UNIVERSIDAD POLITECNICA DE VALENCIA

La simetría como estrategia para resolver problemas de optimización

Apellidos, nombre	Cortés López, Juan Carlos (jccortes@mat.upv.es)
Departamento	Matemática Aplicada
Centro	Facultad de Administración y Dirección de Empresas

1 Resumen de las ideas clave

En este artículo se presenta, a través de una actividad conductora, una estrategia básica para la resolución de problemas: el aprovechamiento de la simetría (siempre y cuando ello es factible). El trabajo aquí expuesto pretende ser un ejemplo concreto y útil para su implementación en una clase de matemáticas donde se desee mostrar al alumno casos prácticos en los que resulte visible el valor añadido que supone, antes de resolver un problema mediante una estrategia clásica (entendida como aquella que es bien conocida por la formación previa del alumno), el considerar otras formas alternativas de abordar la resolución de un problema. La aplicación de dichas estrategias puede probablemente acarrear la introducción de ciertas hipótesis simplificativas, cuyo análisis crítico debe realizarse al final de la resolución del problema. Más concretamente, la actividad vehicular que aquí se presentará puede enmarcarse en un primer curso de Cálculo con contenidos de Cálculo Diferencial y técnicas de optimización. El lector debe advertir que la propuesta didáctica que sigue no pretende sustituir al potente enfoque general basado en el Cálculo Diferencial, sino ser un complemento formativo.

2 Introducción

Una de las tareas más importantes a las cuales se puede enfrentar un futuro licenciado en Administración y Dirección de Empresas es la **toma de decisiones óptimas**. Ejemplos de estas tareas pueden consistir en dar respuestas a cuestiones como las siguientes:

- ¿Qué nivel de producción debe adoptar una empresa para maximizar su beneficio?
- ¿Qué tamaño de pedido de reaprovisionamiento de un inventario debe realizar una empresa para minimizar los costes?

No cabe duda que es por tanto conveniente disponer de herramientas adecuadas para dar una respuesta satisfactoria tanto a este tipo de cuestiones como otras similares que puedan surgir en la tarea empresarial. Es importante señalar que no se trata sólo de tomar decisiones, sino de tomar la mejor decisión, y para ello, se necesita de criterios científicos que avalen que la decisión adoptada es la mejor entre todas las posibles.

Las matemáticas constituyen una poderosa herramienta en este sentido. El **Cálculo Diferencial** es una de las partes de las matemáticas que se dedica al estudio y desarrollo de dichas herramientas. Muchos de los criterios que proporciona el Cálculo Diferencial son generales, y aunque poderosos, conviene señalar que su uso indiscriminado puede resultar en determinadas situaciones engorroso e impracticable. Por ello en estas páginas nos interesará subrayar (y eso se hará a través de un problema conductor que plantea una situación práctica) la importancia de aprovechar las cualidades intrínsecas del problema objeto de estudio para sacar el mayor rendimiento a cada situación que nos podamos enfrentar en la tarea de **optimizar**.

UNIVERSIDAD POLITECNICA DE VALENCIA

3 Objetivos

Los objetivos docentes de este artículo son que el alumno sea capaz de:

- Buscar estrategias que aprovechen las características propias de un problema para buscar su solución. En nuestro caso concreto, se tratará de aprovechar la simetría subyacente en el problema vehicular propuesto.
- Introducir hipótesis verosímiles que simplifiquen la resolución de un problema.
- Emitir una crítica acerca de propias limitaciones que pueden acarrear las hipótesis simplificativas que se hayan adoptado para facilitar la solución de un problema.
- Comparar diferentes enfoques alternativos para dar respuesta a un problema.

4 Desarrollo

Nos enfrentaremos al siguiente problema para poner en valor la importancia de aprovechar las características intrínsecas de un problema (concretamente, y como se verá más adelante, se trata específicamente de la simetría) para simplificar la respuesta al mismo (en este caso, la determinación de un óptimo):

Problema conductor de la actividad

Sobre un terreno y al mismo lado de una línea de ferrocarril están situadas dos sucursales de una empresa. La empresa está proyectando construir al lado de la línea ferroviaria una sede logística, la cual permita comunicar las tareas de distribución planeadas. Obviamente la ubicación de la nueva sede debe ser tal que el punto donde se construya debe ser óptimo en el sentido de minimizar las distancias totales que se necesiten recorrer, para de este modo minimizar los gastos y tiempos de desplazamiento. Tómese una decisión acerca de dónde debería ubicarse la sede de la sucursal.

Conviene señalar que los únicos conocimientos previos que se requerirán para abordar el problema planteado son los propios de cualquier alumno que haya cursado estudios preuniversitarios con contenidos en matemáticas sobre Cálculo Diferencial en una variable y técnicas básicas de optimización, así como conceptos y rutinas básicas de geometría plana tales como el cálculo de la ecuación de una recta que pasa por dos puntos.

En primer lugar, consideremos una representación gráfica del problema que nos ayude a visualizarlo (véase Figura 1).

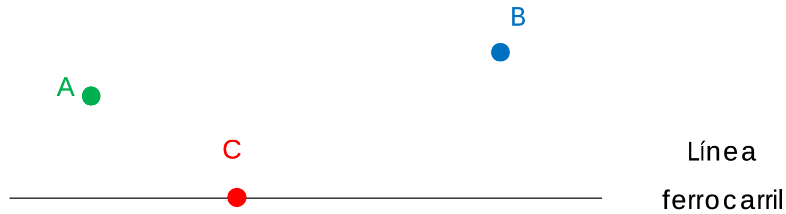

Figura 1. Representación gráfica plana del problema

A continuación, debemos sugerir la posibilidad de introducir simplificaciones que, sin restar generalidad a la solución final del problema (y por tanto a su aplicabilidad), nos permitan sin embargo facilitar su resolución. Pensemos pues qué tipo de hipótesis podemos incluir sin que por ello restrinjamos las posibles aplicaciones del problema. He aquí algunas posibilidades a considerar, las cuales deben aparecer en el trabajo que surja en el aula:

- Para ubicar cada una de las empresas de forma precisa necesitamos primero introducir un sistema de referencia coordenado. Desde luego el más sencillo y mejor conocido es el sistema cartesiano, pero ¿cuál debe ser la dimensión de dicho sistema? Si asumimos que las empresas están situadas en un terreno que orográficamente es plano, ¿qué implicaciones simplificativas tendrá esto? Claramente si, como hemos señalado ya, usamos el potente método de coordenadas cartesianas, se pasará de tener las tres coordenadas típicas para ubicar un punto en el espacio a únicamente requerir dos coordenadas. Esto implicará una simplificación en el número de incógnitas a manejar, ya que, precisamente son las coordenadas del punto donde esté situada la empresa C las que se pretenden calcular. Hagamos pues la mencionada asignación: las coordenadas de las empresas A, B y C las identificaremos con (a_1,a_2), (b_1,b_2) y (c_1,c_2), respectivamente (véase Figura 2).
- Gracias a la introducción de la hipótesis anterior, hemos pasado de tener 3 incógnitas (sería el caso en que el punto C buscado estuviera ubicado en el espacio: $C(c_1,c_2,c_3)$) a tener dos incógnitas $C(c_1,c_2)$. Antes de pasar al planteamiento y la resolución del problema sigamos pensando si es posible seguir introduciendo simplificaciones que no resten generalidad al problema. Observemos en la Figura 3 que no existe pérdida de generalidad si:
    - Situamos el punto $A(a_1,a_2)$ sobre el eje vertical. De esta forma se tendrá: $a_1=0$. Como las coordenadas de A son datos disponibles, esto no rebaja el número de incógnitas, pero sí simplificará el manejo algebraico posterior que obligará a manipular las coordenadas del punto A y, ello será sin duda más sencillo si podemos asumir que $a_1=0$.
    - Identificamos la vía ferroviaria (sobre la cual estará ubicado el punto C donde se pretende construir la nueva sede) con el eje horizontal de coordenadas. ¿Qué consecuencias simplificativas tiene esta hipótesis? Obviamente, que pasaremos de tener dos incógnitas: $C(c_1,c_2)$ a tener únicamente una, ya que, estaremos asumiendo que $c_2=0$, esto es, que $C(c_1,0)$. Adivinamos ya que esto va a suponer una simplificación directa del problema en el sentido de que la función

objetivo a minimizar (aquella que está todavía por plantear, pero que debe representar la distancia total entre las sedes) va a tener únicamente una incógnita: c_1, y no las dos que hubiéramos tenido que manejar si no hubiéramos introducido esta hipótesis simplificativa. Por lo tanto, y pensando en la potente herramienta que proporciona el Cálculo Diferencial para optimizar funciones, hemos pasado de tener que requerir el Cálculo Diferencial para optimizar funciones de dos variables a únicamente requerir el correspondiente Cálculo de una variable, lo cual implica una gran simplificación en la práctica.

- Antes de abordar la resolución del problema, sigamos pensando en introducir algunas hipótesis simplificativas y que pueden jugar un papel relevante en la búsqueda más sencilla de la solución, sin por ello perder generalidad en su planteamiento. ¿Cómo deben ser los signos de las coordenadas involucradas en la simplificación del problema hasta ahora realizada? Un dibujo como el de la Figura 3 mostrará a los alumnos que dichas coordenadas pueden asumirse todas positivas, es decir, se puede suponer que a_2, b_1, b_2, c_1 son positivos. Más aún, puede suponerse sin incurrir en ninguna restricción que a_2 es menor o igual que b_2, ya que en otro caso, un cambio de los roles que desempeñan cada uno de los puntos permitiría asumir esta hipótesis y resolver el problema de forma igualmente general.

Observemos que introducidas las dos simplificaciones sobre los puntos A y C, es decir, a_1=0 y c_2=0, respectivamente, no podemos hacer algo parecido sobre el punto B, ya que, ello sí restaría generalidad a la solución que se proporcionaría.

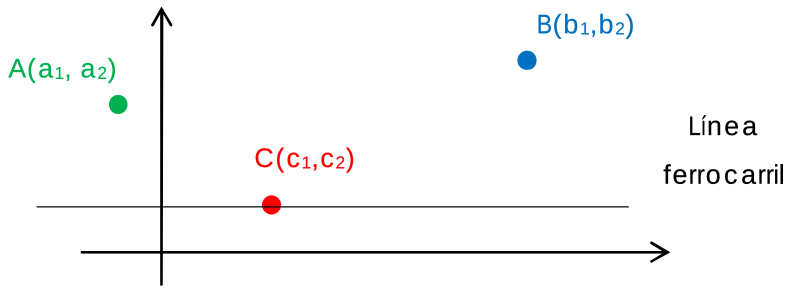

Figura 2. Representación cartesiana (plana) general del problema

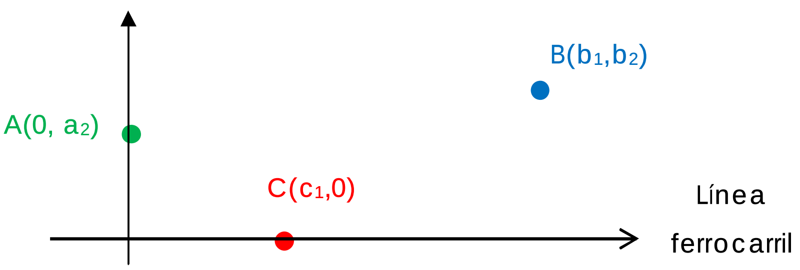

Figura 3. Representación cartesiana simplificada del problema

Llegado este punto, estamos en condiciones de plantear el problema traduciéndolo primero a lenguaje algebraico y posteriormente resolviéndolo utilizando las técnicas clásicas del Cálculo Diferencial en una variable. Aunque precisamente, el objeto principal de este trabajo docente es poner en valor a través del problema planteado, que seguir un camino estándar para resolver este problema (u otros que se pueden presentar) no tiene por qué ser el más adecuado, es conveniente para que resulte más pedagógico a los alumnos que primero den respuesta al problema usando el Cálculo Diferencial y, después se motive (como se hará más adelante) un enfoque alternativo más sencillo. De esta manera, los estudiantes alcanzarán a apreciar y valorar mejor el objetivo didáctico que se persigue con esta actividad: la conveniencia de buscar estrategias simplificativas ante cualquier problema dado, antes de abordar de inmediato un camino que, si bien les puede resultar más familiar (por estar basado en rutinas que conocen), puede ser mucho más engorroso.

4.1 Usando el Cálculo Diferencial

Como una actividad preliminar propondremos que aplicando el potente Cálculo Diferencial en una variable los alumnos planteen en una primera etapa y después resuelvan, el problema conductor. Como, desde el punto de vista de las ideas que aquí se quieren exponer lo que nos interesa no son repetir los aspectos didácticos de cómo trabajar en el aula las rutinas algorítmicas propias de la aplicación del Cálculo Diferencial, nos limitaremos a continuación a exponer los principales pasos y resultados que se irán presentando con la aplicación de este enfoque. En primer lugar, se motivará en el aula el planteamiento de la función objetivo:

$$f(c_1) = \sqrt{(c_1)^2 + (a_2)^2} + \sqrt{(b_1 - c_1)^2 + (b_2)^2}\ .$$

Ecuación 1. Función objetivo.

A continuación se deducirá que el cálculo de sus puntos críticos conduce a la ecuación algebraica:

$$\left((a_2)^2 - (b_2)^2\right)(c_1)^2 - 2b_1(a_2)^2 c_1 + (b_1)^2(a_2)^2 = 0\ .$$

Ecuación 2. Ecuación para el cálculo de los puntos críticos.

Como a_2 y b_2 tiene el mismo signo (y éste es positivo, haciendo uso de las hipótesis simplificativas que hemos introducido), siempre que dichos valores sean distintos el cálculo de los puntos críticos se debe hacer resolviendo una ecuación polinómica de grado 2 dada por la Ecuación 2. Su resolución nos conducirá a dos candidatos a solución dados por

$$c_1^{*} = \frac{b_1 a_2}{a_2 + b_2} \quad , \quad c_1^{**} = \frac{b_1 a_2}{a_2 - b_2}\ .$$

Ecuación 3. Candidatos a puntos críticos.

Ahora entrará en juego el hecho de que hayamos introducido la hipótesis simplificativa $a_2 \leq b_2$ (en realidad ahora asumimos que $a_2 < b_2$), pues bajo esa hipótesis se tiene que $c_1^{**} < 0$ (al ser su denominador negativo), lo cual contradice nuestra hipótesis, también simplificativa inicial $c_1^{**} > 0$. Llegado este punto debemos subrayar al alumno el rédito simplificativo que hemos obtenido al realizar las hipótesis involucradas en el paso anterior. Queda todavía por investigar el caso en que $a_2 = b_2$, el cual, impuesto sobre la Ecuación 2 conduce a la resolución de una ecuación de primer grado cuya solución es

$$c_1^* = \frac{b_1}{2},$$

Ecuación 4. Candidato a punto críticos si $a_2 = b_2$.

que admite una interpretación geométrica muy intuitiva (véase Figura 4): si las sedes A y B se encuentran a la misma distancia de la vía ferroviaria, la sede C debe construirse el punto medio del segmento que se obtiene de proyectar los puntos A y B sobre el eje de abscisas, que por una hipótesis simplificativa anterior, hemos hecho coincidir sobre la vía del ferrocarril. Hagamos observar a los estudiantes que esta solución está contenida en realidad en la dada en la Ecuación 3 (baste tomar allí $a_2 = b_2$), por lo tanto nos podemos quedar, sin distinguir más casos, con el punto crítico c_1^* dado en la Ecuación 3. Lo único que ahora resta es comprobar que este candidato a mínimo lo es efectivamente. Un cálculo rutinario basado en que la segunda derivada de la función objetivo en dicho punto es positiva, nos proporciona esa justificación. Por otra parte puede probarse que la función objetivo dada en la Ecuación 1 es convexa, justificándose así que el punto c_1^* es, no sólo mínimo local (es decir, una decisión óptima), sino un mínimo global de la función objetivo (es decir, es la mejor decisión de entre todas). Por tanto, la empresa deberá ubicar su sede en el punto c_1^* dado en términos de los datos en la Ecuación 3.

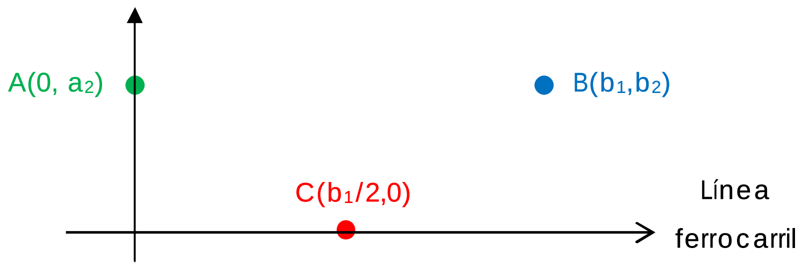

Figura 4. Representación cartesiana simplificada del problema cuando $a_2 = b_2$

4.2 Buscando una estrategia simplificadora global: la simetría del problema

Si el alumno desarrolla en el aula el trabajo anterior bajo nuestra supervisión y estímulo, observaremos que el mismo no está ausente de dificultades técnicas para él, que en cualquier caso debe afrontar porque resultan altamente instructivas para su formación específica en ciertas destrezas matemáticas, pero también porque acarrean una buena dosis de estrategias generales (hacer un buen dibujo, buscar una buena notación, introducir simplificaciones, etc) útiles en cualquier situación que consista en resolver un problema (véase, [1]-[3]). Por otra parte, será ese esfuerzo personal el que le va a permitir al alumno saborear la belleza y eficacia de la estrategia que a continuación invitaremos a los alumnos a considerar. Para ello, planteemos en el aula algunas preguntas que sugieran la anticipación del alumno a nuestra propuesta de solución alternativa y más sencilla:

- En el estudio anterior, en el caso en que $a_2 = b_2$ se ha obtenido la solución aprovechando la simetría del caso particular que en ese escenario se plantea. ¿Es necesario usar el Cálculo Diferencial para resolver esa situación? La respuesta esperada será que no es necesario, precisamente por la citada simetría. Esta es una primera introducción de la estrategia a motivar.

- En ese mismo escenario, propongamos que consideren que la sede empresarial A quede al otro lado del ferrocarril, pero cumpliendo como antes que dista de la vía ferroviaria la misma distancia que B (exactamente estamos hablando en asumir que las coordenadas cartesianas del nuevo punto digamos A' que hace el rol de A son $A'(0,-a_2)$. Planteemos al alumno las siguientes preguntas: ¿cuál sería en este caso la solución? ¿Puedes justificarla con un razonamiento convincente? Invitarles a hacer una representación gráfica del problema debe inducirles a un razonamiento parecido al siguiente (el cual se ilustra gráficamente en la Figura 5): como el camino más corto entre dos puntos en plano es la línea recta, la solución estará dada por el punto de corte de la recta que une los puntos $A'(0,-a_2)$ y $B(b_1,b_2)$. En este caso como $a_2 = -b_2$, la intuición geométrica nos brinda, ¡sin hacer cálculo alguno!, la solución encontrada con el Cálculo Diferencial y dada en la Ecuación 4.

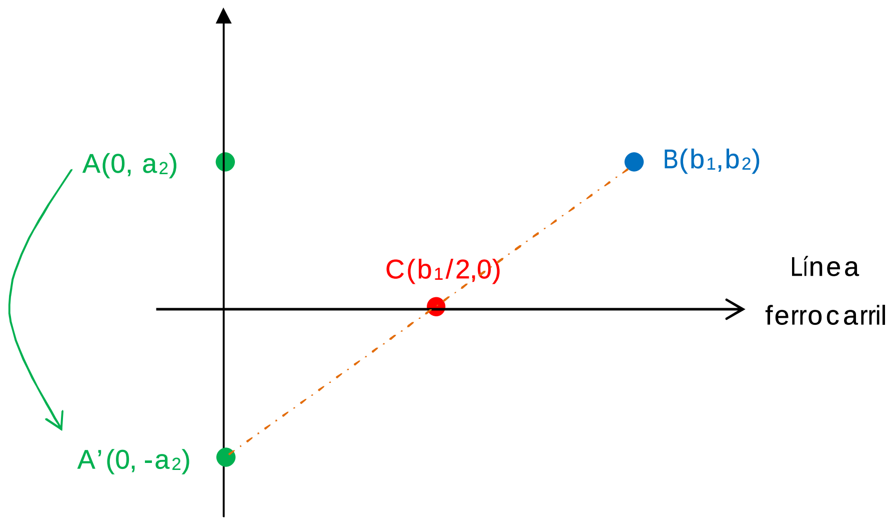

Figura 5. Cálculo de la solución aprovechando la simetría.

- Planteemos ahora una nueva pregunta. ¿En qué cambia el razonamiento anterior si no se cumple la condición $a_2 = -b_2$? Después del trabajo dirigido hasta ahora, la respuesta no debe tardar en aflorar: nada sustancial cambia en realidad, la idea de considerar el punto simétrico $A'(0,-a_2)$ respecto de la vía del ferrocarril del punto original $A(0,a_2)$ puede aplicarse y la solución nos la dará nuevamente el punto de corte de la recta que une los puntos A' y B con la recta y=0 (que define la vía del ferrocarril). Este cálculo ahora debe hacerse (pues no podemos aprovechar más la simetría que sí teníamos en caso particular tratado en la Figura 5), pero ¡no requerimos del Cálculo Diferencial! para resolver el problema, es mucho más sencillo (y eso sólo el alumno lo puede apreciar si primero ha resuelto el problema por la aplicación de las técnicas diferenciales antes expuestas), (véase Ecuación 5).

$$\left.\begin{array}{r}\text{ec. recta une } A'(0,-a_2)\text{ , } B(b_1,b_2): \quad y = b_2 + \dfrac{a_2+b_2}{b_1}(x-b_1)\\ \text{ec. recta que define la línea ferroviaria}: \quad y = 0\end{array}\right\} \Rightarrow c_1^* = \frac{a_2\,b_1}{a_2+b_2}$$

Ecuación 5. Solución del problema aprovechando la simetría

Encontramos así la misma solución por una vía alternativa mucho más sencilla.

5 Cierre

A lo largo de esta solución hemos requerido hacer varias hipótesis simplificativas que han facilitado la resolución del problema sin deteriorar la validez de la solución del mismo, sin embargo, finalizada nuestra propuesta de solución debemos revisarla y realizar una crítica constructiva acerca de las posibles mejoras de dicha solución. Recordemos que básicamente hemos asumido dos hipótesis:

- Aunque el problema real estaría planteado sobre el espacio (exigiéndose el uso de tres coordenadas espaciales) la simplificación del mismo al plano es asumible si el terreno donde están ubicadas las empresas es aproximadamente plano. Pero por qué no podemos invitar a los alumnos que aborden el problema trabajando con tres coordenadas e intenten extender el razonamiento anterior al caso en que se trabaja en el espacio tridimensional.
- También hemos asumido que la sede C de la empresa está situada sobre la línea de ferrocarril. Obviamente, esto no es real pero es una aproximación (que facilita la solución) si dicha distancia real es muy pequeña frente al resto de las distancias involucradas, lo cual en la práctica es plausible.

Más importante que la pérdida de aproximación que se tiene al asumir estas hipótesis simplificativas, es el hecho de que el alumno tenga la oportunidad de trabajar a través de esta actividad concreta con el método científico el cual siempre se basa en unas premisas o hipótesis que se asumen con el fin de que el problema sea matemáticamente tratable.

Para acabar, cabe subrayar, que en tarea docente, la exposición por parte del profesor debe adecuarse al nivel de conocimientos de quienes nos escuchan (como se ha intentado hacer en estas páginas), pero sin por ello eludir un posterior análisis crítico (constructivo) de las limitaciones del modelo simplificado adaptado y de sus hipótesis.

6 Bibliografía

[1] De Guzmán, M.: "Para pensar mejor", Ed. Pirámide, 2001, pág. 159–160.

Este texto está dividido en dos partes, la primera se dedica al estudio general de los procesos de aprendizaje, particularizando el mismo al campo de las Matemáticas. La segunda parte, se secuencia por capítulos breces, introduciendo en cada uno de ellos una estrategia de Resolución de Problemas diferente e ilustrándolas con ejemplos desarrollados y otros para trabajar autónomamente.

[2] Polya, G.: "Cómo plantear y resolver problemas", Ed. Trillas, 1990.

Este libro es un clásico dentro del campo de la Resolución de Problemas. Introduce las ideas fundamentales de este campo con ejemplos y reflexiones al respecto que resultan de gran interés. En sus páginas se encuentran el famoso decálogo del "buen" profesor de matemáticas que tantas y tantas veces ha sido citado en la bibliografía posterior.

[3] Mason, J.; Burton, L.; Stacey, K.: "Pensar matemáticamente", Ed. Labor/MEC, 1989.

Se trata de un magnífico libro sobre Resolución de Problemas que se desarrolla de forma similar a la referencia [1] anterior. Por su interés pedagógico el Ministerio de Educación y Ciencia (MEC) subvencionó su traducción al español y promovió su difusión por los centros educativos de Enseñanza Media. Contiene un gran número de problemas para trabajar y otros tantos resueltos. Los autores proponen su propio método de abordar las estrategias de Resolución de Problemas.