

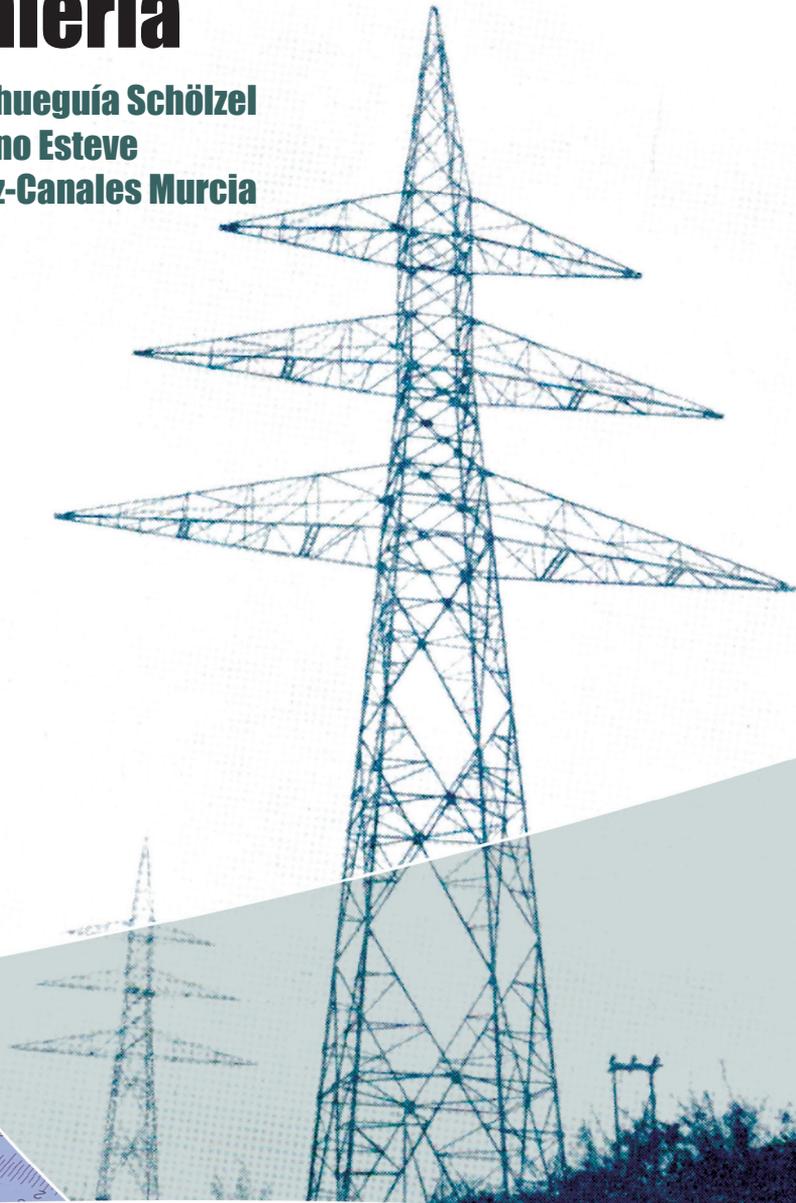


Problemas de Electromagnetismo para la Ingeniería

Javier Fermín Urchueguía Schölzel

Juan Carlos Moreno Esteve

José Fco. Martínez-Canales Murcia



**EDITORIAL
UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA**

Para seguir leyendo haga click aquí

Javier Fermín Urchueguía Schölzel

Juan Carlos Moreno Esteve

José Fco. Martínez-Canales Murcia

Problemas de Electromagnetismo para la Ingeniería

EDITORIAL
UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA

Los contenidos de esta publicación han sido revisados por el Departamento de Física de la Universitat Politècnica de València

Colección Académica

Para referenciar esta publicación utilice la siguiente cita:

URCHUEGUÍA SCHÖLZEL, J., MORENO ESTEVE, J.C. Y MARTÍNEZ-CANALES MURCIA, J.Fco. *Problemas de Electromagnetismo para la Ingeniería*. Valencia: Universitat Politècnica de València

Primera edición, 2016 (versión impresa)

Primera edición, 2016 (versión electrónica)

© Javier Fermín Urchueguía Schölzel
Juan Carlos Moreno Esteve
José Fco. Martínez-Canales Murcia

© imagen de portada: Fernando Urchueguía Echeverría

© 2016, Editorial Universitat Politècnica de València

distribución: Telf.: 963 877 012 / www.lalibreria.upv.es / Ref.: 6320_01_01_01

ISBN: 978-84-9048-507-1 (versión impresa)

ISBN: 978-84-9048-508-8 (versión electrónica)

La Editorial UPV autoriza la reproducción, traducción y difusión parcial de la presente publicación con fines científicos, educativos y de investigación que no sean comerciales ni de lucro, siempre que se identifique y se reconozca debidamente a la Editorial UPV, la publicación y los autores. La autorización para reproducir, difundir o traducir el presente estudio, o compilar o crear obras derivadas del mismo en cualquier forma, con fines comerciales/lucrativos o sin ánimo de lucro, deberá solicitarse por escrito al correo edicion@editorial.upv.es

Dedicado a:

Don Fernando Urchueguía Echeverría

Í N D I C E

PRÓLOGO	I
CAPÍTULO 1. ELECTROSTÁTICA	1
CAPÍTULO 2. EL CAMPO MAGNÉTICO	19
CAPÍTULO 3. CONDUCTORES CARGADOS EN EQUILIBRIO	49
CAPÍTULO 4. DIELECTRICOS	69
CAPÍTULO 5. CAMPO MAGNÉTICO EN MEDIOS MATERIALES	93
CAPÍTULO 6. INDUCCIÓN ELECTROMAGNÉTICA	117
CAPÍTULO 7. TEORÍA DE CIRCUITOS	147
CAPÍTULO 8. ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS	177

PRÓLOGO

Hace cuatro años salía a la luz “Electromagnetismo aplicado a la Ingeniería” y se abría una nueva etapa en el devenir de esta obra, un lapso que culmina con este libro de problemas. Se expresaba en el prólogo original la idea de ofrecer “cierta actualización, y adaptación de los contenidos, procurando escribir con estilo directo el nivel matemático-formal apropiado y tratando de ofrecer abundantes ejemplos y problemas resueltos, que –consideramos– son un elemento fundamental para profundizar en el aprendizaje de un programa orientado a estudiantes de Ingeniería”. Los autores partíamos de la premisa de que también los nuevos estudiantes de Ingeniería siguen precisando de la Física, y en particular del Electromagnetismo como herramienta imprescindible en su formación científico-técnica. Pero además, se enfrentan a un mundo cada vez más tecnológico, especializado y pleno de opciones, en el cual la información tiene poco valor “per se” –ya que es fácil de conseguir y ubicar–, y se precisa en cambio de una cuidadosa preselección y exposición de los contenidos. Para el profesor resulta crítico acertar el alcance y ámbito de estos y, sobre todo, ha de saber captar la ilusión y atención de los estudiantes. Observando la manera como nuestros alumnos enfocan el estudio del Electromagnetismo, se ha reforzado nuestro convencimiento de que son frecuentemente los ejercicios y problemas los que catalizan y fomentan el interés y capacidad de motivación por la teoría: ayudan a comprender los conceptos, permiten visualizar las aplicaciones y captan la imaginación de los estudiantes.

Ha sido esta la razón fundamental para cerrar, con este compendio de problemas resueltos, el camino que iniciamos al emprender “Electromagnetismo aplicado a la Ingeniería”, donde hemos procurado, en base a la exposición completa y esmerada de la resolución de los ejercicios que se proponían en la obra original, ofrecer al alumno una motivación o excusa adicional para adentrarse en la materia y tratar de profundizar en las ideas y aplicaciones del Electromagnetismo.

El libro está compuesto por dos grandes bloques: Electromagnetismo I que contiene electrostática y magnetostática; y el Electromagnetismo II, condensadores, dieléctricos, campo magnético en medios materiales y los fenómenos electromagnéticos dependientes del tiempo. En total ocho capítulos con diez problemas cada uno.

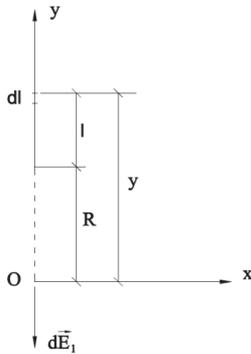
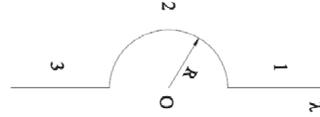
Cuando, hace algo más de cuatro años, celebrábamos que –después de años de esfuerzo– saliese por fin “Electromagnetismo aplicado a la Ingeniería”, había alguien en la mesa con tanta ilusión como los propios autores. Alguien que siempre me alentó a seguir el camino de la Ciencia, quien con su amor y esfuerzo lo hizo posible y que disfrutaba como quien más de cada pequeño o gran éxito que pudiera surgir a lo largo de mi carrera académica. “Electromagnetismo” le hizo una ilusión especial, ya que –como Pepe Martínez-Canales– había trabajado durante años en la construcción de Redes Eléctricas de Alta Tensión y le encantaban los temas de la Electricidad. Ese alguien, mi padre, falleció, desgraciadamente, poco después y no podrá ver este nuevo libro con el que, de seguro, hubiese disfrutado también. Por ello, y como pequeño homenaje, los autores quisieramos dedicar esta obra, de manera viva y sentida, a la memoria de Don Fernando Urchueguía Echeverría, Perito Industrial de sólida formación técnica, apasionado de la Ciencia y, sobre todo, una gran persona.

CAPÍTULO I

ELECTROSTÁTICA

PROBLEMA 1.1

Dado un hilo conductor semicircular adosado a otro conductor rectilíneo, como indica la figura, cargados con una densidad de carga lineal uniforme, $\lambda = 5,55 \text{ C/m}$, se pide calcular el campo eléctrico en el punto O (centro de la semicircunferencia de radio R).



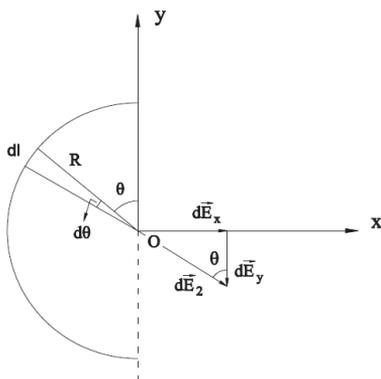
SOLUCIÓN

Tramo 1. El campo eléctrico creado por el tramo 1 en O es:

$$\left. \begin{aligned} d\vec{E}_1 &= -dE \cdot \vec{j} \\ dE &= \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{dq}{y^2} \\ y &= 1 + R \end{aligned} \right\} \begin{aligned} d\vec{E}_1 &= -\frac{\lambda}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{dl}{(1 + R)^2} \cdot \vec{j} \\ dq &= \lambda \cdot dl \end{aligned}$$

Integrando:

$$\vec{E}_1 = -\frac{\lambda}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \int_R^\infty \frac{dl}{(1+R)^2} \cdot \vec{j} = -\frac{\lambda}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \left[\frac{-1}{1+R} \right]_R^\infty \cdot \vec{j} = -\frac{\lambda}{8 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot R} \cdot \vec{j}$$



Tramo 2. El campo eléctrico creado por el tramo 2 en O es:

$$\left. \begin{aligned} d\vec{E}_2 &= dE_x \cdot \vec{i} - dE_y \cdot \vec{j} \\ dE_x &= \text{sen } \theta \cdot dE \\ dE_y &= \text{cos } \theta \cdot dE \end{aligned} \right\}$$

Sustituyendo, se tiene:

$$\left. \begin{aligned} d\vec{E}_2 &= dE \cdot (\text{sen } \theta \cdot \vec{i} - \text{cos } \theta \cdot \vec{j}) \\ dE &= \frac{\lambda}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{dl}{R^2} \quad ; \quad dl = R \cdot d\theta \end{aligned} \right\}$$

$$\vec{E}_2 = \frac{\lambda}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot R} \left(\int_0^\pi \text{sen } \theta \cdot d\theta \cdot \vec{i} - \int_0^\pi \text{cos } \theta \cdot d\theta \cdot \vec{j} \right) = \frac{\lambda}{2 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot R} \cdot \vec{i}$$

Tramo 3. Análogamente a como se ha operado en el tramo 1, pero con sentido opuesto, es decir:

$$\vec{E}_3 = \frac{\lambda}{8 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot R} \cdot \vec{j}$$

El campo eléctrico total resultante en el punto O es:

$$\vec{E}_T = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 = \frac{\lambda}{2 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot R} \cdot \vec{i}$$

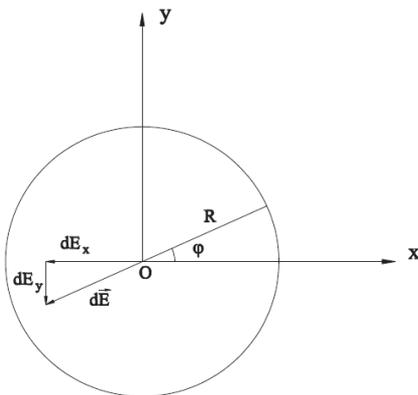
PROBLEMA 1.2

Un aro circular metálico de radio $R = 25$ cm, formado por un hilo conductor de sección despreciable comparada con R , se carga con una densidad lineal dada por $\lambda = \lambda_0 \cdot \sin(\varphi/2)$ nC·m⁻¹. Siendo φ el ángulo formado por radio vector y el eje de abscisas. Determinar el campo \vec{E} en el centro del aro. Dato: $\lambda_0 = 2$ nC·m⁻¹.

SOLUCIÓN

Módulo del campo creado por un diferencial de aro.

$$\left. \begin{aligned} |\vec{dE}| &= \frac{\lambda \cdot dl}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot R^2} \\ \lambda &= \lambda_0 \cdot \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \\ dl &= R \cdot d\varphi \end{aligned} \right\} dE = \frac{\lambda_0 \cdot R \cdot \sin\frac{\varphi}{2} \cdot d\varphi}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot R^2}$$



Las componentes de este diferencial de campo en las direcciones x e y son:

$$\begin{aligned} dE_x &= -\frac{\lambda_0}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot R} \cdot \sin\frac{\varphi}{2} \cdot \cos\varphi \cdot d\varphi \\ &= -\frac{\lambda_0}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot R} \cdot \sin\frac{\varphi}{2} \\ &\quad \cdot \left(2 \cdot \cos^2\frac{\varphi}{2} - 1\right) \cdot d\varphi \end{aligned}$$

en función del ángulo mitad

$$dE_y = -\frac{\lambda_0}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot R} \cdot \sin\frac{\varphi}{2} \cdot \sin\varphi \cdot d\varphi = -\frac{\lambda_0}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot R} \cdot 2 \cdot \sin^2\frac{\varphi}{2} \cdot \cos\frac{\varphi}{2} \cdot d\varphi$$

Integrando entre 0 y 2π , se obtienen las componentes del campo.

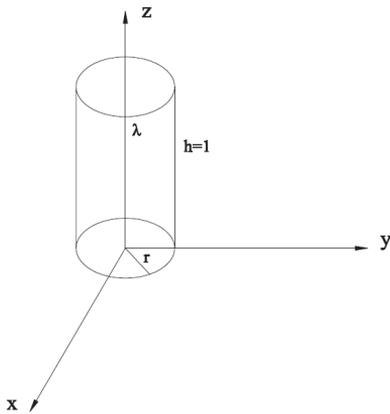
$$\begin{aligned} E_x &= \frac{\lambda_0}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot R} \cdot \left[\int_0^{2\pi} \sin \frac{\varphi}{2} \cdot d\varphi - 2 \cdot \int_0^{2\pi} \sin \frac{\varphi}{2} \cdot \cos^2 \frac{\varphi}{2} \cdot d\varphi \right] = \\ &= \frac{\lambda_0}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot R} \cdot \left\{ \left[-\frac{\cos \frac{\varphi}{2}}{1/2} \right]_0^{2\pi} - 2 \cdot \left[-\frac{\cos^3 \frac{\varphi}{2}}{3/2} \right]_0^{2\pi} \right\} = \\ &= \frac{\lambda_0}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot R} \{ [4] - 2 \cdot [4/3] \} = \frac{\lambda_0}{3 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot R} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_y &= \frac{\lambda_0}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot R} \cdot 2 \cdot \int_0^{2\pi} \sin^2 \frac{\varphi}{2} \cdot \cos \frac{\varphi}{2} \cdot d\varphi = \frac{\lambda_0}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot R} \cdot \left[\frac{\sin^3 \frac{\varphi}{2}}{3/2} \right]_0^{2\pi} = \\ &= \frac{\lambda_0}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot R} \cdot [0] = 0 \end{aligned}$$

El campo eléctrico creado en el centro del aro es: $\vec{E} = \frac{\lambda_0}{3 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot R} \cdot \vec{i} = 96 \vec{i} \text{ N} \cdot \text{C}^{-1}$

PROBLEMA 1.3

Una carga eléctrica está distribuida a lo largo de un conductor rectilíneo con una densidad lineal constante $0,111 \text{ nC}\cdot\text{m}^{-1}$. Se pide: a) La intensidad del campo electrostático a una distancia de 20 cm del conductor; b) El lugar geométrico de los puntos con potencial eléctrico nulo.

SOLUCIÓN**1º.- La intensidad del campo electrostático a una distancia de 20 cm del conductor**

$$\left. \begin{aligned} \phi &= \iint_{\sigma} \mathbf{E} \cdot d\sigma = E_r \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \cdot 1 \\ \phi &= \sum \frac{q}{\epsilon_0} \end{aligned} \right\}$$

Aplicando el teorema de Gauss a un cilindro de radio r y generatriz unidad,

$$\phi = E_r \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \cdot 1 = \frac{\lambda}{\epsilon_0}$$

y la intensidad del campo eléctrico, resulta $E_r = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{\lambda}{r} = 2,5 \text{ N}\cdot\text{m}^{-1}$

2º.- Potencial eléctrico

$$U = - \int E_r \cdot dr = \frac{\lambda}{2 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \int_r^{r_0} \frac{dr}{r} = \frac{\lambda}{2 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \ln \frac{r_0}{r}$$

La superficie donde $U_0 = 0$:

Para $U_0 = 0 \implies r = r_0$ ya que:

$$\frac{\lambda}{2 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \ln 1 = 0$$

superficie esférica $r = r_0$

PROBLEMA 1.4

Dadas las cargas puntuales q_1, q_2, q_3 , de valores, 1nC, 0,5 nC y 2 nC y situadas en un eje a una distancia del origen O de 1 m, 1,5 m y 1,8 m, respectivamente. Determinar el flujo del campo correspondiente a través de un circuito de radio $R = 0,5$ m de centro el punto O, situado en un plano perpendicular al eje sobre el que se encuentran las cargas.

SOLUCIÓN

Se resuelve el problema para el caso general de “n” cargas. Posteriormente se realiza la aplicación numérica.

El flujo debido a la carga q_i

$$\begin{aligned}\phi_i &= \iint_{\sigma} \vec{E} \cdot d\vec{\sigma} = \frac{q_i}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \iint_{\sigma} \frac{\vec{r}_0}{r^2} \cdot ds = \\ &= \frac{q_i}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \iint_{\sigma} \frac{ds \cdot \cos \alpha}{r^2} = \frac{q_i}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \Omega = \\ &= \frac{q_i}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot 2 \cdot \pi \cdot (1 - \cos \alpha_i) = \frac{q_i}{2 \cdot \epsilon_0} (1 - \cos \alpha_i)\end{aligned}$$

Siendo el flujo total, $\Phi_{\text{Total}} = \sum \phi_i = \frac{1}{2 \cdot \epsilon_0} \cdot \sum_1^n q_i \cdot (1 - \cos \alpha_i)$

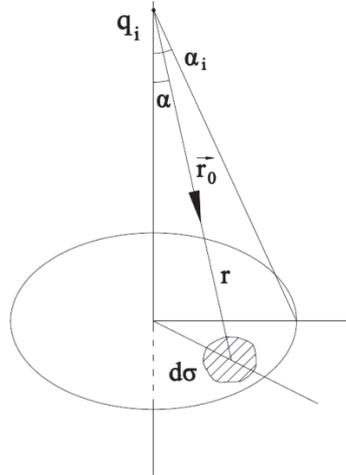
Particularizando para los datos del enunciado, $\Phi_T = 11,55 \text{ V} \cdot \text{m}$

PROBLEMA 1.5

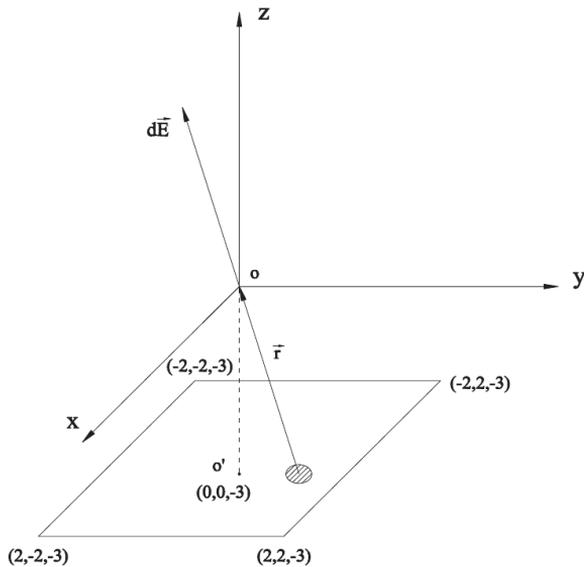
Referido a un sistema cartesiano, se tiene una hoja cuadrada, con vértices $(-2,-2,3)$; $(2, -2, -3)$ y $(2,2,-3)$. El eje OZ pasa por su centro O. En dicha hoja existe una carga eléctrica uniformemente distribuida, siendo $\sigma = 2 \cdot (x^2 + y^2 + 9)^{3/2} \text{ nC} \cdot \text{m}^{-2}$. Calcular el campo electrostático en el origen de coordenadas.

SOLUCIÓN

$$\left. \begin{aligned} d\vec{E} &= \frac{\sigma \cdot dS}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot r^2} \cdot \vec{r}_0 \\ \vec{r}_0 &= \frac{-x \cdot \vec{i} - y \cdot \vec{j} + 3 \cdot \vec{k}}{\sqrt{x^2 + y^2 + 9}} \\ dS &= dx \cdot dy \end{aligned} \right\}$$



Sustituyendo queda:



$$d\vec{E} = \frac{2 \cdot (x^2 + y^2 + 9)^{3/2} \cdot 10^{-9} \cdot dx \cdot dy}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot (x^2 + y^2 + 9)} \cdot \frac{-x \cdot \vec{i} - y \cdot \vec{j} + 3 \cdot \vec{k}}{\sqrt{x^2 + y^2 + 9}}$$

Por simetría las componentes en E_x y E_y se anulan al calcular \vec{E} .

$$\begin{aligned}\vec{E}_0 &= \frac{2 \cdot 10^{-9}}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \int_{-2}^2 dy \cdot \int_{-2}^2 (-x \cdot \vec{i} - y \cdot \vec{j} + 3 \cdot \vec{k}) \cdot dx \\ \vec{E}_0 &= \frac{2 \cdot 10^{-9}}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \int_{-2}^2 \left[\frac{-x^2}{2} \cdot \vec{i} - x \cdot y \cdot \vec{j} + 3 \cdot x \cdot \vec{k} \right]_{-2}^2 \cdot dy = \\ &= \frac{2 \cdot 10^{-9}}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \int_{-2}^2 \left[\left(-\frac{4}{2} + \frac{4}{2} \right) \cdot \vec{i} - y \cdot (2 + 2) \cdot \vec{j} + 3 \cdot (2 + 2) \cdot \vec{k} \right] \cdot dy = \\ &= \frac{2 \cdot 10^{-9}}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \left[-4 \cdot \frac{y^2}{2} \cdot \vec{j} + 12 \cdot y \cdot \vec{k} \right]_{-2}^2 = \frac{2 \cdot 10^{-9}}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \left[-\frac{4}{2} \cdot (4 - 4) \cdot \vec{j} + 12 \cdot 4 \cdot \vec{k} \right]\end{aligned}$$

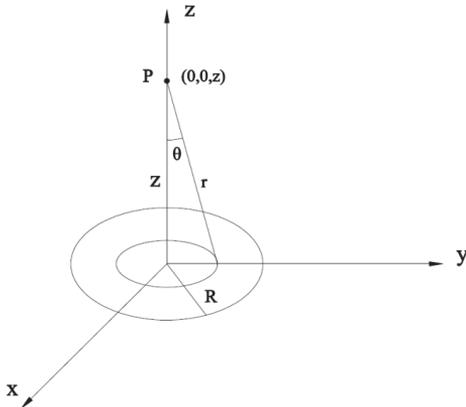
Sustituyendo el valor de la permitividad del vacío, el campo electrostático en el origen tiene el valor:

$$\vec{E}_0 = 864 \cdot \vec{k} \quad \text{V} \cdot \text{m}^{-1}$$

PROBLEMA 1.6

Sea una varilla de longitud 1 m cargada uniformemente con una carga de $10 \mu\text{C}$. Esta varilla está colocada según el eje de un disco de radio 0,5 m cargado también uniformemente con una carga de $100 \mu\text{C}$. Si la varilla está apoyada en el centro del disco, calcular la fuerza con que es repelida por el disco.

SOLUCIÓN



El campo que crea el disco en un punto P del eje (varilla):

$$E_p = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \int \frac{\cos \theta}{r^2} \cdot \sigma \cdot dS =$$

$$dS = 2 \cdot \pi \cdot y \cdot dy$$

$$= \frac{\sigma}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \int_0^R \frac{z}{(z^2 + y^2)^{3/2}} \cdot 2 \cdot \pi \cdot y \cdot dy$$

Resolviendo la integral, resulta un campo en P: $\vec{E}_p = \frac{\sigma}{2 \cdot \epsilon_0} \cdot \left[1 - \frac{z}{(z^2 + R^2)^{1/2}} \right] \cdot \vec{k}$

La componente radial del campo se anula por simetría. Entonces, la fuerza que ejerce un elemento diferencial de disco sobre el punto P es:

$$dF = E_p \cdot dq = \frac{\sigma}{2 \cdot \epsilon_0} \cdot \left[1 - \frac{z}{(z^2 + R^2)^{1/2}} \right] \cdot dq$$

y siendo:

$$\sigma = \frac{Q}{\pi \cdot R^2} \quad \text{densidad superficial del disco.}$$

$$\lambda = \frac{dq}{dz} = \frac{q_0}{a} \quad \text{densidad lineal de la varilla.}$$

Sustituyendo en la expresión anterior, se tiene:

$$dF = E_p \cdot dq = \frac{Q}{2 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot R^2} \cdot \left[1 - \frac{z}{(z^2 + R^2)^{1/2}} \right] \cdot \lambda \cdot dz$$

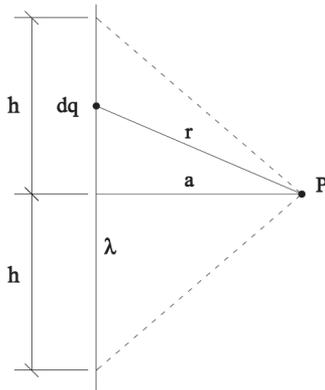
Integrando a todo lo largo de la varilla: $F = \frac{Q \cdot \lambda}{2 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot R^2} \cdot \int_0^a \left[1 - \frac{z}{(z^2 + R^2)^{1/2}} \right] \cdot dz$

$$F = \frac{Q \cdot q_0}{2 \cdot \pi \cdot a \cdot R^2 \cdot \epsilon_0} \cdot \left(R + a - \sqrt{R^2 + a^2} \right) = 27,5 \text{ N}$$

PROBLEMA 1.7

Se tiene una distribución de carga con densidad lineal $1 \text{ nC}\cdot\text{m}^{-1}$ a lo largo del eje OZ. Suponiendo que cuando la distancia de cualquier punto P a la misma es igual a un metro, el potencial escalar correspondiente es nulo. Suponiendo una longitud de la varilla de 100 m, determinar el potencial a una distancia de la varilla de 10 cm.

SOLUCIÓN



1.- Distribución de potencial en el plano OXY.

El potencial creado por una carga dq viene dado por:

$$dV = \frac{dq}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot r}$$

e integrando,

$$\begin{aligned} V &= \frac{\lambda}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \int \frac{dz}{r} = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \int \frac{dz}{\sqrt{z^2 + a^2}} = \\ &= \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \left[\operatorname{arcsch} \frac{z}{a} \right]_{-h}^h + C \\ &= \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \left[\operatorname{arcsch} \frac{h}{a} - \operatorname{arcsch} \frac{-h}{a} \right] + C = \frac{2}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \operatorname{arcsch} \frac{h}{a} + C = \\ &= \frac{2}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \ln \left(\frac{h}{a} + \sqrt{\left(\frac{h}{a}\right)^2 + 1} \right) + C \end{aligned}$$

Se ha sustituido la función arcsch por su desarrollo en serie de Taylor.

Para $a = 1 \longrightarrow V = 0$, entonces,

$$0 = \frac{2}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \ln \left(h + \sqrt{h^2 + 1} \right) + C \approx \frac{2}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \ln 2 \cdot h + C$$

Despejando C, se tiene, $C = \frac{-2}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \ln 2 \cdot h$

Y la distribución del potencial eléctrico es,

$$V = \frac{2}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \ln \left(\frac{h}{a} + \sqrt{\left(\frac{h}{a}\right)^2 + 1} \right) - \frac{-2}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \ln 2 \cdot h = \frac{2}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \ln \frac{h}{a} + \frac{\sqrt{\left(\frac{h}{a}\right)^2 + 1}}{2 \cdot h}$$

Sustituyendo los valores del enunciado resulta, $V = 41,44 \text{ V}$.

PROBLEMA 1.8

Según el problema propuesto 1.7, determinar la distribución de potencial en todo el espacio en el caso de que $h \rightarrow \infty$, aplicando la ley de Gauss y para un espacio de dos dimensiones, calcular la carga equivalente situada en el origen, de modo que proporcionara en los puntos del plano OXY un potencial similar.

SOLUCIÓN

Aplicando Gauss a una superficie cilíndrica de radio a , altura L y como eje el de la distribución.

$$E \cdot 2 \cdot \pi \cdot a \cdot L = \frac{\lambda \cdot L}{\epsilon_0} = \frac{L}{\epsilon_0}$$

$$E = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot a} \rightarrow \vec{E} = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot a} \cdot \vec{u}_r$$

La distribución de potencial, será por tanto:

$$V = - \int \vec{E} \cdot d\vec{a} = - \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \ln a + C$$

ya que para $a = 1 \rightarrow V = 0$

$$0 = - \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \ln 1 + C \rightarrow C = 0$$

$$V = - \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \ln a$$

A partir de la expresión obtenida en el apartado 1 del problema nº 7 anterior, extendiéndola al caso en que $h \rightarrow \infty$

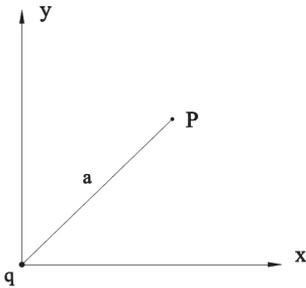
$$V = \frac{2}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \ln \frac{\frac{h}{a} + \sqrt{\left(\frac{h}{a}\right)^2 + 1}}{2 \cdot h} = \frac{2}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \ln \frac{h + \sqrt{h^2 + a^2}}{2 \cdot a \cdot h}$$

$$V = \frac{2}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \ln \frac{h + \sqrt{h^2 + a^2}}{2 \cdot a \cdot h} - \frac{2}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \ln a$$

cuando $h \rightarrow \infty$

$$V = - \frac{2}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \ln a$$

Por tanto:



$$V = -\frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \ln a$$

que coincide con lo obtenido por aplicación del teorema de Gauss.

En dos dimensiones el campo electrostático viene dado por, $\vec{E} = \frac{q}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot r} \cdot \vec{u}_r$

$$V = -\int \vec{E} \cdot d\vec{a} = -\frac{q}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \ln a + C$$

Para que se siga verificando que $V = 0$ cuando $a = 1 \rightarrow C = 0$ por lo que:

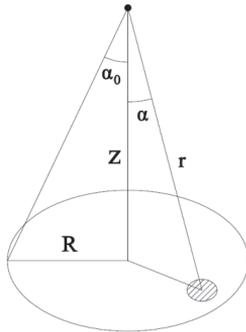
$$V = -\frac{q}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \ln a$$

si se ha de cumplir,

$$-\frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \ln a = -\frac{q}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \ln a \Rightarrow q = 2 \text{ C}$$

PROBLEMA 1.9

Dada una distribución volúmica de carga, con densidad de carga constante $0,1768 \text{ mC}\cdot\text{m}^{-3}$ en un cilindro circular recto de radio $R = 0,1 \text{ m}$ y altura $L = 1 \text{ m}$. Se pide determinar el campo electrostático en puntos $h = 1 \text{ m}$ del eje de la distribución.



SOLUCIÓN

Para calcular el campo creado por la distribución en un punto del eje se partirá del campo creado por un disco cargado en puntos de su eje.

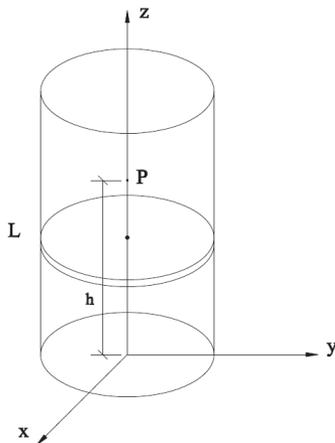
El campo que crea un disco en un punto de su eje:

$$E = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \int \frac{dq}{r^2} \cdot \cos \alpha =$$

$$= \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \int \frac{\sigma \cdot dS}{r^2} \cdot \cos \alpha = \frac{\sigma}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \Omega =$$

$$= \frac{\sigma}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot 2 \cdot \pi \cdot (1 - \cos \alpha_0)$$

$$= \frac{\sigma}{2 \cdot \epsilon_0} \cdot \left(1 - \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}}\right)$$



En el cilindro, considerando discos de espesor dz , el campo en un punto P de su eje, que dista h del origen

$$E_{\text{int}} = \frac{\rho}{2 \cdot \epsilon_0} \cdot \int_0^h \left(1 - \frac{h-z}{\sqrt{R^2 + (h-z)^2}}\right) \cdot dz -$$

$$- \frac{\rho}{2 \cdot \epsilon_0} \cdot \int_h^L \left(1 - \frac{z-h}{\sqrt{R^2 + (z-h)^2}}\right) \cdot dz$$

siendo los sumandos, los campos originados por los discos situados por debajo y encima del punto P, respectivamente.

Por tanto,

$$\begin{aligned} E_{\text{int}} &= \frac{\rho}{2 \cdot \epsilon_0} \cdot \left\{ [z]_0^h + \left[\sqrt{R^2 + (z-h)^2} \right]_0^h - [z]_h^L + \left[\sqrt{R^2 + (z-h)^2} \right]_h^L \right\} = \\ &= \frac{\rho}{2 \cdot \epsilon_0} \cdot \left(-L + 2 \cdot h + \sqrt{R^2 + (L-h)^2} - \sqrt{R^2 + h^2} \right) \end{aligned}$$

Para $h = L$ queda:

$$E_{\text{int}}|_{h=L} = \frac{\rho}{2 \cdot \epsilon_0} \cdot \left(L + R - \sqrt{R^2 + L^2} \right) = 2 \cdot 10^6 \text{ N} \cdot \text{C}^{-1}$$

Si se sitúa el punto P en el eje, infinitamente próximo a la base superior del cilindro, por el exterior

$$\begin{aligned} E_{\text{ext}} &= \frac{\rho}{2 \cdot \epsilon_0} \cdot \int_0^L \left(1 - \frac{h-z}{\sqrt{R^2 + (h-z)^2}} \right) \cdot dz = \frac{\rho}{2 \cdot \epsilon_0} \cdot \left\{ [z]_0^L + \left[\sqrt{R^2 + (h-z)^2} \right]_0^L \right\} = \\ &= \frac{\rho}{2 \cdot \epsilon_0} \cdot \left(L + \sqrt{R^2 + (h-L)^2} - \sqrt{R^2 + h^2} \right) \end{aligned}$$

y para $h = L$ queda

$$E_{\text{ext}}|_{h=L} = \frac{\rho}{2 \cdot \epsilon_0} \cdot \left(L + R - \sqrt{R^2 + L^2} \right)$$

El cual coincide con el resultado del campo calculado para el interior cuando $h = L$, dándose por tanto continuidad.

PROBLEMA 1.10

Según el problema 1.9, determinar la variación de la derivada del campo anterior con respecto a z . Evaluar la discontinuidad en los puntos frontera.

SOLUCIÓN

Como se ha calculado en el apartado 1 del problema nº 9 anterior para puntos del eje situados en el interior de la distribución que disten z del origen, es

$$E_{\text{int}} = \frac{\rho}{2 \cdot \epsilon_0} \cdot \left(-L + 2 \cdot z + \sqrt{R^2 + (L - z)^2} - \sqrt{R^2 + z^2} \right)$$

Para puntos del eje situados en el exterior de la distribución, que disten z del origen

$$E_{\text{ext}} = \frac{\rho}{2 \cdot \epsilon_0} \cdot \left(L + \sqrt{R^2 + (z - L)^2} - \sqrt{R^2 + z^2} \right)$$

$$\frac{dE_{\text{int}}}{dz} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \cdot \left(1 - \frac{L - z}{\sqrt{R^2 + (L - z)^2}} - \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right)$$

$$\frac{dE_{\text{ext}}}{dz} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \cdot \left(\frac{z - L}{\sqrt{R^2 + (z - L)^2}} - \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right)$$

Particularizando para puntos infinitamente próximos a la base superior del cilindro da:

$$\left(\frac{dE_{\text{int}}}{dz} \right)_{z=L} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \cdot \left(1 - \frac{L}{\sqrt{R^2 + L^2}} \right)$$

$$\left(\frac{dE_{\text{ext}}}{dz} \right)_{z=L} = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \cdot \left(1 - \frac{L}{\sqrt{R^2 + L^2}} \right)$$

siendo

$$\left(\frac{dE_{\text{int}}}{dz} \right)_{z=L} - \left(\frac{dE_{\text{ext}}}{dz} \right)_{z=L} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

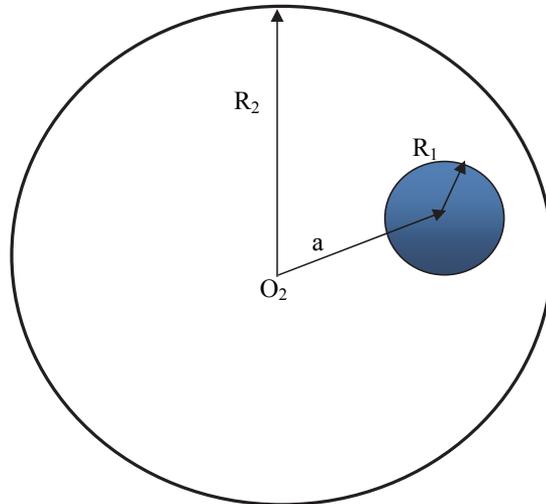
Siendo el valor de la discontinuidad.

CAPÍTULO II

EL CAMPO MAGNÉTICO

PROBLEMA 2.1

En un conductor macizo rectilíneo cilíndrico de radio R_2 , se practica un taladro también cilíndrico de radio R_1 de tal manera que los ejes paralelos del conductor y del taladro distan $O_2O_1 = a$, siendo $R_2 > R_1 + a$, tal como se representa en la sección recta de la figura.



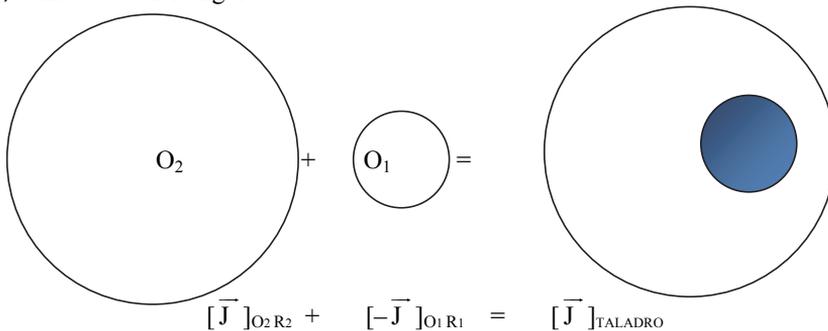
Por este conductor taladrado circula una corriente eléctrica I constante, uniformemente repartida en toda su sección. Hallar en función de los datos, la excitación magnética \vec{H} en puntos P pertenecientes al:

- 1°.- Taladro: $0 < r' = O_1P_1 \leq R_1$.
- 2°.- Conductor: $R_1 < r' = O_1P_2$ y $a + R_1 < r = O_2P_2 \leq R_2$
- 3°.- Recinto exterior al conductor: $R_2 < r = O_2P_3 < \infty$.

SOLUCIÓN

La densidad de corriente en todos los puntos de la sección recta del conductor cilíndrico taladrado es constante, y su valor es según la dirección y sentido de I : $\vec{J} = \frac{I}{\pi [R_2^2 - R_1^2]} \vec{k}$.

Según el Principio de Superposición el conductor taladrado, equivale a la suma de un conductor cilíndrico macizo de centro O_2 y radio R_2 donde la densidad de corriente es \vec{J} , más otro conductor cilíndrico macizo de O_1 radio R_1 donde la densidad de corriente es $-\vec{J}$, como se ve en la figura.



Para la determinación de la excitación magnética se aplica la ley de Ampère-Maxwell:

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = \iint \vec{J} \cdot d\vec{S}$$

Calculando la circulación de \vec{H} en una circunferencia perteneciente al conductor macizo centro O_2 , radio r y densidad de corriente \vec{J} .

Después se aplica, de nuevo, la ley de Ampère-Maxwell a otra circunferencia centro O_1 , radio r' y densidad de corriente $-\vec{J}$, ambas circunferencias están situadas en un plano normal al eje de simetría del conductor cilíndrico.

Finalmente la excitación magnética resultante se obtendrá mediante el Principio de Superposición.

1º.- Taladro: $0 < r' \leq O_1P_1 \leq R_1$

- Conductor macizo de centro O_2 y radio R_2 . Llamando $r = O_2P_1$

$$\oint \vec{H}_{2,1} \cdot d\vec{\ell} = \iint \vec{J} \cdot d\vec{S}; \quad H_{2,1} \cdot 2\pi r = \frac{I}{\pi [R_2^2 - R_1^2]} \vec{k} \cdot \pi r^2 \vec{k};$$

$$H_{2,1} = \frac{I}{2\pi [R_2^2 - R_1^2]} r$$

$$\text{Vectorialmente resulta: } \vec{H}_{2,1} = \frac{I}{2\pi [R_2^2 - R_1^2]} [\vec{k} \times \vec{r}]$$

- Conductor macizo de centro O_1 y radio R_1 . Llamando $r' = O_1P_1$

$$\oint \vec{H}_{1,1} \cdot d\vec{\ell} = -\iint \vec{J} \cdot d\vec{S}; \quad H_{1,1} \cdot 2\pi r' = \frac{-I}{\pi [R_2^2 - R_1^2]} \vec{k} \cdot \pi r'^2 \vec{k};$$

$$H_{1,1} = \frac{-I}{2\pi [R_2^2 - R_1^2]} r'$$

$$\text{Vectorialmente resulta: } \vec{H}_{1,1} = \frac{-I}{2\pi [R_2^2 - R_1^2]} \frac{R_1^2}{r'^2} [\vec{k} \times \vec{r}']$$

Mediante el Principio de Superposición:

$$\vec{H}_{T,1} = \vec{H}_{2,1} + \vec{H}_{1,1} = \frac{I}{2\pi [R_2^2 - R_1^2]} [\vec{k} \times \vec{r}] - \frac{I}{2\pi [R_2^2 - R_1^2]} [\vec{k} \times \vec{r}'] = \frac{I}{2\pi [R_2^2 - R_1^2]} [\vec{k} \times (\vec{r} - \vec{r}')]$$

$$\vec{H}_{T,1} = \frac{I}{2\pi [R_2^2 - R_1^2]} [\vec{k} \times \vec{a}] \text{ es un vector constante, siendo } \vec{a} = \vec{O}_2O_1 = \vec{r} - \vec{r}'$$

2º.- Conductor: $R_1 < r' \leq O_1P_2$ y $a + R_1 < r \leq O_2P_2 \leq R_2$

- Conductor macizo de centro O_2 y radio R_2 . Llamando $r = O_2P_2$

$$\oint \vec{H}'_{2,1} \cdot d\vec{\ell} = \iint \vec{J} \cdot d\vec{S}; \quad H'_{2,1} = \frac{I}{2\pi [R_2^2 - R_1^2]} r$$

$$\text{Vectorialmente resulta: } \vec{H}'_{2,1} = \frac{I}{2\pi [R_2^2 - R_1^2]} [\vec{k} \times \vec{r}]$$

- Conductor macizo de centro O_1 y radio R_1 . Llamando $r'= O_1P_2$

$$\oint \vec{H}'_{1_i} \cdot d\vec{\ell} = -\iint \vec{J} \cdot d\vec{S}; \text{ en el conductor sólo existe -J:}$$

$$H'_{1_i} \cdot 2\pi r' = \frac{-I}{\pi [R_2^2 - R_1^2]} \vec{k} \cdot \pi R_1^2 \vec{k}; H'_{1_i} = \frac{-I}{2\pi [R_2^2 - R_1^2]} \frac{R_1^2}{r'^2} r'$$

$$\text{Vectorialmente resulta: } \vec{H}'_{1_i} = \frac{-I}{2\pi [R_2^2 - R_1^2]} \frac{R_1^2}{r'^2} [\vec{k} \times \vec{r}']$$

Aplicando el Principio de Superposición:

$$\vec{H}'_{r_1} = \vec{H}'_{2_i} + \vec{H}'_{1_i} = \frac{I}{2\pi [R_2^2 - R_1^2]} \left[\vec{k} \times \left[\vec{r} - \frac{R_1^2}{r'^2} \vec{r}' \right] \right]$$

3.- Recinto exterior al conductor: $R_2 < r = O_2P_3 < \infty$

- Conductor macizo de centro O_2 y radio R_2 . Llamando $r= O_2P_3$

$$\oint \vec{H}_E \cdot d\vec{\ell} = \iint \vec{J} \cdot d\vec{S}; \text{ se abarca todo el conductor, solo existe J dentro del conductor:}$$

$$H_{2_E} \cdot 2\pi r = \frac{I}{\pi [R_2^2 - R_1^2]} \vec{k} \cdot \pi R_2^2 \vec{k}; H_{2_E} = \frac{I}{2\pi [R_2^2 - R_1^2]} \frac{R_2^2}{r^2} r$$

$$\text{Vectorialmente resulta: } \vec{H}_{2_E} = \frac{I}{2\pi [R_2^2 - R_1^2]} \frac{R_2^2}{r^2} [\vec{k} \times \vec{r}]$$

- Conductor macizo de centro O_1 y radio R_1 . Llamando $r'= O_1P_3$

$$\oint \vec{H}_E \cdot d\vec{\ell} = -\iint \vec{J} \cdot d\vec{S}; \text{ se abarca todo el conductor, solo hay -J dentro del conductor:}$$

$$H_{1_E} \cdot 2\pi r' = \frac{I}{\pi [R_2^2 - R_1^2]} \vec{k} \cdot \pi R_1^2 \vec{k}; H_{1_E} = \frac{I}{2\pi [R_2^2 - R_1^2]} \frac{R_1^2}{r'^2} r'$$

$$\text{Vectorialmente resulta: } \vec{H}_{1_E} = \frac{-I}{2\pi [R_2^2 - R_1^2]} \frac{R_1^2}{r'^2} [\vec{k} \times \vec{r}']$$

Con el Principio de Superposición:

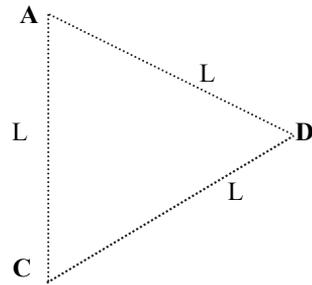
$$\vec{H}_{r_E} = \vec{H}_{2_E} + \vec{H}_{1_E} = \frac{I}{2\pi [R_2^2 - R_1^2]} \left[\vec{k} \times \left[\frac{R_2^2}{r^2} \vec{r} - \frac{R_1^2}{r'^2} \vec{r}' \right] \right]$$

PROBLEMA 2.2

Una línea aérea eléctrica trifásica, constituida por tres conductores metálicos, rectilíneos, paralelos, supuestos indefinidos, que están dispuestos según los vértices de un triángulo equilátero, ACD, cuyo centro de simetría es O, tal como se indica en la figura. Su lado AC de longitud L, es perpendicular al plano horizontal donde está el suelo.

La corriente eléctrica que circula por cada uno de los conductores A y C es I, y la corriente de retorno que circula por el conductor D es 2 I. Se pide determinar la expresión vectorial de:

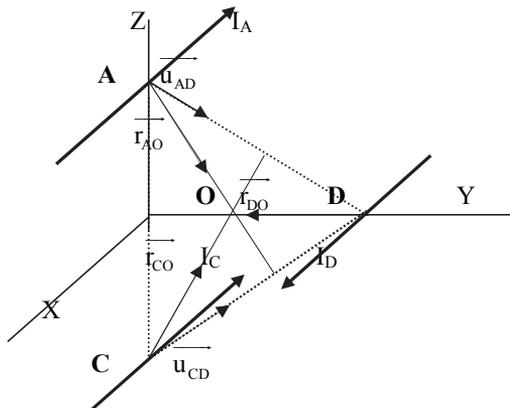
- 1º.- Campo magnético, creado por la línea eléctrica trifásica en O.
- 2º.- Campo magnético, creado por los dos conductores de A y C en el punto D.
- 3º.- Fuerza por unidad de longitud que los conductores de A y C ejercen sobre el conductor situado en de D.



SOLUCIÓN

1º.- Campo magnético creado por los conductores en el punto O

Aplicamos la ley de Biot-Savart para hallar el campo magnético producido por una corriente rectilínea indefinida y por el Principio de Superposición obtenemos el campo conjunto creado por los tres conductores rectilíneos simultáneamente en el punto O.



- Campo creado en O por conductor de corriente I_A que pasa por A.

$$\vec{B}_{OA} = \frac{\mu_0 I_A}{2\pi r} [\vec{u}_{I_A} \times \vec{u}_{r_{AO}}]; \text{ siendo } \vec{u}_{I_A} = -\vec{i}; \vec{u}_{r_{AO}} = [\sin \frac{\pi}{6} \vec{j} - \cos \frac{\pi}{6} \vec{k}]; r = \frac{\sqrt{3}}{3} L$$

$$\vec{B}_{OA} = \frac{\mu_0 I_A}{2\pi \frac{\sqrt{3}}{3} L} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{-\sqrt{3}}{2} \end{vmatrix} = \frac{\sqrt{3} \mu_0 I}{2 \pi L} [-\frac{\sqrt{3}}{2} \vec{j} - \frac{1}{2} \vec{k}] \quad [1]$$

- Campo creado en O por conductor I_C que pasa por C.

$$\vec{B}_{OC} = \frac{\mu_0 I_C}{2\pi r} [\vec{u}_{I_C} \times \vec{u}_{r_{CO}}]; \text{ siendo } \vec{u}_{I_C} = -\vec{i}; \vec{u}_{r_{CO}} = \left[\sin \frac{\pi}{6} \vec{j} + \cos \frac{\pi}{6} \vec{k} \right]; r = \frac{\sqrt{3}}{3}L$$

$$\vec{B}_{OC} = \frac{\mu_0 I_C}{2\pi \frac{\sqrt{3}}{3}L} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{vmatrix} = \frac{\sqrt{3} \mu_0 I}{2\pi L} \left[+\frac{\sqrt{3}}{2} \vec{j} - \frac{1}{2} \vec{k} \right] \quad [2]$$

- Campo creado en O por conductor I_D que pasa por D.

$$\vec{B}_{OD} = \frac{\mu_0 I_D}{2\pi r} [\vec{u}_{I_D} \times \vec{u}_{r_{DO}}]; \text{ siendo } \vec{u}_{I_D} = \vec{i}; \vec{u}_{r_{DO}} = -\vec{j}; r = \frac{\sqrt{3}}{3}L; I_D = 2I$$

$$\vec{B}_{OD} = \frac{\mu_0 I_D}{2\pi \frac{\sqrt{3}}{3}L} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \frac{2\sqrt{3} \mu_0 I}{2\pi L} [-\vec{k}] \quad [3]$$

Con las ecuaciones [1], [2] y [3] se aplica el Principio de Superposición:

$$\vec{B}_O = \vec{B}_{OA} + \vec{B}_{OB} + \vec{B}_{OC}.$$

$$\text{Operando el campo magnético total creado en O es: } \vec{B}_O = -\frac{3\sqrt{3} \mu_0 I}{2\pi L} \vec{k}$$

2º.- Campo magnético creado por los conductores de A y C en D

También aplicamos la ley de Biot-Savart para hallar el campo magnético producido por la corriente rectilínea indefinida del conductor A en el conductor que pasa por D.

Luego se hace lo mismo para hallar el campo magnético producido por la corriente rectilínea indefinida del conductor que pasa por C en D y finalmente por el Principio de Superposición obtenemos el campo magnético conjunto sobre el conductor en D.

- Campo creado en D por conductor I_A que pasa por A.

$$\vec{B}_{DA} = \frac{\mu_0 I_A}{2\pi r} [\vec{u}_{I_A} \times \vec{u}_{r_{AD}}]; \text{ siendo } \vec{u}_{I_A} = -\vec{i}; \vec{u}_{r_{AD}} = \left[\sin \frac{\pi}{3} \vec{j} - \cos \frac{\pi}{3} \vec{k} \right]; r = L$$

$$\vec{B}_{DA} = \frac{\mu_0 I_A}{2\pi L} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{-1}{2} \end{vmatrix} = \frac{\mu_0 I}{2\pi L} \left[-\frac{1}{2} \vec{j} - \frac{\sqrt{3}}{2} \vec{k} \right] \quad [4]$$

- Campo creado en D por conductor I_C que pasa por C.

$$\vec{B}_{DC} = \frac{\mu_0 I_C}{2\pi r} [\vec{u}_{I_C} \times \vec{u}_{r_{CD}}]; \text{ siendo } \vec{u}_{I_C} = -\vec{i}; \vec{u}_{r_{CD}} = \left[\sin \frac{\pi}{3} \vec{j} + \cos \frac{\pi}{3} \vec{k} \right]; r = L$$

$$\vec{B}_{DC} = \frac{\mu_0 I_C}{2\pi L} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{\mu_0 I}{2\pi L} \left[+\frac{1}{2} \vec{j} - \frac{\sqrt{3}}{2} \vec{k} \right] \quad [5]$$

Con las ecuaciones [4] y [5], aplicando el Principio de Superposición: $\vec{B}_D = \vec{B}_{DA} + \vec{B}_{DC}$

Operando el campo magnético resultante es: $\vec{B}_D = -\frac{\sqrt{3} \mu_0 I}{2\pi L} \vec{k}$

3°.- Fuerza por unidad de longitud que conductores de A y C ejercen sobre el conductor de D

Aquí también aplicamos el Principio de Superposición, así obtenemos la fuerza conjunta por unidad de longitud de los dos conductores paralelos indefinidos y rectilíneos que pasan por A y C sobre el conductor que está en D.

- La fuerza magnética por unidad de longitud del conductor A sobre conductor en D es:

$$\vec{f}_{DA} = \frac{\vec{F}_{DA}}{\ell} = I_D [\vec{u}_{\ell} \times \vec{B}_{DA}]; \text{ siendo } \vec{u}_{\ell} = \vec{i}; \vec{B}_{DA} = \frac{\mu_0 I}{2\pi L} \left[-\frac{1}{2} \vec{j} - \frac{\sqrt{3}}{2} \vec{k} \right]; I_D = 2I$$

$$\vec{f}_{DA} = 2I \frac{\mu_0 I}{2\pi L} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{vmatrix} = \frac{\mu_0 I^2}{\pi L} \left[+\frac{\sqrt{3}}{2} \vec{j} - \frac{1}{2} \vec{k} \right] \quad [6]$$

- La fuerza magnética por unidad de longitud del conductor C sobre conductor en D es:

$$\vec{f}_{DC} = \frac{\vec{F}_{DC}}{\ell} = I_D [\vec{u}_{\ell} \times \vec{B}_{DC}]; \text{ siendo } \vec{u}_{\ell} = \vec{i}; \vec{B}_{DC} = \frac{\mu_0 I}{2\pi L} \left[+\frac{1}{2} \vec{j} - \frac{\sqrt{3}}{2} \vec{k} \right]; I_D = 2I$$

$$\vec{f}_{DC} = 2I \frac{\mu_0 I}{2\pi L} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{vmatrix} = \frac{\mu_0 I^2}{\pi L} \left[+\frac{\sqrt{3}}{2} \vec{j} + \frac{1}{2} \vec{k} \right] \quad [7]$$

Con las ecuaciones [6] y [7], finalmente se aplica el Principio de Superposición.

La fuerza magnética resultante que los dos conductores paralelos, indefinidos y rectilíneos ejercen sobre el conductor indefinido, paralelo y rectilíneo que pasa por D es:

$$\vec{f}_{D\text{TOTAL}} = \vec{f}_{DC} + \vec{f}_{DA} = \frac{\mu_0 \sqrt{3} I^2}{\pi L} \vec{j}$$

PROBLEMA 2.3

Una superficie esférica metálica hueca de radio R, está cargada con una densidad superficial de carga eléctrica constante σ , y gira con velocidad angular constante $\vec{\omega} = \omega \vec{k}$ alrededor de un diámetro. Determinar:

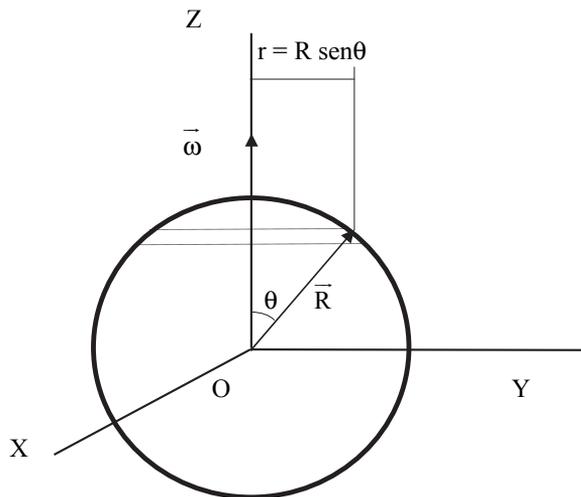
- 1°.- Campo magnético creado en el centro de la superficie esférica en módulo y dirección.
- 2°.- Momento magnético asociado en módulo y dirección.
- 3°.- Aplicación numérica: $\sigma_e = 5 \cdot 10^{-3} \text{ C m}^{-2}$; $\omega = 1.200$ vueltas por minuto; $R = 300 \text{ cm}$.

SOLUCIÓN

1°.- Campo magnético creado en el centro de la superficie esférica en módulo y dirección

Como la superficie es esférica, aplicaremos, por facilidad de cálculo, coordenadas esféricas ortogonales [R, θ , ϕ].

Al girar la superficie esférica, equivale a que la carga elemental $dq = \sigma \, dS$, se mueva sobre los paralelos de dicha superficie esférica, con una velocidad $\vec{v} = \omega R \sin \theta \vec{u}_\phi$, lo cual origina unas corrientes eléctricas $d\vec{v} = I \, d\vec{\ell}$, por tanto según la Ley de Ampère-Laplace, el campo magnético elemental producido por estas corrientes en el centro O de la superficie esférica será:



$$d \vec{B}_0 = \frac{\mu_0 I}{4\pi R^2} [d \vec{\ell} \times \vec{r}_0] = \frac{\mu_0 dq}{4\pi R^2} [\vec{v} \times \vec{r}_0] = \frac{\mu_0}{4\pi R^2} \sigma_e \, dS \, \omega R \sin \theta [\vec{u}_\phi \times (-\vec{u}_R)]$$

$$d \vec{B}_0 = \frac{\mu_0}{4\pi R^2} \sigma_e \, dS \, \omega R \sin \theta \begin{vmatrix} \vec{u}_R & \vec{u}_\theta & \vec{u}_\phi \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\frac{\mu_0}{4\pi R^2} \sigma_e \, dS \, \omega R \sin \theta \vec{u}_\theta$$

En coordenadas esféricas: $\vec{u}_\theta = \cos \theta \cos \phi \vec{i} + \cos \theta \sin \phi \vec{j} - \sin \theta \vec{k}$ y $dS = R^2 \sin \theta \, d\phi \, d\theta$

$$\vec{B}_0 = \iint d\vec{B}_0 = -\frac{\mu_0 \sigma_e \omega R}{4\pi} \iint \sin^2\theta [\cos\theta \cos\varphi \vec{i} + \cos\theta \sin\varphi \vec{j} - \sin\theta \vec{k}] d\theta d\varphi$$

$$\vec{B}_0 = -\frac{\mu_0 \sigma_e \omega R}{4\pi} \iint [\sin^2\theta \cos\theta \cos\varphi \vec{i} + \sin^2\theta \cos\theta \sin\varphi \vec{j} - \sin^3\theta \vec{k}] d\theta d\varphi$$

$$\vec{B}_0 = -\frac{\mu_0 \sigma_e \omega R}{4\pi} \left[\int_0^\pi \sin^2\theta \cos\theta d\theta \int_0^{2\pi} \cos\varphi d\varphi \right] \vec{i} + \left[\int_0^\pi \sin^2\theta \cos\theta d\theta \int_0^{2\pi} \sin\varphi d\varphi \right] \vec{j} - \left[\int_0^\pi \sin^3\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \right] \vec{k}$$

Integrando, resulta:

$$\vec{B}_0 = -\frac{\mu_0 \sigma_e \omega R}{4\pi} \left[\left[\frac{\sin^3\theta}{3} \right]_0^\pi [\sin\varphi]_0^{2\pi} \vec{i} + \left[\frac{\sin^3\theta}{3} \right]_0^\pi [-\cos\varphi]_0^{2\pi} \vec{j} + 2\pi \left[-\frac{1}{3} \sin^2\theta \cos\theta - \frac{2}{3} \cos\theta \right]_0^\pi \vec{k} \right]$$

$$\vec{B}_0 = \frac{\mu_0 \sigma_e \omega R}{4\pi} \left[0 \vec{i} + 0 \vec{j} + 2\pi \left[-\frac{1}{3} \sin^2\theta \cos\theta - \frac{2}{3} \cos\theta \right]_0^\pi \vec{k} \right]$$

Como se anulan las componentes en \vec{i} y en \vec{j} , resulta: $\vec{B}_0 = \frac{2}{3} \mu_0 \sigma_e \omega R \vec{k}$

2°.- Momento magnético asociado

Descomponemos la superficie esférica en coronas esféricas de anchura diferencial $R d\theta$ y de longitud $\ell = 2\pi R \sin\theta$, suponiendo un reparto uniforme de cargas eléctricas, al girar la superficie esférica se engendra una corriente eléctrica elemental de valor dI .

$$dq = \sigma_e R d\theta \ell = 2\pi R^2 \sigma_e \sin\theta d\theta, \text{ por tanto: } dI = \frac{dq}{dt} = \frac{dq}{2\pi} = d q \cdot \frac{\omega}{2\pi}$$

Para toda la longitud de la corona nos da un diferencial elemental de intensidad de corriente eléctrica: $dI = \frac{\omega}{2\pi} \sigma_e R d\theta 2\pi R \sin\theta = \omega \sigma_e R^2 \sin\theta d\theta$

El vector superficie del contorno de esta corriente cerrada es: $\vec{S} = \pi R^2 \sin^2\theta \vec{k}$

Por tanto el momento magnético asociado al eje de giro:

$$\vec{m} = \int_0^\pi \vec{S} \cdot dI = \pi \omega \sigma_e R^4 \int_0^\pi \sin^3\theta d\theta \vec{k} = \pi \omega \sigma_e R^4 \left[-\frac{\sin^2\theta \cos\theta}{3} - \frac{2\cos\theta}{3} \right]_0^\pi \vec{k}$$

Finalmente operando queda: $\vec{m} = \frac{4}{3} \pi \omega \sigma_e R^4 \vec{k}$

3°.- Aplicación numérica: $\sigma_e = 5 \cdot 10^{-3} \text{ C m}^{-2}$; $\omega = 1.200$ vueltas por minuto, $R = 300 \text{ cm}$

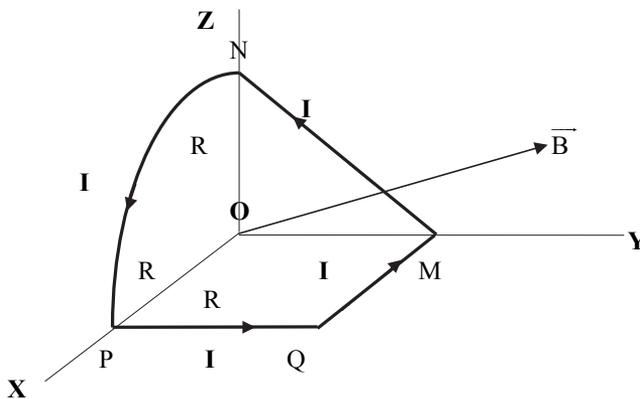
$$\text{Campo magnético: } B_0 = \frac{2}{3} \mu_0 \sigma_e \omega R = \frac{2}{3} 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 5 \cdot 10^{-3} \frac{2\pi}{60} 1200 \cdot 3 = 1,579 \cdot 10^{-6} \text{ T}$$

$$\text{Momento magnético: } m = \frac{4}{3} \pi \omega \sigma_e R^4 = \frac{4}{3} \pi \frac{2\pi}{60} 1200 \cdot 5 \cdot 10^{-3} \cdot 3^4 = 213,18 \text{ A m}^2$$

PROBLEMA 2.4

La espira de la figura formada por el conductor rectilíneo MN, el arco de circunferencia NP de radio R y los segmentos PQ y QM de longitud R, está bajo la acción de un campo magnético uniforme \vec{B} que forma tres ángulos iguales con los ejes OX, OY y OZ. Por la espira circula una corriente continua de intensidad I constante en el sentido indicado. Se pide:

- 1°.- Fuerza que actúa sobre cada lado de la espira.
- 2°.- Fuerza resultante sobre la espira.
- 3°.- Momento magnético de la espira.
- 4°.- Flujo magnético que atraviesa cualquier superficie que se apoye en la espira en la posición indicada en la figura.
- 5°.- Momento mecánico que actúa sobre la espira.
- 6°.- Energía potencial magnética de la espira.

**SOLUCIÓN****1°.- Fuerza que actúa sobre cada lado de la espira**

El campo magnético es uniforme: $\vec{B} = \frac{\sqrt{3}}{3} B [\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}]$

Por otro lado la fuerza debida al campo magnético uniforme que actúa sobre el circuito recorrido por la corriente I es: $\vec{F} = I \ell [\vec{u} \times \vec{B}]$ [1]

En donde \vec{u} es vector unitario en dirección y sentido de la corriente eléctrica I, y ℓ la longitud del circuito. Cada uno de los tramos, que componen la longitud de la espira, vectorialmente se expresa:

$$\overline{PQ} = R \vec{j}; \quad \overline{QM} = -R \vec{i}; \quad \overline{MN} = R [-\vec{j} + \vec{k}]; \quad \overline{NP} = R [\vec{i} - \vec{k}]$$

La fuerza magnética sobre cada lado de la espira se halla al aplicar la ecuación [1]:

$$\vec{F}_{PQ} = \frac{\sqrt{3}}{3} I B R [\vec{i} - \vec{k}]$$

$$\vec{F}_{QM} = \frac{\sqrt{3}}{3} I B R [\vec{j} - \vec{k}]$$

$$\vec{F}_{MN} = \frac{\sqrt{3}}{3} I B R [-2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}]$$

$$\vec{F}_{NP} = \frac{\sqrt{3}}{3} I B R [+ \vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}]$$

2°.- Fuerza resultante sobre la espira

Es la suma de todas las fuerzas magnéticas que actúan sobre cada lado del circuito, sus valores correspondientes han sido obtenidos en el apartado primero.

$$\sum \vec{F}_i = \vec{F}_{PQ} + \vec{F}_{QM} + \vec{F}_{MN} + \vec{F}_{NP} = \vec{0}$$

Este resultado, se podía prever, por ser la espira PQMNP un circuito cerrado.

3°.- Momento magnético de la espira

La expresión del momento magnético es $\vec{m} = N \odot I \vec{S} = NI [\vec{S}_{PQMOP} + \vec{S}_{OMNO} + \vec{S}_{ONPO}]$ [2]

El vector superficie de la espira es la suma vectorial de las tres componentes de dicho vector sobre los ejes de coordenadas: $\vec{S} = S_x \vec{i} + S_y \vec{j} + S_z \vec{k}$

$$\vec{S}_x = \vec{S}_{OMNO} = \frac{R^2}{2} \vec{i}; \quad \vec{S}_y = \vec{S}_{ONPO} = \frac{\pi R^2}{4} \vec{j}; \quad \vec{S}_z = \vec{S}_{PQMOP} = R^2 \vec{k}; \quad N=1 \text{ espira.}$$

Por tanto, llevando [2] las tres componentes antes obtenidas, el momento magnético de la espira, que es su característica magnética más importante, es:

$$\vec{m} = \odot I \vec{S} = I [\vec{S}_{PQMOP} + \vec{S}_{OMNO} + \vec{S}_{ONPO}] = R^2 I [\frac{1}{2} \vec{i} + \frac{\pi}{4} \vec{j} + \vec{k}]$$

4°.- Flujo magnético

El flujo del campo magnético uniforme que atraviesa la superficie de la espira se obtiene por integración en dicha superficie:

$$\Phi = \iint \vec{B} \cdot d\vec{S} = \vec{B} \cdot \vec{S} = B \cdot [\vec{S}_{PQMOP} + \vec{S}_{OMNO} + \vec{S}_{ONPO}]$$

$$\Phi = \frac{\sqrt{3}}{3} B [\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}] \cdot [\frac{1}{2} \vec{i} + \frac{\pi}{4} \vec{j} + \vec{k}] = \frac{\sqrt{3}}{12} [6 + \pi] R^2 B$$

5°.- Momento mecánico que actúa sobre la espira

Al estar inmersa la espira dentro de un campo magnético uniforme, el momento mecánico a que está sometida se expresa como el producto vectorial del momento magnético de la espira por el citado campo magnético:

$$\vec{M} = \vec{m} \times \vec{B} = R^2 I \frac{\sqrt{3}}{3} B \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{1}{2} & \frac{\pi}{4} & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{\sqrt{3}}{12} R^2 I B [(\pi - 4) \vec{i} + 2 \vec{j} + (2 - \pi) \vec{k}]$$

6°.- Energía potencial magnética de la espira

Se obtendrá a mediante el producto escalar, con signo negativo, del momento magnético de la espira por el campo magnético uniforme, anteriormente determinados.

$$E_{\text{POT MAGNETICA}} = - \vec{m} \cdot \vec{B} = - R^2 I [\frac{1}{2} \vec{i} + \frac{\pi}{4} \vec{j} + \vec{k}] \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} B [\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}]$$

Operando se obtiene: $E_{\text{POT MAGNETICA}} = - \vec{m} \cdot \vec{B} = - \frac{\sqrt{3}}{12} [6 + \pi] B R^2 I$

PROBLEMA 2.5

Una espira plana hecha con un delgado hilo metálico, situada en el vacío, está recorrida por una corriente eléctrica constante I , tiene forma de polígono regular de "n" lados, cada uno de ellos de longitud L , siendo su centro de simetría el punto O . Se pide determinar:

1°.- Campo magnético creado en el centro del polígono regular.

Aplicar el resultado anteriormente obtenido, para hallar el campo magnético producido en dicho punto O , centro de simetría, en los siguientes casos de espiras planas recorridas por I constante:

2°.- Campo magnético creado en centro de triángulo equilátero en función de la apotema y del lado.

3°.- Campo magnético creado en centro de cuadrado en función de la apotema y del lado.

4°.- Campo magnético creado en centro de hexágono en función de la apotema y del lado.

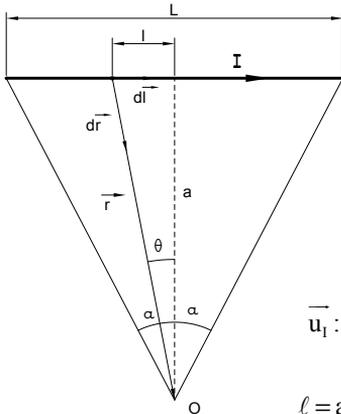
5°.- Campo magnético creado en centro de circunferencia en función de radio R .

SOLUCIÓN

1°.- Campo magnético creado en el centro del polígono regular

Como paso previo, hallaremos el campo magnético producido por un solo lado de la espira poligonal en el centro de simetría O del polígono regular de n lados, cuando circula por dicho lado una corriente eléctrica constante I .

Designamos mediante la letra "a" la apotema del polígono regular y por otra parte, el ángulo con vértice en el punto O bajo el cual se ve un lado L del polígono regular es: 2α .



Según la Ley de Ampère-Laplace, la expresión que nos da el campo magnético elemental que un elemento de corriente crea en un punto O es:

$$d\vec{B}_{O1\text{ LADO}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{[d\vec{\ell} \times \vec{r}]}{r^3} \quad [1]$$

$$d\vec{\ell} \times \vec{r} = r d\ell \cos \theta \vec{u}; \quad \vec{u} = \vec{u}_1 \times \vec{u}_r$$

\vec{u}_1 : unitario en dirección de I ; \vec{u}_r : unitario en dirección de \vec{r}

$$\ell = a \operatorname{tg} \theta \text{ diferenciando: } d\ell = \frac{a d\theta}{\cos^2 \theta}. \text{ Se cumple: } r = \frac{a}{\cos \theta}$$

Sustituyendo las expresiones anteriores, en la ecuación [1], se obtiene:

$$d\vec{B}_{O1\text{ LADO}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \cos \theta d\theta \vec{u} \text{ se conoce como ley de Biot y Savart.}$$

Integrando para abarcar todo el lado del polígono a través del ángulo θ , para lo cual dicho ángulo varía entre los límites extremos: $+\alpha$ y $-\alpha$.

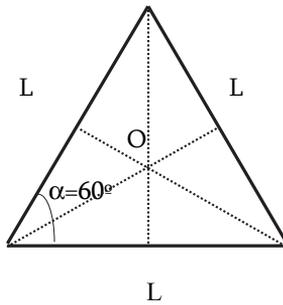
$$\vec{B}_{O1\text{ LADO}} = \int_{-\alpha}^{+\alpha} d\vec{B}_{O1\text{ LADO}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \int_{-\alpha}^{+\alpha} \cos \theta d\theta \vec{u} = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \operatorname{sen} \alpha \vec{u} \quad [2]$$

Para el polígono regular de n lados, el ángulo es $\alpha = \frac{\pi}{n}$, su apotema es $a = \frac{L}{2\operatorname{tg} \alpha}$, el tanto el campo magnético producido en el centro O del polígono por la corriente eléctrica I es:

$$\vec{B}_{O_n} = n \vec{B}_{O_1 \text{ LADO}} = n \frac{\mu_0 I}{2 \pi a} \sin \frac{\pi}{n} \vec{u} = n \frac{\mu_0 I}{\pi L} \sin \frac{\pi}{n} \operatorname{tg} \frac{\pi}{n} \vec{u} \quad [3]$$

2º.- Campo magnético creado en centro de triángulo equilátero en función la apotema y del lado

En este caso: $n=3$ lados, y el ángulo $\alpha = \frac{\pi}{n} = 60^\circ$, por tanto operando sobre [3]

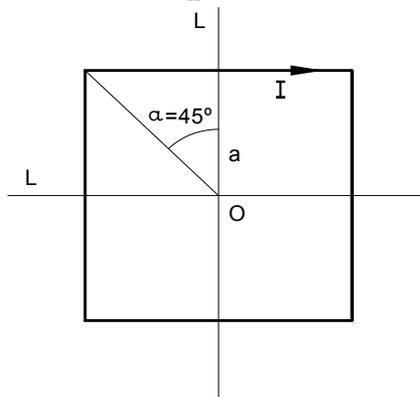


$$\vec{B}_{\text{TRIÁNGULO}} = n \frac{\mu_0 I}{2 \pi a} \sin \alpha \vec{u} = 3 \frac{\mu_0 I}{2 \pi a} \sin 60^\circ \vec{u} = \frac{3\sqrt{3}}{4 \pi a} \mu_0 I \vec{u}; \text{ siendo la apotema } a = \frac{\sqrt{3}}{6} L$$

$$\vec{B}_{\text{TRIÁNGULO}} = n \frac{\mu_0 I}{\pi L} \sin \frac{\pi}{n} \operatorname{tg} \frac{\pi}{n} \vec{u} = 3 \frac{\mu_0 I}{\pi L} \sin 60^\circ \operatorname{tg} 60^\circ \vec{u} = \frac{9}{2 \pi L} \mu_0 I \vec{u}$$

3º.- Campo magnético creado en el centro del cuadrado en función de apotema y lado

En este caso: $n=4$ lados, y el ángulo $\alpha = \frac{\pi}{n} = 45^\circ$, por tanto operando sobre [3]

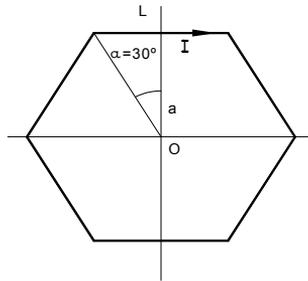


$$\vec{B}_{\text{CUADRADO}} = n \frac{\mu_0 I}{2 \pi a} \sin \alpha \vec{u} = 4 \frac{\mu_0 I}{2 \pi a} \sin 45^\circ \vec{u} = \frac{\sqrt{2}}{\pi a} \mu_0 I \vec{u}; \text{ siendo la apotema: } a = \frac{L}{2}$$

$$\vec{B}_{\text{CUADRADO}} = n \frac{\mu_0 I}{\pi L} \sin \frac{\pi}{n} \operatorname{tg} \frac{\pi}{n} \vec{u} = 4 \frac{\mu_0 I}{\pi L} \sin 45^\circ \operatorname{tg} 45^\circ \vec{u} = \frac{2\sqrt{2}}{\pi L} \mu_0 I \vec{u}$$

4°.- Campo magnético creado en el centro del hexágono en función de apotema y lado

Ahora: $n = 6$ lados, y el ángulo $\alpha = \frac{\pi}{n} = 30^\circ$, por tanto operando sobre [3]



$$\vec{B}_{\text{HEXÁGONO}} = n \frac{\mu_0 I}{2 \pi a} \operatorname{sen} \alpha \vec{u} = 6 \frac{\mu_0 I}{2 \pi a} \operatorname{sen} 30^\circ \vec{u} = \frac{3}{2 \pi a} \mu_0 I \vec{u}; \text{ siendo la apotema: } a = \frac{\sqrt{3} L}{2}$$

$$\vec{B}_{\text{OHEXÁGONO}} = n \frac{\mu_0 I}{\pi L} \operatorname{sen} \frac{\pi}{n} \operatorname{tg} \frac{\pi}{n} \vec{u} = 6 \frac{\mu_0 I}{\pi L} \operatorname{sen} 30^\circ \operatorname{tg} 30^\circ \vec{u} = \frac{\sqrt{3}}{\pi L} \mu_0 I \vec{u}$$

5°.- Campo magnético producido en el centro de circunferencia en función del radio

Partiendo de la expresión [3]: $\vec{B}_{\text{O}_n} = n \vec{B}_{\text{O}_1 \text{ LADO}} = n \frac{\mu_0 I}{2 \pi a} \operatorname{sen} \frac{\pi}{n} \vec{u}$, donde la apotema expresada en función del radio de la circunferencia circunscrita al polígono regular de n lados es: $a = R \cos \frac{\pi}{n}$. Sustituyendo el valor de la apotema en [3]: $\vec{B}_{\text{O}_n} = \frac{\mu_0 I}{2 \pi R} n \operatorname{tg} \frac{\pi}{n} \vec{u}$ [4]

Cuando el número de lados n tiende a infinito en [4] se tiende a la circunferencia de radio R circunscrita en el polígono regular.

$$\vec{B}_{\text{O CIRCUNFERENCIA}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{\mu_0 I}{2 \pi R} n \operatorname{tg} \frac{\pi}{n} \vec{u} \right] = \left[\frac{\mu_0 I}{2 \pi R} \vec{u} \right] \lim_{n \rightarrow \infty} \left[n \operatorname{tg} \frac{\pi}{n} \right] \quad [5]$$

En esta expresión al tomar límites, aparece una indeterminación del tipo $\infty \cdot 0$, por tanto para resolver dicho inconveniente, se transforma en otra indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$ y a continuación se aplica la regla de L'Hopital, derivando cada miembro del cociente respecto de la variable, que en este caso es " n ", y después al resultado obtenido se aplica el límite $n \rightarrow \infty$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[n \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi}{n} \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{\operatorname{tg} \frac{\pi}{n}}{\frac{1}{n}} \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{\frac{d}{dn} \left[\operatorname{tg} \frac{\pi}{n} \right]}{\frac{d}{dn} \left[\frac{1}{n} \right]} \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{\left[\frac{1}{\cos^2 \frac{\pi}{n}} \right] \pi \frac{d}{dn} \left[\frac{1}{n} \right]}{\frac{d}{dn} \left[\frac{1}{n} \right]} \right] = \pi$$

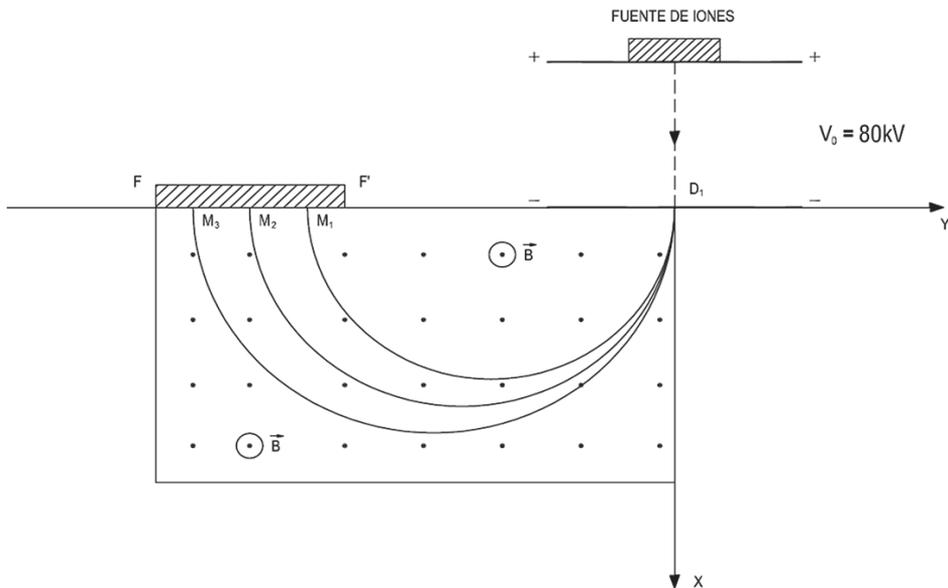
Finalmente llevando el resultado anterior del límite obtenido a la ecuación [5], el campo magnético creado en O por la espira en forma de circunferencia de radio R es:

$$\vec{B}_{\text{O CIRCUNFERENCIA}} = \frac{\mu_0 I}{2 R} \vec{u}$$

PROBLEMA 2.6

Con un espectrógrafo de masas de A. J. Dempster se van a identificar cationes de los isótopos del potasio, de números másicos: 39 u.a.m., 40 u.a.m., y 41 u.a.m. con una carga positiva, es decir: $^{39}\text{K}^+$, $^{40}\text{K}^+$, $^{41}\text{K}^+$ obtenidos, en una fuente de iones, a partir del calentamiento de sales de potasio.

Los iones producidos inicialmente están en reposo y son acelerados mediante un campo eléctrico, cuya diferencia de potencial entre la fuente de iones y un ánodo perforado con un diafragma D_1 es de $V_0 = 80 \text{ kV}$. De esta manera el chorro de iones emerge del campo eléctrico con una energía cinética uniforme, penetrando inmediatamente en un campo magnético, cuya única finalidad es enfocar su dirección; el campo magnético es inducido entre dos placas de hierro semicirculares, su valor es $\vec{B} = 5 \cdot 10^{-1} \text{ k T}$, y obliga a los iones a moverse en una trayectoria semicircular, para impactar finalmente en los puntos denominados genéricamente M: M_1 , M_2 y M_3 , de una placa fotográfica FF' .



El esquema simplificado del espectrógrafo de masas es el representado en la figura.

Se pide determinar lo siguiente:

- 1°.- Velocidad en km s^{-1} , de las partículas al salir por el diafragma D_1 .
- 2°.- Energía cinética de las partículas al salir de D_1 en MeV.
- 3°.- Distancias sobre la FF' placa fotográfica: M_1M_2 y M_2M_3 expresadas en cm.
- 4°.- Expresión del poder separador del espectrógrafo definido por $P_s = \frac{d \overline{D_1 M}}{d m}$.

DATOS. 1 u.a.m. = $1,6599 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$. $|q_e| = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C}$.

Los efectos relativistas se desprecian.

SOLUCIÓN**1°.- Velocidad en km s⁻¹, de las partículas al salir por diafragma D₁**

En la zona de aceleración, debida al voltaje V_0 , los iones potasio con una carga positiva, pasan de tener velocidad nula a una velocidad v , que se determina mediante el principio de conservación de la energía:

$$E_E = |q_e| V_0 = E_C = \frac{1}{2} m v^2 \text{ de aquí la velocidad es: } v = \sqrt{\frac{2 |q_e| V_0}{m}}$$

La masa de cada uno de los tres isótopos del potasio es:

$$\text{Para } {}^{39}\text{K}^+: m_{39} = 39 \cdot 1,6599 \cdot 10^{-27} = 64,7361 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$$

$$\text{Para } {}^{40}\text{K}^+: m_{40} = 40 \cdot 1,6599 \cdot 10^{-27} = 66,3960 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$$

$$\text{Para } {}^{41}\text{K}^+: m_{41} = 41 \cdot 1,6599 \cdot 10^{-27} = 68,0559 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$$

Por tanto las velocidades son:

$$\text{Ión } {}^{39}\text{K}^+: v_{39} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1,602 \cdot 10^{-19} \cdot 80000}{39 \cdot 1,6599 \cdot 10^{-27}}} = 6,2924 \cdot 10^2 \text{ km s}^{-1}$$

$$\text{Ión } {}^{40}\text{K}^+: v_{40} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1,602 \cdot 10^{-19} \cdot 80000}{40 \cdot 1,6599 \cdot 10^{-27}}} = 6,2132 \cdot 10^2 \text{ km s}^{-1}$$

$$\text{Ión } {}^{41}\text{K}^+: v_{41} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1,602 \cdot 10^{-19} \cdot 80000}{41 \cdot 1,6599 \cdot 10^{-27}}} = 6,13703 \cdot 10^2 \text{ km s}^{-1}$$

2°.- Energía cinética de las partículas al salir de D₁ en MeV

Los iones se someten al voltaje acelerador $V_0 = 80.000 \text{ V}$, y como tienen la misma carga positiva: $q = +q_e = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C}$, su energía cinética es la misma:

$$E_{\text{CINÉTICA}} = q V_0 = 1,602 \cdot 10^{-19} \cdot 80000 \text{ J} \frac{1}{1,602 \cdot 10^{-13}} \frac{\text{MeV}}{\text{J}} = 0,08 \text{ MeV.}$$

3°.- Distancias sobre la FF¹ placa fotográfica: M₁M₂ y M₂M₃ expresadas en cm

A la zona de impacto, los iones llegan con la velocidad que adquieren debido al voltaje acelerador V_0 , y como sólo aquí actúa el campo magnético, la fuerza magnética según la ley de Lorentz: $\vec{F}_B = q [\vec{v} \times \vec{B}] = m \vec{a}$

El vector aceleración \vec{a} de la partícula cargada es de módulo constante y siempre es perpendicular al vector velocidad \vec{v} , por tanto la trayectoria de la citada partícula es una semicircunferencia de radio R , situada en el plano XOY, descrita a velocidad constante.

Siendo: $F_B = q_e v B = m a = F_C = \frac{m v^2}{R}$ como la velocidad es conocida, la expresión del

$$\text{valor del radio de la trayectoria semicircular es: } R = \frac{m v}{q_e B} = \frac{1}{B} \sqrt{\frac{2 V_0 m}{q_e}}$$

Como se observa, el radio es directamente proporcional a la raíz cuadrada de la masa y también es inversamente proporcional a la raíz cuadrada de la carga del ión de cada isótopo, cuando las demás magnitudes están fijas en el aparato.

Las distancias pedidas entre los puntos de impacto M, en la placa fotográfica, de los haces de iones de isótopos, están relacionadas con los radios de la trayectoria semicircular descrita por los diferentes isótopos del potasio.

$$M_1M_2 = 2 \cdot [R_{m40} - R_{m39}] = \frac{2}{B} \left[\sqrt{\frac{2 V_0 m_{40}}{q_e}} - \sqrt{\frac{2 V_0 m_{39}}{q_e}} \right] = \sqrt{\frac{8 V_0}{B^2 q_e}} \left[\sqrt{m_{40}} - \sqrt{m_{39}} \right]$$

$$M_1M_2 = \sqrt{\frac{8 \cdot 80000}{25 \cdot 10^{-2} \cdot 1,602 \cdot 10^{-19}}} \left[\sqrt{40 \cdot 1,6599 \cdot 10^{-27}} - \sqrt{39 \cdot 1,6599 \cdot 10^{-27}} \right] = 1,295 \text{ cm}$$

$$M_2M_3 = 2 \cdot [R_{m41} - R_{m40}] = \frac{2}{B} \left[\sqrt{\frac{2 V_0 m_{41}}{q_e}} - \sqrt{\frac{2 V_0 m_{40}}{q_e}} \right] = \sqrt{\frac{8 V_0}{B^2 q_e}} \left[\sqrt{m_{41}} - \sqrt{m_{40}} \right]$$

$$M_2M_3 = \sqrt{\frac{8 \cdot 80000}{25 \cdot 10^{-2} \cdot 1,602 \cdot 10^{-19}}} \left[\sqrt{41 \cdot 1,6599 \cdot 10^{-27}} - \sqrt{40 \cdot 1,6599 \cdot 10^{-27}} \right] = 1,279 \text{ cm}$$

Por tanto en la placa fotográfica FF', del espectro del magnesio se obtienen tres rayas separadas entre sí una distancia de:

1,295 cm para el impacto de los isótopos de números másicos 39 u.a.m. y 40 u.a.m.

1,279 cm para el impacto de los isótopos de números másicos 40 u.a.m. y 41 u.a.m.

4º.- Expresión del poder separador del espectrógrafo definido por $P_s = \frac{d \overline{D_1M}}{d m}$

Hemos de determinar, en primer lugar la expresión de la distancia entre el punto de salida de los iones del selector de velocidades y el punto donde impactan dichos iones, en la placa fotográfica.

$$\overline{D_1M} = 2 R = \sqrt{\frac{8 V_0 m}{B^2 q_e}} = \sqrt{\frac{8 V_0}{B^2 q_e}} \sqrt{m}$$

Derivando en la anterior expresión respecto de la variable masa "m", se obtiene el poder separador para el espectrógrafo de masas de Dempster:

$$P_s = \frac{d \overline{D_1M}}{d m} = \frac{d}{d m} \left[\sqrt{\frac{8 V_0}{B^2 q_e}} \sqrt{m} \right] = \sqrt{\frac{8 V_0}{B^2 q_e}} \frac{d}{d m} \sqrt{m} = \sqrt{\frac{8 V_0}{B^2 q_e}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{m}} = \sqrt{\frac{2 V_0}{B^2 q_e m}}$$

Para este espectrógrafo de masas de Dempster, el poder separador, como se observa en la fórmula anterior, es tanto mejor cuanto menores sean la masa y la carga de los iones de los isótopos, una vez fijados, en el aparato los valores de funcionamiento del campo magnético y el voltaje acelerador.

PROBLEMA 2.7

Una partícula de masa m y carga q^+ , se mueve en el vacío en una región donde coexisten un campo eléctrico $\vec{E} = E \vec{k}$, y un campo magnético $\vec{B} = -B \vec{k}$. En el instante inicial $t=0$, la partícula se encuentra en el origen de coordenadas $O(0, 0, 0)$ y su velocidad inicial es $\vec{v}_0 = v_0 \vec{i}$. La velocidad de la partícula, en un instante t , tiene en general, la expresión:

$$\vec{v} = \frac{dx(t)}{dt} \vec{i} + \frac{dy(t)}{dt} \vec{j} + \frac{dz(t)}{dt} \vec{k}.$$

Utilizando un sistema de coordenadas cartesianas ortogonales OXYZ, en función de los datos, y siendo t el parámetro tiempo, se pide determinar para dicha partícula:

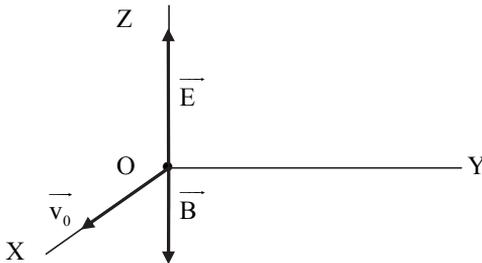
- 1°.- Velocidad en coordenadas paramétricas expresada vectorialmente.
- 2°.- Trayectoria: ecuaciones temporales en coordenadas paramétricas.
- 3°.- Aceleración en paramétricas expresada vectorialmente y su módulo.
- 4°.- Trayectoria: ecuaciones en coordenadas cartesianas cuando $t \ll 0$.

SOLUCIÓN

1°.- Velocidad en coordenadas paramétricas

La expresión de la ecuación fundamental de la dinámica, teniendo en cuenta los dos campos eléctrico y magnético que actúan sobre la partícula cargada es:

$$\vec{F} = m \vec{a} = \vec{F}_E + \vec{F}_B = q \vec{E} + q [\vec{v} \times \vec{B}] \quad \text{siendo} \quad \vec{v} = \frac{dx(t)}{dt} \vec{i} + \frac{dy(t)}{dt} \vec{j} + \frac{dz(t)}{dt} \vec{k}$$



$$\text{Como: } \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2x(t)}{dt^2} \vec{i} + \frac{d^2y(t)}{dt^2} \vec{j} + \frac{d^2z(t)}{dt^2} \vec{k}$$

$$\vec{F} = m \left[\frac{d^2x}{dt^2} \vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2} \vec{j} + \frac{d^2z}{dt^2} \vec{k} \right] = q E \vec{k} + q \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{dx}{dt} & \frac{dy}{dt} & \frac{dz}{dt} \\ 0 & 0 & -B \end{vmatrix}$$

$$\vec{F} = m \left[\frac{d^2x}{dt^2} \vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2} \vec{j} + \frac{d^2z}{dt^2} \vec{k} \right] = q E \vec{k} + q B \left[-\frac{dy}{dt} \vec{i} + \frac{dx}{dt} \vec{j} \right]$$

Desarrollando la ecuación vectorial diferencial anterior, obtenemos las tres ecuaciones diferenciales de la trayectoria sobre los tres ejes de coordenadas cartesianas:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -q B \frac{dy}{dt} \quad [1]; \quad m \frac{d^2y}{dt^2} = q B \frac{dx}{dt} \quad [2]; \quad m \frac{d^2z}{dt^2} = q E \quad [3]$$

Integrando una vez respecto al tiempo las tres ecuaciones anteriores determinaremos las ecuaciones paramétricas de la velocidad, en función del tiempo.

$$\text{De [1] integrando: } m \frac{dx}{dt} = -q B y + C_1 \quad [4]$$

La constante se halla a partir de las condiciones iniciales de contorno que son:

Para $t = 0$: $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$; $\vec{v}_0 = v_0 \vec{i}$, operando en [4], resulta: $C_1 = m v_0$.

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{qB}{m} y + v_0 \text{ llevando esta ecuación a la [2] se obtiene } \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{q^2 B^2}{m^2} y = \frac{q B v_0}{m}$$

Ecuación diferencial de 2º grado, cuya solución general es la suma de la solución de la ecuación homogénea, y la solución particular de la ecuación completa : $y = y_H + y_P$.

$$y = A \text{ sen } [\omega t + \varphi] + \frac{m v_0}{q B} \quad [5]$$

Siendo $\omega = \frac{qB}{m}$; A y φ se obtienen de las condiciones de contorno.

$$\text{Para } t = 0, \text{ sobre [5] resulta: } 0 = \frac{m v_0}{q B} + A \text{ sen } \varphi$$

$$\text{Para } t = 0, \text{ sobre la derivada de [5] resulta: } \left[\frac{dy}{dt} \right]_0 = 0 = \omega A \text{ cos } \varphi$$

Operando en ambas se obtiene: $A = -\frac{m v_0}{q B}$; $\varphi = \frac{\pi}{2}$, por tanto sustituyendo estos valores

$$\text{sobre [5] resulta la solución: } y = \frac{m v_0}{q B} \left[1 - \text{cos } \frac{q B}{m} t \right] \quad [6]$$

$$\text{De [2] integrando: } m \frac{dy}{dt} = q B x + C_2 \quad [7]$$

La constante se determina a partir de las condiciones iniciales de contorno que son:

Para $t = 0$: $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$; $\vec{v}_0 = v_0 \vec{i}$ y operando en [7], resulta $C_2 = 0$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{q B}{m} x \text{ llevando esta ecuación a la [1] se obtiene: } \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{q^2 B^2}{m^2} x = 0.$$

Ecuación diferencial de segundo grado homogénea, cuya solución general es del tipo: $x = A \text{ sen } [\omega t + \varphi]$ [8]

Donde A y φ se obtienen a partir de las condiciones de contorno.

Para $t = 0$, sobre [8] resulta: $0 = A \text{ sen } \varphi$; por tanto: $\varphi = 0$

$$\text{Para } t = 0, \varphi = 0, \text{ sobre la derivada de [8] resulta: } \left[\frac{dx}{dt} \right]_0 = v_0 = \omega A \text{ cos } \varphi; A = \frac{v_0}{\omega} = \frac{m v_0}{q B}$$

$$\text{Sustituyendo en [8] queda la solución: } x = \frac{m v_0}{q B} \text{ sen } \frac{q B}{m} t \quad [9]$$

$$\text{De [3] integrando respecto al tiempo: } m \frac{dz}{dt} = q E t + C_3 \quad [10]$$

La constante se determina a partir de las condiciones iniciales de contorno que son:

Para $t = 0$: $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$; $\vec{v}_0 = v_0 \vec{i}$ y operando en [10], resulta $C_3 = 0$.

$$\text{Volviendo a integrar en [10] se obtiene: } z = \frac{q E}{2 m} t^2 \quad [11]$$

Las ecuaciones paramétricas de la velocidad resultan:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = -\frac{qB}{m} y + v_0 = -\frac{qB}{m} \frac{mv_0}{qB} [1 - \cos \omega t] + v_0 = v_0 \cos \frac{qB}{m} t$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{qB}{m} x = \frac{qB}{m} \frac{mv_0}{qB} \sin \omega t = v_0 \sin \frac{qB}{m} t;$$

$$v_z = \frac{dz}{dt} = \frac{qE}{m} t$$

Velocidad ecuaciones paramétricas: $v_x = v_0 \cos \frac{qB}{m} t$; $v_y = v_0 \sin \frac{qB}{m} t$; $v_z = \frac{qE}{m} t$

Velocidad vectorialmente: $\vec{v} = v_0 \cos \frac{qB}{m} t \vec{i} + v_0 \sin \frac{qB}{m} t \vec{j} + \frac{qE}{m} t \vec{k}$.

Velocidad en módulo: $v = \sqrt{v_0^2 + \frac{q^2 E^2}{m^2} t^2}$ depende del tiempo.

2°.- Trayectoria: ecuaciones temporales en coordenadas paramétricas

Las ecuaciones temporales de la trayectoria, en coordenadas paramétricas, en función del tiempo, se obtienen de las integraciones sucesivas respecto del tiempo, realizadas en el apartado anterior:

$$x = \frac{m v_0}{q B} \sin \frac{q B}{m} t ; \quad y = \frac{m v_0}{q B} [1 - \cos \frac{q B}{m} t] ; \quad z = \frac{q E}{2 m} t^2$$

3°.- Aceleración expresada vectorialmente en paramétricas y su módulo

La ecuación fundamental de la dinámica es: $\vec{F} = m \vec{a} = q E \vec{k} + q B \left[-\frac{dy}{dt} \vec{i} + \frac{dx}{dt} \vec{j} \right]$

Por lo tanto la aceleración resulta: $\vec{a} = \frac{q}{m} \left[B \left[-\frac{dy}{dt} \vec{i} + \frac{dx}{dt} \vec{j} \right] + E \vec{k} \right]$

De de las expresiones del apartado anterior y derivando respecto al tiempo, el vector aceleración es:

$$\vec{a} = \frac{q}{m} \left[v_0 B \left[-\sin \frac{q B}{m} t \vec{i} + \cos \frac{q B}{m} t \vec{j} \right] + E \vec{k} \right]$$

La aceleración en módulo es: $a = \frac{q}{m} \sqrt{v_0^2 B^2 + E^2}$ no depende del tiempo.

Su valor es constante, para un ión determinado y manteniendo constantes en el proceso los valores de los campos eléctrico y magnético.

4°.- Trayectoria: ecuaciones en coordenadas cartesianas, cuando $t \ll 0$

En este caso, al ser el tiempo muy pequeño $t \ll 0$, hacemos las aproximaciones siguientes:

$$\sin \omega t \cong \omega t = \frac{q B}{m} t ; \quad \cos \omega t \cong \cos 0^\circ = 1$$

Sustituyendo ambas expresiones en las ecuaciones de la trayectoria del apartado 2º, resulta:

$$x = \frac{m v_0}{q B} \sin \omega t \cong \frac{m v_0}{q B} \omega t = \frac{m v_0}{q B} \frac{q B}{m} t = v_0 t$$

$$y = \frac{m v_0}{q B} [1 - \cos \omega t] \cong \frac{m v_0}{q B} [1 - \cos 0] = 0$$

$$z = \frac{q E}{2 m} t^2$$

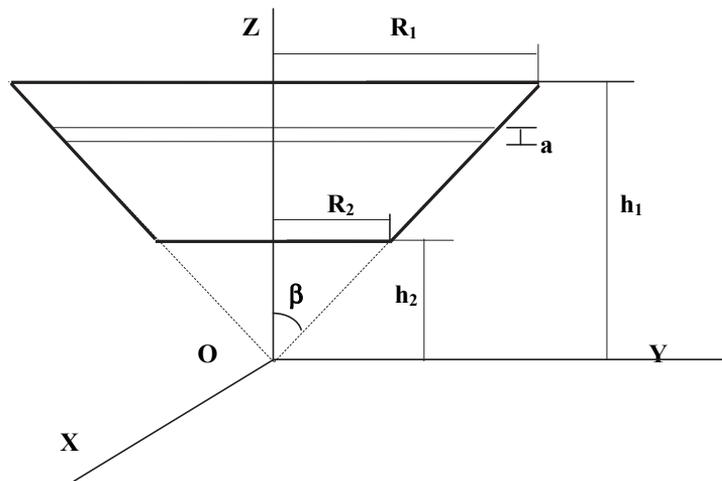
Eliminando el tiempo, la ecuación de la trayectoria de la partícula en expresada en coordenadas cartesianas, para $t \ll 0$: $z = \frac{q E}{2 m v_0^2} x^2$; $y = 0$. Es una parábola situada en el plano ZOY.

PROBLEMA 2.8

El solenoide de la figura está formado por un delgado hilo de conductor de diámetro "a", por el que circula una intensidad de corriente eléctrica I en el sentido contrario a las agujas del reloj, de forma que se obtiene un conjunto de espiras circulares paralelas arrolladas de manera uniforme sobre la superficie troncocónica cuyas características geométricas son las indicadas en la figura.

Determinar para dicho solenoide, lo siguiente:

- 1°.- Campo magnético \vec{B}_0 producido en O.
- 2°.- Momento magnético asociado.
- 3°.- Aplicación numérica de los apartados anteriores.



$h_1 = R_1$; $h_2 = R_2$; $R_1 = 2 R_2$; $I = 10 \text{ A}$; $h_2 = 10 \text{ cm}$; $a = 1 \text{ mm}$.

SOLUCIÓN

Cálculos previos

Inicialmente calcularemos el campo magnético B_{01} creado por una espira circular de radio R_0 por la que circula una corriente eléctrica I, en un punto O, perteneciente a su eje de simetría, para lo cual aplicamos la ley de Ampère-Laplace a dos elementos diferenciales diametralmente opuestos, en la espira, dirigidos según el sentido de la corriente eléctrica:

$$d\vec{B}_{01} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^3} [d\vec{\ell} \times \vec{r}] \quad [1]$$

Teniendo en cuenta la simetría y: $r = \frac{R_0}{\text{sen } \beta}$; $d\ell = R_0 d\theta$ [2]

Entre [1] y [2] obtenemos la ecuación: $\vec{B}_{01} = \frac{\mu_0 I}{4\pi R_0} \text{sen}^3 \beta \vec{k} \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{\mu_0 I}{2 R_0} \text{sen}^3 \beta \vec{k}$ [3]

1°.- Campo magnético producido en O

En el solenoide, el número de espiras dn de espesor "a", que hay en un elemento diferencial de longitud dz es: $dn = \frac{|dz|}{a} = \frac{d(r \cos \beta)}{a} = \frac{\cos \beta}{a} dr$ [4]

En el tronco de cono se cumple la relación geométrica: $R_0 = \frac{R_1}{h_1} z = \frac{R_1}{h_1} r \cos\beta$ [5]

Por tanto el campo magnético creado por las espiras contenidas en un elemento dz , se obtendrá aplicando a $d\vec{B}_{\sigma T} = \vec{B}_{\sigma_1} dn \vec{k}$ las anteriores ecuaciones [3], [4] y [5]:

$$d\vec{B}_{\sigma T} = \vec{B}_{\sigma_1} dn \vec{k} = \frac{\mu_0 I}{2 R_0} \text{sen}^3\beta \left[\frac{\cos\beta}{a} dr \right] \vec{k} = \frac{\mu_0 I}{2 a \frac{R_1}{h_1} r \cos\beta} \text{sen}^3\beta \cos\beta dr \vec{k} = \frac{\mu_0 I h_1}{2 a R_1} \text{sen}^3\beta \frac{dr}{r} \vec{k}$$

La integración se realiza entre los límites correspondientes a la base inferior y a la base superior del tronco de cono, que son $\frac{R_1}{\text{sen}\beta}$ y $\frac{R_2}{\text{sen}\beta}$, por tanto resulta:

$$\vec{B}_{\sigma T} = \int_{R_2/\text{sen}\beta}^{R_1/\text{sen}\beta} d\vec{B}_{\sigma T} = \frac{\mu_0 I h_1}{2 a R_1} \text{sen}^3\beta \int_{R_2/\text{sen}\beta}^{R_1/\text{sen}\beta} \frac{dr}{r} \vec{k} = \frac{\mu_0 I h_1}{2 a R_1} \text{sen}^3\beta \ln \frac{R_1}{R_2} \vec{k}$$

2º.- Momento magnético asociado

Para una sola espira circular resulta: $\vec{m}_1 = \pi R_0^2 I \vec{k} = \pi \left[\frac{R_1}{h_1} \right]^2 z^2 I \vec{k}$

Número de espiras de espesor "a" que hay en un elemento de longitud dz : $dn = \frac{|dz|}{a}$

Para todo el solenoide completo obtendremos:

$$d\vec{m}_T = dn \vec{m}_1 = \pi R_0^2 I \vec{k} = \frac{\pi I}{a} \left[\frac{R_1}{h_1} \right]^2 z^2 dz \vec{k}$$

Integrando entre los límites correspondientes a las bases inferior y superior del tronco de cono, el momento magnético es:

$$\vec{m}_T = \int_{h_2}^{h_1} d\vec{m}_T = \frac{\pi I}{a} \left[\frac{R_1}{h_1} \right]^2 \int_{h_2}^{h_1} z^2 dz \vec{k} = \frac{\pi I}{3 a} \left[\frac{R_1}{h_1} \right]^2 [h_1^3 - h_2^3] \vec{k}$$

3º.- Aplicación numérica de los apartados anteriores

La aplicación numérica, para determinar el campo magnético, se determina sustituyendo en la ecuación del apartado primero, los datos conocidos del enunciado y como además,

resulta que el semiángulo en el vértice del tronco de cono es: $\text{sen}\beta = \frac{R_2}{\sqrt{h_2^2 + R_2^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

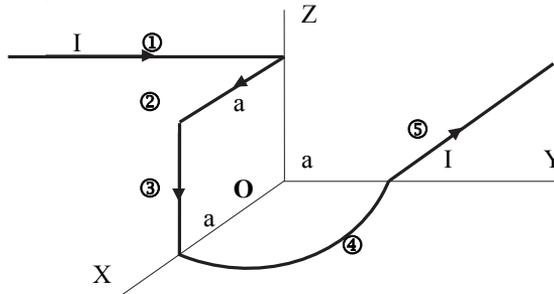
$$\vec{B}_{\sigma T} = \frac{\mu_0 I h_1}{2 a R_1} \text{sen}^3\beta \ln \frac{R_1}{R_2} \vec{k} = \frac{4 \pi 10^{-7} 10}{2 \cdot 1 \cdot 10^{-3}} \frac{\sqrt{2}}{4} \ln 2 \vec{k} = 1,5397 \cdot 10^{-3} \vec{k} \text{ T}$$

Para determinar el momento magnético asociado, se sustituye en la ecuación del apartado segundo anterior los datos conocidos del enunciado:

$$\vec{m}_T = \frac{\pi I}{3 a} \left[\frac{R_1}{h_1} \right]^2 [h_1^3 - h_2^3] \vec{k} = \frac{\pi 10}{3 \cdot 1 \cdot 10^{-3}} [2 \cdot 10 \cdot 10^{-3}]^3 - [1 \cdot 10 \cdot 10^{-3}]^3 \vec{k} = 7,3303 \cdot 10^{-2} \vec{k} \text{ A m}^2$$

PROBLEMA 2.9

Un conductor metálico recorrido por una corriente eléctrica I , situado en el vacío, se compone de cinco tramos, dos de ellos son rectilíneos indefinidamente largos, otros dos son segmentos de longitud "a" y el otro tramo es un cuadrante de circunferencia de radio "a", tal como se representa en la figura.



Se pide determinar en el punto O:

- 1°.- Campo magnético producido por cada tramo.
- 2°.- Campo magnético producido por el conductor completo.

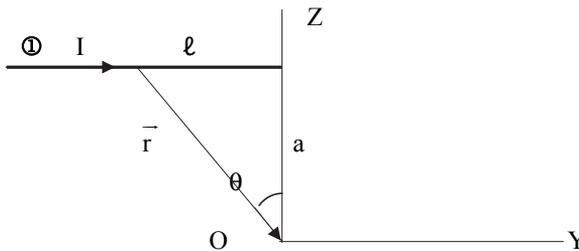
SOLUCIÓN

1°.- Campo magnético producido por cada tramo en el punto O

Se utilizará la Ley de Ampère-Laplace, que expresa el campo magnético elemental creado

por un elemento de corriente en un punto O es:
$$d\vec{B}_O = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{[d\vec{\ell} \times \vec{r}]}{r^3} \quad [1]$$

Tramo ①: Paralelo al eje OY, indefinido en un extremo.



Como se cumple:

$$d\vec{\ell} \times \vec{r} = r d\ell \cos \theta \vec{u}; \quad \ell = a \operatorname{tg} \theta \text{ diferenciando: } d\ell = \frac{a d\theta}{\cos^2 \theta}, \text{ además: } r = \frac{a}{\cos \theta}.$$

$\vec{u} = \vec{u}_1 \times \vec{u}_r$; $\vec{u}_1 = \vec{j}$: unitario en dirección de I; \vec{u}_r : unitario en dirección de \vec{r} . Operando: $\vec{u} = -\vec{i}$

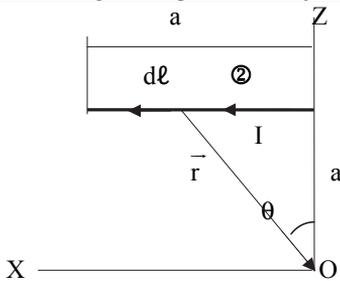
Sustituyendo las expresiones anteriores, en la ecuación [1], se obtiene:

$$d\vec{B}_{O1} = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \cos \theta d\theta \vec{u} = -\frac{\mu_0 I}{4\pi a} \cos \theta d\theta \vec{i}, \text{ es ley de Biot y Savart.}$$

Para abarcar todo el tramo de conductor ①, se realiza la integral a través del ángulo θ , entre los límites extremos inicial y final: $+\pi/2$ y 0.

$$\vec{B}_{O1} = -\frac{\mu_0 I}{4\pi a} \int_{\pi/2}^0 \cos \theta d\theta \vec{i} = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \vec{i} \quad [2]$$

Tramo ②: Segmento paralelo al eje OX, de longitud "a".



Como se cumple que:

$$d\vec{\ell} \times \vec{r} = r d\ell \cos\theta \vec{u}; \quad \ell = a \operatorname{tg} \theta \text{ diferenciando: } d\ell = \frac{a d\theta}{\cos^2 \theta}, \text{ además como: } r = \frac{a}{\cos\theta}.$$

$\vec{u} = \vec{u}_1 \times \vec{u}_r$; $\vec{u}_1 = \vec{i}$: unitario en dirección de I; \vec{u}_r : unitario en dirección de \vec{r} , luego $\vec{u} = \vec{j}$

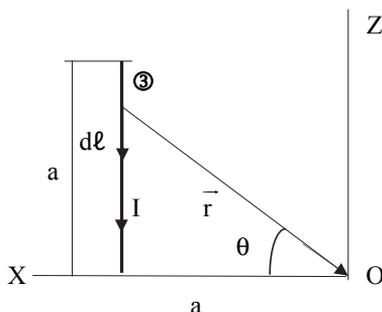
Sustituyendo las expresiones anteriores, en la ecuación [1], se obtiene:

$$d\vec{B}_{O_2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \cos\theta d\theta \vec{u} = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \cos\theta d\theta \vec{j}, \text{ ley de Biot y Savart.}$$

Para abarcar todo el tramo de conductor ②, se realiza la integral a través del ángulo θ , entre los límites extremos inicial y final: 0 y $+\pi/4$.

$$\vec{B}_{O_2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \int_0^{\pi/4} \cos\theta d\theta \vec{j} = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{j} \quad [3]$$

Tramo ③: Segmento paralelo al eje OZ, de longitud "a".



Como se cumple que:

$$d\vec{\ell} \times \vec{r} = r d\ell \cos\theta \vec{u}; \quad \ell = a \operatorname{tg} \theta \text{ diferenciando: } d\ell = \frac{a d\theta}{\cos^2 \theta}, \text{ además como: } r = \frac{a}{\cos\theta}.$$

$\vec{u} = \vec{u}_1 \times \vec{u}_r$; $\vec{u}_1 = -\vec{k}$: unitario en dirección de I; \vec{u}_r : unitario en dirección de \vec{r} . Operando $\vec{u} = \vec{j}$

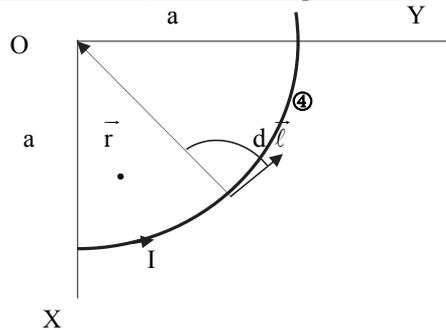
Sustituyendo las expresiones anteriores, en ecuación [1], se obtiene:

$$d\vec{B}_{O_3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \cos\theta d\theta \vec{u} = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \cos\theta d\theta \vec{j} \text{ les la ley de Biot y Savart.}$$

Para abarcar todo el tramo de conductor ③, se realiza la integral a través del ángulo θ , entre los límites extremos inicial y final: $+\pi/4$ y 0 .

$$\vec{B}_{O_3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \int_{\pi/4}^0 \cos\theta d\theta \vec{i} = -\frac{\mu_0 I}{4\pi a} \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{j} \quad [4]$$

Tramo ④: Arco circular de 90° y de radio R=a, contenido en plano XOY.



Como se cumple que:

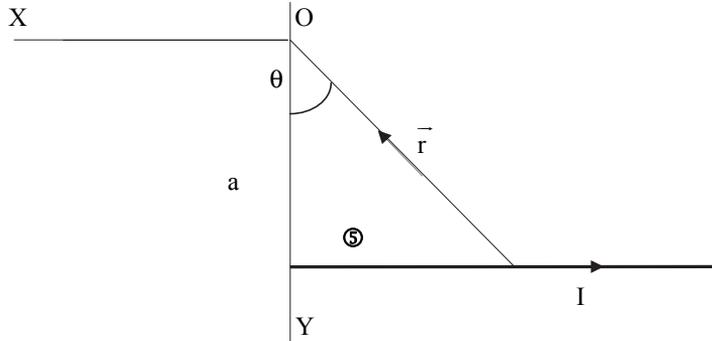
$d\vec{\ell} \times \vec{r} = r d\ell \sin \frac{\pi}{2} \vec{u}$; $\vec{u} = \vec{u}_1 \times \vec{u}_r = \vec{k}$; $d\ell = a d\theta$; $r = a$ sustituyendo las expresiones

anteriores, en la ecuación [1], se obtiene: $d\vec{B}_{O4} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} d\theta \vec{k}$.

Para abarcar todo el tramo de conductor ④ se realiza la integral a través del ángulo θ , entre los límites extremos: 0 y $+\pi/2$.

$$\vec{B}_{O4} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^{\pi/2} d\theta \vec{k} = \frac{\mu_0 I}{8a} \vec{k} \quad [5]$$

Tramo ⑤: Paralelo al eje OX, indefinido en un extremo.



Como se cumple que:

$d\vec{\ell} \times \vec{r} = r d\ell \cos \theta \vec{u}$; $\ell = a \tan \theta$ diferenciando: $d\ell = \frac{a d\theta}{\cos^2 \theta}$, además como: $r = \frac{a}{\cos \theta}$.

$\vec{u} = \vec{u}_1 \times \vec{u}_r$; $\vec{u}_1 = -\vec{i}$: unitario en dirección de I; \vec{u}_r : unitario en dirección de \vec{r} . Operando $\vec{u} = \vec{k}$.

Sustituyendo las expresiones anteriores, en ecuación [1], se obtiene:

$$d\vec{B}_{O5} = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \cos \theta d\theta \vec{u} = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \cos \theta d\theta \vec{k} \text{ que se conoce como ley de Biot y Savart.}$$

Para abarcar todo el tramo de conductor ⑤, se realiza la integral a través del ángulo θ , entre los límites extremos: 0 y $+\pi/2$.

$$\vec{B}_{O5} = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \int_0^{\pi/2} \cos \theta d\theta \vec{i} = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \vec{k} \quad [6]$$

2°.- Campo magnético producido por el conductor completo en el punto O

Aplicando el Principio de Superposición, a partir de los campos magnéticos producidos en el punto O por los cinco tramos antes hallados, obtenemos el campo magnético producido en el citado punto por el conductor completo, con sus cinco tramos

$$\vec{B}_{O_{TOTAL}} = \vec{B}_{O_1} + \vec{B}_{O_2} + \vec{B}_{O_3} + \vec{B}_{O_4} + \vec{B}_{O_5} = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \vec{i} + \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{j} - \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{j} + \frac{\mu_0 I}{8a} \vec{k} + \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \vec{k}$$

Finalmente, tras operar resulta: $\vec{B}_{O_{TOTAL}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \left[\vec{i} + \frac{\pi+2}{2} \vec{k} \right]$

PROBLEMA 2.10

En un sistema cartesiano ortogonal, una carga q_1 , se mueve en el vacío con una velocidad constante $\vec{v}_1 = v \vec{j}$, a lo largo del eje OY, de forma que en el instante inicial $t=0$, dicha carga se encuentra en el origen de coordenadas O (0, 0, 0).

Un conductor rectilíneo indefinido situado en el eje Z, está recorrido por una corriente I en sentido positivo de dicho eje creando un campo magnético que actúa sobre la carga móvil q_1 .

Se pide terminar:

1º.- La fuerza de Lorentz sobre la carga móvil q_1 producida por el conductor.

Ahora, otra carga eléctrica q_2 , se mueve con una velocidad constante $\vec{v}_2 = v \vec{k}$, a lo largo del eje OZ, en el instante inicial $t=0$, esta carga se halla en el origen de coordenadas O (0, 0, 0), y al ser q_2 móvil crea un campo magnético. Se pide determinar para el instante t

2º.- Campo magnético creado por la carga móvil q_2 sobre el punto donde está q_1 .

3º.- La fuerza de Lorentz sobre la carga móvil q_1 , producida por la carga q_2 .

SOLUCIÓN**1º.- La fuerza de Lorentz sobre la carga móvil q_1 producida por el conductor**

El conductor rectilíneo indefinido crea, en un punto del eje OY donde se encuentra la carga móvil q_1 al cabo de un tiempo t, según la ley de Biot y Savart un campo magnético:

$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} [\vec{u}_1 \times \vec{u}_r]; \text{ siendo } \vec{u}_1 = \vec{k}; \vec{u}_r = \vec{j}; r = v_1 t, \text{ por tanto sustituyendo resulta:}$$

$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi v_1 t} [\vec{k} \times \vec{j}] = -\frac{\mu_0 I}{2\pi v_1 t} \vec{i}; \text{ como según el enunciado } \vec{v}_1 = v \vec{j}.$$

La expresión de la fuerza magnética sobre la carga móvil q_1 según la ley de Lorentz es:

$$\vec{F}_{B1} = q_1 [\vec{v}_1 \times \vec{B}_1] = q_1 v_1 \frac{\mu_0 I}{2\pi v_1 t} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \text{ operando, se obtiene}$$

La fuerza, según Lorentz, sobre la carga q_1 de producida por el conductor:

$$\vec{F}_{B1} = \frac{\mu_0 q_1 I}{2\pi t} \vec{k}$$

2º.- Campo magnético creado por la carga móvil q_2 sobre el punto donde está q_1

La expresión del campo magnético creado por una carga q_2 , en movimiento, con velocidad

$$\vec{v}_2, \text{ en un punto P donde está la carga móvil } q_1 \text{ es: } \vec{B}_p = \frac{\mu_0 q_2}{4\pi} \frac{[\vec{v}_2 \times \vec{r}]}{r^3} \quad [1]$$

Siendo \vec{r} vector que va desde el punto donde está q_2 hasta el punto donde se encuentra q_1 . Sabemos que ambas cargas comienzan a moverse partiendo, las dos, en el instante inicial desde el origen de coordenadas O, por tanto transcurrido un tiempo t:

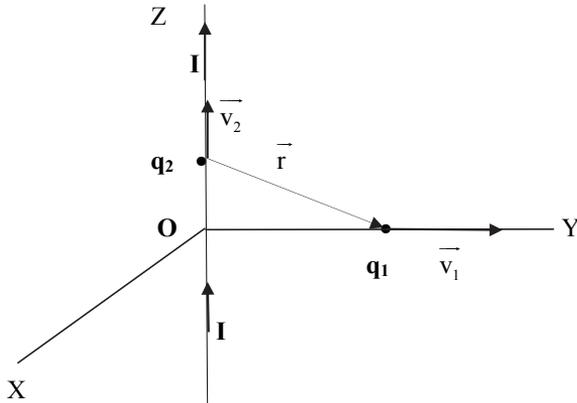
$$\text{El vector posición de la carga móvil } q_1 \text{ es: } \vec{r}_1 = \vec{v}_1 t = v t \vec{j}.$$

$$\text{El vector posición de la carga móvil } q_2 \text{ es: } \vec{r}_2 = \vec{v}_2 t = vt \vec{k}.$$

$$\text{El vector posición de la carga } q_1 \text{ respecto de la } q_2 \text{ es: } \vec{r}_1 - \vec{r}_2 = v t [\vec{j} - \vec{k}].$$

El módulo de este vector es: $|\vec{r}_1 - \vec{r}_2| = \sqrt{2} v t$

Sustituyendo todo lo anterior sobre la ecuación [1]:



$$\vec{B}_p = \frac{\mu_0 q_2}{4\pi} \frac{[\vec{v}_2 \times \vec{r}]}{r^3} = \frac{\mu_0 q_2}{4\pi} \frac{[\vec{v}_2 \times (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)]}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} = \frac{\mu_0 q_2}{4\pi} \frac{[v \vec{k} \times v t (\vec{j} - \vec{k})]}{|v t [\vec{j} - \vec{k}]|^3}$$

$$\vec{B}_p = \frac{\mu_0 q_2}{4\pi} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} \frac{v^2 t}{[\sqrt{2} v t]^3} = -\frac{\mu_0 q_2}{4\pi} \frac{v^2 t}{[\sqrt{2} v t]^3} \vec{i}$$

Operando resulta: $\vec{B}_p = -\frac{\sqrt{2} \mu_0 q_2}{16 \pi v t^2} \vec{i}$

3°.- La fuerza de Lorentz sobre la carga móvil q_1 producida por la carga q_2

La expresión de la fuerza magnética que el campo magnético creado por la carga móvil q_2 crea sobre la carga también móvil q_1 , según la ley de Lorentz es:

$$\vec{F}_{B_p} = q_1 [\vec{v}_1 \times \vec{B}_p] = q_1 v \vec{j} \times \left[-\frac{\mu_0 q_2}{8 \sqrt{2} \pi v t^2} \vec{i} \right] = q_1 v \frac{\mu_0 q_2}{8 \sqrt{2} \pi v t^2} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Operando, fuerza de Lorentz es: $\vec{F}_{B_p} = \frac{\mu_0 \sqrt{2} q_1 q_2}{16 \pi t^2} \vec{k}$

CAPÍTULO III

CONDUCTORES CARGADOS EN EQUILIBRIO

PROBLEMA 3.1

Dada una carga puntual +q, situada a una distancia de 1 m de un plano conectado a tierra, definir el lugar geométrico de los puntos del plano, que en su interior encierra un tercio de la carga inducida.

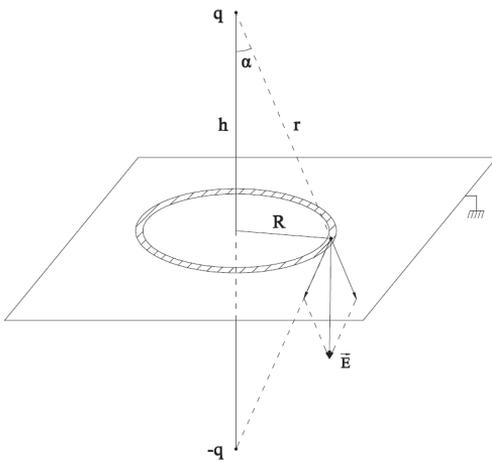
SOLUCIÓN

Por imágenes la carga +q induce la -q.

$$\vec{E} = \vec{E}_q + \vec{E}_{-q} = \frac{q}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot r^2} \cdot 2 \cdot \cos \alpha \cdot \vec{n} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \cdot \vec{n}$$

2 cargas

donde σ es la densidad superficial de carga del plano.



$$\cos \alpha = h/r$$

$$\sigma = \frac{q}{2 \cdot \pi \cdot r^2} \cdot \cos \alpha = \frac{q \cdot h}{2 \cdot \pi \cdot r^3}$$

La carga encerrada en la corona de la figura vale:

$$r = \sqrt{R^2 + h^2}$$

$$dq_i = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot dR \cdot \sigma$$

$$= q \cdot h \cdot \frac{R}{\sqrt{(R^2 + h^2)^3}} \cdot dR$$

La carga total del plano encerrada en el círculo de radio R_1 es:

$$Q = \iint_{\sigma} dq$$

$$Q = \iint \sigma \cdot dS = q \cdot h \cdot \int_0^{R_1} \frac{R}{\sqrt{(R^2 + h^2)^3}} \cdot dR =$$

Condición del enunciado

$$Q = q \cdot h \cdot \left[-\frac{1}{\sqrt{(R^2 + h^2)}} \right]_0^{R_1} = q \cdot h \cdot \left[\frac{1}{h} - \frac{1}{\sqrt{(R_1^2 + h^2)}} \right] = \frac{q}{3}$$

Operando, se obtiene:

$$\frac{1}{3} = 1 - \left[\left(\frac{R_1}{h} \right)^2 + 1 \right]^{-1/2} \rightarrow \left(\frac{R_1}{h} \right)^2 + 1 = \frac{9}{4}$$

$$R_1 = \frac{\sqrt{5}}{2} \cdot h$$

El lugar geométrico es la circunferencia de centro O (pie de la perpendicular trazada desde q) y radio $R_1 = \sqrt{5} \cdot h/2 = 1,12 \text{ m}$.

PROBLEMA 3.2

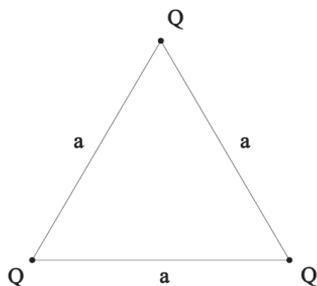
Tres esferas con carga 0,11 nC cada una de ellas, aisladas, idénticas de radios 10 cm, tienen sus centros situados en los vértices de un triángulo equilátero de lado 100 m. Sucesivamente, y en el orden 1, 2, 3 se une cada una de las esferas a tierra y se aísla de nuevo. Se pide:

1°.- Cargas Q_1 , Q_2 y Q_3 de cada esfera.

2°.- Si se unen las esferas 2 y 3 por medio de un hilo conductor muy fino, ¿Cuál será el potencial de la esfera 1?

SOLUCIÓN**1°.- Cargas de cada esfera**

Conociendo la expresión de los potenciales creados por un conjunto de cargas y tomando como punto genérico la esfera conectada a tierra, se tiene:



$$V_1 = 0 ; 0 = \frac{Q_1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot r} + \frac{Q_2}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot a} + \frac{Q_3}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot a}$$

$$V_2 = 0 ; 0 = \frac{Q_1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot a} + \frac{Q_2}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot r} + \frac{Q_3}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot a}$$

$$V_3 = 0 ; 0 = \frac{Q_1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot a} + \frac{Q_2}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot a} + \frac{Q_3}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot r}$$

Obteniéndose como valores de Q_1 , Q_2 y Q_3 los siguientes

$$Q_1 = \frac{-2 \cdot r}{a} \cdot Q ; \quad Q_2 = \frac{r}{a} \cdot \left(\frac{2 \cdot r}{a} - 1 \right) \cdot Q ; \quad Q_3 = \left(\frac{r}{a} \right)^2 \cdot \left(3 - \frac{2 \cdot r}{a} \right) \cdot Q$$

$$Q_1 = -0,22 \text{ pC} ; \quad Q_2 = -0,11 \text{ pC} ; \quad Q_3 = 0,33 \cdot 10^{-15} \text{ C}$$

2°.- Si se unen las esferas 2 y 3 por medio de un hilo conductor muy fino, ¿Cuál será el potencial de la esfera 1?

Si se unen las esferas 2 y 3 \implies ambas tendrán el mismo potencial.

$$V_2 = V_3$$

$$V_2 = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \left(\frac{Q_1}{a} + \frac{Q'_2}{r} + \frac{Q'_3}{a} \right)$$

$$V_3 = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \left(\frac{Q_1}{a} + \frac{Q'_2}{a} + \frac{Q'_3}{r} \right)$$

$$Q'_2 = Q'_3 = \frac{r}{2 \cdot a^3} \cdot (5 \cdot r \cdot a - a^2 - 2 \cdot r^2) \cdot Q$$

Por tanto el potencial 1 será:

$$\left. \begin{aligned} V_1 &= \frac{Q_1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot r} + \frac{Q'_2}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot a} + \frac{Q'_3}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot a} \\ Q_1 &= \frac{-2 \cdot r}{a} \cdot Q \\ Q'_2 = Q'_3 &= \frac{r}{2 \cdot a^3} \cdot (5 \cdot r \cdot a - a^2 - 2 \cdot r^2) \cdot Q \end{aligned} \right\}$$

Resultando finalmente

$$V_1 = \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot a} \cdot \left(\frac{r \cdot (5 \cdot r \cdot a - a^2 - 2 \cdot r^2)}{a^3} - 2 \right) = -20 \text{ mV}$$

PROBLEMA 3.3

Con los datos del problema propuesto 3.2, si se unen las tres esferas por medio de un hilo conductor muy fino, ¿Cuál será el potencial en el centro del triángulo?

SOLUCIÓN

Al unirse las tres esferas,

$$\left. \begin{aligned} V_1 &= \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \left(\frac{Q'_1}{r} + \frac{Q''_2}{a} + \frac{Q''_3}{a} \right) \\ V_2 &= \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \left(\frac{Q'_1}{a} + \frac{Q''_2}{r} + \frac{Q''_3}{a} \right) \\ V_3 &= \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \left(\frac{Q'_1}{a} + \frac{Q''_2}{a} + \frac{Q''_3}{r} \right) \end{aligned} \right\} V_1 = V_2 = V_3$$

El valor de las cargas es:

$$Q'_1 = Q'_2 = Q'_3 = \left[\frac{r}{a^3} \cdot (5 \cdot r \cdot a - a^2 - 2 \cdot r^2) - \frac{2 \cdot r}{a} \right] \cdot \frac{Q}{3}$$

El potencial en el punto P será:

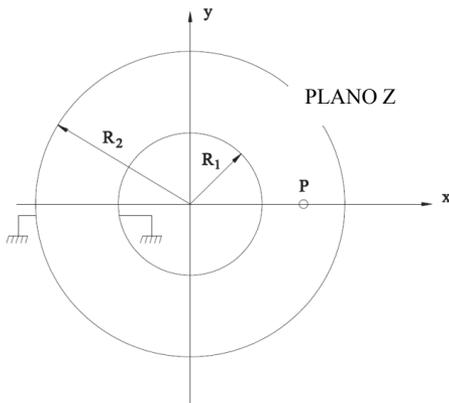
$$V(P) = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \left[\frac{Q'_1}{a/\sqrt{3}} + \frac{Q''_2}{a/\sqrt{3}} + \frac{Q''_3}{a/\sqrt{3}} \right]$$

Sustituyendo en esta expresión los valores de Q'_1 , Q''_2 y Q''_3 .

$$V(P) = \frac{\sqrt{3} \cdot Q \cdot r}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot a^4} \cdot (5 \cdot r \cdot a - 3 \cdot a^2 - 2 \cdot r^2) = -0,51 \mu\text{V}$$

PROBLEMA 3.4

Sea el sistema electrostático formado por dos cilindros indefinidos concéntricos, de radios $R_1 = 10 \text{ m}$; $R_2 = 100 \text{ m}$, conectados ambos a potencial de tierra y la esfera conductora de radio $R = 1 \text{ m}$, cargada con una carga $q_0 = 0,11 \text{ nC}$ que puede considerarse prácticamente puntual respecto a las dimensiones de los cilindros ($R \ll |R_2 - R_1|$) y situada a una distancia del centro de aquellos $r = \sqrt{R_1 \cdot R_2}$. Averiguar el potencial de la esfera.



SOLUCIÓN

Para resolverlo utilizamos la transformación conforme.

$$W = \ln z = \ln r + j \cdot \varphi = u + j \cdot v$$

S. equip. $R_1 = \text{cte}$; $u_1 = \ln R_1 = \text{cte}$

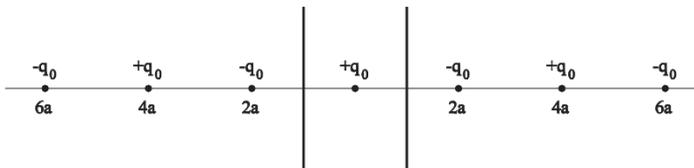
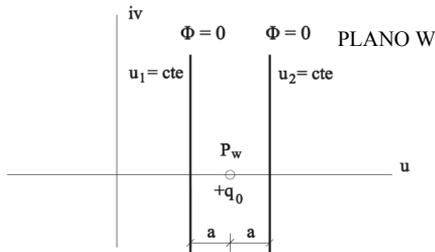
S. equip. $R_2 = \text{cte}$; $u_2 = \ln R_2 = \text{cte}$

Para el punto P tenemos:

$$u_w = \ln r = \ln \sqrt{R_1 \cdot R_2} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot (\ln R_1 + \ln R_2) = \frac{1}{2} \cdot (u_1 + u_2)$$

$$v_w = \varphi = 0$$



Por imágenes siendo

$$a = \frac{u_2 - u_1}{2}$$

El potencial en el punto P viene dado por:

$$\begin{aligned}
 \Phi_{PW} &= \Phi_{placas} + \Phi_{esfera} = \\
 &= 2 \cdot \frac{q_0}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \left(\frac{-1}{2 \cdot a} + \frac{1}{4 \cdot a} + \frac{-1}{6 \cdot a} + \frac{1}{8 \cdot a} + \dots \right) + \frac{q_0}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{1}{R} = \\
 &= -\frac{q_0}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{1}{a} \cdot \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots \right) + \frac{q_0}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{1}{R} = \\
 &= \frac{q_0}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \left(\frac{1}{R} - \frac{\ln 2}{a} \right) = \frac{q_0}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \left(\frac{1}{R} - \frac{\ln 2}{\frac{u_2 - u_1}{a}} \right)
 \end{aligned}$$

Sustituyendo los valores de u_1 y u_2 , se tiene:

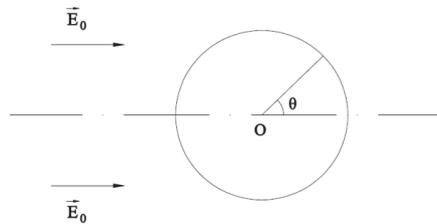
$$\Phi_P = \frac{q_0}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \left[\frac{1}{R} - \frac{\ln 2}{\frac{1}{2} \cdot (\ln R_2 - \ln R_1)} \right]$$

Poniendo el denominador como sigue:

$$\Phi_P = \frac{q_0}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \left[\frac{1}{R} - \frac{\ln 2}{\ln \sqrt{\frac{R_2}{R_1}}} \right] = 395,46 \text{ V}$$

PROBLEMA 3.5

Si una esfera conductora de radio a , descargada y aislada, se coloca en un campo uniforme $\vec{E} = 100 \hat{x} \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$. Una vez alcanzado el equilibrio se produce en la misma una distribución superficial de carga $\sigma = 88,42 \cos \theta \text{ pC} \cdot \text{m}^{-2}$, siendo θ el ángulo formado entre el eje X y un radio de la esfera. Si se escinde la esfera en dos hemisferios mediante un corte normal al campo, determinar la fuerza electrostática que actúa sobre los mismos.



SOLUCIÓN

La fuerza que actúa sobre un dS será:

$$d\vec{F} = p \cdot dS \cdot \vec{u}_r$$

siendo p la presión electrostática.

Por la simetría existente consideraremos únicamente las componentes horizontales:

$$F = \iint_S p \cdot dS \cdot \cos \theta = \iint_S \frac{\sigma^2}{2 \cdot \epsilon_0} \cdot dS \cdot \cos \theta = \iint_S \frac{\sigma^2}{2 \cdot \epsilon_0} \cdot a^2 \cdot \sin \theta \cdot \cos \theta \cdot d\phi \cdot d\theta$$

siendo S la superficie de cada hemisferio.

Operando, sustituyendo σ por su valor

$$F = 9 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot E_0^2 \cdot a^2 \cdot \int_0^{\pi/2} \cos^3 \theta \cdot \sin \theta \cdot d\theta = 9 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot E_0^2 \cdot a^2 \cdot \left[-\frac{1}{4} \cdot \cos^4 \theta \right]_0^{\pi/2}$$

$$F = \frac{9}{4} \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot E_0^2 \cdot a^2 = 62,6 \text{ } \mu\text{N}$$

PROBLEMA 3.6

Se considera un sistema de n conductores y dos estados de equilibrio con potenciales V_1 y V_2 . Si se superponen ambos tal que $V = V_1 + V_2$, indicar si las fuerzas que actúan sobre las superficies de los conductores cumplen:

$$\vec{F}(P) = \vec{F}_1(P) + \vec{F}_2(P)$$

Para cualquier punto P genérico sobre la superficie de cualquier conductor.

SOLUCIÓN

En la superposición de los dos estados de equilibrio, el potencial

$$V = V_1 + V_2$$

Considerando el gradiente en la expresión anterior

$$\vec{\nabla}V = \vec{\nabla}V_1 + \vec{\nabla}V_2$$

Por lo tanto, para los campos electrostáticos, se cumple en todo punto,

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$$

En un punto P de un conductor

$$\frac{\sigma}{\epsilon_0} \cdot \vec{n} = \frac{\sigma_1}{\epsilon_0} \cdot \vec{n} + \frac{\sigma_2}{\epsilon_0} \cdot \vec{n} \quad \Rightarrow \quad \sigma = \sigma_1 + \sigma_2$$

siendo σ , σ_1 y σ_2 las densidades de carga en el estado suma y en los estados de equilibrio 1 y 2.

Si se considera un dS en la superficie de un conductor, situado en el punto P , la fuerza que actuará en cada estado

$$\vec{F}_1 = \vec{E}_1 \cdot \sigma_1 \cdot dS$$

$$\vec{F}_2 = \vec{E}_2 \cdot \sigma_2 \cdot dS$$

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{E}_1 \cdot \sigma_1 \cdot dS + \vec{E}_2 \cdot \sigma_2 \cdot dS$$

Siendo la fuerza correspondiente a la superposición de estados

$$\vec{F} = \vec{E} \cdot \sigma \cdot dS = (\vec{E}_1 + \vec{E}_2) \cdot (\sigma_1 + \sigma_2) \cdot dS$$

En consecuencia,

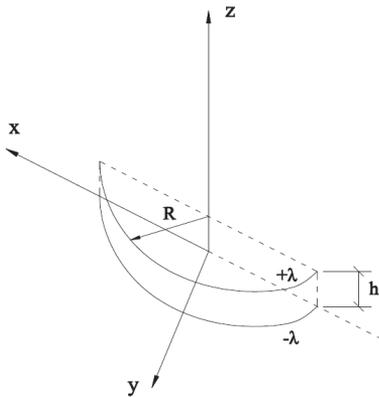
$$\vec{F} \neq \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$

PROBLEMA 3.7

Dos semianillos de radio $R = 1 \text{ m}$, situados en dos planos paralelos que distan $h = 10 \text{ cm}$ y con el eje OZ perpendicular a los citados planos (véase figura).

Si los semianillos están cargados respectivamente con densidades lineales de carga positiva y negativa de $2 \text{ nC}\cdot\text{m}^{-1}$ y se asocia a una distribución de dipolos, determinar el campo electrostático en un punto de coordenadas $(0,0,1) \text{ m}$.

SOLUCIÓN

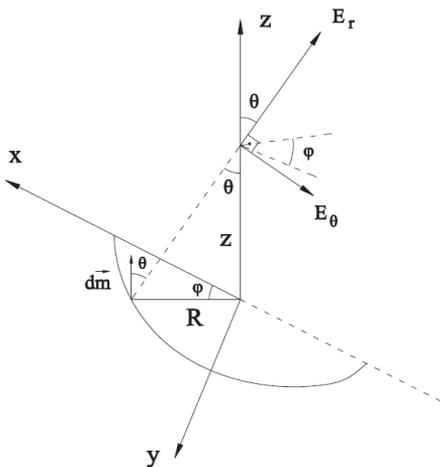


Campo creado por el dipolo elemental $d\vec{m} = \lambda \cdot (R \cdot d\varphi) \cdot h \cdot \vec{k}$

Tiene las componentes en coordenadas esféricas:

$$\left. \begin{aligned} dE_r &= \frac{2 \cdot dm}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{\cos \theta}{r^3} \\ dE_\theta &= \frac{dm}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{\sin \theta}{r^3} \end{aligned} \right\}$$

$E_x = 0$ por simetría.



$$dE_z = E_r \cdot \cos \theta - E_\theta \cdot \sin \theta$$

$$dE_y = -(E_r \cdot \sin \theta + E_\theta \cdot \cos \theta) \cdot \sin \varphi$$

Viendo la figura obtenemos las relaciones:

$$\cos \theta = \frac{z}{r} ; \quad \sin \theta = \frac{R}{r}$$

y como $d\vec{m} = \lambda \cdot (R \cdot d\varphi) \cdot h \cdot \vec{k}$

Que sustituyendo en las expresiones anteriores, resulta

$$E_z = \int \frac{2 \cdot dm}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{\cos^2 \theta}{r^3} - \frac{dm}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{\sin^2 \theta}{r^3} = \frac{\lambda \cdot h \cdot R}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{2 \cdot z^2 - R^2}{(R^2 + z^2)^{5/2}} \cdot \int_0^\pi d\varphi$$

$$E_z = \frac{\lambda \cdot h \cdot R}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{(2 \cdot z^2 - R^2) \cdot \pi}{(R^2 + z^2)^{5/2}}$$

$$E_y = - \int \left(\frac{2 \cdot dm}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{\cos \theta \cdot \sin \theta}{r^3} + \frac{dm}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{\sin \theta \cdot \cos \theta}{r^3} \right) \cdot \sin \theta =$$

$$= \frac{\lambda \cdot h \cdot R}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{3 \cdot R \cdot z}{(R^2 + z^2)^{5/2}} \cdot \int_0^\pi -\sin \varphi \cdot d\varphi$$

$$E_y = - \frac{\lambda \cdot h \cdot R}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{6 \cdot R \cdot z}{(R^2 + z^2)^{5/2}}$$

Resultando finalmente un campo \vec{E} :

$$\vec{E} = \frac{\lambda \cdot h \cdot R}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot (R^2 + z^2)^{-5/2} \cdot [-6 \cdot R \cdot z \cdot \vec{j} + \pi \cdot (2 \cdot z^2 - R) \cdot \vec{k}]$$

PROBLEMA 3.8

Un conductor esférico de radio $R = 9 \text{ cm}$ está conectado a un generador de f.e.m. $E = 1 \text{ V}$. Se pide: 1°. ¿A qué distancia del centro del conductor esférico debemos situar una carga puntual $q = 20 \text{ pC}$ para que una vez alcanzado el equilibrio, si entonces se desconecta el generador, el conductor esférico quede descargado? 2°. ¿Cuál será entonces el potencial del conductor?.

SOLUCIÓN

1°.- Distancia de la carga puntual al conductor esférico

Al desconectar el generador, para que el conductor quede descargado se ha de cumplir que:

$$q_t = q_0 - q' = 0$$

por tanto

$$q' = q_0$$

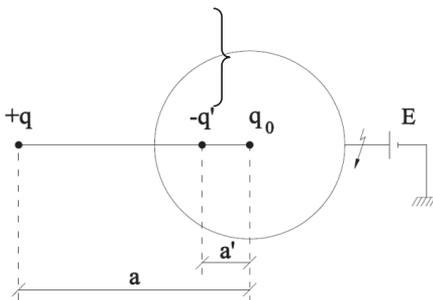
Conociendo la expresión de la capacidad de un conductor esférico:

$$q' = q_0 = 4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot R \cdot V_0 = \frac{1}{9 \cdot 10^9} \cdot 9 \cdot 10^{-2} \cdot 1 = 10^{-11} \text{ C}$$

Mediante aplicación de la teoría de imágenes se tiene:

$$\frac{q}{q'} = \frac{a}{R} = \frac{R}{a'} \Rightarrow a = \frac{q}{q'} \cdot R = \frac{2 \cdot 10^{-11}}{10^{-11}} = 18 \text{ cm}$$

2°.- Potencial del conductor esférico



Confieren al conductor potencial cero

$$q = 2 \cdot 10^{-11} \text{ C}$$

$$-q = -10^{-11} \text{ C}$$

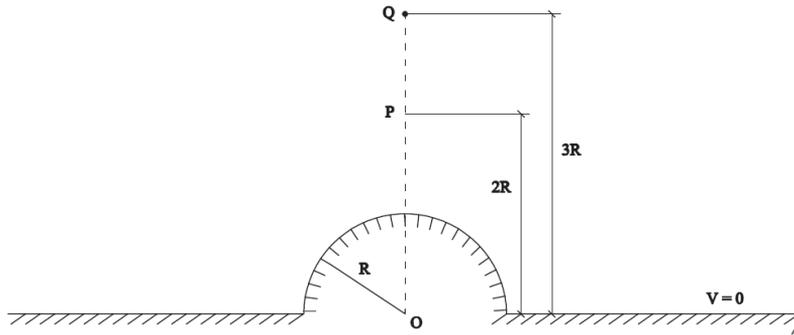
$$q_0 = 10^{-11} \text{ C} \Rightarrow$$

Confieren al conductor potencial $V=1$

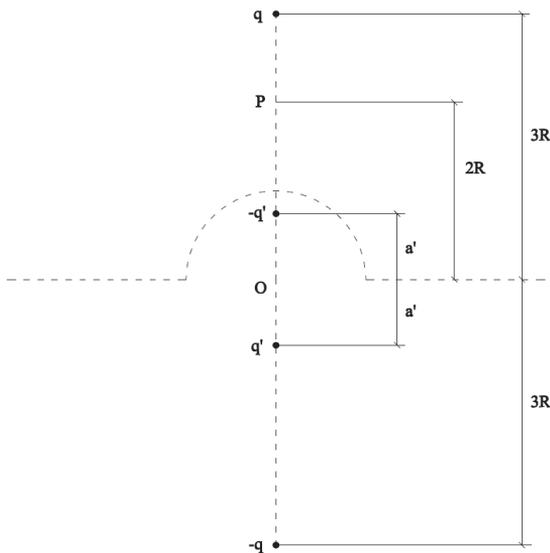
$$V_{c. \text{ esf.}} = 1 \text{ Volt.}$$

PROBLEMA 3.9

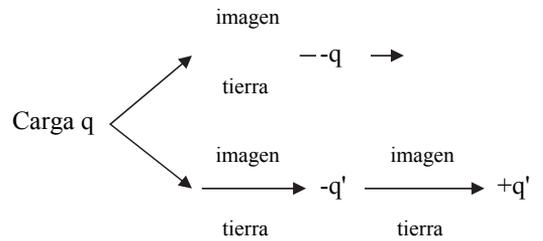
Sea el sistema representado en la figura, compuesto por un conductor a potencial nulo y una carga puntual $q = 2,77 \text{ nC}$. Calcular el potencial en el punto P. Datos: $R = 0,5 \text{ m}$; $\overline{OP} = 1 \text{ m}$



SOLUCIÓN



1.- Aplicamos método de imágenes.



De acuerdo con la teoría de imágenes podemos expresar:

$$\frac{q}{q'} = \frac{a}{R} = \frac{R}{a'}$$

$$\left. \begin{aligned} q' &= q \cdot \frac{R}{a} = q \cdot \frac{R}{3 \cdot R} = \frac{q}{3} \\ a' &= \frac{R^2}{a} = \frac{R^2}{3 \cdot R} = \frac{R}{3} \end{aligned} \right\} [1]$$

2.- Cálculo del potencial en P:

$$\text{Carga } q \text{ + conductor a } V = 0 \Rightarrow \begin{cases} \text{Conjunto de cargas} \\ q + (-q - q' + q') \end{cases}$$

Conociendo la expresión del potencial que crea un conjunto de cargas, se tiene:

$$V(P) = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \left(\frac{q}{3 \cdot R - 2 \cdot R} + \frac{-q'}{2 \cdot R - a'} + \frac{q'}{a' + 2 \cdot R} + \frac{-q}{3 \cdot R + 2 \cdot R} \right)$$

Sustituyendo los valores de [1] en la expresión anterior, resulta:

$$V(P) = \frac{13 \cdot q}{70 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot R} = 37 \text{ V}$$

PROBLEMA 3.10

Un hilo rectilíneo indefinido con densidad lineal de carga $5 \mu\text{C}\cdot\text{m}^{-1}$, está situado a una distancia 0,5 m de un plano conductor indefinido, mantenido a potencial cero,

1º.- Carga inducida sobre el plano por unidad de longitud del hilo.

2º.- Fuerza que se ejerce entre hilo y plano por unidad de longitud del hilo.

SOLUCIÓN

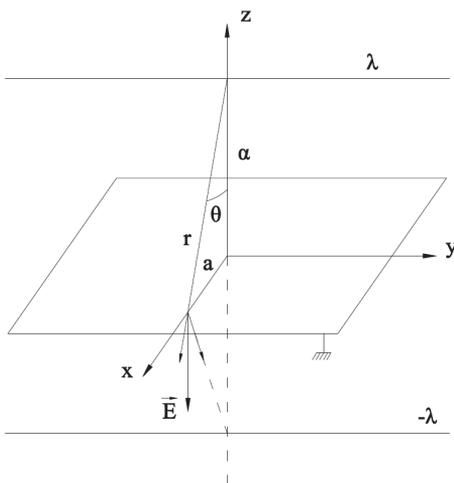
1º.- Carga inducida sobre el plano por unidad de longitud del hilo

En un punto P próximo al plano, el campo electrostático creado por el eje con $+\lambda$ junto con el campo creado por el eje imagen con $-\lambda$ nos dará el campo

$$E = 2 \cdot \frac{\lambda}{2 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot r} \cdot \cos \theta = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

luego obtenemos

$$\sigma = \frac{\lambda}{\pi \cdot r} \cdot \cos \theta$$



$$Q = \iint \sigma \cdot dS = \frac{\lambda}{\pi} \cdot \int \frac{\cos \theta}{r} \cdot dS$$

$$dS = da \cdot 1 ; r = \frac{d}{\cos \theta}$$

$$\tan \theta = \frac{a}{d} ; da = \frac{d}{\cos^2 \theta} \cdot d\theta$$

$$Q = \frac{\lambda}{\pi} \cdot \int \cos \theta \cdot \frac{d/\cos^2 \theta}{d/\cos \theta} \cdot d\theta =$$

$$= \frac{\lambda}{\pi} \cdot [\theta]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \lambda$$

Entonces, la carga inducida es:

$$Q = -\lambda = -5 \mu\text{C} \cdot \text{m}^{-1}$$

2°.- Fuerza que se ejerce entre hilo y plano por unidad de longitud del hilo

La fuerza entre los dos hilos rectilíneos indefinidos es:

$$F = \frac{\lambda}{2 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{1}{2 \cdot d} \cdot \lambda$$

fuerza que es atractiva y de valor

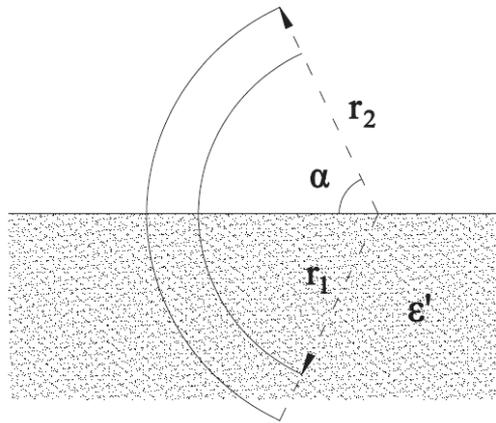
$$F = \frac{\lambda^2}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot d} = 0,45 \text{ N}$$

CAPÍTULO IV

DIELÉCTRICOS

PROBLEMA 4.1

Un condensador está formado por dos cuadrantes de cilindros coaxiales rígidamente unidos situados en el plano XOY, que pueden girar alrededor de su eje OZ, situado éste en la superficie de un líquido de permitividad relativa $\epsilon' = 1,1$ estando sumergido el cuadrante un ángulo de 45° en dicho líquido. Los radios interior y exterior son $r_1 = 10$ mm y $r_2 = 15$ mm, siendo la longitud de los cilindros $L = 1$ m. El condensador está conectado a un potencial constante de 200 V. Para mantener parte del condensador fuera del líquido se aplica un momento \vec{M}_0 en el eje. Calcular el módulo y sentido necesario para el equilibrio.



Nota.- Se desprecian los efectos de borde.

SOLUCIÓN

Si se desprecian los efectos de borde, para un condensador cilíndrico de β radianes, tenemos como valor de la capacidad:

$$C = \frac{\beta \cdot \epsilon \cdot 1}{\ln \frac{r_2}{r_1}}$$

Luego las capacidades de la parte sumergida y del aire resultan:

$$C_1 = \frac{\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \cdot \epsilon' \cdot \epsilon_0 \cdot L}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \quad (\text{zona sumergida})$$

$$C_2 = \frac{\alpha \cdot \epsilon_0 \cdot L}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \quad (\text{zona al aire})$$

Por tanto, en esa disposición la capacidad total resulta:

$$C_T = C_1 + C_2 = \frac{\epsilon_0 \cdot L}{2 \cdot \ln \frac{r_2}{r_1}} \cdot [\epsilon' \cdot \pi + (1 - \epsilon') \cdot 2 \cdot \alpha] = K \cdot [\epsilon' \cdot \pi + (1 - \epsilon') \cdot 2 \cdot \alpha]$$

Siendo,

$$K = \frac{\epsilon_0 \cdot L}{2 \cdot \ln \frac{r_2}{r_1}}$$

Estando el condensador a potencial constante, la expresión de la energía almacenada por el condensador:

$$W = \frac{1}{2} \cdot C_T \cdot V = \frac{K \cdot V^2}{2} \cdot [\epsilon' \cdot \pi + (1 - \epsilon') \cdot 2 \cdot \alpha]$$

El momento se puede expresar como la derivada de la energía en función del ángulo α , es decir:

$$M = \frac{dW}{d\alpha} = \frac{K \cdot V^2}{2} \cdot 2 \cdot (1 - \epsilon') = K \cdot V^2 \cdot (1 - \epsilon') < 0$$

Al ser $M < 0$, el par (M_0) aplicado al condensador para mantenerlo en la posición de la figura ($V=cte$) será:

$$M_0 = -M \Rightarrow M_0 = \frac{\epsilon_0 \cdot L \cdot V^2}{2 \cdot \ln \frac{r_2}{r_1}} \cdot (\epsilon' - 1) = 2,57 \cdot 10^{-7} \text{ mN}$$

Sentido negativo del eje OZ.

Observando la expresión anterior, se deduce que M_0 es independiente de α , y por tanto, el equilibrio se alcanza para cualquier ángulo α entre $0 < \alpha < \pi/2$.

PROBLEMA 4.2

Según el problema 4.1, calcular el momento (módulo y sentido) en el caso de cargar el condensador con $Q = 1 \text{ pC}$ y desconectarlo a continuación de la fuente de tensión.

Nota.- Se desprecian los efectos de borde.

SOLUCIÓN

Si se carga el condensador con una carga Q y se aísla.

La expresión de la energía almacenada por el condensador cuando se halla a carga constante es:

$$W = \frac{1}{2} \cdot \frac{Q^2}{C_T} = \frac{Q^2}{2 \cdot K} \cdot \frac{1}{[\varepsilon' \cdot \pi + (1 - \varepsilon') \cdot 2 \cdot \alpha]}$$

El momento se expresa:

$$M = -\frac{dW}{d\alpha} = -\left[\frac{-2 \cdot Q^2 \cdot (1 - \varepsilon')}{4 \cdot K^2 \cdot [\varepsilon' \cdot \pi + (1 - \varepsilon') \cdot 2 \cdot \alpha]^2} \right] \left. \vphantom{\frac{dW}{d\alpha}} \right\} M = \frac{K' \cdot (1 - \varepsilon')}{[\varepsilon' \cdot \pi + (1 - \varepsilon') \cdot 2 \cdot \alpha]^2}$$

Haciendo $K' = \frac{Q^2}{2 \cdot K^2}$

Como $M < 0$:

$$\begin{aligned} M_0 = -M &= \frac{2 \cdot Q^2 \cdot (\varepsilon' - 1)}{4 \cdot K^2 \cdot [\varepsilon' \cdot \pi + (1 - \varepsilon') \cdot 2 \cdot \alpha]^2} = \\ &= \frac{Q^2 \cdot (\varepsilon' - 1)}{2 \cdot \frac{\varepsilon_0^2 \cdot L^2}{4 \cdot \ln^2 \frac{r_2}{r_1}} \cdot [\varepsilon' \cdot \pi + (1 - \varepsilon') \cdot 2 \cdot \alpha]^2} \end{aligned}$$

Luego, el momento aplicado al condensador para mantenerlo en la posición de la figura ($Q = \text{cte}$) es:

$$M_0 = \frac{2 \cdot \ln^2 \left(\frac{r_2}{r_1} \right) \cdot Q^2 \cdot (\varepsilon' - 1)}{\varepsilon_0^2 \cdot L^2 \cdot [\varepsilon' \cdot \pi + (1 - \varepsilon') \cdot 2 \cdot \alpha]} = 4,04 \cdot 10^{-6} \text{ mN}$$

Sentido negativo del eje OZ.

PROBLEMA 4.3

Un condensador plano cuyas armaduras son sectores circulares de radio $R = 10 \text{ cm}$ y ángulo $\alpha = 45^\circ$, separados una distancia $h = 5 \text{ mm}$ y con material dieléctrico relleno todo el espacio entre las armaduras. Calcular el valor de la relación M/F , en donde M es el módulo del momento que tiende a mantener las armaduras perfectamente enfrentadas, y F es el módulo de la fuerza atractiva entre placas del condensador. Resolver en los siguientes casos: 1º.- Tensión constante entre armaduras. 2º.- Carga constante del condensador.

SOLUCIÓN

La capacidad de un condensador plano se expresa como:

$$C = \epsilon \cdot \frac{S}{h} \quad \text{donde} \quad \begin{array}{l} \epsilon = \text{cte. dieléctrica.} \\ S = \text{superficie de la placa.} \\ h = \text{distancia entre placas.} \end{array}$$

La expresión de la superficie de un sector circular es:

$$S = \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot R^2 \quad \text{donde} \quad \begin{array}{l} \alpha = \text{ángulo del sector.} \\ R = \text{radio del sector.} \end{array}$$

Sustituyendo el valor de S en C , resulta:

$$C = \epsilon \cdot \frac{\alpha \cdot R^2}{2 \cdot h} \Rightarrow \text{Capacidad del sector circular.}$$

Cálculo de M/F .

1.- A tensión constante.

La energía almacenada en el condensador (a $V = \text{cte}$) es:

$$W_{alm} = \frac{1}{2} \cdot C \cdot V^2 = \epsilon \cdot \frac{\alpha \cdot R^2 \cdot V^2}{4 \cdot h}$$

Los valores de F y M los obtendremos derivando la expresión de la energía respecto de h y α , respectivamente.

$$\left. \begin{array}{l} F = \frac{dW_{alm}}{dh} = -\epsilon \cdot \frac{\alpha \cdot R^2 \cdot V^2}{4 \cdot h^2} \\ M = \frac{dW_{alm}}{d\alpha} = \epsilon \cdot \frac{R^2 \cdot V^2}{4 \cdot h} \end{array} \right\} \longrightarrow \frac{M}{F} = \frac{\epsilon \cdot \frac{R^2 \cdot V^2}{4 \cdot h}}{-\epsilon \cdot \frac{\alpha \cdot R^2 \cdot V^2}{4 \cdot h^2}}$$

Resultando finalmente un valor de M/F de:

$$\frac{M}{F} = -\frac{h}{\alpha} = -6,37 \text{ mm} \quad \text{"Independiente de } \varepsilon \text{"}$$

2.- A carga constante.

La energía almacenada en el condensador (a $Q = \text{cte}$) es:

$$W_{\text{alm}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{Q^2}{C} = \frac{Q^2 \cdot h}{\varepsilon \cdot \alpha \cdot R^2}$$

Los valores de F y M los obtendremos derivando la expresión de la energía respecto de h y α , respectivamente.

$$\left. \begin{aligned} F &= -\frac{dW_{\text{alm}}}{dh} = -\frac{Q^2}{\varepsilon \cdot \alpha \cdot R^2} \\ M &= -\frac{dW_{\text{alm}}}{d\alpha} = \frac{Q^2 \cdot h}{\varepsilon \cdot \alpha^2 \cdot R^2} \end{aligned} \right\} \longrightarrow \frac{M}{F} = \frac{\frac{Q^2 \cdot h}{\varepsilon \cdot \alpha^2 \cdot R^2}}{-\frac{Q^2}{\varepsilon \cdot \alpha \cdot R^2}}$$

Resultando finalmente un valor de M/F de:

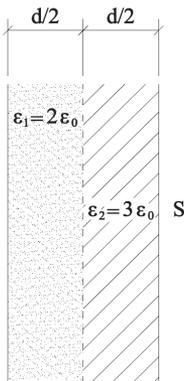
$$\frac{M}{F} = -\frac{h}{\alpha} = -6,37 \text{ mm} \quad \text{"Independiente de } \varepsilon \text{"}$$

PROBLEMA 4.4

Se tiene un condensador plano aislado con carga $Q = 1 \mu\text{C}$ y superficie de las armaduras 10^{-12} m^2 . Si el espacio entre las placas se rellena con dos dieléctricos de igual espesor y permitividades relativas 2 y 3 respectivamente. ¿Qué variación experimentará la fuerza que actúa entre dichas placas?

SOLUCIÓN

La capacidad del condensador inicialmente, suponiendo el vacío entre las placas, vendrá dada por:



$$M = \frac{\epsilon_0 \cdot S}{d}$$

La energía electrostática inicial

$$W_i = \frac{1}{2} \cdot \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} \cdot \frac{Q^2}{\epsilon_0 \cdot S} \cdot x \quad ; \quad dW_i = \frac{1}{2} \cdot \frac{Q^2}{\epsilon_0 \cdot S} \cdot dx$$

y la energía electrostática final

$$W_f = \frac{1}{2} \cdot \frac{Q^2}{C_T}$$

Siendo C_T la capacidad del condensador equivalente, cumpliéndose

$$\frac{1}{C_T} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

$$C_T = \frac{x/2}{\epsilon_1 \cdot S} + \frac{x/2}{\epsilon_2 \cdot S} = \frac{x}{4 \cdot \epsilon_0 \cdot S} + \frac{x}{6 \cdot \epsilon_0 \cdot S}$$

$$C_T = \frac{12 \cdot \epsilon_0 \cdot S}{5 \cdot x}$$

$$W_f = \frac{1}{2} \cdot Q^2 \cdot \frac{5 \cdot x}{12 \cdot \epsilon_0 \cdot S} \quad ; \quad dW_f = \frac{5 \cdot Q^2}{24 \cdot \epsilon_0 \cdot S} \cdot dx$$

Se cumplirá:

$$dW + F \cdot dx = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} \cdot \frac{Q^2}{\epsilon_0 \cdot S} \cdot dx + F_i \cdot dx = 0 \\ \frac{5 \cdot Q^2}{24 \cdot \epsilon_0 \cdot S} \cdot dx + F_f \cdot dx = 0 \end{array} \right.$$

PROBLEMA 4.5

Se tiene una distribución uniforme de carga en volumen, esférica de radio $a = 25$ cm, situada en el vacío, cuya carga es de $Q = 1 \mu\text{C}$. Determinar la variación de energía si se rellena el espacio entre dos superficies equipotenciales exteriores a la esfera de 20 V y 10 V, con un dieléctrico de permitividad relativa 2.

SOLUCIÓN

La energía interna total de la distribución de cargas en volumen es:

$$W = \frac{1}{2} \cdot \int_{e-t} \vec{E} \cdot \vec{D} \cdot d\tau \quad \text{donde e.t es el espacio total}$$

Podemos poner W como:

$$W = \frac{1}{2} \cdot \epsilon_0 \int_{e-t} E^2 \cdot d\tau = W_{\text{int}} + W_{\text{ext}} \quad [1]$$

Donde $\left\{ \begin{array}{l} W_{\text{int}} = \text{Energía en interior de la esfera de radio } a \\ W_{\text{ext}} = \text{Energía en exterior de la esfera de radio } a \end{array} \right.$

La carga total de la esfera de radio a es,

$$Q = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot a^3 \cdot \rho \quad \text{donde}$$

$$\rho = \frac{3 \cdot Q}{4 \cdot \pi \cdot a^3} \quad \text{densidad de carga volúmica}$$

Si aplicamos el teorema de Gauss a unas esferas de radios $r < a$ y $r > a$, el valor del campo electrostático será, respectivamente:

$$E_{\text{int}} = \frac{\rho \cdot r}{3 \cdot \epsilon_0} = \frac{Q \cdot r}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot a^3} \quad (r < a)$$

$$E_{\text{ext}} = \frac{\rho \cdot r}{3 \cdot \epsilon_0} = \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot r^2} \quad (r > a)$$

Sustituyendo estos valores en la expresión [1] se tiene:

$$\left. \begin{array}{l} W = \frac{1}{2} \cdot \epsilon_0 \int_{e-t} E^2 \cdot d\tau \\ d\tau = 4 \cdot \pi \cdot r^2 \cdot dr \end{array} \right\} W = \frac{Q^2}{8 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot a^6} \cdot \int_0^a r^4 \cdot dr + \frac{Q^2}{8 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \int_a^\infty \frac{dr}{r^2}$$

Entonces,

$$W = \frac{3 \cdot Q^2}{20 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot a}$$

Variación de la energía.

$$W_0 = \frac{Q^2}{8 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} = \frac{Q^2}{8 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot r_1} - \frac{Q^2}{8 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot r_2} =$$

$$= \frac{Q}{2} \cdot \left(\frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot r_1} - \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot r_2} \right)$$

Como

$$\frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot r_1} - \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot r_2} = V_1 - V_2$$

$$W_0 = \frac{Q}{2} \cdot (V_1 - V_2)$$

$$W = \frac{1}{2} \cdot \epsilon_0 \cdot \int E^2 \cdot d\tau = \frac{\epsilon_0}{2} \cdot \int_{r_1}^{r_2} \frac{Q^2}{16 \cdot \pi^2 \cdot \epsilon^2 \cdot r^4} \cdot 4 \cdot \pi \cdot r^2 \cdot dr =$$

$$= \frac{\epsilon_0}{2} \cdot \frac{Q}{2} \cdot (V_1 - V_2)$$

Por tanto, la variación de energía interna resulta:

$$\Delta W = W - W_0 = -\frac{Q}{2} \cdot (V_1 - V_2) \cdot \left(1 - \frac{\epsilon_0}{\epsilon}\right) = 2,5 \text{ } \mu\text{J}$$

Siendo F = fuerza que actúa entre las placas.

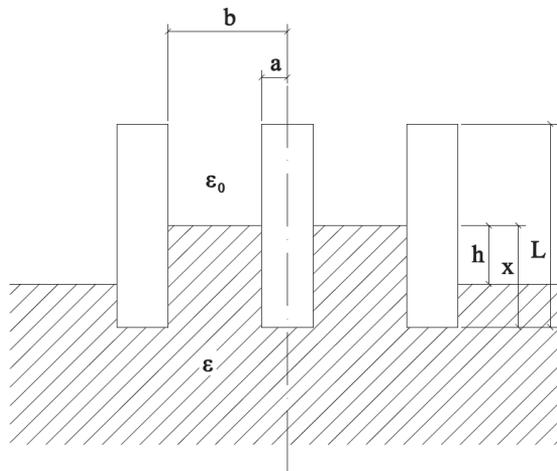
$$\left. \begin{aligned} F_i &= -\frac{1}{2} \cdot \frac{Q^2}{\epsilon_0 \cdot s} \\ F_f &= -\frac{5 \cdot Q^2}{24 \cdot \epsilon_0 \cdot s} \end{aligned} \right\} \text{ Indicando los signos "menos" (-), que la fuerza entre} \\ \text{placas es atractiva.}$$

Por tanto la variación que experimenta la fuerza que actúa entre las placas es:

$$F_i - F_f = \frac{-7 \cdot Q^2}{24 \cdot \epsilon_0 \cdot s} = 3,29 \text{ N}$$

PROBLEMA 4.6

Un condensador cilíndrico de 10 cm de longitud se conecta a un generador de 10 V (radio exterior 4 cm y radio interior 1 cm). Luego se desconecta del generador y se introduce 5 cm en un líquido dieléctrico de permitividad relativa de 1,5 y densidad de $2 \text{ g}\cdot\text{cm}^3$ según se indica en la figura. Se pide: 1°.- Carga del condensador. 2°.- Diferencia de potencial entre sus armaduras. 3°.- Fuerza que ejerce el condensador sobre el dieléctrico. 4°.- Densidades de carga en las armaduras.

**SOLUCIÓN****1°.- Carga del condensador**

La carga inicial del condensador es:

$$Q_0 = \frac{2 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot L \cdot V_0}{\ln \frac{b}{a}} = 40 \text{ pC}$$

Siendo la capacidad equivalente del condensador:

$$C = \frac{2 \cdot \pi \cdot [\epsilon_0 \cdot (L - x) + \epsilon \cdot x]}{\ln \frac{b}{a}}$$

2°.- Diferencia de potencial

$$V = \frac{Q_0}{C} = \frac{L \cdot V_0}{L - x + \epsilon \cdot x} = 8 \text{ V}$$

3°.- Fuerza que ejerce el condensador sobre el dieléctrico

La energía almacenada por el condensador (a $Q = \text{cte}$) es:

$$W = \frac{1}{2} \cdot \frac{Q_0^2}{C} = \frac{Q_0^2 \cdot \ln \frac{b}{a}}{4 \cdot \pi \cdot [\epsilon_0 \cdot L + x \cdot (\epsilon - \epsilon_0)]}$$

El condensador ejerce una fuerza sobre el dieléctrico F :

$$F = \frac{dW}{dx} = - \frac{Q_0^2 \cdot \ln \frac{b}{a} \cdot (\epsilon - \epsilon_0)}{4 \cdot \pi \cdot [\epsilon_0 \cdot L + x \cdot (\epsilon - \epsilon_0)]^2} = 6 \mu\text{N}$$

Esta fuerza tiende a introducir al dieléctrico dentro del condensador, la cual se compensará con el peso del volumen de dieléctrico que se ha introducido.

4°.- Densidades de carga.

I) Armadura interior (radio a).

A) Zona de dieléctrico.

La capacidad del condensador cilíndrico, en la zona bañada por el dieléctrico, es:

$$C_1 = \frac{Q_1}{V}$$

Despejando Q_1 resulta:

$$Q_1 = C_1 \cdot V = \frac{2 \cdot \pi \cdot \epsilon \cdot x}{\ln \frac{b}{a}} \cdot \frac{L \cdot V_0}{L - x + \epsilon_r \cdot x}$$

La densidad superficial de carga es:

$$\sigma_1 = \frac{Q_1}{S_1} = \frac{Q_1}{2 \cdot \pi \cdot a \cdot x} = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot a \cdot x} \cdot \frac{2 \cdot \pi \cdot \epsilon \cdot x}{\ln \frac{b}{a}} \cdot \frac{L \cdot V_0}{L - x + \epsilon_r \cdot x}$$

$$\sigma_1 = \frac{\epsilon \cdot L \cdot V_0}{a \cdot \ln \frac{b}{a} \cdot (L - x + \epsilon_r \cdot x)}$$

B) Zona de aire.

La capacidad del condensador cilíndrico en la zona al aire (vacío) es:

$$C = \frac{Q_2}{V}$$

Despejando Q_2 resulta:

$$Q_2 = C_2 \cdot V = \frac{2 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot (L - x)}{\ln \frac{b}{a}} \cdot \frac{L \cdot V_0}{L - x + \epsilon_r \cdot x}$$

La densidad superficial de carga es:

$$\sigma_2 = \frac{Q_2}{S_2} = \frac{Q_2}{2 \cdot \pi \cdot a \cdot (L - x)} = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot a \cdot (L - x)} \cdot \frac{2 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot (L - x)}{\ln \frac{b}{a}} \cdot \frac{L \cdot V_0}{L - x + \epsilon_r \cdot x}$$

$$\sigma_1 = \frac{\epsilon_0 \cdot L \cdot V_0}{a \cdot \ln \frac{b}{a} \cdot (L - x + \epsilon_r \cdot x)} =$$

II) Armadura exterior (radio b).

En la armadura exterior, las densidades de carga serán iguales, pero de signo opuesto a las de la armadura interior y cambiando b en el denominador en lugar de a, es decir:

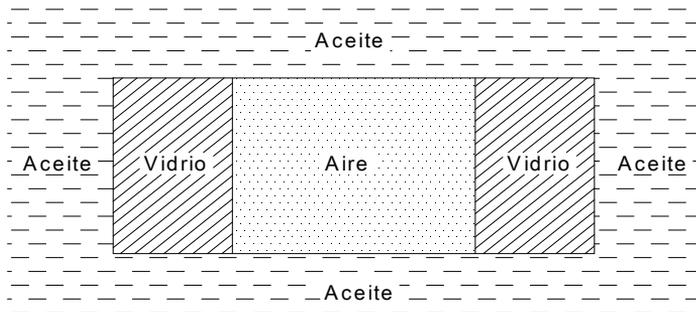
$$\sigma_1 = - \frac{\epsilon \cdot L \cdot V_0}{b \cdot \ln \frac{b}{a} \cdot (L - x + \epsilon_r \cdot x)} = 1,91 \text{ nC} \cdot \text{m}^{-2} \quad \text{zona de dieléctrico.}$$

$$\sigma_1 = - \frac{\epsilon_0 \cdot L \cdot V_0}{b \cdot \ln \frac{b}{a} \cdot (L - x + \epsilon_r \cdot x)} = 1,27 \text{ nC} \cdot \text{m}^{-2} \quad \text{zona de aire (vacío).}$$

PROBLEMA 4.7

Dos láminas paralelas de vidrio situadas verticalmente están separadas por aire y el conjunto, convenientemente sellado, está inmerso en aceite, como se muestra en la figura, en una región del espacio donde existe un campo electrostático. El módulo de este campo en el aceite es $E_{AC} = 2 \text{ kV m}^{-1}$ y su dirección forma un ángulo de incidencia $\alpha = 60^\circ$ con la normal al plano de las láminas de vidrio.

Se sabe además que la permitividad dieléctrica relativa del vidrio es $\epsilon'_V = 6$ y la del aceite es $\epsilon'_{AC} = 2,5$. Se pide determinar:



- 1°.- Módulo del campo electrostático en el vidrio E_V .
- 2°.- Ángulo de refracción β que forman las líneas de campo al pasar del aceite al vidrio.
- 3°.- Módulo del campo electrostático en el aire.
- 4°.- Ángulo de refracción γ que forman las líneas de campo al pasar del vidrio al aire.

SOLUCIÓN

1°.- Módulo del campo electrostático en el vidrio E_V

En el sistema aceite-vidrio, al atravesar la superficie límite de separación entre el aceite y el vidrio, se cumple para el campo electrostático:

$$\text{Componentes normales, varían: } \epsilon'_{AC} E_{AC_N} = \epsilon'_V E_{V_N} \quad [1]$$

$$\text{Componentes tangenciales se conservan: } E_{AC_T} = E_{V_T} \quad [2]$$

$$\text{Partiendo de componentes tangenciales: } E_{AC_T} = E_{V_T} = E_{AC} \sin 60^\circ = 2 \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} = 1,73205$$

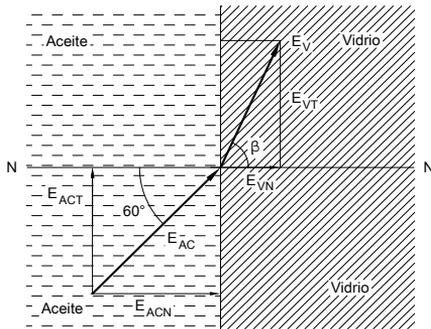
$$\text{Sustituyendo en [1]: } E_{V_N} = \frac{\epsilon'_{AC}}{\epsilon'_V} E_{AC_N} = \frac{2,5}{6} E_{AC} \cos 60^\circ = \frac{2,5}{6} \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} = 0,41666$$

Por tanto el módulo del campo electrostático en el vidrio es:

$$E_V = \sqrt{E_{V_T}^2 + E_{V_N}^2} = \sqrt{3 + \left[\frac{2,5}{6}\right]^2} = 1,78146 \text{ kV m}^{-1}$$

2°.- Ángulo de refracción que forman líneas de campo al pasar del aceite al vidrio

Siendo $\alpha = 60^\circ$ y β los ángulos de incidencia y de refracción de las líneas del campo electrostático, con la normal a la superficie límite de separación entre el aceite y el vidrio, al atravesar dicha superficie límite, los citados ángulos, cumplen lo siguiente:



$$\frac{\tan 60}{\tan \beta} = \frac{\epsilon'_{AC}}{\epsilon'_V} \Rightarrow \tan \beta = \frac{6}{2,5} \tan 60^\circ = 4,15692$$

$$\text{Luego } \beta = \arctan 4,15692 \Rightarrow \beta = 76,47^\circ$$

3°.- Módulo del campo electrostático E_A en el aire

En el sistema vidrio-aire, al atravesar la superficie límite de separación entre el vidrio y el aire, se cumple el campo electrostático lo siguiente:

$$\text{Componentes normales, varían: } \epsilon'_V E_{V_N} = \epsilon'_0 E_{A_N} \quad [3]$$

$$\text{Componentes tangenciales se conservan: } E_{V_T} = E_{A_T} \quad [4]$$

$$\text{Partiendo de componentes tangenciales: } E_{A_T} = E_{V_T} = E_V \sin 76,47^\circ = \sqrt{3} = 1,73205$$

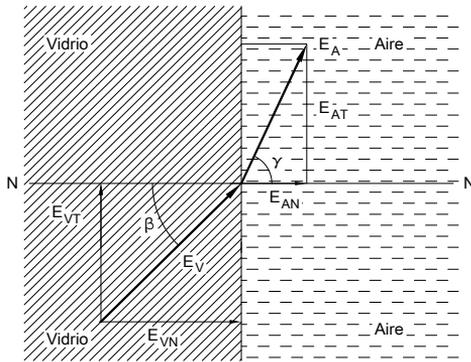
$$\text{Sustituyendo en [3]: } E_{A_N} = \frac{\epsilon'_V}{\epsilon'_A} E_{V_N} = \frac{6}{1} E_{V_N} = 6 E_V \cos 76,47^\circ = 6 \cdot \frac{2,5}{6} \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} = 2,5$$

Por tanto el módulo del campo electrostático en el aire es:

$$E_A = \sqrt{E_{A_T}^2 + E_{A_N}^2} = \sqrt{3 + 2,5^2} = 3,04138 \text{ kV m}^{-1}$$

4°.- Ángulo de refracción γ que forman líneas de campo al pasar del vidrio al aire

Siendo $\beta = 76,47^\circ$ y γ ángulos de incidencia y refracción de las líneas del campo electrostático, con la normal a la superficie límite de separación entre el vidrio y el aire, al atravesar dicha superficie límite, los citados ángulos, cumplen lo siguiente:



$$\frac{\tan \beta}{\tan \gamma} = \frac{\epsilon'_V}{1} \Rightarrow \tan \gamma = \frac{1}{6} \tan 76,47^\circ = 0,692618$$

$$\text{Luego } \gamma = \arctan 0,69218 \Rightarrow \gamma = 34,707^\circ$$

PROBLEMA 4.8

Un condensador está formado por una cubeta cúbica de lado $l = 0,5$ m, se llena de un líquido dieléctrico de permitividad relativa 1,7 hasta una altura $h_0 = 0,3$ m. En su base inferior tiene un orificio de sección $A = 10^{-6}$ m², y dos caras laterales opuestas conductoras forman las armaduras, estando el condensador cargado (carga $Q = 1$ μC) y aislado.

Si la cubeta está desprovista de cara superior, determinar para cualquier instante, abriendo el orificio, averiguar la variación de la capacidad y del potencial con el tiempo (dC/dt y dV/dt). Constante dieléctrica del líquido ϵ' . Supóngase que la sección del orificio es muy pequeña en comparación con la sección de la cubeta ($A \ll l^2$).

SOLUCIÓN

El condensador tiene dos zonas con distinta permitividad, conectadas en paralelo, por tanto la capacidad equivalente es:

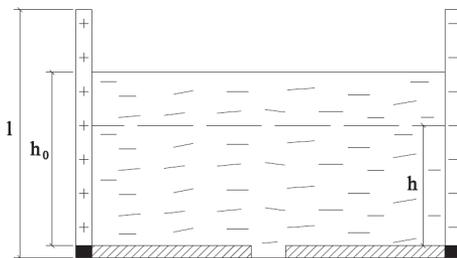
$$C = C_1 + C_2$$

En un instante t , después de abrir el orificio, el líquido dieléctrico alcanza dentro de la cubeta una altura h .

$$C_1 = \epsilon_0 \cdot \frac{S_1}{d_1} = \epsilon_0 \cdot \frac{l \cdot (l - h)}{l} = \epsilon_0 \cdot l - \epsilon_0 \cdot h$$

$$C_2 = \epsilon \cdot \frac{S_2}{d_2} = \epsilon \cdot \frac{l \cdot h}{l} = \epsilon \cdot h$$

Sustituyendo C_1 y C_2 en C , resulta:



$$C = \epsilon_0 \cdot l + (\epsilon - \epsilon_0) \cdot h$$

derivando C respecto al tiempo se tiene:

$$\frac{dC}{dt} = (\epsilon - \epsilon_0) \cdot \frac{dh}{dt}$$

El valor de dh/dt , lo calcularemos viendo el caudal que sale por la sección A:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Caudal} = A \cdot v \\ \text{Caudal} = \frac{l \cdot l \cdot (-dh)}{dt} \end{array} \right\} -l^2 \cdot \frac{dh}{dt} = A \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot h} \quad [1]$$

Sustituyendo el valor de dh/dt en la expresión de dC/dt :

$$\frac{dC}{dt} = -(\epsilon - \epsilon_0) \cdot \frac{A}{l^2} \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot h} \quad [2]$$

La expresión [1] se puede poner

$$\frac{dh}{\sqrt{2 \cdot g \cdot h}} = -\frac{A}{l^2} \cdot dt \quad \xRightarrow{\text{integrando}} \quad \frac{1}{\sqrt{2 \cdot g}} \cdot 2 \cdot \sqrt{h} = -\frac{A}{l^2} \cdot t + K$$

La constante K la calcularemos con la condición de contorno de que cuando $t = 0$, la altura $h = h_0$.

$$\left. \begin{array}{l} \frac{1}{\sqrt{2 \cdot g}} \cdot 2 \cdot \sqrt{h} = -\frac{A}{l^2} \cdot t + K \\ \text{para } t = 0, h = h_0 \end{array} \right\} \rightarrow \sqrt{\frac{2 \cdot h_0}{g}} = k$$

$\sqrt{2 \cdot g \cdot h} = \sqrt{2 \cdot g \cdot h_0} - \frac{A}{l^2} \cdot g \cdot t$ que sustituido en [2] resulta:

$$\frac{dC}{dt} = (\varepsilon_0 - \varepsilon) \cdot \frac{A}{l^2} \cdot \left(\sqrt{2 \cdot g \cdot h_0} - \frac{A}{l^2} \cdot g \cdot t \right)$$

Al cargar el condensador y aislarlo, la carga permanece.

$$Q = C \cdot V = \text{cte} \quad \Rightarrow \quad dQ = 0 = C \cdot dV + V \cdot dC$$

$$C \cdot \frac{dV}{dt} + V \cdot \frac{dC}{dt} = 0$$

Despejando de esta última expresión dV/dt , se tiene:

$$\frac{dV}{dt} = -\frac{V}{C} \cdot \frac{dC}{dt} = -\frac{Q}{C^2} \cdot \frac{dC}{dt}$$

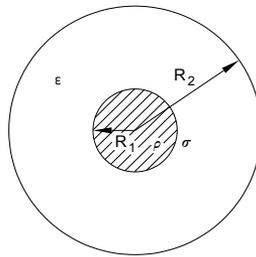
donde sustituyendo C y dC/dt , resulta:

$$\frac{dV}{dt} = -\frac{Q}{[\varepsilon_0 \cdot l + (\varepsilon - \varepsilon_0) \cdot h]^2} \cdot (\varepsilon_0 - \varepsilon) \cdot \frac{A}{l^2} \cdot \left(\sqrt{2 \cdot g \cdot h_0} - \frac{A}{l^2} \cdot g \cdot t \right)$$

PROBLEMA 4.9

Una esfera conductora de radio R_1 está uniformemente cargada en todo su volumen con una densidad de carga eléctrica en volumen $\rho = \text{cte. culombios/m}^3$, y además también existe en su superficie una densidad superficial de carga eléctrica $\sigma = \text{cte. C m}^{-2}$. Dicha esfera a su vez está recubierta por una capa esférica de radio $R_2 = 2 R_1$, de dieléctrico de permitividad relativa ϵ' . Determinar en función de R_1 , ρ , σ y ϵ' lo siguiente :

- 1º.- Densidad de las cargas aparentes de polarización existente sobre las superficies del dieléctrico de radios R_1 y R_2 .
- 2º.- Expresión vectorial del campo electrostático $\vec{E}(r)$ dentro del dieléctrico $R_1 < r < R_2$.
- 3º.- Expresión de la Polarización $\vec{P}(r)$ y del campo despolarizante $\vec{E}'(r)$ en el interior del dieléctrico $R_1 < r < R_2$.



SOLUCIÓN

1º.- Densidad de cargas aparentes de polarización en el dieléctrico en R_1 y R_2

Como $Q_p = Q_{\text{real}} \left[\frac{1}{\epsilon'} - 1 \right]$ y $Q_{\text{real}} = 4\pi R_1^2 \sigma + \frac{4}{3} \pi R_1^3 \rho$

Resulta $Q_p = \left[\frac{1 - \epsilon'}{\epsilon'} \right] 4\pi R_1^2 \left[\sigma + \frac{\rho R_1}{3} \right]$

Con este valor obtenido de las cargas aparentes de polarización, hallaremos a continuación las densidades de cargas en las dos superficies esféricas.

En $r = R_1 \Rightarrow \sigma_{p-} = \frac{Q_p}{4\pi R_1^2} = - \left[\frac{\epsilon' - 1}{\epsilon'} \right] \left[\sigma + \frac{\rho R_1}{3} \right]$

En $r = R_2 \Rightarrow \sigma_{p+} = \frac{Q_p}{4\pi R_2^2} = \left[\frac{\epsilon' - 1}{\epsilon'} \right] \left[\sigma + \frac{\rho R_1}{3} \right] \frac{R_1^2}{R_2^2}$ como $R_2 = 2R_1, \sigma_{p+} = \left[\frac{\epsilon' - 1}{4\epsilon'} \right] \left[\sigma + \frac{\rho R_1}{3} \right]$

2°.- Expresión vectorial del campo electrostático $\vec{E}(\mathbf{r})$

Se obtendrá hallando el flujo del vector desplazamiento mediante el teorema de Gauss en una superficie cerrada esférica S de radio r tal que $R_1 < r < R_2$ y en cuyo interior están distribuidas las cargas reales.

$$\phi = \oiint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q_{\text{real}} = 4\pi R_1^2 \sigma + \frac{4}{3} \pi R_1^3 \rho = 4\pi r^2 D; \quad \vec{D} = \frac{3R_1^2 \sigma + R_1^3 \rho}{3r^2} \vec{u}_r$$

Como el vector desplazamiento está relacionado con el campo eléctrico por $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$

El campo eléctrico se expresa: $\vec{E} = \frac{3R_1^2 \sigma + R_1^3 \rho}{3\epsilon r^2} \vec{u}_r$ siendo $R_1 < r < R_2$.

3°.- Polarización $\vec{P}(\mathbf{r})$ y campo despolarizante $\vec{E}'(\mathbf{r})$

El vector polarización es $\vec{P} = [\epsilon' - 1] \epsilon_0 \vec{E}$ y como conocemos el campo eléctrico obtenido en

el apartado anterior resultará: $\vec{P} = \frac{[\epsilon' - 1]}{\epsilon'} \frac{3R_1^2 \sigma + R_1^3 \rho}{3r^2} \vec{u}_r$

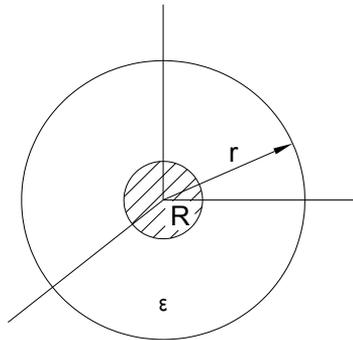
El vector del campo despolarizante es: $\vec{E}' = -(\epsilon' - 1) \vec{E}$ como conocemos el campo

eléctrico, su expresión es: $\vec{E}' = -\frac{(\epsilon' - 1)}{\epsilon} \frac{3R_1^2 \sigma + R_1^3 \rho}{3r^2} \vec{u}_r$

PROBLEMA 4.10

Una esfera cargada uniformemente con carga "q", de radio muy pequeño se encuentra inmersa en un medio dieléctrico indefinido, lineal, homogéneo e isótropo de permitividad relativa ϵ' . Hallar sobre la superficie de dieléctrico que rodea a la esfera:

- 1°.- Desplazamiento.
- 2°.- Polarización.
- 3°.- Carga total aparente inducida por la polarización electrostática.



SOLUCIÓN

1°.- Desplazamiento

El campo electrostático es $\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon r^3} \vec{r}$. Por la definición de vector desplazamiento:

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} = \frac{q}{4\pi r^3} \vec{r} \quad \text{Campo vectorial que no depende del medio.}$$

2°.- Polarización

Por las definiciones, $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$; $\vec{P} = \vec{D} - \epsilon_0 \vec{E} = [\epsilon - \epsilon_0] \vec{E} = \epsilon_0 [\epsilon' - 1] \frac{q}{4\pi \epsilon' r^3} \vec{r}$

3°.- Carga aparente inducida de polarización

$$q_p = \vec{P} \cdot \vec{n} \, S = - \frac{[\epsilon' - 1]}{4\pi r^2 \epsilon'} 4\pi r^2 \Rightarrow q_p = - \frac{[\epsilon' - 1]}{\epsilon'} q$$

También se llega al mismo resultado a partir del campo eléctrico: $\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon r^3} \vec{r}$

El campo, se puede expresar alternativamente como, $\vec{E} = \frac{q + q_p}{4\pi\epsilon_0 r^3} \vec{r} \Rightarrow q_p = -\frac{[\epsilon' - 1]}{\epsilon'} q$

CAPÍTULO V

CAMPO MAGNÉTICO EN MEDIOS MATERIALES

PROBLEMA 5.1

Se tiene una barra de hierro homogénea de longitud $\ell = 20$ cm y sección recta transversal $S = 2$ cm², suponiendo que esta barra se comporta como material paramagnético, y que su susceptibilidad magnética está dada por la expresión: $\chi = \frac{N_0}{3kT} \mu_0 m_{MFe}^2$, siendo $T =$ temperatura absoluta expresada en grados Kelvin, y $N_0 =$ número átomos hierro por metro cúbico. Se pide determinar:

- 1°.- Susceptibilidad magnética χ , a 25° C.
- 2°.- Momento magnético de la barra $m'_{M \text{ Barra}}$ expresado en A m², cuando mantenida la barra de hierro a 25°C, se introduce en un recinto donde existe un campo magnético $B = 50$ gauss.

Ahora el hierro se comporta como material ferromagnético, en este caso concreto, para la referida barra de hierro citada anteriormente, determinar:

- 3°.- Momento magnético $m_{M \text{ Barra}}$ expresado en A m².
- 4°.- Imanación M en A m⁻¹.
- 5°.- Intensidad de los polos magnéticos en A m.

DATOS

1 u.m.a. = $1,6603 \cdot 10^{-27}$ kg. Constante de Boltzmann: $k = 1,381 \cdot 10^{-23}$ J K⁻¹. $\mu_0 = 4 \pi \cdot 10^{-7}$ NA⁻²
 Densidad absoluta hierro $\rho = 7,86$ kg dm⁻³. Masa de un átomo de hierro $m_A = 55,85$ u.m.a.
 Momento magnético de un átomo $m_{MFe} = 1,8 \cdot 10^{-23}$ A · m²

SOLUCIÓN

1°.- Susceptibilidad magnética χ , a 25° C

Partiendo de los datos del enunciado obtenemos el número de átomos existentes en un metro cúbico de hierro: $N_0 = \frac{\rho}{m_A} = \frac{7,86 \cdot 10^3}{55,85 \cdot 1,6603 \cdot 10^{-27}} = 8,476 \cdot 10^{28}$ átomos · m⁻³

Por tanto la susceptibilidad magnética del material, supuesto material paramagnético, según la expresión dada en el enunciado es: $\chi = \frac{N_0}{3kT} \mu_0 m_{MFe}^2$.

Sustituyendo valores, resulta: $\chi = \frac{8,476 \cdot 10^{28}}{3 \cdot 1,371 \cdot 10^{-23} \cdot 298} 4\pi \cdot 10^{-7} [1,8 \cdot 10^{-23}]^2 = 2,815 \cdot 10^{-3}$

2°.- Momento magnético de la barra m'_M

El momento magnético por unidad de volumen se define: $|\overline{M}| = \frac{m'_{M \text{ Barra}}}{V_{\text{Barra}}}$.

Siendo: $M = \chi H$ y por otro lado además como se cumple $B = \mu_0 [1 + \chi] H$.

Con las tres ecuaciones anteriores: $|\overline{m'_{M \text{ Barra}}}| = |\overline{M}| V_{\text{Barra}} = \frac{\chi}{\mu_0 [1 + \chi]} V_{\text{Barra}} B$

Sustituyendo valores: $|\overline{m'_{M \text{ Barra}}}| = \frac{2,815 \cdot 10^{-3}}{4\pi \cdot 10^{-7} [1 + 2,815 \cdot 10^{-3}]} 20 \cdot 10^{-2} \cdot 2 \cdot 10^{-4} \cdot 5 \cdot 10^{-3} = 4,479 \cdot 10^{-4}$ A m²

3°.- Momento magnético $m_{M \text{ Barra}}$ expresado en $A \cdot m^2$

Ahora el hierro es material ferromagnético. Bajo la acción de un campo magnético exterior todos sus átomos orientan sus momentos magnéticos en la misma dirección del citado campo, por tanto el momento magnético de la barra se obtendrá como suma de los momentos magnéticos de todos los átomos que hay en ella.

$$|\overline{m_{M \text{ Barra}}}| = v_{\text{Barra}} N_0 m_A = 20 \cdot 10^{-2} \cdot 2 \cdot 10^{-4} \cdot 8,476 \cdot 10^{28} \cdot 1,8 \cdot 10^{-23} = 61,0272 \text{ A} \cdot \text{m}^2$$

4°.- Imanación M en $A \cdot m^{-1}$

La imanación magnética se define: $|\overline{M}| = \frac{|\overline{m_{M \text{ Barra}}}|}{V_{\text{Barra}}} = \frac{61,0272}{20 \cdot 10^{-2} \cdot 2 \cdot 10^{-4}} = 1,52568 \cdot 10^6 \text{ A} \cdot \text{m}^{-1}$

Es bastante superior a la cantidad obtenida en el apartado segundo, en el cual se supuso que la barra de hierro era de naturaleza paramagnética.

5°.- Intensidad de los polos magnéticos en $A \cdot m$

Como entre cada uno de los polos magnéticos del imán y su momento magnético existe la relación:

$m_M = p \ell$, la determinación del valor del polo es inmediata.

$$p = \frac{m_M}{\ell} = \frac{61,0272}{20 \cdot 10^{-2}} = 3,0513 \cdot 10^2 \text{ A} \cdot \text{m}$$

PROBLEMA 5.2

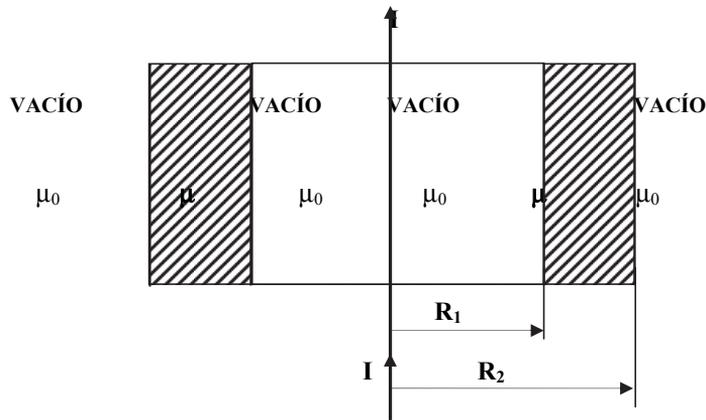
Un hilo conductor rectilíneo supuesto indefinido de radio muy pequeño R_0 por el que circula una corriente eléctrica de intensidad I , está situado en el eje de un cilindro hueco, de radio interior R_1 y radio exterior R_2 . El referido cilindro hueco, está realizado con material paramagnético, cuya permeabilidad magnética es μ . En el espacio exterior del cilindro y en el interior del hueco, el medio material es el vacío. Determinar para puntos genéricos de los tres recintos siguientes:

Hueco del cilindro $R_0 < r < R_1$. Interior del cilindro $R_1 \leq r \leq R_2$. Exterior del cilindro $R_2 < r < \infty$.

1°.- Excitación magnética \vec{H} .

2°.- Campo magnético \vec{B} .

3°.- Imanación \vec{M}



SOLUCIÓN

1°.- Excitación magnética \vec{H}

Aplicando el teorema de Ampère a una circunferencia de radio r , situada en un plano normal al eje de simetría del cilindro, resulta:

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = \Sigma I \quad \text{como } d\vec{\ell} = r d\varphi \vec{u}_\varphi \text{ y } \vec{H} = H \vec{u}_\varphi ; \quad \int_0^{2\pi} H \vec{u}_\varphi \cdot r d\varphi \vec{u}_\varphi = 2 \pi r H = \Sigma I$$

La única fuente de la excitación magnética \vec{H} , es la intensidad de la corriente eléctrica I , por tanto el vector \vec{H} está situado en el plano normal a la corriente I , es tangente a la circunferencia de radio r , tiene el sentido de avance de dicha corriente eléctrica, y no depende del medio material.

- En el hueco del cilindro $R_0 < r < R_1$, existe el vacío μ_0 : $\vec{H}_H = \frac{I}{2 \pi r} \vec{u}_\varphi$

- En el propio cilindro $R_1 \leq r \leq R_2$, está el material paramagnético μ : $\vec{H}_C = \frac{I}{2 \pi r} \vec{u}_\varphi$

- En el exterior del cilindro $R_2 < r < \infty$, solo se halla el vacío μ_0 : $\vec{H}_E = \frac{I}{2 \pi r} \vec{u}_\phi$

Es decir la excitación magnética tiene la misma expresión, para los tres recintos, ya que no depende de la naturaleza del medio material.

2°.- Campo magnético \vec{B}

- En el hueco del cilindro $R_0 < r < R_1$, existe el vacío μ_0 : $\vec{B}_H = \mu_0 \vec{H}_H = \frac{\mu_0 I}{2 \pi r} \vec{u}_\phi$
- En el propio cilindro $R_1 \leq r \leq R_2$, está el material paramagnético
 μ : $\vec{B}_C = \mu \vec{H}_C = \frac{\mu I}{2 \pi r} \vec{u}_\phi$
- En el exterior del cilindro $R_2 < r < \infty$, solo se halla el vacío μ_0 : $\vec{B}_E = \mu_0 \vec{H}_E = \frac{\mu_0 I}{2 \pi r} \vec{u}_\phi$

3°.- Imanación \vec{M}

Partiendo de la expresión $\vec{B} = \mu_0 [\vec{H} + \vec{M}]$ que relaciona entre si los tres vectores fundamentales del magnetismo, despejamos la imanación: $\vec{M} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{H}$.

- En el hueco del cilindro $R_0 < r < R_1$, en donde solamente existe el vacío μ_0 :

$$\vec{M}_H = \frac{\vec{B}_H}{\mu_0} - \vec{H}_H = \left[\frac{\mu_0 I}{2 \mu_0 \pi r} - \frac{I}{2 \pi r} \right] \vec{u}_\phi = \vec{0}$$

- En el propio cilindro $R_1 \leq r \leq R_2$, de material paramagnético, la permeabilidad es μ :

$$\vec{M}_C = \frac{\vec{B}_C}{\mu_0} - \vec{H}_C = \left[\frac{\mu I}{2 \mu_0 \pi r} - \frac{I}{2 \pi r} \right] \vec{u}_\phi = \left[\frac{\mu}{\mu_0} - 1 \right] \frac{I}{2 \pi r} \vec{u}_\phi$$

- En el exterior del cilindro $R_2 < r < \infty$, solamente existe el vacío μ_0 :

$$\vec{M}_E = \frac{\vec{B}_E}{\mu_0} - \vec{H}_E = \left[\frac{\mu_0 I}{2 \mu_0 \pi r} - \frac{I}{2 \pi r} \right] \vec{u}_\phi = \vec{0}$$

PROBLEMA 5.3

En el circuito magnético de la figura hay un solenoide de $N=1000$ espiras recorrido por una corriente eléctrica de intensidad 1 A . El material ferromagnético del circuito tiene en estas condiciones, una permeabilidad magnética relativa $\mu' = 3000$. La sección en todo el circuito es $S=100\text{ cm}^2$ excepto en el entrehierro donde $S_e = 200\text{ cm}^2$. Las longitudes medias están indicadas en la figura, y se supone que en todo el circuito no hay pérdidas de flujo magnético. Determinar:

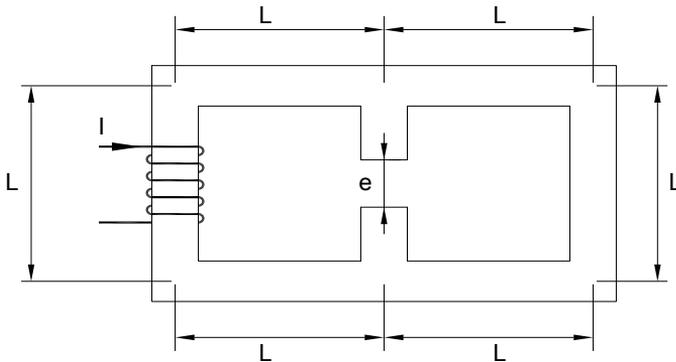
1°.- Circuito eléctrico equivalente. Reluctancia magnética total.

2°.- Flujos magnéticos en el circuito.

3°.- Campo magnético en el entrehierro.

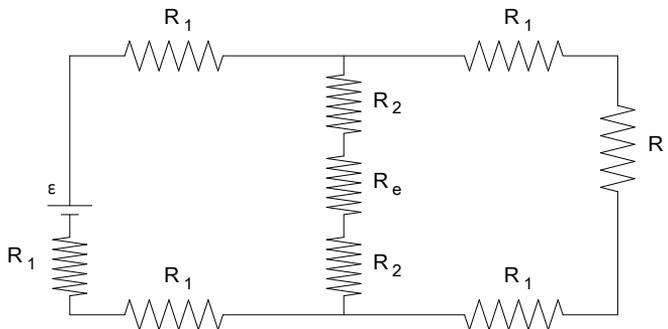
4°.- Potencial magnético del entrehierro.

Datos: $L = 1\text{ m}$; $e = 10\text{ cm}$; $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\text{ N A}^{-2}$



SOLUCIÓN

1°.- Circuito eléctrico equivalente. Reluctancia magnética total



Fuerza magnetomotriz: $\epsilon_M = N I = 1000\text{ A}\cdot\text{v}$

Para cada tramo del circuito, con sus diferentes valores de permeabilidad magnética, y sus dimensiones geométricas, los valores de la reluctancia magnética son:

$$\mathfrak{R}_1 = \frac{1}{\mu' \mu_0} \frac{L}{S} = \frac{1}{3000 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7}} \frac{1}{100 \cdot 10^{-4}} = 2,65258 \cdot 10^4\text{ H}^{-1}$$

$$\mathfrak{R}_2 = \frac{1}{\mu' \mu_0} \frac{L - e}{S} = \frac{1}{\mu' \mu_0} \frac{[L - 0,1 L]/2}{S} = \frac{1}{\mu' \mu_0} \frac{L [1 - 0,1]}{2} = 0,45 \mathfrak{R}_1 = 1,19366 \cdot 10^4 \text{ H}^{-1}$$

$$\mathfrak{R}_e = \frac{1}{\mu_0} \frac{e}{S_e} = \frac{1}{\mu' \mu_0} \frac{L}{S} \frac{e'}{2L} \mu' = \frac{1}{\mu' \mu_0} \frac{L}{S} \frac{0,1}{2} \mu' = 150 \mathfrak{R}_1 = 397,8870 \cdot 10^4 \text{ H}^{-1}$$

La reluctancia magnética total del circuito \mathfrak{R}_T se obtiene a partir de la morfología del circuito eléctrico equivalente antes indicado en la figura:

$$\mathfrak{R}_T = 3\mathfrak{R}_1 + \frac{3\mathfrak{R}_1 [2\mathfrak{R}_2 + \mathfrak{R}_e]}{3\mathfrak{R}_1 + 2\mathfrak{R}_2 + \mathfrak{R}_e} = \frac{9 \mathfrak{R}_1^2 + 12 \mathfrak{R}_1 \mathfrak{R}_2 + 6 \mathfrak{R}_1 \mathfrak{R}_e}{3\mathfrak{R}_1 + 2\mathfrak{R}_2 + \mathfrak{R}_e} = \frac{914,4}{153,9} \mathfrak{R}_1 = 15,7603 \cdot 10^4 \text{ H}^{-1}$$

2°.- Flujos magnéticos en el circuito

Para determinar los flujos magnéticos pedidos, aplicamos al circuito eléctrico equivalente el método de las mallas de los circuitos eléctricos, suponiendo que en cada malla el sentido del flujo es coincidente con el sentido de giro de las agujas del reloj.

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon &= [3 \mathfrak{R}_1 + 2\mathfrak{R}_2 + \mathfrak{R}_e] \Phi_1 - [2\mathfrak{R}_2 + \mathfrak{R}_e] \Phi_2 \\ 0 &= - [2\mathfrak{R}_2 + \mathfrak{R}_e] \Phi_1 + [3\mathfrak{R}_1 + 2\mathfrak{R}_2 + \mathfrak{R}_e] \Phi_2 \end{aligned} \right\}$$

Resolviendo el anterior sistema mediante el método de Kramer resulta:

$$\Phi_1 = \frac{\begin{vmatrix} \varepsilon & -2\mathfrak{R}_2 - \mathfrak{R}_e \\ 0 & 3\mathfrak{R}_1 + 2\mathfrak{R}_2 + \mathfrak{R}_e \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3\mathfrak{R}_1 + 2\mathfrak{R}_2 + \mathfrak{R}_e & -2\mathfrak{R}_2 - \mathfrak{R}_e \\ -2\mathfrak{R}_2 - \mathfrak{R}_e & 3\mathfrak{R}_1 + 2\mathfrak{R}_2 + \mathfrak{R}_e \end{vmatrix}} = \varepsilon \frac{3\mathfrak{R}_1 + 2\mathfrak{R}_2 + \mathfrak{R}_e}{9 \mathfrak{R}_1^2 + 12 \mathfrak{R}_1 \mathfrak{R}_2 + 6 \mathfrak{R}_1 \mathfrak{R}_e} = \frac{153,9 \varepsilon}{914,4 \mathfrak{R}_1} = 6,3450 \cdot 10^{-3} \text{ Wb}$$

$$\Phi_2 = \frac{\begin{vmatrix} 3\mathfrak{R}_1 + 2\mathfrak{R}_2 + \mathfrak{R}_e & \varepsilon \\ -2\mathfrak{R}_2 - \mathfrak{R}_e & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3\mathfrak{R}_1 + 2\mathfrak{R}_2 + \mathfrak{R}_e & -2\mathfrak{R}_2 - \mathfrak{R}_e \\ -2\mathfrak{R}_2 - \mathfrak{R}_e & 3\mathfrak{R}_1 + 2\mathfrak{R}_2 + \mathfrak{R}_e \end{vmatrix}} = \varepsilon \frac{2\mathfrak{R}_2 + \mathfrak{R}_e}{9 \mathfrak{R}_1^2 + 12 \mathfrak{R}_1 \mathfrak{R}_2 + 6 \mathfrak{R}_1 \mathfrak{R}_e} = \frac{150,9 \varepsilon}{914,4 \mathfrak{R}_1} = 6,2213 \cdot 10^{-3} \text{ Wb}$$

3°.- Campo magnético en el entrehierro

El campo magnético buscado, es el cociente entre el flujo magnético que circula por el entrehierro, que es la diferencia entre los dos flujos antes hallados y su sección correspondiente:

$$B_e = \frac{\Phi_e}{S_e} = \frac{\Phi_1 - \Phi_2}{S_e} = \frac{3 \mathfrak{R}_1 \varepsilon}{[9 \mathfrak{R}_1^2 + 12 \mathfrak{R}_1 \mathfrak{R}_2 + 6 \mathfrak{R}_1 \mathfrak{R}_e] S_e} = \frac{[6,3450 - 6,2213] 10^{-3}}{200 \cdot 10^{-4}} = 6,185 \cdot 10^{-3} \text{ T}$$

4°.- Potencial magnético en el entrehierro

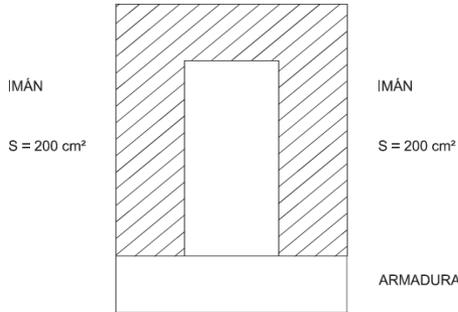
Es el producto del flujo magnético en el entrehierro, y de su propia reluctancia magnética:

$$\theta_e = [\Phi_1 - \Phi_2] \cdot \mathfrak{R}_e = \frac{3 \mathfrak{R}_1 \varepsilon \mathfrak{R}_e}{9 \mathfrak{R}_1^2 + 12 \mathfrak{R}_1 \mathfrak{R}_2 + 6 \mathfrak{R}_1 \mathfrak{R}_e} \text{ operando, se obtiene el potencial magnético}$$

$$\theta_e = [6,3450 - 6,2213] \cdot 10^{-3} \cdot 397,8870 \cdot 10^4 = 492,186 \text{ A-v}$$

PROBLEMA 5.4

En la industria, en ciertas ocasiones, se utilizan los imanes y electroimanes para levantar masas magnéticas (armaduras de hierro dulce o de chapa magnética). Se denomina fuerza portante F_P , la fuerza necesaria para despegar la armadura del imán o del electroimán.

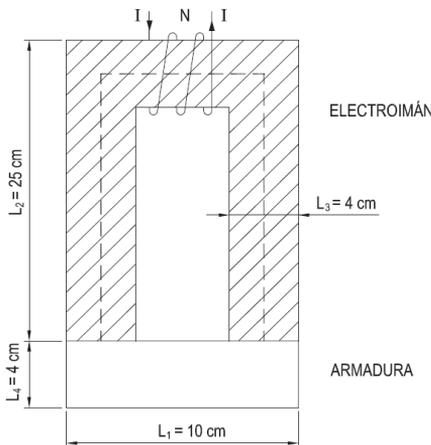


En un imán en forma de U, la sección recta de su polo es $S = 200 \text{ cm}^2$ y el campo magnético existente en la unión del imán y la armadura de hierro dulce pegada a él es $B = 6000 \text{ gauss}$. Despreciando la influencia de los bordes del imán, determinar:

1º.- Fuerza para separar la armadura del imán.

Ahora se dispone de un electroimán, también en forma de U, hecho con un material magnético del cual detallamos parte de su curva de imanación B-H:

Tesla	0,60	0,82	0,94	1,02	1,08	1,13	1,17	1,20	1,24	1,27	1,29
H A-vuelta/m	100	200	300	400	500	600	700	800	900	1000	1200



Su arrollamiento es de $N = 30$ espiras por las que circula $I = 14,934 \text{ A}$. Este electroimán tiene unida a su parte inferior una armadura hecha de su mismo material magnético.

Las dimensiones del electroimán y su armadura se indican en la figura. Calcular:

2º.- Fuerza para separar la armadura del electroimán.

SOLUCIÓN

1º.- Fuerza para separar la armadura del imán

Cuando comienza a separarse la armadura del imán, en el espacio que hay entre cada uno de los dos polos del imán existe un campo magnético B y el medio es el vacío. La energía magnética almacenada en este volumen que es doble, ya que el imán tiene dos polos es:

$$W_{\text{mag}} = \frac{1}{2} B H 2 S dx = \frac{1}{2 \mu_0} B^2 2 S dx \quad [1]$$

Por otro lado la energía mecánica necesaria para desplazar el peso de la armadura es:

$$W_{\text{mec}} = F_P dx = P dx \quad [2]$$

Igualando ambas ecuaciones se obtiene la fuerza necesaria para la separación de la armadura: $F_p = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0} 2 S$ [3]

Como B y S son datos conocidos, sustituyendo valores en la expresión [3], resulta

$$F_p = \frac{1}{2} \frac{0,6^2}{4 \pi 10^{-7}} 2 \cdot 200 \cdot 10^{-4} = 5729,57 \text{ N}$$

2º.- Fuerza para separar la armadura del electroimán

En este caso hemos de hallar previamente el campo magnético B* existente dentro del circuito magnético del electroimán, mediante dos etapas:

- Determinación de la excitación magnética H, al aplicar el teorema de Ampère al circuito magnético del electroimán con su armadura.
- Obtención de B* en el interior del electroimán, mediante la "Curva de imanación" del material magnético, ya que H se obtuvo anteriormente,.

$$\oint \vec{H} \cdot d \vec{\ell} = N I ; \text{ de donde se determina: } H = \frac{N I}{\sum \ell_{\text{electroimán}} + \sum \ell_{\text{armadura}}} \text{ A-vuelta} \cdot \text{m}^{-1} \quad [4]$$

$$H = \frac{30 \cdot 14,934}{2[\ell_2 - 0,5 \ell_3] + 2 \cdot [\ell_1 - \ell_3] + 2 \cdot 0,5 \ell_A} = \frac{448,02}{2 \ell_1 + 2 \ell_2 + \ell_A - 3 \ell_3}$$

$$H = \frac{448,02}{2 \cdot 10 \cdot 10^{-2} + 2 \cdot 26 \cdot 10^{-2} + 4 \cdot 10^{-2} - 3 \cdot 4 \cdot 10^{-2}} = \frac{448,02}{64 \cdot 10^{-2}} = 700 \text{ A-vuelta m}^{-1}$$

Con el valor de H= 700 A-vuelta m⁻¹ ⇒ ["Curva Imanación del material"] ⇒ B*= 1,17 T

Aplicando el mismo razonamiento del apartado anterior como hay dos polos, llegamos a la

expresión de la fuerza necesaria para separar la armadura: $F_p^* = \frac{1}{2} \frac{B^{*2}}{\mu_0} 2 S$ [5]

Sustituyendo valores, la fuerza necesaria será $F_p^* = \frac{1}{2} \frac{1,17^2}{4 \pi \cdot 10^{-7}} 2 \cdot 200 \cdot 10^{-4} = 21786,7 \text{ N}$

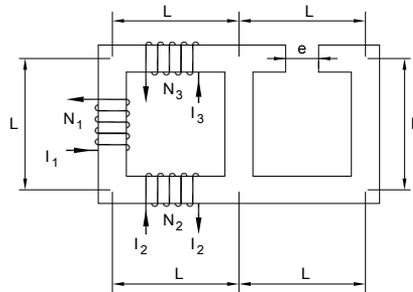
PROBLEMA 5.5

En un circuito magnético hay tres solenoides cuyas características son:

BOBINA	Nº DE ESPIRAS (N)	INTENSIDAD (A)
1	100	50
2	500	2
3	200	10

Para las condiciones de trabajo, en el material magnético, su permeabilidad magnética relativa es $\mu' = 5.000$; la sección recta es 250 cm^2 en todo el circuito; las longitudes de cada tramo y del entrehierro son: $L=1 \text{ m}$ y $L_e=10 \text{ mm}$. Se considera que en dicho circuito no se producen pérdidas de flujo magnético. Calcular:

- 1º.- Circuito eléctrico equivalente.
- 2º.- Reluctancia magnética total.
- 3º.- Flujos Φ_{TOTAL} , Φ_1 y Φ_2 .
- 4º.- Caída de potencial magnético en los tramos AB, CD y en el entrehierro.

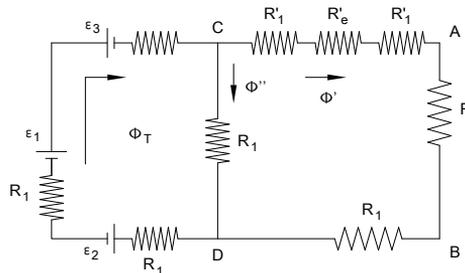


SOLUCIÓN

1º.- Circuito eléctrico equivalente

Tomando como flujo de referencia positivo, el creado por el solenoide 1, las f. m. m. son:

$$\varepsilon_1 = N_1 I_1 = 5000 \text{ A-v}; \quad \varepsilon_2 = -N_2 I_2 = -1000 \text{ A-v}; \quad \varepsilon_3 = -N_3 I_3 = -2000 \text{ A-v}$$



2º.- Reluctancia magnética total

Para cada tramo del circuito, con sus diferentes valores de permeabilidad magnética, y dimensiones geométricas, los valores de la reluctancia magnética son:

$$\mathfrak{R}_1 = \frac{1}{\mu' \mu_0} \frac{L}{S} = \frac{1}{5000 \cdot 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7}} \frac{1}{250 \cdot 10^{-4}} = 6,3662 \cdot 10^3 \text{ H}^{-1}$$

$$\mathfrak{R}'_1 = \frac{1}{\mu' \mu_0} \frac{[L-L']/2}{S} = \frac{1}{\mu' \mu_0} \frac{[L-0,01 L]/2}{S} = \frac{1}{\mu' \mu_0} \frac{L [1-0,01]}{2 S} = 0,495 \mathfrak{R}_1 = 3,1512 \cdot 10^3 \text{ H}^{-1}$$

$$\mathfrak{R}_e = \frac{1}{\mu_0} \frac{L'}{S} = \frac{1}{\mu_0} \frac{L}{S} \frac{L'}{L} \mu' = \frac{1}{\mu_0} \frac{L}{S} \frac{0,01 L}{L} \mu' = 50 \mathfrak{R}_1 = 318,3098 \cdot 10^3 \text{ H}^{-1}$$

Teniendo en cuenta la morfología del circuito se obtiene la reluctancia total:

$$\mathfrak{R}_T = 3\mathfrak{R}_1 + \frac{2\mathfrak{R}_1^2 + 2\mathfrak{R}_1 \mathfrak{R}'_1 + \mathfrak{R}_1 \mathfrak{R}_e}{3\mathfrak{R}_1 + 2\mathfrak{R}'_1 + \mathfrak{R}_e} = \frac{11\mathfrak{R}_1^2 + 8\mathfrak{R}_1 \mathfrak{R}'_1 + 4\mathfrak{R}_1 \mathfrak{R}_e}{3\mathfrak{R}_1 + 2\mathfrak{R}'_1 + \mathfrak{R}_e}. \text{ Como: } \mathfrak{R}'_1 = 0,495 \mathfrak{R}_1 \text{ y } \mathfrak{R}_e = 50 \mathfrak{R}_1$$

$$\mathfrak{R}_T = \frac{11 + 8 \cdot 0,495 + 4 \cdot 50}{3 + 2 \cdot 0,495 + 50} \mathfrak{R}_1 = \frac{214,96}{53,99} \mathfrak{R}_1 = 25,3469 \cdot 10^3 \text{ H}^{-1}$$

3°.- Flujos Φ_{TOTAL} , Φ_1 y Φ_2

El flujo magnético total es el cociente entre la fuerza magnetomotriz equivalente, tomando como positivo el flujo magnético creado por la bobina 1, y la reluctancia total del circuito

$$\text{magnético: } \Phi_T = \frac{N_1 I_1 - N_2 I_2 - N_3 I_3}{\mathfrak{R}_T} = \frac{\varepsilon_T}{\mathfrak{R}_T} = \frac{2000}{25,3469 \cdot 10^3} = 7,8905 \cdot 10^{-2} \text{ Wb}$$

Para determinar los otros dos flujos magnéticos pedidos, aplicamos al circuito equivalente el método de las mallas de los circuitos eléctricos.

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_3 &= 4 \mathfrak{R}_1 \Phi_1 - \mathfrak{R}_1 \Phi_2 \\ 0 &= -\mathfrak{R}_1 \Phi_1 + [3\mathfrak{R}_1 + 2\mathfrak{R}'_1 + \mathfrak{R}_e] \Phi_2 \end{aligned} \right\}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones anterior por el método de Kramer resulta:

$$\Phi_1 = \frac{\begin{vmatrix} \varepsilon_T & -\mathfrak{R}_1 \\ 0 & 3\mathfrak{R}_1 + 2\mathfrak{R}'_1 + \mathfrak{R}_e \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4\mathfrak{R}_1 & -\mathfrak{R}_1 \\ -\mathfrak{R}_1 & 3\mathfrak{R}_1 + 2\mathfrak{R}'_1 + \mathfrak{R}_e \end{vmatrix}} = \varepsilon_T \frac{3\mathfrak{R}_1 + 2\mathfrak{R}'_1 + \mathfrak{R}_e}{11\mathfrak{R}_1^2 + 8\mathfrak{R}_1 \mathfrak{R}'_1 + 4\mathfrak{R}_1 \mathfrak{R}_e} = \frac{53,99 \varepsilon_T}{214,96 \mathfrak{R}_1} = 7,8905 \cdot 10^{-2} \text{ Wb}$$

$$\Phi_2 = \frac{\begin{vmatrix} 4\mathfrak{R}_1 & \varepsilon_T \\ -\mathfrak{R}_1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4\mathfrak{R}_1 & -\mathfrak{R}_1 \\ -\mathfrak{R}_1 & 3\mathfrak{R}_1 + 2\mathfrak{R}'_1 + \mathfrak{R}_e \end{vmatrix}} = \varepsilon_T \frac{\mathfrak{R}_1}{11\mathfrak{R}_1^2 + 8\mathfrak{R}_1 \mathfrak{R}'_1 + 4\mathfrak{R}_1 \mathfrak{R}_e} = \frac{\varepsilon_T}{214,96 \mathfrak{R}_1} = 1,4614 \cdot 10^{-3} \text{ Wb}$$

$$\text{Se comprueba que: } \Phi_T = \frac{N_1 I_1 - N_2 I_2 - N_3 I_3}{\mathfrak{R}_T} = \Phi_1 = 7,8905 \cdot 10^{-2} \text{ Wb}$$

4°.- Caída de potencial magnético en los tramos AB, CD y en el entrehierro

- Potencial magnético Tramo AB. Es un circuito en paralelo.

$$\Phi_2 = \frac{\mathfrak{R}_{\text{CABDC}}}{\mathfrak{R}'} \Phi_T = 1,4614 \cdot 10^{-3} \text{ Wb, siendo } \mathfrak{R}' = 2\mathfrak{R}_1 + 2\mathfrak{R}'_1 + \mathfrak{R}_e; \mathfrak{R}_{\text{CABDC}} = \frac{\mathfrak{R}_1 [2\mathfrak{R}_1 + \mathfrak{R}_e + 2\mathfrak{R}'_1]}{3\mathfrak{R}_1 + \mathfrak{R}_e + 2\mathfrak{R}'_1}$$

Potencial magnético entre A y B es: $\theta_{AB} = \Phi_2 \cdot \mathfrak{R}_1 = 9,303 \text{ A-v}$

- Potencial magnético Tramo CD.

$$\text{Como: } \Phi' = \Phi_1 - \Phi_2 = [78,905 - 1,4614] \cdot 10^{-3} = 77,4436 \cdot 10^{-3} \text{ Wb}$$

Potencial magnético entre C y D es: $\theta_{CD} = \Phi' \cdot \mathfrak{R}_1 = 493,022 \text{ A-v}$

- Potencial magnético en el Entrehierro.

Es el producto del flujo magnético en el entrehierro, y su reluctancia magnética:

Potencial magnético en entrehierro:

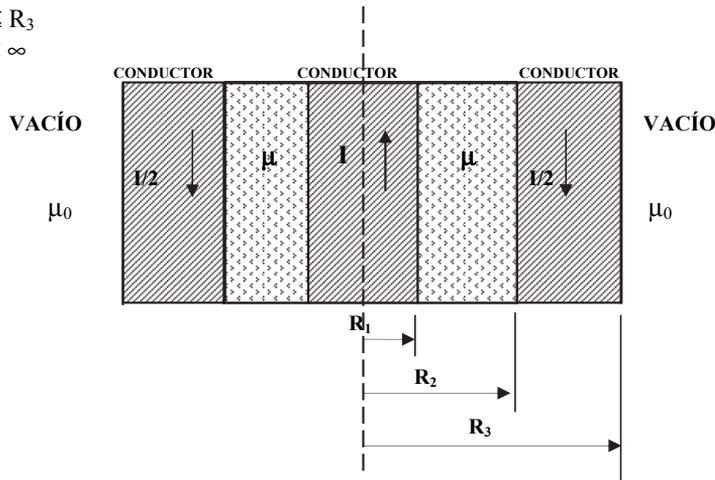
$$\theta_e = \Phi_2 \mathfrak{R}_e = 1,4614 \cdot 10^{-3} \cdot 318,3098 \cdot 10^3 = 465,178 \text{ A-v}$$

PROBLEMA 5.6

Se tienen dos conductores cilíndricos coaxiales, supuestos indefinidos, el interior es macizo de radio R_1 , y el exterior es hueco de radios R_2 y R_3 ($R_2 < R_3$) por los cuales circula la misma corriente eléctrica de intensidad I , pero en sentido contrario, de manera que dicha corriente está distribuida de modo uniforme en la sección recta de ambos conductores coaxiales.

El espacio existente entre los dos conductores está relleno de material un paramagnético, cuya permeabilidad magnética es μ . En el espacio exterior del cilindro hueco el medio material es el vacío, tal como se indica en la figura. Hallar la expresión de la excitación magnética \vec{H} en los siguientes dominios:

- 1°.- $0 < r \leq R_1$
- 2°.- $R_1 < r < R_2$
- 3°.- $R_2 \leq r \leq R_3$
- 4°.- $R_3 < r < \infty$



SOLUCIÓN

Aplicando el teorema de Ampère a una circunferencia de radio r , situada en un plano normal al eje de simetría del cilindro, resulta:

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = \iint \vec{J} \cdot d\vec{S} = \Sigma I; \text{ como: } d\vec{\ell} = r d\phi \vec{u}_\phi \text{ y } \vec{H} = H \vec{u}_\phi; \int_0^{2\pi} H \vec{u}_\phi \cdot r d\phi \vec{u}_\phi = 2 \pi r H = \Sigma I$$

La única fuente de la excitación magnética \vec{H} , es la intensidad de la corriente eléctrica I que atraviesa la sección recta apoyada sobre la circunferencia de radio r . Dicha corriente eléctrica se distribuye uniformemente, y como además la excitación magnética no depende del medio material, resulta: $\vec{H}_r = \frac{\Sigma I_r}{2 \pi r} \vec{u}_\phi$ [1]

1°.- Excitación magnética \vec{H}_{1r} en el dominio: $0 < r \leq R_1$

Para este recinto, dentro de la sección circular de radio r , la intensidad I está uniformemente repartida en dicha sección, por tanto resulta:

$$\Sigma I_r = \iint \vec{J}_1 \cdot d\vec{S} = J_1 \cdot \pi r^2 = \frac{I}{\pi R_1^2} \pi r^2$$

Llevando este valor a [1], se obtiene: $\vec{H}_{1r} = \frac{1}{2 \pi r} \frac{\pi r^2}{\pi R_1^2} I \vec{u}_\phi = \frac{I r}{2 \pi R_1^2} \vec{u}_\phi$

2°.- Excitación magnética \overline{H}_{2r} en el dominio: $R_1 < r < R_2$

En este recinto al aplicar el teorema de Ampère a la circunferencia de radio r , en su interior queda contenida toda la intensidad I , y aunque el medio es paramagnético, como la excitación magnética no depende del medio material, aplicando la ecuación [1] resulta:

$$\overline{H}_{2r} = \frac{I}{2 \pi R_1^2} \overline{u}_\phi$$

3°.- Excitación magnética de \overline{H}_{3r} en el dominio: $R_2 \leq r \leq R_3$

En este recinto, dentro de la sección circular de radio r , circula en un sentido toda la intensidad I y en sentido opuesto la parte de dicha intensidad I correspondiente al área del conductor exterior que está comprendida entre los radios r y R_2 , por tanto la intensidad total es:

$$\Sigma I_r = \iint_{S_1} \overline{J}_1 \cdot d\overline{S}_1 + \iint_{S_2} \overline{J}_2 \cdot d\overline{S}_2 = I - \frac{I}{R_3^2 - R_2^2} [r^2 - R_2^2]$$

Llevando este valor a la ecuación [1], resulta:

$$\overline{H}_{3r} = \frac{1}{2 \pi r} \left[I - \frac{r^2 - R_2^2}{R_3^2 - R_2^2} I \right] \overline{u}_\phi = \frac{I}{2 \pi r} \left[1 - \frac{r^2 - R_2^2}{R_3^2 - R_2^2} \right] \overline{u}_\phi$$

4°.- Excitación magnética \overline{H}_{4r} en el dominio: $R_3 < r < \infty$

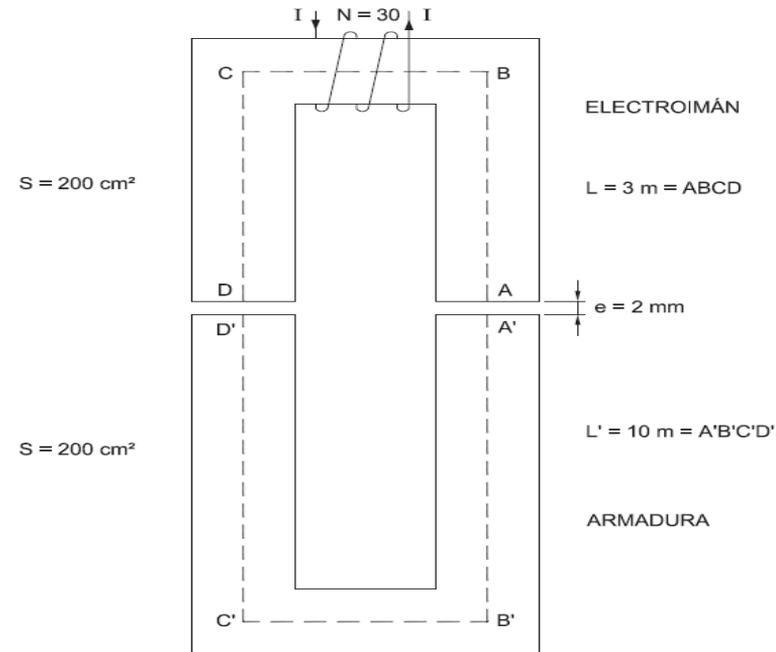
En este recinto, dentro de la sección de radio r , circula en un sentido la intensidad I por el conductor interior y en sentido opuesto la misma intensidad I por el conductor exterior, por tanto ambas intensidades se anulan: $\Sigma I_r = I - I = 0$.

Llevando este valor a la ecuación [1], tenemos: $\overline{H}_{4r} = 0 \overline{u}_\phi$

PROBLEMA 5.7

Sea un electroimán situado verticalmente, en forma de U, con un arrollamiento es de $N=30$ espiras por las cuales circula una corriente I . Este electroimán tiene en su parte inferior una armadura móvil hecha de su mismo material magnético, separada mediante un entrehierro $e=2$ mm. Las dimensiones del electroimán y su armadura se indican en la figura. Parte de la curva de imanación B-H del material magnético utilizado es la detallada a continuación, donde para valores intermedios se puede utilizar el método de la interpolación lineal.

B Tesla	0,60	0,82	0,94	1,02	1,08	1,13	1,17	1,20	1,24	1,27	1,29
H A-vuelta/m	100	200	300	400	500	600	700	800	900	1000	1200



Entre electroimán y armadura existe una fuerza de atracción, de naturaleza electromagnética, que tiende a unirlos. Supuestas despreciables las fugas magnéticas en el entrehierro y siendo el flujo magnético constante en todo el circuito, se pide determinar:

- 1°.- $B_{\text{mínimo}}$ necesario para unir electroimán y armadura.
- 2°.- $I_{\text{mínima}}$ para unir electroimán y armadura.
- 3°.- $\mathfrak{F}_{\text{mínima}}$ necesaria para unir electroimán y armadura.

Ahora están unidos electroimán y armadura, ya no hay entrehierro y la fuerza magnetomotriz \mathfrak{F} aplicada en el electroimán es la mínima calculada en el apartado 3°, en este caso determinar:

- 4°.- H' excitación magnética.
- 5°.- B' campo magnético mediante la interpolación lineal.
- 6°.- F' necesaria para separar electroimán y armadura.

DATOS: La densidad absoluta del material magnético $\rho=7,180$ kg dm^{-3} .

SOLUCIÓN

1º.- B_{mínimo} necesario para unir electroimán y armadura

El proceso de cálculo es: $W_m \Rightarrow F_m = - \frac{\partial W_m}{\partial e} \Rightarrow F_m = \text{Peso armadura} \Rightarrow B_{\text{mínimo}}$

- Determinación de la energía magnética W_{mag} en todo el volumen del circuito magnético con el entrehierro "e":

$$\text{Energía magnética: } W_m = \frac{1}{2} \iiint_{\tau} \vec{H} \cdot \vec{B} \, d\tau = \frac{1}{2} [B_h H_h L S_h + B_e H_e 2e S_h + B_h H_h L' S_h]$$

- Fuerza magnética entre electroimán y armadura:

$$F_m = - \frac{\partial W_m}{\partial e} = - \frac{d}{d e} \frac{1}{2} [B_h H_h L S_h + B_e H_e 2e S_h + B_h H_h L' S_h] = - \frac{1}{2} 2 B_e S_e H_e \quad [1]$$

El flujo magnético es constante en todo el circuito: $\Phi_h = B_h S_h = B_e S_e = \Phi_e$ y como se cumple además: $S_e = S_h$, por tanto resulta: $B_h = B_e$.

La relación entre el campo magnético y la excitación magnética es: $H_h = \frac{B_h}{\mu} ; H_e = \frac{B_e}{\mu_0}$

Llevando las expresiones anteriores a la ecuación [1], se obtiene: $|F_m| = \frac{B^2 S}{\mu_0} \quad [2]$

- En el equilibrio, el campo magnético $B_{\text{mínimo}}$ necesario se obtendrá cuando se igualan la fuerza magnética antes hallada y el peso de la armadura:

$$|F_m| = \frac{B_{\text{mínimo}}^2 S}{\mu_0} = m g = S L' \rho g = P_{\text{Peso armadura}}$$

Despejando obtenemos el campo magnético mínimo necesario: $B_{\text{mínimo}} = \sqrt{\mu_0 \rho g L'}$

Sustituyendo valores resulta: $B_{\text{mínimo}} = \sqrt{4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \cdot 7,18 \cdot 10^3 \cdot 9,81 \cdot 10} = 0,94 \text{ T}$

2º.- I_{mínima} para unir electroimán y armadura

Para el valor del campo magnético mínimo antes determinado $B_{\text{mínimo}} = 0,94 \text{ T}$ hallaremos la correspondiente excitación magnética mediante la "Curva de imanación" del enunciado:

HIERRO: $B_{\text{mínimo}} = 0,94 \text{ T} \Rightarrow [\text{Curva de imanación}] \Rightarrow H_h = 300 \text{ A vuelta}\cdot\text{m}^{-1}$

ENTREHIERRO $\Rightarrow H_0 = \frac{B_{\text{mínimo}}}{\mu_0} = \frac{0,94}{4 \pi 10^{-7}} = 7,4802 \cdot 10^5 \text{ A}\cdot\text{v m}^{-1}$

Aplicando el teorema de Ampère al circuito magnético del electroimán con su armadura separadas por el entrehierro: $\oint \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = N I$. Integrando: $H_h [L+L'] + H_0 2e = NI$

Despejando se obtiene: $I_{\text{mínima}} = \frac{H_h [L+L'] + H_0 2e}{N}$

Sustituyendo valores se halla: $I_{\text{mínima}} = \frac{300 [3+10] + 7,4802 \cdot 10^5 \cdot 2 \cdot 10^{-3}}{30} = 179,868 \text{ A}$

3º.- $\mathfrak{F}_{\text{mínima}}$ necesaria para unir electroimán y armadura

La fuerza magnetomotriz mínima obtiene de forma inmediata, ya que: $\mathfrak{F}_{\text{mínima}} = N I_{\text{mínima}}$

Sustituyendo valores se halla: $\mathfrak{F}_{\text{mínima}} = 30 \cdot 179,868 = 5396,04 \text{ A}\cdot\text{vuelta}$

4°.- H' excitación magnética

Ahora ha cambiado la morfología del circuito magnético, ya que están unidos electroimán y la armadura, no existe entrehierro, la fuerza magnetomotriz se conserva, es la calculada en el anterior apartado, pero ha cambiado la excitación magnética:

$$\mathfrak{F}_{\text{mínima}} = N I_{\text{mínima}} = H'_h [L+L'] \text{ de donde: } H'_h = \frac{N I_{\text{mínima}}}{L+L'} = \frac{5396,04}{3+10} = 415,08 \text{ A} \cdot \text{v} \cdot \text{m}^{-1}$$

5°.- Campo magnético B' mediante la interpolación lineal

Mediante la "Curva de imanación" del material magnético, entrando con el valor de la excitación magnética calculada anteriormente $H'_h = 415,08 \text{ A-vuelta}$, mediante la interpolación lineal, se obtendrá el nuevo valor de B' en el nuevo circuito magnético sin entrehierro.

$$H'_h = 415,08 \text{ A-vuelta} \Rightarrow [\text{Curva de imanación}] \Rightarrow$$

$$B' = 1,02 + [415,08 - 400] \frac{1,08 - 1,02}{500 - 400} = 1,029 \text{ T}$$

6°.- F' para separar electroimán y armadura

Aplicando la expresión [2] obtenida en el apartado 1°, pero con el valor del campo magnético calculado en el apartado anterior, resulta:

$$|F'_m| = \frac{B'^2 S}{\mu_0} = \frac{1,029^2 \cdot 200 \cdot 10^{-4}}{4 \pi \cdot 10^{-7}} = 16.851,97 \text{ N} > F = m g$$

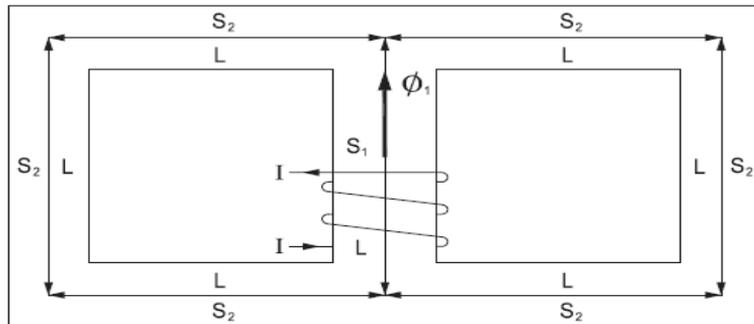
Por tanto tras unirse la armadura al electroimán, al desaparecer el entrehierro, aumenta el campo magnético en el circuito y hay que emplear una fuerza bastante mayor al peso de la armadura para separarla del electroimán.

PROBLEMA 5.8

En un circuito magnético paralelo de la figura hay un solenoide de $N= 500$ vueltas, recorrido por una corriente eléctrica I . La longitud $L= 40$ cm, las secciones son $S_1= 6$ cm² y $S_2= 3$ cm².

El material magnético que constituye el circuito es de acero colado, y parte de su curva de imantación B-H es la indicada a continuación:

B Tesla	1,00	1,05	1,10	1,15	1,20	1,25	1,30
H A/m	750	800	900	1.050	1.125	1.250	1.450



Se supone que en el circuito no se producen pérdidas de flujo magnético, y que sabiendo el flujo magnético que circula por la rama de la derecha es $\Phi_3= 0,345 \cdot 10^{-3}$ Wb, se pide terminar:

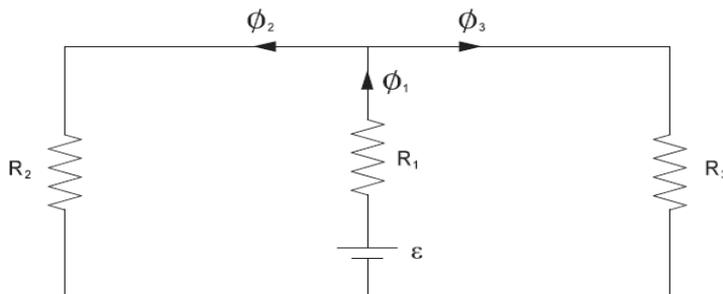
- 1°.- Circuito eléctrico equivalente.
- 2°.- Reluctancia magnética total.
- 3°.- Corriente I en el solenoide para que se mantenga el flujo Φ_3 .

Ahora en la columna central del circuito inicial de la figura se mecaniza un pequeño entrehierro cuya longitud es $L_e= 2$ mm, determinar.

- 4°.- Corriente I_1 en el solenoide para que se mantenga el flujo Φ_3 .

SOLUCIÓN

1°.- Circuito eléctrico equivalente



Se observa que el circuito es simétrico respecto de la columna central en donde está arrollado el solenoide de $N=500$ vueltas.

Las ramas laterales son iguales, su reluctancia magnética es la misma $\mathfrak{R}_2 = \mathfrak{R}_3$ y ambas están conectadas entre sí en paralelo.

2°.- Reluctancia magnética total

Para el cálculo de la reluctancia, antes hemos de determinar la permeabilidad magnética del acero colado mediante la curva de imanación dada.

- Cálculo de μ .

En el nudo: $\Phi_1 = \Phi_2 + \Phi_3$; por simetría $\Phi_2 = \Phi_3$, $\Phi_1 = 2 \Phi_2$ y como además $S_1 = 2 S_2$.

$$B_1 = \frac{\Phi_1}{S_1} = \frac{2 \Phi_2}{2 S_2} = B_2 = B_3 = \frac{\Phi_3}{S_2} = \frac{0,345 \cdot 10^{-3}}{3 \cdot 10^{-4}} = 1,15 \text{ T}$$

Para $B_1 = 1,15 \text{ T} \Rightarrow$ Mediante la "Curva de imanación B-H" $\Rightarrow H = 1050 \text{ A/m}$

$$\mu = \mu_0 \mu' = \frac{B}{H} = \frac{1,15}{1050} = 1,0952 \cdot 10^{-3} \text{ NA}^{-2}; \quad \mu' = \frac{1,15}{4\pi \cdot 10^{-7}} = 871,56$$

- Cálculo de reluctancias.

Para cada tramo del circuito, con sus diferentes dimensiones geométricas:

$$\mathfrak{R}_1 = \frac{1 L_1}{\mu S_1} = \frac{1}{1,15} \frac{0,4}{6 \cdot 10^{-4}} = 6,08695 \cdot 10^5 \text{ H}^{-1}; \quad \mathfrak{R}_3 = \mathfrak{R}_2 = \frac{1 L_2}{\mu S_2} = \frac{1}{\mu} \frac{3 L_1}{\frac{S_1}{2}} = 6 \mathfrak{R}_1$$

- La reluctancia total se determina teniendo en cuenta la morfología del circuito:

$$\mathfrak{R}_T = \mathfrak{R}_1 + \frac{\mathfrak{R}_2 \mathfrak{R}_3}{\mathfrak{R}_2 + \mathfrak{R}_3} = \mathfrak{R}_1 + \frac{\mathfrak{R}_2}{2} = \mathfrak{R}_1 + \frac{6 \mathfrak{R}_1}{2} = 4\mathfrak{R}_1 = 24,3478 \cdot 10^5 \text{ H}^{-1}$$

3°.- Corriente I en el solenoide para que se mantenga el flujo Φ_3

Aplicando la Ley de Ohm al circuito equivalente:

$$\varepsilon = \mathfrak{R}_T \Phi_1 = 4 \mathfrak{R}_1 \Phi_1 \text{ y como } \Phi_1 = 2 \Phi_3 \text{ resulta: } \varepsilon = 8 \mathfrak{R}_1 \Phi_3 = N I$$

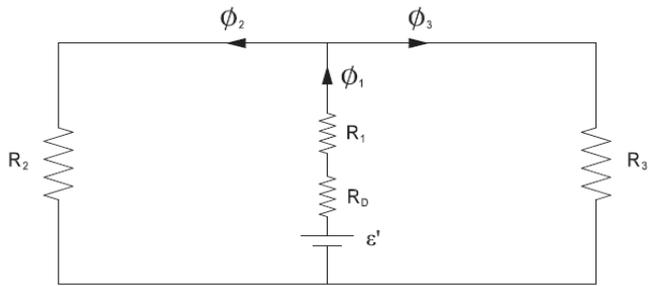
Por tanto la intensidad del solenoide es:

$$I = \frac{8 \mathfrak{R}_1 \Phi_3}{N} = \frac{8 \cdot 6,08695 \cdot 10^5 \cdot 0,345 \cdot 10^{-3}}{500} = 3,360 \text{ A}$$

4°.- Corriente I_1 en el solenoide para que se mantenga el flujo Φ_3

- Nuevo circuito equivalente.

En la columna central del circuito hay un entrehierro de longitud $L_e = 2\text{mm}$, por tanto el nuevo circuito eléctrico equivalente es:



- Reluctancias del nuevo circuito.

Como se mantiene el flujo dado Φ_3 , la permeabilidad del acero colado es la anteriormente hallada

$$\mu = \frac{1,15}{1050} = 1,0952 \cdot 10^{-3} \text{ NA}^{-2}.$$

Para cada tramo del circuito, con sus respectivas dimensiones geométricas las reluctancias son:

$$\mathfrak{R}_1 = \frac{1}{\mu} \frac{L_1}{S_1} = \frac{1}{1,15} \frac{0,4}{6 \cdot 10^{-4}} = 6,08695 \cdot 10^5 \text{ H}^{-1}; \quad \mathfrak{R}_3 = \mathfrak{R}_2 = \frac{1}{\mu} \frac{L_2}{S_2} = \frac{1}{\mu} \frac{3 L_1}{S_1} = 6 \mathfrak{R}_1$$

$$\mathfrak{R}'_1 = \frac{1}{\mu} \frac{L_1 - L_e}{S_1} = \frac{L_1 - L_e}{L_1} \frac{1}{\mu} \frac{L_1}{S_1} = \frac{0,398}{0,400} \mathfrak{R}_1 = 0,9950 \mathfrak{R}_1$$

$$\mathfrak{R}_e = \frac{1}{\mu_0} \frac{L_e}{S_1} = \frac{1}{\mu} \frac{L_1}{S_1} \frac{L_e \mu}{L_1 \mu_0} = \frac{2 \cdot 10^{-3} \cdot 1,15}{4 \cdot 10^{-1} \cdot 4\pi \cdot 10^{-7}} \mathfrak{R}_1 = 4,3578 \mathfrak{R}_1$$

Teniendo en cuenta la morfología del circuito se obtiene la reluctancia total:

$$\mathfrak{R}'_T = \mathfrak{R}'_1 + \mathfrak{R}_e + \frac{\mathfrak{R}_2 \mathfrak{R}_3}{\mathfrak{R}_2 + \mathfrak{R}_3} = 8,3528 \mathfrak{R}_1 = 50,84307 \cdot 10^5 \text{ H}^{-1}$$

- Ley de Ohm aplicada al nuevo circuito equivalente:

$$\varepsilon' = \mathfrak{R}'_T \Phi_1 = 8,3528 \mathfrak{R}_1 \Phi_1 \text{ y como } \Phi_1 = 2 \Phi_3 \text{ resulta: } \varepsilon' = 16,7056 \mathfrak{R}_1 \Phi_3 = N I_1$$

Por tanto la intensidad del solenoide para mantener el flujo magnético Φ_3 es:

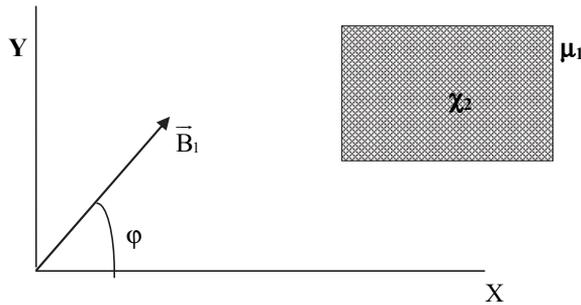
$$I_1 = \frac{16,7056 \cdot \mathfrak{R}_1 \cdot \Phi_3}{N} = \frac{16,7056 \cdot 6,08695 \cdot 10^5 \cdot 0,345 \cdot 10^{-3}}{500} = 7,016 \text{ A}$$

PROBLEMA 5.9

Una delgada placa con forma de paralelepípedo es de material magnético homogéneo, isotrópico, y susceptibilidad magnética χ_2 , se encuentra inmersa en un dominio indefinido, homogéneo, isotrópico y permeabilidad magnética μ_1 , en el cual actúa un campo magnético uniforme, expresado en coordenadas cartesianas mediante $\vec{B}_1 = B_1 \cos \varphi \vec{i} + B_1 \sin \varphi \vec{j}$, según se muestra en la figura.

Se pide determinar, en función de las componentes del campo magnético, de la permeabilidad y la susceptibilidad magnéticas dadas:

- 1°.- \vec{B}_2 en el centro de la placa magnética.
- 2°.- \vec{H}_2 en el centro de la placa magnética.
- 3°.- \vec{M}_2 en el centro de la placa magnética.
- 4°.- \vec{m}_2 de la placa magnética.
- 5°.- Relación entre ángulos de incidencia y de refracción que las líneas del campo magnético forman con la normal a la superficie de separación de los dos medios.



SOLUCIÓN

1°.- \vec{B}_2 en el centro de la placa magnética

En el medio exterior de la placa: $\vec{B}_1 = B_1 \cos \varphi \vec{i} + B_1 \sin \varphi \vec{j} = B_{1N} \vec{i} + B_{1T} \vec{j}$ [1]

Como el campo magnético es solenoidal, $\vec{\nabla} \cdot \vec{B}_1 = 0$, en la superficie de discontinuidad de los dos medios materiales magnéticos, existe continuidad en las componentes del campo magnético normales a la referida superficie de discontinuidad, por tanto:

$$B_{1N} = B_{2N} = B_1 \cos \varphi$$

En ausencia de corrientes en la superficie de discontinuidad de los dos medios materiales magnéticos, mediante la aplicación de la ley de Ampère, se verifica que existe continuidad de las componentes tangenciales de la excitación magnética:

$$H_{1T} = H_{2T} = \frac{1}{\mu_2} B_1 \sin \varphi.$$

Las componentes tangenciales del campo magnético son discontinuas:

$$\frac{B_{1T}}{B_{2T}} = \frac{\mu_1 H_{1T}}{\mu_2 H_{2T}} = \frac{\mu_1}{\mu_2} \text{ por tanto: } B_{2T} = \frac{\mu_2}{\mu_1} B_{1T} = \frac{\mu_2}{\mu_1} B_1 \sin \varphi,$$

Sustituyendo en [1], nos queda en el centro de la placa:

$$\vec{B}_2 = B_1 \cos \varphi \vec{i} + \frac{\mu_2}{\mu_1} B_1 \sin \varphi \vec{j} = B_1 \cos \varphi \vec{i} + \frac{\mu_0 [1 + \chi_2]}{\mu_1} B_1 \sin \varphi \vec{j} \quad [2]$$

2°.- \vec{H}_2 en el centro de la placa magnética

Como $\vec{H}_2 = \frac{\vec{B}_2}{\mu_0[1+\chi_2]}$ a partir del campo magnético determinado en el anterior apartado obtenemos la excitación magnética dentro de la placa de material magnético:

$$\vec{H}_2 = H_{2_N} \vec{i} + H_{2_T} \vec{j} = \frac{1}{\mu_0[1+\chi_2]} B_1 \cos \varphi \vec{i} + \frac{1}{\mu_1} B_1 \sin \varphi \vec{j}$$

3°.- \vec{M}_2 en el centro de la placa magnética

Por definición, la imantación es: $\vec{M}_2 = \chi_2 \vec{H}_2 = \frac{\chi_2}{\mu_0[1+\chi_2]} \vec{B}_2$, y como conocemos, del apartado 2°, la excitación magnética dentro de la placa resulta:

$$\vec{M}_2 = M_{2_N} \vec{i} + M_{2_T} \vec{j} = \frac{\chi_2}{\mu_0[1+\chi_2]} B_1 \cos \varphi \vec{i} + \frac{\chi_2}{\mu_1} B_1 \sin \varphi \vec{j}$$

4°.- \vec{m}_2 de la placa magnética

El momento magnético, es por definición, el cociente entre la imantación de la placa y el volumen τ ocupado por el material de dicha placa, por lo tanto resulta;

$$\vec{m}_2 = \frac{\vec{M}_2}{\tau} = \frac{\chi_2}{\tau \mu_0[1+\chi_2]} B_1 \cos \varphi \vec{i} + \frac{\chi_2}{\tau \mu_1} B_1 \sin \varphi \vec{j}$$

5°.- Relación entre ángulos de incidencia y de refracción de las líneas del campo magnético

Según la figura, la tangente del ángulo de incidencia es: $\text{tg } \varphi = \frac{B_{1_T}}{B_{1_N}}$

Según la figura, la tangente del ángulo de refracción es: $\text{tg } \theta = \frac{B_{2_T}}{B_{2_N}}$

Dividiendo entre si ambas expresiones y teniendo en cuenta las relaciones antes obtenidas de las componentes normales y tangenciales del campo magnético, en la superficie de separación de los dos medios materiales magnéticos, $B_{1_N} = B_{2_N}$ y $\frac{B_{1_T}}{B_{2_T}} = \frac{\mu_1}{\mu_2}$ resulta

$$\text{finalmente: } \frac{\text{tg } \varphi}{\text{tg } \theta} = \frac{\frac{B_{1_T}}{B_{1_N}}}{\frac{B_{2_T}}{B_{2_N}}} = \frac{B_{1_T}}{B_{2_T}} = \frac{\mu_1}{\mu_2} = \frac{\mu_1}{\mu_0[1+\chi_2]}$$

PROBLEMA 5.10

Un imán permanente cilíndrico tiene las dimensiones: longitud ℓ y sección recta S . Sobre un cilindro de plástico de iguales dimensiones se construye un solenoide de N espiras recorrido por una corriente eléctrica I .

Suponiendo que el imán permanente y el solenoide son equivalentes, se pide determinar:

1°.- Imanación del imán.

2°.- Masa magnética de cada polo del imán.

Ahora el imán permanente está situado en el vacío, su centro geométrico O coincide con el origen de coordenadas de un sistema ortogonal $OXYZ$ y el imán puede girar libremente alrededor del eje OZ ; su momento dipolar inicialmente coincide con la dirección y sentido de la bisectriz del plano XOY . Sobre el imán actúa una excitación magnética uniforme:

$$\vec{H} = H \vec{i}. \text{ Se desea hallar:}$$

3°.- Par mecánico que actúa sobre el imán.

4°.- Fuerza sobre cada polo magnético.

Una vez el imán ha alcanzado su posición de equilibrio, debido a la actuación de la excitación magnética exterior, determinar:

5°.- Campo magnético total en el interior del imán.

SOLUCIÓN

1°.- Imanación del imán

Como son equivalentes el solenoide y el imán permanente, sus momentos magnéticos han de ser iguales y por tanto se cumple: $|\vec{m}|_{\text{SOLENOIDE}} = N I S = |\vec{m}|_{\text{IMÁN}} = m$

$$\text{La imanación del imán es: } M = \frac{m}{\tau} = \frac{N I S}{\ell S} = \frac{N I}{\ell}$$

2°.- Masa magnética de cada polo del imán

En el imán, la relación que existe entre el momento magnético y el polo es:

$$|\vec{m}|_{\text{SOLENOIDE}} = N I S = |\vec{m}|_{\text{IMÁN}} = p \ell; \quad \vec{m}_{\text{IMÁN}} = p \vec{\ell} = \frac{N I S}{\ell} \vec{\ell}$$

$$\text{Por tanto despejando, obtenemos el valor del polo: } p = \frac{|\vec{m}|_{\text{IMÁN}}}{\ell} = \frac{N I S}{\ell}$$

3°.- Par mecánico que actúa sobre el imán

El par mecánico que se ejerce sobre el imán cuando se encuentra dentro de la región del espacio donde existe un campo magnético, se define como el producto vectorial del momento magnético del imán por el campo magnético exterior; dichos vectores son:

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{m}_{\text{IMÁN}} = N I S \left[\frac{\sqrt{2}}{2} \vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{j} \right] \\ \vec{B}_0 = \mu_0 H \vec{i} \end{array} \right\} \vec{M}_{\text{MECÁNICO}} = \vec{m}_{\text{IMÁN}} \times \vec{B}_0$$

$$\vec{M}_{\text{MECÁNICO}} = N I S \left[\frac{\sqrt{2}}{2} \vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{j} \right] \times \mu_0 H \vec{i} = N I S \mu_0 H \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \mu_0 N I S H \vec{k}$$

El par mecánico que el campo magnético exterior \vec{B}_0 ejerce sobre el imán permanente, tiende a hacerlo girar alrededor del eje OZ, que pasa por su centro, hasta alcanzar la posición de equilibrio, en dicha posición el imán se orienta totalmente según la dirección del mencionado campo magnético exterior, dicho par mecánico es:

4°.- Fuerza sobre cada polo magnético

Las fuerzas magnéticas que el campo $\vec{B}_0 = \mu_0 H \vec{i}$ crea en cada polo del imán se deducen de la expresión: $\vec{M}_{\text{MECÁNICO}} = \vec{m}_{\text{IMÁN}} \times \vec{B}_0 = \vec{\ell} \times \vec{F} = \vec{\ell} \times p \vec{B}$

Sobre polo norte la fuerza es: $\vec{F}_N = p \vec{B} = \frac{N I S}{\ell} \mu_0 H \vec{i}$

Sobre polo sur la fuerza es: $\vec{F}_S = -p \vec{B} = -\frac{N I S}{\ell} \mu_0 H \vec{i}$

5°.- Campo magnético total en el interior del imán

Dentro del imán el campo magnético total es la suma del campo magnético exterior, más el campo magnético producido por la propia imantación del imán permanente:

$$\vec{B}_T = \vec{B}_0 + \vec{B}_M = \mu_0 \vec{H} + \mu_0 \vec{M} = \mu_0 H \vec{i} + \mu_0 \frac{N I}{\ell} \vec{i} = \mu_0 \left[H + \frac{N I}{\ell} \right] \vec{i}$$

CAPÍTULO VI

INDUCCIÓN ELECTROMAGNÉTICA

PROBLEMA 6.1

Sobre una esfera de susceptibilidad magnética χ_m y radio R , se hace un bobinado regular de espiras, unas junto a otras, cubriendo toda la superficie esférica, de tal manera que se supone que los planos de las espiras son siempre normales a un diámetro de la esfera, obteniendo así de esta forma un devanado uniforme sobre la superficie esférica.

El hilo del conductor metálico con el que se hace el bobinado antes descrito, tiene un diámetro exterior es "e" y por dicho hilo se hace circular una corriente eléctrica de intensidad I . Determinar:

1°.- Campo magnético B_0 en el centro de la esfera, creado por la corriente I .

2°.- Momento magnético del solenoide.

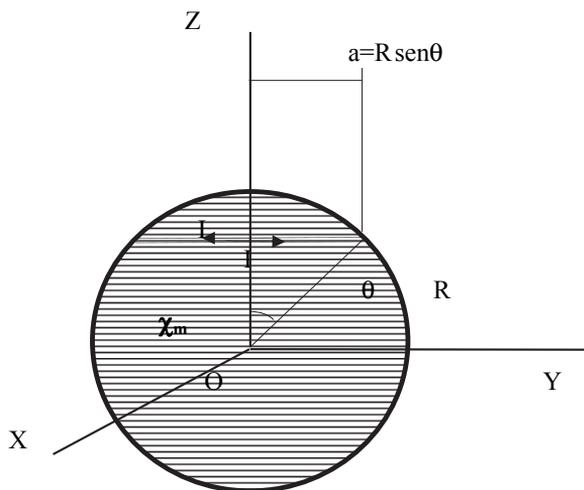
3°.- Módulo $|\vec{M}|$ del vector imanación inducida del medio.

4°.- Coeficiente de autoinducción L de dicho solenoide, suponiendo que dentro de la esfera el campo magnético creado por el solenoide permanece uniforme y vale \vec{B}_0 .

DATOS: $\chi_m = 4,5 \cdot 10^{-6}$; $e = 2,5$ mm; $R = 50$ cm; $I = 15$ A.

SOLUCIÓN**1°.- Campo magnético B en el centro de la esfera, creado por la corriente I**

Se determinará el campo magnético creado por el solenoide, mediante la aplicación del campo magnético creado por una espira circular en un punto de su eje y después se integrará a todas las espiras que constituyen el solenoide bobinado sobre la superficie esférica.



El campo magnético B_{o1} creado por una espira circular de radio "a", cuando circula una corriente eléctrica I , en su centro O , perteneciente a su eje de simetría es:

$$B_{o1} = \frac{\mu}{2} I \frac{a^2}{R^3} = \frac{\mu}{2} I \frac{\sin^2 \theta}{R} \quad [1]$$

Como $x = R \cos \theta$, determinaremos el número de espiras de espesor "e" que hay en un elemento de longitud dx: $dn = \frac{dx}{e} = \frac{d(R \cos \theta)}{e} = -\frac{R}{e} \sin \theta d\theta$.

Por tanto el campo magnético creado por las espiras contenidas en un elemento "dx" será, según la ecuación [1]: $dB_o = B_{o1} dn = \frac{\mu}{2} I \frac{\sin^2 \theta}{R} [-\frac{R}{e} \sin \theta d\theta] = -\frac{\mu}{2e} I \sin^3 \theta d\theta$

Integrando en toda la superficie esférica a través del ángulo θ , los límites varían entre: 0 y π

$$B_o = \int_0^\pi dB_o = -\frac{\mu}{2e} I \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta; \text{ integrando: } \overline{B_o} = \frac{2 \mu_o [\chi_m + 1]}{3 e} I \overline{k} \quad [2]$$

Aplicación numérica: $\overline{B_o} = \frac{2 \cdot 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} [1 + 4,5 \cdot 10^{-6}]}{3 \cdot 2,5 \cdot 10^{-3}} \cdot 15 \overline{k} = 5,0265 \cdot 10^{-3} \overline{k} \text{ T}$

2º.- Momento magnético del solenoide

Para determinarlo, partiremos del momento magnético creado por una espira plana de forma circular y de radio $a = R \sin \theta$, cuyo momento magnético es: $m_1 = S I = \pi I R^2 \sin^2 \theta$.

Las "dn" espiras que están contenidas en un elemento de longitud dx, producen un momento magnético diferencial:

$$dm = m_1 dn = \pi I R^2 \sin^2 \theta [-\frac{R}{e} \sin \theta d\theta] = -\frac{\pi R^3 I}{e} \sin^3 \theta d\theta$$

Mediante la integración entre los ángulos 0 y π para abarcar todas las espiras de la esfera, se obtiene el momento magnético generado por el solenoide:

$$m = \int_0^\pi dm = -\frac{\pi R^3 I}{e} \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta. \text{ Integrando se obtiene: } m = \frac{4\pi R^3 I}{3 e}$$

Aplicación numérica: $m = \frac{4 \pi [50 \cdot 10^{-2}]^3 15}{3 \cdot 2,5 \cdot 10^{-3}} = 3,1416 \cdot 10^3 \text{ A m}^2$

3º.- Módulo $|\overline{M}|$ del vector imanación inducida del medio

El módulo del vector imanación es el momento magnético por unidad de volumen, por lo tanto en nuestro caso particular resulta:

$$|\overline{M}| = \frac{\int |d\overline{m}|}{\iiint d\tau} = \frac{\frac{4\pi R^3 I}{3 e}}{\frac{4\pi R^3}{3}} = \frac{I}{e}. \text{ Aplicación numérica } |\overline{M}| = \frac{15}{2,5 \cdot 10^{-3}} = 6 \cdot 10^3 \text{ A m}^{-1}$$

4º.- Coeficiente de autoinducción L del solenoide

Se define la autoinducción L, como el cociente entre el cociente del flujo magnético que atraviesa el solenoide debido a su propio campo magnético, y la corriente eléctrica que al circular por el solenoide crea el citado campo magnético.

- Campo magnético, supuesto constante en el interior de la esfera, e igual al campo en su centro O, creado por el solenoide esférico, es según [2] :

$$\vec{B}_0 = \frac{2 \mu_0 [\chi_m + 1]}{3 e} I \vec{k}$$

- Flujo del campo magnético que atraviesa una sola espira de radio $a = R \sin \theta$:

$$\Phi_{1 \text{ espira}} = \vec{B} \cdot \vec{S} = \frac{2 \mu_0 [\chi_m + 1]}{3 e} I \vec{k} \cdot \pi R^2 \sin^2 \theta \vec{k}$$

- Flujo del campo magnético que atraviesa las espiras dn que hay en el elemento dx :

$$d\Phi = d\Phi_{1 \text{ espira}} \, dn = d\Phi_{1 \text{ espira}} \frac{dx}{e} = -\frac{2 \mu_0 [\chi_m + 1]}{3 e} I \pi R^2 \sin^2 \theta \frac{R}{e} \sin \theta \, d\theta$$

$$\text{Operando: } d\Phi = -\frac{2 \mu_0 [\chi_m + 1]}{3 e^2} I \pi R^3 \sin^3 \theta \, d\theta$$

- Flujo del campo magnético que atraviesa todas las espiras del solenoide:

$$\Phi_{\text{TOTAL}} = \int_0^\pi d\Phi = -\frac{2 \mu_0 [\chi_m + 1]}{3 e^2} I \pi R^3 \int_0^\pi \sin^3 \theta \, d\theta = \frac{8 \pi \mu_0 [\chi_m + 1]}{9 e^2} I R^3$$

$$\text{La autoinducción del solenoide es: } L = \frac{\Phi_{\text{TOTAL}}}{I} = \frac{8 \pi \mu_0 [\chi_m + 1]}{9 e^2} R^3$$

$$\text{Aplicación numérica: } L = \frac{8 \pi \cdot 4 \pi \cdot 10^{-7} [1 + 4,5 \cdot 10^{-6}]}{9 [2,5 \cdot 10^{-3}]^2} 0,5^3 = 701,838 \cdot 10^{-3} \text{ H}$$

PROBLEMA 6.2

Una bobina tiene una resistencia $R=1 \Omega$ y una autoinducción $L=100 \text{ H}$, se conecta mediante un interruptor, a un generador eléctrico de corriente continua que produce una diferencia de potencial entre sus bornes de 100 V . Se pide calcular:

- 1°.- Intensidad final de la corriente.
- 2°.- Tiempo que ha de transcurrir para que la corriente alcance la mitad del valor anterior.
- 3°.- Variación temporal inicial de la corriente.
- 4°.- Variación temporal de la corriente en el tiempo calculado en apartado 2°.
- 5°.- Tiempo necesario para que la intensidad difiera en una diezmilésima del valor final.
- 6°.- Constante de tiempo del circuito.

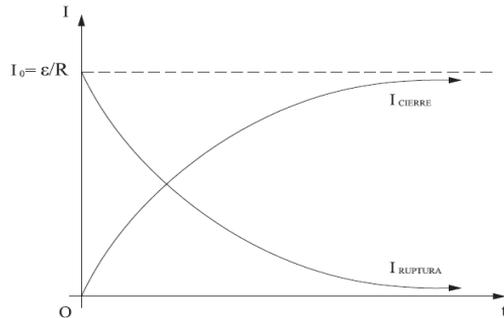
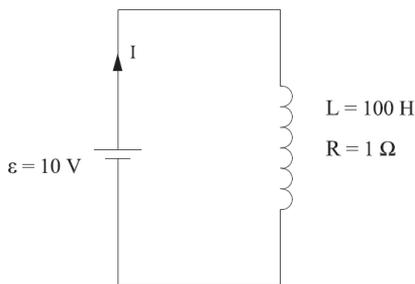
SOLUCIÓN

1°.- Intensidad final de la corriente

La expresión de la ley de Ohm aplicada al circuito, cuando cerramos el interruptor, teniendo en cuenta la f.e.m. autoinducida en la bobina, es: $\varepsilon - L \frac{dI}{dt} = R I$

Integrando se obtiene la solución de esta ecuación diferencial de primer orden, que representa la extracorrente de cierre del circuito: $I = \frac{\varepsilon}{R} [1 - e^{-\frac{R}{L}t}]$ [1]

Haciendo en la ecuación anterior $t \rightarrow \infty$: $I_{\infty} = \frac{\varepsilon}{R} [1 - e^{-\frac{R}{L}\infty}] = \frac{\varepsilon}{R} [1 - 0] = \frac{100}{1} = 100 \text{ A}$



2°.- Tiempo que ha de transcurrir para que la corriente alcance la mitad del valor anterior

Imponiendo esta condición en la ecuación [1], resulta:

$$I_{t_1} = \frac{I_{\infty}}{2} = \frac{\varepsilon}{R} [1 - e^{-\frac{R}{L}t_1}] = \frac{I_{\infty}}{2} [1 - e^{-\frac{R}{L}t_1}]; \text{ operando resulta: } \frac{1}{2} = [1 - e^{-\frac{R}{L}t_1}]; e^{-\frac{R}{L}t_1} = \frac{1}{2}$$

$$\text{Tomando logaritmos: } -\frac{R}{L} t_1 = -\ln 2, \text{ por tanto } t_1 = \frac{L}{R} \ln 2 = \frac{100}{1} \ln 2 = 69,3147 \text{ s}$$

3°.- Variación temporal inicial de la corriente

Para obtener esta variación, se deriva respecto del tiempo en la ecuación [1].

$$\frac{dI}{dt} = \frac{\varepsilon}{R} \frac{R}{L} [e^{-\frac{R}{L}t}] = \frac{\varepsilon}{L} [e^{-\frac{R}{L}t}] \quad [2]$$

Para el instante inicial $t = 0$, operando sobre la ecuación anterior, la variación temporal de I es,

$$\left[\frac{dI}{dt} \right]_{t=0} = \frac{\varepsilon}{L} \left[e^{-\frac{R}{L} \cdot 0} \right] = \frac{\varepsilon}{L} = \frac{100}{100} = 1 \text{ A s}^{-1}$$

4°.- Variación temporal de la corriente en el tiempo calculado en apartado 2°

Para obtener esta variación, se aplica el tiempo $t_1 = 69,3147 \text{ s} = 100 \ln 2$ sobre la ecuación [2].

$$\left[\frac{dI}{dt} \right]_{t=t_1} = \frac{\varepsilon}{L} \left[e^{-\frac{R}{L} \cdot 69,3147} \right] = \frac{100}{1} e^{-\frac{1}{100} \cdot 69,3147} = \frac{100}{1} e^{-\frac{1}{100} \cdot 100 \cdot \ln 2} = 50 \text{ A s}^{-1}$$

5°.- Tiempo necesario para que la intensidad difiera en una diezmilésima del valor final

Se ha de cumplirse por tanto que: $I_{\infty} - I = 0,0001 I_{\infty}$, es decir: $I = 0,9999 I_{\infty}$

Llevando este valor a la ecuación [1], resulta

$$I = \frac{\varepsilon}{R} \left[1 - e^{-\frac{R}{L} t_2} \right] = I_{\infty} \left[1 - e^{-\frac{R}{L} t_2} \right] = 0,9999 I_{\infty}$$

Operando se llega a: $e^{-\frac{R}{L} t_2} = 10^{-4}$ y tomando logaritmos neperianos en esta expresión, resulta finalmente el tiempo necesario para que la intensidad difiera en una diezmilésima del valor final:

$$t_2 = 4 \left[\ln 10 \right] \frac{L}{R} = 4 \left[\ln 10 \right] \frac{100}{1} = 9,210 \cdot 10^2 \text{ s}$$

6°.- Constante de tiempo del circuito

La constante de tiempo del circuito se define como $\tau = \frac{L}{R}$ y representa físicamente el tiempo necesario para que la corriente de cierre pase a ser 0,6329 de la corriente final:

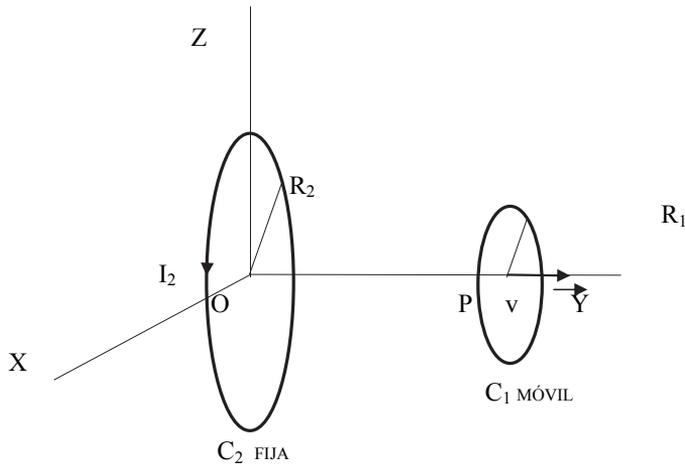
$$I_{\tau} = \frac{\varepsilon}{R} \left[1 - e^{-\frac{R}{L} \tau} \right] = \frac{\varepsilon}{R} \left[1 - e^{-1} \right] = \frac{\varepsilon}{R} \left[\frac{e-1}{e} \right] = 0,6329 I_{\infty}$$

Cuanto mayor sea este valor, tanto mayor será el tiempo necesario para alcanzar la corriente final y más durará el transitorio correspondiente. En este caso del proceso de cierre o conexión del generador al circuito mediante el interruptor, la constante de tiempo

$$\text{vale } \tau = \frac{L}{R} = 100 \text{ s}$$

PROBLEMA 6.3

Sean dos espiras planas C_2 y C_1 , metálicas, circulares de radios R_2 y R_1 , ambas tienen el mismo eje de simetría, están situadas en planos paralelos y se cumple $R_2 \gg R_1$.

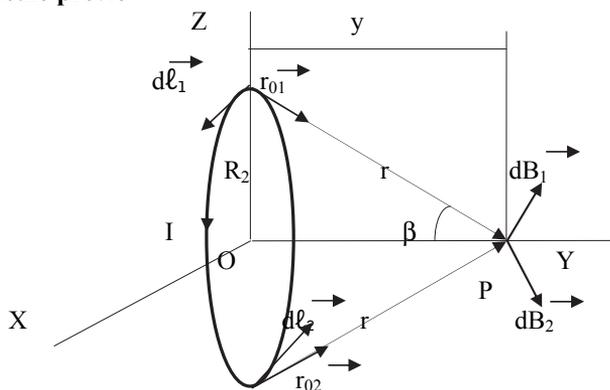


La espira C_1 se mueve a lo largo de su eje de simetría con velocidad constante v , respecto a la espira C_2 que está fija en el plano XOZ , por esta espira C_2 circula una corriente I_2 . Suponiendo que el campo magnético que la espira C_2 crea en la espira C_1 , es uniforme e igual al que crearía en el centro de C_1 , determinar:

- 1°.- F.e.m. inducida en C_1 , cuando $I_2 = I_{02} \sin \omega t$.
 - 2°.- Tiempo para el cual se anula la f.e.m. calculada en apartado anterior.
 - 3°.- F.e.m. inducida en C_1 , cuando $I_2 = \text{cte}$.
- DATOS: $R_2 = 10 \text{ m}$; $R_1 = 1 \text{ cm}$; $I_2 = 100 \sin 100 \pi t \text{ A}$; $I_1 = 25 \text{ A}$; $v = 5 \text{ m s}^{-1}$

SOLUCIÓN

- Cálculo previo



Mediante la ley de Ampère-Laplace se va a determinar el campo magnético creado por una espira circular de radio R , recorrida por una corriente I , en un punto P de su eje de simetría

$$EE'. \quad d\vec{B}_P = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{[d\vec{\ell} \times \vec{r}_0]}{r^2}$$

Como existe simetría axial respecto del eje EE', al tomar dos elementos diferenciales de espira diametralmente opuestos, se anulan las componentes del campo magnético normales al eje de simetría EE' y solo nos quedan las componentes del campo magnético que tienen la dirección del eje de simetría.

$$d\vec{B}_p = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{[d\vec{\ell} \times \vec{r}_0]}{r^2} = d\vec{B}_1 + d\vec{B}_2 = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{[d\vec{\ell}_1 \times \vec{r}_{01}]}{r^2} + \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{[d\vec{\ell}_2 \times \vec{r}_{02}]}{r^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} d\ell \sin\beta \vec{j}$$

$d\ell = R_2 d\phi$; $\sin\beta = \frac{R_2}{r}$; $r = \sqrt{R_2^2 + y^2}$; al recorrer la espira el ángulo ϕ varía entre: 0 y 2π .

Sustituyendo las expresiones del campo magnético, integramos entre los ángulos ϕ : 0 y 2π .

$$\vec{B}_p = \int_0^{2\pi} d\vec{B}_p = \frac{\mu_0 I R_2^2}{4\pi [R_2^2 + y^2]^{3/2}} \int_0^{2\pi} d\phi \vec{j} \quad \text{Integrando y operando}$$

El campo magnético creado por una espira circular en un punto P de su eje de simetría:

$$\vec{B}_p = \frac{\mu_0 I R_2^2}{2 [R_2^2 + y^2]^{3/2}} \vec{j}$$

1º.- F.e.m. inducida en C₂, cuando I₂= I₀₂ sen ωt

Para determinar la f.e.m. inducida en C₂ se aplica la ley de Faraday-Henry: $\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt}$

Previamente se ha de calcular el flujo del campo magnético, determinado anteriormente, creado por la corriente que circula por la espira C₁ y que atraviesa la espira C₂.

$$\Phi = \vec{B} \cdot \vec{S} = \frac{\mu_0 I_{02} \text{sen } \omega t R_2^2}{2 [R_2^2 + y^2]^{3/2}} \vec{j} \cdot \pi R_1^2 \vec{j} = \frac{\mu_0 \pi R_1^2 R_2^2 I_{02}}{2} \frac{\text{sen } \omega t}{[R_2^2 + y^2]^{3/2}}$$

El flujo del campo magnético es variable, depende del tiempo y también de la distancia "y" entre los centros de las dos espiras C₁ y C₂.

La f.e.m. inducida se obtiene aplicando la ley de Faraday sobre el flujo:

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = -\left[\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{dy}{dt} \right] = -\frac{\mu_0 \pi R_1^2 R_2^2 I_{02}}{2} \frac{d}{dt} \left[\frac{\text{sen } \omega t}{[R_2^2 + y^2]^{3/2}} \right] \quad \text{siendo } v = \frac{dy}{dt}$$

$$\varepsilon = -\frac{\mu_0 \pi R_1^2 R_2^2 I_{02}}{2} \left[\frac{\omega \cos \omega t}{[R_2^2 + y^2]^{3/2}} - \frac{3 v y \text{sen } \omega t}{[R_2^2 + y^2]^{5/2}} \right] \quad [1]$$

En esta expresión hay dos sumandos, uno debido a que la corriente I₂ es variable en el tiempo y otro debido a que la espira C₁ se mueve con velocidad constante v.

La aplicación numérica, se obtiene sustituyendo valores en la ecuación [1], resulta:

$$\varepsilon = -\frac{4\pi 10^{-7}\pi 10^2 \cdot 10^{-4} \cdot 100}{2} \left[\frac{100\pi \cos 100\pi t}{[10^2 + y^2]^{3/2}} - \frac{3 \cdot 5 y \sin 100\pi t}{[10^2 + y^2]^{5/2}} \right] \text{ V operando}$$

$$\varepsilon = -\pi^2 \left[\frac{20\pi \cos 100\pi t}{[10^2 + y^2]^{3/2}} - \frac{3 y \sin 100\pi t}{[10^2 + y^2]^{5/2}} \right] \cdot 10^{-6} \text{ V}$$

En donde se observa que la f.e.m. inducida es negativa, tiene un valor muy pequeño y depende de la posición donde se encuentre la espira C_2 respecto a la C_1 y además depende del tiempo.

2°.- Tiempo para el cual se anula la f.e.m. calculada en apartado anterior

Se obtendrá igualando a cero la ecuación [1], por tanto:

$$\varepsilon = -\frac{\mu_0\pi R_1^2 R_2^2 I_{02}}{2} \left[\frac{\omega \cos \omega t}{[R_2^2 + y^2]^{3/2}} - \frac{3 v y \sin \omega t}{[R_2^2 + y^2]^{5/2}} \right] = 0 \text{ operando}$$

$$\text{tg } \omega t = \omega \cdot \frac{R_2^2 + y^2}{3 v y} \quad \text{por tanto } t = \frac{1}{\omega} \text{arc tg} \left[\omega \cdot \frac{R_2^2 + y^2}{3 v y} \right]$$

$$\text{La aplicación numérica resulta: } t = \frac{1}{100\pi} \text{arc tg} \left[\frac{20}{3} \pi \frac{100 + y^2}{y} \right] \text{ s.}$$

3°.- F.e.m. inducida en C_1 , cuando $I_2 = \text{cte}$

En este caso la nueva f.e.m. inducida se obtiene aplicando la ley de Faraday:

$$\varepsilon' = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{dy}{dt} = -\frac{\mu_0\pi R_1^2 R_2^2 I_2'}{2} \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{[R_2^2 + y^2]^{3/2}} \right] \text{ siendo } v = \frac{dy}{dt}$$

$$\varepsilon' = \frac{\mu_0\pi R_1^2 R_2^2 I_2'}{2} \frac{3 v y}{[R_2^2 + y^2]^{5/2}}$$

La aplicación numérica, se obtendrá al sustituir valores en la expresión anterior:

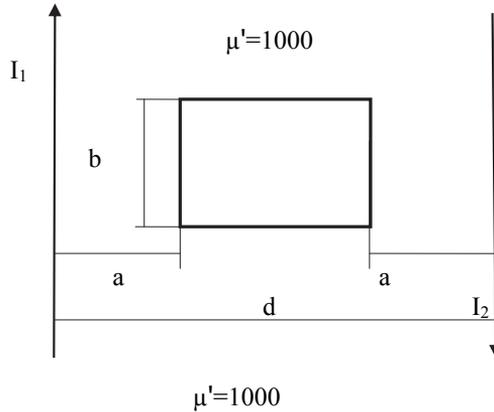
$$\varepsilon' = \frac{4\pi^2 10^{-7} \cdot 10^2 \cdot 10^{-4} \cdot 25}{2} \frac{3 \cdot 5 \cdot y}{[10^2 + y^2]^{5/2}} = 7,402 \frac{y}{[10^2 + y^2]^{5/2}} 10^{-6} \text{ V}$$

La f.e.m. inducida tiene signo positivo, su valor es muy pequeño y depende de la posición donde se encuentre la espira C_2 respecto a la C_1 .

PROBLEMA 6.4

Un lazo rectangular de alambre conductor de dimensiones indicadas en la figura, está situado en el plano de los alambres conductores filiformes paralelos muy largos que constituyen parte de un circuito, y por los que circula una corriente I_1 . Suponiendo que la experiencia se realiza en un medio de permeabilidad magnética relativa $\mu' = 1000$, determinar en unidades del sistema internacional:

- 1°.- Flujo magnético inducido por el circuito sobre el lazo rectangular.
- 2°.- Coeficiente de inducción mutua entre el circuito y el lazo rectangular.



DATOS: $I_1 = 100 \text{ A}$; $b = 20 \text{ cm}$; $d = 8 \text{ a}$.

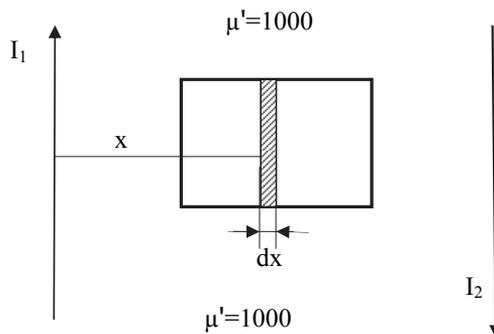
SOLUCIÓN

1°.- Flujo magnético inducido por el circuito sobre el lazo rectangular

En primer lugar determinaremos el campo magnético creado por cada hilo conductor indefinido en el espacio donde se encuentra el lazo rectangular, mediante la aplicación de la ley de Biot y Savart, y después aplicaremos el Principio de Superposición:

$$\vec{B}_T = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 = \frac{\mu_0 \mu' I_1}{2\pi r_1} [\vec{u}_1 \times \vec{u}_{r_1}] + \frac{\mu_0 \mu' I_2}{2\pi r_2} [\vec{u}_2 \times \vec{u}_{r_2}] = \frac{\mu_0 \mu' I_1}{2\pi} \left[\frac{1}{y} + \frac{1}{d-y} \right] \vec{k}$$

El flujo elemental del campo magnético que atraviesa el lazo rectangular es:



$$d\Phi = \vec{B} \cdot d\vec{S} = \frac{\mu_0 \mu' I_1}{2\pi} \left[\frac{1}{y} + \frac{1}{d-y} \right] \vec{k} \cdot b \, dy \vec{k} = \frac{\mu_0 \mu' I_1}{2\pi} \left[\frac{1}{y} + \frac{1}{d-y} \right] b \, dy$$

Integrando para abarcar toda el área correspondiente al lazo rectangular:

$$\Phi = \iint d\Phi = \int_a^{d-a} \frac{\mu_0 \mu' I_1}{2\pi} \left[\frac{1}{y} + \frac{1}{d-y} \right] b \, dy = \frac{\mu_0 \mu' b I_1}{2\pi} \left[\ln y - \ln[d-y] \right]_a^{d-a} = \frac{\mu_0 \mu' b I_1}{\pi} \ln \left[\frac{d-a}{a} \right]$$

Para los valores dados la aplicación numérica del flujo es:

$$\Phi = \frac{4 \pi 10^{-7} \cdot 1000 \cdot 0,20 \cdot 100}{\pi} \ln \left[\frac{8a-a}{a} \right] = 1,556 \cdot 10^{-2} \text{ Wb}$$

2°.- Coeficiente de inducción mutua entre el circuito y el lazo rectangular

El coeficiente de inducción mutua, es el cociente entre el flujo del campo magnético que los conductores crean en el lazo rectangular, antes hallado, y la corriente que circula por los mencionados conductores rectilíneos paralelos:

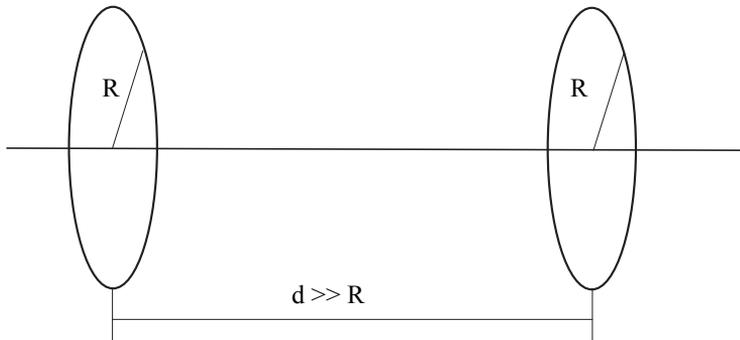
$$M = \frac{\Phi_{21}}{I_1} = \frac{\mu_0 \mu' b I_1}{\pi I_1} \ln \left[\frac{d-a}{a} \right] = \frac{\mu_0 \mu' b}{\pi} \ln \left[\frac{d-a}{a} \right]$$

Para los valores dados obtenemos la aplicación numérica del coeficiente de inducción mutua:

$$M = \frac{\Phi_{21}}{I_1} = \frac{4 \pi 10^{-7} \cdot 1000 \cdot 0,20}{\pi} \ln \left[\frac{8a-a}{a} \right] = 1,556 \cdot 10^{-4} \text{ H}$$

PROBLEMA 6.5

Sean dos espiras circulares de radio R , cuyo eje de simetría es común, situadas en el vacío sobre dos planos paralelos, perpendiculares a dicho eje, de forma que sus centros están separados una distancia $d \gg R$. Se supone que el campo magnético creado por las espiras en puntos de su eje de simetría, se mantiene uniforme en todo el área de las espiras. Calcular:



- 1°.- Coeficiente de autoinducción de las espiras cuando por ellas circula la misma I_1 .
- 2°.- Coeficiente de inducción mutua entre las espiras, en las condiciones del apartado anterior.

En una segunda etapa, por una de las espiras circula una intensidad variable en función del tiempo según la ecuación: $I_2 = -0,01 t + 10$, en donde la intensidad son amperios y el tiempo está dado en segundos, además dicha espira se mueve con un movimiento armónico simple, de muy pequeña amplitud, alrededor de su posición inicial, según la ley de movimiento: $y_2 = 0,001 \text{ sen } 1000 \pi t$, donde la elongación se expresa en metros y el tiempo en segundos. Deducir:

- 3°.- Ecuación de la f. e. m inducida en función del tiempo en la espira que se mueve.

NOTA.- $R = 10 \text{ cm}$; $d = 10 \text{ m}$. Se supondrá $d \gg R$.

SOLUCION**1°.- Coeficiente de autoinducción de las espiras cuando por ellas circula la misma I_1**

Partimos del campo magnético que crea una espira circular de radio R , en un punto de su propio eje de simetría, que se expresa: $\vec{B}_p = \frac{\mu_0 I R^2}{2 [R^2 + y^2]^{3/2}} \vec{j}$ [1] y como además, según

el enunciado, se supone que este campo magnético se mantiene uniforme en todo el área de la espira.

El coeficiente de inducción propia es el cociente entre el flujo del campo magnético a través de la superficie de la espira y la corriente en la espira. Por tanto en la expresión [1], se hace $y = 0$,

$$L_1 = L_2 = \frac{\Phi_{11}}{I_1} = \frac{\overline{B_p} \cdot \overline{S}}{I_1} = \frac{\frac{\mu_0 I_1 R^2}{2 [R^2 + y^2]^{3/2}} \overline{j} \cdot \pi R^2 \overline{j}}{I_1} = \frac{\mu_0 \pi R}{2}$$

2º.- Coeficiente de inducción mutua entre las espiras, en las condiciones del apartado anterior

Partimos también del campo magnético que crea una espira circular de radio R, en un punto de su propio eje de simetría, según la ecuación [1].

Por el enunciado, se supone que este campo magnético se mantiene uniforme en todo el área de las espiras y además se hace la aproximación: $y = d \gg R$.

El coeficiente de inducción mutua es el cociente entre el flujo que una espira crea en la otra, y la corriente de dicha espira:

$$M = \frac{\Phi_{21}}{I_1} = \frac{\overline{B_{21}} \cdot \overline{S_2}}{I_1} = \frac{\frac{\mu_0 I_1 R^2}{2 [R^2 + y^2]^{3/2}} \overline{j} \cdot \pi R^2 \overline{j}}{I_1} = \frac{\mu_0 \pi R^4}{2 [R^2 + d^2]^{3/2}} \approx \frac{\mu_0 \pi R^4}{2 d^3} \quad [2]$$

3º.- Ecuación de la f. e. m inducida en función del tiempo en la espira que se mueve

Para determinar la f.e.m. inducida se aplica la ley de Faraday: $\varepsilon = -\frac{d \Phi_{21}}{dt}$

$$\varepsilon = -\frac{d \Phi_{21}}{dt} = -\frac{d}{dt}(M I_2) = -\left[M \frac{d I_2}{dt} + I_2 \frac{d M}{dt} \right] \quad [3]$$

- El coeficiente de inducción mutua M es variable, función del tiempo, ya que la espira se mueve con un movimiento armónico simple de ecuación: $y_2 = 0,001 \text{ sen } 1000 \pi t$, y como resulta que:

- $y = d + y_2 = d + 0,001 \text{ cos } 1000 \pi t \gg R$, llevándolo a la expresión [2], resulta:

$$M \approx \frac{\mu_0 \pi R^4}{2 [d + 0,001 \text{ sen } 1000 \pi t]^3}$$

- La intensidad varía según la ley: $I_2 = -0,01 t + 10$

Por tanto sustituyendo en [3] los valores del coeficiente de inducción mutua y la ley de variación de la intensidad obtenemos la f. e. m. inducida:

$$\varepsilon = -\left[\frac{\mu_0 \pi R^4}{2 [d + 0,001 \text{ sen } 1000 \pi t]^3} \frac{d [-0,01 t + 10]}{dt} + [-0,01 t + 10] \frac{d}{dt} \left[\frac{\mu_0 \pi R^4}{2 [d + 0,001 \text{ sen } 1000 \pi t]^3} \right] \right]$$

$$\varepsilon = -\left[\frac{\mu_0 \pi R^4}{2 [10 + 0,001 \text{ sen } 1000 \pi t]^3} (-10^{-2}) + [-0,01 t + 10] \left[\frac{-3 \mu_0 \pi R^4}{2 [10 + 0,001 \text{ sen } 1000 \pi t]^4} \right] [\pi \text{ cos } 1000 \pi t] \right]$$

$$\varepsilon = \frac{1,9739 \cdot 10^{-12}}{[10 + 0,001 \text{ sen } 1000 \pi t]^4} [10 + 0,001 \text{ sen } 1000 \pi t] + 942,477 [-0,01 t + 10] [\text{cos } 1000 \pi t] \text{ V}$$

PROBLEMA 6.6

Una bobina con una inductancia de 2 H y una resistencia de 10 Ω se conecta repentinamente con una batería de $\mathcal{E}=100$ V, sin resistencia interna. Transcurridos $t=0,1$ s después de haber realizado la conexión, calcúlese:

1°.- Constante de tiempo del circuito.

2°.- Variación de la energía almacenada en la bobina por unidad de tiempo.

3°.- Variación del calor disipado por efecto Joule por unidad de tiempo.

4°.- Variación de la energía proporcionada por la batería por unidad de tiempo.

SOLUCIÓN**1°.- Constante de tiempo del circuito**

La constante de tiempo del circuito se define como $\tau = \frac{L}{R}$ y representa físicamente el tiempo necesario para que la corriente de cierre pase a ser 0,6329 de la corriente final:

$$I_{\tau} = \frac{\mathcal{E}}{R} \left[1 - e^{-\frac{R}{L}\tau} \right] = \frac{\mathcal{E}}{R} \left[1 - e^{-1} \right] = \frac{\mathcal{E}}{R} \left[\frac{e-1}{e} \right] = 0,6329 I_{\infty}$$

Cuanto mayor sea este valor, tanto mayor será el tiempo necesario para alcanzar la corriente final y mas durará el transitorio correspondiente, en este caso de proceso de cierre o conexión del generador al circuito mediante el interruptor, la constante de tiempo

$$\text{es: } \tau = \frac{L}{R} = \frac{2}{10} = 0,2 \text{ s.}$$

2°.- Variación de la energía almacenada en la bobina por unidad de tiempo

La expresión de la ley de Ohm aplicada al circuito, teniendo en cuenta la f.e.m. autoinducida en la bobina es: $\mathcal{E} - L \frac{dI}{dt} = R I$ integrando, se obtiene la solución de esta ecuación diferencial de primer orden, que nos da la extracorrente de cierre del circuito:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} \left[1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right] \quad [1]$$

La energía suministrada por el generador de corriente continua al circuito es:

$$dW = \mathcal{E} I dt = R I^2 dt + L I dI \quad [2]$$

Donde el primer sumando es la energía disipada en forma de calor la resistencia y el segundo sumando es la energía empleada para la creación del campo magnético dentro de la bobina.

Por tanto la energía que suministra el generador se transforma en energía calorífica que se disipa en la resistencia por efecto Joule y en energía magnética que se almacena en la bobina.

$$W_G = W_{\text{JOULE}} + W_{\text{BOBINA}} = W_R + W_L$$

$$\frac{dW_L}{dt} = L I \frac{dI}{dt} = L I \frac{\mathcal{E}}{R} \frac{R}{L} \left[e^{-\frac{R}{L}t} \right] = I \mathcal{E} \left[e^{-\frac{R}{L}t} \right] = \frac{\mathcal{E}^2}{R} \left[1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right] \left[e^{-\frac{R}{L}t} \right]$$

Aplicación numérica: $\frac{dW_L}{dt} = \frac{100^2}{10} [1 - e^{-\frac{10}{2} 0,1}] e^{-\frac{10}{2} 0,1} = 238,651 \text{ W}$

3°.- Variación del calor disipado por efecto Joule por unidad de tiempo

Partiendo de las ecuaciones [1] y [2] llegamos a la variación del calor disipado en R por efecto

Joule que es: $\frac{dW_R}{dt} = R I^2 = \frac{\mathcal{E}^2}{R} \left[1 - e^{-\frac{R}{L} t}\right]^2$

La aplicación numérica es: $\frac{dW_R}{dt} = \frac{100^2}{10} \left[1 - e^{-\frac{10}{2} 0,1}\right]^2 = 154,818 \text{ W}$

4°.- Variación de la energía proporcionada por la batería por unidad de tiempo

En el apartado anterior se parte de las ecuaciones [1] y [2] y se llega a la variación de la

energía suministrada por la batería: $\frac{dW_G}{dt} = I \mathcal{E} = \frac{\mathcal{E}^2}{R} [1 - e^{-\frac{R}{L} t}]$

La aplicación numérica: $\frac{dW_G}{dt} = \frac{100^2}{10} [1 - e^{-\frac{10}{2} 0,1}] = 393,469 \text{ W}$

La comprobación de los dos apartados anteriores se realiza mediante el balance energético de todo el circuito eléctrico:

$$W_G = W_{\text{JOULE}} + W_{\text{BOBINA}} = W_R + W_L = 393,469 = 154,818 + 238,651 \text{ W}$$

PROBLEMA 6.7

Sobre un toroide de sección cuadrada, diámetro exterior D_e y diámetro interior D_i , se arrollan de manera uniforme N espiras por las que circula una corriente eléctrica I .

Se desea saber para este solenoide toroidal, en primer lugar cuando el toroide está hecho de aluminio y luego cuando el material del que está hecho el toroide es de material férreo de naturaleza ferromagnética, del cual detallamos parte de su curva de imantación B-H:

B Tesla	0,60	0,82	0,94	1,02	1,08	1,13	1,17	1,20	1,24	1,27	1,29
H A-vuelta/m	100	200	300	400	500	600	700	800	900	1000	1200

1°.- Excitación magnética H en puntos de la circunferencia media del toroide.

2°.- Campo magnético B en puntos de la circunferencia media del toroide.

3°.- Flujo magnético Φ a través de la sección cuadrada del toroide.

4°.- Coeficiente de autoinducción L .

5°.- Energía magnética.

6°.- F.e.m. autoinducida cuando la corriente I se anula en 0,5 s.

DATOS: $D_e=80$ cm; $D_i=60$ cm; $I=2,474$ A; $N=800$ espiras; $\chi_{Al}=0,82 \cdot 10^{-6}$

SOLUCIÓN**A.- TOROIDE DE ALUMINIO****1°.- Excitación magnética H en puntos de la circunferencia media del toroide**

Se aplica el teorema de Ampère a una circunferencia de radio medio del solenoide toroidal r_m , situada en un plano normal al eje de simetría, como la circunferencia está situada dentro del toroide atraviesa las N espiras, resulta:

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = NI ; \text{ como: } d\vec{\ell} = r_m d\varphi \vec{u}_\varphi \text{ y } \vec{H} = H \vec{u}_\varphi ;$$

$$\int_0^{2\pi} H_{r_m} \vec{u}_\varphi \cdot r_m d\varphi \vec{u}_\varphi = 2\pi r_m H_{r_m} = NI$$

$$H_{r_m} = \frac{NI}{2\pi r_m} \quad [1] . \text{ Aplicación numérica: } H_{r_m} = \frac{800 \cdot 2,474}{2\pi \cdot 35 \cdot 10^{-2}} = 900 \text{ A-v m}^{-1}$$

2°.- Campo magnético B en puntos de la circunferencia media del toroide

Como $B = \mu H$ por tanto según [1], resulta $B_{r_m} = \mu H_{r_m} = \mu \frac{NI}{2\pi r_m}$ como el aluminio es

material paramagnético, por tanto: $\mu = \mu_0 [1 + \chi_{Al}] = \mu_0 [1 + 0,82 \cdot 10^{-6}] \cong 4\pi \cdot 10^{-7}$

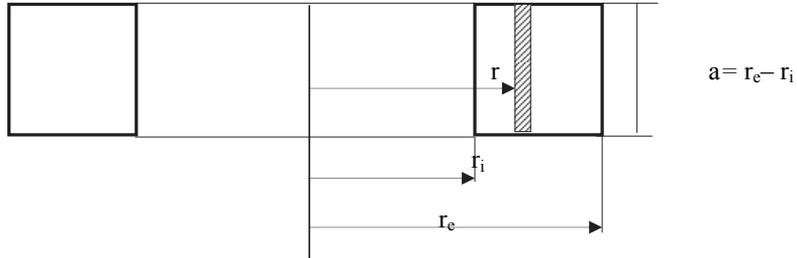
$$B_{r_m} = \mu_0 [1 + \chi_{Al}] \frac{NI}{2\pi r_m} \approx \mu_0 \frac{NI}{2\pi r_m} \quad [2]$$

Aplicación numérica:

$$B_{r_m} = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{800 \cdot 2,474}{2\pi \cdot 35 \cdot 10^{-2}} = 1,1309 \cdot 10^{-3} \text{ T}$$

3°.- Flujo magnético Φ a través de la sección cuadrada del toroide

El flujo elemental del campo magnético a través de 1 espira en la sección recta del anillo es:



$$d\Phi = B \, dS = \mu \frac{N I}{2 \pi r} a \, dr ; \text{sección cuadrada } a = r_e - r_i$$

$$\Phi = \iint d\Phi = \int_{r_i}^{r_e} \mu \frac{N I}{2 \pi r} a \, dr = \frac{\mu N I}{2 \pi} a \ln \frac{r_e}{r_i}$$

$$\Phi = \frac{\mu_0 [1 + \chi_{Al}] N I}{2 \pi} [r_e - r_i] \ln \frac{r_e}{r_i} \approx \frac{\mu_0 N I}{2 \pi} [r_e - r_i] \ln \frac{r_e}{r_i} \quad [3]$$

$$\text{Aplicación numérica: } \Phi = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{800 \cdot 2,474}{2 \pi} [40 - 30] \cdot 10^{-2} \cdot \ln \frac{40}{30} = 1,1387 \cdot 10^{-5} \text{ Wb}$$

4°.- Coeficiente de autoinducción L

Este coeficiente se define como: $L = \frac{\Phi_{\text{TOTAL}}}{I} = \frac{\Phi N}{I}$ teniendo en cuenta la ecuación [3]

$$L = \frac{\mu_0 [1 + \chi_{Al}] N^2}{2 \pi} [r_e - r_i] \ln \frac{r_e}{r_i} \approx \frac{\mu_0 N^2}{2 \pi} [r_e - r_i] \ln \frac{r_e}{r_i} \quad [4]$$

$$\text{Aplicación numérica: } L = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{800^2}{2 \pi} [40 - 30] \cdot 10^{-2} \ln \frac{40}{30} = 3,68 \cdot 10^{-3} \text{ H}$$

5°.- Energía magnética

Se define la energía del campo magnético en la bobina de autoinducción L: $W_M = \frac{1}{2} LI^2$, y como se sabe el valor de L según [4], resulta:

$$W_M = \frac{1}{2} I^2 \frac{\mu_0 [1 + \chi_{Al}] N^2}{2 \pi} [r_e - r_i] \ln \frac{r_e}{r_i} \approx \frac{1}{2} I^2 \frac{\mu_0 N^2}{2 \pi} [r_e - r_i] \ln \frac{r_e}{r_i} \quad [5]$$

$$\text{Aplicación numérica: } W_M = \frac{1}{2} 2,474^2 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{800^2}{2 \pi} [40 - 30] \cdot 10^{-2} \cdot \ln \frac{40}{30} = 1,1262 \cdot 10^{-2} \text{ J}$$

6°.- F.e.m. autoinducida cuando la corriente I se anula en 0,5 s

La f.e.m. inducida en los extremos del solenoide, según la Ley de Faraday es:

$$\varepsilon = -L \frac{dI}{dt} = -\frac{\mu_0 [1 + \chi_{Al}] N^2}{2 \pi} [r_e - r_i] \left[\ln \frac{r_e}{r_i} \right] \left[\frac{\Delta I}{\Delta t} \right] \approx -\frac{\mu_0 N^2}{2 \pi} [r_e - r_i] \left[\ln \frac{r_e}{r_i} \right] \left[\frac{\Delta I}{\Delta t} \right] \quad [6]$$

$$\text{Aplicación numérica: } \varepsilon = -4\pi \cdot 10^{-7} \frac{800^2}{2 \pi} [40 - 30] \cdot 10^{-2} \left[\ln \frac{40}{30} \right] \left[\frac{2,474 - 0}{0 - 0,5} \right] = 1,822 \cdot 10^{-2} \text{ V}$$

B.- TOROIDE DE MATERIAL FÉRREO**1°.- Excitación magnética H en puntos de la circunferencia media del toroide**

Se aplica el teorema de Ampere a una circunferencia de radio medio del solenoide toroidal r_m , situada en un plano normal al eje de simetría, como la circunferencia está situada dentro del toroide atraviesa las N espiras, resulta:

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = NI ; \text{ como: } d\vec{\ell} = r_m d\varphi \vec{u}_\varphi \text{ y } \vec{H} = H \vec{u}_\varphi ;$$

$$\int_0^{2\pi} H_{r_m} \vec{u}_\varphi \cdot r_m d\varphi \vec{u}_\varphi = 2\pi r_m H_{r_m} = NI$$

$$H_{r_m} = \frac{NI}{2\pi r_m} \quad [7]$$

$$\text{Aplicación numérica: } H_{r_m} = \frac{800 \cdot 2,474}{2\pi \cdot 35 \cdot 10^{-2}} = 900 \text{ A-v m}^{-1}$$

Como la excitación magnética no depende el medio, llegamos al mismo resultado obtenido cuando el núcleo es aluminio.

2°.- Campo magnético B en puntos de la circunferencia media del toroide

Mediante la "Curva de imanación" del material magnético, entrando con el valor de la excitación magnética calculada $H = 900 \text{ A-vuelta}$, obtenemos B en el solenoide con núcleo ferromagnético.

$$H = 900 \text{ A-vuelta} \Rightarrow [\text{Curva de imanación}] \Rightarrow B = 1,24 \text{ Teslas} \quad [8]$$

Como $B = \mu H$, resulta $\mu = \frac{B}{H} = \frac{1,24}{900} = 1,3777 \cdot 10^{-3}$; $\mu = \mu_0 [1 + \chi]$ de donde se obtiene la susceptibilidad del material ferromagnético $\chi_{Fe} = 1,0954 \cdot 10^3$, es muy superior a la del aluminio.

3°.- Flujo magnético Φ a través de la sección cuadrada del toroide

Suponiendo que el campo magnético dentro de la sección del toroide de material ferromagnético permanece constante y es valor antes hallado, resulta:

$$\Phi = B S = B [r_c - r_i]^2 \quad [9]$$

$$\text{Aplicación numérica: } \Phi = 1,24 [40 - 30]^2 10^{-4} = 1,24 \cdot 10^{-2} \text{ Wb}$$

4°.- Coeficiente de autoinducción L

$$\text{Este coeficiente se define como: } L = \frac{\Phi_{\text{TOTAL}}}{I} = \frac{\Phi N}{I} \quad [10]$$

$$\text{Aplicación numérica: } L = 1,24 \cdot 10^{-2} \frac{800}{2,474} = 4,009 \text{ H}$$

5°.- Energía magnética

Se define la energía del campo magnético en la bobina de autoinducción

$$L: W_M = \frac{1}{2} LI^2 \quad [11]$$

$$\text{Aplicación numérica: } W_M = \frac{1}{2} 2,474^2 \cdot 4,009 = 12,271 \text{ J}$$

6°.- F.e.m. autoinducida cuando la corriente I se anula en 0,5 s

La f.e.m. inducida en los extremos del solenoide, según la Ley de Faraday es:

$$\varepsilon = -L \frac{dI}{dt} = -L \left[\frac{\Delta I}{\Delta t} \right]$$

Aplicación numérica: $\varepsilon = -4,009 \left[\frac{2,474 - 0}{0 - 0,5} \right] = 19,836 \text{ V}$

PROBLEMA 6.8

El circuito eléctrico filiforme ADCGHFA de la figura, tiene la disposición de las aristas de un cubo de lado "a", y se encuentra en una región del espacio donde existe un campo magnético uniforme \vec{B} , cuyas componentes positivas son $[B_x = B_y = B_z]$.

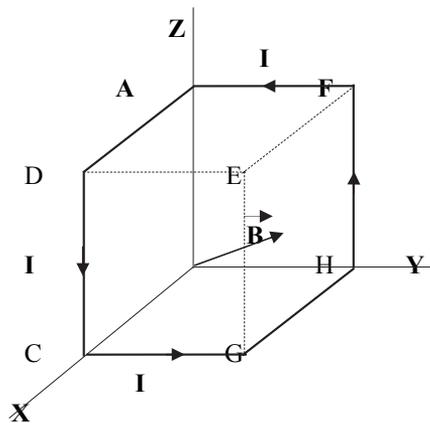
El circuito eléctrico filiforme se somete a un movimiento de traslación uniforme con velocidad $\vec{v} = v [\cos 45^\circ \vec{i} + \sin 45^\circ \vec{j}]$ se pide determinar:

1°.- F. e. m. inducida.

Ahora, dicho circuito, que inicialmente está en la posición indicada, gira alrededor de su arista AB con una velocidad angular constante $\vec{\omega} = \omega \vec{k}$, se pide obtener:

2°.- F.e.m. inducida.

3°.- Aplicación numérica de los apartados anteriores.



DATOS. $B = 5 \cdot 10^{-2} \text{ T}$; $a = 60 \text{ cm}$; $\omega = 300 \text{ r.p.m.}$

SOLUCIÓN

1°.- F.e.m. inducida, debida al desplazamiento \vec{v}

El campo magnético uniforme al ser sus componentes iguales es: $\vec{B} = \frac{\sqrt{3}}{3} B [\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}]$

Aplicamos la Ley de Faraday, para obtener la f.e.m. inducida: $\epsilon_1 = -\frac{d\Phi_{\text{TOTAL}}}{dt}$

- Para una barra metálica, la f.e.m. inducida en sus extremos, cuando se desplaza con velocidad uniforme \vec{v} dentro en un campo magnético constante es:

$$\epsilon_{1_{\text{BARRA}}} = -\frac{d\Phi_1}{dt} = -\frac{d}{dt} \iint \vec{B} \cdot d\vec{S} = -\frac{d}{dt} \iint \vec{B} \cdot [\vec{a} \times d\vec{r}] = -\vec{B} \cdot \left[\vec{a} \times \frac{d\vec{r}}{dt} \right] = -\vec{B} \cdot [\vec{a} \times \vec{v}]$$

- Para todas las barras del circuito, la f.e.m. total se halla mediante el Principio de Superposición

$$\varepsilon_{1 \text{ TOTAL}} = -\frac{d\Phi_{\text{TOTAL}}}{dt} = -\sum \frac{d}{dt} \iint \vec{B} \cdot d\vec{S}_i = -\sum \frac{d}{dt} \iint \vec{B} \cdot [\vec{a}_i \times d\vec{r}] = -\vec{B} \cdot \left[\sum \vec{a}_i \times \frac{d\vec{r}}{dt} \right] = -\vec{B} \cdot \left[\sum \vec{a}_i \times \vec{v} \right]$$

$$\sum \vec{a}_i = a [\vec{i} - \vec{k} + \vec{j} - \vec{i} + \vec{k} - \vec{j}] = \vec{0}$$

Es la suma de los vectores correspondientes a cada una de las seis barras del circuito, según el sentido de circulación de la corriente del enunciado, por tanto sustituyendo el resultado obtenido en la anterior expresión:

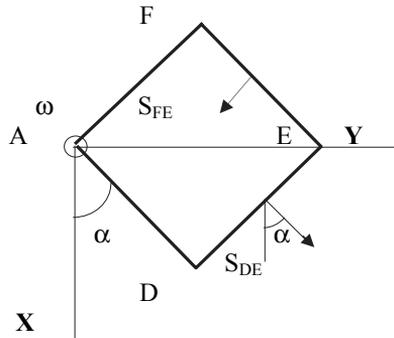
$$\varepsilon_{1 \text{ TOTAL}} = -\vec{B} \cdot \left[\sum \vec{a}_i \times \vec{v} \right] = -\vec{B} \cdot \left[\vec{0} \times v \frac{\sqrt{2}}{2} [\vec{i} + \vec{j}] \right] = 0$$

2º.- F.e.m. inducida, con giro de velocidad angular $\vec{\omega}$

El campo magnético uniforme es: $\vec{B} = \frac{\sqrt{3}}{3} B [\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}]$

Según la Ley de Faraday, la f.e.m. inducida es: $\varepsilon_{2 \text{ TOTAL}} = -\frac{d\Phi_{\text{TOTAL}}}{dt} = -\sum \frac{d\Phi_i}{dt}$

Ahora el circuito cerrado gira con velocidad angular ω , y por tanto también giran las superficies formadas por los lados concurrentes dos a dos en un vértice del mencionado circuito. Estas superficies intervienen para el cálculo del flujo del campo magnético.



- Flujo del campo magnético que atraviesa la cara formada por los lados AD y FA

$$\Phi_{\text{ADFA}} = \vec{B} \cdot \vec{S}_{\text{ADFA}} = \vec{B} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} B [\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}] \cdot a^2 \vec{k} = \frac{\sqrt{3}}{3} B a^2$$

- Flujo del campo magnético que atraviesa la cara formada por los lados DC y GE

$$\Phi_{\text{DCGE}} = \vec{B} \cdot \vec{S}_{\text{DCGE}} = \frac{\sqrt{3}}{3} B [\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}] \cdot a^2 [\cos \omega t \vec{i} + \text{sen } \omega t \vec{j}] = \frac{\sqrt{3}}{3} B a^2 [\cos \omega t + \text{sen } \omega t]$$

- Flujo del campo magnético que la cara formada por los lados GH y FE

$$\Phi_{\text{GHFE}} = \vec{B} \cdot \vec{S}_{\text{GHFE}} = \frac{\sqrt{3}}{3} B [\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}] \cdot a^2 [+ \sin \omega t \vec{i} - \cos \omega t \vec{j}] = \frac{\sqrt{3}}{3} B a^2 [\sin \omega t - \cos \omega t]$$

Aplicando el principio de Superposición la f.e.m. inducida total en el circuito es:

$$\varepsilon_{2 \text{ TOTAL}} = - \frac{d \Phi_{\text{TOTAL}}}{dt} = - \Sigma \frac{d \Phi_i}{dt} = - \frac{d}{dt} \left[\frac{\sqrt{3}}{3} B a^2 [1 + 2 \sin \omega t] \right] = - 2 \frac{\sqrt{3}}{3} B a^2 \omega \cos \omega t$$

3º.- Aplicación numérica de los apartados anteriores

- Traslación: $\varepsilon_{1 \text{ TOTAL}} = 0 \text{ V}$

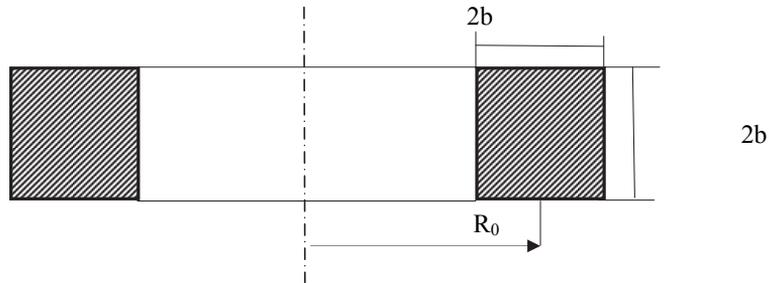
- Rotación: $\varepsilon_{2 \text{ TOTAL}} = -2 \frac{\sqrt{3}}{3} 5 \cdot 10^{-2} 0,6^2 \frac{2 \pi 300}{60} \cos 10 \pi t = -0,65296 \cos 10 \pi t \text{ V}$

PROBLEMA 6.9

Sea un solenoide toroidal de aluminio, de radio medio R_0 , constituido por una bobina de N espiras arrolladas de forma regular sobre su núcleo, cuya pequeña sección es cuadrada de lado $2b$, siendo la susceptibilidad magnética del aluminio χ_{AL} .

Otra bobina de " n " espiras, está regularmente arrollada sobre mismo el solenoide toroidal, mediante conductor aislado, la pequeña sección de la bobina también es cuadrada, y su lado es prácticamente $2b$, está dispuesta como se representa en la figura.

Si por el devanado del solenoide toroidal de N espiras, se hace circular una corriente alterna de intensidad es $I = I_0 \text{ sen } \omega t$, se pide expresar en función de los datos conocidos:



- 1°.- F.e.m. inducida en los extremos de la bobina de n espiras.
- 2°.- Autoinducción del solenoide toroidal de la bobina de N espiras.
- 3°.- Inducción mutua.

Supongamos ahora, que ambas bobinas se conectan en serie y que por las dos se hace circular una corriente alterna tal que su intensidad es $I = I_0 \text{ sen } \omega t$, se pide determinar:

- 4°.- F.e.m. inducida en los extremos de ambas bobinas.

DATOS: $R_0 = 70 \text{ cm}$; $\chi_{AL} = 0,82 \cdot 10^{-6}$; $N = 1000$ espiras; $2b = 6 \text{ cm}$; $n = 200$ espiras; $I_0 = 25 \text{ A}$; $\omega = 100 \pi$

SOLUCIÓN

1°.- F.e.m. inducida en los extremos de la bobina de n espiras

La f.e.m. inducida se obtiene mediante la ley de Faraday, por tanto, hallaremos en primer lugar el campo magnético creado por el solenoide, a continuación el flujo creado por dicho campo al atravesar el solenoide, finalmente la f.e.m. inducida es la derivada del flujo respecto al tiempo.

- Campo magnético creado por el solenoide toroidal de N espiras:

Se obtendrá aplicando la ley de Ampère a una circunferencia de radio genérico r , situada en un plano perpendicular al eje de simetría del solenoide toroidal de N espiras. Dicha circunferencia atraviesa las N espiras por las que circula la corriente I :

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = \Sigma I, \text{ en coordenadas cilíndricas ortogonales}$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H} = \mu_0 [1 + \chi_{AL}] \frac{NI}{2\pi r} \vec{u}_\phi$$

El campo es perpendicular al eje de simetría del toroide y tangente a la circunferencia de radio r .

- Flujo del campo magnético \vec{B} , al atravesar la bobina cuadrada de lado $2b$ y de n espiras, como $d\vec{S} = 2b \, dr \, \vec{u}_\phi$ será:

$$\Phi_{n \text{ espiras}} = n \iint \vec{B} \cdot d\vec{S} = n \frac{\mu}{2\pi} \frac{N I}{\int_{R_0-b}^{R_0+b} 2b \frac{dr}{r}} = n \frac{\mu_0 [1 + \chi_{AL}] b N I}{\pi} \ln \frac{R_0 + b}{R_0 - b}$$

La f.e.m. inducida en la bobina de n espiras se obtendrá mediante la ley de Faraday, cuando circula por las espiras del solenoide toroidal la corriente alterna $I = I_0 \sin \omega t$:

$$\varepsilon = - \frac{d \Phi_{n \text{ espiras}}}{dt} = \mu_0 [1 + \chi_{AL}] \frac{N n b}{\pi} \ln \frac{R_0 + b}{R_0 - b} \cdot \frac{dI}{dt} = - \mu_0 [1 + \chi_{AL}] \frac{N n I_0 b \omega}{\pi} \ln \frac{R_0 + b}{R_0 - b} \cdot \cos \omega t$$

Aplicación numérica:

$$\varepsilon = - 4\pi \cdot 10^{-7} [1 + 0,082 \cdot 10^{-6}] \frac{1000 \cdot 200 \cdot 25 \cdot 3 \cdot 10^{-2} \cdot 100 \pi}{\pi} \ln \frac{73}{67} \cos 100 \pi t = - 1,6166 \cos 100 \pi t \text{ V}$$

2°.- Autoinducción del solenoide toroidal de N espiras

- Campo magnético creado por el solenoide toroidal: $\vec{B}_1 = \mu_0 [1 + \chi_{AL}] \frac{N I_1}{2\pi r} \vec{u}_\phi$

- Flujo del campo magnético creado solenoide toroidal de N espiras, al atravesar sus propias espiras N de sección cuadrada de lado $2b$, como $d\vec{S} = 2b \, dr \, \vec{u}_\phi$ será:

$$\Phi_{N_{11}} = N \iint \vec{B}_1 \cdot d\vec{S} = N \frac{\mu}{2\pi} \frac{N I_1}{\int_{R_0-b}^{R_0+b} 2b \frac{dr}{r}} = \frac{\mu b N^2 I_1}{\pi} \ln \frac{R_0 + b}{R_0 - b}$$

La autoinducción resulta ser: $L_1 = \frac{\Phi_{N_{11}}}{I_1} = \frac{\mu_0 [1 + \chi_{AL}] b N^2}{\pi} \ln \frac{R_0 + b}{R_0 - b}$

Aplicación numérica:

$$L_1 = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} [1 + 0,82 \cdot 10^{-7}] 3 \cdot 10^{-2} 1000 \cdot 1000}{\pi} \ln \frac{73}{67} = 1,0292 \cdot 10^{-3} \text{ H}$$

3°.- Inducción mutua

La inducción mutua M es un coeficiente obtenido como cociente entre el flujo magnético, que atraviesa el solenoide toroidal de N espiras, debido al campo magnético \vec{B}_2 creado por la bobina de n espiras cuando por ellas circula la corriente I_2 y la mencionada corriente I_2 .

- Campo magnético creado por la bobina: $\vec{B}_2 = \mu_0 [1 + \chi_{AL}] \frac{n I_2}{2\pi r} \vec{u}_\phi$

- Flujo del campo magnético creado por la bobina de n espiras, al atravesar las N espiras de sección cuadrada de lado $2b$ del solenoide toroidal. Como $d\vec{S} = 2b \, dr \, \vec{u}_\phi$ será:

$$\Phi_{N_2} = N \iint \vec{B}_2 \cdot d\vec{S} = N \frac{\mu n I_2}{2\pi} \int_{R_0-b}^{R_0+b} 2b \frac{dr}{r} = \frac{\mu b n N I_2}{\pi} \ln \frac{R_0 + b}{R_0 - b}$$

La inducción mutua resulta ser: $M = \frac{\Phi_{N_2}}{I_2} = \frac{\mu_0 [1 + \chi_{AL}] b n N}{\pi} \ln \frac{R_0 + b}{R_0 - b}$

Aplicación numérica:

$$M = \frac{4 \pi 10^{-7} [1 + 0,82 \cdot 10^{-7}] 3 \cdot 10^{-2} 200 \cdot 1000}{\pi} \ln \frac{73}{67} = 2,0584 \cdot 10^{-4} \text{ H}$$

4°.- F.e.m. inducida en los extremos de ambas bobinas

Como ambas bobinas están conectadas en serie, las recorre la misma corriente eléctrica, y por lo tanto la f.e.m. inducida total en sus extremos, según la Ley de Faraday es:

$\epsilon_{\text{TOTAL}} = - [L_1 + L_2 \pm 2M] \frac{dI}{dt}$ sustituyendo los valores antes hallados en esta expresión resulta:

$$\epsilon_{\text{TOTAL}} = - \frac{\mu_0 [1 + \chi_{AL}] b \omega}{\pi} \left[\ln \frac{R_0 + b}{R_0 - b} \right] [N^2 + n^2 \pm 2 N n] I_0 \cos \omega t$$

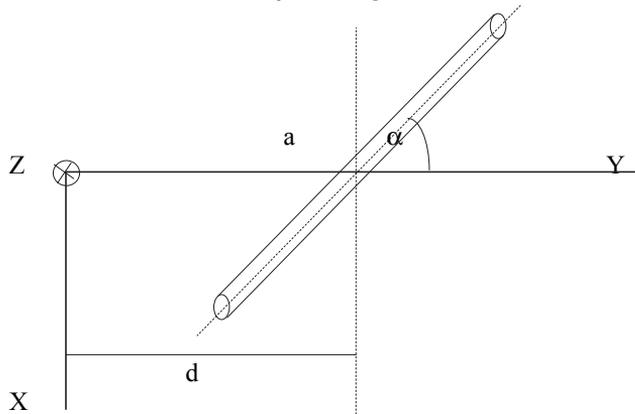
Aplicación numérica:

$$\epsilon_{\text{TOTAL}} = - \frac{4 \pi 10^{-7} [1 + 0,82 \cdot 10^{-7}] 3 \cdot 10^{-2} \cdot 100 \pi}{\pi} \left[\ln \frac{73}{67} \right] [1040000 \pm 400000] 25 \cos 100\pi t$$

Operando $\epsilon_{\text{TOTAL}} = - 0,08083 [104 \pm 40] \cos 100 \pi t \text{ V}$

PROBLEMA 6.10

Por un circuito circula una corriente constante I_2 , tiene forma de espira cuadrada indeformable de material conductor de lado "a", está colocado a una distancia lo suficientemente grande $OP=d$ respecto de sus dimensiones, de un conductor filiforme rectilíneo indefinido, por dicho conductor rectilíneo indefinido circula una corriente eléctrica constante I_1 , en el sentido del eje OZ negativo.



Se pide determinar:

- 1°.- Flujo magnético que atraviesa la espira debido al conductor en la posición indicada.
- 2°.- Momento mecánico de giro en la espira en la posición indicada.
- 3°.- Coeficiente de inducción mutua.
- 4°.- F.e.m. inducida en el conductor rectilíneo cuando la corriente de la espira se anula en $t = 2''$.

Ahora suponemos que la corriente que circula por el conductor rectilíneo indefinido varía según la expresión $I = I_0 \sin 2t$, se pide:

- 5°.- F.e.m. inducida en la espira. Valor de la f.e.m. inducida para $t = 5''$

DATOS: $I_1 = 100$ A; $I_2 = 10$ A; $OP = d = 100$ m; $a = 10$ cm; $I_0 = 50$ A; $\alpha = 30^\circ$.

SOLUCIÓN**1°.- Flujo magnético que atraviesa la espira debido al conductor en la posición indicada**

La espira está muy alejada del conductor rectilíneo y es pequeña, $d \gg a$, por tanto suponemos que el campo magnético creado por el conductor rectilíneo, mediante la ley de Biot y Savart, en el centro de la espira, es constante en toda la sección de la pequeña espira cuadrada:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r} [-\vec{k} \times \frac{\vec{r}}{r}] \text{ siendo: } \vec{r} = d \vec{j}; \quad \vec{I}_1 = -I_1 \vec{k}; \quad \vec{B} = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi d} \vec{i} = 2 \cdot 10^{-7} \vec{i} \text{ T} \quad [1]$$

Por otro lado el vector superficie de la espira en la posición indicada es:

$$\vec{S} = S [\cos \alpha \vec{i} + \sin \alpha \vec{j}].$$

Como el campo magnético determinado en [1] es constante, el flujo resulta:

$$\Phi = \iint \vec{B} \cdot d\vec{S} = \vec{B} \cdot \iint d\vec{S} = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi d} \vec{i} \cdot S [\cos\alpha \vec{i} + \text{sen } \alpha \vec{j}] = \frac{\mu_0 a^2 I_1}{2\pi d} \cos\alpha$$

$$\Phi = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 0,1^2}{2\pi \cdot 1} 10^{-2} \cos 30^\circ = 1,732 \cdot 10^{-9} \text{ Wb}$$

2º.- Momento mecánico de giro en la espira en la posición indicada

El par mecánico de fuerzas magnéticas que actúan sobre los lados de la espira, paralelos al eje OZ, originan un momento mecánico $\vec{M}_{\text{MECÁNICO}}$, situado en el eje de giro de la espira que pasa por su centro, el punto P, y que es paralelo al eje OZ.

$$\vec{M}_{\text{MECÁNICO}} = I_1 [\vec{S} \times \vec{B}_N] = I_1 a^2 \frac{\mu_0 I_1}{2\pi d} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \cos\alpha & \text{sen}\alpha & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\frac{\mu_0 a^2 I_1^2}{2\pi d} \text{sen}\alpha \vec{k}$$

$$\vec{M}_{\text{MECÁNICO}} = -\frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 10^{-2} \cdot 100^2}{2\pi \cdot 1} \text{sen} 30^\circ \vec{k} = -10^{-5} \vec{k} \text{ N}\cdot\text{m}$$

3º.- Coeficiente de inducción mutua

La inducción mutua M es un coeficiente, obtenido como cociente entre el flujo magnético que atraviesa la espira, debido al campo magnético \vec{B} creado por el conductor rectilíneo cuando por el circula la corriente I_1 , y dicha corriente I_1 .

- Campo magnético creado por el conductor rectilíneo: $\vec{B} = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi d} \vec{i}$

- Flujo del campo magnético creado por el conductor rectilíneo, al atravesar la espira de sección cuadrada de lado "a":

$$\Phi = \iint \vec{B} \cdot d\vec{S} = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi d} \vec{i} \cdot S [\cos\alpha \vec{i} + \text{sen } \alpha \vec{j}] = \frac{\mu_0 a^2 I_1}{2\pi d} S \cos\alpha$$

Coeficiente de inducción mutua:

$$M = \frac{\Phi}{I_1} = \frac{\mu_0 a^2}{2\pi d} S \cos\alpha = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 10^{-2}}{2\pi \cdot 1} 10^{-2} \cos 30^\circ = 1,7320 \cdot 10^{-11} \text{ H}$$

4º.- F.e.m. inducida en conductor rectilíneo cuando la corriente de espira se anula en $t \pi = 2''$

La f.e.m. inducida en los extremos del conductor rectilíneo, según la Ley de Faraday es:

$$\epsilon_1 = -M \frac{dI_2}{dt} = -\frac{\mu_0 a^2}{2\pi d} S \cos\alpha \left[\frac{\Delta I_2}{\Delta t} \right] \text{ sustituyendo valores, resulta la f.e.m:}$$

$$\epsilon_1 = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 10^{-2}}{2\pi \cdot 1} 10^{-2} \cos 30^\circ \left[\frac{10-0}{0-2} \right] = 0,866 \cdot 10^{-10} \text{ V}$$

5°.- F.e.m. inducida en la espira. Valor de la f.e.m. inducida para t= 5"

Según la Ley de Faraday, la f.e.m. inducida en la espira cuadrada cuando circula por ella la corriente eléctrica de expresión $I = I_0 \text{ sen } 2 t$, es:

$$\varepsilon_2 = -M \frac{dI}{dt} = -\frac{\mu_0 a^2}{2\pi d} S \cos\alpha \frac{d}{dt} [I_0 \text{ sen } 2t] = -\frac{\mu_0 a^2 I_0}{2\pi d} S \cos\alpha 2 \cos 2t = -\frac{\mu_0 a^2 I_0}{\pi d} S \cos\alpha \cos 2t$$

Sustituyendo los valores dados y teniendo en cuenta que:

$$\cos [2 \cdot 5] \text{ rad} = \cos \left[10 \frac{360}{2\pi} \right] = \cos 572,957^\circ = \cos [572,957^\circ - 360^\circ] = \cos 212,957^\circ = -0,83907$$

$$\varepsilon_2 = -\frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 10^{-2} \cdot 50}{\pi \cdot 100} \cdot 10^{-2} \cos 30^\circ \cos 212,9577^\circ = 1,4533 \cdot 10^{-11} \text{ V}$$

CAPÍTULO VII

TEORÍA DE CIRCUITOS

PROBLEMA 7.1

Un generador real de corriente continua de f.e.m. \mathcal{E} , tiene una resistencia interna r y se somete a las experiencias que se indican a continuación.

Estando el generador en vacío, se conecta a sus bornes un voltímetro que indica 120 V. Determinar

1°.- F.e.m. del generador.

Se conectan ambos polos del generador mediante un conductor de resistencia $R=0,5 \Omega$, entonces la intensidad que circula por el circuito es $I_2=120$ A. Calcular

2°.- Resistencia interna r del generador.

A continuación el generador del apartado anterior, con el conductor de resistencia $R=0,5 \Omega$, se conecta con tres motores idénticos de corriente continua, instalados en serie. Cuando a los tres motores se les impide girar, es decir están inmóviles, la intensidad es $I_3=75$ A. Hallar

3°.- Resistencia r' interna de cada motor. Balance de potencia.

Se deja girar libremente un solo motor, a su velocidad de régimen normal, los otros dos están inmóviles, la corriente I_4 que circula es un 32,098 % superior a la que circularía I_5 cuando los tres funcionan en régimen normal. Obtener

4.- Intensidad que recorre el circuito. Valor la f.c.e.m. del motor. Potencia y rendimiento que desarrolla el motor. Balance de potencia.

SOLUCIÓN**1°.- F.e.m. del generador**

Ley de Ohm: $\mathcal{E} = I_1 r + I_1 R_1$ [1]

Como el circuito está abierto, equivale a una resistencia $R_1 = \infty$.

Llevando $R_1 = \infty$ a ecuación [1], obtenemos: $I_1 = \frac{\mathcal{E}}{r + R_1} = \frac{\mathcal{E}}{r + \infty} = 0$

Cuando el circuito está abierto la batería no suministra energía eléctrica. Cuando $I_1 = 0$, la tensión en el voltímetro es la f. e. m. de la batería.

$$\text{Voltímetro } V_1 = 120 \text{ V} \Rightarrow \mathcal{E} = 120 \text{ V} <> \text{f.e.m.}$$

2°.- Resistencia interna r de generador

Ley de Ohm: $\mathcal{E} = I_2 [r + R]$ como $I_2 = 120$ A y

$R = 0,5 \Omega$, sustituimos: $120 = 120 [r + 0,5]$

La resistencia interna del generador es: $r = 0,5 \Omega$.

3°.- Resistencia interna r' de cada motor. Balance de potencia

Los tres motores están parados con lo cual $\mathcal{E}' = 0$, por tanto cada motor equivale eléctricamente a una resistencia interna de valor r' . Se sabe por el enunciado que $I_3 = 75$ A.

Ley de Ohm: $\mathcal{E} = 3 \mathcal{E}' + I_3 3 r' + I_3 [r + R]$.

Sustituyendo datos: $120 = 0 + 75 \cdot 3 r' + 75 [0,5 + 0,5]$

Por tanto la resistencia interna de cada motor es $r' = 0,2 \Omega$.

El balance de potencia es:

$$P_{\text{CONSUMIDA}} = [R + r + 3 r'] I_3^2 = 9000 \text{ W}$$

$$P_{\text{GENERADOR}} = \mathcal{E} I_3 = 120 \cdot 75 = 9000 \text{ W}$$

4º.- Intensidad y f.c.e.m. del motor. Potencia y rendimiento en motor. Balance de potencia

Ahora un motor gira libremente y absorbe la energía eléctrica suministrada por el generador que se consume en desarrollar potencia exterior y también en su propio consumo interno.

$$\text{Cuando gira un solo motor, Ley de Ohm: } \mathcal{E} = \mathcal{E}' + I_4 [3 r' + r + R] \quad [1]$$

$$\text{Cuando giran los tres motores, la Ley de Ohm: } \mathcal{E} = 3 \mathcal{E}' + I_5 [3 r' + r + R] \quad [2]$$

$$\text{Como además según el enunciado, las intensidades cumplen: } I_4 = 1,32098 \cdot I_5 \quad [3]$$

De las tres ecuaciones se halla la f.c.e.m. del motor y también la intensidad I_4 .

$$I_4 = \frac{\mathcal{E} - \mathcal{E}'}{r + 3r' + R} = \frac{120 - \mathcal{E}'}{1,6}; \quad I_5 = \frac{\mathcal{E} - 3 \mathcal{E}'}{r + 3r' + R} = \frac{120 - 3 \mathcal{E}'}{1,6}$$

Dividiendo ambas ecuaciones resulta:

$$\frac{I_4}{I_5} = \frac{\mathcal{E} - \mathcal{E}'}{\mathcal{E} - 3\mathcal{E}'} = \frac{120 - \mathcal{E}'}{120 - 3\mathcal{E}'} = 1,32098. \text{ Operando, la f.c.e.m. del motor es } \mathcal{E}' = 13 \text{ V}$$

$$I_4 = \frac{\mathcal{E} - \mathcal{E}'}{r + 3r' + R} = \frac{120 - 13}{1,6} = 66,875 \text{ A}; \quad I_5 = \frac{\mathcal{E} - 3 \mathcal{E}'}{r + 3 r' + R} = \frac{120 - 3 \cdot 13}{1,6} = 50,625 \text{ A}$$

La potencia total consumida por el motor es la suma de la potencia útil consumida y de la potencia disipada en la resistencia interna del propio motor:

$$P_{M \text{ TOTAL}} = \mathcal{E}' I_5 + r' I_5^2 = 13 \cdot 50,625 + 0,2 \cdot 50,625^2 = 1.170,703 \text{ W}$$

El rendimiento eléctrico del motor, se define como el cociente entre la potencia útil consumida y la potencia total consumida por dicho motor. La potencia útil consumida por el motor es:

$$P_{M \text{ UTIL}} = \mathcal{E}' I_5 = 13 \cdot 50,625 = 658,125 \text{ W.}$$

$$\text{El rendimiento del motor será: } \eta = \frac{P_{MU}}{P_{MT}} = \frac{\mathcal{E}' I_5}{\mathcal{E}' I_5^2 + r' I_5^2} = \frac{658,125}{1170,703} = 56,216\%$$

Balance de potencia en el circuito:

$$P_{\text{CONSUMIDA}} = 3 \mathcal{E}' I_5 + [r + 3 r' + R] I_5^2 = 6075 \text{ W}$$

$$P_{\text{GENERADOR}} = \mathcal{E} I_5 = 120 \cdot 50,625 = 6075 \text{ W}$$

PROBLEMA 7.2

Se dispone de un conjunto de N generadores de corriente continua exactamente iguales, siendo su f.e.m. \mathcal{E} V constante y su resistencia interna r .

Dichos generadores se conectan entre sí, montando en paralelo p ramas, cada de las cuales tiene a su vez s elementos conectados en serie, de forma que todo el conjunto de generadores vierte su energía una resistencia externa R . Se desea determinar:

1°.- Intensidad máxima que pueden suministrar los generadores, en función de N , R , r y \mathcal{E} .

Para un valor de la intensidad prefijado I , calcular

2°.- El valor de s en función de I , N , R , r y \mathcal{E} .

Aplicación numérica de los dos apartados anteriores, teniendo en cuenta los siguientes

datos, $r=0,5 \Omega$, $R=48 \Omega$, $N=100$ generadores y $\mathcal{E}=5V$.

3°.- $I_{MÁX}$.

4°.- Número de generadores conectados en serie cuando $I=2 A$.

SOLUCIÓN

1°.- Intensidad máxima que pueden suministrar los generadores, en función de N , R , r y \mathcal{E}

Se conectan en serie " s " generadores, y a su vez " p " de cada una de estas series de montan en paralelo, ante ello la ley de Ohm se expresa:

$$s \cdot \mathcal{E} = I \left[R + \frac{s}{p} r \right], \text{ por tanto: } I = \frac{s \mathcal{E}}{\frac{s}{p} r + R} = \frac{N \mathcal{E}}{s r + p R} = \frac{N \mathcal{E}}{s r + \frac{N}{s} R} \quad [1] \text{ Siendo } N = p \cdot s$$

Como se busca un máximo de la intensidad, ha de ser mínimo el denominador del cociente de la expresión [1]: $s r + \frac{N}{s} R$, siendo la variable " s ", número de generadores en serie.

Se deriva el denominador de la expresión [1] respecto a la variable " s ", y para obtener el máximo se iguala a cero el resultado. :

$$\frac{d}{ds} \left[s r + \frac{N}{s} R \right] = r - \frac{N}{s^2} R = 0, \text{ operando: } s^2 = \frac{N}{r} R \quad [2]$$

Llevando el valor de " s ", a la expresión [1], la intensidad máxima buscada es:

$$I_{MÁX} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{N}{R r}} \mathcal{E} \quad [3]$$

2°.- El valor de s en función de I , N , R , r y \mathcal{E}

Planteando otra vez la Ley de Ohm: $s \mathcal{E} = I \left[R + \frac{s}{p} r \right]$ en donde según el apartado 1° la intensidad es:

$$I = \frac{N \mathcal{E}}{s r + \frac{N}{s} R} \text{ y como además } N = p \cdot s, \text{ operando llegamos a la ecuación:}$$

$I r s^2 - \mathcal{E} N s + I N R = 0$ es una ecuación de segundo grado en la variable " s ".

$$\text{Resolviendo, el número de generadores en serie: } s = \frac{\mathcal{E} N \pm \sqrt{\mathcal{E}^2 N^2 - 4 N R r I^2}}{2 I r} \quad [4]$$

3°.- I_{MÁX}

Partiendo de la expresión [3], en el apartado primero, y sustituyendo datos, la intensidad máxima que pueden suministrar los N=100 generadores a la resistencia exterior R= 48 Ω

$$\text{es: } I_{MÁX} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{N}{R r}} \quad \varepsilon = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{100}{48 \cdot 0,5}} \quad \varepsilon = 5,10 \text{ A}$$

4°.- Número de generadores conectados en serie

En esta caso partimos de la expresión [4], en el apartado segundo, donde sustituyendo datos conocidos y además el valor prefijado de la intensidad I= 2 A

$$s = \frac{\varepsilon N \pm \sqrt{\varepsilon^2 N^2 - 4 N R r I^2}}{2 I r} = \frac{100 \cdot 5 \pm \sqrt{5^2 \cdot 100^2 - 4 \cdot 100 \cdot 48 \cdot 0,5 \cdot 2^2}}{2 \cdot 2 \cdot 0,5} = 20$$

Se llega al montaje de N=100= p·s= 5·20 generadores, obtenidos mediante cinco ramas (p=5) conectadas en paralelo, y a su vez cada una de las cuales dispone de veinte generadores conectados entre si en serie (s= 20).

PROBLEMA 7.3

Un generador real cuya f.e.m. continua es G [$\mathcal{E}_G=55\text{V}$, $r_G=0,3\Omega$], se conecta mediante una línea monofásica a un motor también de corriente continua M [f. c. e. m. $\mathcal{E}'_M=50\text{V}$, $r_M=0,01\Omega$], cuya intensidad nominal es $I_M=9\text{A}$.

Además se sabe que dicho motor se encuentra situado a $\ell_T=450\text{m}$ de distancia del lugar en donde se halla instalado el generador real de corriente continua.

La conexión eléctrica entre generador y motor se puede realizar mediante cualquiera de los tres tipos de cable conductor, cuyas características físicas son:

Naturaleza de conductor	Resistividad ρ [$\Omega \text{ mm}^2 \text{ m}^{-1}$] a 20°C	Sección S mm^2
PLATA	$1,470 \cdot 10^{-2}$	16
COBRE	$1,720 \cdot 10^{-2}$	25
ALUMINIO	$2,592 \cdot 10^{-2}$	95

Para efectuar los cálculos eléctricos, cada tipo de cable conductor se sustituirá por su correspondiente resistencia concentrada, obtenida a partir de sus características físicas.

Determinar:

1°.- Tipo de cable conductor a instalar, para que el motor funcione correctamente a su intensidad nominal y su f. c. e. m., antes indicadas.

Para el caso de funcionamiento correcto del motor con el tipo de conductor adecuado, determinar:

2°.- Tensión en bornes de entrada al motor.

3°.- Balance energético en el circuito.

4°.- Rendimiento del motor.

SOLUCIÓN**1°.- Tipo de cable conductor a instalar para correcto funcionamiento**

Para los tres posibles conductores a instalar, teniendo en cuenta que la longitud total del cable conductor de la línea monofásica es $\ell_T=2 \cdot 450=900\text{m}$. (dos tramos: uno de ida y otro de retorno), y las características físicas del enunciado, las resistencias son:

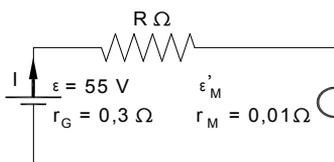
$$\text{Plata} \quad R_{Ag} = \rho_{Ag} \frac{\ell_T}{S_{Ag}} = 1,470 \cdot 10^{-2} \frac{900}{16} = 0,8268 \Omega$$

$$\text{Cobre} \quad R_{Cu} = \rho_{Cu} \frac{\ell_T}{S_{Cu}} = 1,720 \cdot 10^{-2} \frac{900}{25} = 0,6192 \Omega$$

$$\text{Aluminio} \quad R_{Al} = \rho_{Al} \frac{\ell_T}{S_{Al}} = 2,592 \cdot 10^{-2} \frac{900}{95} = 0,2455 \Omega$$

■ MÉTODO DE TENSIONES.

El esquema eléctrico del circuito es el indicado en la figura.



$$\text{Ley de Ohm: } \mathcal{E} - \mathcal{E}'_M = I [r_G + r_M + R] \quad [1]$$

En este caso se obliga a que en el circuito $I = I_M = 9\text{A}$

Sustituyendo valores conocidos en [1], obtenemos la

$$\text{f.c.e.m. del motor: } \mathcal{E}'_M = 55 - 9 [0,3 + 0,01 + R] \quad [2]$$

El motor funcionará correctamente, cuando al sustituir en [2] la resistencia R del conductor instalado, se cumpla que la f.c.e.m. es exactamente su valor nominal de $\mathcal{E}'_M = 50V$.

$$\text{Plata } \mathcal{E}'_{M_{Ag}} = 55 - 9[0,3 + 0,01 + R_{Ag}] = 55 - 9[0,3 + 0,01 + 0,8268] = 44,77 < 50V \Rightarrow \text{NO VÁLIDO}$$

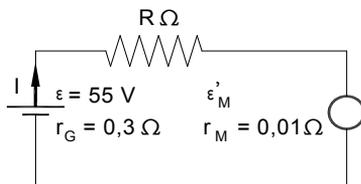
$$\text{Cobre } \mathcal{E}'_{M_{Cu}} = 55 - 9[0,3 + 0,01 + R_{Cu}] = 55 - 9[0,3 + 0,01 + 0,6192] = 46,64 < 50V \Rightarrow \text{NO VÁLIDO}$$

$$\text{Aluminio } \mathcal{E}'_{M_{Al}} = 55 - 9[0,3 + 0,01 + R_{Al}] = 55 - 9[0,3 + 0,01 + 0,2455] = 50,00 = 50V \Rightarrow \text{SI VÁLIDO}$$

El único conductor que da al motor su f. c. e. m. nominal de $\mathcal{E}'_M = 50V$ es el **ALUMINIO**.

■ MÉTODO DE INTENSIDADES.

El esquema eléctrico del circuito es el indicado en la figura.



En este caso se obliga a que sea $\mathcal{E}'_M = 50 V$. Ley de Ohm: $\mathcal{E} - \mathcal{E}'_M = I [r_G + r_M + R]$

$$\text{Sustituyendo los valores conocidos: } 55 - 50 = I[0,3 + 0,01 + R] \Rightarrow I = \frac{55 - 50}{0,3 + 0,01 + R} \text{ A} \quad [3]$$

El motor funcionará correctamente, cuando al sustituir en [3] la resistencia R del conductor que se instale, se cumpla: $I = I_M = 9 A$ que es la intensidad nominal del motor.

$$\text{Plata } I_{Ag} = \frac{55 - 50}{0,3 + 0,01 + R_{Ag}} = \frac{55 - 50}{0,3 + 0,01 + 0,8268} = 4,39 < 9 A \Rightarrow \text{NO VÁLIDO}$$

$$\text{Cobre } I_{Cu} = \frac{55 - 50}{0,3 + 0,01 + R_{Cu}} = \frac{55 - 50}{0,3 + 0,01 + 0,6192} = 5,38 < 9 A \Rightarrow \text{NO VÁLIDO}$$

$$\text{Aluminio } I_{Al} = \frac{55 - 50}{0,3 + 0,01 + R_{Al}} = \frac{55 - 50}{0,3 + 0,01 + 0,2455} = 9,00 = 9 A \Rightarrow \text{SI VÁLIDO}$$

El único conductor que por los bornes del motor hace entrar la $I_M = 9 A$ es el **ALUMINIO**.

2°.- Tensión en bornes de entrada al motor

La determinación de la tensión necesaria V_M , en bornes de entrada al motor, para que funcione correctamente, se puede hacer de dos maneras distintas aplicando la ley de Ohm, teniendo en cuenta que para el motor dado su f. c. e. m. nominal es $\mathcal{E}'_M = 50V$, siendo el conductor de aluminio.

Ley de Ohm se expresa ahora: $\mathcal{E} - \mathcal{E}'_M = I [r_G + r_M + R_{Al}]$.

La tensión se halla de dos formas diferentes, como comprobación:

$$V_M = \mathcal{E}'_M + I r_M = 50 + 9 \cdot 0,01 = 50,09 V$$

$$V_M = \mathcal{E} - I [r_G + R_{Al}] = 55 - 9 [0,3 + 0,2455] = 50,09 V$$

3°.- Balance energético en el circuito

El conductor instalado es de aluminio: $R_{Al} = \rho_{Al} \frac{\ell_T}{S_{Al}} = 0,2455 \Omega$; $\mathcal{E}'_M = 50 \text{ V}$; $I = 9 \text{ A}$.

Balance de potencia en circuito $P_{SUMINISTRADA} = \mathcal{E}I = r_G I^2 + R_{Al} I^2 + \mathcal{E}'_M I + r_M I^2 = P_{CONSUMIDA}$

- Potencia útil suministrada por el generador G al circuito $P_G = \mathcal{E} I = 55 \cdot 9 = 495,00 \text{ W}$

- Potencia consumida en resistencia interna de generador $P_r = 0,33 \cdot 9^2 = 24,30 \text{ W}$

- Potencia consumida en la resistencia del conductor Al $P_{R_{Al}} = 0,2455 \cdot 9^2 = 19,89 \text{ W}$

- Potencia total consumida en el motor $P_{MT} = \mathcal{E}'_M I + r_M I^2 = 50 \cdot 9 + 0,01 \cdot 9^2 = 450,81 \text{ W}$

Balance energético:

$$P_{SUMINISTRADA} = P_G = 495,00 \text{ W} = P_r + P_{R_{Al}} + P_{MT} = 495,00 \text{ W} = P_{CONSUMIDA}$$

4°.- Rendimiento del motor

La potencia total consumida por el motor es la suma de la potencia útil consumida por dicho motor y de la potencia disipada en la resistencia interna del propio motor:

$$P_{MT \text{ TOTAL}} = \mathcal{E}'_M I + r_M I^2 = 50 \cdot 9 + 0,01 \cdot 9^2 = 450,81 \text{ W}$$

La potencia útil consumida por el motor es:

$$P_{MT \text{ ÚTIL}} = \mathcal{E}'_M I = 50 \cdot 9 = 450 \text{ W}.$$

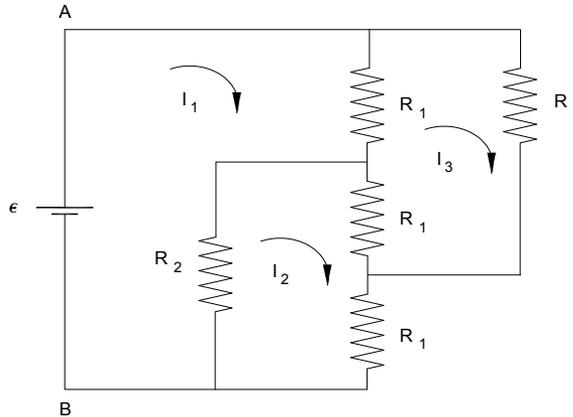
$$\text{El rendimiento del motor será: } \eta = \frac{P_{MT \text{ ÚTIL}}}{P_{MT \text{ TOTAL}}} = \frac{\mathcal{E}'_M I}{\mathcal{E}'_M I + r_M I^2} = \frac{450}{450,81} = 99,82\%$$

PROBLEMA 7.4

El circuito de la figura consta de tres mallas, un generador ideal de corriente continua de $\mathcal{E} = 7 \text{ V}$ y cinco resistencias conectadas entre sí según la morfología indicada en el esquema adjunto, siendo concretamente $R_1 = 1 \Omega$, $R_2 = 2 \Omega$.

Se pide determinar:

- 1°.- Intensidades I_1 , I_2 , I_3 .
- 2°.- Resistencia total equivalente.
- 3°.- Balance de potencia. Comprobación.



SOLUCIÓN

1°.- Intensidades I_1 , I_2 , I_3

Aplicando al circuito dado, el Método de las Mallas, suponiendo dextrógiras las intensidades de cada una de las tres mallas, las ecuaciones correspondientes son:

$$\text{Malla 1: } 7 = 3 I_1 - 2 I_2 - 1 I_3 \quad [1]$$

$$\text{Malla 2: } 0 = -2 I_1 + 4 I_2 - 1 I_3 \quad [2]$$

$$\text{Malla 3: } 0 = -1 I_1 - 1 I_2 + 4 I_3 \quad [3]$$

Resolviendo el sistema de las correspondientes ecuaciones de las tres las mallas, por el método de Kramer, se obtienen las intensidades de malla:

$$I_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 7 & -2 & -1 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -2 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & 4 \end{vmatrix}} = 5 \text{ A}; \quad I_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 7 & -1 \\ -2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -2 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & 4 \end{vmatrix}} = 3 \text{ A}; \quad I_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -2 & 7 \\ -2 & 4 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -2 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & 4 \end{vmatrix}} = 2 \text{ A}$$

2°.- Resistencia equivalente entre A y B

En caso de circuitos eléctricos formados exclusivamente por resistencias, cuya morfología es muy complicada, la resistencia equivalente entre dos terminales accesibles A y B, se puede determinar conectando entre dichos terminales A y B un generador ideal \mathcal{E}' , y tras resolver el nuevo circuito mediante el método de las mallas, la resistencia equivalente de entrada al circuito, entre los terminales A y B, es: $R_{AB} = \frac{\mathcal{E}'}{I_1'}$.

Al conectar entre los terminales A y B el generador ideal cualquiera de f.e.m. \mathcal{E}' , el circuito obtenido es el dado inicialmente, que ya hemos resuelto por el método de las mallas en apartado 1°, y como ya conocemos el valor de $I_1' = I_1$, la resistencia equivalente es:

$$R_{AB} = \frac{\mathcal{E}'}{I_1'} = \frac{\mathcal{E}'}{\mathcal{E}' \frac{[3R_1 + R_2]}{[R_1^2 + 3R_1R_2]}} = \frac{R_1^2 + 3R_1R_2}{3R_1 + R_2} = \frac{\mathcal{E}}{I_1} = \frac{7}{5} \Omega$$

3°.- Balance de potencia. Comprobación

Siendo conocidos los valores de las intensidades que circulan por las distintas resistencias del circuito, podremos hallar la potencia disipada, y posteriormente se comprobará el resultado obtenido, mediante la resistencia total o equivalente del circuito.

- Potencia consumida en resistencia R_1 : $P_{R1} = R_1 [I_1 - I_2]^2 = 2 [5 - 3]^2 = 8W$

- Potencia consumida en resistencia R_2 : $P_{R2} = R_2 [I_1 - I_3]^2 = 1 [5 - 2]^2 = 9W$

- Potencia consumida en resistencia R_3 : $P_{R3} = R_3 [I_2 - I_3]^2 = 1 [3 - 2]^2 = 1W$

- Potencia consumida en resistencia R_4 : $P_{R4} = R_4 I_2^2 = 1 \cdot 3^2 = 9W$

- Potencia consumida en resistencia R_5 : $P_{R5} = R_5 I_3^2 = 2 \cdot 2^2 = 8W$

Potencia total consumida en las cinco resistencias: $\Sigma P_R = 35 W$

La comprobación del resultado anterior, se realiza mediante la resistencia equivalente o total del circuito. Como por dicha resistencia total del circuito, calculada en el apartado segundo y de valor $R_T = \frac{7}{5} \Omega$ circula una intensidad $I_1 = 5 A$, obtendremos la potencia consumida total en las resistencias, que es la potencia suministrada por el generador:

$$P_T = R_T I_1^2 = 35 W = \Sigma P_R = P_G = \mathcal{E} I_1 = 7 \cdot 5 = 35 W$$

PROBLEMA 7.5

El cobre, el aluminio y la plata, son metales normalmente utilizados en conducciones eléctricas, cuyas características físicas se detallan en el cuadro siguiente:

Naturaleza de conductor	Resistividad ρ [$\Omega \text{ mm}^2 \text{ m}^{-1}$] a 20° C	Densidad d gr cm^{-3}
COBRE	$1,720 \cdot 10^{-2}$	8,93
ALUMINIO	$2,592 \cdot 10^{-2}$	2,71
PLATA	$1,470 \cdot 10^{-2}$	10,48

Se desea construir, con dichos materiales conductores, una línea eléctrica de longitud ℓ y resistencia óhmica R. Determinar, para dicha línea:

1°.- Relación entre las secciones de los diferentes materiales conductores.

$$\frac{S_{Al}}{S_{Cu}}, \frac{S_{Ag}}{S_{Cu}}, \frac{S_{Al}}{S_{Ag}}$$

2°.- Relación entre las masas de los diferentes materiales conductores.

$$\frac{M_{Al}}{M_{Cu}}, \frac{M_{Ag}}{M_{Cu}}, \frac{M_{Al}}{M_{Ag}}$$

Ahora se dispone de tres conductores metálicos de cobre, aluminio y plata, todos de igual longitud y de la misma sección, conectados en serie, cuando por el circuito circula una corriente eléctrica continua, entre los extremos del circuito, el voltímetro mide una misma diferencia de potencial que es de 100 V. Obtener:

3°.- Caída de potencial en cada uno de los tres conductores.

SOLUCIÓN

1°.- Relación entre las secciones de los diferentes materiales conductores

Según la expresión de la resistencia eléctrica, resulta

$$\text{Cobre } R_{Cu} = \rho_{Cu} \frac{\ell}{S_{Cu}} = 1,720 \cdot 10^{-2} \frac{\ell}{S_{Cu}}$$

$$\text{Aluminio } R_{Al} = \rho_{Al} \frac{\ell}{S_{Al}} = 2,592 \cdot 10^{-2} \frac{\ell}{S_{Al}}$$

$$\text{Plata } R_{Ag} = \rho_{Ag} \frac{\ell}{S_{Ag}} = 1,470 \cdot 10^{-2} \frac{\ell}{S_{Ag}}$$

Como, según el enunciado, se impone la condición de que los tres conductores sean de igual longitud y tengan la misma resistencia eléctrica, la relación de las secciones es:

$$\frac{S_{Al}}{S_{Cu}} = \frac{\rho_{Al}}{\rho_{Cu}} = \frac{2,592}{1,720} = 1,507; \quad \frac{S_{Ag}}{S_{Cu}} = \frac{\rho_{Ag}}{\rho_{Cu}} = \frac{1,470}{1,720} = 0,855; \quad \frac{S_{Al}}{S_{Ag}} = \frac{\rho_{Al}}{\rho_{Ag}} = \frac{2,592}{1,470} = 1,763$$

2°.- Relación entre las masas de los diferentes materiales conductores

Como la masa de los conductores se expresa $M = d \cdot \ell \cdot S$, para cada uno de ellos se obtiene:

$$\text{Cobre } M_{Cu} = d_{Cu} \ell S_{Cu}; \quad \text{Aluminio } M_{Al} = d_{Al} \ell S_{Al}; \quad \text{Plata } M_{Ag} = d_{Ag} \ell S_{Ag}$$

Por tanto la relación entre las masas de los tres conductores, para igualdad de longitud y misma resistencia óhmica es:

$$\frac{M_{Al}}{M_{Cu}} = \frac{d_{Al} \ell S_{Al}}{d_{Cu} \ell S_{Cu}} = \frac{d_{Al} \rho_{Al}}{d_{Cu} \rho_{Cu}} = 0,457$$

$$\frac{M_{Ag}}{M_{Cu}} = \frac{d_{Ag} \ell S_{Ag}}{d_{Cu} \ell S_{Cu}} = \frac{d_{Ag} \rho_{Ag}}{d_{Cu} \rho_{Cu}} = 1,003$$

$$\frac{M_{Al}}{M_{Ag}} = \frac{d_{Al} \ell S_{Al}}{d_{Ag} \ell S_{Ag}} = \frac{d_{Al} \rho_{Al}}{d_{Ag} \rho_{Ag}} = 0,456$$

3º.- Caída de potencial en cada uno de los tres conductores

Como los tres conductores, de igual longitud y sección, se conectan en serie, obtenemos un divisor de tensión, todos los conductores están recorridos por la misma intensidad y por tanto se cumple para las resistencias:

$$R_{TOTAL} = R_{Cu} + R_{Al} + R_{Ag} = \frac{\ell}{S} [\rho_{Cu} + \rho_{Al} + \rho_{Ag}] = \frac{\ell}{S} [1,720 + 2,592 + 1,470] \cdot 10^{-2}$$

Conociendo $V_T = 100 \text{ V}$, en el divisor de tensión resulta:

$$V_{Cu} = \frac{R_{Cu}}{R_{TOTAL}} V_{TOTAL} = \frac{\rho_{Cu} \frac{\ell}{S}}{[\rho_{Cu} + \rho_{Al} + \rho_{Ag}] \frac{\ell}{S}} V_{TOTAL} = \frac{\rho_{Cu}}{[\rho_{Cu} + \rho_{Al} + \rho_{Ag}]} V_{TOTAL} = \frac{1,720}{[1,720 + 2,592 + 1,470]} 100$$

$$V_{Al} = \frac{R_{Al}}{R_{TOTAL}} V_{TOTAL} = \frac{\rho_{Al} \frac{\ell}{S}}{[\rho_{Cu} + \rho_{Al} + \rho_{Ag}] \frac{\ell}{S}} V_{TOTAL} = \frac{\rho_{Al}}{[\rho_{Cu} + \rho_{Al} + \rho_{Ag}]} V_{TOTAL} = \frac{2,592}{[1,720 + 2,592 + 1,470]} 100$$

$$V_{Ag} = \frac{R_{Ag}}{R_{TOTAL}} V_{TOTAL} = \frac{\rho_{Ag} \frac{\ell}{S}}{[\rho_{Cu} + \rho_{Al} + \rho_{Ag}] \frac{\ell}{S}} V_{TOTAL} = \frac{\rho_{Ag}}{[\rho_{Cu} + \rho_{Al} + \rho_{Ag}]} V_{TOTAL} = \frac{1,470}{[1,720 + 2,592 + 1,470]} 100$$

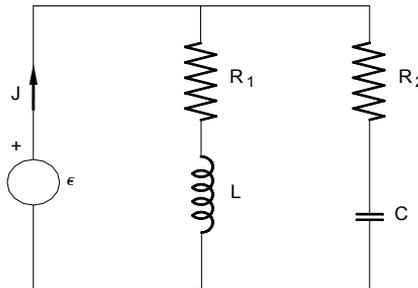
Operando resulta: $V_{Cu} = 29,75 \text{ V}$; $V_{Al} = 44,83 \text{ V}$; $V_{Ag} = 25,42 \text{ V}$

Como comprobación se cumple: $V_{Cu} + V_{Al} + V_{Ag} = 100 \text{ V}$

PROBLEMA 7.6

En corriente alterna, se dice que un circuito pasivo está en resonancia, cuando se encuentran en fase la tensión aplicada al circuito y la corriente que circula por dicho circuito. El circuito de la figura consta de dos impedancias en paralelo: $Z_1 = R_1 + j\omega L$ y $Z_2 = R_2 - j[\omega C]^{-1}$ está conecta a una fuerza electromotriz alterna eficaz compleja dada por $\mathcal{E} = E \sqrt{\varphi^0}$ V, se pide determinar:

- 1º.- Pulsación de resonancia ω_R en función de R_1 , R_2 , L y C .
- 2º.- Expresión de impedancia de resonancia, para ω_R .
- 3º.- Intensidad eficaz compleja del circuito resonante para ω_R .
- 4º.- Potencia disipada en resonancia, para ω_R .



Aplicación numérica: $\mathcal{E} = 220 \sqrt{30^0}$ V, $R_1 = 20 \Omega$, $R_2 = 15 \Omega$, $L = 5$ mH, $C = 50 \mu\text{F}$.

Ahora se conocen en el circuito, los valores de las dos resistencias, la capacidad y la pulsación de la corriente alterna, se pide determinar:

5º.- Inducción L_R de la bobina en resonancia, en función de: ω , R_1 , R_2 , y C .

Aplicación numérica: $R_1 = 10 \Omega$, $R_2 = 15 \Omega$, $C = 50 \mu\text{F}$ y $\omega = 1000 \text{ rd} \cdot \text{s}^{-1}$.

Finalmente, si en el circuito se cumple: $R_1^2 = R_2^2 = \frac{L}{C}$, para este supuesto, hallar:

6º.- Expresión de la admitancia del circuito.

7º.- Valor de la pulsación para que haya resonancia.

Aplicación numérica: $L = 2$ mH, $C = 20 \mu\text{F}$, $\omega = 1000 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$

SOLUCIÓN

1º.- Pulsación de resonancia ω_R en función de R_1 , R_2 , L y C

En el circuito paralelo, su admitancia compleja es: $Y = Y_L + Y_C = \frac{1}{R_1 + j\omega L} + \frac{1}{R_2 - j/\omega C}$

$$Y = Y_L + Y_C = \left[\frac{R_1}{R_1^2 + \omega^2 L^2} + \frac{R_2}{R_2^2 + 1/\omega^2 C^2} \right] + j \left[\frac{1/\omega C}{R_2^2 + 1/\omega^2 C^2} - \frac{\omega L}{R_1^2 + \omega^2 L^2} \right]$$

Como se ha impuesto en el circuito la condición de resonancia, ha de cumplirse que la admitancia compleja "solo tiene parte real", es decir su parte imaginaria es nula:

$$\frac{1/\omega_R C}{R_2^2 + 1/\omega_R^2 C^2} - \frac{\omega_R L}{R_1^2 + \omega_R^2 L^2} = 0$$

$$\text{Operando equivale a: } \frac{1}{\omega_R C} [R_1^2 + \omega_R^2 L^2] = \omega_R L [R_2^2 + 1/\omega_R^2 C^2] \quad [1]$$

En resonancia, se puede actuar sobre cualquiera de las cinco magnitudes: ω , R_1 , R_2 , L y C , que aparecen en esta igualdad, es decir se puede obtener una de ellas en función de las restantes.

De la expresión [1] se despeja la pulsación de resonancia:

$$\omega_R = \frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{\frac{R_1^2 - L/C}{R_2^2 - L/C}} \text{ se cumple si: } R_1^2 > L/C \text{ y } R_2^2 > L/C, \text{ o si: } R_1^2 < L/C \text{ y } R_2^2 < L/C$$

$$\text{Aplicación numérica: } \omega_R = \frac{1}{\sqrt{5 \cdot 10^{-3} \cdot 50 \cdot 10^{-6}}} \sqrt{\frac{20^2 - 5 \cdot 10^{-3} / 50 \cdot 10^{-6}}{15^2 - 5 \cdot 10^{-3} / 50 \cdot 10^{-6}}} = \sqrt{96 \cdot 10^5} = 3098,386 \text{ rd} \cdot \text{s}^{-1}$$

2°.- Expresión de impedancia de resonancia para ω_R

Cuando el circuito está en resonancia, la admitancia sólo tiene parte real, la imaginaria es nula. En nuestro caso se conocen las magnitudes R_1 , R_2 , L y C , la pulsación de resonancia de la corriente alterna ω_R se calculó en el apartado anterior:

$$Y_R = \frac{R_1}{R_1^2 + \omega_R^2 L^2} + \frac{R_2}{R_2^2 + 1/\omega_R^2 C^2}$$

Por tanto la impedancia de resonancia será el inverso de esta expresión:

$$Z_R = 1/Y_R = 1 / \left[\frac{R_1}{R_1^2 + \omega_R^2 L^2} + \frac{R_2}{R_2^2 + 1/\omega_R^2 C^2} \right] = \frac{[R_1^2 + \omega_R^2 L^2][R_2^2 + 1/\omega_R^2 C^2]}{R_1[R_2^2 + 1/\omega_R^2 C^2] + R_2[R_1^2 + \omega_R^2 L^2]} \Omega$$

$$\text{Aplicación numérica: } Z_R = 1 / \left[\frac{20}{400 + 96 \cdot 10^5 \cdot 25 \cdot 10^{-6}} + \frac{15}{225 + 1/96 \cdot 10^5 \cdot 25 \cdot 10^{-10}} \right] = \frac{80}{7} = 11,4285 \Omega$$

3°.- Intensidad eficaz compleja del circuito resonante para ω_R

Mediante la ley de Ohm en el circuito: $J_R = \mathcal{E} / Z_R = \mathcal{E} Y_R = E \left[\varphi^0 \left[\frac{R_1}{R_1^2 + \omega_R^2 L^2} + \frac{R_2}{R_2^2 + 1/\omega_R^2 C^2} \right] \right]$

$$J_R = E \cdot \left[\frac{R_1}{R_1^2 + \omega_R^2 L^2} + \frac{R_2}{R_2^2 + 1/\omega_R^2 C^2} \right] \left[\varphi^0 \text{ A, está en concordancia de fase con } \mathcal{E} = 220 \angle 30^0 \right]$$

la f.e.m. eficaz compleja, puesto que la impedancia del circuito en resonancia es una resistencia pura.

$$\text{Aplicación: } J_R = 220 \left[\frac{20}{400 + 96 \cdot 10^6 \cdot 25 \cdot 10^{-6}} + \frac{15}{225 + 1/96 \cdot 10^6 \cdot 25 \cdot 10^{-10}} \right] \left[30^0 = \frac{77}{4} \left[30^0 = 19,25 \right] 30^0 \text{ A} \right]$$

4°.- Potencia disipada en resonancia para ω_R

La potencia se puede obtener por dos métodos, uno será comprobación del otro.

- Directamente a partir de la resistencia del circuito resonante

$$P_R = I_R^2 Z_R = I_R^2 \frac{[R_1^2 + \omega_R^2 L^2][R_2^2 + 1/\omega_R^2 C^2]}{R_1[R_2^2 + 1/\omega_R^2 C^2] + R_2[R_1^2 + \omega_R^2 L^2]}$$

- Mediante la potencia activa del generador, como están en concordancia la tensión y la intensidad resulta que $\cos \varphi = 1$, por tanto: $P_R = E I \cos \varphi = E I$

Aplicación numérica:

- Directamente a partir de la resistencia del circuito resonante

$$P_R = I_R^2 Z_R = I_R^2 \frac{[R_1^2 + \omega_R^2 L^2][R_2^2 + 1/\omega_R^2 C^2]}{R_1[R_2^2 + 1/\omega_R^2 C^2] + R_2[R_1^2 + \omega_R^2 L^2]} = 19,25^2 \cdot \frac{80}{7} = 4235 \text{ W}$$

- Mediante la potencia activa del generador, con $\cos \varphi = 1$

$$P_R = E I = 220 \cdot 19,25 = 4235 \text{ W}$$

5º.- Inducción L_R de la bobina en resonancia, en función de ω , R_1 , R_2 , y C

De la expresión [1] despejamos la inducción L_R de la bobina en resonancia

$$L^2 - [C R_2^2 + 1/\omega^2 C] L + \frac{R_1^2}{\omega^2} = 0$$

Es una ecuación de segundo grado en L , y al resolver se obtiene:

$$L = \frac{[C R_2^2 + \frac{1}{\omega^2 C}] \pm \sqrt{[C R_2^2 + \frac{1}{\omega^2 C}]^2 - 4 \frac{R_1^2}{\omega^2}}}{2}$$

Su discusión según el discriminante es:

Si $[C R_2^2 + \frac{1}{\omega^2 C}]^2 > 4 \frac{R_1^2}{\omega^2}$ hay dos valores de L para los que el circuito está en resonancia

Si $[C R_2^2 + \frac{1}{\omega^2 C}]^2 = 4 \frac{R_1^2}{\omega^2}$ no existe valor de L para que el circuito esté en resonancia

Si $[C R_2^2 + \frac{1}{\omega^2 C}]^2 < 4 \frac{R_1^2}{\omega^2}$ hay un solo valor de $L = \frac{[C R_2^2 + \frac{1}{\omega^2 C}]}{2}$ en resonancia

Aplicación numérica:

$$L_{01} = \frac{[5 \cdot 10^{-5} \cdot 225 + \frac{1}{10^6 \cdot 5 \cdot 10^{-5}}] + \sqrt{[5 \cdot 10^{-5} \cdot 225 + \frac{1}{10^6 \cdot 5 \cdot 10^{-5}}]^2 - 4 \frac{100}{10^6}}}{2} = 27,63 \cdot 10^{-3} \text{ H}$$

$$L_{02} = \frac{[5 \cdot 10^{-5} \cdot 225 + \frac{1}{10^6 \cdot 5 \cdot 10^{-5}}] - \sqrt{[5 \cdot 10^{-5} \cdot 225 + \frac{1}{10^6 \cdot 5 \cdot 10^{-5}}]^2 - 4 \frac{100}{10^6}}}{2} = 3,619 \cdot 10^{-3} \text{ H}$$

6º.- Expresión de la admitancia del circuito

La admitancia total del circuito en paralelo es la suma de las admitancias de cada rama:

$$Y = Y_L + Y_C = \left[\frac{R_1}{R_1^2 + \omega^2 L^2} + \frac{R_2}{R_2^2 + 1/\omega^2 C^2} \right] + j \left[\frac{1/\omega C}{R_2^2 + 1/\omega^2 C^2} - \frac{\omega L}{R_1^2 + \omega^2 L^2} \right]$$

Imponiendo en la expresión de la admitancia la condición del enunciado: $R_1^2 = R_2^2 = \frac{L}{C}$ se obtiene:

$$Y' = Y'_L + Y'_C = \left[\frac{\sqrt{\frac{L}{C}}}{\frac{L}{C} + \omega^2 L^2} + \frac{\sqrt{\frac{L}{C}}}{\frac{L}{C} + 1/\omega^2 C^2} \right] + j \left[\frac{1/\omega C}{\frac{L}{C} + 1/\omega^2 C^2} - \frac{\omega L}{\frac{L}{C} + \omega^2 L^2} \right] \text{ operando}$$

$$Y' = \sqrt{LC} \left[\frac{1}{L + C\omega^2 L^2} + \frac{1}{L + 1/\omega^2 C} \right] + j \left[\frac{1/\omega}{L + 1/\omega^2 C} - \frac{\omega C L}{L + C\omega^2 L^2} \right]$$

Al operar la parte imaginaria se anula, sólo tiene parte real, luego existe resonancia.

$$Y' = \sqrt{LC} \left[\frac{1}{L + C\omega^2 L^2} + \frac{1}{L + 1/\omega^2 C} \right]$$

Aplicación numérica: $L = 2 \text{ m H}$, $C = 20 \text{ } \mu\text{F}$, $\omega = 1000 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$

$$Y' = \sqrt{2 \cdot 10^{-3} \cdot 20 \cdot 10^{-6}} \left[\frac{1}{2 \cdot 10^{-3} + 20 \cdot 10^{-6} \cdot 2^2 \cdot 10^{-6} \cdot 10^6} + \frac{1}{2 \cdot 10^{-3} + 1/[20 \cdot 10^{-6} \cdot 10^6]} \right]$$

$$Y' = 2 \cdot 10^{-4} \left[\frac{1}{2 \cdot 10^{-3} + 80 \cdot 10^{-6}} + \frac{1}{2 \cdot 10^{-3} + 1/20} \right] = 0,1 \text{ } \underline{0^0} \Omega^{-1} \text{ no tiene parte imaginaria.}$$

7º.- Valor de la pulsación para que haya resonancia

Como se ha visto en el apartado anterior, cuando se cumple $R_1^2 = R_2^2 = \frac{L}{C}$, la admitancia del circuito sólo tiene parte real, por tanto siempre, en este caso particular, cualquiera que sea la pulsación de la corriente alterna, se produce resonancia en el circuito paralelo.

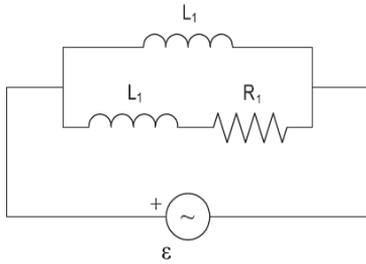
PROBLEMA 7.7

El circuito ①, está constituido por una rama donde hay una sola bobina L_1 en paralelo con otra rama en cual hay una resistencia R_1 en serie con otra bobina L_1 .

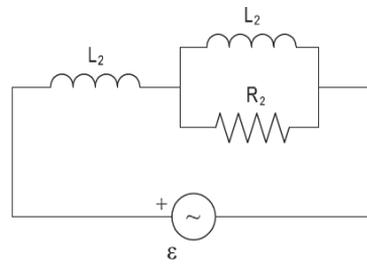
El circuito ②, está formado por una bobina L_2 en serie con dos ramas en paralelo en una hay una bobina L_2 y en la otra hay una resistencia R_2 .

Suponiendo la igualdad de las impedancia complejas $Z_1 = Z_2$, cuando los dos circuitos están conectados a una tensión alterna senoidal, determinar, cualquiera que sea la pulsación ω :

1º.- L_2 y R_2 en función de R_1 y L_1 .



Circuito ①



Circuito ②

Ahora al circuito ① le llega una corriente alterna eficaz compleja $\mathbf{J}_1 = I_1 \angle \phi^0$ A, se pide obtener:

2º.- Intensidades eficaces complejas \mathbf{J}_1' y \mathbf{J}_1'' en forma módulo argumental en cada rama.

SOLUCIÓN

1º.- L_2 y R_2 en función de R_1 y L_1 cuando $Z_1 = Z_2$

Cálculo de la impedancia del circuito ①.

$$Z_1 = \frac{j\omega L_1 [R_1 + j\omega L_1]}{R_1 + 2j\omega L_1} = \frac{-\omega^2 L_1^2 + j\omega R_1 L_1}{R_1 + 2j\omega L_1} = \frac{[-\omega^2 L_1^2 + j\omega R_1 L_1][R_1 - 2j\omega L_1]}{[R_1 + 2j\omega L_1][R_1 - 2j\omega L_1]} \text{ operando}$$

$$Z_1 = \frac{\omega^2 R_1 L_1^2 + j\omega [R_1^2 L_1 + 2\omega^2 L_1^3]}{R_1^2 + 4\omega^2 L_1^2} \quad [1]$$

Cálculo de la impedancia del circuito ②.

$$Z_2 = j\omega L_2 + \frac{j\omega L_2 R_2}{R_2 + j\omega L_2} = \frac{-\omega^2 L_2^2 + 2j\omega R_2 L_2}{R_2 + j\omega L_2} = \frac{[-\omega^2 L_2^2 + 2j\omega R_2 L_2][R_2 - j\omega L_2]}{[R_2 + j\omega L_2][R_2 - j\omega L_2]} \text{ operando}$$

$$Z_2 = \frac{\omega^2 R_2 L_2^2 + j\omega [2R_2^2 L_2 + \omega^2 L_2^3]}{R_2^2 + \omega^2 L_2^2} \quad [2]$$

Se impone la condición del enunciado: $Z_1 = Z_2$, cualquiera que sea la pulsación ω . Para tal condición se igualan, por ejemplo, las partes reales de ambas impedancias:

$$\frac{\omega^2 R_1 L_1^2}{R_1^2 + 4 \omega^2 L_1^2} = \frac{\omega^2 R_2 L_2^2}{R_2^2 + \omega^2 L_2^2} \text{ se transforma en: } [\omega^2 R_1 L_1^2][R_2^2 + \omega^2 L_2^2] = [\omega^2 R_2 L_2^2][R_1^2 + 4 \omega^2 L_1^2]$$

$$\text{Ordenado términos y simplificando queda: } R_1 L_1^2 R_2^2 + \omega^2 L_2^2 R_1 L_1^2 = R_2 L_2^2 R_1^2 + 4 \omega^2 L_1^2 R_2 L_2^2$$

Como esta igualdad ha de cumplirse cualquiera que sea la pulsación, se iguala el primer sumando del término primero con el primer sumando del segundo término, después se igualan los sumandos de cada término que contienen exclusivamente la pulsación:

$$R_1 L_1^2 R_2^2 = R_2 L_2^2 R_1^2 \text{ de donde se obtiene: } L_2^2 = \frac{R_2}{R_1} L_1^2 \text{ [3] que con [4], resulta } L_2 = \frac{L_1}{2} \text{ [5]}$$

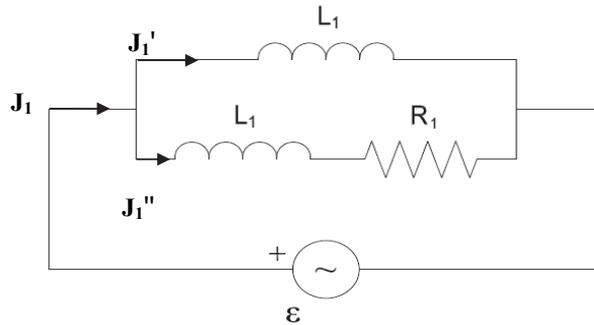
$$\omega^2 L_2^2 R_1 L_1^2 = 4 \omega^2 L_1^2 R_2 L_2^2 \text{ simplificando se halla: } R_2 = \frac{R_1}{4} \text{ [4]}$$

Llevando los anteriores resultados a la expresión [2] se verifica la condición del enunciado de igualdad de ambas impedancias $Z_1 = Z_2$ para cualquier valor de la pulsación ω .

$$Z_1 = \frac{\omega^2 R_1 L_1^2 + j \omega [R_1^2 L_1 + 2 \omega^2 L_1^3]}{R_1^2 + 4 \omega^2 L_1^2} = Z_2 = \frac{\omega^2 R_2 L_2^2 + j \omega [2 R_2^2 L_2 + \omega^2 L_2^3]}{R_2^2 + \omega^2 L_2^2}$$

2º.- Intensidades eficaces complejas J_1' y J_1'' en forma módulo argumental en cada rama

Como el circuito ① es un circuito paralelo, se trata de un divisor de intensidad, por lo tanto la intensidad a la entrada se divide entre cada una de las dos ramas del citado circuito paralelo.



Circuito ①

$U_1 = J_1 Z_1 = J_1' Z_1' = J_1'' Z_1''$ mediante estas ecuaciones se hallan las intensidades pedidas.

- Intensidad J_1' que circula por la rama con la bobina L_1 .

La impedancia de esta rama es $Z_1' = j \omega L_1$.

$$J_1' = \frac{Z_1}{Z_1'} J_1 = \frac{j \omega L_1 [R_1 + j \omega L_1]}{R_1 + 2j \omega L_1} I_1 \quad |\varphi^0 = \frac{[R_1 + j \omega L_1]}{R_1 + 2j \omega L_1} I_1 \quad |\varphi^0 = \frac{[R_1 + j \omega L_1] [R_1 - 2j \omega L_1]}{[R_1 + 2j \omega L_1] [R_1 - 2j \omega L_1]} I_1 \quad |\varphi^0$$

$$\text{Simplificando: } J_1' = \frac{[R_1^2 + 2 \omega^2 L_1^2] - j \omega R_1 L_1}{R_1^2 + 4 \omega^2 L_1^2} I_1 \quad |\varphi^0$$

- Intensidad \mathbf{J}''_1 que circula por la rama con la resistencia R y bobina L_1 .

La impedancia es $\mathbf{Z}''_1 = [R_1 + j \omega L_1]$

$$\mathbf{J}''_1 = \frac{\mathbf{Z}_1}{\mathbf{Z}''_1} \mathbf{J}_1 = \frac{j\omega L_1 [R_1 + j\omega L_1]}{R_1 + 2j\omega L_1} I_1 \underline{|\varphi^0} = \frac{j\omega L_1}{R_1 + 2j\omega L_1} I_1 \underline{|\varphi^0} = \frac{[j\omega L_1][R_1 - 2j\omega L_1]}{[R_1 + 2j\omega L_1][R_1 - 2j\omega L_1]} I_1 \underline{|\varphi^0} \text{ A}$$

$$\text{Simplificando: } \mathbf{J}''_1 = \frac{2\omega^2 L_1^2 + j\omega R_1 L_1}{R_1^2 + 4\omega^2 L_1^2} I_1 \underline{|\varphi^0}$$

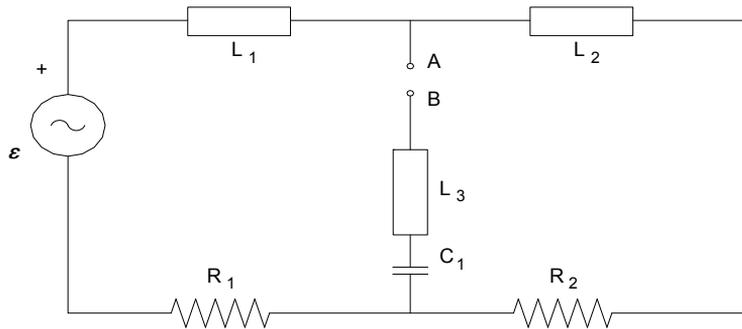
Como comprobación de los anteriores resultados se cumple que la suma de las intensidades complejas eficaces de cada rama es la intensidad compleja eficaz total del circuito \bullet :

$$\mathbf{J}'_1 + \mathbf{J}''_1 = \frac{[R_1^2 + 2\omega^2 L_1^2] - j\omega R_1 L_1}{R_1^2 + 4\omega^2 L_1^2} I_1 \underline{|\varphi^0} + \frac{2\omega^2 L_1^2 + j\omega R_1 L_1}{R_1^2 + 4\omega^2 L_1^2} I_1 \underline{|\varphi^0} = \mathbf{J}_1 = I_1 \underline{|\varphi^0} \text{ A}$$

PROBLEMA 7.8

Se dispone de un circuito, de tal manera que su generador proporciona una f. e. m. alterna instantánea cuya expresión es $E_i = 100 \cos [100 \pi t + \varphi]$ V, adelantada respecto del origen de fases $\varphi = 135^\circ$.

Sabiendo que $L_1 = L_2 = 15,915$ m H; $L_3 = 3 L_1$; $C_1 = 636,62 \mu$ F; y $R_1 = R_2 = 5 \Omega$, se pide determinar en dicho circuito los siguientes apartados:



1°.- Intensidad eficaz compleja **J** que circula por el circuito en forma módulo-argumental.

Según el Teorema de Thevenin, un circuito lineal activo con dos terminales de salida, equivale a efectos exteriores a un generador ideal, cuya f.e.m. es la caída de tensión entre dichos terminales en el circuito dado, conectado en serie con una impedancia, denominada impedancia equivalente, que es la impedancia de entrada al circuito entre dichos terminales, obtenida al cortocircuitar en el circuito inicial todas las fuentes de tensión.

Determinar para el circuito de la figura:

2°.- Circuito equivalente, según Thevenin, entre los terminales A y B.

Ahora en el circuito, se conecta entre los terminales A y B una impedancia $Z = -15 j$. Para este caso concreto se pide determinar:

3°.- Intensidades eficaces complejas de las mallas en forma módulo-argumental

SOLUCIÓN**1°.- Intensidad eficaz compleja J del circuito**

$E_i = 100 \cos [100 \pi t + 135^\circ] = E_o [\cos \omega t + \varphi] = \sqrt{2} E \cos [\omega t + \varphi]$ identificando resultará:

Pulsación: $\omega = 100\pi = 2\pi n \text{ s}^{-1}$; frecuencia: $\nu = 50 \text{ s}^{-1}$; f.e.m. eficaz: $E = 50 \sqrt{2} \text{ V}$; $\varphi = 135^\circ$

Fuerza electromotriz eficaz compleja es: $\mathcal{E} = 50 \sqrt{2} \underline{135^\circ} \text{ V}$.

Impedancias de bobinas 1 y 2: $Z_{L1} = Z_{L2} = j \omega L_1 = j 100 \pi 15,915 \cdot 10^{-3} = 5 j \Omega$

Impedancia de la bobina 3: $Z_{L3} = j \omega L_3 = j 100 \pi 3 \cdot 15,915 \cdot 10^{-3} = 15 j \Omega$

Impedancia del condensador: $Z_{C1} = -j / \omega C_1 = -j / [100 \pi 636,62 \cdot 10^{-6}] = -5 j \Omega$

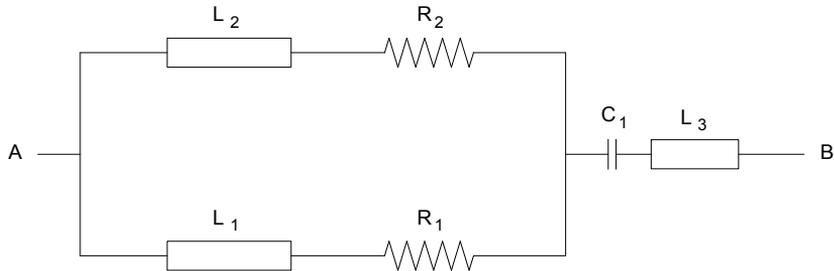
Aplicando 2ª Ley de Kirchoff a circuito: $\mathcal{E} = \mathbf{JZ} = \mathbf{J}[R_1 + j \omega L_1 + R_2 + j \omega L_2] = \mathbf{J} [10 + j10]$

De la expresión anterior se obtiene: $\mathbf{J} = \mathcal{E} / \mathbf{Z} = \frac{50\sqrt{2} \underline{135^\circ}}{10 + j10} = \frac{50\sqrt{2} \underline{135^\circ}}{10\sqrt{2} \underline{45^\circ}} = 5 \underline{90^\circ} = 5 j \text{ A}$

2º.- Circuito equivalente, según Thevenin, entre los terminales A y B

- Impedancia Z_{AB} cuando se elimina el generador.

Al cortocircuitar el generador, se modifica el esquema, es el indicado en la figura.



La impedancia equivalente Z_{AB} entre los terminales **A** y **B** será la resultante de dos ramas en paralelo, que a su vez están en serie con otra rama:

$$Z_{AB} = \frac{[R_1 + j\omega L_1][R_2 + j\omega L_2]}{[R_1 + j\omega L_1] + [R_2 + j\omega L_2]} + j\omega L_3 + \frac{1}{j\omega C_1}$$

sustituyendo valores resultará

$$Z_{AB} = \frac{[5 + j5][5 + j5]}{[5 + j5] + [5 + j5]} + j15 - j5 = 2,5 + j12,5 = \frac{5\sqrt{26}}{2} \angle 78,690^\circ = 12,74754 \angle 78,690^\circ \Omega$$

- Diferencia de potencial eficaz compleja U_{AB} .

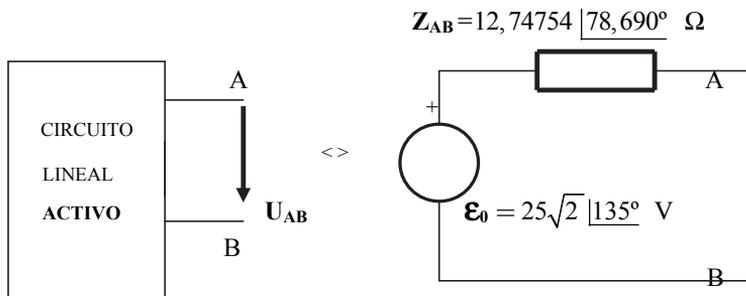
Mediante la ley de Ohm: $U_{AB} = [R_2 + j\omega L_2] \mathbf{J} = [5 + j5] \cdot 5j = -25 + j25 = 25\sqrt{2} \angle 135^\circ \text{ V}$

También se puede hallar la diferencia de potencial eficaz compleja, entre **A** y **B** a partir de la segunda ley de Kirchhoff aplicada al circuito: $\mathcal{E} = U_{AB} + [R_1 + j\omega L_1] \mathbf{J}$

En la ecuación se conoce \mathbf{J} , por tanto: $U_{AB} = 50\sqrt{2} \angle 135^\circ - 5j[5 + j5] = -25 + j25 = 25\sqrt{2} \angle 135^\circ \text{ V}$.

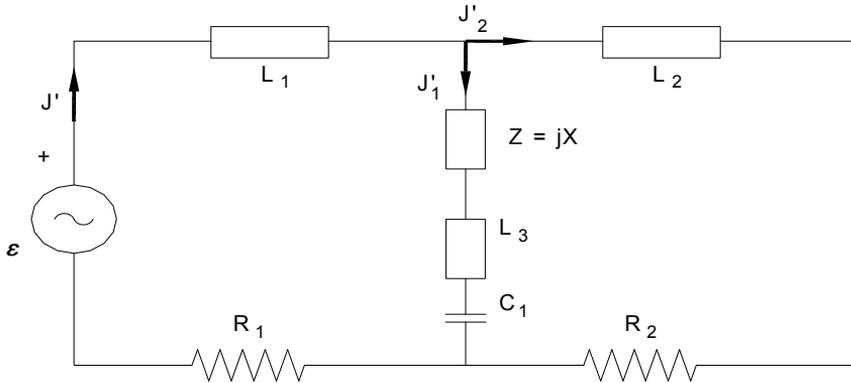
Por lo tanto el circuito equivalente al dado según Thevenin entre terminales A y B es:

El circuito equivalente al dado, según Teorema de Thevenin, consiste en un generador ideal $\mathcal{E}_0 = U_{AB}$ en serie con la impedancia equivalente Z_{AB} entre los terminales A y B:



3°.- Intensidades eficaces complejas de las mallas en forma módulo-argumental

Entre terminales A y B se conecta, la impedancia $Z = -15 j$, el nuevo circuito es:



Ahora tenemos un circuito con dos mallas y una fuente de tensión, por tanto suponiendo que las intensidades de cada malla tienen el sentido de giro de las agujas del reloj, planteamos las dos ecuaciones de las mallas, que son las siguientes:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Malla 1ª: } -25 + j25 = 5 \mathbf{J}'_1 - 5j \mathbf{J}'_2 \\ \text{Malla 2ª: } 0 = -5j \mathbf{J}'_1 + 5 \mathbf{J}'_2 \end{array} \right\}$$

Resolviendo el sistema anterior por el método de Kramer, obtenemos los valores de las dos intensidades de cada malla:

$$\mathbf{J}'_1 = \frac{\begin{vmatrix} -25 + j25 & -5j \\ 0 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & -5j \\ -5j & 5 \end{vmatrix}} = \frac{5[-25 + j25]}{25 - 25j^2} = \frac{5}{2}[-1 + j] = \frac{5\sqrt{2}}{2} \angle 135^\circ \text{ A}$$

$$\mathbf{J}'_2 = \frac{\begin{vmatrix} 5 & -25 + j25 \\ -5j & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & -5j \\ -5j & 5 \end{vmatrix}} = \frac{-5j[-25 + j25]}{25 - 25j^2} = -\frac{5}{2}[1 + j] = -\frac{5\sqrt{2}}{2} \angle 45^\circ \text{ A}$$

PROBLEMA 7.9

En el esquema de la figura se representa una instalación monofásica de corriente alterna. Se denomina Z_L a la impedancia de línea, cuyo valor se obtiene a partir de las características físicas de la línea aérea de conductor de cobre indicadas a continuación:

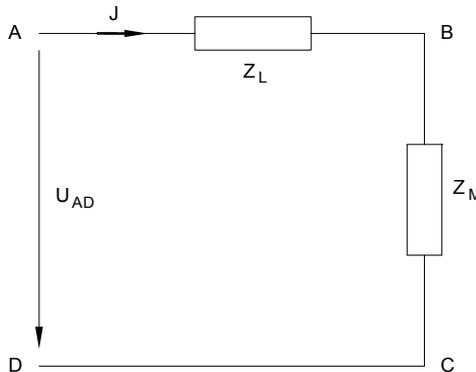
CARACTERÍSTICAS GEOMÉTRICAS	CARACTERÍSTICAS ELÉCTRICAS DE LÍNEA AÉREA DE COBRE
Longitud AB $\ell_{AB}= 750$ m	Resistividad del cobre a 20° C: $\rho= 0,18 \Omega \text{ mm}^2/\text{m}$
Sección recta $s= 180 \text{ mm}^2$	Reactancia inductiva kilométrica: $X^l= 0,150 \Omega / \text{km}$

El receptor tiene una impedancia Z_M , concretamente es un motor inductivo monofásico, cuya potencia aparente es $S=2200$ VA, la tensión eficaz nominal compleja de funcionamiento normal es $U_{BC}=220\angle 0^\circ$ V y su correspondiente factor de potencia es $\cos \varphi= 0,70$. Se pide determinar:

- 1°.- Impedancia del motor Z_M en forma módulo argumental.
- 2°.- Potencias activa y reactiva del motor.
- 3°.- Tensión U_{AD} en forma módulo argumental. Caída de tensión en % en la línea AB.
- 4°.- Potencias activa, reactiva y aparente del circuito completo de motor y línea conjuntamente.

Sabiendo que el motor ha de funcionar a su tensión nominal y que en la línea la máxima caída de tensión eficaz admisible, sobre la tensión entre A y D, es del $\Delta U'_{AB}= 5\%$, se pide determinar:

- 5°.- Nueva longitud máxima admisible ℓ'_{AB} de línea AB.



SOLUCIÓN

1°.- La impedancia del motor Z_M en forma módulo argumental

La potencia aparente en el motor es: $S= U_{BC} I$ donde se conocen los valores de S y U_{AB} .

La intensidad eficaz del circuito resulta:
$$I = \frac{S}{U_{BC}} = \frac{2200}{220} = 10 \text{ A}$$

Como el factor de potencia es $\cos \varphi= 0,70$, el ángulo de fase es: $\varphi= \arccos [0,70] = 45,5729^\circ$.

Por tanto la intensidad eficaz compleja del circuito es:

$$\mathbf{J} = 10 \angle -45,5729^\circ = 10 [\cos \text{arc} \cos [0,70] + j \text{sen} [\text{arc} \cos [0,70]]] = 7 - j 7,141428 \text{ A}$$

Según la ley de Ohm, obtendremos la impedancia del motor que al ser inductivo, conlleva que la intensidad \mathbf{J} esté retrasada respecto de la tensión

$$\mathbf{U}_{BC}/\mathbf{Z}_M = \mathbf{U}_{BC} = \frac{220 \angle 0^\circ}{10 \angle -45,5729^\circ} = 22 \angle 45,5729^\circ = 22 [\cos \text{arc} \cos 0,70 + j \text{sen} \text{arc} \cos 0,70] = 15,4000 + j 15,71114 \Omega$$

2°.- Potencias activa y reactiva del motor

Tensión nominal eficaz compleja: $\mathbf{U}_{BC} = 220 \angle 0^\circ \text{ V}$.

Intensidad eficaz compleja: $\mathbf{J} = 10 \angle -45,5729^\circ \text{ A}$

Potencia activa $P_M = U_{BC} I \cos \varphi = 220 \cdot 10 \cos 45,5729^\circ = 1540,00000 \text{ W}$

Potencia reactiva $Q_M = U_{BC} I \text{sen} \varphi = 220 \cdot 10 \text{sen} 45,5729^\circ = 1571,11425 \text{ VAR}$

Como comprobación, de los resultados anteriores la potencia aparente se expresa:

$$S_M = U_{BC} I = 2200 = \sqrt{P_M^2 + Q_M^2} = \sqrt{1540^2 + 1571,11425^2} = 2200 \text{ VA}$$

3°.- Tensión \mathbf{U}_{AD} . Caída de tensión en línea en % sobre \mathbf{U}_{AD}

- Tensión \mathbf{U}_{AD}

La línea monofásica tiene un recorrido de ida y otro recorrido de retorno, por tanto la longitud total, $\ell_{\text{TOTAL}} = 2 \ell_{AB} = 1500 \text{ m}$. Mediante los datos del enunciado se calcula \mathbf{Z}_L impedancia de la línea eléctrica monofásica:

$$\mathbf{Z}_L = R_L + j X_L = \rho \frac{\ell_T}{S} + j \ell_T X' = 0,18 \frac{1500}{180} + j \frac{1500}{1000} 0,15 = 1,5 + j 0,225 = 1,51678 \angle 8,5307^\circ \Omega$$

La caída de tensión \mathbf{U}_{AD} entre los terminales **A** y **D**, al comienzo de la línea, se obtendrá sumando las caídas de tensión en la propia línea eléctrica y la caída correspondiente al motor. La segunda ley de Kirchhoff aplicada al circuito se expresa:

$$\mathbf{U}_{AD} = \mathbf{U}_{BC} + \mathbf{J} \mathbf{Z}_L = 220 \angle 0^\circ + 10 \angle -45,5729^\circ \cdot 1,51678 \angle 8,5307^\circ = 220 \angle 0^\circ + 15,16781 \angle -37,0422^\circ$$

Operando se obtiene: $\mathbf{U}_{AD} = 232,106804 - j 9,137162 = 232,28658 \angle -2,2543^\circ \text{ V}$

- Caída de tensión en % en la línea AB.

Se determina a partir de los valores de caídas de tensión anteriormente obtenidos.

La tensión de entrada al comienzo de la línea es: $\mathbf{U}_{AD} = 232,28658 \angle -2,2543^\circ \text{ V}$

La caída de tensión en línea debido a su impedancia es: $\mathbf{U}_{AB} = \mathbf{J} \mathbf{Z}_L = 15,16781 \angle -37,0422^\circ \text{ V}$

La caída de tensión eficaz entre A y B, en la línea, en porcentaje sobre la tensión \mathbf{U}_{AD} es:

$$\Delta U = \frac{U_{AB}}{U_{AD}} = \frac{15,16781}{232,28658} 100 = 6,53\%$$

4°.- Potencias activa, reactiva y aparente del circuito completo

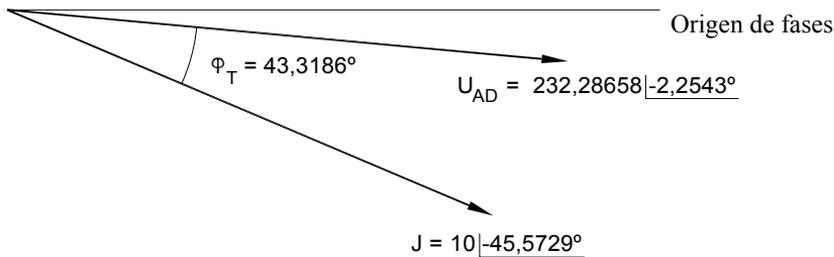
El valor de φ_T , desfase en el circuito, es la fase de la impedancia total del circuito, obtenida a partir de las impedancias en serie de la línea y del motor:

$$\mathbf{Z}_T = \mathbf{Z}_L + \mathbf{Z}_M = 1,5 + j 0,225 + 15,4 + j 15,71114 = 16,9 + j 15,93614 = 23,22865 \angle 43,3186^\circ \Omega.$$

El desfase en el circuito, también es la diferencia entre la fase de U_{AD} y la fase de \mathbf{J} :

$$\varphi_T = -2,2543^\circ - (-45,5729^\circ) = 43,3186^\circ.$$

El circuito es de naturaleza "inductiva", por tanto la tensión U_{AD} está adelantada respecto de la intensidad \mathbf{J} , según se representa en la figura.



Como se conoce el desfase, la tensión U_{AD} y también la intensidad I , se determina:

Potencia activa $P_T = U_{AD} I \cos \varphi_T = 232,28658 \cdot 10 \cos 43,3186^\circ = 1690,0000 \text{ W}$

Potencia reactiva $Q_T = U_{AD} I \sin \varphi_T = 232,28658 \cdot 10 \sin 43,3186^\circ = 1593,6140 \text{ VAR}$

Potencia aparente $S_T = U_{AD} I = 232,28658 \cdot 10 = 2322,8658 \text{ VA}$

Como comprobación, se pueden obtener los resultados anteriores a partir de la resistencia y de la reactancia, de la impedancia total del circuito $\mathbf{Z}_T = R_T + jX_T = 16,9000 + j 15,93614 \Omega$.

- Potencia activa $P_T = I^2 R_T = 10^2 \cdot 16,90000 = 1690,0000 \text{ W}$
- Potencia reactiva $Q_T = I^2 X_T = 10^2 \cdot 15,93614 = 1593,6140 \text{ VAR}$
- Potencia aparente $S_T = \sqrt{P_T^2 + Q_T^2} = \sqrt{1690^2 + 1593,614^2} = 2322,8658 \text{ VA}$

Por último, también se podrían haber hallado las potencias activa y reactiva de forma muy fácil, ya que la potencia aparente compleja \mathbf{S} es el producto de la tensión eficaz compleja U_{AD} por el conjugado de la intensidad eficaz compleja, $\mathbf{J}^* = 10 \angle 45,5729^\circ = 7 + j 7,141428 \text{ A}$

$$\mathbf{S}_T = U_{AD} \mathbf{J}^* = P_T + j Q_T = [232,106804 - j 9,137162] [7 + j 7,141428] = 1690,000 + j 1593,614$$

Potencia activa $P_T = 1690,000 \text{ W}$

Potencia reactiva $Q_T = 1593,614 \text{ VAR}$

5°.- Nueva longitud máxima admisible ℓ'_{AB} de línea AB

En línea, para que el motor funcione a su tensión nominal de 220V, la máxima caída de tensión eficaz admisible, es del $\Delta U'_{AB} = 5\%$, sobre la tensión de entrada al circuito completo entre los terminales A y D, por tanto en módulo se cumple:

$$\text{Nueva caída tensión total: } U'_{AD} = U'_{AB} + 220 = 0,05 U'_{AD} + 220 \Rightarrow U'_{AD} = 231,578 \text{ V}$$

$$\text{Nueva caída de tensión en línea: } U'_{AB} = 0,05 U'_{AD} = 0,05 \cdot 231,578 = 11,578 \text{ V} = I Z'_L \quad [1]$$

La línea monofásica, cuya "nueva longitud total" al tener un recorrido de ida y otro de retorno es:

$\ell'_{\text{TOTAL}} = 2 \ell'_{AB}$ m, y su nueva impedancia Z'_L es:

$$Z'_L = R'_L + j X'_L = \rho \frac{2\ell'_{AB}}{S} + j 2 \ell'_{AB} X' = 2 \ell'_{AB} \left(\frac{0,18}{180} \right) + j \frac{2 \ell'_{AB}}{1000} 0,15 = 2 \ell'_{AB} [10 + 1,5 j] 10^{-4}$$

$$Z'_L = 2,0223 \cdot 10^{-3} \ell'_{AB} \underline{8,5307^\circ} \Omega$$

En el motor se mantiene la tensión nominal y por tanto: $\mathbf{J} = 10 \underline{-45,5729^\circ} \text{ A}$

Llevando las dos magnitudes anteriores a la expresión [1], despejando resulta:

$$Z'_L = \frac{U'_{AB}}{I} = \frac{11,578}{10} = 1,1578 = 2,0223 \cdot 10^{-3} \ell'_{AB}$$

Por tanto resulta que la "nueva longitud máxima admisible" de línea, para que la máxima caída de tensión eficaz en la línea sea del $\Delta U'_{AB} = 5\%$, sobre la tensión entre A y D, es: $\ell'_{AB} = 572,5 \text{ m}$.

PROBLEMA 7.10

El circuito equivalente de un receptor monofásico de corriente alterna, está conformado por una resistencia R en serie con una autoinducción L.

La red de energía eléctrica monofásica alterna, a la que está conectado dicho receptor tiene una frecuencia $\nu = 50$ Hz, y la tensión eficaz nominal compleja de funcionamiento normal del receptor es $\mathcal{E} = 240 \angle 0^\circ$ V. El receptor funciona mediante una intensidad nominal eficaz compleja cuya expresión es: $\mathbf{J} = 35 \angle -38^\circ$ A. Se pide determinar para el receptor:

- 1º.- Potencia activa, reactiva y factor de potencia
- 2º.- Resistencia R en ohmios. Autoinducción L en henrios.

El receptor funciona de manera regular a plena carga durante $h = 600$ horas al mes y se sabe que según las tarifas eléctricas, aprobadas por el Ministerio de Industria en el año 2010, el consumo de la energía reactiva tiene las características indicadas en la tabla siguiente:

TABLA DE FACTURACIÓN DE ENERGÍA REACTIVA	
$\cos \varphi$	€/kVArh
$1,00 \leq \cos \varphi = 0,95$	0,000000
$0,95 < \cos \varphi = 0,90$	0,041554
$0,90 < \cos \varphi = 0,85$	0,041554
$0,85 < \cos \varphi = 0,80$	0,041554
$\cos \varphi < 0,80$	0,062332

Los impuestos correspondientes al consumo de energía reactiva son: $G = 18\% + 4,864\%$. Para el citado motor, se pide terminar:

- 3º.- Consumo y facturación mensual de la energía reactiva.

Ahora se compensa el consumo de energía reactiva del receptor, mediante una batería de condensadores en paralelo, hasta que la facturación del consumo mensual de energía reactiva sea nula, según la anterior tabla, lo cual se produce un ahorro. Sabiendo que el coste estimado de instalación de la batería, materiales, mano de obra y los impuestos incluidos, es de 550 €/kVAr, se pide calcular:

- 4º.- Potencia reactiva del condensador a instalar.
- 5º.- Número de meses a compensar con el ahorro el coste de instalación del condensador.

SOLUCIÓN

1º.- Potencia activa, reactiva y factor de potencia

La potencia activa del receptor $P_1 = E I \cos \varphi_1 = 240 \cdot 35 \cos 38^\circ = 6619,29033$ W
 La potencia reactiva del receptor $Q_1 = E I \sin \varphi_1 = 240 \cdot 35 \sin 38^\circ = 5171,556393$ VAR
 Factor de potencia del receptor: $\cos \varphi = \cos 38^\circ = 0,7880$

2º.- Resistencia R en Ohmios. Autoinducción L en Henrios

La resistencia del receptor se determina a partir de la potencia activa:

$$P_1 = R I^2 = 6619,29033 \text{ W} \Rightarrow R = \frac{P_1}{I^2} = \frac{6619,29033}{35^2} = 5,4035023 \Omega$$

La autoinducción del receptor se determina a partir de la potencia reactiva:

$$Q_1 = X_L I^2 = 5171,556393 \text{ VAR} \Rightarrow X_L = \frac{Q_1}{I^2} = \frac{5171,556393}{35^2} = 4,221679 \Omega$$

$$X_L = L \omega = L 2 \pi v, \text{ por tanto, la autoinducción es: } L = \frac{X_L}{2 \pi v} = \frac{4,221679}{2 \pi \cdot 50} = 1,3438 \cdot 10^{-2} \text{ H}$$

3º.- Consumo y facturación mensual de la energía reactiva

Consumo mensual de energía reactiva en motor:

$$C = Q_1 h = 5171,556393 \cdot 600 = 3102,934 \text{ kVArh}$$

La facturación mensual de energía reactiva en el motor, se determina a partir del consumo y del factor de potencia antes obtenidos, y entrando en la tabla de precios del enunciado, resulta:

$$F = C P_{\text{TABLA REACTIVA}} = 3102,934 \cdot 0,062332 = 193,41 \text{ €}$$

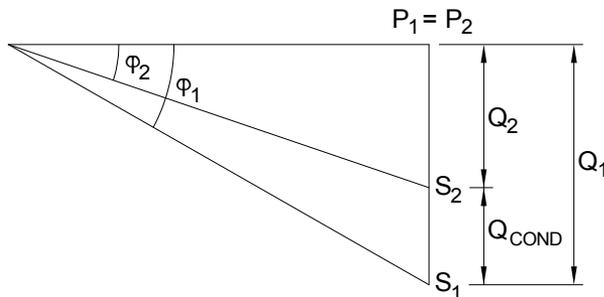
$$\text{Impuestos G [18 \% + 4,864 \%] \cdot 93,41 = 44,22 \text{ €}}$$

$$\text{Coste total mensual de energía reactiva} = \overline{237,63 \text{ €}}$$

4º.- Potencia reactiva del condensador a instalar

Al conectar un condensador en paralelo con el receptor, se modifica el factor de potencia pasando desde la fase inicial $\varphi_1 = 38^\circ$, hasta la fase final $\varphi_2 = \arccos[0,95] = 18,1948^\circ$

El triángulo de potencias de los dos estados es el siguiente:



El nuevo factor de potencia es dato $\cos \varphi_2 = 0,95$, ya que según la tabla de reactiva es el factor de potencia correspondiente a precio nulo del kVArh.

A partir de relaciones geométricas en el triángulo de potencias, se obtiene la potencia del condensador a instalar en paralelo con el transformador:

$$|Q_{\text{CONDENSADOR}}| = P_1 [\text{tg } \varphi_1 - \text{tg } \varphi_2] = 6619,29033 [\text{tg } 38^\circ - \text{tg } 18,1948^\circ] = 2995,910 \text{ VAr} .$$

5º.- Número de meses para compensar con el ahorro el coste de instalación del condensador

Se ha de instalar, en la instalación receptora, una batería de condensadores cuya potencia, calculada en el apartado anterior es: $2995,91 \text{ VAr} \approx 3 \text{ kVAr}$.

Según los datos del enunciado, el Coste de la batería: $C_B = 3 \cdot 550 = 1650 \text{ €}$

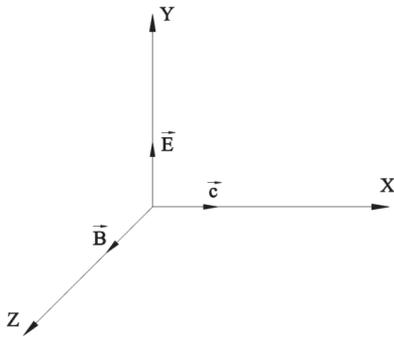
Tras la compensación del factor de potencia ya no se produce facturación de reactiva, por tanto el ahorro mensual a precios vigentes, según apartado tercero: $A_F = 237,63 \text{ €}$

El número de meses preciso para compensar con el ahorro el importe del coste de la

batería de condensadores es: $n = \frac{C_B}{A_F} \approx 7 \text{ meses.}$

CAPÍTULO VIII

ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS

PROBLEMA 8.1

Una onda senoidal electromagnética plana polarizada cuya frecuencia es de 10 MHz, se desplaza en el vacío en la dirección positiva del eje OX. Si la amplitud del campo magnético es 10^{-5}T y éste se encuentra oscilando según el eje OY, determinar el campo eléctrico a 30 m y 1 s.

SOLUCIÓN

En cualquier instante E y B se encuentran en fase, es decir, toman valores extremos y nulos al mismo tiempo, estando sus módulos relacionados por:

$$E = B \cdot c \rightarrow E_0 = B_0 \cdot c = 3000 \text{ N} \cdot \text{C}^{-1}$$

A partir de las ecuaciones de Maxwell se demuestra que, en cualquier instante, la relación entre los módulos del campo eléctrico y magnético, de una onda electromagnética, es igual a la velocidad de la luz.

Como las ecuaciones de propagación de ambos campos son:

$$\left. \begin{aligned} E_y(x, t) &= E_0 \cdot \text{sen}(k \cdot x - \omega \cdot t) = E_0 \cdot \text{sen}\left(2 \cdot \pi \cdot \left(\frac{x}{\lambda} - v \cdot t\right)\right) \\ B_z(x, t) &= B_0 \cdot \text{sen}(k \cdot x - \omega \cdot t) = B_0 \cdot \text{sen}\left(2 \cdot \pi \cdot \left(\frac{x}{\lambda} - v \cdot t\right)\right) \end{aligned} \right\}$$

$$\lambda = \frac{c}{v} = \frac{3 \cdot 10^8}{15 \cdot 10^6} = 20 \text{ m}$$

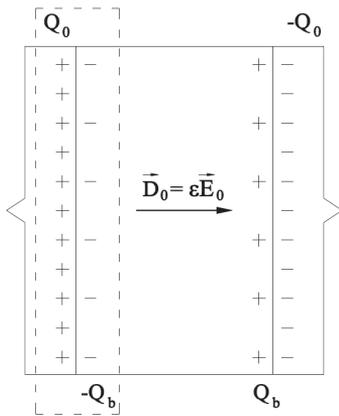
obtenemos:

$$B = 10^{-7} \cdot \text{sen}\left(2 \cdot \pi \cdot \left(\frac{x}{20} - 15 \cdot 10^6 \cdot t\right)\right) \cdot \vec{k}$$

$$E = 30 \cdot \text{sen}\left(2 \cdot \pi \cdot \left(\frac{x}{20} - 15 \cdot 10^6 \cdot t\right)\right) \cdot \vec{j}$$

$$\text{A } 30 \text{ m y } 1 \text{ s} \rightarrow \vec{E} = 9,3 \vec{j} \text{ N} \cdot \text{C}^{-1}$$

PROBLEMA 8.2



Un condensador de armaduras planas y paralelas está relleno de vidrio de permitividad relativa $\epsilon' = 4$ y resistividad $\rho = 10^9 \Omega \cdot \text{m}$. Su capacidad es $1 \mu\text{F}$. Se carga el condensador con una diferencia de potencial $V = 200 \text{ V}$ y se aísla. Determinar la carga del condensador en función del tiempo.

SOLUCIÓN

El campo eléctrico en el interior del condensador es perpendicular a sus placas; si llamamos OZ a esta dirección, tendremos: $\vec{E} = E(z) \cdot \vec{k}$, y por tanto:

$$\text{rot} \vec{E} = \frac{\partial E(z)}{\partial y} \cdot \vec{i} - \frac{\partial E(z)}{\partial x} \cdot \vec{j} = 0$$

De la tercera ecuación de Maxwell: $\text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \Rightarrow \vec{B} = \text{cte}$

y por ser $B = 0$ cuando $t \rightarrow \infty$, tendremos que constantemente $\vec{B} = \vec{0} \Rightarrow \vec{H} = \vec{0}$

Aplicando la cuarta ecuación de Maxwell, tenemos:

$$\text{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = 0 \Rightarrow \sigma \cdot \vec{E} + \epsilon \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0 \quad [1]$$

La solución a esta ecuación diferencial es del tipo: $E(t) = a \cdot e^{bt} \quad [2]$

La cual al sustituirse en la ecuación (1) se obtiene:

$$\sigma \cdot a \cdot e^{bt} + \epsilon \cdot a \cdot b \cdot e^{bt} = 0 \Rightarrow \sigma + \epsilon \cdot b = 0 \Rightarrow b = -\frac{\sigma}{\epsilon}$$

Aplicando el teorema de Gauss y la definición de flujo a la superficie cerrada indicada con línea discontinua en la figura, obtenemos:

$$\left. \begin{aligned} \oint D_0 \cdot dA = D_0 \cdot A = Q_0 \\ D_0 = \epsilon \cdot E_0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow E_0 = \frac{Q_0}{\epsilon \cdot A} = \frac{C \cdot V}{\epsilon \cdot A}$$

Por otra parte, el valor del campo eléctrico para $t = 0$ obtenido a partir de [2] es:

$$E_0 = a \cdot e^0 = a \Rightarrow a = \frac{C \cdot V}{\epsilon \cdot A}$$

por tanto, el campo eléctrico para cualquier instante en el interior del condensador es:

$$E(t) = \frac{C \cdot V}{\varepsilon \cdot A} \cdot e^{-\sigma \cdot t / \varepsilon}$$

La conductividad se calcula a partir de la resistividad. La carga en las armaduras calculada por aplicación del teorema de Gauss a la misma superficie que antes pero para un instante t , nos dará:

$$Q(t) = \varepsilon \cdot A \cdot E(t) \Rightarrow Q(t) = C \cdot V \cdot e^{-\sigma \cdot t / \varepsilon} = 2 \cdot 10^{-4} e^{-28,27 t} \text{ C}$$

PROBLEMA 8.3

Demostrar que el flujo de energía a través de una superficie que encierra cargas estáticas e imanes, es cero.

SOLUCIÓN

El flujo del vector de Poynting a través de la superficie que encierra a las cargas e imanes es:

$$\oint_A \mathbf{S} \cdot d\mathbf{A} = \int_V \nabla \cdot \mathbf{s} \cdot dV = \int_V \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot dV$$

Aplicando la propiedad vectorial: $\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = \mathbf{H} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) - \mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{H})$

para el campo electrostático: $\nabla \times \mathbf{E} = \text{rotE} = 0$ y $\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = 0$

y por ser los imanes permanentes: $\mathbf{J} = 0 \Rightarrow \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = 0$

De ambas condiciones obtenemos:

$$\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = 0 \Rightarrow \oint_A \mathbf{S} \cdot d\mathbf{A} = 0$$

indicándonos que, una vez establecidos los campos estáticos, no hay radiación de energía hacia el exterior.

PROBLEMA 8.4

La presión de radiación electromagnética de una bombilla a 4 m de distancia es $8,29 \cdot 10^{-10}$ Pa. El 50% de la potencia eléctrica de la bombilla se convierte en radiación electromagnética. Calcular dicha potencia.

SOLUCIÓN

La intensidad de una onda electromagnética es la energía que por unidad de tiempo atraviesa la unidad de superficie perpendicular a la dirección de propagación; su valor coincide con el valor promedio del vector de Poynting, que representa un flujo de energía siendo éste igual al producto de la densidad volumétrica media de la energía multiplicada por la velocidad con que ésta se propaga.

A su vez, la presión de radiación es el cociente entre el valor medio del vector de Poynting y la velocidad de propagación de la onda electromagnética. En consecuencia, tenemos,

$$I = c \cdot \langle P \rangle \Rightarrow I = 0,249 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$$

La potencia emisiva en el origen vendrá dada por el producto,

$$\text{Potencia} = 4 \cdot \pi \cdot r^2 \cdot I \Rightarrow \text{Potencia} = \frac{4 \cdot \pi \cdot r^2 \cdot I}{0,5} = 100,13 \text{ W}$$

Se divide por 0,5 ya que el 50% de la potencia total se convierte en radiación electromagnética.

PROBLEMA 8.5

Con las condiciones del problema 8.4 determinar las amplitudes de los campos eléctrico y magnético. Indicar las hipótesis simplificadoras en la realización de los problemas 8.4 y 8.5.

SOLUCIÓN

La definición del vector de Poynting es,

$$\vec{S} = \frac{1}{2} \vec{E} \wedge \vec{H}$$

Para el caso de una onda electromagnética que se propaga en el vacío en el eje OX se tiene,

$$\vec{S} = E_0 H_0 \text{sen}^2(\omega t - kx) \vec{i}$$

El valor medio en un periodo de la función armónica al cuadrado es igual a $\frac{1}{2}$; por tanto el valor medio de S será,

$$\langle S \rangle = \frac{1}{2} E_0 H_0 = \frac{1}{2} E_0 \frac{E_0}{\mu_0 c} = \frac{1}{2} \epsilon_0 c E_0^2$$

También se utiliza el concepto de valor eficaz del campo eléctrico,

$$E_{\text{ef}} = \frac{E_0}{\sqrt{2}}$$

Obteniéndose,

$$\langle S \rangle = c \epsilon_0 E_{\text{ef}}^2$$

$$I = \langle S \rangle = \frac{1}{2} \cdot \epsilon_0 \cdot c \cdot E_0^2 \Rightarrow E_0 = \sqrt{\frac{2 \cdot I}{\epsilon_0 \cdot c}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 0,249 \cdot 4 \cdot \pi \cdot 9 \cdot 10^9}{3 \cdot 10^8}}$$

$$E_0 = 13,70 \text{ N} \cdot \text{C}^{-1}$$

$$B_0 = \frac{E_0}{c} = 4,57 \cdot 10^{-8} \text{ T}$$

PROBLEMA 8.6

La amplitud eficaz del vector campo eléctrico de la radiación solar incidente sobre la Tierra es de $614 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$. Determinar el flujo de energía medio de la radiación y la presión de radiación. Justificar la respuesta.

SOLUCIÓN

La definición del vector de Poynting es,

$$\vec{S} = \frac{1}{2} \vec{E} \wedge \vec{H}$$

Para el caso de una onda electromagnética que se propaga en el vacío en el eje OX se tiene,

$$\vec{S} = E_0 H_0 \text{sen}^2(\omega t - kx) \vec{i}$$

El valor medio en un periodo de la función armónica al cuadrado es igual a $1/2$; por tanto el valor medio de S será,

$$\langle S \rangle = \frac{1}{2} E_0 H_0 = \frac{1}{2} E_0 \frac{E_0}{\mu_0 c} = \frac{1}{2} \epsilon_0 c E_0^2$$

También se utiliza el concepto de valor eficaz del campo eléctrico,

$$E_{\text{ef}} = \frac{E_0}{\sqrt{2}}$$

Por tanto,

$$I = \epsilon_0 c E_{\text{ef}}^2 \Rightarrow I = 1001,38 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$$

De modo que el flujo de energía medio de la radiación es,

$$\langle S \rangle = I = 1001,38 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$$

La energía electromagnética por unidad de volumen es,

$$u = \frac{dW}{dV} = \left[\frac{\epsilon_0 E_0^2}{2} + \frac{\mu_0 H_0^2}{2} \right] \text{sen}^2(\omega t - kx)$$

El promedio de la densidad energética es,

$$\langle u \rangle = \frac{1}{2} \epsilon_0 E_0^2 = \frac{\langle S \rangle}{c}$$

La presión de radiación es,

$$\langle P \rangle = \langle u \rangle = \frac{\langle S \rangle}{c} = \frac{I}{c} = 3,34 \text{ } \mu\text{J} \cdot \text{m}^{-3}$$

La presión que ejerce la onda electromagnética es numéricamente igual a su densidad de energía.

PROBLEMA 8.7

Se sabe que la amplitud del campo magnético a una distancia de 10 m de una antena emisora de ondas electromagnéticas es $12,17 \cdot 10^{-8}$ T. Calcular la potencia de emisión de la señal electromagnética.

SOLUCIÓN

A partir de las ecuaciones de Maxwell se demuestra que, en cualquier instante, la relación entre los módulos del campo eléctrico y magnético, de una onda electromagnética, es igual a la velocidad de la luz.

$$E_0 = c \cdot B_0 = 36,51 \text{ N} \cdot \text{C}^{-1}$$

La definición del vector de Poynting es,

$$\vec{S} = \frac{1}{2} \vec{E} \wedge \vec{H}$$

Para el caso de una onda electromagnética que se propaga en el vacío en el eje OX se tiene,

$$\vec{S} = E_0 H_0 \text{sen}^2(\omega t - kx) \vec{i}$$

El valor medio en un periodo de la función armónica al cuadrado es igual a $\frac{1}{2}$; por tanto el valor medio de S será,

$$\begin{aligned} \langle S \rangle &= \frac{1}{2} E_0 H_0 = \frac{1}{2} E_0 \frac{E_0}{\mu_0 c} = \frac{1}{2} \epsilon_0 c E_0^2 \\ \langle S \rangle = I &= \frac{1}{2} \cdot \epsilon_0 \cdot c \cdot E_0^2 = 1,77 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \end{aligned}$$

$$\text{Potencia} = 4 \cdot \pi \cdot R^2 \cdot I = 2224,66 \text{ W}$$

PROBLEMA 8.8

Sea un dipolo eléctrico cuyo momento tiene la función con el tiempo, $\vec{p} = p_0 e^{24t\vec{i}}$

Si se tiene en cuenta la velocidad finita de propagación de los campos eléctricos y magnéticos, es necesario ajustar las ecuaciones con el término $t - \frac{r}{c}$, obteniéndose el potencial retardado. Determinar la expresión del potencial retardado en función del tiempo para una distancia de las cargas del dipolo, de $4 \cdot 10^8$ m y $4,5 \cdot 10^8$ m, siendo la amplitud de carga oscilante del dipolo $1 \mu\text{C}$.

SOLUCIÓN

Podemos imaginar un dipolo eléctrico cuyo momento es una función sinusoidal del tiempo, como en la figura, con $Q = Q_0 \cdot e^{j\omega t}$

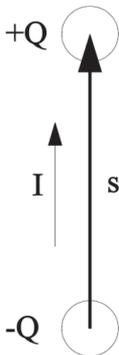
Entonces, $p = Q_0 \cdot e^{j\omega t} \cdot s = p_0 \cdot e^{j\omega t}$

En donde, $p_0 = Q_0 \cdot s$

Por ejemplo, las cargas podrían estar situadas en un par de esferas unidas por un hilo delgado de resistencia y capacidad despreciables.

La corriente I hacia fuera que circula por el hilo es:

$$I = \frac{dQ}{dt} = j \cdot \omega \cdot Q_0 \cdot e^{j\omega t} = I_0 \cdot e^{j\omega t}$$



$$y \quad I_0 = j \cdot \omega \cdot Q_0 \quad ; \quad I_0 \cdot s = j \cdot \omega \cdot p_0 \quad ; \quad I \cdot s = j \cdot \omega \cdot p$$

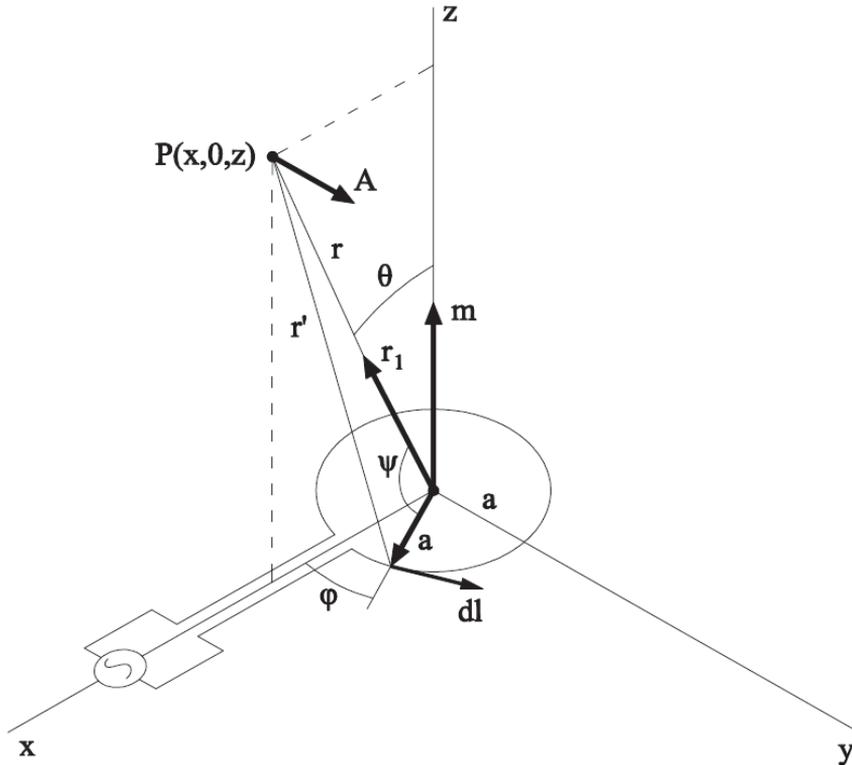
Si la onda se propaga en el vacío, el potencial escalar retardado es:

$$V = \frac{Q_0 \cdot e^{j\omega \cdot (t - \frac{r_b}{c})}}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot r_b} - \frac{Q_0 \cdot e^{j\omega \cdot (t - \frac{r_a}{c})}}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot r_a}$$

$$V = 9 \cdot 10^{-5} \left[\frac{e^{24(t-0,5)\vec{i}}}{4} - \frac{e^{24(t-0,56)\vec{i}}}{4,5} \right]$$

PROBLEMA 8.9

Sea un dipolo magnético oscilante (espira circular de 1 m^2) recorrido por una corriente alterna con amplitud 1 A y pulsación $24 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$. Determinar el módulo del potencial vector retardado en función del tiempo, para un punto que está situado a una distancia del centro del dipolo de $1,5\cdot 10^8$ y contenido en el plano de la espira.



SOLUCIÓN

$$A = \frac{\mu_0}{4 \cdot \pi} \cdot \int_0^{2\cdot\pi} \frac{I_0 \cdot e^{j\omega\left(t-\frac{r'}{c}\right)}}{r'} \cdot a \cdot \cos \varphi \cdot d\varphi \cdot \varphi_1$$

Esta es la suma de las contribuciones dA debidas a los elementos ldl a lo largo de la espira, todos retrasados en los intervalos de tiempo apropiados r'/c . Por tanto,

$$A = \frac{\mu_0 \cdot a \cdot I_0 \cdot e^{j\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)}}{4 \cdot \pi} \cdot \int_0^{2\cdot\pi} \frac{e^{j\left(\frac{r-r'}{\lambda}\right)}}{r'} \cdot \cos \varphi \cdot d\varphi \cdot \varphi_1$$

Si la espira es pequeña comparada con $\lambda = \lambda/2\pi$, será:

$$|r - r'| \ll \lambda$$

$$e^{j\left(\frac{r-r'}{\lambda}\right)} \approx 1 + j \cdot \frac{r - r'}{\lambda}$$

y

$$A = \frac{\mu_0 \cdot a \cdot I_0 \cdot e^{j\omega \cdot \left(\frac{t-r}{c}\right)}}{4 \cdot \pi \cdot r} \cdot \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{r}{r'} + j \cdot \frac{r}{\lambda} \cdot \left(\frac{r}{r'} - 1 \right) \right\} \cdot \cos \varphi \cdot d\varphi \cdot \varphi_1$$

También para $a \ll r$;

$$\frac{r}{r'} \approx 1 - \frac{a^2}{2 \cdot r^2} + \frac{a \cdot x}{r^2} \cdot \cos \varphi$$

Si integramos y después sustituimos $r \cdot \sin \theta$ por x , encontramos que:

$$A = \frac{\mu_0}{4 \cdot \pi} \cdot \frac{I_0 \cdot \pi \cdot a^2 \cdot e^{j\omega \cdot \left(\frac{t-r}{c}\right)}}{r \cdot \lambda} \cdot \left(\frac{\lambda}{r} + j \right) \cdot \sin \theta \cdot \varphi_1$$

o, poniendo $\pi \cdot a^2 \cdot I_0 = m_0$ tendremos:

$$A = \frac{\mu_0}{4 \cdot \pi} \cdot \frac{m_0 \cdot e^{j\omega \cdot \left(\frac{t-r}{c}\right)}}{r \cdot \lambda} \cdot \left(\frac{\lambda}{r} + j \right) \cdot \sin \theta \cdot \varphi_1 =$$

$$= \frac{\mu_0}{4 \cdot \pi} \cdot \frac{m_0 \times r_1}{r \cdot \lambda} \cdot \left(\frac{\lambda}{r} + j \right) \cdot e^{j\omega \cdot \left(\frac{t-r}{c}\right)}$$

$$A = 0,85 \cdot 10^{-7} (8,33 \cdot 10^{-2} + j) e^{24(t-0,5)\text{i}}$$

donde

$$m_0 = I_0 \cdot S$$

es el momento magnético de la espira. El módulo del vector S es el área $\pi \cdot a^2$ de la espira, su dirección es la de la normal al plano de la misma, y su sentido está relacionado con el de circulación de la corriente por la regla del tornillo.

Para frecuencia cero, $\omega = 0$, $\lambda \rightarrow \infty$:

$$A = \frac{\mu_0}{4 \cdot \pi} \cdot \frac{m \times r_1}{r^2}$$

PROBLEMA 8.10

Una sonda espacial de 500 kg, situada fuera de la atmósfera, pretende realizar unos movimientos aprovechando la radiación solar. Para ello, despliega una vela cuadrada de 300 m de lado, totalmente reflectora, colocándola perpendicularmente a los rayos solares. Fases a realizar en el problema:

- 1°.- El radio del Sol es 696000 km con una intensidad de radiación a esa distancia del centro de $63447532,7 \text{ W}\cdot\text{m}^{-2}$. Demostrar que la intensidad de la radiación a la distancia de la Tierra ($150\cdot 10^6 \text{ km}$) es $1366 \text{ W}\cdot\text{m}^{-2}$.
- 2°.- Calcular el valor medio del vector de Poynting.
- 3°.- Imagina una superficie cilíndrica con ondas electromagnéticas en su interior, que incide sobre la vela y le transmite una cantidad de movimiento (o momento lineal). Mediante un balance de cantidad de movimiento, demuestra que la vela recibe el doble de la cantidad de movimiento que transporta la radiación. Calcula la cantidad de movimiento comunicado a la vela.
- 4°.- Calcular la presión de radiación sobre la vela.
- 5°.- Calcular la aceleración que adquiere la sonda espacial.

SOLUCIÓN**1°.- Intensidad de la radiación solar a la distancia de la Tierra**

El radio del Sol es 696000 km con una intensidad de radiación a esa distancia del centro de $63447532,7 \text{ W}\cdot\text{m}^{-2}$. Demostrar que la intensidad de la radiación a la distancia de la Tierra ($150\cdot 10^6 \text{ km}$) es $1366 \text{ W}\cdot\text{m}^{-2}$.

Llamemos I_1 a la intensidad de radiación en la superficie del Sol, e I_2 en el exterior de la atmósfera. A partir de la definición de intensidad:

$$I_1 = \frac{P_e}{4\pi R_1^2} \quad ; \quad I_2 = \frac{P_e}{4\pi R_2^2}$$

Siendo P_e la potencia emisiva del Sol, R_1 el radio del Sol y R_2 la distancia Sol-Tierra. Dividiendo miembro a miembro ambas ecuaciones, se tiene,

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{R_2^2}{R_1^2}$$

Despejando I_2 se obtiene, $I_2 = 1366 \text{ W}\cdot\text{m}^{-2}$ la cual es denominada constante solar.

2°.- Calcular el valor medio del vector de Poynting

$$\langle S \rangle = I_2 = 1366 \text{ W}\cdot\text{m}^{-2}$$

3°.- Demuestra que la vela recibe el doble de la cantidad de movimiento que transporta la radiación. Calcula la cantidad de movimiento comunicado a la vela

Imagina una superficie cilíndrica con ondas electromagnéticas en su interior, que incide sobre la vela y le transmite una cantidad de movimiento (o momento lineal). Mediante un balance de cantidad de movimiento, demuestra que la vela recibe el doble de la cantidad de movimiento que transporta la radiación. Calcula la cantidad de movimiento comunicado a la vela.

Balance de cantidad de movimiento,

$$\{p_{\text{cilindro}} + p_{\text{superficie}}\}_{\text{ANTES}} = \{p_{\text{cilindro}} + p_{\text{superficie}}\}_{\text{DESPUÉS}}$$

Siendo reflexión total los valores del momento lineal son,

$$p + 0 = -p + 2p$$

lo cual implica que la superficie recibe el doble de cantidad de movimiento que transporta la radiación. El valor correspondiente es, $u = \frac{2\langle S \rangle}{c} = 9,11 \frac{\mu\text{J}}{\text{m}^3}$

4°.- Calcular la presión de radiación (P) sobre la vela

$$P = u = \frac{2\langle S \rangle}{c} = 9,11 \frac{\mu\text{J}}{\text{m}^3}$$

5°.- Calcular la aceleración que adquiere la sonda espacial

La fuerza que se ejerce sobre la superficie es, $F = M \cdot a = P \cdot A$

Siendo A, el área de la superficie, y “a” la aceleración que adquiere.

Entonces,

$$a = \frac{2 \cdot I \cdot A}{M \cdot c} = \frac{2(1366)(300^2)}{500(3 \cdot 10^8)} = 0,00164 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$



Problemas de Electromagnetismo para la Ingeniería

Javier Fermín Urchueguía Schölzel
Juan Carlos Moreno Esteve
José Fco. Martínez-Canales Murcia

Este libro completa el que se publicó en 2012 bajo el título Electromagnetismo aplicado a la Ingeniería a fin de que el estudiante disponga de recursos adaptados a los nuevos grados universitarios para el estudio de Electromagnetismo. Los autores parten de la premisa de que también los nuevos estudiantes de Ingeniería siguen precisando de la Física y, en particular, del Electromagnetismo como herramienta imprescindible en su formación científico-técnica. Pero además, se enfrentan a un mundo cada vez más tecnológico, especializado y pleno de opciones, en el cual la información tiene poco valor “per se” –ya que es fácil de conseguir y ubicar–, y se precisa en cambio de una cuidadosa preselección y exposición de los contenidos. Atendiendo a su amplia experiencia docente, han comprendido la necesidad de completar los conceptos teóricos con ejercicios y problemas que ayudan a comprender los conceptos, permiten visualizar las aplicaciones y captan la imaginación de los estudiantes. El libro de problemas que ahora se presenta, se compone de dos bloques: Electromagnetismo I, que contiene electrostática y magnetostática, y el Electromagnetismo II, condensadores, dieléctricos, campo magnético en medios materiales y los fenómenos electromagnéticos dependientes del tiempo.



UNIVERSITAT
POLITÈCNICA
DE VALÈNCIA

EDITORIAL