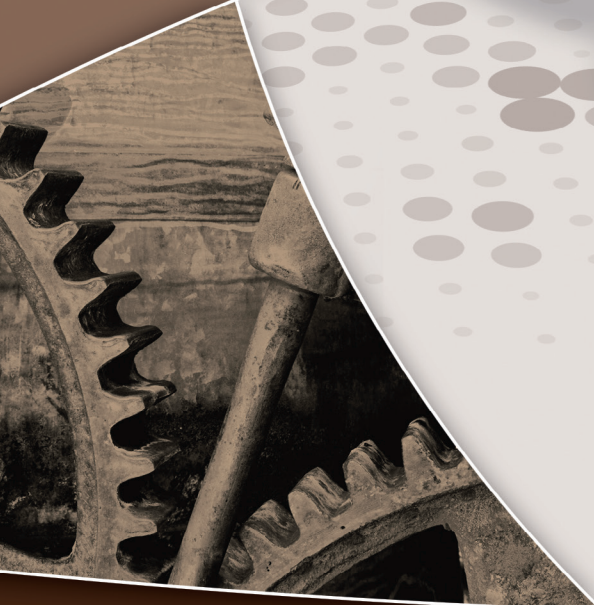




# Máquinas y mecanismos

**Alejandro Roda Buch**  
**Vicente Mata Amela**  
**José Albelda Vitoria**



**EDITORIAL**  
**UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA**

Alejandro Roda Buch  
Vicente Mata Amela  
José Albelda Vitoria

# Máquinas y mecanismos

EDITORIAL  
UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA

Los contenidos de esta publicación han sido revisados por el Departamento de Ingeniería Mecánica y de Materiales de la Universitat Politècnica de València

Colección Académica

Para referenciar esta publicación utilice la siguiente cita: RODA BUCH, A., MATA AMELA, V., ALBELDA VITORIA, J. (2016). *Máquinas y mecanismos*. Valencia: Univesitat Politècnica de València

© Alejandro Roda Buch  
Vicente Mata Amela  
José Albelda Vitoria

© Imagen de portada cedida por cortesía del Centro de Investigación en Ingeniería Mecánica

© 2016, Editorial Universitat Politècnica de València  
*distribución:* Telf.: 963 877 012 / [www.lalibreria.upv.es](http://www.lalibreria.upv.es) / Ref.: 0498\_04\_01\_01

Imprime: Byprint Percom, sl

ISBN: 978-84-9048-512-5  
Impreso bajo demanda

La Editorial UPV autoriza la reproducción, traducción y difusión parcial de la presente publicación con fines científicos, educativos y de investigación que no sean comerciales ni de lucro, siempre que se identifique y se reconozca debidamente a la Editorial UPV, la publicación y los autores. La autorización para reproducir, difundir o traducir el presente estudio, o compilar o crear obras derivadas del mismo en cualquier forma, con fines comerciales/lucrativos o sin ánimo de lucro, deberá solicitarse por escrito al correo [edicion@editorial.upv.es](mailto:edicion@editorial.upv.es)

Impreso en España

# Índice

Capítulo 1. Conceptos básicos en la Teoría de Máquinas y Mecanismos.....	1
1.1. Términos y definiciones.....	1
1.1.1. Clasificación de las barras.....	3
1.1.2. Clasificación de los pares cinemáticos.....	5
1.1.3. Cadena cinemática y mecanismo. Mecanismos planos y espaciales.....	8
1.1.4. Descripción de un mecanismo.....	10
1.2. Mecanismos elementales.....	11
1.3. Movilidad.....	13
1.3.1. Fórmula de Grübler en mecanismos planos.....	13
1.3.2. Ejemplo.....	15
1.3.3. Excepciones a la fórmula de Grübler.....	16
1.4. El cuadrilátero articulado.....	20
1.4.1. El cuadrilátero articulado y la Ley de Grashoff.....	24
1.4.2. Posiciones extremas y puntos muertos.....	28
1.5. El mecanismo de biela-manivela-deslizadera.....	30
Capítulo 2. Conceptos básicos de cinemática.....	33
2.1. Introducción.....	33
2.2. Cinemática de la partícula.....	35
2.2.1. Posición de una partícula en el plano.....	35
2.2.2. Velocidad y aceleración de una partícula en el plano.....	37
2.2.2.1. Movimiento medio e instantáneo.....	37
2.2.2.2. Velocidad y aceleración en coordenadas cartesianas.....	39
2.2.2.3. Velocidad y aceleración en coordenadas intrínsecas a la trayectoria de una partícula.....	39
2.2.3. Tipos de movimientos de una partícula en el plano.....	44
2.3. Cinemática del sólido rígido.....	45
2.3.1. Localización de un sólido rígido en el plano.....	45

2.3.2. Velocidad y aceleración de un sólido rígido en el plano .....	46
2.3.3. Tipos de movimientos de un sólido rígido en el plano .....	49
2.4. Ecuaciones del movimiento relativo .....	50
2.4.1. Ecuaciones del movimiento relativo para velocidades y aceleraciones.....	50
2.4.2. Campo de velocidades y aceleraciones de un sólido rígido.....	55
2.5. Centro Instantáneo de Rotación (CIR).....	57
2.5.1. Localización de CIR. El Teorema de Aronhold-Kennedy.....	59
Capítulo 3. Análisis cinemático de mecanismos planos. Método vectorial.....	63
3.1. Introducción .....	63
3.2. Análisis cinemático de mecanismos planos .....	65
3.2.1. Mecanismos con pares R: el cuadrilátero articulado .....	65
3.2.1.1 Relaciones cinemáticas entre puntos unidos mediante un par R .....	67
3.2.1.2 Problema de posición .....	69
3.2.1.3 Problema de velocidad .....	70
3.2.1.4 Problema de aceleración.....	73
3.2.2. Mecanismos con pares P: inversión del mecanismo biela-manivela- deslizadera.....	73
3.2.2.1 Relaciones cinemáticas entre puntos unidos mediante un par P.....	74
3.2.2.2 Problema de posición .....	76
3.2.2.3 Problema de velocidad .....	77
3.2.2.4 Problema de aceleración.....	78
3.2.2.5 Par P de guía circular.....	78
3.2.3. Mecanismos con pares de rodadura sin deslizamiento: mecanismo de leva .....	79
3.2.3.1 Relaciones cinemáticas entre puntos unidos mediante pares de rodadura sin deslizamiento .....	80
3.2.3.2 Problema de posición .....	84
3.2.3.3 Problema de velocidad .....	85
3.2.3.4 Problema de aceleración.....	85
3.3. Ejemplos de análisis cinemático de mecanismos planos .....	86
3.3.1. Suspensión de un automóvil: el cuadrilátero articulado .....	86

---

3.3.1.1	Problema de posición .....	87
3.3.1.2	Problema de velocidad .....	88
3.3.1.3	Problema de aceleración .....	89
3.3.2.	Mecanismo de yugo escocés .....	91
3.3.2.1	Problema de posición .....	91
3.3.2.2	Problema de velocidad .....	91
3.3.2.3	Problema de aceleración .....	92
3.3.2.4	Análisis cinemático alternativo .....	93
3.3.3.	Carretilla porta-contenedores: biela-manivela-deslizadera .....	94
3.3.3.1	Problema de posición .....	96
3.3.3.2	Problema de velocidad .....	98
3.3.3.3	Problema de aceleración .....	99
3.3.4.	Mecanismo de leva circular con seguidor plano alternante.....	100
3.3.4.1	Problema de posición .....	101
3.3.4.2	Problema de velocidad .....	101
3.3.4.3	Problema de aceleración .....	102
3.3.5.	Plataforma elevadora: biela-manivela-deslizadera .....	103
3.3.5.1	Problema de posición LAZO 1.....	105
3.3.5.2	Problema de velocidad LAZO 1.....	105
3.3.5.3	Problema de aceleración LAZO 1.....	106
3.3.5.4	Problema de posición LAZO 2.....	107
3.3.5.5	Problema de velocidad LAZO 2.....	107
3.3.5.6	Problema de aceleración LAZO 2.....	108
3.3.6.	Máquina limadora: mecanismo de retorno rápido de Whitworth.....	109
3.3.6.1	Problema de posición .....	112
3.3.6.2	Problema de velocidad .....	112
3.3.6.3	Problema de aceleración .....	114
Capítulo 4.	El problema dinámico .....	117
4.1.	Introducción.....	117
4.2.	Acciones .....	119

4.2.1. Acciones exteriores .....	120
4.2.2. Acciones internas o de reacción .....	121
4.3. Leyes de Newton .....	123
4.4. Principio de D'Alembert.....	125
4.5. El Principio de las Potencias Virtuales .....	126
4.6. El problema dinámico inverso .....	135
4.6.1. Resolución mediante las Leyes de Newton .....	136
4.6.2. Resolución mediante el Principio de las Potencias Virtuales .....	141
4.6.2.1 Mecanismos con un grado de libertad .....	141
4.6.2.2 Mecanismos con varios grados de libertad.....	144
4.6.3. Cuadro resumen del problema dinámico inverso .....	146
4.7. Ejemplos de análisis de fuerzas de mecanismos planos.....	148
4.7.1. Suspensión de un automóvil: el cuadrilátero articulado .....	148
4.7.1.1 Acciones conocidas actuantes sobre el mecanismo.....	149
4.7.1.2 Fuerza sobre el resorte mediante Potencias Virtuales .....	149
4.7.1.3 Reacciones en los apoyos mediante las Leyes de Newton .....	150
4.7.2. Carretilla porta-contenedores: biela-manivela-deslizadera .....	154
4.7.2.1 Acciones exteriores e inerciales .....	155
4.7.2.2 Fuerza de los cilindros mediante Potencias Virtuales .....	155
4.7.2.3 Fuerza de los cilindros y reacciones mediante las Leyes de Newton.....	156
4.7.3. Plataforma elevadora: biela-manivela-deslizadera .....	160
4.7.3.1 Acciones exteriores e inerciales .....	161
4.7.3.2 Fuerza del pistón mediante Potencias Virtuales .....	161
4.7.3.3 Fuerza del pistón y reacciones mediante las Leyes de Newton.....	162
4.7.4. Mecanismo de leva circular con seguidor plano alternante.....	166
4.7.4.1 Acciones conocidas actuantes sobre el mecanismo.....	167
4.7.4.2 Par de fuerzas $\vec{T}_2$ mediante Potencias Virtuales .....	167
4.7.4.3 Las reacciones y par de fuerzas $\vec{T}_2$ mediante las Leyes de Newton.....	168
4.7.5. Máquina limadora: mecanismo de retorno rápido de Whitworth .....	171
4.7.5.1 Acciones exteriores e inerciales .....	172

---

4.7.5.2	El par motor $\vec{T}_2$ mediante Potencias Virtuales .....	173
4.7.5.3	Par motor y reacciones mediante las Leyes de Newton .....	174
4.7.6.	Mecanismo de yugo escocés .....	177
4.7.6.1	Acciones exteriores e inerciales .....	178
4.7.6.2	Principio de Potencias Virtuales .....	178
4.7.6.3	Leyes de Newton.....	179
4.7.6.4	Evolución de la potencia a lo largo de un ciclo.....	182
Capítulo 5.	El problema dinámico directo .....	185
5.1.	Introducción.....	185
5.2.	Mecanismo reducido o equivalente .....	187
5.2.1.	Inercia Generalizada.....	189
5.2.2.	Fuerza Generalizada.....	191
5.3.	Teorema de las Fuerzas Vivas .....	192
5.4.	Ecuación de Eksergian.....	193
5.5.	Ejemplos de análisis de movimiento de mecanismos planos.....	195
5.5.1.	Suspensión de un automóvil: paralelogramo.....	195
5.5.1.1	Relaciones cinemáticas del mecanismo .....	196
5.5.1.2	Inercia Generalizada.....	196
5.5.1.3	Fuerza Generalizada.....	197
5.5.1.4	Aceleración en el arranque para $\theta_2 = 0$ .....	197
5.5.1.5	Velocidad generalizada en $\theta_2 = 10^\circ$ .....	198
5.5.1.6	Aceleración generalizada en $\theta_2 = 10^\circ$ .....	198
5.5.2.	Carretilla porta-contenedores .....	199
5.5.2.1	Cinemática en función de la coordenada generalizada.....	200
5.5.2.2	Inercia Generalizada.....	202
5.5.2.3	Fuerza Generalizada.....	203
5.5.2.4	Aceleración en el arranque.....	203
5.5.2.5	Velocidad y aceleración del contenedor para $q'' = 4,5 m$ .....	204
5.5.3.	Plataforma elevadora.....	206



5.5.3.1	Cinemática en función de la coordenada generalizada.....	207
5.5.3.2	Inercia Generalizada.....	207
5.5.3.3	Fuerza Generalizada.....	208
5.5.3.4	Aceleración en el arranque $q_I = 130^\circ$ .....	209
5.5.3.5	Velocidad del mecanismo para $q_{II} = 110^\circ$ .....	209
5.5.3.6	Aceleración de la plataforma para $q_{II} = 110^\circ$ .....	210
5.5.4.	Limadora.....	211
5.5.4.1	Cinemática en función de la coordenada generalizada.....	212
5.5.4.2	Inercia Generalizada.....	213
5.5.4.3	Fuerza Generalizada.....	213
5.5.4.4	Velocidad para $q^{II} = 2 \cdot \pi / 3 \text{ rad}$ .....	214
5.5.4.5	Aceleración para $q^{II} = 2 \cdot \pi / 3 \text{ rad}$ .....	215
5.5.4.6	Soluciones.....	215
5.5.5.	Yugo escocés.....	216
5.5.5.1	Cinemática en función de la coordenada generalizada.....	217
5.5.5.2	Inercia Generalizada.....	217
5.5.5.3	Fuerza Generalizada.....	218
5.5.5.4	Aceleración en el arranque $q_I = 60^\circ$ .....	218
5.5.5.5	Velocidad del mecanismo para $q_{II} = 150^\circ$ .....	218
5.5.5.6	Aceleración de la plataforma para $q_{II} = 150^\circ$ .....	219
Capítulo 6.	Equilibrado de maquinaria.....	221
6.1.	Introducción.....	221
6.2.	Equilibrado de rotores rígidos.....	224
6.2.1.	Fuerzas de desequilibrio y reacciones.....	224
6.2.2.	Rotor equivalente y equilibrado de rotores.....	229
6.2.3.	Valores límite de desequilibrio.....	231
6.3.	Equilibrado de máquinas alternativas.....	232
6.3.1.	Desequilibrio en máquinas monocilíndricas.....	232

---

6.3.2. Equilibrado en máquinas monocilíndricas .....	239
6.3.2.1 Equilibrado de fuerzas .....	239
6.3.2.2 Equilibrado de momentos .....	240
6.3.3. Equilibrado en máquinas policilíndricas .....	240
6.4. Ejemplos de equilibrado de máquinas .....	245
6.4.1. Equilibrado de rotores: árbol de levas .....	245
6.4.1.1 Fuerza y par de desequilibrio .....	246
6.4.1.2 Agujeros de equilibrado .....	247
Capítulo 7. Regulación de máquinas cíclicas .....	251
7.1. Introducción .....	251
7.2. Régimen permanente .....	257
7.2.1. Grado de irregularidad .....	257
7.2.2. Cálculo aproximado del volante de inercia .....	260
7.2.3. Funciones del volante de inercia .....	261
7.2.4. Ejemplo .....	261
7.3. Régimen transitorio .....	265
7.3.1. Ecuación característica de las máquinas .....	265
7.3.2. Estabilidad .....	269
7.3.3. Ejemplo .....	271
7.3.3.1 Curvas características y puntos de funcionamiento .....	271
7.3.3.2 Volante de inercia .....	272
7.3.3.3 Nuevo punto de funcionamiento .....	273
7.3.3.4 Tiempo de parada .....	273
Capítulo 8. Transmisiones mecánicas .....	275
8.1. Introducción .....	275
8.2. Ruedas de fricción .....	276
8.3. Mecanismos de correa .....	280
8.3.1. Tipos y características .....	280
8.3.2. Longitud de la correa .....	282
8.3.3. Relación de transmisión .....	284

8.3.4. Fuerzas en correas .....	285
8.4. Mecanismos de cadena .....	287
8.4.1. Características .....	287
8.4.2. Nomenclatura .....	289
8.4.3. Relación de transmisión .....	290
8.5. Mecanismos de engranaje .....	293
8.5.1. Tipos y características .....	293
8.5.2. Ley General del Engrane .....	294
8.5.3. El perfil de evolvente.....	296
8.5.3.1 Definición del perfil de evolvente en coordenadas polares .....	299
8.5.3.2 Espesor del diente con perfil de evolvente .....	301
8.5.3.3 Variación de la distancia entre centros .....	302
8.5.4. Normalización de engranajes.....	304
8.5.4.1 Nomenclatura de los dientes de engranaje con perfil de evolvente ..	304
8.5.5. Generación de los dientes .....	306
8.5.6. Continuidad en el engrane .....	308
8.5.7. Interferencia.....	311
8.5.7.1 Generación mediante cremallera de corte .....	313
8.5.7.2 Generación mediante engranaje de corte.....	314
8.5.8. Otros perfiles conjugados .....	317
8.5.9. Acciones entre dientes con perfil de evolvente .....	318
8.6. Trenes de engranajes.....	319
8.6.1. Trenes ordinarios o de ejes fijos .....	319
8.6.2. Trenes de ejes móviles. Fórmula de Willis.....	321
8.6.3. Trenes diferenciales.....	325
8.7. Ejemplos de trenes de engranajes .....	327
8.7.1. Tren de engranajes: ordinario y epicicloidal .....	327
8.7.1.1 Distancia entre los ejes de los engranajes 4 y 5 .....	327
8.7.1.2 Módulo de los engranajes 2 y 3 .....	328
8.7.1.3 Dimensiones del engranaje 3.....	328

8.7.1.4	Velocidad de salida en un tren ordinario compuesto.....	328
8.7.1.5	Velocidad de salida en un tren epicicloidal compuesto.....	329
8.7.2.	Tren de engranajes: ordinario y epicicloidal .....	329
8.7.2.1	Clasificación de los trenes de engranajes.....	330
8.7.2.2	Radio del brazo portaplanetas .....	330
8.7.2.3	Relación de transmisión $\omega_H / \omega_A$ .....	331
8.7.2.4	Aceleración angular de los engranajes D y E.....	331



# Capítulo 1

# Conceptos básicos en la Teoría de Máquinas y Mecanismos

## 1.1. Términos y definiciones.

En este apartado se introducen términos y definiciones habituales en la Teoría de Máquinas y Mecanismos (TMM) y que, en consecuencia, se emplearán a lo largo del texto.

Una *máquina* se puede definir como un objeto fabricado y compuesto por un conjunto de piezas ajustadas entre sí que se usa para facilitar o realizar un trabajo determinado, generalmente transformando una forma de energía en movimiento o trabajo.

Un *mecanismo* es una combinación de cuerpos rígidos o resistentes, conectados entre sí de modo que el movimiento relativo entre los elementos individuales está restringido.

El *diagrama cinemático* de un mecanismo consiste en representar con el mínimo número de símbolos la geometría de los cuerpos y las restricciones cinemáticas existentes entre ellos.

La *Figura 1.1* muestra un ejemplo de una máquina limadora con su mecanismo y su diagrama cinemático.

Los elementos resistentes individuales que componen un mecanismo reciben el nombre de *barras*. Tal y como se ha indicado, las barras pueden ser elementos rígidos (sólidos rígidos, indeformables en todas las direcciones) o unirígidos (por ejemplo, cables) que presentan al menos una dirección en la que no se pueden deformar.

Las barras están unidas entre sí en puntos denominados *nudos* y la forma en que se realiza esa unión, y por tanto las restricciones al movimiento relativo entre las barras que impone dicha unión, se denomina *par cinemático*. El par cinemático supone una idealización del enlace físico.

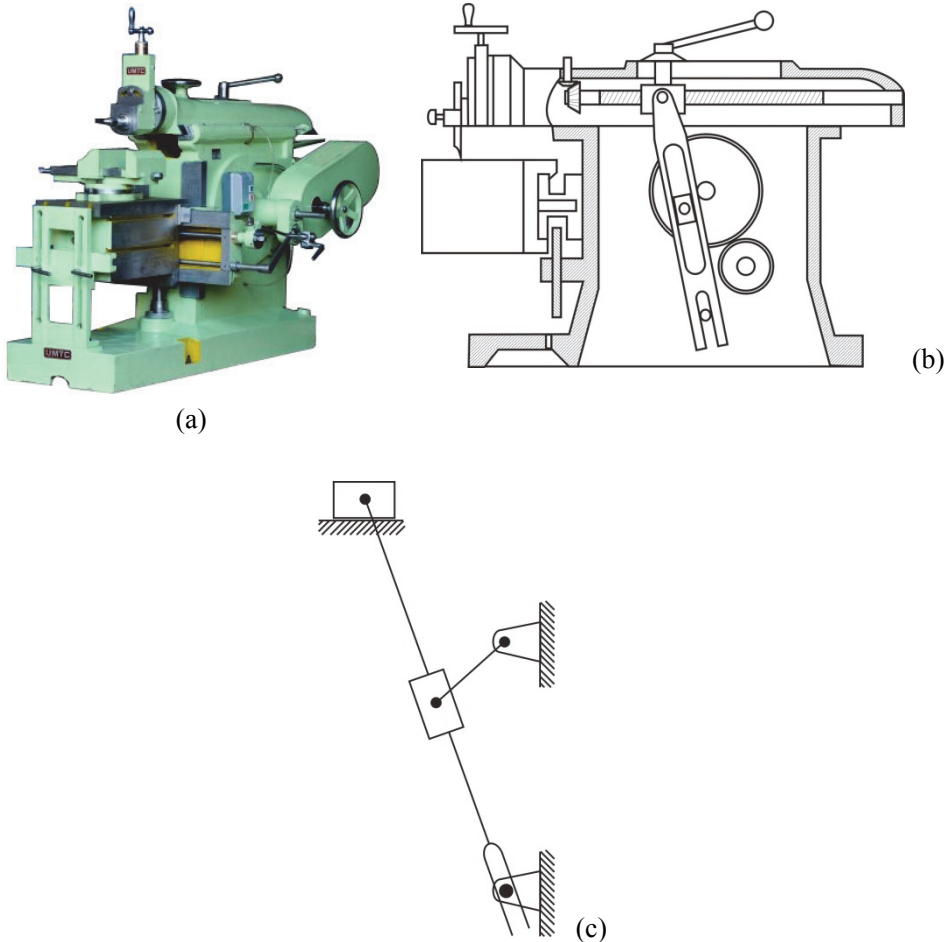


Figura 1.1. (a) Máquina limadora (cortesía de UMTC), (b) mecanismo y (c) esquema cinemático

La diferencia entre máquina y mecanismo, en el contexto de esta asignatura, reside en que la máquina se considera como una caja negra en la que se aplican una o varias acciones a la entrada y se obtienen una o varias respuestas a la salida. La relación Entrada/Salida se denomina *función de transferencia* y las acciones y respuestas pueden ser cualquier tipo de variable cinemática o dinámica: posición, velocidad, fuerza, potencia, etc. En definitiva, en una máquina interesa fundamentalmente la función de transferencia, siendo bastante irrelevante lo que pasa dentro de la citada caja negra. Por el contrario, lo relevante de un mecanismo es cómo interaccionan entre sí sus componentes a nivel cinemático y/o dinámico.

Se definen como *grados de libertad* a las posibilidades de movimiento independiente de un sistema mecánico. Así, se puede hablar de grados de libertad de:

- Un sólido rígido.
- Un par cinemático.
- Un mecanismo.

Un *sólido rígido* que se mueve libremente en el plano tiene tres grados de libertad, dos de traslación (en dos direcciones cualesquiera perpendiculares entre sí del plano) y una rotación respecto al eje perpendicular al plano del movimiento. Es evidente que si el sólido rígido se moviera libremente en el espacio, los grados de libertad pasarían a ser seis: tres translaciones en direcciones mutuamente ortogonales y tres giros respecto a ejes también perpendiculares entre sí.

Se entiende por grados de libertad asociados a un *par cinemático* al número de coordenadas independientes necesario para describir la posición y orientación relativa de las barras que conecta.

Los grados de libertad de un *mecanismo* se definen como el número de variables independientes necesario para definir una configuración (o un número limitado de ellas). Aunque es un tema que se tratará más adelante, se puede decir que determinar los grados de libertad de un mecanismo es importante por dos motivos:

- Define el número de actuadores externos (motores) que es necesario disponer para mover el mecanismo coordinadamente.
- Define la utilidad del mecanismo.

### **1.1.1. Clasificación de las barras**

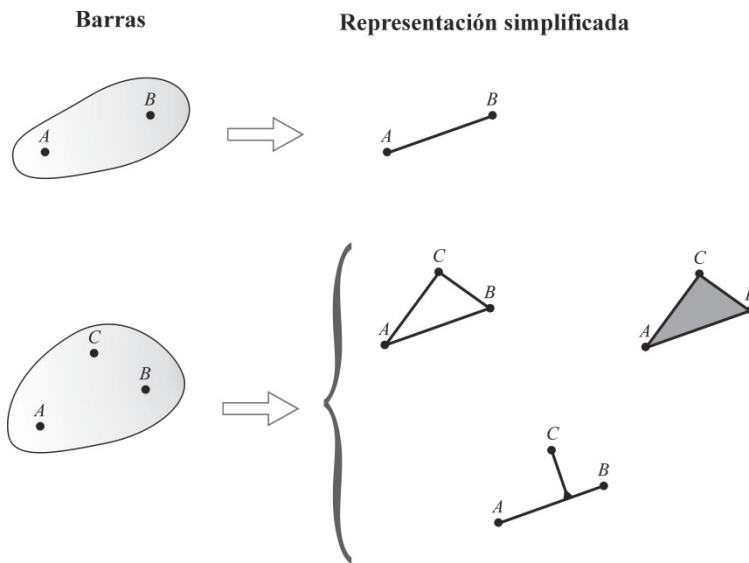
Las barras pueden clasificarse en función del número de pares que contengan y en función del tipo de movimiento que describan.

En función del número de pares que contiene, las barras se clasifican como: binarias (2 pares), ternarias (3 pares), cuaternarias (4 pares), etc. La *Figura 1.2* muestra la posible representación de barras binarias y ternarias.



Según el tipo de movimiento pueden ser:

- *Manivelas*: Cuando están unidas a la barra fija y pueden dar vueltas completas alrededor de la misma.
- *Balancines*: Cuando están unidas a la barra fija y describen un movimiento de oscilación.
- *Acopladoras* o *bielas*: Son barras no unidas directamente a la barra fija y suelen describir un movimiento combinado de traslación y rotación.
- *Deslizaderas*: Son barras que describen un movimiento de traslación a lo largo de una guía.



**Figura 1.2. Barras binarias y ternarias**

Así en la *Figura 1.3 (a)*, la barra 2 es una manivela, la 4 una deslizadera y la 3 una biela. En la *Figura 1.3 (b)* se aprecia como la barra 4 es un balancín y a la 3 se le denomina barra acopladora.

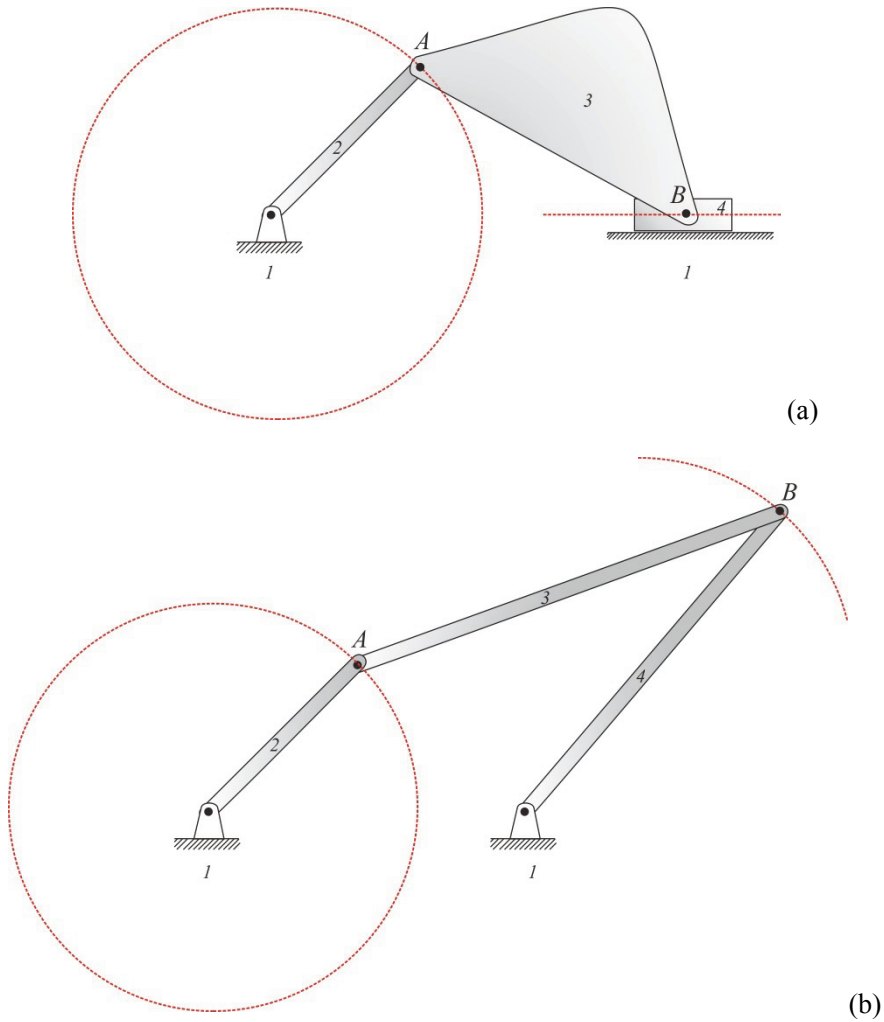
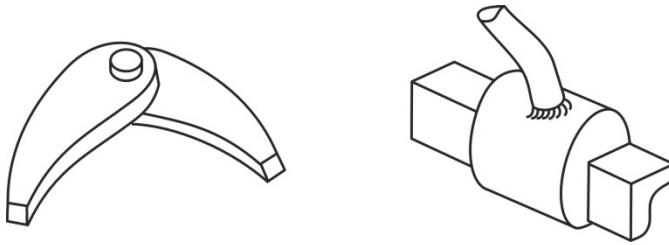


Figura 1.3. Clasificación de las barras en función de su tipo de movimiento

### 1.1.2. Clasificación de los pares cinemáticos

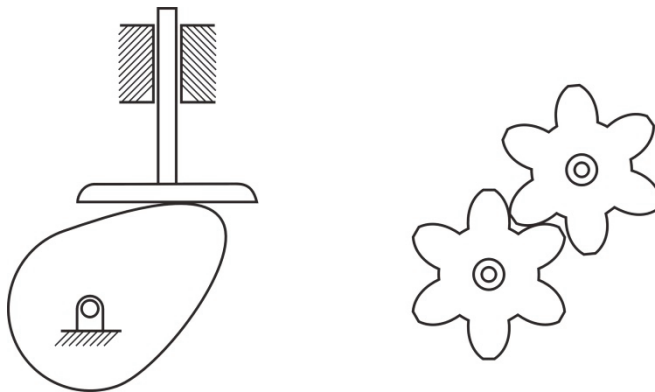
Existe una gran variedad de pares cinemáticos, así como diversos procedimientos para clasificarlos. Estas clasificaciones se pueden establecer siguiendo dos criterios:

- En función del tipo de contacto que se genera entre las barras que une.
- En función del número de grados de libertad del par cinemático en cuestión.



**Figura 1.4. Pares inferiores**

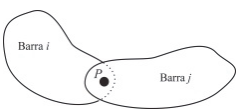
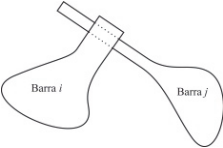
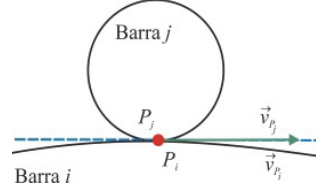
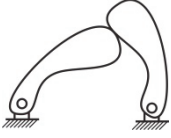
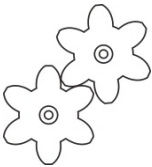
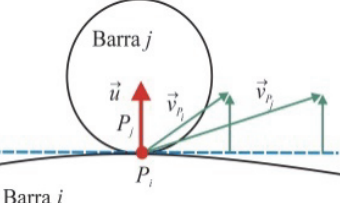
En función del primer criterio de clasificación se podrá hablar de *pares cinemáticos inferiores* y *superiores*. Si el par en el que dos barras se conectan tiene una superficie de contacto, el par se denomina *par inferior*, *Figura 1.4*. Si la conexión se realiza de modo que el contacto se produce en un punto o a lo largo de una línea de puntos entonces se designa *par superior*, *Figura 1.5*.



**Figura 1.5. Pares superiores**

En función del segundo criterio, los pares cinemáticos se clasifican según el número de grados de libertad asociados al par. En la *Tabla 1.1* se muestra la clasificación de los pares cinemáticos entre dos barras (par binario) atendiendo a los grados de libertad y restricciones asociados a cada par cinemático.

**Tabla 1.1. Clasificación de los pares cinemáticos binarios de mecanismos planos en función de sus grados de libertad**

Clase	GDL	RES	Pares cinemáticos		
I	1	2	 <p>Revolución</p>	 <p>Prismático</p>	 <p>Rodadura sin deslizamiento</p>
II	2	1	 <p>Leva</p>	 <p>Engranaje</p>	 <p>Rodadura con deslizamiento</p>

Antes de comentar la *Tabla 1.1*, cabe recordar que un sólido rígido en el plano posee tres posibilidades de movimiento independientes, translaciones en dos direcciones perpendiculares entre sí y la rotación alrededor de un eje perpendicular al plano del movimiento del sólido rígido. Por lo tanto, en el plano pueden existir únicamente pares de las clases *I* y *II*, ya que un par cinemático de la clase tres en el plano no supondría ninguna restricción al movimiento.

En la tabla anterior también cabe observar que a medida que aumenta la clase del par disminuye la restricción al movimiento que impone a las barras que conecta. Así un par de la clase *I* restringe dos posibilidades de movimiento relativo, mientras que los de la clase *II* impedirían sólo una de las tres que posee un sólido en el plano. La suma de los grados de libertad más las restricciones que impone el par cinemático en el plano es siempre 3 y en el espacio 6.

En cuanto a los pares de clase *I*, el *par de revolución* (*R*) impide cualquier posible translación en el plano de una barra respecto a otra, o lo que es lo mismo, permite únicamente el giro relativo entre las dos barras conectadas. El *par prismático* (*P*) impide la translación en la dirección perpendicular a la guía y la rotación relativa entre ambas barras. La *rodadura sin deslizamiento* (*RSD*) impide la translación en la dirección normal al contacto entre las dos superficies en el punto de contacto (las barras no experimentan ni separación ni penetración) y la translación en la dirección tangente al contacto

(deslizamiento restringido), con lo que únicamente está permitido el giro relativo de una barra respecto a la otra.

En lo relativo a los pares de clase II, el par *rodadura con deslizamiento (RCD)* impide únicamente la traslación en la dirección normal al contacto entre las dos superficies, permitiendo el deslizamiento en la dirección tangente y el giro relativo. Los pares de tipo *leva y engranaje* son análogos al par *RCD*, únicamente impiden que las dos barras en contacto se separen (perdería su funcionalidad el par cinemático) o se penetren (hipótesis de sólido rígido).

### **1.1.3. Cadena cinemática y mecanismo. Mecanismos planos y espaciales**

Se denomina *cadena cinemática* a un conjunto de barras interconectadas entre sí por pares cinemáticos. Cuando una de ellas es fija se tendrá un *mecanismo*. Una *cadena cinemática cerrada* es aquella en la que cada barra está unida como mínimo a otras dos barras. Una *cadena cinemática abierta* es aquella en la que existe como mínimo una barra que tiene un solo par cinemático. En la *Figura 1.6* y la *Figura 1.7* se presentan ejemplos de cadenas cinemáticas cerradas y abiertas.

Los mecanismos pueden ser *planos* o *espaciales*. Un *mecanismo plano* es aquel en el que todos los puntos de todas las barras describen trayectorias situadas en un mismo plano o en planos paralelos entre sí. En un *mecanismo espacial* algunos puntos de algunas barras describen trayectorias no planas o situadas en planos no paralelos. De nuevo, en la *Figura 1.6* se muestran varios mecanismos planos y en la *Figura 1.7* un mecanismo espacial.

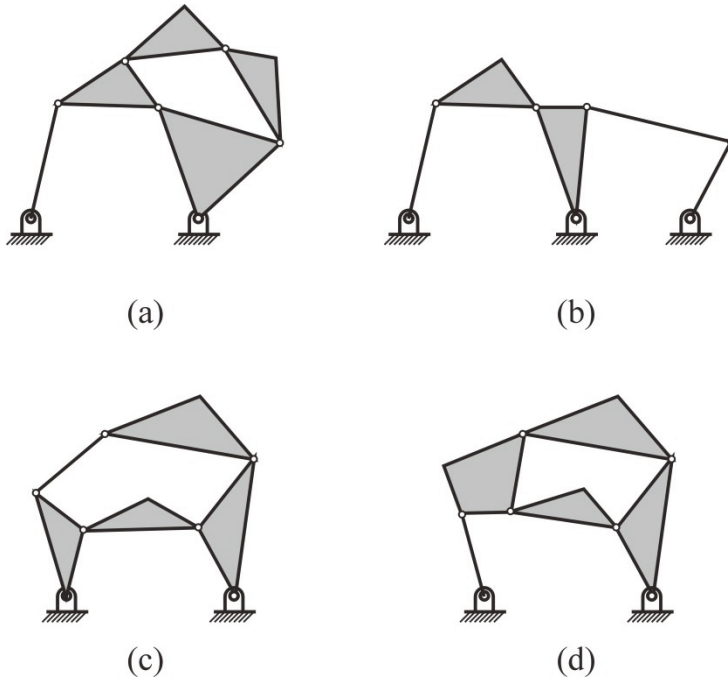


Figura 1.6. Mecanismos planos de cadena cinemática cerrada. (a) y (b) mecanismos de 6 barras de Watt, (c) y (d) mecanismos de 6 barras de Stephenson

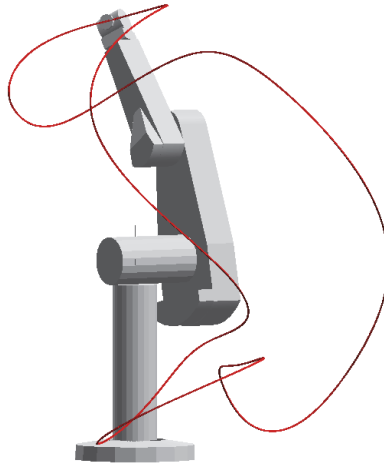
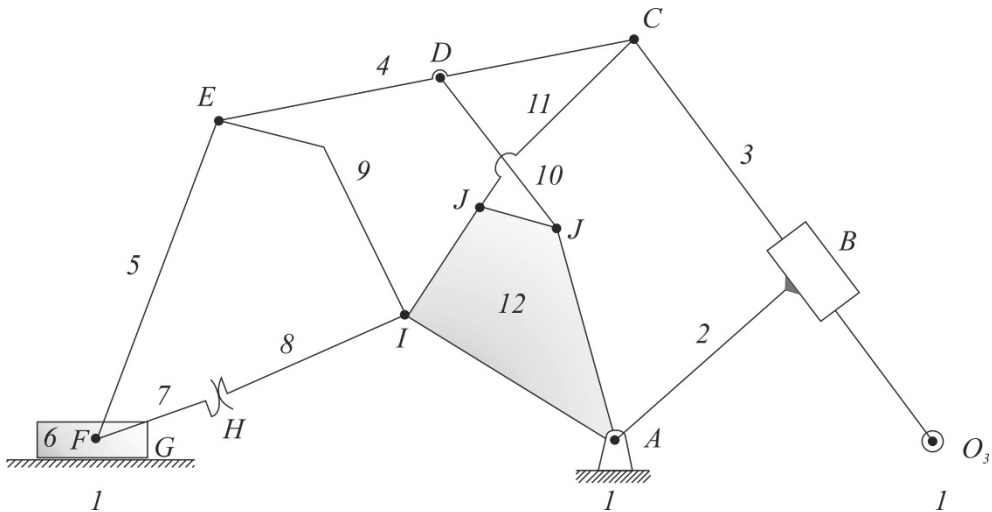


Figura 1.7. Mecanismo espacial de cadena cinemática abierta. Robot industrial PUMA

### 1.1.4. Descripción de un mecanismo

A continuación se indica sobre el mecanismo de la *Figura 1.8* la terminología habitualmente empleada a la hora de designar los diversos componentes de un mecanismo.



**Figura 1.8. Nomenclatura habitual en mecanismos**

En el mecanismo anterior se puede apreciar como las barras se designan mediante números, reservando el número 1 para la barra fija, mientras que los pares se suelen denotar mediante letras. Se pueden observar pares de revolución, como por ejemplo en los nudos C, D y E. Se aprecia que C y E son nudos *ternarios*, esto es, confluyen en ellos tres barras, pero que en D se unen sólo dos barras (nudo *binario*). Para los pares de revolución que unen una barra con la fija se pueden emplear dos notaciones, así como dos simbologías diferenciadas, por ejemplo en A o en O<sub>3</sub>. Nótese los pares prismáticos que unen en G y en B las barras 1-6 y 2-3, respectivamente. En H se tiene un contacto entre dos superficies curvas, que podría corresponder a una rodadura sin o con deslizamiento. Generalmente este será un dato que se aporte al usuario.

En este texto se considerará que los pares cinemáticos unen parejas de barras; por ejemplo, en el nudo E de la *Figura 1.8* confluyen 3 barras que se considerarán unidas por 2 pares cinemáticos, siendo irrelevante desde el punto de vista cinemático cómo se enlazan dichas parejas de barras mediante los pares tipo R.

## 1.2. Mecanismos elementales

Una de las herramientas de las que dispone un diseñador de mecanismos consiste en la combinación de mecanismos simples y de características bien conocidas para satisfacer las necesidades globales de movimiento del mecanismo que se desea diseñar. Estos mecanismos simples, que se encuentran formando parte de la mayoría de las máquinas, se denominan *mecanismos elementales* y se pueden clasificar en tres grandes grupos.

- *Mecanismos articulados*: formados por cadenas cinemáticas en las que los pares son exclusivamente inferiores (Figura 1.9). Usualmente estos pares son del tipo *R* o *P*.
- *Mecanismos de levas*: formados por la leva propiamente dicha, que es el elemento de entrada del movimiento, y el seguidor, que es el elemento de salida (Figura 1.10). En función del perfil de la leva se puede obtener una relación entrada/salida sumamente compleja.
- *Mecanismos de engranajes*: los engranajes son empleados principalmente para transmitir el movimiento de rotación entre ejes, manteniendo constante la relación de velocidades angulares entre los ejes de entrada y de salida (Figura 1.11).

En las figuras siguientes se muestran ejemplos de los mecanismos elementales mencionados anteriormente.

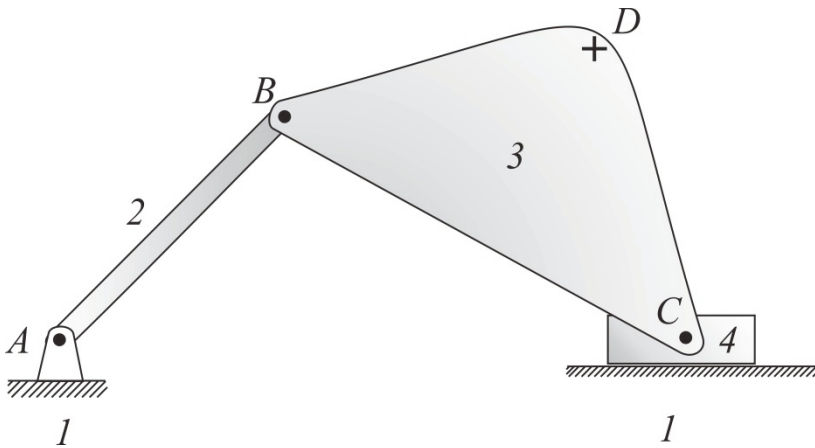


Figura 1.9. Mecanismos elementales. Mecanismo articulado



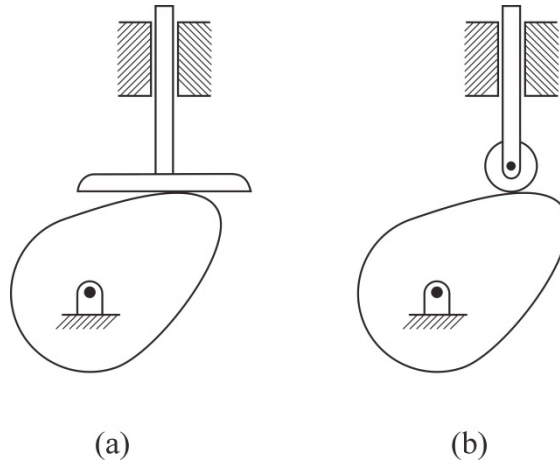


Figura 1.10. Mecanismos elementales. Mecanismos de levas: (a) con seguidor alternativo de cara plana, (b) con seguidor alternativo de rodillo

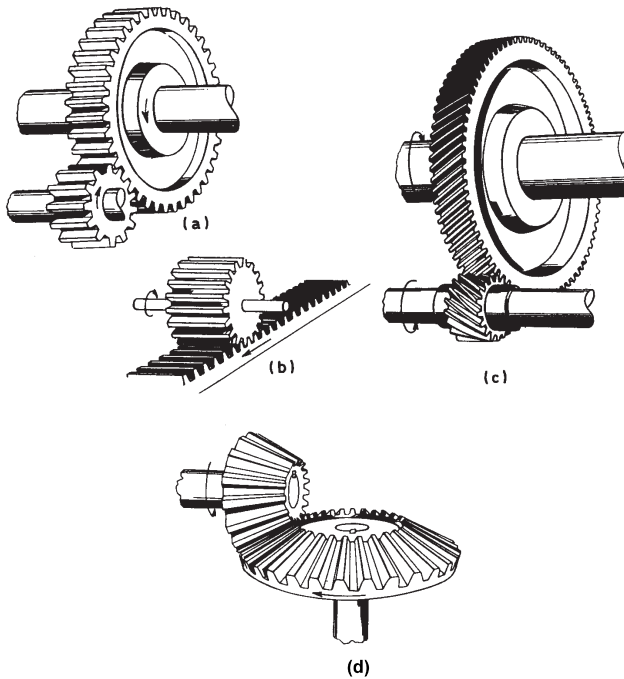


Figura 1.11. Mecanismos elementales. Engranajes: (a) engranajes cilíndricos de dientes rectos, (b) cremallera, (c) engranajes cilíndricos con dientes helicoidales, (d) engranajes cónicos

### 1.3. Movilidad

Se define *movilidad* o *grados de libertad* de una cadena cinemática o de un mecanismo como el número de coordenadas, independientes entre sí, necesario para definir la configuración de la cadena cinemática o del mecanismo.

#### 1.3.1. Fórmula de Grübler en mecanismos planos

Un sólido rígido en el plano posee 3 grados de libertad, por tanto un sistema de  $n$  sólidos libres en el plano tendrá  $3 \cdot n$  grados de libertad.

Todo mecanismo está compuesto por un sistema de sólidos con movimiento restringido por los pares cinemáticos, y además posee una barra fija. La barra fija le restará 3 grados de libertad al sistema, los pares de la clase *I* le restarán 2 grados de libertad por par y los de la clase *II* un grado de libertad por par.

Por tanto, para mecanismos planos formados por  $n$  barras, una de ellas fija, y unidas entre sí por  $J_1$  pares de la clase *I* y  $J_2$  de la clase *II*, los grados de libertad o movilidad,  $F$ , de dichos mecanismos vendrán dados por la siguiente expresión

$$F = 3 \cdot (n - 1) - 2 \cdot J_1 - 1 \cdot J_2 \quad [1.1]$$

La expresión anterior es debida a Grübler y permite determinar la movilidad de mecanismos planos.

En la *Tabla 1.2* se ha aplicado la expresión de Grübler al cálculo de los grados de libertad en diversos mecanismos simples que contienen los pares cinemáticos más habituales en mecanismos planos, que son los que fundamentalmente se van a considerar.

Cabe observar como dependiendo de la existencia o no de deslizamiento en el contacto de rodadura, se tendrá un par de la clase *I* (1 grado de libertad) o de la clase *II* (2 grados de libertad). En el caso de los engranajes se considera contacto de rodadura con deslizamiento entre los dientes. Por último indicar que los muelles no tienen posibilidad de restringir el movimiento entre las barras que conectan, por lo tanto no son pares cinemáticos y pueden ser eliminados a la hora de la determinación de los grados de libertad de un mecanismo que los incluya.

Tabla 1.2. Aplicación de la fórmula de Grübler a mecanismos simples

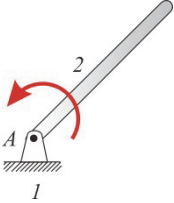
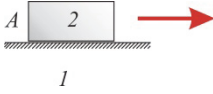
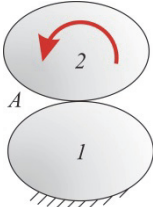
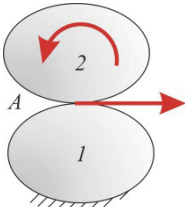
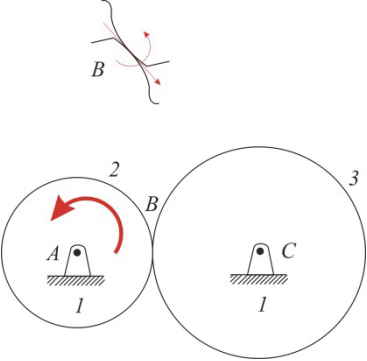
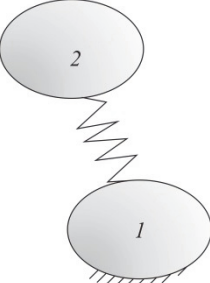
Nombre del par característico	Diagrama del mecanismo	Grados de libertad
Revolución (R)		$n = 2$ (1 fija) $J_1 = 1$ $J_2 = 0$ $F = 3 \cdot (2 - 1) - 2 \cdot 1 = 1$
Prismático (P) (deslizadera)		$n = 2$ (1 fija) $J_1 = 1$ $J_2 = 0$ $F = 3 \cdot (2 - 1) - 2 \cdot 1 = 1$
Rodadura sin deslizamiento (RSD)		$n = 2$ (1 fija) $J_1 = 1$ $J_2 = 0$ $F = 3 \cdot (2 - 1) - 2 \cdot 1 = 1$
Rodadura con deslizamiento (RCD)		$n = 2$ (1 fija) $J_1 = 0$ $J_2 = 1$ $F = 3 \cdot (2 - 1) - 1 \cdot 1 = 2$

Tabla 1.2. Aplicación de la fórmula de Grübler a mecanismos simples (Continuación)

Nombre del par característico	Diagrama del mecanismo	Grados de libertad
Dientes de engranajes		$n = 3 \text{ (1 fija)}$ $J_1 = 2$ $J_2 = 1$ $F = 3 \cdot (3 - 1) - 2 \cdot 1 - 1 \cdot 1 = 1$
Muelle		$n = 2 \text{ (1 fija)}$ $J_1 = 0$ $J_2 = 0$ $F = 3 \cdot (2 - 1) - 0 - 0 = 3$

### 1.3.2. Ejemplo

Todo lo dicho anteriormente se aplicará a la determinación de los grados de libertad del mecanismo de la *Figura 1.12*.

En el mecanismo original se tiene que

$$\left. \begin{array}{l} n = 7 \\ J_1 = 7 \\ J_2 = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow F = 3 \cdot (7 - 1) - 2 \cdot 7 - 1 \cdot 1 = 3$$

donde cabe destacar la eliminación del muelle y el par de la clase II situado en A.

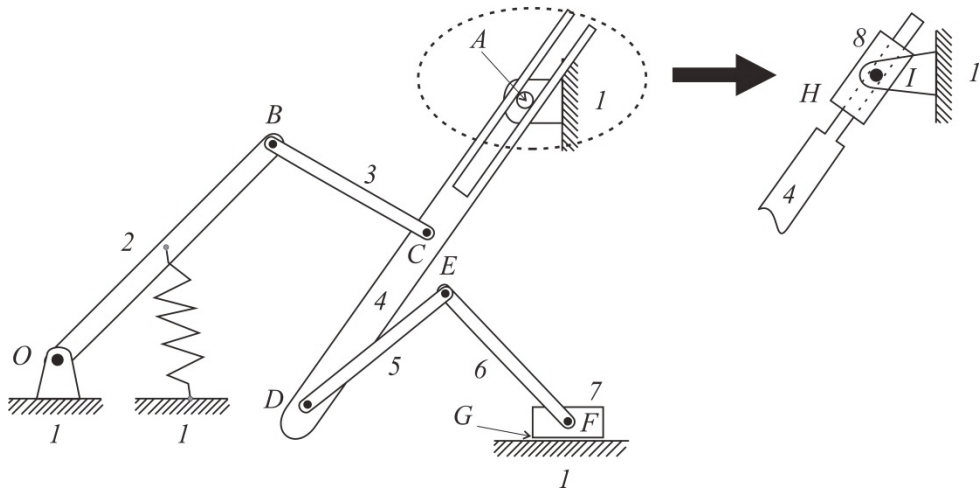


Figura 1.12. Cálculo de los grados de libertad del mecanismo

Obsérvese también como dicho par de horquilla puede ser considerado alternativamente, a efectos de movilidad, como una combinación de par prismático ( $H$ ), par de revolución ( $I$ ) y barra adicional ( $8$ ). En este segundo caso, la aplicación de la fórmula de Grübler dará el mismo resultado, esto es

$$\left. \begin{array}{l} n = 8 \\ J_1 = 9 \\ J_2 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow F = 3 \cdot (8 - 1) - 2 \cdot 9 = 3$$

### 1.3.3. Excepciones a la fórmula de Grübler

A pesar de su innegable utilidad, la fórmula de Grübler presenta un considerable número de casos en los que proporciona resultados erróneos o que precisan de una interpretación. Estos casos se producen en mecanismos con especiales características geométricas. A continuación se indican algunos ejemplos.

En el caso del mecanismo de la *Figura 1.13*, la aplicación de la fórmula de Grübler proporciona el siguiente resultado

$$F = 3 \cdot (n - 1) - 2 \cdot J_1 = 3 \cdot (5 - 1) - 2 \cdot 6 = 0$$

Cabe observar que el mecanismo (a) está formado por cuadriláteros articulados en configuración de paralelogramo (si se cumple que  $AB=CD=EF$ ,  $AD=BC$  y  $CE=DF$ ) y, por tanto, puede moverse libremente. Sin embargo, el mecanismo (b) es una estructura dado que una misma barra, la 3, no puede girar respecto a dos centros instantáneos de rotación diferentes. En el caso (a), se podría eliminar cualquiera de las barras 2, 4 ó 5 sin que por ello se viera modificado el comportamiento cinemático del mecanismo.

### Formas críticas

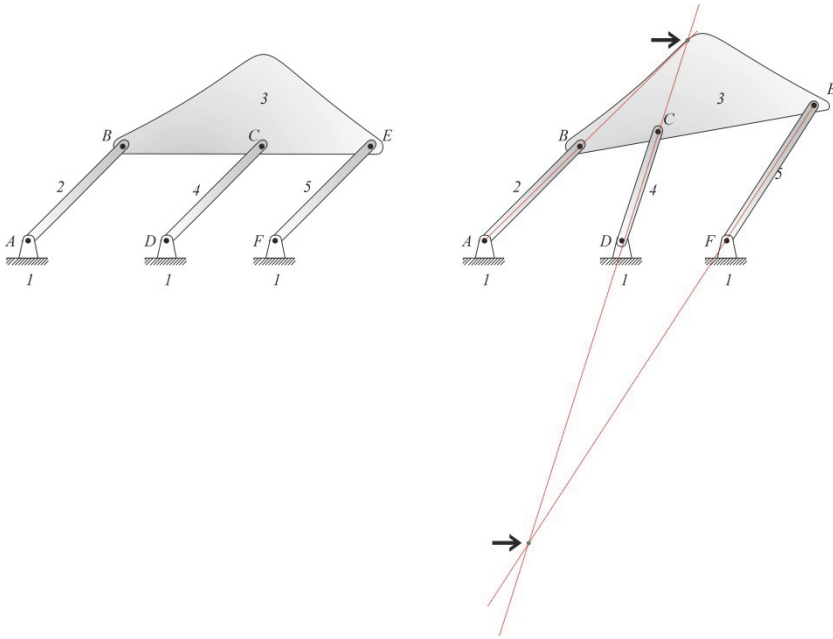


Figura 1.13. Formas críticas o cadenas cinemáticas sobre-restringidas

La expresión de Grübler se basa en evaluar el número de variables (grados de libertad) y ecuaciones (restricciones) disponibles. El número de variables siempre se evalúa correctamente, pero para que la fórmula de Grübler permita obtener los grados de libertad reales del mecanismo, es imprescindible que las ecuaciones de restricción sean independientes, cosa que depende de la geometría real del mecanismo. Obviamente, en caso de existir ecuaciones dependientes, la movilidad real será mayor de la obtenida con la fórmula de Grübler.

## Grados de libertad pasivos

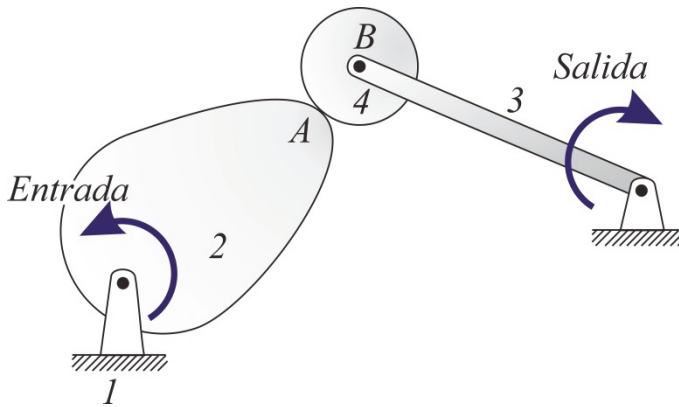


Figura 1.14. Grados de libertad pasivos

En el mecanismo de leva de la *Figura 1.14* pueden darse dos circunstancias. La primera de ellas corresponderá al caso en que en el punto de contacto *A* se den las condiciones de rodadura con deslizamiento, en ese caso correspondería a un par cinemático de la clase *II*, por lo que fórmula de Grübler daría

$$F = 3 \cdot (n - 1) - 2 \cdot J_1 - 1 \cdot J_2 = 3 \cdot (4 - 1) - 2 \cdot 3 - 1 \cdot 1 = 2$$

Sin embargo es evidente que desde el punto de vista de la relación entrada-salida este mecanismo tiene un solo grado de libertad. El segundo grado de libertad corresponde a la rotación de la barra 4 (rodillo) respecto del punto *B*, no siendo posible establecer una relación cinemática entre el movimiento de la barra de entrada y el que adquirirá dicha barra 4. Esos grados de libertad que no afectan al movimiento útil del mecanismo, se denominan *grados de libertad pasivos*.

La segunda circunstancia de la que se hablaba correspondería a la rodadura sin deslizamiento en el punto *A*, en este caso el par sería de la clase *I* y la aplicación de Grübler daría un solo grado de libertad para el mecanismo

$$F = 3 \cdot (n - 1) - 2 \cdot J_1 - 1 \cdot J_2 = 3 \cdot (4 - 1) - 2 \cdot 4 - 1 \cdot 0 = 1$$

En este caso no existiría indefinición cinemática para ninguna de las barras que forman el mecanismo.

## Lazos prismáticos

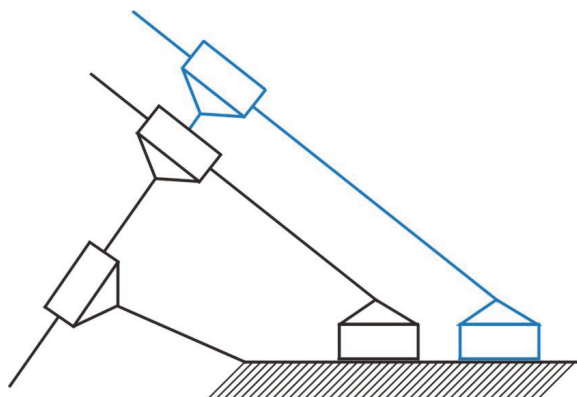


Figura 1.15. Lazos prismáticos

En este caso Grübler da lugar a

$$F = 3 \cdot (n - 1) - 2 \cdot J_1 - 1 \cdot J_2 = 3 \cdot (3 - 1) - 2 \cdot 3 - 1 \cdot 0 = 0$$

mientras que tal y como se indica en la figura el mecanismo puede moverse. En este último caso se podría reescribir la fórmula de Grübler del siguiente modo

$$F = 2 \cdot (n - 1) - 1 \cdot J_p = 2 \cdot (3 - 1) - 1 \cdot 3 = 1$$

donde se ha considerado que en un lazo cerrado formado exclusivamente por pares prismáticos no existe ninguna posibilidad de giro, por lo tanto cada sólido libre poseerá solo dos posibilidades (traslaciones) de movimiento independientes y cada par prismático, cuyo número se denotará por  $J_p$ , eliminará solo una de esas posibilidades.



**Para seguir leyendo haga click aquí**