Distribuciones de probabilidad continuas y ecuaciones diferenciales ordinarias

Juan Carlos Cortés López, Ana Navarro Quiles, Almudena Sánchez Sánchez

Departamento de Matemática Aplicada
Instituto Universitario de Matemática Multidisciplinar
Universitat Politècnica de València

Gema Calbo Sanjuán
Departamento de Matemáticas
I.E.S. San Vicente Ferrer, Valencia

Resumen

En este trabajo se presenta una sencilla metodología para introducir algunas funciones de distribución de probabilidad de variables aleatorias continuas estándar como soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias. Este enfoque permite conectar a nivel docente la enseñanza de áreas como el Cálculo y la Estadística.

This paper proposes a simple methodology to introduce some probability distribution functions associated to standard continuous random variables as the solution of ordinary differential equations. Both Statistics and Calculus teaching can be beneficed from the proposed approach.

Introducción

El objetivo general de este trabajo es contribuir a construir puentes de unión entre diferentes áreas temáticas de las Matemáticas que usualmente se presentan en la tarea docente de forma estanca. Este objetivo se concretará a través de una propuesta de introducción - en la correspondiente asignatura de

Estadística - de las distribuciones de probabilidad de variables aleatorias continuas vía Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (e.d.o.'s), o alternativamente, para mostrar - en un curso de Cálculo - el rol de las e.d.o.'s en la Estadística. Es por ello que lo que sigue, es susceptible de ser aprovechado en la tarea docente que se desarrolle en estudios de Ingeniería, Física, Matemáticas, Economía, etc., donde es habitual que confluyan ambas temáticas, Estadística y Ecuaciones Diferenciales Ordinarias. Si así se hace, creemos que ello redundará en una visión menos estanca, y por tanto más rica, del conocimiento y la formación que los alumnos reciben en diferentes asignaturas.

El enfoque que se propone es sencillo y premeditadamente se expondrá de forma muy sistemática, lo que hace que, desde el punto de vista docente sea atractiva porque ello facilita su implementación en el aula. En efecto, en todos los casos que aquí se presentarán -los cuales, no pretenden agotar las diferentes familias de variables aleatorias continuas susceptibles de ser presentadas por este enfoque,- se basan en la determinación de la función de distribución (f.d.) de variables aleatorias (v.a.'s) continuas bien conocidas. Recuérdese que la f.d. de una v.a. siempre existe. La determinación de la f.d. se realizará a partir de las siguientes propiedades -que caracterizan a cada v.a. X objeto de estudio en este trabajo,- relativas a probabilidad total de X (P1), y a la probabilidad condicional de X sobre un intervalo (P2):

- P1: $P\left[X \geq x_0\right] = 1$,
- P2: $P\left[x \leq X \leq x + dx | X \geq x\right] = g(x, dx)$.

El valor de x_0 que aparece en P1 y el tipo de función g que define el miembro derecho de P2, determinará cada v.a. que se presentará.

Obsérvese que si $F(x) = P\left[X \leq x\right]$ denota la f.d. de la v.a. continua X, entonces por definición de probabilidad condicional se tiene

$$P\left[x \leq X \leq x + dx | X \geq x\right] = \frac{P\left[x \leq X \leq x + dx\right]}{P\left[X \geq x\right]} = \frac{P\left[x \leq X \leq x + dx\right]}{1 - P\left[X \leq x\right]},$$

y, por las propiedades básicas de la f.d. y la propiedad P2, la expresión anterior puede escribirse como

$$\frac{F(x + dx) - F(x)}{1 - F(x)} = g(x, dx). \tag{1}$$

Dependiendo de la forma algebraica que tenga la función g, en casos notables es posible, tomando en la última expresión límites cuando $dx \to 0$, plantear una e.d.o. cuya función incógnita es precisamente la f.d. F. Obsérvese que la función de densidad de probabilidad (f.d.p.), $f(x)$, se determina a partir de la *f.d.* por la relación $f(x) = F'(x)$, en los puntos de derivabilidad de la f.d. Veamos algunas situaciones de especial interés para la introducción didáctica de familias de v.a.'s continuas.

1. Distribución Uniforme

Si tomamos en P1, $x_0 = a$ y en P2, $g(x, y) = \frac{y}{b-x}$, esto es:

$$\left.\begin{array}{lccc} \text{P1} & \Longrightarrow & x_0 & = & a, \\ \text{P2} & \Longrightarrow & g(x,y) & = & \frac{y}{b-x}, \end{array}\right\} \quad (a \leq x \leq b), \tag{2}$$

siendo a, b constantes, obtendremos la distribución uniforme en el intervalo $[a, b]$, i.e., $X \sim U([a, b])$, la cual es empleada profusamente para la generación de números aleatorios que siguen cualquier tipo de distribución (véase, [3]). En efecto, con esta elección, si $x \in]a, b[$ entonces (1) se escribe como sigue:

$$\frac{F(x+dx) - F(x)}{1 - F(x)} = \frac{dx}{b-x} \Longrightarrow \frac{F(x+dx) - F(x)}{dx} = \frac{1 - F(x)}{b-x},$$

y tomando límites cuando $dx \to 0$, se obtiene por definición de derivada, la e.d.o.

$$F'(x) = \frac{1 - F(x)}{b-x}.$$

Resolvemos esta e.d.o. mediante el método de separación de variables. Para ello escribimos $F = F(x)$ y $F'(x) = \frac{dF}{dx}$ en la e.d.o. anterior, separamos variables e integramos:

$$\frac{dF}{dx} = \frac{1-F}{b-x} \overset{F \neq 1}{\Longrightarrow} \frac{dF}{1-F} = \frac{dx}{b-x} \Longrightarrow \int \frac{dF}{1-F} = \int \frac{dx}{b-x}$$

$$\Longrightarrow -\ln(1-F) = -\ln(b-x) + c_1,$$

por tanto,

$$1 - F = c_2(b-x), \quad c_2 = \exp(-c_1),$$

$$F(x) = 1 + c_3(b - x), \quad c_3 = -c_2.$$

La constante c_3 se calcula utilizando la condición inicial (c.i.): $F(a) = P[X \leq a] = 0$ deducida de la propiedad P1,

$$0 = F(a) = 1 + c_3(b - a) \Longrightarrow c_3 = -\frac{1}{b - a}.$$

Sustituyendo esta expresión de c_3 en la última expresión de $F(x)$ se tiene

$$F(x) = 1 - \frac{b - x}{b - a} = \frac{x - a}{b - a} \quad \text{si} \quad a < x < b.$$

Obsérvese que, tal y como se ha necesitado suponer en los cálculos intermedios, se cumple que $F(x) \neq 1$ para todo $x : a < x < b$. Por otra parte, claramente $F(x) = 0$ si $x \leq a$ y $F(x) = 1$ si $x \geq b$. En resumen, se tiene

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{si} \quad a \leq x \leq b \\ 1 & \text{si} \quad x \geq b \end{cases}$$

que como es bien conocido es la f.d. de una v.a. $X \sim U([a, b])$.

2. Distribución Exponencial

Tomemos ahora

$$\left.\begin{array}{lccc} \text{P1} & \Longrightarrow & x_0 & = & 0, \\ \text{P2} & \Longrightarrow & g(x,y) & = & \lambda y, \end{array}\right\} \quad (\lambda > 0), \tag{3}$$

obsérvese que al no depender la función g de la variable x, se dice que esta distribución *no tiene memoria*. Con la elección de (3), la expresión (1) toma la forma:

$$\frac{F(x + dx) - F(x)}{1 - F(x)} = \lambda dx,$$

y razonando como antes, obtenemos otra e.d.o. de variables separables:

$$\left.\begin{array}{lcc} F'(x) & = & \lambda\left(1 - F(x)\right), \\ F(0) & = & 0, \end{array}\right\} \tag{4}$$

cuya condición inicial se ha establecido considerando que $F(0) = P[X \leq 0] = 0$, puesto que la v.a. exponencial solo toma valores positivos. Ahora, resolveremos el problema de valor inicial (4) directamente sin arrastrar la constante libre de integración (aunque obviamente podríamos proceder con el caso de la distribución uniforme):

$$F'(x) = \lambda (1 - F(x)) \overset{F \neq 1}{\Longrightarrow} \frac{dF}{1-F} = \lambda dx \Longrightarrow \int_0^F \frac{dz}{1-z} = \int_0^x \lambda dz$$

$$\Longrightarrow -\ln (1-F) = \lambda x \Longrightarrow F = 1 - \exp(-\lambda x).$$

Por tanto, como $F = F(x)$ se tiene

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \exp(-\lambda x) & \text{si} \quad x > 0, \\ 0 & \text{si} \quad x \leq 0, \end{cases}$$

que es la f.d. de una v.a. exponencial de parámetro $\lambda > 0$, i.e., $X \sim Exp(\lambda)$, la cual ha sido utilizada para modelizar, por ejemplo, los tiempos de espera entre clientes consecutivos que acuden a un determinado servicio (mostrador de un aeropuerto, clientes de una gasolinera, etc.), (véase, [1]).

3. Distribución Weibull

Para generar la f.d. de una v.a. Weibull de parámetros $\lambda > 0$ y $\alpha \geq 1$, i.e., $X \sim We(\lambda; a)$, la cual generaliza la distribución exponencial, ya que ésta se obtiene tomando $\lambda > 0$ y $\alpha = 1$, tomemos

$$\left. \begin{array}{lccc} \text{P1} & \Longrightarrow & x_0 & = & 0, \\ \text{P2} & \Longrightarrow & g(x,y) & = & \lambda x^{\alpha-1} y, \end{array} \right\} \quad (\lambda > 0,\ \alpha \geq 1). \tag{5}$$

Esta distribución se ha utilizado para modelizar aspectos tan diversos como el tiempo entre fallos consecutivos de equipos industriales e informáticos o la velocidad del viento en una zona del globo terrestre ([4]).

Por un razonamiento análogo al presentado en los casos anteriores se obtiene la e.d.o. de variables separables

$$F'(x) = (1 - F(x)) \lambda x^{\alpha-1},$$

cuya solución, suponiendo que $F \neq 1$, es

$$\frac{dF}{1-F} = \lambda x^{\alpha-1} dx \Longrightarrow \int \frac{dF}{1-F} = \lambda \int x^{\alpha-1} dx \Longrightarrow -\ln(1-F) = \frac{\lambda}{\alpha} x^{\alpha} + c_1,$$

$$1 - F = c_2 \exp\left(-\frac{\lambda}{\alpha} x^{\alpha}\right), \quad c_2 = \exp(-c_1),$$

luego

$$F(x) = 1 - c_2 \exp\left(-\frac{\lambda}{\alpha} x^{\alpha}\right).$$

Como $F(0) = 0$, se tiene

$$0 = F(0) = 1 - c_2 \Longrightarrow c_2 = 1,$$

por tanto la f.d. de $X \sim We(\lambda; \alpha)$ es

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \exp\left(-\frac{\lambda}{\alpha} x^{\alpha}\right) & \text{si} \quad x > 0, \\ 0 & \text{si} \quad x \leq 0, \end{cases}$$

o equivalentemente la f.d.p. es

$$f(x) = \begin{cases} \lambda x^{\alpha-1} \exp\left(-\frac{\lambda}{\alpha} x \alpha\right) & \text{si} \quad x > 0, \\ 0 & \text{si} \quad x \leq 0. \end{cases}$$

4. Distribución de Pareto

A finales del XIX se iniciaron una serie de trabajos econométricos cuyo objetivo era la descripción de la distribución de la renta de las personas físicas. Es en 1897 cuando Pareto, sucesor de Walras en la cátedra de Economía Política de la Universidad de Lausana, publica su trabajo que dará nombre a esta importante distribución estadística que pretende describir la desigualdad de la renta de los individuos, véase ([2]).

Tomando

$$\left.\begin{array}{lccc} \text{P1} & \Longrightarrow & x_0 & > & 0, \\ \text{P2} & \Longrightarrow & g(x,y) & = & 1 - \left(\frac{x}{x+y}\right)^{\alpha}, \end{array}\right\} \quad (\alpha > 0), \tag{6}$$

la expresión (1) queda como sigue

$$\frac{F(x+dx)-F(x)}{1-F(x)} = 1-\left(\frac{x}{x+dx}\right)^{\alpha}.$$

Dividiendo esta expresión por dx se obtiene

$$\frac{F(x+dx)-F(x)}{dx} = \frac{1-F(x)}{dx}\left(1-\left(\frac{x}{x+dx}\right)^{\alpha}\right).$$

Tomando límites cuando $dx \to 0$ se llega a

$$F'(x) = (1-F(x))\,\frac{\alpha}{x}, \tag{7}$$

donde se ha utilizado que, por la regla de L'Hôpital, el límite que aparece en el miembro derecho vale

$$\lim_{dx\to 0}\frac{1-\left(\frac{x}{x+dx}\right)^{\alpha}}{dx} = \left\{\frac{0}{0}\right\} = \lim_{dx\to 0}\left(-\alpha\left(\frac{x}{x+dx}\right)^{\alpha-1}\frac{-x}{(x+dx)^2}\right) =$$

$$= \alpha x^{\alpha}\lim_{dx\to 0}\frac{1}{(x+dx)^{\alpha+1}} = \alpha x^{\alpha}\frac{1}{x^{\alpha+1}} = \frac{\alpha}{x}.$$

La solución de la e.d.o. (7) se obtiene por separación de variables

$$\frac{dF}{1-F} = \alpha\frac{dx}{x} \Longrightarrow \int\frac{dF}{1-F} = \alpha\int\frac{dx}{x} \Longrightarrow -\ln(1-F) = \alpha\ln(x)+c_1,$$

$$1-F = c_2x^{-\alpha}, \quad c_2 = \exp(-c_1) \Longrightarrow F(x) = 1-c_2x^{-\alpha},$$

pero como $F(x_0) = P[X \leq x_0] = 0$, el valor de la constante c_2 se determina como sigue:

$$0 = F(x_0) = 1-c_2(x_0)^{-\alpha} \Longrightarrow c_2 = (x_0)^{\alpha},$$

y por tanto la f.d. de una v.a. Pareto de parámetros $x_0 > 0$ y $\alpha > 0$, i.e., $X \sim Pa(x_0;\alpha)$ es

$$F(x) = \begin{cases} 1-\left(\frac{x_0}{x}\right)^{\alpha} & \text{si } x \geq x_0, \\ 0 & \text{si } x < x_0. \end{cases}$$

5. Conclusiones

En este artículo se ha proporcionado un enfoque alternativo al tradicional para introducir en el aula algunas distribuciones de probabilidad de variables aleatorias continua,s haciendo para ello uso de elementos de Cálculo y de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias. Las ideas expuestas pretenden facilitar la conexión de contenidos que habitualmente se presentan de forma disjunta en las asignaturas de Estadística y Cálculo. Sería interesante extender el estudio aquí presentado a otras distribuciones de probabilidad de variables continuas.

Referencias

[1] DeGroot, M.H. (1988): Probabilidad y Estadística, Ed. Addison-Wesley Iberoamericana. Madrid.

[2] Quesada, V. y García A. (1988): Lecciones de Cálculo de Probabilidades, Ed. Díaz de Santos. Madrid.

[3] Ross, S.M. (1997): Simulación. 2ª edición. Ed. Pearson-Prentice Hall. Madrid.

[4] Ross, S.M. (2009): Introduction to Probability Models. 10th ed. Ed. Academic Press. New York.