente ejemplo. Aunque este procedimiento carece obviamente de interés práctico, la identificación de los coeficientes del modelo de fricción en el segundo paso permite una estimación de la magnitud del par de fricción que no fue identificado en el primer paso, ya que éstos constituyen en realidad una corrección de los coeficientes de fricción obtenidos en el primer paso de la identificación. La Tabla 5.40 muestra los parámetros base de inercia y fricción identificados en el segundo paso de la forma descrita. Como puede verse, los valores identificados de los parámetros de fricción son especialmente elevados para la primera articulación.

Tabla 5.40. Parámetros base inerciales y de fricción identificados incluyendo el modelo de fricción en el segundo paso del método de identificación indirecto.

	Barra					
	1	2	3	4	5	6
I_{xx}	0	-0.36197	-0.03804	-0.04835	0.040773	0.008776
I_{xy}	0	-0.09813	0.18172	-0.02683	-0.02216	0.014644
I_{xz}	0	-0.14782	-0.13	-0.02848	-0.04235	-0.0148
I_{yy}	0	0	0	0	0	0
I_{yz}	0	0.19371	-0.17332	-0.03718	-0.00872	0.007128
I_{zz}	1.212689	0.380839	0.140672	-0.01126	0.022872	0.040197
f_1	2.484219	1.562326	0.92845	0.005012	-0.4808	-0.08009
f_2	7.106958	0.043753	-0.41917	0.131231	0.1953	0.082139
f_3	1.887154	-0.96966	1.125076	-0.26	-0.337	-0.37285
f_4	6.607378	2.263007	-0.66682	0.216501	-0.1464	0.308015

Se ha llevado a cabo una comparación de los resultados del test de par calculado para los parámetros base anteriormente identificados (IFI), así como para los obtenidos mediante los métodos de identificación directo e indirecto propuestos, dando lugar a los valores medios de los residuos RMS de los errores de par calculado que se muestran en la Tabla 5.41.

Tabla 5.41. Residuos RMS de los errores de par calculado con la trayectoria TFL0 para los métodos de identificación directo e indirecto, así como para el método indirecto con inclusión del modelo de fricción en el segundo paso (IFI).

	Barra					
	1	2	3	4	5	6
<i>Directo</i>	2.1064	1.5484	0.87056	0.95696	0.48312	1.0247
<i>Indirecto</i>	7.6037	2.8658	1.5265	1.9736	1.0906	1.1435
<i>IFI</i>	2.1117	1.7053	0.79141	0.95866	0.53614	0.9835

Se ha realizado un estudio más detallado de las características de fricción de la primera articulación a fin de determinar posibles dependencias no consideradas en el modelo de fricción aplicado y que pudieran explicar el comportamiento no modelado anteriormente observado. Para ello, el modelo de fricción asimétrico F4 ha sido identificado en un conjunto de once configuraciones de la primera articulación, elegidas

uniformemente distribuidas en el espacio de trabajo de la misma, considerando distintas condiciones de carga del manipulador.

La Figura 5.32 muestra, para las tres configuraciones del robot manipulador esquematizadas en la Figura 5.31, la evolución de los parámetros del modelo de fricción con respecto a la posición angular de la primera articulación, para la cual ha sido identificado el modelo de fricción. Como puede verse, el parámetro de fricción viscosa f_2 y, hasta cierto punto, f_4 permanecen prácticamente constantes para la mayor parte de la configuraciones, mientras que los parámetros de fricción seca f_1 y f_3 presentan claramente una dependencia de la configuración. Una desalineación o deformación de la superficie de los engranajes del mecanismo de transmisión podría justificar tales efectos. Una notable dependencia respecto de la configuración de la segunda articulación puede asimismo ser observada, la cual parece ser, a grosso modo, proporcional al coseno del ángulo de la segunda articulación, con lo cual podría estar motivada por el par debido a la gravedad transmitido por la segunda articulación a la primera.

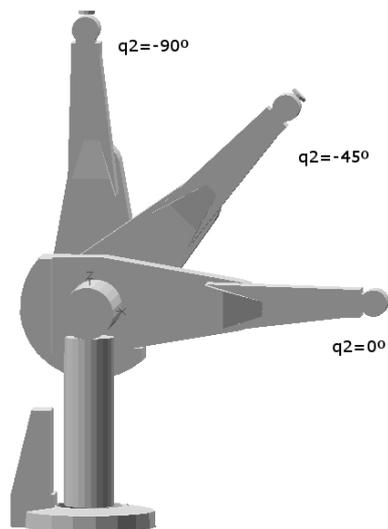


Figura 5.31. Configuraciones del robot utilizadas en el experimento para el estudio de posibles dependencias de la fricción.

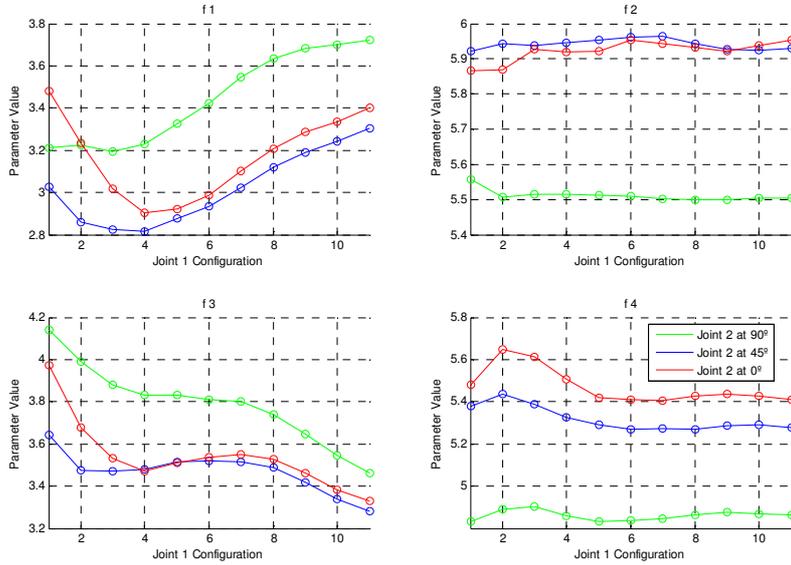


Figura 5.32. Evolución de los parámetros de fricción de la primera articulación con la configuración de la primera y segunda articulaciones.

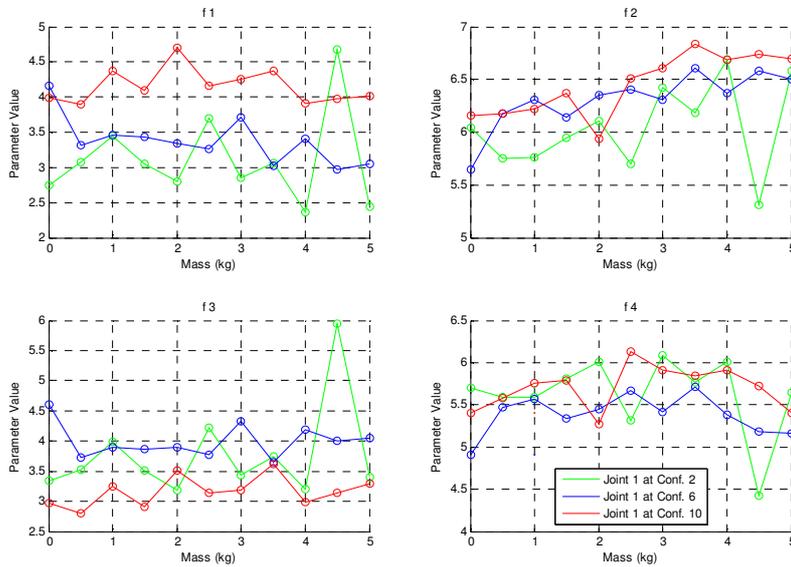


Figura 5.33. Evolución de los parámetros de fricción de la primera articulación con la carga del elemento terminal.

Con el propósito de evaluar la influencia de la carga en los parámetros del modelo de fricción, la identificación ha sido repetida para un conjunto de cargas distintas unidas al elemento terminal del robot manipulador, el cual permanece en la configuración horizontal. La Figura 5.33 muestra la evolución de los parámetros identificados del modelo de fricción con respecto al valor de la carga. Si bien parece observarse una cierta tendencia de los parámetros de fricción viscosa a aumentar con la carga, lo cierto es que la insuficiente precisión y repetibilidad de las medidas obtenidas a partir de esta serie de experimentos excluye la posibilidad de confirmar dicha observación, así como de obtener un modelo matemático de dicha evolución.

Con el fin de comparar la precisión de los métodos de identificación directo e indirecto propuestos sin la influencia de los fenómenos de fricción no modelados que afectan especialmente a la primera articulación, los experimentos de identificación han sido repetidos únicamente con las últimas cinco articulaciones del brazo robot, permaneciendo la primera articulación en reposo. Para la identificación de los parámetros base, se ha aplicado la misma trayectoria TFL0, si bien considerando únicamente las articulaciones en movimiento. Debe observarse que algunos de los parámetros base del modelo dinámico, concretamente $\bar{\Phi}_{B_I}(16:19, 21:24, 26)$, pasan a ser dependientes bajo las nuevas condiciones cinemáticas impuestas en los siguientes experimentos.

El método de identificación directo proporciona, en este caso, los valores de los parámetros base del modelo dinámico mostrados en la Tabla 5.42. El número de condición de la matriz de observación del sistema fue de 140.6068. En cuanto a los nuevos valores obtenidos para los parámetros base inerciales en el segundo paso del método de identificación indirecto bajo las condiciones descritas anteriormente, estos pueden verse en la Tabla 5.43. El número de condición de la matriz de observación correspondiente es, en este caso, de 11.09945.

Tabla 5.42. Parámetros base identificados mediante el método directo para las cinco últimas articulaciones.

	Barra					
	1	2	3	4	5	6
<i>Ixx</i>	0	0	0	0.014313	0.041112	0.00815
<i>Ixy</i>	0	0	0	-0.01656	0.00103	0.007804
<i>Ixz</i>	0	0	0	-0.02706	0.005872	0.001027
<i>Iyy</i>	0	0	0	0	0	0
<i>Iyz</i>	0	0	0	0.017214	-0.02605	0.000862
<i>Izz</i>	0	0.727403	0.120222	0.038999	0.051837	0.002869
<i>mx</i>	0	3.765899	-0.02999	0.029483	-0.02585	0.018305
<i>my</i>	0	-0.21212	-0.83026	-0.01135	-0.02247	0.029774
<i>mz</i>	0	0	0	0	0	0
<i>m</i>	0	0	0	0	0	0
<i>f1</i>	0	4.358425	3.444968	2.80065	1.450819	4.511249
<i>f2</i>	0	2.181099	1.01597	0.288539	0.519338	0.618737
<i>f3</i>	0	5.231428	2.78982	2.904427	2.153265	3.210937
<i>f4</i>	0	3.600248	0.591602	0.325181	0.141693	0.470588

Tabla 5.43. Parámetros base inerciales identificados mediante el método de identificación indirecto con la primera articulación en reposo.

	Barra					
	1	2	3	4	5	6
<i>Ixx</i>	0	0	0	0.010489	0.058561	0.011342
<i>Ixy</i>	0	0	0	-0.00418	-0.00257	0.001966
<i>Ixz</i>	0	0	0	-0.02614	-0.00723	0.0061
<i>Iyy</i>	0	0	0	0	0	0
<i>Iyz</i>	0	0	0	-0.00804	0.006239	-0.0053
<i>Izz</i>	0	0.508929	0.014228	0.015547	0.014346	-0.00703

A continuación, los conjuntos de parámetros base obtenidos mediante los métodos de identificación directo e indirecto son utilizados para llevar a cabo un test de par calculado a fin de determinar la precisión de cada uno de ellos. Los resultados aplicando la trayectoria utilizada en los experimentos de identificación TFL0 como trayectoria test se presentan en la Figura 5.34 y la Figura 5.35. La Tabla 5.44 contiene los valores medios de los residuos de los errores de par calculado mostrados en la Figura 5.35.

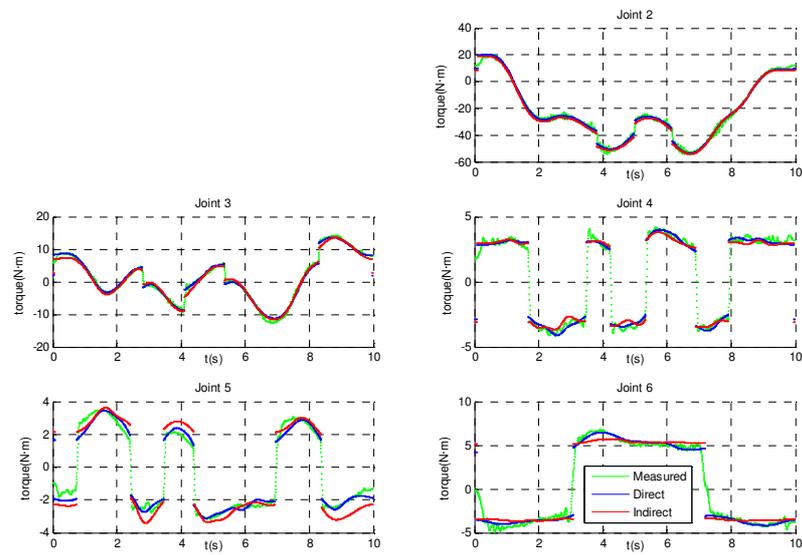


Figura 5.34. Test de par calculado con la trayectoria TFL0 para los métodos de identificación directo e indirecto (primera articulación en reposo).

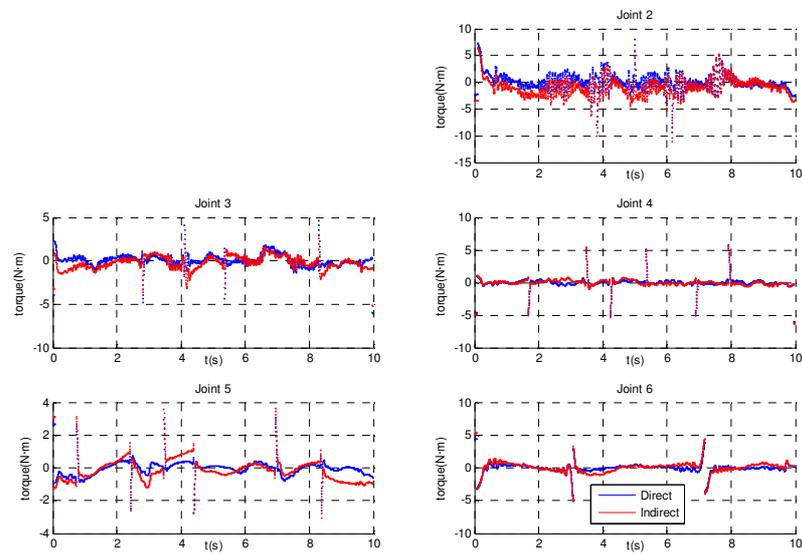


Figura 5.35. Errores del test de par calculado con la trayectoria TFL0 para los métodos de identificación directo e indirecto (primera articulación en reposo).

Tabla 5.44. RMS de los errores del test de par calculado con la trayectoria TFL0 para los métodos de identificación directo e indirecto (primera articulación en reposo).

	Barra					
	1	2	3	4	5	6
<i>Directo</i>	-	1.554228	0.792703	0.888882	0.484911	0.784033
<i>Indirecto</i>	-	1.95735	0.850121	0.921803	0.712521	0.955281

Análogamente, los resultados del test de par calculado utilizando la trayectoria TFL1 como trayectoria test se muestran en la Figura 5.36 y la Figura 5.37. Los residuos RMS de los errores de par calculado correspondientes pueden verse en la Tabla 5.45.

Tabla 5.45. RMS de los errores del test de par calculado con la trayectoria TFL1 para los métodos de identificación directo e indirecto (primera articulación en reposo).

	Barra					
	1	2	3	4	5	6
<i>Directo</i>	-	1.5916	1.009	1.0425	0.80584	1.3702
<i>Indirecto</i>	-	2.0521	0.80887	1.0715	0.82031	1.4734

Como puede observarse comparando la Tabla 5.34 y la Tabla 5.35, correspondientes a la identificación con todas las articulaciones, con la Tabla 5.44 y la Tabla 5.45, respectivamente, las cuales corresponden a la identificación con únicamente las cinco últimas articulaciones, los errores de predicción del método de identificación indirecto decrecen considerablemente en general cuando la primera articulación permanece en reposo, especialmente para las primeras tres articulaciones, mientras que para el método de identificación directo tan solo pueden encontrarse ligeras variaciones.

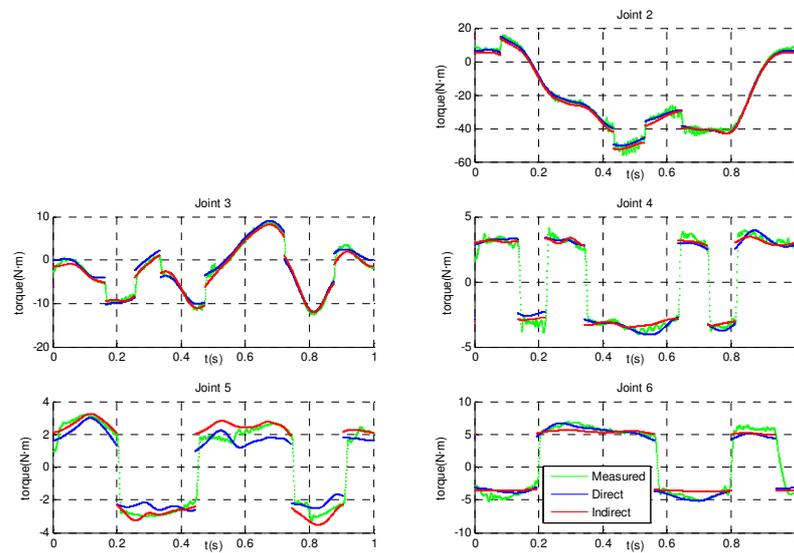


Figura 5.36. Test de par calculado con la trayectoria TFL1 para los métodos de identificación directo e indirecto (primera articulación en reposo).

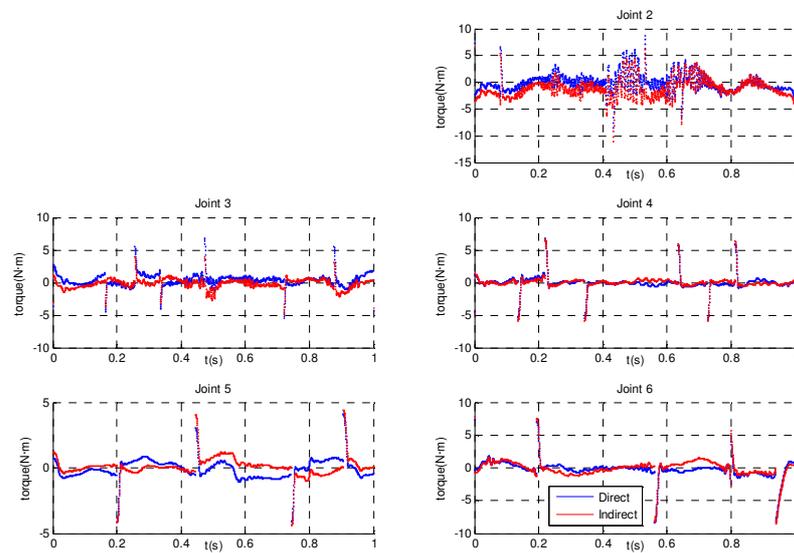


Figura 5.37. Errores del test de par calculado con la trayectoria TFL1 para los métodos de identificación directo e indirecto (primera articulación en reposo).

Del mismo modo que en la comparación con todas las articulaciones, se presentan ahora los resultados del test de par calculado utilizando trayectorias a velocidad constante como trayectorias test. La Figura 5.38 y la Figura 5.39 muestran, respectivamente, el par calculado y los errores de predicción para un movimiento de 2.36 s (TC1), esto es con una velocidad angular constante de 2.0 rad/s para las articulaciones principales. La Tabla 5.46 contiene los residuos RMS de los errores de par calculado.

Tabla 5.46. Valores medios de los residuos RMS de los errores del test de par calculado con la trayectoria a velocidad constante TC1 (2.0 rad/s) para los métodos de identificación directo e indirecto (primera articulación en reposo).

	Barra					
	1	2	3	4	5	6
<i>Directo</i>	-	2.3743	1.0815	0.61937	0.45235	0.76861
<i>Indirecto</i>	-	4.2065	0.91253	0.66354	0.80121	0.931

El test de par calculado para un movimiento de 47.13 s (TC2), correspondiente a una velocidad angular constante de 0.1 rad/s para los nudos principales, proporciona los resultados que pueden verse en la Figura 5.40, la Figura 5.41 y la Tabla 5.47.

Tabla 5.47. Valores medios de los residuos RMS de los errores del test de par calculado con la trayectoria a velocidad constante TC2 (0.1 rad/s) para los métodos de identificación directo e indirecto (primera articulación en reposo).

	Barra					
	1	2	3	4	5	6
<i>Directo</i>	-	1.2791	0.77388	0.77475	0.33848	0.74566
<i>Indirecto</i>	-	2.0085	0.62977	0.74616	0.77768	0.78737

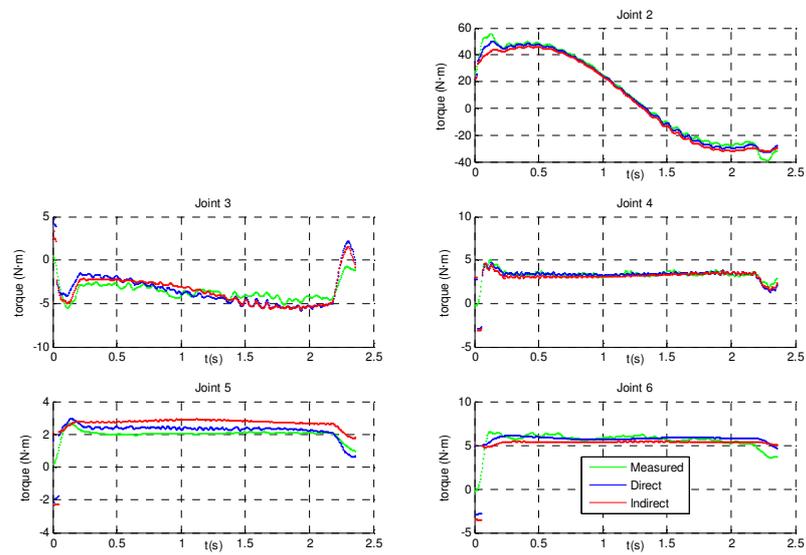


Figura 5.38. Test de par calculado con la trayectoria a velocidad constante TC1 (2.0 rad/s) para los métodos de identificación directo e indirecto (primera articulación en reposo).

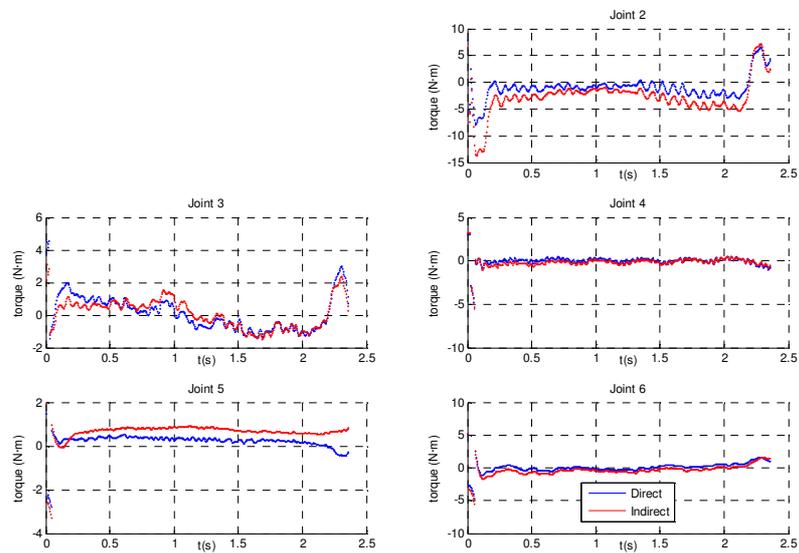


Figura 5.39. Errores del test de par calculado con la trayectoria a velocidad constante TC1 (2.0 rad/s) para los métodos de identificación directo e indirecto (primera articulación en reposo).

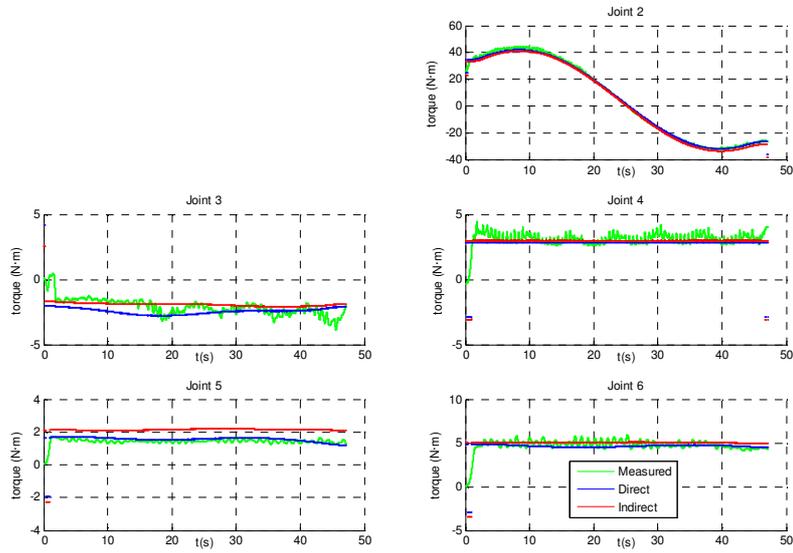


Figura 5.40. Test de par calculado con la trayectoria a velocidad constante TC2 (0.1 rad/s) para los métodos de identificación directo e indirecto (primera articulación en reposo).

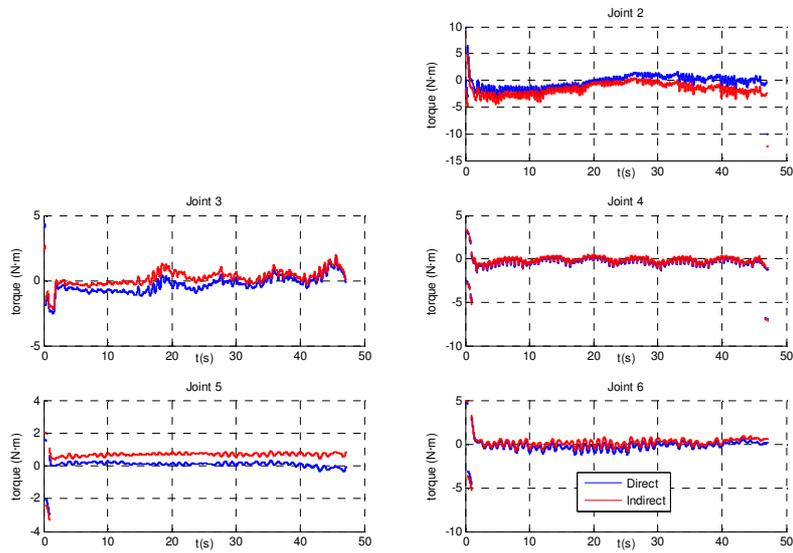


Figura 5.41. Errores del test de par calculado con la trayectoria a velocidad constante TC2 (0.1 rad/s) para los métodos de identificación directo e indirecto (primera articulación en reposo).

La Figura 5.42 muestra la evolución de los residuos RMS de los errores de par calculado con respecto a la velocidad angular de las articulaciones principales para trayectorias a velocidad constante cuando la primera articulación permanece en reposo.

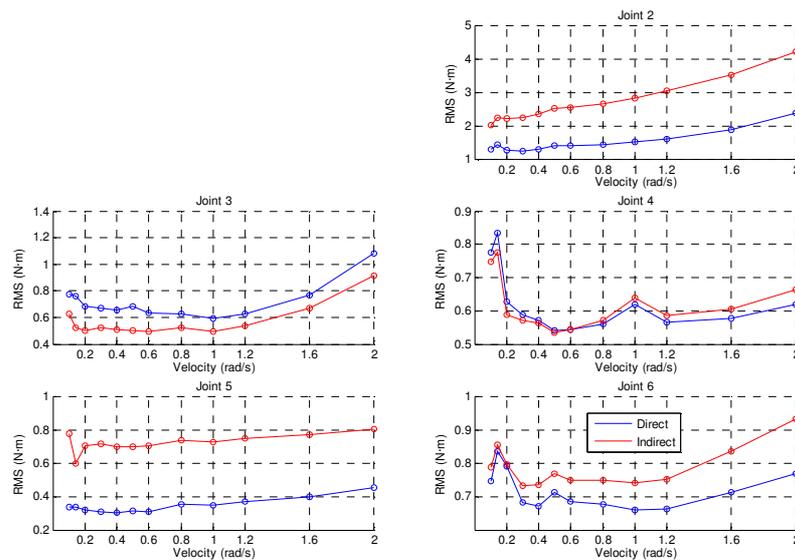


Figura 5.42. Evolución del RMS de los errores del test de par calculado con la velocidad angular para trayectorias a velocidad constante (primera articulación en reposo).

Como puede observarse cuando se compara la Figura 5.25 y la Figura 5.42, los mismos efectos descritos para la trayectoria TFL1 se reproducen, o incluso se magnifican, en el caso de las trayectorias a velocidad constante con elevados valores de la velocidad angular. De hecho, aparecen considerables mejoras de la precisión para el método de identificación indirecto, mientras que para el método directo tan sólo pueden encontrarse mínimas reducciones del error. Por lo que respecta a las trayectorias a velocidad constante con reducidos valores de la velocidad angular, la variación del error de par calculado es generalmente irrelevante para ambos métodos de identificación.

Finalmente, el test de par calculado es llevado a cabo aplicando trayectorias de test de tipo spline cúbico. El primer experimento se realiza en 2.835 s (TS1), lo cual implica

una velocidad media de alrededor de 1.6 rad/s para las articulaciones principales. La comparación de los pares medido y calculado, así como los errores de par calculado se muestran en la Figura 5.43 y la Figura 5.44, respectivamente. Los residuos RMS de los errores de par calculado pueden verse en la Tabla 5.48.

Tabla 5.48. Valores medios de los residuos RMS de los errores del test de par calculado con la trayectoria spline cúbica TS1 (1.6 rad/s) para los métodos de identificación directo e indirecto (primera articulación en reposo).

	Barra					
	1	2	3	4	5	6
<i>Directo</i>	-	1.4798	0.95715	0.72991	0.44671	0.65013
<i>Indirecto</i>	-	3.0012	0.94054	0.75271	0.82174	0.80619

El último experimento tiene lugar en 45.38 s (TS2), resultando así una velocidad angular media de aproximadamente 0.1 rad/s para las articulaciones principales. Los resultados pueden verse en la Figura 5.45 y la Figura 5.46. La Tabla 5.49 muestra los residuos RMS de los errores de par calculado.

Tabla 5.49. RMS de los errores del test de par calculado con la trayectoria spline cúbica TS2 (0.1 rad/s) para los métodos de identificación directo e indirecto (primera articulación en reposo).

	Barra					
	1	2	3	4	5	6
<i>Directo</i>	-	1.1445	0.82987	0.79875	0.38926	0.98203
<i>Indirecto</i>	-	1.9921	0.71116	0.77456	0.89648	0.81738

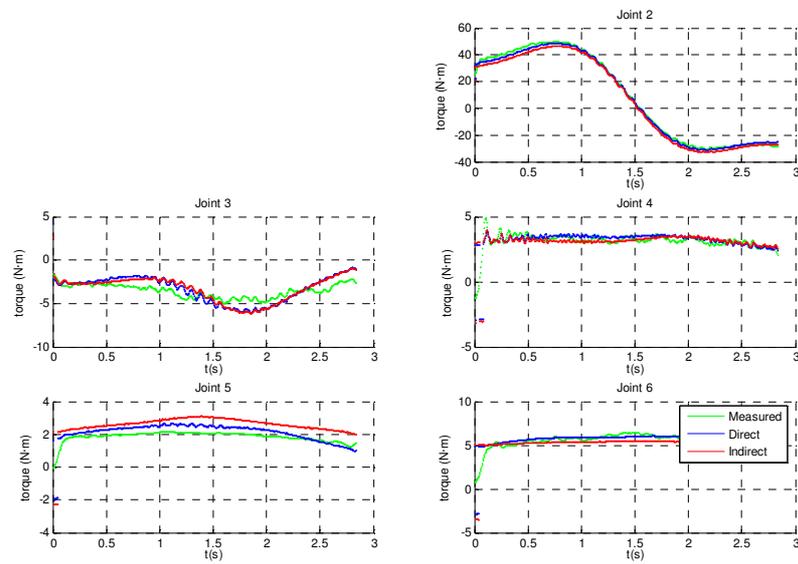


Figura 5.43. Test de par calculado con la trayectoria spline cúbica TS1 (1.6 rad/s) para los métodos de identificación directo e indirecto (primera articulación en reposo).

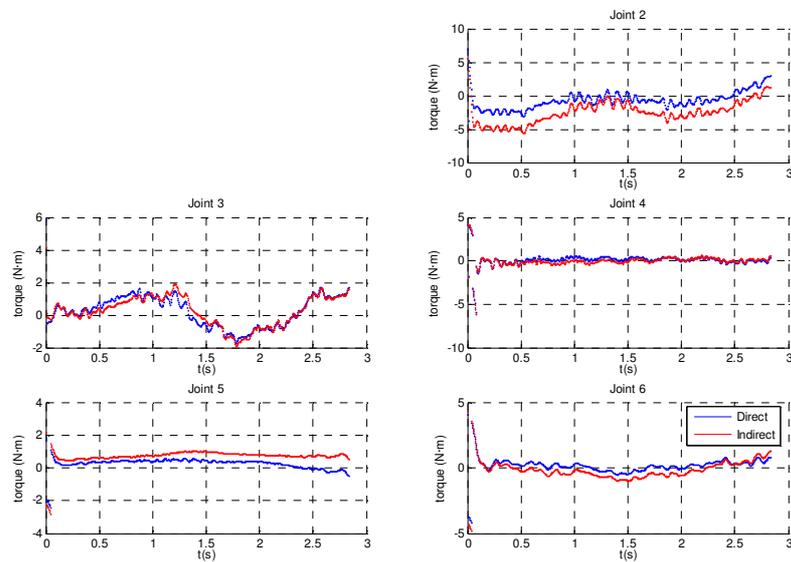


Figura 5.44. Errores del test de par calculado con la trayectoria spline cúbica TS1 (1.6 rad/s) para los métodos de identificación directo e indirecto (primera articulación en reposo).

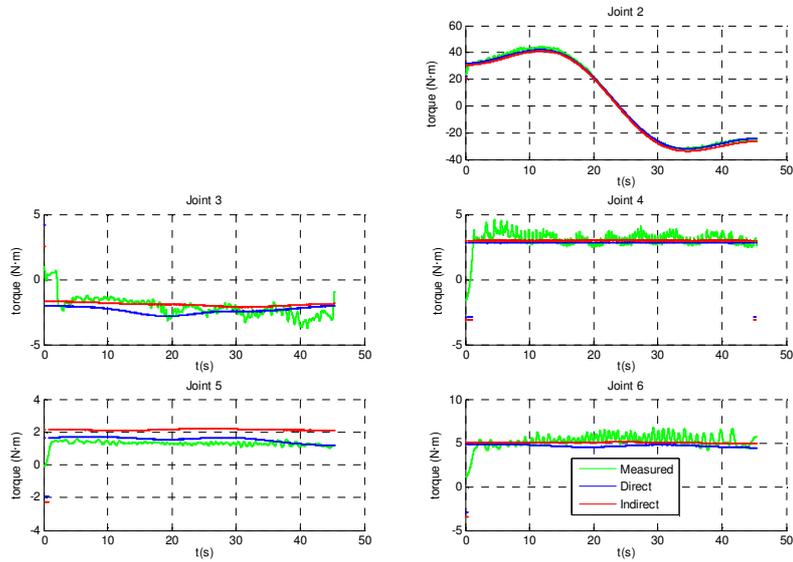


Figura 5.45. Test de par calculado con la trayectoria spline cúbica TS2 (0.1 rad/s) para los métodos de identificación directo e indirecto (primera articulación en reposo).

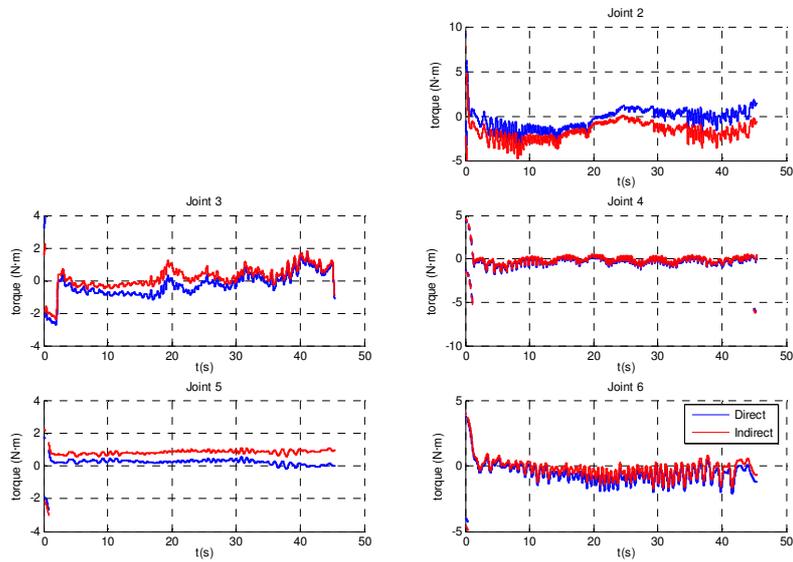


Figura 5.46. Errores del test de par calculado con la trayectoria spline cúbica TS2 (0.1 rad/s) para los métodos de identificación directo e indirecto (primera articulación en reposo).

La evolución de los residuos RMS de los errores de par calculado con respecto a la velocidad angular de las articulaciones principales con trayectorias de tipo spline cúbico para los métodos de identificación directo e indirecto cuando la primera articulación permanece en reposo se muestra en la Figura 5.47.

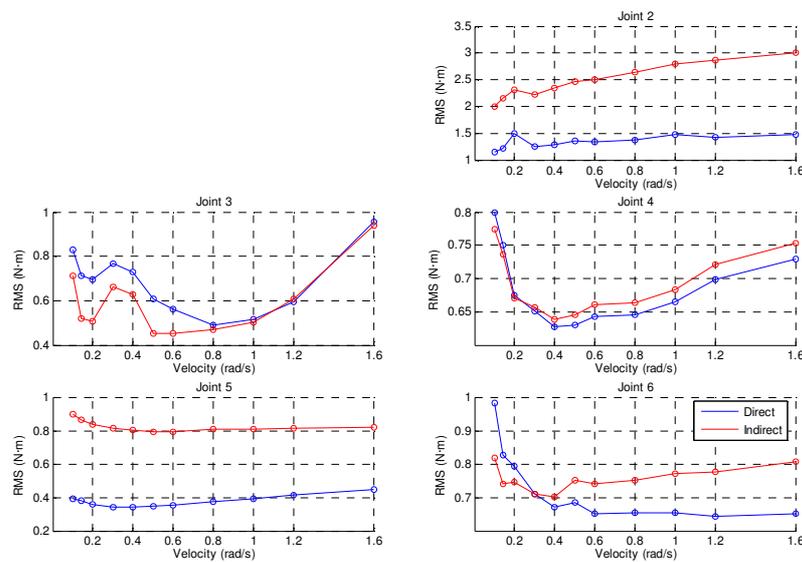


Figura 5.47. Evolución del RMS de los errores del test de par calculado con la velocidad angular para trayectorias spline cúbicas (primera articulación en reposo).

Un comportamiento similar al descrito para las trayectorias a velocidad constante puede observarse en el caso de las trayectorias de tipo spline cúbico en lo que se refiere a la influencia de la velocidad angular de las articulaciones sobre la precisión de los resultados del test de par calculado. Como puede verse al comparar la Tabla 5.38 y la Tabla 5.39 con, respectivamente, la Tabla 5.48 y la Tabla 5.49, el error de par calculado para los métodos de identificación directo e indirecto se hace notablemente similar cuando no se incluye la primera articulación en el movimiento y se evitan, por tanto, los fenómenos de fricción no modelados que se dan para dicha articulación.

5.3.3. Modelo de los Actuadores

En esta sección, se lleva a cabo un experimento de identificación utilizando tanto el modelo dinámico de barras rígidas como el de barras rígidas y actuadores, descritos respectivamente en los apartados 2.2.2 y 2.2.3. En cada caso, se ha calculado una trayectoria parametrizada mediante series finitas de Fourier optimizada para el modelo dinámico correspondiente. La precisión de los respectivos conjuntos de parámetros base identificados es comparada entonces mediante el test de par calculado a partir de varias trayectorias de test.

El proceso de optimización detallado en el Capítulo 1 ha sido aplicado considerando los anteriores modelos dinámicos a fin de determinar las trayectorias optimizadas TFL0 y TFR0, respectivamente, para los modelos dinámicos de barras rígidas y de barras rígidas y actuadores. En ambos casos, el número de condición de la matriz de observación ha sido adoptado como criterio de optimización. Debe observarse que las trayectorias optimizadas para el modelo dinámico de barras rígidas y actuadores presentan números de condición de la matriz de observación considerablemente superiores debido principalmente al distinto orden de magnitud de los términos de la matriz correspondientes a las barras y a los actuadores. La trayectoria del elemento terminal del robot en el espacio de trabajo para las trayectorias TFL0 y TFR0 puede verse, respectivamente, en la Figura 3.4 y la Figura 3.8.

Por medio del método de identificación directo, se han obtenido los dos conjuntos de parámetros base mostrados en la Tabla 5.22 y la Tabla 5.50, respectivamente, para el modelo dinámico de barras rígidas y el de barras rígidas y actuadores. En este último caso, se ha aplicado un equilibrado numérico de las columnas de la matriz de observación obtenida a fin de disminuir el número de condición de la misma. El equilibrado numérico de las filas de la matriz conduciría a números de condición aún inferiores. No obstante, tal como se ha observado en los experimentos de identificación, el necesario equilibrado posterior de las medidas de par en los nudos, el cual presenta valores considerablemente distintos para las tres primeras articulaciones y para las articulaciones de la muñeca,

influye negativamente sobre la precisión de los parámetros base identificados, llevando a un aumento de los errores del par en los nudos.

A fin de realizar el test de par calculado, se han seleccionado tres tipos de trayectorias de test distintos. La primera TFR1 es una trayectoria parametrizada mediante series finitas de Fourier, la cual difiere de las trayectorias utilizadas para realizar los experimentos de identificación. Por otra parte, se considera dos conjuntos de trayectorias, respectivamente, a velocidad constante y de tipo spline cúbico, en las cuales se produce el movimiento simultáneo de todas las articulaciones desde uno de sus límites de posición angular hasta el opuesto.

Tabla 5.50. Parámetros base identificados a partir de la trayectoria TFR0 para el modelo dinámico de barras rígidas y actuadores con el modelo de fricción F4.

	Barra					
	1	2	3	4	5	6
I_{xx}	0	0.105505	-0.08135	0.001508	0.014596	0.003383
I_{xy}	0	0.00743	-0.04947	0.023305	0.004784	0.003613
I_{xz}	0	-0.23043	-0.00389	-0.01449	-0.02012	-0.00077
I_{yy}	0	0	0	0	0	0
I_{yz}	0	0.232919	-0.07994	0.014928	0.004377	-0.00873
I_{zz}	0.666635	0.29299	-0.12574	-0.05392	-0.00314	0.007896
m_x	0	3.867351	-0.04373	-0.00689	0.002399	-0.00236
m_y	0	-0.14728	-0.85867	-0.00857	-0.00923	0.008508
m_z	0	0	0	0	0	0
m	0	0	0	0	0	0
I_{xx_r}	0	-0.00096	-0.00045	-0.00016	5.89E-06	-8.4E-06
I_{xy_r}	0	0.000583	-0.00018	2.58E-05	1.98E-06	-2.5E-05
I_{xz_r}	0	-1.4E-06	4.4E-06	4.53E-07	4.22E-07	2.08E-07
I_{yy_r}	0	0	0	0	0	0
I_{yz_r}	0	-2.2E-06	-7.1E-06	8.03E-08	-3E-08	-1.3E-07
I_{zz_r}	0	0	0.00011	1.32E-05	1.29E-05	-4.8E-07
m_{x_r}	0	-1.2E-05	-1.5E-05	-1.6E-06	5.52E-07	2.65E-07
m_{y_r}	0	7.31E-05	-2.4E-05	1.21E-06	1.31E-06	-1.3E-06
m_{z_r}	0	0	0	0	0	0
m_r	0	0	0	0	0	0
f_1	3.618666	4.826837	2.738029	2.837533	1.501792	3.982712
f_2	10.30215	2.542118	1.883562	0.217742	0.54644	0.70333
f_3	3.14568	6.098362	2.289058	2.818436	1.896708	2.163234
f_4	10.06375	2.036531	1.005469	0.247147	0.401632	0.66382

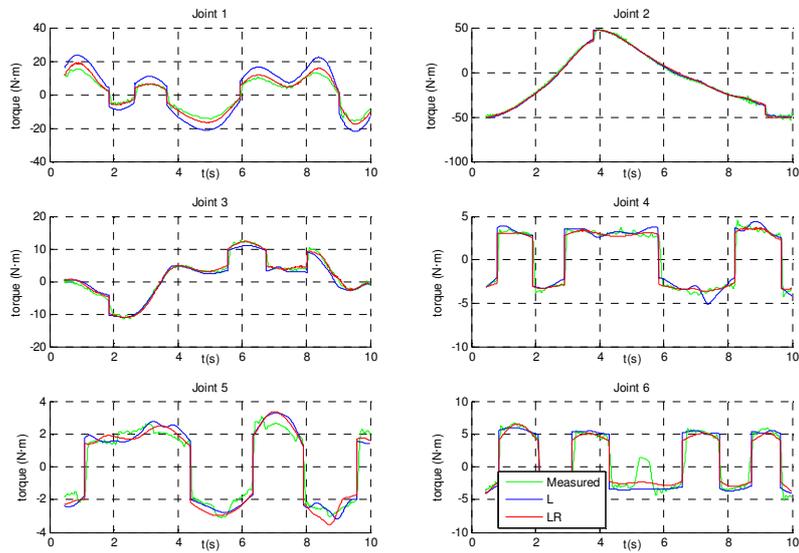


Figura 5.48. Test de par calculado para la trayectoria TFR1 con los modelos dinámicos de barras y de barras y actuadores.

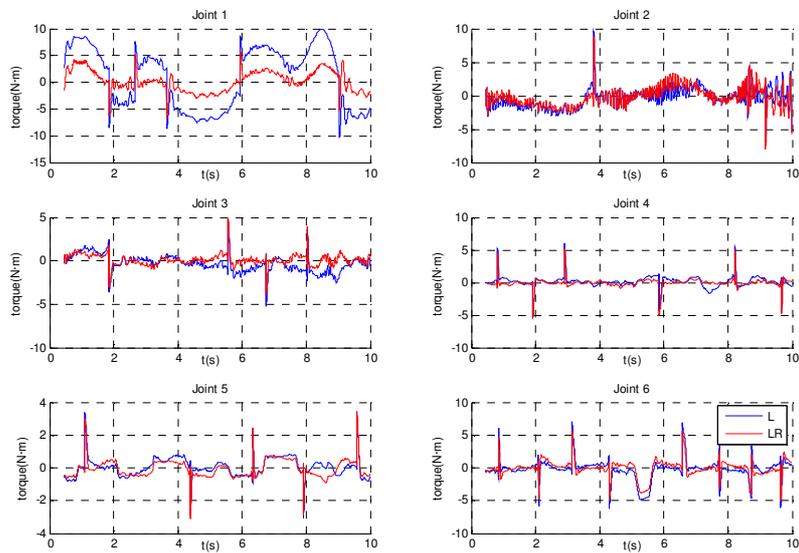


Figura 5.49. Errores del test de par calculado para la trayectoria TFR1 con los modelos dinámicos de barras y de barras y actuadores.

Los resultados del test de par calculado para la trayectoria TFR1 pueden verse en la Figura 5.48 y la Figura 5.49. La Tabla 5.51 muestra los valores medios correspondientes de los residuos RMS de los errores de par calculado. Como puede observarse, la precisión del par calculado mediante el modelo de barras rígidas y actuadores resulta superior al calculado mediante el modelo de barras rígidas. En particular, cabe mencionar la notable reducción del error correspondiente a la primera articulación, el cual adquiere para el modelo de barras rígidas y actuadores valores cercanos al resto de las articulaciones.

Tabla 5.51. Valores medios de los residuos RMS de los errores del test de par calculado con la trayectoria TFR1 para los modelos dinámicos de barras y de barras y actuadores.

	Barra					
	1	2	3	4	5	6
<i>L</i>	5.829	1.4865	1.0107	0.83541	0.58088	1.5107
<i>LR</i>	1.9954	1.4769	0.6431	0.70641	0.56245	1.2423

A continuación, el test de par calculado es llevado a cabo aplicando una trayectoria a velocidad constante con un valor de la velocidad angular de 1.0 rad/s (TC3) como trayectoria de test. La comparación de los pares medidos y calculados, así como los errores de par calculado para cada uno de los modelos dinámicos propuestos se muestran, respectivamente, en la Figura 5.50 y la Figura 5.51.

La Tabla 5.52 presenta los valores medios de los residuos RMS de los errores de par calculado mostrados en la Figura 5.51 para cada uno de los modelos dinámicos. Puede verse que los resultados obtenidos en este experimento son similares a los descritos para la trayectoria TFR1. A excepción de la última articulación, el error disminuye para el modelo de barras rígidas y actuadores, especialmente para la primera articulación.

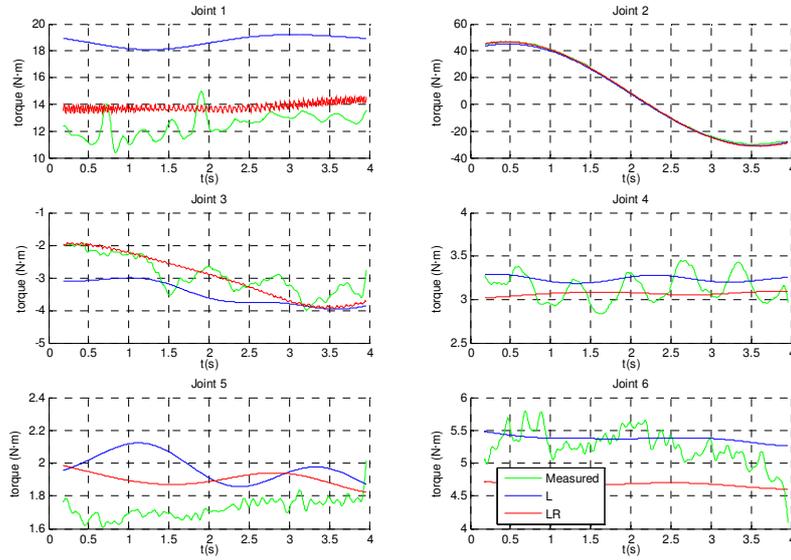


Figura 5.50. Test de par calculado para la trayectoria a velocidad constante TC3 (1.0 rad/s) con los modelos dinámicos de barras y de barras y actuadores.

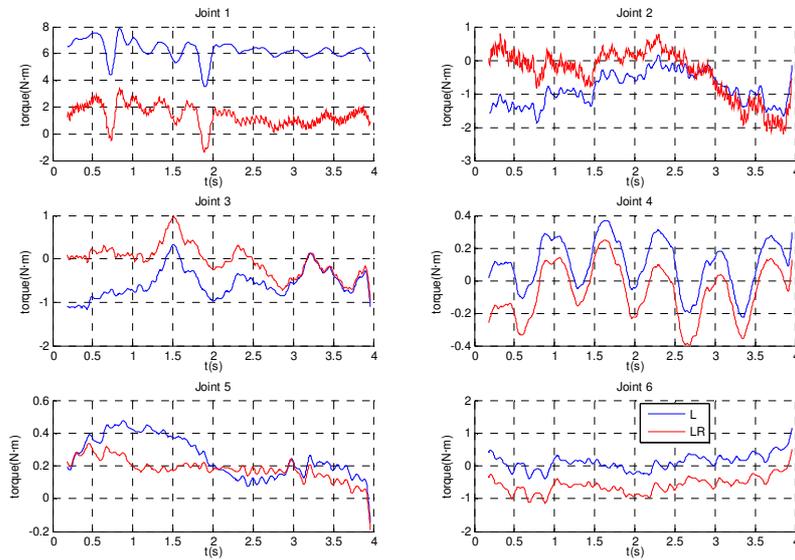


Figura 5.51. Errores del test de par calculado para la trayectoria a velocidad constante TC3 (1.0 rad/s) con los modelos dinámicos de barras y de barras y actuadores.

Tabla 5.52. Valores medios de los residuos RMS de los errores del test de par calculado con la trayectoria a velocidad constante TC3 (1.0 rad/s) para los modelos dinámicos de barras y de barras y actuadores.

	Barra					
	1	2	3	4	5	6
<i>L</i>	6.3146	0.97074	0.65946	0.18242	0.2841	0.26063
<i>LR</i>	1.5901	0.80417	0.35618	0.17677	0.19378	0.63512

La repetición del anterior test de par calculado utilizando trayectorias de test a velocidad constante con distintos valores de la velocidad angular permite determinar la evolución de los valores medios de los residuos RMS de los errores de par calculado con respecto a la velocidad angular para este tipo de trayectorias, tal como muestra la Figura 5.52.

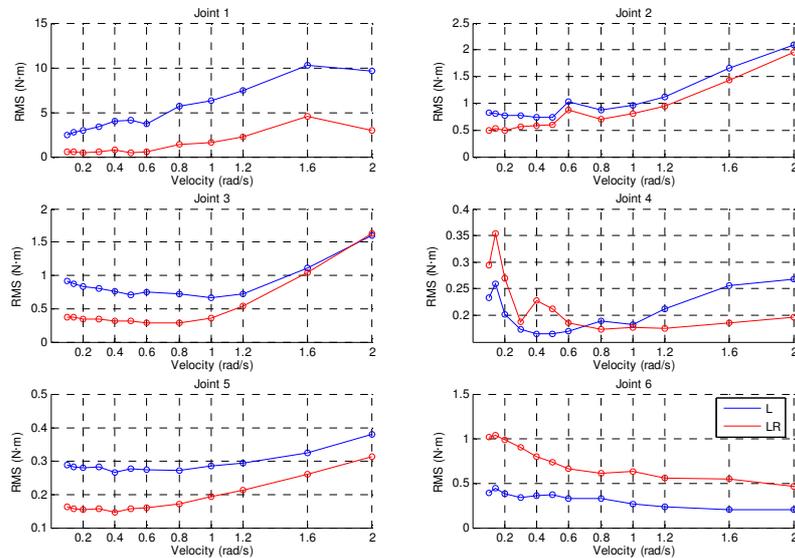


Figura 5.52. Evolución del RMS de los errores del test de par calculado con la velocidad angular para trayectorias a velocidad constante con el modelo dinámico de barras rígidas y actuadores (primera articulación en reposo).

Como tendencia general, se aprecia una reducción del error a favor del modelo de barras rígidas y actuadores, si bien dicha reducción se acrecienta o disminuye según la articulación de que se trate. Tan solo para el caso de la sexta barra tiene lugar un empeoramiento del error para dicho modelo que se mantiene para cualquier valor de la velocidad.

Finalmente, se presentan los resultados del test de par calculado para una trayectoria de tipo spline cúbico con una velocidad angular media de alrededor de 1.0 rad/s (TS3). La Figura 5.53 y la Figura 5.54 muestran respectivamente la comparación de los pares medidos y calculados y los correspondientes errores de par calculado para cada uno de los modelos dinámicos propuestos. La Tabla 5.53 presenta los valores medios de los residuos RMS de los errores de par calculado mostrados en la Figura 5.54 para cada uno de los modelos dinámicos.

Tabla 5.53. RMS de los errores del test de par calculado con la trayectoria spline cúbica TS3 (1.0 rad/s) para los modelos dinámicos de barras y de barras y actuadores.

	Barra					
	1	2	3	4	5	6
<i>L</i>	5.2638	1.0274	0.86739	0.24096	0.25037	0.57182
<i>LR</i>	2.0936	0.69819	0.70717	0.24315	0.18824	0.72565

Al igual que anteriormente, el test de par calculado es repetido utilizando trayectorias de test de tipo spline cúbico con distintos valores de la velocidad angular media a fin de determinar la evolución de los residuos de los errores de par calculado con respecto a la velocidad angular para este tipo de trayectorias, tal como se muestra en la Figura 5.55.

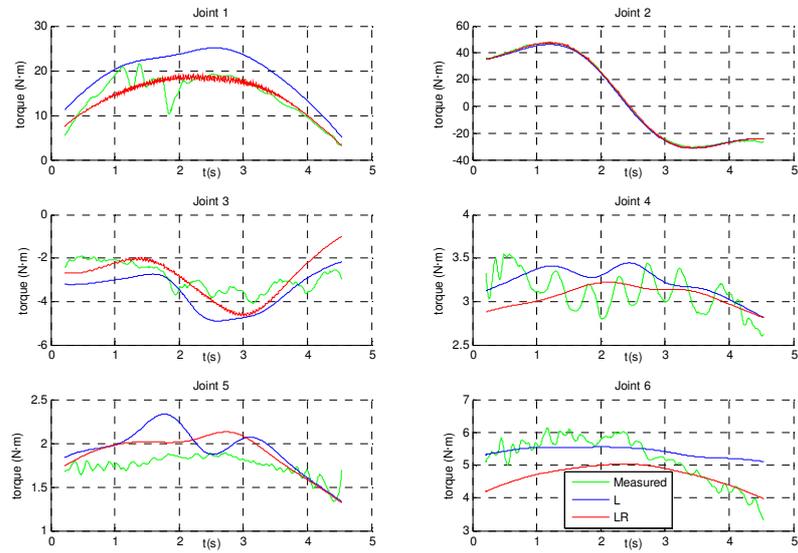


Figura 5.53. Test de par calculado para la trayectoria spline cúbica TS3 (1.0 rad/s) con los modelos dinámicos de barras y de barras y actuadores.

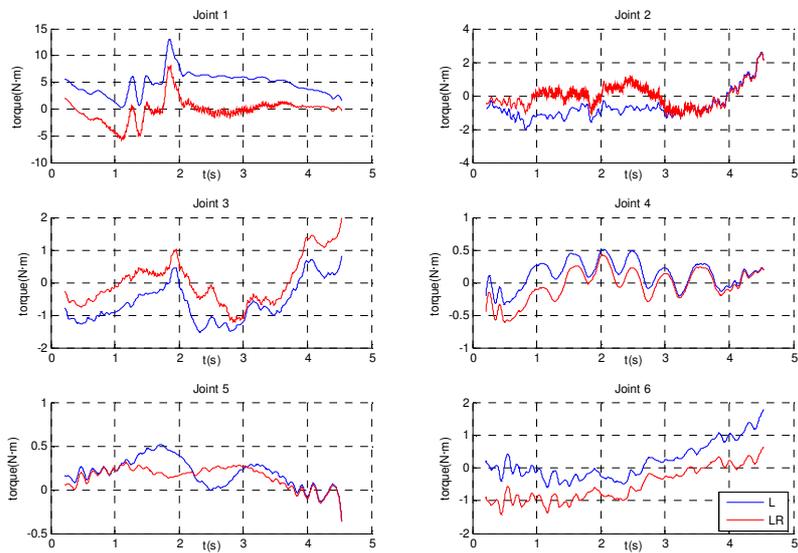


Figura 5.54. Errores del test de par calculado para la trayectoria spline cúbica TS3 (1.0 rad/s) con los modelos dinámicos de barras y de barras y actuadores.

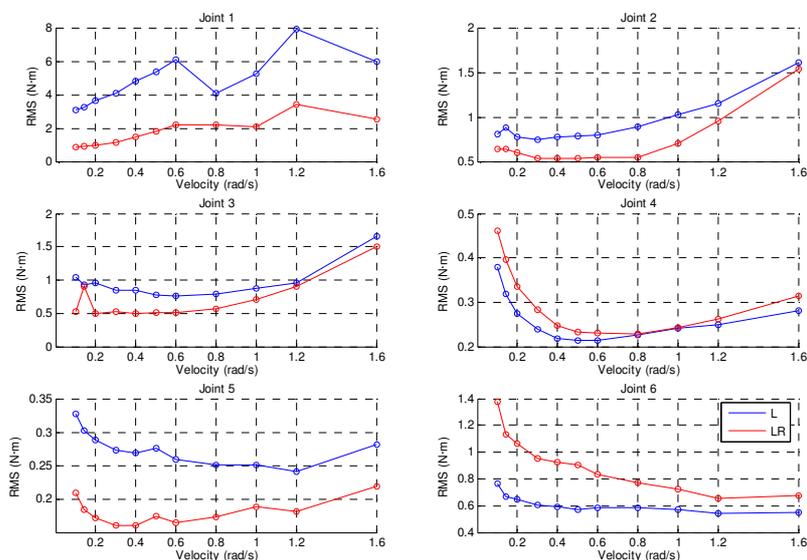


Figura 5.55. Evolución del RMS de los errores del test de par calculado con la velocidad angular para trayectorias spline cúbicas con el modelo dinámico de barras rígidas y actuadores (primera articulación en reposo).

Una vez más, las conclusiones no son muy distintas a las extraídas en el caso de las trayectorias a velocidad constante. Tan sólo el error correspondiente a la cuarta articulación resulta en este caso ligeramente superior para el modelo de barras rígidas y actuadores. En general, puede afirmarse que el modelo de barras rígidas y actuadores permite la disminución global del error de par calculado. No obstante, deben tenerse en cuenta las características de fricción descritas anteriormente para la primera articulación, las cuales podrían ser, al menos en parte, responsables de la destacada reducción del error en el caso de dicha articulación.

5.3.4. Factibilidad Física

Con objeto de comprobar la influencia del modelo de fricción aplicado, se llevó a cabo un experimento de identificación en el cual un determinado modelo dinámico es identificado a partir de datos simulados mediante un modelo dinámico distinto. En concreto, se ha utilizado el modelo dinámico de barras rígidas y actuadores con el modelo de fricción F6, considerando los valores de los parámetros base mostrados en la Tabla 5.6 y la Tabla 5.8, para generar datos simulados de posición angular y par en los nudos correspondientes a la trayectoria TFR0.

La Tabla 5.54 y la Tabla 5.55 muestran los valores de los parámetros base identificados a partir de los datos anteriormente simulados respectivamente para un modelo de barras rígidas y actuadores con los modelos de fricción F4 y F2. Como puede verse, la no coincidencia de los modelos de fricción empleados respectivamente para la generación de los datos y la posterior identificación resulta no sólo en la variación de los valores de los parámetros base correspondientes al resto del modelo dinámico, sino también en la no factibilidad física del conjunto de parámetros base identificado. En el ejemplo mostrado, el parámetro base I_{zz_6} presenta un valor negativo para ambos modelos identificados, si bien su valor es más desfavorable en el caso del modelo de fricción simétrico F2.

Los anteriores resultados con datos simulados permiten confirmar la influencia de la precisión del modelo de fricción aplicado sobre los parámetros dinámicos identificados y, en particular, sobre la factibilidad física del conjunto de parámetros base identificados. Parece razonable suponer que un modelo de fricción de mayor complejidad, capaz de describir la mayor parte de los fenómenos de fricción observables, facilitaría enormemente la identificación de un conjunto de parámetros base físicamente factible.

Tabla 5.54. Parámetros base identificados para el modelo dinámico de barras rígidas y actuadores con el modelo de fricción F4 a partir de los datos simulados.

	Barra					
	1	2	3	4	5	6
I_{xx}	0	-10.212	4.1331	0.13044	-0.00695	-0.00164
I_{xy}	0	-0.00739	-0.0293	-0.00533	0.006921	-0.00276
I_{xz}	0	-1.0439	0.016166	-0.00224	0.006484	0.007823
I_{yy}	0	0	0	0	0	0
I_{yz}	0	0.12394	0.036826	-0.00319	-0.02414	-0.00479
I_{zz}	13.939	13.045	4.3042	0.25552	0.14698	-0.00445
m_x	0	7.0195	-0.05383	-0.00594	-0.00529	0.004557
m_y	0	-0.06863	-2.7179	-0.01248	-0.00949	-0.00846
m_z	0	0	0	0	0	0
m	0	0	0	0	0	0
I_{xx_r}	0	2.40E-05	-1.02E-05	-1.54E-05	-1.66E-06	-4.20E-08
I_{xy_r}	0	-2.87E-05	-2.76E-05	-5.33E-06	-1.70E-05	1.92E-05
I_{xz_r}	0	-8.01E-08	6.93E-07	8.19E-08	1.01E-07	3.19E-08
I_{yy_r}	0	0	0	0	0	0
I_{yz_r}	0	-6.01E-07	1.18E-06	7.65E-08	1.75E-07	3.67E-08
I_{zz_r}	0	0	0.000171	1.66E-05	1.80E-05	2.36E-05
m_{x_r}	0	-5.94E-06	-9.20E-06	-3.48E-07	-3.38E-07	8.68E-07
m_{y_r}	0	-6.77E-06	-2.78E-06	-5.73E-07	-1.12E-06	6.91E-08
m_{z_r}	0	0	0	0	0	0
m_r	0	0	0	0	0	0
$f1$	8.9295	11.835	3.8679	1.4664	1.3827	2.2167
$f2$	2.1179	3.9536	1.8782	1.1035	1.1728	3.8833
$f3$	6.7565	24.095	2.5646	1.0085	1.5589	3.7741
$f4$	4.208	3.9778	2.4619	1.1631	0.50335	-0.88978

A continuación, se presenta un ejemplo que ilustra la aplicación de una rutina de optimización no lineal con restricciones no lineales a fin de llevar a cabo la identificación de los parámetros dinámicos, tal como se describe en el Apartado 4.3. Se comparan dos conjuntos distintos de parámetros dinámicos obtenidos a partir de datos medidos de un robot industrial PUMA 560 para la trayectoria TFR2, el primero de ellos mediante la resolución por LSM del sistema de ecuaciones (4.10) y el segundo siguiendo el procedimiento de identificación propuesto.

Tabla 5.55. Parámetros base identificados para el modelo dinámico de barras rígidas y actuadores con el modelo de fricción F2 a partir de los datos simulados.

	Barra					
	1	2	3	4	5	6
I_{xx}	0	-7.7157	3.0275	0.074763	0.043682	-0.04053
I_{xy}	0	1.0068	-0.74163	0.000126	-0.04543	-0.00535
I_{xz}	0	-1.0944	0.060039	0.044019	0.016626	-0.03741
I_{yy}	0	0	0	0	0	0
I_{yz}	0	0.19647	-0.46598	-0.01875	-0.03139	0.018084
I_{zz}	13.212	12.836	3.6743	0.15558	0.13645	-0.01205
m_x	0	7.4348	-0.01034	0.02104	0.049251	-0.08695
m_y	0	0.6676	-2.705	-0.17248	-0.02516	0.14558
m_z	0	0	0	0	0	0
m	0	0	0	0	0	0
I_{xx_r}	0	-0.00033	-0.00022	-1.99E-05	-1.54E-05	1.37E-05
I_{xy_r}	0	0.000126	1.47E-06	-7.59E-06	-2.54E-05	-1.19E-05
I_{xz_r}	0	8.55E-07	2.45E-06	1.58E-07	2.29E-07	7.64E-08
I_{yy_r}	0	0	0	0	0	0
I_{yz_r}	0	-1.16E-06	6.63E-06	7.91E-08	3.02E-07	8.77E-08
I_{zz_r}	0	0	0.000349	2.70E-05	3.62E-05	2.60E-05
m_{x_r}	0	-5.21E-05	5.98E-05	-5.53E-07	-2.64E-07	1.65E-06
m_{y_r}	0	-0.00011	-4.17E-05	-8.73E-07	-2.53E-06	2.99E-07
m_{z_r}	0	0	0	0	0	0
m_r	0	0	0	0	0	0
$f1$	8.7275	18.49	2.8679	1.5208	1.7762	2.9162
$f2$	1.6829	4.0573	2.3007	0.96037	0.69092	1.7928

Los parámetros base identificados mediante LSM pueden verse en la Tabla 5.56. Como se observa (véanse los parámetros base I_{zz_5} y I_{zz_6} en dicha tabla), este conjunto de parámetros base es claramente no factible. En la Tabla 5.57, se muestra la solución final tras aplicar el procedimiento de identificación propuesto.

Tabla 5.56. Parámetros base identificados a partir de datos medidos utilizando LSM (masas expresadas en kg., momentos de primer orden en kg·m, momentos y productos de inercia en kg·m², coeficientes de fricción seca en N·m y coeficientes de fricción viscosa en N·s).

	Barra					
	1	2	3	4	5	6
I_{xx}	0	-1.3686e+00	3.4165e-01	-8.5504e-02	4.5433e-04	-9.1322e-03
I_{xy}	0	-3.7988e-02	3.1395e-02	1.1439e-02	8.9426e-03	-4.2226e-03
I_{xz}	0	-9.3530e-01	4.0014e-02	3.6575e-03	-9.6220e-04	3.6976e-03
I_{yy}	0	0	0	0	0	0
I_{yz}	0	-2.0558e-02	-1.0821e-01	1.3059e-02	1.4462e-02	6.0088e-03
I_{zz}	3.0642e+00	3.4135e+00	3.1650e-01	2.4590e-02	-3.9830e-02	-7.6269e-03
m_x	0	3.6938e+00	5.2855e-02	3.3832e-03	1.6860e-02	-1.0327e-02
m_y	0	1.2038e-01	-8.2284e-01	1.2598e-02	7.9409e-03	-2.4120e-02
m_z	0	0	0	0	0	0
m	0	0	0	0	0	0
I_{xx_r}	0	-6.6991e-05	6.7447e-04	3.0921e-05	-6.7452e-05	2.8609e-04
I_{xy_r}	0	2.9309e-04	-1.4767e-04	5.0326e-05	-1.6628e-05	1.8136e-05
I_{xz_r}	0	-2.1664e-06	-1.8192e-06	2.7766e-07	-2.5708e-07	-9.6496e-07
I_{yy_r}	0	0	0	0	0	0
I_{yz_r}	0	-1.3982e-05	-5.8514e-06	-6.6233e-08	7.6027e-07	-7.7012e-07
I_{zz_r}	0	0	1.4755e-04	3.3342e-05	5.2688e-05	2.4076e-05
m_{x_r}	0	-8.5364e-05	-1.1844e-05	-5.7632e-07	-9.3567e-07	3.6879e-06
m_{y_r}	0	4.7103e-05	-5.0028e-05	-3.1201e-07	1.0337e-06	-2.8564e-07
m_{z_r}	0	0	0	0	0	0
m_r	0	0	0	0	0	0
f_1	6.0205e+00	2.7865e+01	2.7800e+00	4.6491e-01	7.5935e-01	1.4964e+00
f_2	3.5695e+00	-1.9362e+00	3.4488e+00	2.1549e+00	1.4769e+00	3.7563e+00
f_3	6.0253e+00	2.6627e+01	1.5506e+00	7.7899e-01	7.1942e-01	1.2368e+00
f_4	2.4123e+00	1.2870e+01	3.1663e+00	1.6597e+00	1.6559e+00	2.1013e+00

Tabla 5.57. Parámetros dinámicos identificados a partir de datos medidos utilizando el procedimiento de identificación propuesto (unidades definidas como en la Tabla 5.56).

	Barra					
	1	2	3	4	5	6
I_{xx}	1.7479e+00	6.6083e-01	7.8298e-01	1.7956e-01	7.7448e-03	1.0812e-02
I_{xy}	0	-2.9435e-02	9.5417e-03	1.1793e-03	2.3414e-03	-1.4414e-03
I_{xz}	0	-7.2190e-01	5.1153e-02	8.7174e-05	1.4762e-03	2.5005e-03
I_{yy}	6.6988e-01	2.6884e-01	6.4961e-01	1.8171e-01	1.1786e-02	1.7371e-02
I_{yz}	0	1.2200e-02	-8.6840e-02	-2.7485e-03	4.3948e-03	5.6362e-03
I_{zz}	3.1233e-02	1.4897e+00	7.6953e-02	1.6024e-02	3.4404e-03	1.1740e-02
m_x	0	-3.9242e-01	7.0105e-02	4.2219e-03	1.5196e-02	-1.1246e-02
m_y	-5.3680e-01	2.2272e-01	-5.6946e-01	1.7258e-02	-3.8976e-04	-1.5315e-02
m_z	0	1.6333e+00	-9.9168e-01	-4.1113e-01	1.8075e-03	-1.7330e-02
m	1.0557e+01	1.4947e+01	6.8348e+00	1.1554e+00	1.5398e-01	3.7622e-01
I_{xx_r}	9.0000e-02	4.6463e-02	1.4105e-02	1.8596e-02	3.7940e-03	8.8547e-03
I_{xy_r}	0	2.6967e-04	-1.6137e-04	5.3339e-05	-2.1006e-05	1.9267e-05
I_{xz_r}	0	-2.2946e-06	-2.4838e-06	2.6828e-07	-2.6947e-07	-1.0528e-06
I_{yy_r}	9.0000e-02	4.6471e-02	1.3570e-02	1.8573e-02	3.8726e-03	8.5493e-03
I_{yz_r}	0	-1.3222e-05	-6.4561e-06	-3.5494e-08	8.1501e-07	-8.8389e-07
I_{zz_r}	6.2175e-05	7.7938e-06	1.4127e-04	2.6927e-05	3.4486e-05	2.1024e-05
m_{x_r}	0	-7.0715e-05	-1.6058e-05	-6.2711e-07	-1.0586e-06	3.6913e-06
m_{y_r}	0	4.4895e-05	-7.2899e-05	-2.1184e-07	1.1415e-06	-1.4728e-07
m_{z_r}	1.0000e-02	3.9168e-02	9.5859e-03	-8.0229e-02	1.9275e-02	-2.1394e-02
m_r	2.0000e-01	5.8844e-01	5.9600e-01	5.2280e-01	5.4900e-01	9.9683e-02
$f1$	5.7359e+00	2.6864e+01	2.7327e+00	4.6525e-01	8.1176e-01	1.4491e+00
$f2$	3.8040e+00	2.1889e-02	3.5506e+00	2.0913e+00	1.4053e+00	3.8195e+00
$f3$	5.8824e+00	2.6493e+01	1.4395e+00	7.2495e-01	7.1191e-01	1.2591e+00
$f4$	2.5452e+00	1.1653e+01	3.4326e+00	1.7206e+00	1.6801e+00	2.0646e+00

El conjunto de parámetros base mostrado en la Tabla 5.58 se ha obtenido a partir de los parámetros dinámicos identificados en la Tabla 5.57, considerando las combinaciones lineales de parámetros dinámicos que definen cada uno de los parámetros base.

Tabla 5.58. Parámetros base determinados a partir de los parámetros dinámicos identificados (unidades definidas como en la Tabla 5.56).

	Barra					
	1	2	3	4	5	6
I_{xx}	0	-1.4717e+00	3.0307e-01	9.6311e-03	1.3330e-02	-6.5591e-03
I_{xy}	0	-2.7039e-02	1.0059e-04	1.1793e-03	2.3414e-03	-1.4414e-03
I_{xz}	0	-9.2644e-01	5.0934e-02	8.7174e-05	1.4762e-03	2.5005e-03
I_{yy}	0	0	0	0	0	0
I_{yz}	0	1.7389e-02	-8.8221e-02	-2.7485e-03	4.3948e-03	5.6362e-03
I_{zz}	3.0501e+00	3.4508e+00	2.5110e-01	2.7810e-02	2.0811e-02	1.1740e-02
m_x	0	3.8413e+00	5.7309e-02	4.2219e-03	1.5196e-02	-1.1246e-02
m_y	0	2.0119e-01	-8.0380e-01	1.9066e-02	1.6941e-02	-1.5315e-02
m_z	0	0	0	0	0	0
m	0	0	0	0	0	0
I_{xx_r}	0	-8.0233e-06	5.3534e-04	2.3922e-05	-7.8630e-05	3.0543e-04
I_{xy_r}	0	2.6967e-04	-1.6137e-04	5.3339e-05	-2.1006e-05	1.9267e-05
I_{xz_r}	0	-2.2946e-06	-2.4838e-06	2.6828e-07	-2.6947e-07	-1.0528e-06
I_{yy_r}	0	0	0	0	0	0
I_{yz_r}	0	-1.3222e-05	-6.4561e-06	-3.5494e-08	8.1501e-07	-8.8389e-07
I_{zz_r}	0	0	1.4127e-04	2.6927e-05	3.4486e-05	2.1024e-05
m_{x_r}	0	-7.0715e-05	-1.6058e-05	-6.2711e-07	-1.0586e-06	3.6913e-06
m_{y_r}	0	4.4895e-05	-7.2899e-05	-2.1184e-07	1.1415e-06	-1.4728e-07
m_{z_r}	0	0	0	0	0	0
m_r	0	0	0	0	0	0
f_1	5.7359e+00	2.6864e+01	2.7327e+00	4.6525e-01	8.1176e-01	1.4491e+00
f_2	3.8040e+00	2.1889e-02	3.5506e+00	2.0913e+00	1.4053e+00	3.8195e+00
f_3	5.8824e+00	2.6493e+01	1.4395e+00	7.2495e-01	7.1191e-01	1.2591e+00
f_4	2.5452e+00	1.1653e+01	3.4326e+00	1.7206e+00	1.6801e+00	2.0646e+00

La Figura 5.56 muestra una comparación entre los pares calculados mediante cada uno de los conjuntos de parámetros base identificados para la trayectoria de test TFR3, distinta a la utilizada en el experimento de identificación. Los errores de par calculado correspondientes pueden verse en la Figura 5.57. La Tabla 5.59 muestra los valores medios de los residuos RMS de los errores del test de par calculado mostrados en la Figura 5.57.

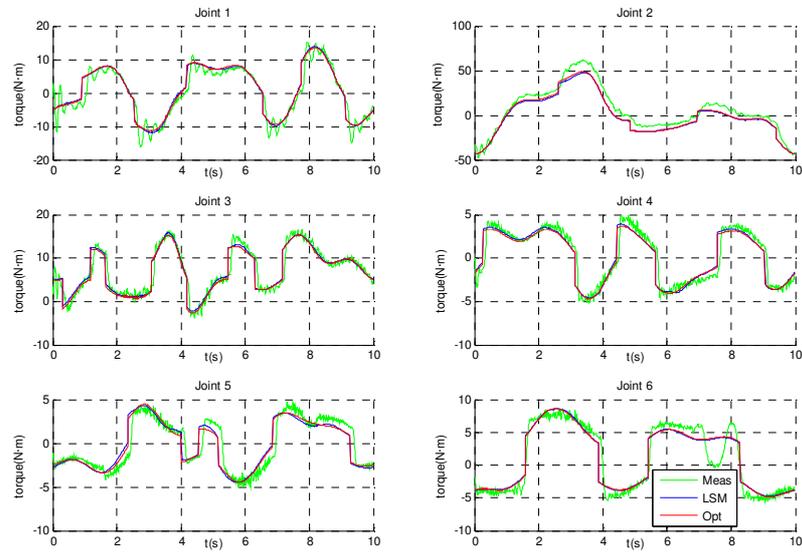


Figura 5.56. Test de par calculado para la trayectoria TFR3 aplicando LSM y el procedimiento de identificación propuesto para la identificación del conjunto de parámetros base correspondientes al modelo de barras rígidas y actuadores con el modelo de fricción F4.

Tabla 5.59. Valores medios de los residuos RMS de los errores del test de par calculado para la trayectoria TFR3 utilizando LSM y el algoritmo propuesto.

	Barra					
	1	2	3	4	5	6
<i>LSM</i>	2.366	7.4251	1.6979	1.0365	1.2559	1.5526
<i>OPT</i>	2.3728	6.9336	1.7614	1.0179	1.1968	1.5592

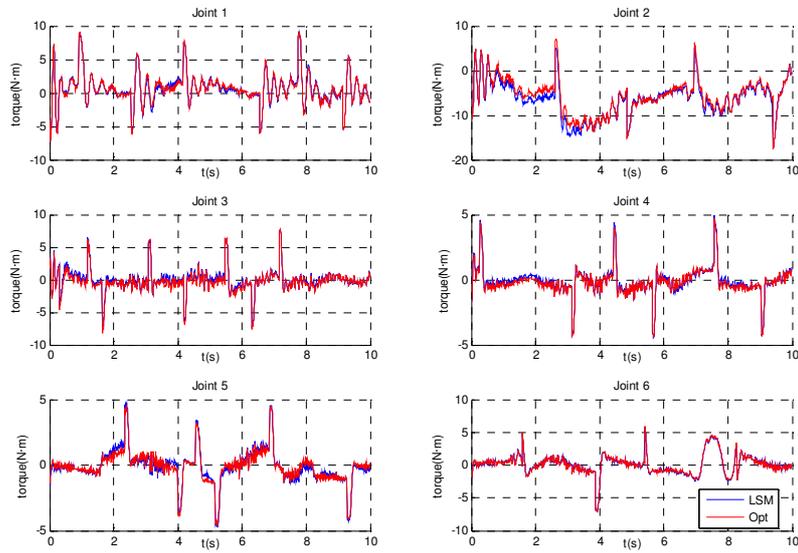


Figura 5.57. Errores del test de par calculado para la trayectoria TFR3 aplicando LSM y el procedimiento de identificación propuesto para la identificación del conjunto de parámetros base correspondientes al modelo de barras rígidas y actuadores con el modelo de fricción F4.

Los resultados anteriores muestran que el procedimiento propuesto no reduce significativamente la precisión de los pares calculados con respecto al algoritmo LSM, garantizando la factibilidad física del conjunto de parámetros identificados.

CAPÍTULO 6

CONCLUSIONES

En esta tesis, se ha abordado la problemática de la identificación experimental de los parámetros que definen el modelo dinámico de un robot manipulador industrial. Se ha empleado un modelo dinámico de barras rígidas del brazo robot, el cual se ha completado mediante el modelado de los actuadores, a fin de permitir la consideración del efecto giroscópico de los rotores. El modelo dinámico del robot se ha desarrollado a partir del formalismo dinámico de Gibbs-Appell, el cual aporta distintas ventajas, entre ellas la sencillez de las expresiones obtenidas y la fácil integración de la dinámica de los actuadores en el modelo. Las ecuaciones del modelo dinámico obtenidas han sido expresadas linealmente con respecto a los parámetros a identificar y en forma matricial. Por otra parte, se ha modelado asimismo el par debido a la fricción en las articulaciones, para lo cual se han considerado cuatro modelos distintos, dos de ellos simétricos y dos asimétricos, igualmente lineales respecto a sus coeficientes con el fin de permitir su inclusión en el anterior sistema lineal de ecuaciones. Por lo que respecta a la reducción del sistema dinámico al conjunto de parámetros base que definen de forma independiente el comportamiento dinámico del mismo, se han implementado dos métodos basados en sendas técnicas de análisis numérico de dependencia lineal en matrices, en concreto la descomposición QR y la descomposición en valores singulares o SVD.

Asimismo, se ha planteado la obtención de trayectorias optimizadas como medio de mejorar el condicionamiento numérico del problema de identificación y, en consecuencia, minimizar el efecto de la incertidumbre en las medidas, tanto de posición como de par en los nudos, sobre la precisión de los parámetros identificados. En particular, se han presentado las trayectorias parametrizadas mediante funciones analíticas como una solución de compromiso muy adecuada en cuanto a los números de condición obtenidos para la matriz de observación ensamblada a partir de la trayectoria y la complejidad computacional que implica la resolución del problema de optimización requerido para el cálculo de la misma. Se han comprobado las ventajas asociadas al uso de trayectorias periódicas parametrizadas mediante series finitas de Fourier, las cuales permiten la obtención de números de condición muy reducidos considerando un número limitado de armónicos y, además, ofrecen la posibilidad de efectuar el promediado temporal de las medidas, con lo que se consigue disminuir el error asociado a las mismas y, con ello, aumentar la precisión de los parámetros identificados sin necesidad de incrementar con ello el tamaño de la matriz de observación y, con éste, el tiempo de cómputo del problema de identificación.

Por lo que respecta a la identificación de los parámetros dinámicos, se han implementado tanto un método basado en el esquema de identificación directo como un método parcialmente basado en el esquema de identificación indirecto, mediante el cual se ha tratado de sacar provecho de algunas ventajas inherentes a cada uno de los esquemas de identificación mencionados.

Se ha prestado una especial atención al problema de la factibilidad física de los parámetros dinámicos identificados, aspecto muy importante si dichos parámetros identificados se van a aplicar en esquemas avanzados de control y crucial cuando se trata de su utilización en un contexto de simulación dinámica de sistemas mecánicos. Se ha analizado su origen y se ha propuesto un procedimiento para la solución de dicho problema basado en la aplicación de técnicas de optimización no lineal con restricciones no lineales a la resolución del sistema lineal sobredeterminado. Este procedimiento

permite garantizar la factibilidad física de los parámetros base identificados sin reducir significativamente la precisión de los resultados.

Finalmente, se ha comprobado la validez tanto del modelo dinámico utilizado como de los métodos de identificación propuestos mediante la identificación de parámetros a partir de datos simulados, así como mediante su aplicación experimental a un robot manipulador PUMA 560. Asimismo, se ha analizado la mejora que la inclusión de modelos completos de los actuadores supone frente al tradicional modelo de barras rígidas.

Cabe observar el grado de dificultad encontrado a la hora de modelar el comportamiento dinámico del PUMA 560 y, muy en especial, en lo que se refiere al par de fricción en los nudos. Dado que los actuadores están provistos de mecanismo de transmisión, el efecto de la fricción cobra una especial relevancia desde el punto de vista de su contribución al par total en los nudos. Además, dadas las características mecánicas de la primera articulación, tienen lugar en ésta una serie de fenómenos no modelables mediante los modelos de fricción considerados, como es la dependencia de la fricción tanto de la posición angular como de la carga soportada por dicha articulación. A todo ello, debe sumarse el estado de deterioro de los elementos mecánicos del robot, el cual acrecienta los efectos anteriormente mencionados.

En lo que se refiere a la comparación entre los métodos de identificación directo e indirecto implementados y tras observar el comportamiento de éstos en los experimentos realizados, pueden extraerse las siguientes conclusiones:

- Asumiendo las limitaciones del modelado de la fricción aplicado, el método directo propuesto se revela como el más fiable de cara a minimizar los errores de par calculado para el modelo dinámico identificado cuando se consideran trayectorias con una contribución considerable de los efectos inerciales, esto es con elevados valores de de las velocidades y aceleraciones angulares. Para trayectorias con valores reducidos de dichas magnitudes, el método indirecto

proporciona, en general, una predicción del par más precisa para la mayor parte de las articulaciones del manipulador, especialmente aquellas con una contribución predominante de los efectos de la fricción.

- Los experimentos de identificación llevados a cabo con únicamente las cinco últimas articulaciones del brazo robot resultaron en una apreciablemente mayor similitud de la precisión conseguida mediante los métodos de identificación directo e indirecto propuestos. Esto confirma la influencia de los fenómenos no modelados de fricción, los cuales son especialmente relevantes para la primera articulación del manipulador, sobre la precisión de los resultados de la identificación, particularmente para el método de identificación indirecto.
- Los modelos de fricción aplicados, limitados por la exigencia de linealidad con respecto a los coeficientes del modelo, no resultan enteramente apropiados a la hora de modelar los fenómenos de fricción que se han observado en el robot manipulador industrial PUMA 560 durante la fase experimental de la tesis, especialmente en el caso de la primera articulación. En concreto, la dependencia de la configuración y la influencia del par soportado por la articulación no pueden ser modelados mediante los modelos de fricción empleados. El modelado de otros fenómenos de fricción motivados por las condiciones dinámicas que se dan en trayectorias generales con efectos inerciales apreciables, requeriría asimismo la utilización de modelos de fricción no sometidos a las limitaciones inherentes a los métodos de identificación considerados.

Como continuación lógica del trabajo, se plantea la mejora y extensión del modelo dinámico del robot manipulador a fin de incrementar la precisión con que pueden describirse algunos de los fenómenos observados, así como permitir la inclusión de otros fenómenos hasta el momento no considerados. En este sentido, cabría ampliar las ecuaciones de la dinámica utilizadas en el modelo con el objetivo de hacer posible la modelización del fenómeno de la elasticidad en las articulaciones, fenómeno éste que

cobra una mayor importancia cuando aumentan los requerimientos sobre prestaciones del robot como la velocidad de ejecución de una trayectoria o el grado de precisión y repetibilidad de un determinado movimiento. Por otra parte, se considera muy conveniente la utilización de un modelo de fricción más completo que permita describir ciertos fenómenos no lineales observados durante las pruebas experimentales, entre ellos las zonas muertas o la dependencia de la fricción respecto a la posición y el nivel de carga, los cuales contribuyen a incrementar considerablemente el error en el par calculado mediante el modelo dinámico.

Además, convendría igualmente mejorar los algoritmos propuestos, en cuanto a complejidad computacional se refiere, a fin de que sea posible la utilización de éstos en estrategias de control por dinámica inversa o control adaptativo, donde se requiere la aplicación on-line de los mismos. Esto sugiere igualmente la conveniencia de desarrollar un algoritmo de identificación on-line de los parámetros dinámicos del modelo o de subconjuntos de ellos. Adicionalmente, convendría resolver totalmente las dificultades asociadas a la posibilidad física de los parámetros dinámicos identificados, así como realizar un estudio de su influencia tanto en el control como en la simulación de sistemas mecánicos. En concreto, debería desarrollarse un método eficiente que permitiera detectar de una forma sistemática la no factibilidad física de los parámetros identificados.

Por último, hay que mencionar que los procedimientos de identificación desarrollados en esta tesis son de aplicación a sistemas mecánicos con configuración de cadena cinemática abierta y, en particular, a una amplia variedad de robots industriales. Su aplicación a mecanismos de cadena cinemática cerrada exigiría un trabajo adicional, especialmente a la hora de generar las ecuaciones del movimiento en forma lineal respecto a los parámetros constantes a identificar. Asimismo, es razonable suponer que en este tipo de mecanismos se acrecienta la necesidad de incluir dentro del esquema de identificación modelos de fricción más complejos que los considerados hasta ahora.

Los distintos trabajos y aportaciones llevados a cabo durante la realización de la presente tesis han dado lugar a diversas publicaciones en revistas (Valera et al. 2003,

Mata et al. 2005) y participaciones en congresos (Provenzano et al. 2002, Benimeli et al. 2003, Mata et al. 2003, Abdellatif et al. 2004, Benimeli et al. 2005) en el campo de la identificación de parámetros.

CAPÍTULO 7

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] H. Abdellatif, F. Benimeli, M. Grotjahn, and B. Heimann, "Direct Identification of Dynamic Parameters for Parallel Manipulators," presented at Proc. of the Int. Conference on Mechatronics and Robotics 2004, MechRob2004, Aachen, Germany, 2004.
- [2] B. Armstrong, "On Finding Exciting Trajectories for Identification Experiments Involving Systems with Nonlinear Dynamics," *International Journal of Robotics Research*, vol. 8, pp. 28-48, 1989.
- [3] B. Armstrong, O. Khatib, and J. Burdick, "The Explicit Dynamic Model and Inertial Parameter of the Puma 560 Arm," presented at Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation, San Francisco, 1986.
- [4] C. G. Atkeson, C. H. An, and J. M. Hollerbach, "Estimation of Inertial Parameters of Manipulator Loads and Links," *International Journal of Robotics Research*, vol. 5, pp. 101-119, 1986.
- [5] F. Benimeli, V. Mata, N. Farhat, and A. Valera, "Experimental Set-up and Some Results in Parameter Identification in Robots," presented at Proceedings of RAAD'03, 12th International Workshop on Robotics in Alpe-Adria-Danube Region, Cassino, Italy, 2003.

- [6] F. Benimeli, V. Mata, and F. Valero, "A Comparison between Direct and Mixed Dynamic Parameter Identification Methods in Mechanical Systems," presented at MULTIBODY DYNAMICS 2005, ECCOMAS Thematic Conference, Madrid, Spain, 2005.
- [7] S. Bernard and W. Khalil, "Identifiable Parameters for Parallel Robots Kinematic Calibration," presented at Proc. IEEE Int. Conference on Robotics and Automation, Seoul, Korea, 2001.
- [8] G. Calafiore, M. Indri, and B. Bona, "Robot Dynamic Calibration: Optimal Excitation Trajectories and Experimental Parameter Estimation," *Journal of Robotic Systems*, vol. 18, pp. 55-68, 2001.
- [9] P. I. Corke and B. Armstrong-Hélouvry, "A Search for Consensus among Model Parameters Reported for the Puma-560 Robot," in *1994 IEEE International Conference on Robotics and Automation: Proceedings, Vols 1-4*, vol., *Ieee International Conference on Robotics and Automation*, Ed.^Eds., ed., 1994, pp. 1608-1613.
- [10] P. I. Corke and B. Armstrong-Hélouvry, "A Meta-Study of Puma 560 Dynamics: A Critical Appraisal of Literature Data," *ROBOTICA (Journal of the International Federation of Robotics)*, vol. 13, pp. 253-258, 1995.
- [11] M. Gautier, "Numerical-Calculation of the Base Inertial Parameters of Robots," *Journal of Robotic Systems*, vol. 8, pp. 485-506, 1991.
- [12] M. Gautier, "A Comparison of Filtered Models for Dynamic Identification of Robots," presented at Proceedings of the 35th Conference on Decision and Control, KOBE, JAPAN, 1996.
- [13] M. Gautier and W. Khalil, "On the Identification of the Inertial Parameters of Robots," presented at Proceedings of the 27th Conference on Decision and Control, 1988.
- [14] M. Gautier and W. Khalil, "Direct Calculation of Minimum Set of Inertial Parameters of Serial Robots," *Ieee Transactions on Robotics and Automation*, vol. 6, pp. 368-373, 1990.
- [15] M. Gautier and W. Khalil, "Exciting Trajectories for the Identification of Base Inertial Parameters of Robots," *International Journal of Robotics Research*, vol. 11, pp. 362-375, 1992.
- [16] M. Gautier, W. Khalil, and P. P. Restrepo, "Identification of the Dynamic Parameters of a Closed Loop Robot," presented at Proc. IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation, Nagoya, Japan, 1995.

- [17] M. Gautier and C. Presse, "Sequential Identification of Base Parameters of Robots," *Proceedings of the IEEE*, vol., pp., 1991.
- [18] M. Gautier, P. O. Vandanjon, and C. Presse, "Identification of Inertial and Drive Gain Parameters of Robots," presented at Proceedings of the 33rd Conference on Decision and Control, LAKE BUENA VISTA, 1994.
- [19] M. Ghodoussi and Y. Nakamura, "Principal Base Parameters of Open and Closed Kinematic Chains," presented at Proceedings of the 1991 IEEE International Conference on Robotics and Automation, Sacramento, 1991.
- [20] M. Grotjahn, M. Daemi, and B. Heimann, "Friction and Rigid Body Identification of Robot Dynamics," *International Journal of Solids and Structures*, vol. 38, pp. 1889-1902, 2001.
- [21] M. Grotjahn and B. Heimann, "Identification of the Dynamics of Parallel Kinematic Structures for Model-Based Control," presented at Proc. of the ECCOMAS Thematic Conference on Advances in computational Multibody Systems, Multibody Dynamics 2003, Lisbon, 2003.
- [22] M. Grotjahn, B. Heimann, and H. Abdellatif, "Identification of Friction and Rigid-Body Dynamics of Parallel Kinematic Structures for Model-Based Control," *Multibody System Dynamics*, vol. 11, pp. 273-294, 2004.
- [23] I. J. Ha, M. S. Ko, and S. K. Kwon, "An Efficient Estimation Algorithm for the Model Parameters of Robotic Manipulators," *Ieee Transactions on Robotics and Automation*, vol. 5, pp. 386-394, 1989.
- [24] M. Hiller, F. Bekes, and T. Bertarm, "Mechatronic Design in Automotive Systems," presented at Proceedings of MUSME 2002, the International Sysposium on Multibody Systems and Mechatronics, Mexico City, 2002.
- [25] J. M. Hollerbach, "A Recursive Lagrangian Formulation of Manipulator Dynamics and a Comparative Study of Dynamics Formulation Complexity," *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*, vol. 10, pp. 730-736, 1980.
- [26] W. Khalil and F. Bennis, "Symbolic Calculation of the Base Inertial Parameters of Closed-Loop Robots," *International Journal of Robotics Research*, vol. 14, pp. 112-128, 1995.
- [27] W. Khalil, F. Bennis, and M. Gautier, "The Use of the Generalized Links to Determine the Minimum Inertial Parameters of Robots," *Journal of Robotic Systems*, vol. 7, pp. 225-242, 1990.

- [28] W. Khalil and E. Dombre, *Modelling, Identification and Control of Robots*, vol., ed., 2002.
- [29] P. K. Khosla, "Categorization of Parameters in the Dynamic Robot Model," *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, vol. 5, pp. 261-268, 1989.
- [30] P. K. Khosla and T. Kanade, "Parameter Identification of Robot Dynamics," presented at Proceedings of the 24th IEEE Conference on Decision and Control, 1985.
- [31] P. K. Khosla and T. Kanade, "An Algorithm to Estimate Manipulator Dynamics Parameters," *International Journal of Robotics and Automation*, vol. 2, pp., 1987.
- [32] K. Kozłowski, *Modelling and Identification in Robotics*, vol., ed. London, Springer-Verlag London Limited, 1998.
- [33] S. K. Lin, "An Identification Method for Estimating the Inertia Parameters of a Manipulator," *Journal of Robotic Systems*, vol. 9, pp. 505-528, 1992.
- [34] S. K. Lin, "An Approach to the Identifiable Parameters of a Manipulator," *Journal of Robotic Systems*, vol. 11, pp. 641-656, 1994.
- [35] S. K. Lin, "Minimal Linear-Combinations of the Inertia Parameters of a Manipulator," *Ieee Transactions on Robotics and Automation*, vol. 11, pp. 360-373, 1995.
- [36] Z. R. Lu, K. B. Shimoga, and A. A. Goldenberg, "Experimental-Determination of Dynamic Parameters of Robotic Arms," *Journal of Robotic Systems*, vol. 10, pp. 1009-1029, 1993.
- [37] J. Y. S. Luh, M. W. Walker, and R. P. C. Paul, "On-Line Computational Scheme for Mechanical Manipulators," *ASME. Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control*, vol. 102, pp. 69-76, 1980.
- [38] V. Mata, F. Benimeli, A. Besa, and S. Provenzano, "Experimental Identification of Inertial Parameters of a Puma 560 Industrial Robot," presented at Proceedings of the 11th World Congress in Mechanism and Machine Science, Tianjin, China, 2003.
- [39] V. Mata, F. Benimeli, N. Farhat, and A. Valera, "Dynamic Parameter Identification in Industrial Robots Considering Physical Feasibility," *Advanced Robotics*, vol. 19, pp. 101-119, 2005.

- [40] V. Mata, S. Provenzano, F. Valero, and J. I. Cuadrado, "Serial-Robot Dynamics Algorithms for Moderately Large Numbers of Joints," *Mechanism and Machine Theory*, vol. 37, pp. 739-755, 2002.
- [41] H. Mayeda, K. Osuka, and A. Kangawa, "A New Identification Method for Serial Manipulator Arms," presented at Proceedings of the Ninth Triennial World Congress of IFAC, Budapest, Hungary, 1984.
- [42] H. Mayeda, K. Yoshida, and K. Osuka, "Base Parameters of Manipulator Dynamic-Models," vol. 6, pp. 312-321, 1990.
- [43] N. Moreira, P. Alvito, and P. Lima, "First Steps Towards an Open Control Architecture for a Puma 560," presented at Proceedings of the 2nd Portuguese Conference on Automatic Control, Porto, Portugal, 1996.
- [44] H. B. Olsen and G. A. Bekey, "Identification of Robot Dynamics," presented at Proceedings of the 1986 IEEE International Conference on Robotics and Automation, San Francisco, 1986.
- [45] M. M. Olsen and H. G. Petersen, "A New Method for Estimating Parameters of a Dynamic Robot Model," *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, vol. 17, pp. 95-100, 2001.
- [46] M. M. Olsen, J. Swevers, and W. Verdonck, "Maximum Likelihood Identification of a Dynamic Robot Model: Implementation Issues," *International Journal of Robotics Research*, vol. 21, pp. 89-96, 2002.
- [47] K. Otani and T. Kakizaki, "Motion Planning and Modeling for Accurately Identifying Dynamic Parameters of an Industrial Robotic Manipulator," presented at Proceedings of 24th ISIR, 1993.
- [48] M. R. Popovic and A. A. Goldenberg, "Modeling of Friction Using Spectral Analysis," *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, vol. 14, pp. 114-122, 1998.
- [49] C. Presse and M. Gautier, "New Criteria of Exciting Trajectories for Robot Identification," presented at Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation, Atlanta, 1993.
- [50] S. Provenzano, *Aplicación De Las Ecuaciones De Gibbs-Appell a La Dinámica De Robots*. Department of Mechanical Engineering, Universitat Politècnica de Valencia. Valencia, 2001.

- [51] S. Provenzano, V. Mata, and F. Benimeli, "Dynamic Simulation of Cooperating Robots," presented at Proceedings of MUSME 2002, the International Symposium on Multibody Systems and Mechatronics, Mexico City, 2002.
- [52] M. Prüfer, C. Schmidt, and F. Wahl, "Identification of Robot Dynamics with Differential and Integral Models: A Comparison," presented at Proc. of the IEEE International Conference on Robotics and Automation, San Diego, 1994.
- [53] K. Schittkowski, "NLPQL: A New Fortran Implementation of a Sequential Quadratic Programming Algorithm - Users Guide -," Department of Mathematics, University of Bayreuth, Bayreuth, Germany, June 2002.
- [54] R. Serban, J. F. Freeman, and D. Negrut, "Parameter Identification for Mutibody Dynamic Systems," presented at Proc. Of DETC/97 ASME Design Engineering Technical Conferences, Sacramento, California, 1997.
- [55] S. Y. Sheu and M. W. Walker, "Estimating the Essential Parameter Space of the Robot Manipulator Dynamics," presented at Proc. 28th Conference on Decision and Control, 1989.
- [56] S. Y. Sheu and M. W. Walker, "Identifying the Independent Inertial Parameter Space of Robot Manipulators," *International Journal of Robotics Research*, vol. 10, pp. 668-683, 1991.
- [57] J. Swevers, C. Ganseman, J. DeSchutter, and H. VanBrussel, "Experimental Robot Identification Using Optimised Periodic Trajectories," vol. 10, pp. 561-577, 1996.
- [58] J. Swevers, C. Ganseman, J. DeSchutter, and H. VanBrussel, "Generation of Periodic Trajectories for Optimal Robot Excitation," *Journal of Manufacturing Science and Engineering-Transactions of the Asme*, vol. 119, pp. 611-615, 1997.
- [59] J. Swevers, C. Ganseman, D. B. Tukel, J. DeSchutter, and H. VanBrussel, "Optimal Robot Excitation and Identification," *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, vol. 13, pp. 730-740, 1997.
- [60] A. Valera, V. Mata, M. Valles, F. Valero, N. Rosillo, and F. Benimeli, "Solving the Inverse Dynamics Control for Low Cost Real-Time Industrial Robot Control Applications," *Robotica*, vol. 21, pp. 261-269, 2003.
- [61] A. Valera, J. Vergara, J. Tornero, and E. Garcia, "Control a Puma500 Using a New Open Architecture," presented at 3th Portuguese Conf. On Automatic Control, University of Coimbra (Portugal), 1998.

- [62] K. Yoshida and W. Khalil, "Verification of the Positive Definiteness of the Inertial Matrix of Manipulators Using Base Inertial Parameters," *International Journal of Robotics Research*, vol. 19, pp. 498-510, 2000.

ANEXO A

DATOS DE UN PUMA 560

A.1. MODELO CINEMÁTICO DE LAS BARRAS

Los parámetros cinemáticos del modelo del manipulador de acuerdo al criterio de Denavit-Hartenberg estándar se detallan en la Tabla A.1. El parámetro θ_i corresponde a la posición angular de la articulación, coordenada generalizada denotada aquí por q_i , donde el subíndice i se refiere a la articulación correspondiente.

Tabla A.1. Parámetros del modelo cinemático de las barras según Denavit-Hartenberg estándar.

Barra	a_i	α_i	d_i	θ_i
1	0	$-\pi/2$	0	q_1
2	0.4318	0	0.14909	q_2
3	-0.02032	$\pi/2$	0	q_3
4	0	$-\pi/2$	0.4318	q_4
5	0	$\pi/2$	0	q_5
6	0	0	0.05625	q_6

Los parámetros cinemáticos de acuerdo al criterio de Denavit-Hartenberg modificado se detallan en la Tabla A.2.

Tabla A.2. Parámetros del modelo cinemático de las barras según Denavit-Hartenberg modificado.

Barra	a_i	α_i	d_i	θ_i
1	0	0	0	q_1
2	0	$-\pi/2$	0	q_2
3	0.4318	0	-0.14909	q_3
4	-0.02032	$\pi/2$	-0.4318	q_4
5	0	$-\pi/2$	0	q_5
6	0	$\pi/2$	0	q_6

En la siguiente tabla, se muestran las respectivas resoluciones de los encoders utilizados en cada articulación:

Tabla A.3. Resolución de los encoders

Barra	Cuentas/Revolución
1	250
2	200
3	200
4	250
5	250
6	250

A.2. MODELO CINEMÁTICO DE LOS ACTUADORES

En la Tabla A.4, se detallan las relaciones de transmisión Γ_i correspondientes a los motores de cada una de las seis articulaciones del robot manipulador. Estos valores han sido determinados de forma experimental, no coincidiendo exactamente con los proporcionados en Armstrong et al. 1986.

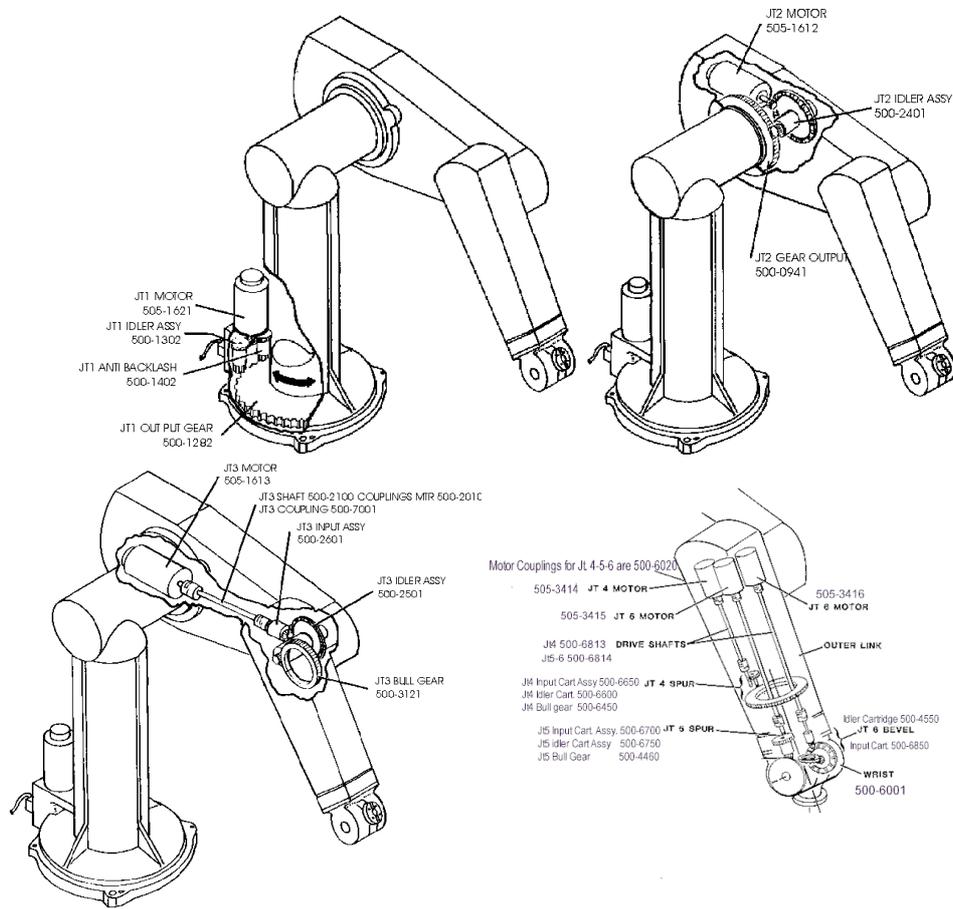


Figura A.1. Detalle de la disposición de los motores en un PUMA 500 (figuras tomadas del manual).

Tabla A.4. Relaciones de Transmisión de los Actuadores.

Barra	Γ_i
1	62.611
2	107.815
3	53.706
4	76.036
5	71.923
6	76.686

En cuanto a las constantes de par de los motores, es decir, la relación entre la intensidad suministrada al motor y el par generado por el mismo, en la Tabla A.5 se muestran los valores adoptados para las mismas.

Tabla A.5. Relaciones intensidad-par de los actuadores.

Barra	Constante (N·m/A)
1,2,3	0.21
4,5,6	0.07

Tabla A.6. Parámetros de Denavit-Hartenberg de los Motores.

Barra	θ_{s_i}	d_{s_i}	α_{s_i}	a_{s_i}
1	90	-1.0	0	0.15
2	90	0.241	90	-0.069
3	90	0.241	90	0.032
4	0	0.01	90	0.05
5	0	-0.02	90	0
6	0	0.009	90	-0.047

A.3. RESTRICCIONES CINEMÁTICAS

Como límite superior a la aceleración angular en valor absoluto, se ha utilizado 5 rad/s² para todas las articulaciones. En cuanto a la posición y velocidad angular, en Tabla A.7 y Tabla A.8 se muestran los valores correspondientes. En el caso de la velocidad angular, los valores deben ser igualmente considerados en valor absoluto.

Tabla A.7. Restricciones cinemáticas de posición angular en un PUMA 560 (grados).

Art.	q_{\min}	q_{\max}
1	-160.0	160.0
2	-225.0	45.0
3	-45.0	225.0
4	-110.0	170.0
5	-100.0	100.0
6	-266.0	266.0

Tabla A.8. Restricciones cinemáticas de velocidad angular en un PUMA 560 (grados/s).

Art.	$ \dot{q} _{\max}$
1	82.0
2	54.0
3	122.0
4	228.0
5	241.0
6	228.0

ANEXO B

IDENTIFICACIÓN DE LA FRICCIÓN

En Tabla B.1, Tabla B.2, Tabla B.3, Tabla B.4, Tabla B.5 y Tabla B.6 se muestra, respectivamente para cada articulación, las configuraciones utilizadas para llevar a cabo las medidas a velocidad constante.

Tabla B.1. Configuraciones utilizadas para la identificación de la fricción en el nudo 1 según el método de identificación indirecto (ángulos en grados).

Art.	Configuración										
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	-100	-80	-60	-40	-20	0	20	40	60	80	100
2						-90					
3						90					
4,5,6						0					

Tabla B.2. Configuraciones utilizadas para la identificación de la fricción en el nudo 2 según el método de identificación indirecto (ángulos en grados).

Art.	Configuración										
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
2	-165	-150	-135	-120	-105	-90	-75	-60	-45	-30	-15
3						90					
1,4,5,6						0					

Tabla B.3. Configuraciones utilizadas para la identificación de la fricción en el nudo 3 según el método de identificación indirecto (ángulos en grados).

Art.	Configuración										
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3	15	30	45	60	75	90	105	120	135	150	165
2	-91	-81	-71	-60	-51	-51	-41	-31	-21	-11	-1
1,4,5,6						0					

Tabla B.4. Configuraciones utilizadas para la identificación de la fricción en el nudo 4 según el método de identificación indirecto (ángulos en grados).

Art.	Configuración										
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
4	-70	-50	-30	-10	10	30	50	70	90	110	130
2	-91	-81	-71	-61	-51	-51	-41	-31	-21	-11	-1
3,5						90					
1,6						0					

Tabla B.5. Configuraciones utilizadas para la identificación de la fricción en el nudo 5 según el método de identificación indirecto (ángulos en grados).

Art.	Configuración										
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
5	-50	-40	-30	-20	-10	0	10	20	30	40	50
2	-91	-81	-71	-61	-51	-51	-41	-31	-21	-11	-1
4	-100	-90	-80	-70	-60	-60	-50	-40	-30	-20	-10
3						90					
1,6						0					

Tabla B.6. Configuraciones utilizadas para la identificación de la fricción en el nudo 6 según el método de identificación indirecto (ángulos en grados).

Art.	Configuración										
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
6	-175	-140	-105	-70	-35	0	35	70	105	140	175
2	-91	-81	-71	-61	-51	-51	-41	-31	-21	-11	-1
3						90					
1,4,5						0					

ANEXO C

DESARROLLO DE UN SISTEMA ROBÓTICO

INDUSTRIAL: PUMA 560

C.1. ARQUITECTURA DEL PUMA 560

El PUMA 560 es un robot manipulador industrial provisto de seis grados de libertad y constituido exclusivamente por pares de revolución. En esencia, el robot está integrado por dos partes diferenciadas, las cuales se describen a continuación: la unidad de control y el brazo robot, ambos unidos eléctricamente mediante dos mangueras.

C.1.1. Brazo Robot

El brazo robot se compone, como se mencionaba anteriormente, de seis barras unidas por pares de revolución actuados mediante motores de corriente continua de 40

voltios. Cada uno de los pares está provisto de un potenciómetro y de un encoder incremental, los cuales permiten determinar las posiciones angulares correspondientes.

En el extremo de la sexta barra del brazo robot, es posible montar una herramienta provista de un control abierto/cerrado a fin de operar la herramienta.

C.1.2. Unidad de Control

La unidad de control de un PUMA 560 se compone de los siguientes módulos:

- **Fuente de Potencia:** Este módulo proporciona el suministro de corriente eléctrica necesario para el funcionamiento del robot tanto a alta potencia, para los actuadores de los nudos, como a baja potencia, para los módulos de la unidad de control. Varios transformadores permiten la conversión del voltaje a los distintos niveles requeridos.
- **Panel de Control:** Permite el inicio y la parada del robot. Inicialmente, el transformador de baja potencia es conectado a fin de alimentar la unidad de control para, posteriormente, proceder a la conexión de los transformadores de alta potencia, los cuales proporcionan el suministro de potencia para el brazo robot. Ambos transformadores están situados en la fuente de potencia.
- **Módulo de Control:** Posibilita el control del robot. A fin de programar el robot, pueden conectarse una unidad de disco y un terminal a este módulo. El módulo está provisto de tarjetas de memoria, un procesador LSI-11/02, procesadores 6503, etc.
- **Módulo I/O:** Este módulo, controlado por el anterior, actúa como puente de comunicación con otros sistemas. Dispone de varios puertos de entrada y salida.

- **Módulo Amplificador:** Amplifica la potencia suministrada por la fuente de alimentación a fin de suministrar al brazo robot de acuerdo a la referencia recibida del módulo de control. Incluye siete tarjetas amplificadoras: tres a alta potencia para los tres primeros nudos, tres a baja potencia para los nudos de la muñeca y uno para el control de calentamiento de los amplificadores, el sistema de frenos y la operación de la herramienta.

C.1.3. Arquitectura Original

El robot manipulador PUMA 560 está provisto de un controlador UNIMATE MARK III, el cual incluye un procesador DEC LSI-11/02, seis paneles con servos digitales y analógicos y seis paneles amplificadores, tres a alta y tres a baja potencia. Cada uno de estos paneles amplificadores suministra al actuador del nudo correspondiente del brazo robot. Los servos digitales están provistos de un procesador Rockwell 6503 a fin de interpolar las trayectorias proporcionadas por el procesador LSI-11/02. Los paneles analógicos, los cuales están conectados a los paneles digitales a través de convertidores digitales/analógicos (DAC), contienen un servo analógico, diseñado como un controlador de retroalimentación activa, para cada uno de los actuadores de los nudos. La interacción con el usuario tiene lugar a través del VAL-II, el cual constituye el sistema operativo del procesador LSI-11/02.

La arquitectura original del robot manipulador PUMA 560 es muy similar a la mostrada en la Figura C.1 (véase Moreira et al. 1996).

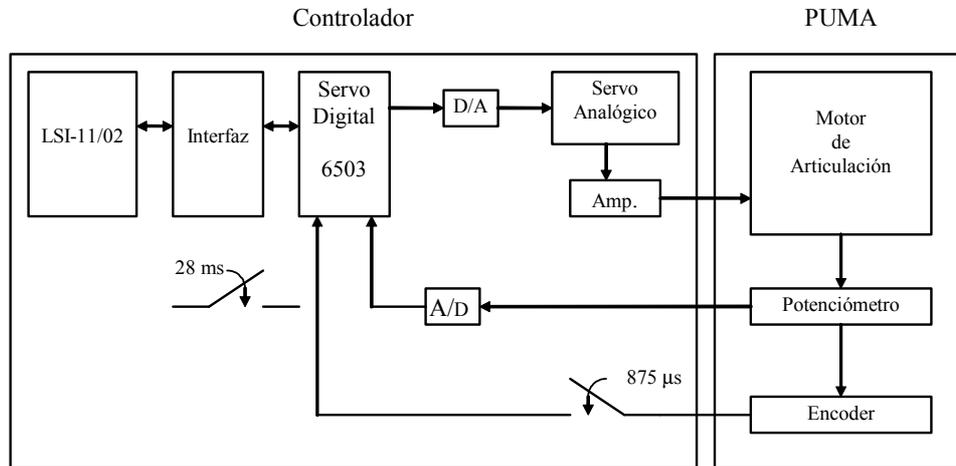


Figura C.1. Esquema de la arquitectura original de un PUMA 560.

A continuación, se describen los componentes que constituyen dicha arquitectura:

- **Procesador LSI-11/02:** Interpreta los comandos procedentes del VAL-II y transmite los conjuntos de puntos de posición a los seis procesadores 6503 a un ratio de 35.7 muestras por segundo.
- **Servos Digitales:** Seis servos digitales, cada uno de ellos provisto de un procesador 6503, lee las posiciones y velocidades actuales de los encoders a razón de 1.2 kmuestras por segundo. Este alto ratio requiere de la interpolación del conjunto de puntos determinado por el procesador LSI-11/02 a fin de alcanzar un ratio de 1.2 ksets de puntos por segundo. Partiendo de los errores de posición y velocidad, el procesador 6503 calcula los pulsos a transmitir a los servos analógicos a través del DAC.
- **Servos Analógicos:** Los servos analógicos escanean los pulsos en el conjunto de puntos procedentes de los servos digitales a fin de controlar la acción de cada actuador de nudo.

- **Amplificadores:** Los amplificadores de potencia suministran la potencia requerida por los actuadores de los nudos.
- **Encoders Incrementales:** Los encoders proporcionan tres señales de salida: los canales A y B y el Pulso Indexado. Los canales A y B están en cuadratura, lo cual permite detectar el sentido de rotación. El pulso indexado permite detectar una revolución completa del encoder. Esta señal, en combinación con la lectura del potenciómetro, permite la calibración de las lecturas de los encoders.
- **Potenciómetros:** La posición angular de los nudos proporcionada por los encoders es relativa, no permitiendo por tanto la determinación de la posición angular absoluta del nudo. Así pues, la lectura inicial de los encoders, durante la inicialización del brazo robot, es corregida mediante la posición angular absoluta del nudo suministrada por los potenciómetros. Los potenciómetros son leídos a través del convertidor analógico/digital (ADC).

Tal como se ha indicado anteriormente, la arquitectura de control original incluye un procesador LS-11/02, el cual interpreta los comandos del VAL-II y genera las trayectorias a transmitir a los seis servos digitales constituidos por los procesadores Rockwell 6503, los cuales generan las señales analógicas a través de los DACs (módulo de control). Estas señales son transmitidas a los amplificadores, los cuales suministran, a su vez, la potencia requerida por el brazo robot (módulo de amplificadores).

El bucle de control se completa con los potenciómetros y los encoders (brazo robot). Cada nudo está equipado con un potenciómetro, el cual proporciona la lectura de la posición angular absoluta, y un encoder, el cual suministra la posición angular relativa y posibilita una determinación más precisa de la posición angular del nudo.

C.2. ARQUITECTURA DE CONTROL ABIERTA

C.2.1. Introducción

Uno de los principales problemas encontrados a la hora de establecer el control de un sistema robótico industrial radica en la unidad de control del robot, ya que ésta constituye en general un subsistema totalmente cerrado. Debido al hecho de que el sistema de control utiliza su propio sistema operativo y no resulta posible modificar el sistema de control, incluso los valores de las ganancias, los usuarios encuentran serios problemas de cara a implementar tanto estrategias de control convencionales y avanzadas como control de fuerza o control cooperativo de varios robots. También es importante la posibilidad de programar generación automática de trayectorias, control basado en sensorización externa (por ejemplo, en visión), etc.

A fin de resolver estas dificultades, pueden encontrarse algunas soluciones tal como en Moreira et al. 1996, donde el hardware de control es modificado, lo cual no resulta normalmente, sin embargo, una tarea trivial ni económica. En Valera et al. 2003 y Valera et al. 1998, se propone una solución a estos inconvenientes, presentando una arquitectura de control muy simple, económica y totalmente abierta. A continuación, se describe esta arquitectura de control abierta, donde se reemplaza la unidad de control original del robot manipulador PUMA 560 mediante un PC provisto de tarjetas de adquisición de datos.

C.2.2. Arquitectura de Control Propuesta

La arquitectura de control original presenta muchos inconvenientes para llevar a cabo tareas de alto nivel, ya que el sistema operativo VAL-II está basado, como se

mencionaba anteriormente, en una arquitectura cerrada. Además, los controladores de los nudos, así como los algoritmos de generación de trayectorias, no pueden ser modificados.

A fin de evitar estas limitaciones, se propuso la sustitución de la unidad de control mediante un PC. De este modo, el PC accede a las posiciones angulares de los nudos y genera las acciones de control requeridas para accionar los distintos elementos del brazo robot, tal como se especifica en la Figura C.2.

Como puede observarse en la Figura C.3, las lecturas de las posiciones angulares de los nudos del brazo robot son obtenidas a través de las tarjetas de adquisición de datos, las cuales recogen las señales de los potenciómetros y los encoders. Las acciones de control calculadas por medio de los algoritmos de control implementados en el PC son similarmente transmitidas a través de las tarjetas de adquisición de datos a los actuadores correspondientes.

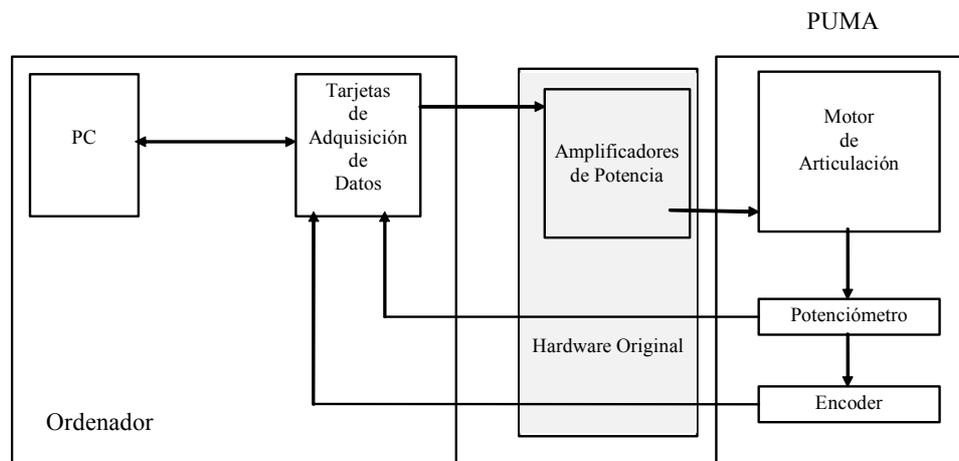


Figura C.2. Arquitectura de control abierta propuesta.

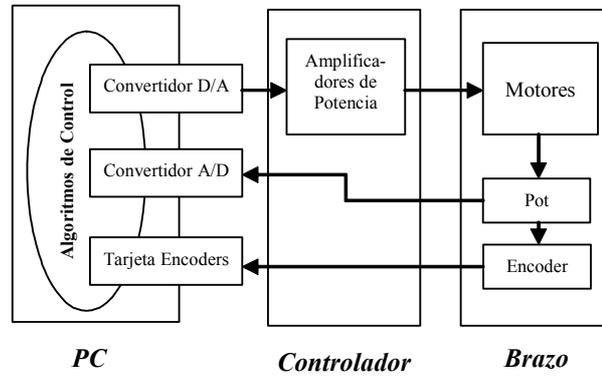


Figura C.3. Esquema de entradas y salidas de la arquitectura de control propuesta.

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 2.1. Esquema de la asignación de los sistemas de referencia locales de barras y rotores.	23
Figura 2.2. Gráficas par-velocidad para un modelo de fricción clásico (izquierda) y real (derecha).	51
Figura 2.3. Fenómeno de histéresis en la evolución del par de fricción con la velocidad.	54
Figura 3.1. Posición angular correspondiente a las trayectorias optimizadas TFL0 y TFL1.	80
Figura 3.2. Velocidad angular correspondiente a las trayectorias optimizadas TFL0 y TFL1.	80
Figura 3.3. Aceleración angular correspondiente a las trayectorias optimizadas TFL0 y TFL1.	81
Figura 3.4. Trayectoria en espacio de trabajo descrita por el elemento terminal para las trayectorias TFL0 (izquierda) y TFL1 (derecha), optimizadas para el modelo dinámico de barras.	82
Figura 3.5. Posición angular correspondiente a las trayectorias optimizadas TFR0 y TFR1.	83
Figura 3.6. Velocidad angular correspondiente a las trayectorias optimizadas TFR0 y TFR1.	84
Figura 3.7. Aceleración angular correspondiente a las trayectorias optimizadas TFR0 y TFR1.	84
Figura 3.8. Trayectoria en espacio de trabajo descrita por el elemento terminal para las trayectorias TFR0 (arriba) y TFR1 (abajo), optimizadas para el modelo dinámico de barras y rotores.	85
Figura 4.1. Esquema de identificación directa.	89
Figura 4.2. Esquema de identificación indirecta.	92
Figura 5.1. Esquema de validación con un modelo dinámico del robot con parámetros conocidos a priori.	108
Figura 5.2. Esquema de validación utilizando un robot manipulador industrial.	108
Figura 5.3. Test de par calculado para la trayectoria TFL0 utilizando los parámetros base identificados para el modelo dinámico de barras rígidas a partir de datos simulados con errores de medida.	119

Figura 5.4. Errores del test de par calculado para la trayectoria TFL0 utilizando los parámetros base identificados para el modelo dinámico de barras rígidas a partir de datos simulados con errores.	119
Figura 5.5. Test de par calculado para la trayectoria TFL1 utilizando los parámetros base identificados para el modelo dinámico de barras rígidas a partir de datos simulados con errores de medida.	120
Figura 5.6. Errores del test de par calculado para la trayectoria TFL1 utilizando los parámetros base identificados para el modelo dinámico de barras rígidas a partir de datos simulados con errores.	120
Figura 5.7. Test de par calculado con la trayectoria TFL0 para el modelo dinámico de barras rígidas sin modelado de la fricción.	125
Figura 5.8. Errores del test de par calculado con la trayectoria TFL0 para el modelo dinámico de barras rígidas sin modelado de la fricción.	125
Figura 5.9. Test de par calculado con la trayectoria TFL0 para el modelo dinámico de barras rígidas con cuatro modelos de fricción distintos.	129
Figura 5.10. Errores del test de par calculado con la trayectoria TFL0 para el modelo dinámico de barras rígidas con cuatro modelos de fricción distintos.	129
Figura 5.11. Test de par calculado con la trayectoria TFL1 para el modelo dinámico de barras rígidas con cuatro modelos de fricción distintos.	131
Figura 5.12. Errores del test de par calculado con la trayectoria TFL1 para el modelo dinámico de barras rígidas con cuatro modelos de fricción distintos.	131
Figura 5.13. Comparación de par medido y calculado para los distintos modelos de fricción correspondiente a determinadas configuraciones del experimento de identificación de fricción del método indirecto.	135
Figura 5.14. Ejemplo de un perfil trapezoidal de velocidad para el experimento de identificación de fricción en el método indirecto.	138
Figura 5.15. Ejemplo de curva de fricción par-velocidad en una articulación.	139
Figura 5.16. Pares medidos y contribuciones debidas a fricción, gravedad e inercia obtenidas para la trayectoria TFL0.	140
Figura 5.17. Test de par calculado con la trayectoria TFL0 para los métodos de identificación directo e indirecto.	142
Figura 5.18. Errores del test de par calculado con la trayectoria TFL0 para los métodos de identificación directo e indirecto.	142
Figura 5.19. Test de par calculado con la trayectoria TFL1 para los métodos de identificación directo e indirecto.	144
Figura 5.20. Errores del test de par calculado con la trayectoria TFL1 para los métodos de identificación directo e indirecto.	144

Figura 5.21. Test de par calculado con la trayectoria a velocidad constante TC1 (2.0 rad/s) para los métodos de identificación directo e indirecto.	146
Figura 5.22. Errores del test de par calculado con la trayectoria a velocidad constante TC1 (2.0 rad/s) para los métodos de identificación directo e indirecto.	146
Figura 5.23. Test de par calculado con la trayectoria a velocidad constante TC2 (0.1 rad/s) para los métodos de identificación directo e indirecto.	147
Figura 5.24. Errores del test de par calculado con la trayectoria a velocidad constante TC2 (0.1 rad/s) para los métodos de identificación directo e indirecto.	147
Figura 5.25. Evolución de los valores medios de los residuos RMS de los errores del test de par calculado con la velocidad angular para trayectorias a velocidad constante.	148
Figura 5.26. Test de par calculado con la trayectoria spline cúbica TS1 (1.6 rad/s) para los métodos de identificación directo e indirecto.	150
Figura 5.27. Errores del test de par calculado con la trayectoria spline cúbica TS1 (1.6 rad/s) para los métodos de identificación directo e indirecto.	150
Figura 5.28. Test de par calculado con la trayectoria spline cúbica TS2 (0.1 rad/s) para los métodos de identificación directo e indirecto.	151
Figura 5.29. Errores del test de par calculado con la trayectoria spline cúbica TS2 (0.1 rad/s) para los métodos de identificación directo e indirecto.	151
Figura 5.30. Evolución de los valores medios de los residuos RMS de los errores del test de par calculado con la velocidad angular para trayectorias spline cúbicas.	152
Figura 5.31. Configuraciones del robot utilizadas en el experimento para el estudio de posibles dependencias de la fricción.	156
Figura 5.32. Evolución de los parámetros de fricción de la primera articulación con la configuración de la primera y segunda articulaciones.	157
Figura 5.33. Evolución de los parámetros de fricción de la primera articulación con la carga del elemento terminal.	157
Figura 5.34. Test de par calculado con la trayectoria TFL0 para los métodos de identificación directo e indirecto (primera articulación en reposo).	160
Figura 5.35. Errores del test de par calculado con la trayectoria TFL0 para los métodos de identificación directo e indirecto (primera articulación en reposo).	160
Figura 5.36. Test de par calculado con la trayectoria TFL1 para los métodos de identificación directo e indirecto (primera articulación en reposo).	162
Figura 5.37. Errores del test de par calculado con la trayectoria TFL1 para los métodos de identificación directo e indirecto (primera articulación en reposo).	162

Figura 5.38. Test de par calculado con la trayectoria a velocidad constante TC1 (2.0 rad/s) para los métodos de identificación directo e indirecto (primera articulación en reposo).	164
Figura 5.39. Errores del test de par calculado con la trayectoria a velocidad constante TC1 (2.0 rad/s) para los métodos de identificación directo e indirecto (primera articulación en reposo).	164
Figura 5.40. Test de par calculado con la trayectoria a velocidad constante TC2 (0.1 rad/s) para los métodos de identificación directo e indirecto (primera articulación en reposo).	165
Figura 5.41. Errores del test de par calculado con la trayectoria a velocidad constante TC2 (0.1 rad/s) para los métodos de identificación directo e indirecto (primera articulación en reposo).	165
Figura 5.42. Evolución del RMS de los errores del test de par calculado con la velocidad angular para trayectorias a velocidad constante (primera articulación en reposo).	166
Figura 5.43. Test de par calculado con la trayectoria spline cúbica TS1 (1.6 rad/s) para los métodos de identificación directo e indirecto (primera articulación en reposo).	168
Figura 5.44. Errores del test de par calculado con la trayectoria spline cúbica TS1 (1.6 rad/s) para los métodos de identificación directo e indirecto (primera articulación en reposo).	168
Figura 5.45. Test de par calculado con la trayectoria spline cúbica TS2 (0.1 rad/s) para los métodos de identificación directo e indirecto (primera articulación en reposo).	169
Figura 5.46. Errores del test de par calculado con la trayectoria spline cúbica TS2 (0.1 rad/s) para los métodos de identificación directo e indirecto (primera articulación en reposo).	169
Figura 5.47. Evolución del RMS de los errores del test de par calculado con la velocidad angular para trayectorias spline cúbicas (primera articulación en reposo).	170
Figura 5.48. Test de par calculado para la trayectoria TFR1 con los modelos dinámicos de barras y de barras y actuadores.	173
Figura 5.49. Errores del test de par calculado para la trayectoria TFR1 con los modelos dinámicos de barras y de barras y actuadores.	173
Figura 5.50. Test de par calculado para la trayectoria a velocidad constante TC3 (1.0 rad/s) con los modelos dinámicos de barras y de barras y actuadores.	175
Figura 5.51. Errores del test de par calculado para la trayectoria a velocidad constante TC3 (1.0 rad/s) con los modelos dinámicos de barras y de barras y actuadores.	175
Figura 5.52. Evolución del RMS de los errores del test de par calculado con la velocidad angular para trayectorias a velocidad constante con el modelo dinámico de barras rígidas y actuadores (primera articulación en reposo).	176

Figura 5.53. Test de par calculado para la trayectoria spline cúbica TS3 (1.0 rad/s) con los modelos dinámicos de barras y de barras y actuadores.	178
Figura 5.54. Errores del test de par calculado para la trayectoria spline cúbica TS3 (1.0 rad/s) con los modelos dinámicos de barras y de barras y actuadores.	178
Figura 5.55. Evolución del RMS de los errores del test de par calculado con la velocidad angular para trayectorias spline cúbicas con el modelo dinámico de barras rígidas y actuadores (primera articulación en reposo).	179
Figura 5.56. Test de par calculado para la trayectoria TFR3 aplicando LSM y el procedimiento de identificación propuesto para la identificación del conjunto de parámetros base correspondientes al modelo de barras rígidas y actuadores con el modelo de fricción F4.	186
Figura 5.57. Errores del test de par calculado para la trayectoria TFR3 aplicando LSM y el procedimiento de identificación propuesto para la identificación del conjunto de parámetros base correspondientes al modelo de barras rígidas y actuadores con el modelo de fricción F4.	187
Figura A.1. Detalle de la disposición de los motores en un PUMA 500 (figuras tomadas del manual).	205
Figura 7.2. Esquema de la arquitectura original de un PUMA 560.	216
Figura 7.3. Arquitectura de control abierta propuesta.	219
Figura 7.4. Esquema de entradas y salidas de la arquitectura de control propuesta.	220

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 2.1. Parámetros base del modelo dinámico de barras rígidas de un robot PUMA 560.	65
Tabla 2.2. Parámetros base del modelo dinámico de barras rígidas y rotores de un robot PUMA 560 (I).	66
Tabla 2.3. Parámetros base del modelo dinámico de barras rígidas y rotores de un robot PUMA 560 (II).	67
Tabla 3.1. Números de condición de la matriz de observación con distintas trayectorias optimizadas para el modelo de barras.	79
Tabla 3.2. Números de condición de la matriz de observación con distintas trayectorias optimizadas para el modelo de barras sin parámetros de gravedad.	82
Tabla 3.3. Números de condición de la matriz de observación con distintas trayectorias optimizadas para el modelo de barras y rotores.	83
Tabla 4.1. Parámetros base gravitatorios del modelo dinámico de barras determinados para el movimiento de una sola articulación a velocidad constante.	95
Tabla 4.2. Parámetros base gravitatorios del modelo dinámico de barras y actuadores determinados para el movimiento de una sola articulación a velocidad constante.	96
Tabla 4.3. Parámetros base cuyo valor negativo imposibilita la factibilidad física del conjunto de parámetros base del modelo dinámico de barras para un robot manipulador PUMA 560.	100
Tabla 4.4. Parámetros base cuyo valor negativo imposibilita la factibilidad física del conjunto de parámetros base del modelo dinámico de barras y actuadores para un robot manipulador PUMA 560.	101
Tabla 5.1. Valores conocidos a priori de los parámetros inerciales del modelo dinámico de barras rígidas.	110
Tabla 5.2. Valores calculados de los parámetros base del modelo dinámico de barras rígidas.	110
Tabla 5.3. Valores conocidos a priori de los parámetros inerciales del modelo dinámico de barras rígidas y actuadores (I).	111
Tabla 5.4. Parámetros inerciales conocidos a priori del modelo de barras rígidas y actuadores (II).	111

Tabla 5.5. Parámetros base calculados del modelo dinámico de barras rígidas y actuadores (I).	112
Tabla 5.6. Parámetros base calculados del modelo dinámico de barras rígidas y actuadores (II).	112
Tabla 5.7. Valores conocidos a priori de los coeficientes del model de fricción F4 considerados en los experimentos de simulación.	113
Tabla 5.8. Valores conocidos a priori de los coeficientes del model de fricción F6 considerados en los experimentos de simulación.	113
Tabla 5.9. Parámetros base identificados a partir de datos simulados sin errores mediante el método de identificación directo.	115
Tabla 5.10. Parámetros base identificados a partir de datos simulados sin errores mediante el método de identificación indirecto.	116
Tabla 5.11. RMS para los distintos métodos de identificación utilizando datos simulados sin errores de medida aplicando la trayectoria TFL1.	116
Tabla 5.12. Valores de desviación estándar utilizadas en la simulación de errores de medida respectivamente para las medidas de posición angular (rad) y par en los nudos (N·m).	116
Tabla 5.13. Parámetros base identificados a partir de datos simulados con errores mediante el método directo.	117
Tabla 5.14. Parámetros base identificados a partir de datos simulados con errores con el método indirecto.	118
Tabla 5.15. RMS para los distintos métodos de identificación utilizando datos simulados con simulación de errores de medida aplicando la trayectoria TFL1.	118
Tabla 5.16. Valores medios de los residuos RMS para la trayectoria test TFL1 utilizando los parámetros base identificados para el modelo dinámico de barras rígidas a partir de datos simulados con errores de medida.	121
Tabla 5.17. Desviación estándar de los errores de medida para posición angular (rad) y par en los nudos (N·m) determinados a partir de la trayectoria TFL0.	123
Tabla 5.18. Valores de los parámetros base identificados para el modelo dinámico de barras rígidas.	124
Tabla 5.19. RMS para la trayectoria de identificación TFL0 utilizando el modelo dinámico de barras rígidas sin modelado de la fricción.	124
Tabla 5.20. Parámetros base identificados para el modelo dinámico de barras rígidas con el modelo de fricción F2.	126
Tabla 5.21. Parámetros base identificados para el modelo dinámico de barras rígidas con el modelo de fricción F3.	127

Tabla 5.22. Parámetros base identificados para el modelo dinámico de barras rígidas con el modelo de fricción F4.	127
Tabla 5.23. Parámetros base identificados para el modelo dinámico de barras rígidas con el modelo de fricción F6.	128
Tabla 5.24. RMS con la trayectoria TFL0 para el modelo dinámico de barras rígidas con cuatro modelos de fricción distintos.	130
Tabla 5.25. Valores medios de los residuos RMS con la trayectoria TFL1 para el modelo dinámico de barras rígidas con cuatro modelos de fricción distintos.	130
Tabla 5.26. Números de condición de las matrices de observación obtenidas para cada modelo de fricción en el primer paso del método de identificación indirecto.	133
Tabla 5.27. Parámetros base de gravedad y fricción identificados con el modelo de fricción F2 mediante el método indirecto.	133
Tabla 5.28. Parámetros base de gravedad y fricción identificados con el modelo de fricción F3 mediante el método indirecto.	133
Tabla 5.29. Parámetros base de gravedad y fricción identificados con el modelo de fricción F4 mediante el método indirecto.	133
Tabla 5.30. Parámetros base de gravedad y fricción identificados con el modelo de fricción F6 mediante el método indirecto.	134
Tabla 5.31. Valores medios de los residuos RMS para el experimento de identificación de fricción del método indirecto con cuatro modelos de fricción distintos.	135
Tabla 5.32. Valores de velocidad (rad/s) considerados para el experimento de identificación de fricción en el método indirecto.	137
Tabla 5.33. Parámetros base de inercia identificados en el segundo paso del método de identificación indirecto.	141
Tabla 5.34. Valores medios de los residuos RMS de los errores del test de par calculado con la trayectoria TFL0 para los métodos de identificación directo e indirecto.	141
Tabla 5.35. Valores medios de los residuos RMS de los errores del test de par calculado con la trayectoria TFL1 para los métodos de identificación directo e indirecto.	143
Tabla 5.36. Valores medios de los residuos RMS de los errores del test de par calculado con la trayectoria a velocidad constante TC1 (2.0 rad/s) para los métodos de identificación directo e indirecto.	145
Tabla 5.37. Valores medios de los residuos RMS de los errores del test de par calculado con la trayectoria a velocidad constante TC2 (0.1 rad/s) para los métodos de identificación directo e indirecto.	145
Tabla 5.38. Valores medios de los residuos RMS de los errores del test de par calculado con la trayectoria spline cúbica TS1 (1.6 rad/s) para los métodos de identificación directo e indirecto.	149

Tabla 5.39. Valores medios de los residuos RMS de los errores del test de par calculado con la trayectoria spline cúbica TS2 (0.1 rad/s) para los métodos de identificación directo e indirecto.	149
Tabla 5.40. Parámetros base inerciales y de fricción identificados incluyendo el modelo de fricción en el segundo paso del método de identificación indirecto.	155
Tabla 5.41. Residuos RMS de los errores de par calculado con la trayectoria TFL0 para los métodos de identificación directo e indirecto, así como para el método indirecto con inclusión del modelo de fricción en el segundo paso (IFI).	155
Tabla 5.42. Parámetros base identificados mediante el método directo para las cinco últimas articulaciones.	159
Tabla 5.43. Parámetros base inerciales identificados mediante el método de identificación indirecto con la primera articulación en reposo.	159
Tabla 5.44. RMS de los errores del test de par calculado con la trayectoria TFL0 para los métodos de identificación directo e indirecto (primera articulación en reposo).	161
Tabla 5.45. RMS de los errores del test de par calculado con la trayectoria TFL1 para los métodos de identificación directo e indirecto (primera articulación en reposo).	161
Tabla 5.46. Valores medios de los residuos RMS de los errores del test de par calculado con la trayectoria a velocidad constante TC1 (2.0 rad/s) para los métodos de identificación directo e indirecto (primera articulación en reposo).	163
Tabla 5.47. Valores medios de los residuos RMS de los errores del test de par calculado con la trayectoria a velocidad constante TC2 (0.1 rad/s) para los métodos de identificación directo e indirecto (primera articulación en reposo).	163
Tabla 5.48. Valores medios de los residuos RMS de los errores del test de par calculado con la trayectoria spline cúbica TS1 (1.6 rad/s) para los métodos de identificación directo e indirecto (primera articulación en reposo).	167
Tabla 5.49. RMS de los errores del test de par calculado con la trayectoria spline cúbica TS2 (0.1 rad/s) para los métodos de identificación directo e indirecto (primera articulación en reposo).	167
Tabla 5.50. Parámetros base identificados a partir de la trayectoria TFR0 para el modelo dinámico de barras rígidas y actuadores con el modelo de fricción F4.	172
Tabla 5.51. Valores medios de los residuos RMS de los errores del test de par calculado con la trayectoria TFR1 para los modelos dinámicos de barras y de barras y actuadores.	174
Tabla 5.52. Valores medios de los residuos RMS de los errores del test de par calculado con la trayectoria a velocidad constante TC3 (1.0 rad/s) para los modelos dinámicos de barras y de barras y actuadores.	176
Tabla 5.53. RMS de los errores del test de par calculado con la trayectoria spline cúbica TS3 (1.0 rad/s) para los modelos dinámicos de barras y de barras y actuadores.	177

Tabla 5.54. Parámetros base identificados para el modelo dinámico de barras rígidas y actuadores con el modelo de fricción F4 a partir de los datos simulados.	181
Tabla 5.55. Parámetros base identificados para el modelo dinámico de barras rígidas y actuadores con el modelo de fricción F2 a partir de los datos simulados.	182
Tabla 5.56. Parámetros base identificados a partir de datos medidos utilizando LSM (masas expresadas en kg., momentos de primer orden en kg·m, momentos y productos de inercia en kg·m ² , coeficientes de fricción seca en N·m y coeficientes de fricción viscosa en N·s).	183
Tabla 5.57. Parámetros dinámicos identificados a partir de datos medidos utilizando el procedimiento de identificación propuesto (unidades definidas como en la Tabla 5.56).	184
Tabla 5.58. Parámetros base determinados a partir de los parámetros dinámicos identificados (unidades definidas como en la Tabla 5.56).	185
Tabla 5.59. Valores medios de los residuos RMS de los errores del test de par calculado para la trayectoria TFR3 utilizando LSM y el algoritmo propuesto.	186
Tabla A.1. Parámetros del modelo cinemático de las barras según Denavit-Hartenberg estándar.	203
Tabla A.2. Parámetros del modelo cinemático de las barras según Denavit-Hartenberg modificado.	204
Tabla A.3. Resolución de los encoders	204
Tabla A.4. Relaciones de Transmisión de los Actuadores.	205
Tabla A.5. Relaciones intensidad-par de los actuadores.	206
Tabla A.6. Parámetros de Denavit-Hartenberg de los Motores.	206
Tabla A.7. Restricciones cinemáticas de posición angular en un PUMA 560 (grados).	207
Tabla A.8. Restricciones cinemáticas de velocidad angular en un PUMA 560 (grados/s).	207
Tabla 7.9. Configuraciones utilizadas para la identificación de la fricción en el nudo 1 según el método de identificación indirecto (ángulos en grados).	209
Tabla 7.10. Configuraciones utilizadas para la identificación de la fricción en el nudo 2 según el método de identificación indirecto (ángulos en grados).	210
Tabla 7.11. Configuraciones utilizadas para la identificación de la fricción en el nudo 3 según el método de identificación indirecto (ángulos en grados).	210
Tabla 7.12. Configuraciones utilizadas para la identificación de la fricción en el nudo 4 según el método de identificación indirecto (ángulos en grados).	210
Tabla 7.13. Configuraciones utilizadas para la identificación de la fricción en el nudo 5 según el método de identificación indirecto (ángulos en grados).	210

Tabla 7.14. Configuraciones utilizadas para la identificación de la fricción en el nudo 6 según el método de identificación indirecto (ángulos en grados). 211

