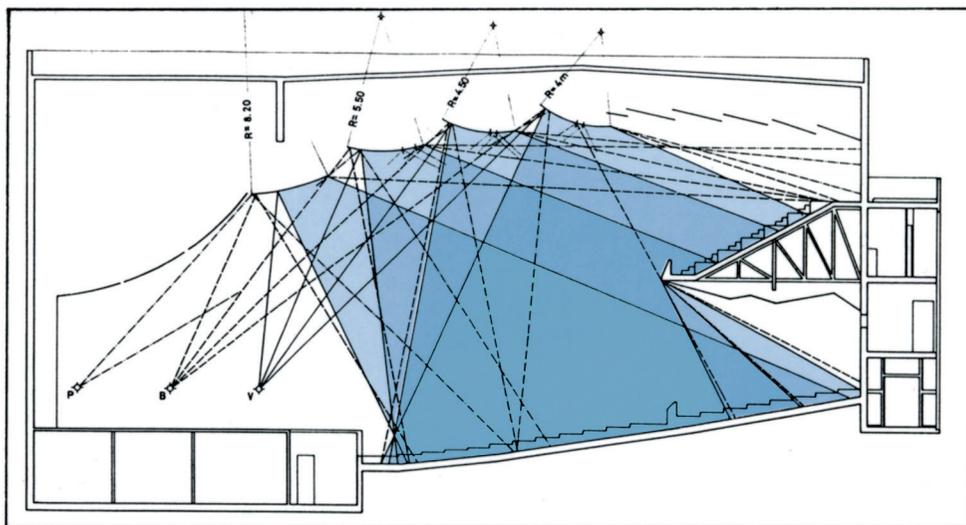
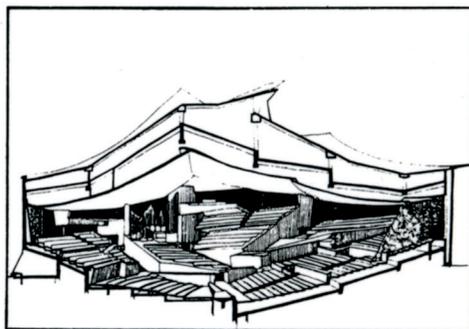


ACUSTICA

ARQUITECTONICA Y URBANISTICA



J. LLINARES
A. LLOPIS
J. SANCHO



Fco. Javier Sancho Vendrell
Llinares Galiana
Ana Llopis Reyna

ACÚSTICA ARQUITECTÓNICA Y URBANÍSTICA

**EDITORIAL
UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA**

Primera edición, 1990
Primera edición, 1996 ▪ reimpresión, 2011

© de la presente edición:
Editorial Universitat Politècnica de València
www.editorial.upv.es

Distribución: pedidos@editorial.upv.es
Tel. 96 387 70 12

© Todos los nombres comerciales, marcas o signos distintivos de cualquier clase contenidos en la obra están protegidos por la Ley.

© Fco. Javier Sancho Vendrell
Jaime Llinares Galiana
Ana Llopis Reyna

Imprime: Byprint Percom sl.

ISBN: 978-84-7721-441-0
Depósito Legal: V-1529-2011
Ref. editorial: 640

Queda prohibida la reproducción, distribución, comercialización, transformación, y en general, cualquier otra forma de explotación, por cualquier procedimiento, de todo o parte de los contenidos de esta obra sin autorización expresa y por escrito de sus autores.

Impreso en España

I n d i c e

Prólogo.	9
-----------------------	---

Capítulo I: Movimiento armónico simple.

1.1: Introducción.	13
1.2: Movimiento armónico simple. definición y parámetros.	14
1.3: Dinámica del movimiento armónico simple.	17
1.4: Energía del movimiento armónico simple.	18
1.5: Composición de movimientos armónicos simples de igual dirección y frecuencia.	20
1.6: Composición de 2 movimientos vibratorios de igual dirección y distinta frecuencia.	25

Capítulo II: Movimiento ondulatorio.

2.1: Introducción.	31
2.2: Descripción matemática del movimiento ondulatorio.	35
2.3: Vector de onda. Ondas en 2 y 3 dimensiones.	39
2.4: Intensidad del movimiento ondulatorio.	41
2.5: Ecuación diferencial del movimiento ondulatorio.	43
2.6: Interferencias.	44
2.7: Principio de Huygens.	47
2.8: Reflexión y refracción de ondas.	49
2.8.1: Reflexión.	49
2.8.2: Refracción.	51

Apéndice: Estudio de algunas ondas de interés.

A.1: Ondas elásticas en una barra.	53
A.2: Ondas transversales en una cuerda.	57
A.3: Ondas elásticas transversales en una barra.	60
A.4: Ondas de torsión.	62

Capítulo III: Acústica Física.

3.1: Introducción.	65
3.2: Descripción de la onda sonora.	65
3.3: Deducción de la ecuación de ondas.	68
3.4: Impedancia acústica.	78
3.5: Magnitudes energéticas.	80
3.6: Absorción o atenuación del sonido.	86
3.7: Ondas complejas.	86
3.8: Espectros sonoros.	87
3.9: Superposición de ondas acústicas.	88
3.10: Medición del campo acústico.	89
3.11: Suma de niveles.	93
3.12: Variación del nivel con la distancia.	95
3.13: Reflexión y transmisión de ondas acústicas.	99

Capítulo IV: Acústica Fisiológica.

4.1: Introducción.	105
4.2: Umbrales auditivos.	106
4.3: Nivel de sonoridad.	107
4.4: Tono o frecuencia subjetiva.	113
4.5: Timbre.	115
4.6: Enmascaramiento.	115
4.7: Recepción binaural.	117

Capítulo V: Acústica Arquitectónica.

5.1: Introducción.	121
5.2: Acondicionamiento acústico.	121
5.3: Emisor.	122
5.4: Canal de transmisión.	126
5.5: Receptor.	128
5.6: Métodos para el estudio del acondicionamiento acústico.	130

Capítulo VI: Acústica Geométrica.

6.1: Introducción.	135
6.2: Método geométrico.	138
6.3: Focalizaciones.	141
6.4: Estudio del eco.	145
6.5: Diseño para un buen sonido directo.	147
6.6: Diseño para el sonido reflejado.	149

Capítulo VII: Acústica Ondulatoria.

7.1: Introducción.	153
7.2: Modos propios de vibración.	154
7.3: Fenómenos de resonancia.	155
7.4: Obtención de las frecuencias propias de una sala paralelepédica con paredes rígidas.	157
7.5: Conclusiones de diseño.	166

Capítulo VIII: Absorción acústica.

8.1: Introducción.	171
8.2: Principio de funcionamiento de los materiales absorbentes.	171
8.3: Membranas.	176
8.4: Resonadores.	177
8.5: Coeficiente de absorción.	178

Capítulo IX: Acústica Estadística.

9.1: Introducción.	189
9.2: Condiciones del campo difuso.	191
9.3: Ascenso y descenso de la energía acústica en un recinto cerrado. Tiempo de reverberación.	194
9.4: Recorrido libre medio.	202
9.5: Estudio de locales más absorbentes. Fórmula de Eyring.	204

Acústica arquitectónica y urbanística.

9.6: Medida de los coeficientes de absorción por el método de Sabine. Fórmula de Millington.	206
9.7: Efecto de la absorción del aire.	208
9.8: Algunas consideraciones sobre el concepto, validez y utilización del tiempo de reverberación.	210
9.9: Campo acústico estacionario en un recinto cerrado. Campo directo. Campo reverberado.	215

Capítulo X: Parámetros de calidad en la acústica de salas.

10.1: Introducción.	221
10.2: Evolución del diseño de salas de audición y de la acústica aplicada al mismo.	221
10.3: Juicios subjetivos de la acústica de una sala de audición musical. Criterios objetivos que los definen.	229
10.3.1: Música barroca.	229
10.3.2: Música clásica.	230
10.3.3: Música romántica.	230
10.3.4: Música del siglo XX.	230
10.3.5: Opera no Wagneriana.	230
10.3.6: Opera Wagneriana.	231
10.4: Juicios subjetivos de la acústica de una sala de audición verbal. Criterios objetivos que los definen.	234
10.5: Repercusiones en el diseño de salas de audición.	237
10.5.1: Audición musical.	237
10.5.2: Audición verbal.	240
10.5.3: Consideraciones de diseño.	241

Capítulo XI: Aislamiento acústico. Parámetros de medida.

11.1: Introducción.	251
11.2: Planteamiento general.	251
11.2.1: Transmisión del ruido aéreo.	252

11.2.2: Transmisión de ruidos de impacto.	254
11.2.3: Transmisión de ruidos de vibraciones.	254
11.3: Conceptos fundamentales.	255
11.4: Conceptos sobre índices de molestia.	255
11.4.1: Nivel sonoro ponderado A.	256
11.4.2: Nivel sonoro equivalente.	256
11.4.3: Nivel equivalente día-noche.	256
11.4.4: Nivel de contaminación acústica.	257
11.4.5: Índice de ruido de tráfico.	257
11.4.6: Nivel de ruido percibido.	257
11.4.7: Índice de ruido y número de operaciones.	258
11.4.8: Nivel de exposición al ruido de un suceso aislado.	258
11.5: Conceptos sobre aislamiento de ruidos aéreos.	259
11.6: Transmisión de ruidos de impacto y vibraciones.	263

Capítulo XII: Fuentes de ruido en los edificios.

12.1: Introducción.	267
12.2: Fuentes de ruido y vibración en el interior de los edificios.	267
12.2.1: Conversaciones.	267
12.2.2: Ruido provocado al andar.	269
12.2.3: Radio, televisión y aparatos de alta fidelidad.	269
12.2.4: Instrumentos musicales.	270
12.2.5: Aparatos electrodomésticos.	270
12.2.6: Instalaciones.	271

Capítulo XIII: Aislamiento a ruido aéreo.

13.1: Introducción.	279
13.2: Aislamiento a ruido aéreo entre recintos contiguos.	279
13.3: Transmisión de ruidos aéreos al interior de un local desde el exterior.	282
13.4: Transmisión del sonido a través de un cerramiento.	283
13.5: Transmisión de campo no difuso a través de un cerramiento simple. .	283
13.6: Transmisión de un campo difuso.	287

Acústica arquitectónica y urbanística.

13.7: Transmisión por cerramientos dobles.	289
13.7.1: Unión elástica entre las capas.	290
13.7.2: Unión rígida entre las capas.	294
13.8: Aislamiento específico de una pared doble.	294
13.9: Transmisión por cerramientos heterogéneos.	295

Capítulo XIV: Transmisión de los ruidos de impacto y vibraciones.

14.1: Introducción.	299
14.2: Transmisión de los ruidos de impacto.	300
14.3: Aislamiento a ruidos de impacto.	303
14.4: Transmisión de vibraciones.	307

Capítulo XV: Acústica Urbanística.

15.1: Introducción.	313
15.2: Emisores de ruido ambiental.	314
15.3: Factores que influyen en la propagación del ruido.	315
15.3.1: Divergencia de las ondas sonoras.	315
15.3.2: Absorción atmosférica.	316
15.3.3: Acción del viento y la temperatura.	316
15.3.4: Atenuación causada por obstáculos naturales.	317
15.3.5: Atenuación causada por obstáculos artificiales.	318
15.4: Impacto sonoro en el medio ambiente.	320
15.5: Posibles actuaciones para reducir las molestias ocasionadas por el excesivo ruido ambiente.	322
15.5.1: Actuando sobre las fuentes de ruido.	322
15.5.2: Actuando en la transmisión.	324
15.5.3: Actuando en la recepción.	324
15.5.4: Medidas preventivas actuando sobre la planificación y gestión del suelo.	326
15.5.5: Medidas complementarias.	328

Capítulo XVI: Evaluación del impacto ambiental.

16.1: Introducción.	331
16.2: Fuentes de ruido en el exterior de los edificios.	331
16.3: Ruido del tráfico rodado.	332
16.4: Ruido del tráfico ferroviario.	352
16.5: Ruido del tráfico aéreo.	354
16.6: Ruido de fuentes de origen industrial o comercial.	358
16.7: Ruido comunitario.	360
Lista de símbolos empleados.	361
Bibliografía.	367

Prólogo

El objetivo que se ha pretendido durante todo el proceso de elaboración del presente libro es el de desarrollar de forma sencilla, en base a unos principios físicos fundamentales, las teorías que en esta especialidad se utilizan, tanto en edificación como en urbanismo.

Su contenido se presenta en los cuatro bloques siguientes:

Los cuatro primeros capítulos establecen los conceptos y teorías físicos necesarios para tratar las magnitudes que intervienen en el campo acústico, así como la percepción de las mismas por nuestro oído.

El segundo bloque que comprende los capítulos del quinto al décimo (ambos inclusive), exponen las técnicas y métodos que usualmente se utilizan en el acondicionamiento acústico de salas.

Del capítulo once al catorce (ambos inclusive) se plantea la problemática del aislamiento, tanto a ruido aéreo como a impacto, abordando sus soluciones de forma más directa mediante el empleo de expresiones, algunas de ellas empíricas, normalmente utilizadas en este tipo de intervenciones.

Los dos últimos capítulos se dedican a Acústica Urbanística, en la que se incluye la evaluación del impacto ambiental.

A lo largo de todo el libro se ha intentado conjugar el necesario rigor de los planteamientos teóricos con la conveniente simplicidad que exige la praxis cotidiana.

Agradecemos a los profesores Belmar y Estellés de la E.T.S.I. de Telecomunicación sus aportaciones en los temas dedicados a Acústica Ambiental, sobre los cuales han venido trabajando durante mucho tiempo.

Asimismo queremos expresar nuestro reconocimiento al profesor Gómez de la E.T.S. de Arquitectura por sus acertadas precisiones en la actual revisión.

Los autores

Capítulo I

Movimiento Armónico Simple

1.1. Introducción.

Para estudiar los fenómenos acústicos en la edificación es imprescindible establecer unos conceptos físicos básicos sobre los cuales, posteriormente, se desarrolla toda la teoría. Así, las ondas sonoras exigen el estudio previo del movimiento ondulatorio y sus fenómenos de propagación en un medio. Del mismo modo, puesto que la onda en general transmite una vibración y la forma más simple de ésta es la denominada armónica, parece aconsejable empezar por un capítulo dedicado al estudio del movimiento armónico simple, y sobre todo, de aquellas partes o aspectos del mismo que pueden interesar en el desarrollo teórico posterior.

Se dice que un punto, o en general un sistema de puntos, realiza un movimiento periódico cuando sus parámetros cinemáticos y dinámicos toman valores idénticos a intervalos regulares de tiempo denominados periodos.

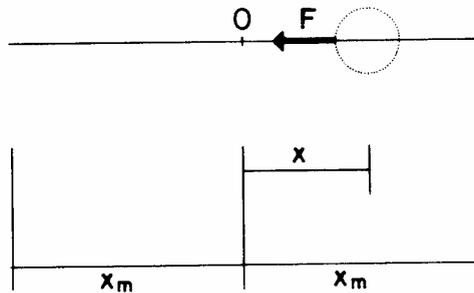


Figura 1.1: Fuerza que actúa sobre una partícula en un movimiento armónico simple.

En los movimientos periódicos de tipo oscilatorio o vibratorio, la partícula tiene una posición de equilibrio y cuando se desplaza de la misma, surge una **fuerza restauradora** o recuperadora que le hace experimentar un movimiento de vaivén respecto a la citada posición de equilibrio. El movimiento vibratorio más sencillo, es el armónico simple, en el cual la fuerza que actúa sobre la partícula es proporcional, en cada instante, a la distancia que la separa del origen o posición de equilibrio.

En otros casos, la función que relaciona la fuerza y el desplazamiento es más compleja, aunque se puede considerar que para desplazamientos pequeños, las fuerzas restauradoras son siempre proporcionales al desplazamiento, ya que desarrollando en serie de Mc-Laurin la función $F(x)$ que representa a cualquier tipo de fuerza recuperadora dependiente de la posición alrededor de la de equilibrio, resulta:

$$F(x) = F(0) + \left[\frac{dF}{dx} \right]_{x=0} x + \left[\frac{d^2 F}{dx^2} \right]_{x=0} \frac{x^2}{2!} + \left[\frac{d^3 F}{dx^3} \right]_{x=0} \frac{x^3}{3!} + \dots$$

con lo que para valores suficientemente pequeños de x (desplazamientos elementales) quedaría:

$$F(x) = \left[\frac{dF}{dx} \right]_{x=0} x = Kx$$

ya que $x^2, x^3 \dots$ son infinitésimos despreciables respecto a x y $F(0)=0$, por ser el origen el punto de equilibrio.

Podemos concluir que todas las vibraciones tienen carácter armónico simple cuando los desplazamientos que se producen son suficientemente pequeños.

Por otra parte, según el teorema de Fourier, todo movimiento periódico puede considerarse como una suma de movimientos armónicos elementales. De ahí la importancia de estudiar el movimiento armónico simple.

1.2. Movimiento Armónico simple. Definición y parámetros.

El movimiento vibratorio más elemental es el denominado **armónico simple**, y se define como aquel que posee un punto cuya distancia a la posición de equilibrio estable viene dada por la ecuación:

$$x = x_m \operatorname{sen}(\omega t + \varphi_0) \quad (1.1)$$

A la cantidad $(\omega t + \varphi_0)$ se le denomina **fase** del movimiento y su valor φ_0 , correspondiente al instante inicial ($t=0$), es la fase inicial. Si como fase inicial se toma $\beta_0 = \varphi_0 - \pi/2$, por ser,

$$\operatorname{sen}(\omega t + \varphi_0) = \cos\left(\omega t + \varphi_0 - \frac{\pi}{2}\right)$$

la (1.1) se puede expresar como:

$$x = x_m \cos\left(\omega t + \varphi_0 - \frac{\pi}{2}\right) = x_m \cos(\omega t + \beta_0) \quad (1.2)$$

Al desplazamiento x se le denomina **elongación** y a la elongación máxima de la partícula, $x = \pm x_m$, se le llama **amplitud** del movimiento armónico simple. Se denomina **periodo**, T , al intervalo de tiempo mínimo entre dos posiciones idénticas de la partícula que posean la misma velocidad. Como la velocidad de la partícula viene dada por:

$$\dot{x} = +x_m \omega \cos(\omega t + \varphi_0) \quad (1.3)$$

la igualdad de $x(t)$ y $x(t+\Delta t)$, así como de $\dot{x}(t)$ y $\dot{x}(t+\Delta t)$ exige que:

$$\omega(t+\Delta t) + \varphi_0 - (\omega t + \varphi_0) = 2n\pi$$

de donde, como el periodo es el menor intervalo de tiempo, ($n=1$)

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad (1.4)$$

Se puede, de acuerdo con ésto, definir el periodo como el tiempo que tarda la partícula en realizar una oscilación completa.

La **frecuencia** f es el número de vibraciones completas por unidad de tiempo, es por tanto la inversa del periodo. La unidad en el sistema internacional (SI) es el ciclo por segundo que se denomina Hertz ($1 \text{ Hz} = 1 \text{ s}^{-1}$).

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$$

Esta identificación de parámetros hace posible y sencilla la representación del movimiento armónico simple de una partícula mediante la proyección sobre un diámetro, del movimiento circular uniforme de un punto que describe una circunferencia de radio la amplitud del movimiento armónico, con una velocidad angular constante ω . Es decir que elegido como diámetro el horizontal y como fase inicial la φ_0 , la distancia al centro O de la proyección de P sobre el diámetro, coincide con la definición de movimiento armónico dada en (1.1).

El tiempo que tarda el punto P en dar una vuelta completa (2π) es el periodo T . Luego ω es la velocidad angular de giro del punto P , denominada **pulsación** o frecuencia angular. El vector de posición de dicho punto posee de módulo la amplitud del movimiento y gira con velocidad angular ω , por lo que se suele denominar vector giratorio.

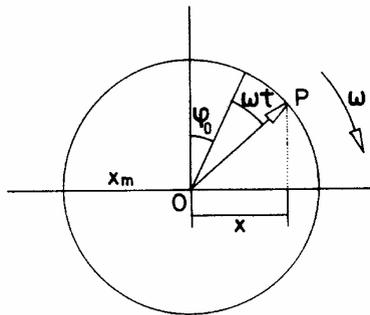


Figura 1.2: Representación gráfica de los parámetros del movimiento armónico simple.

En cuanto a la aceleración del movimiento armónico simple se obtiene derivando respecto al tiempo la velocidad dada por (1.3):

$$\ddot{x} = -x_m \omega^2 \text{sen}(\omega t + \varphi_0) = -\omega^2 x \quad (1.6)$$

La aceleración es pues, proporcional y opuesta al desplazamiento o elongación.

En consecuencia, las tres variables que representan al movimiento (elongación, velocidad y aceleración) en función del tiempo resultan:

$$x = x_m \text{sen}(\omega t + \varphi_0)$$

$$x_0 = x_m \text{sen} \varphi_0$$

$$x_{MAX} = \pm x_m$$

$$\dot{x} = x_m \omega \cos(\omega t + \varphi_0) =$$

$$= x_m \omega \text{sen}\left(\omega t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\dot{x}_0 = x_m \omega \cos \varphi_0$$

$$\dot{x}_{MAX} = \pm x_m \omega$$

$$\ddot{x} = -x_m \omega^2 \text{sen}(\omega t + \varphi_0) =$$

$$= -\omega^2 x$$

$$\ddot{x}_0 = -\omega^2 x_0$$

$$\ddot{x}_{MAX} = \mp x_m \omega^2$$

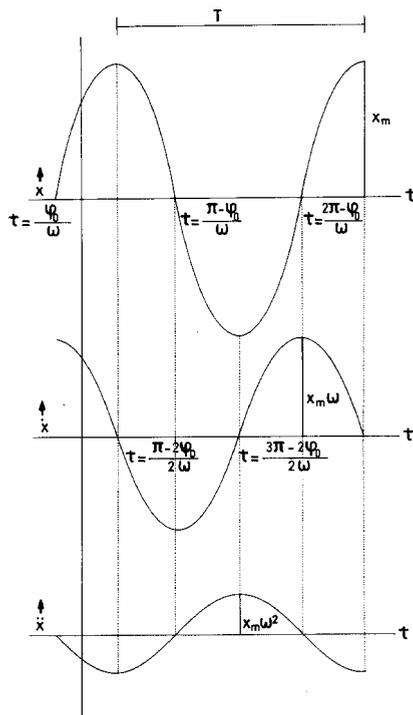


Figura 1.3: Variación temporal de la elongación, velocidad y aceleración en un movimiento armónico simple.

1.3 Dinámica del movimiento armónico simple.

La cinemática del m.a.s. estudiada en el apartado anterior, permite, mediante la aplicación de la ecuación fundamental de la dinámica, obtener la fuerza que actúa sobre la partícula.

En efecto, suponiendo que el movimiento de la partícula se realiza sobre el eje OX y que la posición de equilibrio coincide con el origen del sistema, al proyectar sobre dicho eje, teniendo en cuenta la expresión de la aceleración dada en (1.6), resulta:

$$F = -m\omega^2 x_m \operatorname{sen}(\omega t + \varphi_0) = -m\omega^2 x$$

Siendo m la masa de la partícula y ω la pulsación del movimiento. A la constante, $K = m\omega^2$, se le denomina **constante elástica** y viene relacionada con el periodo T mediante:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{K}}$$

Luego:
$$F = -Kx \tag{1.7}$$

Esta fuerza va dirigida hacia el origen tratando de llevar a la partícula a su posición de equilibrio estable, existiendo una atracción continua de la partícula por parte del origen de coordenadas. Cuando la partícula alcanza el centro, la fuerza restauradora ha disminuido hasta cero, pero debido a la velocidad adquirida, ésta rebasa la posición de equilibrio y continúa moviéndose. Tan pronto como ha sobrepasado dicha posición de equilibrio, la fuerza entra de nuevo en acción, aunque la rapidez del movimiento disminuye en una proporción que aumenta con la distancia hasta que se detiene, siendo en este instante máxima la fuerza que lo atrae nuevamente hacia el origen.

Recíprocamente, partiendo de una fuerza que es en todo instante proporcional y de sentido contrario al desplazamiento, veamos que dicha fuerza origina en una partícula el movimiento definido por (1.1).

Utilizando la ecuación fundamental de la dinámica,

$$F = -Kx = m \frac{d^2 x}{dt^2}$$

llamando $K/m = \omega^2$ obtenemos:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$$

ecuación diferencial lineal de segundo orden cuya integración da soluciones del tipo:

$$x = x_m \operatorname{sen}(\omega t + \varphi_0)$$

siendo x_m y φ_0 constantes.

La constante ω^2 recibe el nombre de **constante armónica**.

1.4 Energía del movimiento armónico simple.

La energía cinética de una partícula que se mueve con un movimiento armónico simple se obtiene sustituyendo en la expresión general de la energía cinética el valor de la velocidad dado en (1.3), es decir:

$$E_C = \frac{1}{2} m (\dot{x})^2 = \frac{1}{2} m x_m^2 \omega^2 \cos^2(\omega t + \varphi_0) \quad (1.8)$$

La energía potencial desarrollada por la fuerza conservativa $F = -Kx$ será:

$$\begin{aligned} -dU &= \vec{F} \cdot \vec{dr} = -Kx dx \\ U &= \int_0^x Ku du = \frac{1}{2} Kx^2 = \frac{K}{2} x_m^2 \operatorname{sen}^2(\omega t + \varphi_0) \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que la constante elástica K es igual a $m\omega^2$, resulta:

$$U = \frac{1}{2} m \omega^2 x_m^2 \operatorname{sen}^2(\omega t + \varphi_0) \quad (1.9)$$

La energía total de la partícula en cualquier instante resulta:

$$\begin{aligned} E = E_C + U &= \frac{m}{2} x_m^2 \omega^2 (\cos^2(\omega t + \varphi_0) + \operatorname{sen}^2(\omega t + \varphi_0)) \\ E &= \frac{m \omega^2 x_m^2}{2} = cte \end{aligned} \quad (1.10)$$

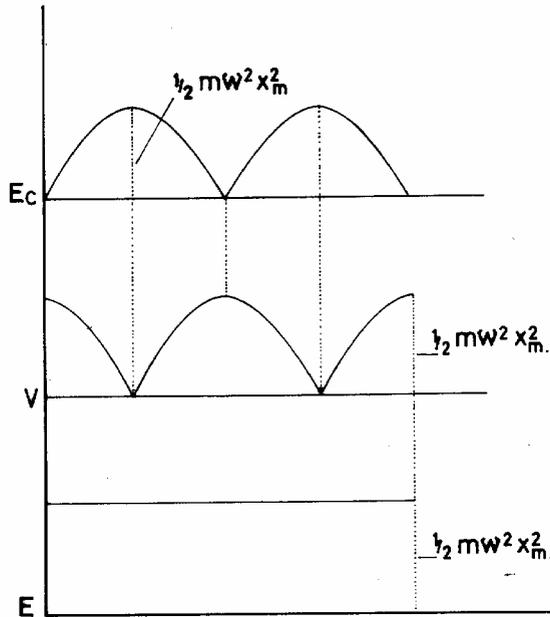


Figura 1.4: Variación temporal de la energía cinética y potencial en un movimiento armónico simple.

Luego la energía mecánica total que posee la partícula en cada instante se mantiene constante a lo largo del movimiento, existiendo un trasvase continuo de energía cinética a potencial y viceversa. La energía potencial aumenta con el cuadrado de la elongación,

$$U = \frac{1}{2} K x^2$$

y la cinética con el cuadrado de la velocidad,

$$E_C = \frac{1}{2} m (\dot{x})^2$$

La energía potencial es máxima en los extremos del recorrido $x = \pm x_m$ en donde es nula la velocidad y por tanto también la energía cinética.

La energía cinética es máxima en el origen donde la velocidad es máxima y es nula la elongación y por tanto, también la energía potencial.

$$(E_C)_{MAX} = (U)_{MAX} = E = \frac{m\omega^2 x_m^2}{2}$$

1.5 Composición de movimientos armónicos simples de igual dirección y frecuencia.

Supongamos una partícula sometida simultáneamente a dos movimientos armónicos simples de igual dirección y frecuencia, difiriendo ambos, en principio, en su amplitud y su fase. En un instante t las elongaciones de ambos movimientos serán:

$$\begin{aligned}x_1 &= x_{m_1} \operatorname{sen}(\omega t + \varphi_1) \\x_2 &= x_{m_2} \operatorname{sen}(\omega t + \varphi_2)\end{aligned}$$

con $\omega = 2\pi f$

La elongación resultante de la superposición de estos dos movimientos será en cada momento la suma de las elongaciones respectivas:

$$\begin{aligned}x &= x_1 + x_2 = x_{m_1} \operatorname{sen}(\omega t + \varphi_1) + x_{m_2} \operatorname{sen}(\omega t + \varphi_2) = \\&x_{m_1} \operatorname{sen} \omega t \cos \varphi_1 + x_{m_1} \cos \omega t \operatorname{sen} \varphi_1 + x_{m_2} \operatorname{sen} \omega t \cos \varphi_2 + x_{m_2} \cos \omega t \operatorname{sen} \varphi_2 = \\&= \operatorname{sen} \omega t (x_{m_1} \cos \varphi_1 + x_{m_2} \cos \varphi_2) + \cos \omega t (x_{m_1} \operatorname{sen} \varphi_1 + x_{m_2} \operatorname{sen} \varphi_2)\end{aligned}$$

llamando a,

$$\begin{aligned}x_{m_1} \cos \varphi_1 + x_{m_2} \cos \varphi_2 &= x_m \cos \varphi \\x_{m_1} \operatorname{sen} \varphi_1 + x_{m_2} \operatorname{sen} \varphi_2 &= x_m \operatorname{sen} \varphi\end{aligned} \quad [1]$$

resulta:

$$x = x_m \operatorname{sen}(\omega t + \varphi) \quad (1.11)$$

en donde x_m y φ se obtienen de resolver el sistema [1]:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{x_{m_1} \operatorname{sen} \varphi_1 + x_{m_2} \operatorname{sen} \varphi_2}{x_{m_1} \cos \varphi_1 + x_{m_2} \cos \varphi_2} \quad (1.12)$$

$$x_m^2 = x_{m_1}^2 + x_{m_2}^2 + 2 x_{m_1} x_{m_2} \cos(\varphi_1 - \varphi_2)$$

Luego el movimiento resultante, también es armónico simple de la misma frecuencia y dirección que los movimientos componentes y con una amplitud y fase dependiente de las amplitudes y fases de los movimientos superpuestos (1.12).

El vector giratorio que lo representa es pues la suma de los vectores giratorios de los dos movimientos superpuestos, como se observa en las ecuaciones del sistema [1].

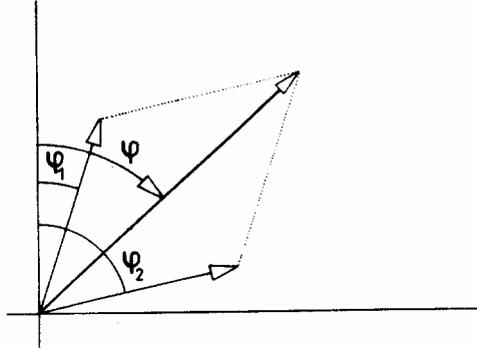


Figura 1.5: Composición de movimientos armónico simples de igual dirección y frecuencia. Suma de sus vectores giratorios

Esto se puede generalizar para el caso de superposición de n movimientos armónicos simples de igual dirección y frecuencia. El vector giratorio resultante será la suma de los n vectores giratorios de los movimientos componentes.

En este caso,

$$x_i = x_{m_i} \text{sen}(\omega t + \varphi_i) \quad i (1 \dots n)$$

$$x = \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n x_{m_i} \text{sen}(\omega t + \varphi_i)$$

$$x = \sum_{i=1}^n (x_{m_i} \text{sen} \omega t \cos \varphi_i + x_{m_i} \cos \omega t \text{sen} \varphi_i) =$$

$$= \text{sen} \omega t \sum_{i=1}^n x_{m_i} \cos \varphi_i + \cos \omega t \sum_{i=1}^n x_{m_i} \text{sen} \varphi_i$$

llamando,

$$\sum_{i=1}^n x_{m_i} \cos \varphi_i = x_m \cos \varphi \quad \sum_{i=1}^n x_{m_i} \text{sen} \varphi_i = x_m \text{sen} \varphi$$

quedaría:

$$x = x_m \operatorname{sen}(\omega t + \varphi)$$

siendo por lo tanto el movimiento resultante armónico simple de igual dirección y frecuencia y con una amplitud y fase que se obtienen de resolver el sistema anterior,

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\sum_{i=1}^n x_{m_i} \operatorname{sen} \varphi_i}{\sum_{i=1}^n x_{m_i} \operatorname{cos} \varphi_i}$$

$$x_m^2 = \sum_{i=1}^n x_{m_i}^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_{m_i} x_{m_j} \operatorname{cos}(\varphi_i - \varphi_j) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_{m_i} x_{m_j} \operatorname{cos}(\varphi_i - \varphi_j) \quad (i \neq j)$$

Vamos a considerar los casos particulares de superposición de movimientos en igualdad de fase $\varphi_2 = \varphi_1$, oposición de fase $\varphi_2 = \varphi_1 + \pi$ y cuadratura de fase $\varphi_2 = \varphi_1 + \frac{\pi}{2}$, por su importancia y utilidad.

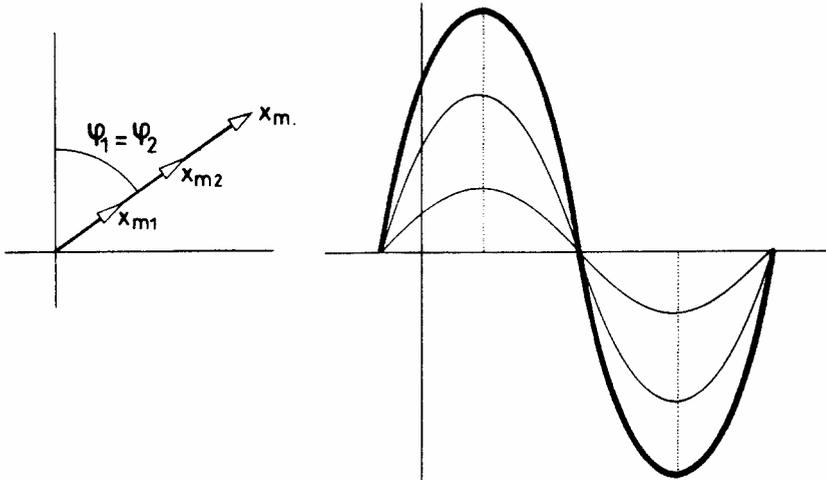


Figura 1.6: Composición de movimientos armónico simple de igual dirección y frecuencia, estando en fase.

Se dice que dos movimientos están **en fase** cuando:

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi$$

$$x_m^2 = x_{m_1}^2 + x_{m_2}^2 + 2 x_{m_1} x_{m_2} ; \quad x_m = x_{m_1} + x_{m_2}$$

La fase inicial del movimiento resultante coincide con la fase común de los movimientos componentes y la amplitud resultante es la suma de las amplitudes de los componentes,

$$x = (x_{m_1} + x_{m_2}) \operatorname{sen}(\omega t + \varphi)$$

Se dice que dos movimientos están **en oposición de fase** cuando la diferencia entre las fases es π ,

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \pi$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{x_{m_1} \operatorname{sen} \varphi_1 + x_{m_2} \operatorname{sen}(\varphi_1 + \pi)}{x_{m_1} \cos \varphi_1 + x_{m_2} \cos(\varphi_1 + \pi)} = \frac{x_{m_1} - x_{m_2}}{x_{m_1} - x_{m_2}} \operatorname{tg} \varphi_1$$

$$x_m^2 = x_{m_1}^2 + x_{m_2}^2 - 2 x_{m_1} x_{m_2} = (x_{m_1} - x_{m_2})^2 \quad x_m = x_{m_1} - x_{m_2}$$

La fase inicial del movimiento resultante es la correspondiente al de mayor amplitud y la amplitud resultante es la diferencia de amplitudes.

$$x = (x_{m_1} - x_{m_2}) \operatorname{sen}(\omega t + \varphi_1)$$

En caso de que las amplitudes fueran iguales, el movimiento resultante es nulo.

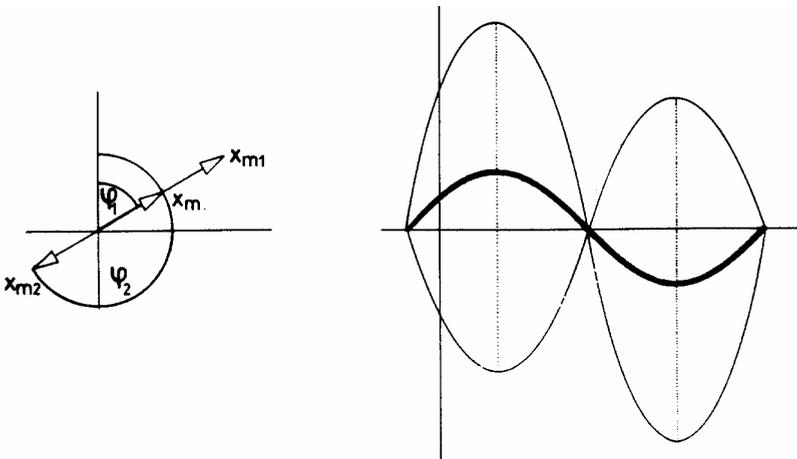


Figura 1.7: Composición de movimientos armónico simple de igual dirección y frecuencia, en oposición de fase.

Para seguir leyendo haga click aquí