

Ejercicios
de
Cálculo de Estructuras I

Josep Casanova Colon



Esta obra está sujeta a la licencia Reconocimiento-NoComercial-SinObraDerivada 4.0 Internacional de Creative Commons. Para ver una copia de esta licencia, visite <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>.

Presentación

El curso pasado, 1998/99, se impartió por primera vez la asignatura Cálculo de Estructuras I, correspondiente al segundo curso del nuevo plan de estudios de las titulaciones de Ingeniero de Caminos, Canales y Puertos y de Ingeniero Técnico de Obras Públicas en las tres especialidades, común a todas ellas.

El objetivo fundamental de esta asignatura es presentar los fundamentos del comportamiento resistente de las piezas prismáticas alargadas e iniciar a los alumnos en el cálculo de las estructuras formadas por piezas de tal tipo.

Para alcanzarlo se definió un programa que consta de cuatro capítulos. El primero se dedica a dar una visión general de las estructuras y de su proceso de diseño. El segundo se destina a presentar los fundamentos de la Elasticidad Lineal, la teoría más sencilla que permite estudiar el estado tenso-deformacional en un cuerpo tridimensional sin hacer abstracción de su verdadera forma, la cual, además, es la base de la Teoría de Vigas, a la que se consagrará fundamentalmente el curso. El tercero se ocupa de describir las hipótesis y los resultados más importantes de esta teoría, que permite analizar las piezas prismáticas alargadas con precisión suficiente para su aplicación en la práctica profesional. En el cuarto y último se desarrollan los métodos más importantes de cálculo de estructuras formadas por piezas de este tipo.

Desde el principio se pensó en poner a disposición de los alumnos, poco a poco, todo el temario. El pasado curso se publicaron los apuntes correspondientes al segundo capítulo del programa, y en el presente se han editado los correspondientes a los capítulos primero y tercero. Para completar el material necesario para preparar la asignatura, además del cuarto capítulo, hacía falta una colección de problemas con los que ejercitarse en la aplicación de la teoría descrita. Este texto pretende cubrir tal necesidad. La mayor parte de los ejercicios que incluye se propusieron en las clases y los exámenes del curso anterior, aunque se han preparado algunos ex profeso para este trabajo y se han añadido otros planteados en exámenes de asignaturas del antiguo plan de estudios, de contenido similar a la que nos ocupa.

El texto se ha estructurado en tres capítulos, que se corresponden con los tres últimos del temario; el primero de los del programa es descriptivo y, en consecuencia, no procede plantear problemas sobre él.

El primer capítulo, dedicado a la Elasticidad Lineal, consta de veinticinco ejercicios pensados para ayudar a comprender los conceptos básicos de esta materia y su interpretación física, así como para aprender a aplicar los resultados fundamentales. El planteamiento y resolución del problema elástico de un cuerpo, por sencillo que sea, queda fuera del alcance de este curso. Aunque algunos problemas corresponden específicamente al tema de Tensiones y Relaciones Estáticas, otros muchos requieren considerar conceptos de más de un tema para su resolución; por ello, se ha optado por presentarlos conjuntamente en vez de relacionarlos cada uno con una lección.

El segundo capítulo versa sobre La Viga Aislada y consta de treinta y dos problemas. En esta ocasión si que se han ordenado por temas, con la siguiente distribución:

- Estática de vigas. Seis problemas.
- Distribución de tensiones normales. Cinco ejercicios.
- Distribución de tensiones tangenciales. Ocho ejercicios.
- Determinación de la deformada de flexión. Siete ejercicios.
- Torsión de vigas. Cinco ejercicios.
- Solución homogénea del problema de la viga recta. Dos ejercicios.

En general, están previstos para practicar la aplicación de las expresiones y los procedimientos vistos en la parte teórica, aunque la finalidad de algunos de ellos es justificar, con un ejemplo particular, alguna afirmación no demostrada en teoría.

En la parte dedicada a estática de vigas, cinco ejercicios se destinan a practicar el dibujo de leyes de esfuerzos en estructuras planas. Este extremo forma parte de la materia correspondiente a la Mecánica de primer curso, y cualquier alumno de nuestra asignatura debería dominarlo. Lo que justifica su inclusión aquí es que, aunque los conceptos fundamentales suelen ser conocidos, rara vez se tiene la suficiente práctica para dibujarlas rápidamente, como se necesitará para abordar los problemas de temas posteriores.

Por otra parte, en los dos primeros ejercicios del punto apartado dedicado a la determinación de la deformada de flexión se resuelve el problema integrando la ecuación diferencial. Su finalidad principal es justificar que, salvo en casos muy sencillos, el cálculo se complica tanto que es preferible buscar una solución aproximada del problema, dibujando la deformada a estima y obteniendo el valor de los desplazamientos y giros, en tantos puntos concretos como se desee, mediante las fórmulas de Navier-Bresse o los teoremas de Mohr.

El tercer y último capítulo incluye treinta y dos problemas sobre Estructuras de Barras, agrupados por materias como en el caso anterior. Sus apartados son los siguientes:

- El método de flexibilidad: aplicación a las estructuras isostáticas. Cuatro ejercicios.
- El método de flexibilidad: aplicación a las estructuras hiperestáticas. Cinco ejercicios.
- Problemas de simetrías y antimetrías, solicitaciones térmicas, apoyos elásticos y desplazamientos de apoyos, resueltos en flexibilidad. Trece ejercicios.
- Cálculo de estructuras articuladas en flexibilidad. Tres ejercicios.
- El método de rigidez. Siete ejercicios.

Puede parecer, por el número de problemas planteados, que se da una importancia mucho mayor al método de flexibilidad que al de rigidez. No es así. Simplemente ocurre que, en general, es fácil que los problemas relativos a estructuras sencillas, planteados en flexibilidad, puedan resolverse sin el auxilio de un ordenador, mientras que, formulados en rigidez y sin simplificaciones adicionales¹, rara vez ocurre así. Por ello el número de ejercicios de este último tipo es, comparativamente, pequeño; las prácticas informáticas sobre cálculo en rigidez aclaran y permiten practicar este método, compensando así la diferencia en el número de problemas que es posible plantear en las clases.

Por otra parte, llamamos método de flexibilidad o de las fuerzas al que se basa en determinar en primer lugar las fuerzas interiores —tensiones o esfuerzos— y a partir de ellas las restantes incógnitas, y método de rigidez al que se basa en determinar primero los desplazamientos y, a partir de ellos, los demás parámetros. Esto justifica el título del primer apartado, que puede llamar la atención porque en ocasiones se piensa que los métodos de flexibilidad y rigidez se caracterizan porque las incógnitas hiperestáticas son, respectivamente, esfuerzos o desplazamientos, confundiendo incógnitas primarias —que se determinan en primer lugar— con incógnitas hiperestáticas.

¹ Hoy en día el cálculo de estructuras siempre se realiza con el auxilio de un ordenador, y la potencia de los actuales permite analizarlas sin necesidad de suponer las barras indeformables a axil para disminuir el tamaño del sistema de ecuaciones a resolver. Por esta razón los métodos basados en tal hipótesis, mucho más complejos pero que permitirían resolver algunas estructuras a mano, se han reducido a una presencia testimonial en el programa de la asignatura..

En tercer y último lugar se señala que los problemas de los tres primeros apartados se han resuelto despreciando las deformaciones producidas por el axil frente a las debidas los flectores, mientras que en el último, en general, se han tenido todas en cuenta. En los problemas de estructuras articuladas no tiene sentido esta distinción, porque en ellas los únicos esfuerzos significativos son los axiles.

Por último, el autor quiere prevenir sobre un error en la forma de estudiar que, por el tipo de dudas que suelen consultar los alumnos, debe ser bastante frecuente, y al que parece invitar la publicación de una colección de problemas. Se trata de centrar el estudio de la asignatura en los métodos de resolución de problemas, relegando a un lugar secundario el fundamento teórico. Ello la transforma, finalmente, en un conjunto inconexo de procedimientos de resolución. Las consecuencias son funestas para la formación del alumno, pues cortan de raíz toda posibilidad de desarrollo futuro o de extrapolación de lo conocido a casos semejantes, pues esta debe basarse en el sólido conocimiento de las bases en que se funda el saber en cada punto concreto, no en la capacidad de aplicación mecánica de procedimientos de cálculo.

Se desaconseja absolutamente esta forma de estudiar, y se exhorta al lector a no abordar los problemas en tanto en cuanto no esté convencido de haber entendido, al menos globalmente y salvo algún aspecto concreto, la teoría aplicable. Por otra parte, se aconseja que se intente resolver los problemas sin consultar la solución, y solo se recurra a ella cuando ya el lector la haya hallado, o se encuentre completamente atascado; aún en esta circunstancia, al autor considera que es conveniente, desde un punto de vista formativo, abandonar el problema que en un momento no se sabe como abordar, para retomarlo al día siguiente, antes de pasar a consultar la solución.

Valencia, Diciembre de 1999

Presentación	III
Índice	VII
Capítulo 1: Elasticidad	1
Capítulo 2: La Viga Aislada	
Estática de Vigas	79
Distribución de tensiones normales	103
Distribución de tensiones tangenciales	127
Deformada de la viga a flexión	165
Torsión de vigas	187
Solución homogénea del problema de la viga recta	211
Capítulo 3: Estructuras de barras	
El método de flexibilidad: aplicación a estructuras isostáticas	225
El método de flexibilidad: aplicación a estructuras hiperestáticas	247
Problemas de simetrías y antimetrías, solicitaciones térmicas, apoyos elásticos y desplazamientos de apoyo, resueltos en flexibilidad	265
Cálculo de estructuras articuladas en flexibilidad	317
El método de rigidez	347

Capítulo 1

Nociones Básicas de Elasticidad

- Ej. 1. En el esquema adjunto se representan los vectores tensión que actúan sobre tres de las caras de un diferencial de volumen $dXdYdZ$, situado en el punto P del interior de la región ocupada por cierto sólido en una configuración deformada. Las componentes indicadas figuran en megapascuales. Se pide: 1) determinar el tensor de tensiones en P , en el sistema cartesiano $OXYZ$; y 2) determinar las componentes intrínsecas del vector tensión en P sobre un plano paralelo a $6X-7Y+6Z-5=0$.

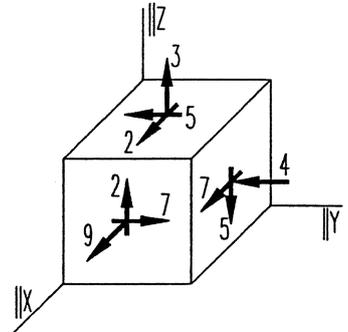


Figura Ej. 1

- 1) VECTOR TENSIÓN EN P .

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} 9 & 7 & 2 \\ 7 & -4 & -5 \\ 2 & -5 & 3 \end{bmatrix} \text{ MPa}$$

Para determinarlos usaremos en la interpretación física de sus componentes.

- 2) COMPONENTES INTRÍNSECAS DEL VECTOR TENSIÓN EN P , SOBRE UN PLANO PARALELO A $6X - 7Y + 6Z - 5 = 0$ (PLANO π).

Vector normal a π , $\mathbf{v} = \pm (6\mathbf{i} - 7\mathbf{j} + 6\mathbf{k})$

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{36 + 49 + 36} = \sqrt{121} = 11$$

Vector normal a π , unitario: $\mathbf{n}^* = \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} = \pm \left[\frac{6}{11}\mathbf{i} - \frac{7}{11}\mathbf{j} + \frac{6}{11}\mathbf{k} \right]$

Como no nos aclaran sobre qué parte del cuerpo hay que calcular el vector tensión, consideraremos los dos casos posibles. Supongamos, en primer lugar, $\mathbf{n} = \frac{6}{11}\mathbf{i} - \frac{7}{11}\mathbf{j} + \frac{6}{11}\mathbf{k}$

Vector tensión sobre π , considerando \mathbf{n} como vector normal exterior. (Usando la fórmula de Cauchy)

$$\begin{Bmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 7 & 2 \\ 7 & -4 & -5 \\ 2 & -5 & 3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 6/11 \\ -7/11 \\ 6/11 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 17/11 \\ 40/11 \\ 65/11 \end{Bmatrix} \text{ MPa}$$

Componentes intrínsecas.

$$\sigma_n = \mathbf{t} \cdot \mathbf{n} = \frac{17 \times 6 - 40 \times 7 + 65 \times 6}{11^2} = \frac{212}{121} = 1'75 \text{ MPa}$$

$$\|\mathbf{t}\|^2 = \frac{17^2 + 40^2 + 65^2}{11^2} = \frac{6114}{121} \quad \|\mathbf{t}\| = \sqrt{\frac{6114}{121}} = 7'11 \text{ MPa}$$

$$\tau_n = \sqrt{\|\mathbf{t}\|^2 - \sigma_n^2} = \sqrt{\frac{6114}{121} - \left(\frac{212}{121}\right)^2} = \sqrt{\frac{694.850}{121^2}} = 6'89 \text{ MPa}$$

Repetamos ahora los cálculos, suponiendo que el vector normal exterior es $\hat{\mathbf{n}} = -\mathbf{n} = -\frac{6}{11}\mathbf{i} + \frac{7}{11}\mathbf{j} - \frac{6}{11}\mathbf{k}$. Identificaremos mediante una tilde los resultados de este segundo cálculo.

$$\hat{\mathbf{n}} = -\mathbf{n} \Rightarrow \hat{\mathbf{t}} = -\mathbf{t} = -\frac{17}{11}\mathbf{i} - \frac{40}{11}\mathbf{j} - \frac{65}{11}\mathbf{k} \text{ MPa}$$

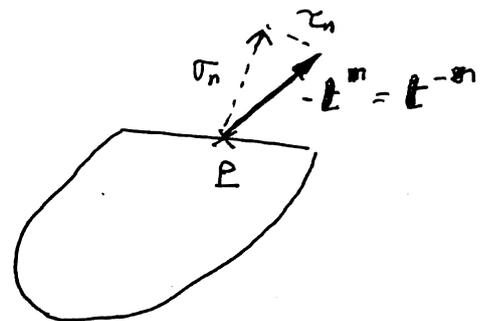
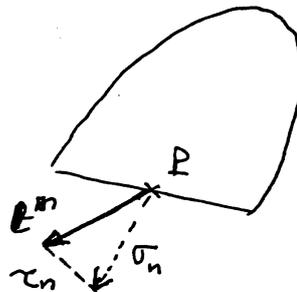
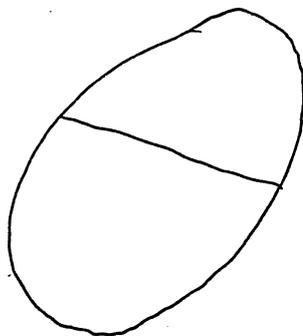
(Resulta evidente a partir de los resultados anteriores.)

$$\hat{\sigma}_n = \hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{t}} = (-\mathbf{n}) \cdot (-\mathbf{t}) = \mathbf{n} \cdot \mathbf{t} = \sigma_n$$

$$\|\hat{\mathbf{t}}\| = \|-\mathbf{t}\| = \|\mathbf{t}\|$$

$$\hat{\tau}_n = \sqrt{\|\hat{\mathbf{t}}\|^2 - \hat{\sigma}_n^2} = \sqrt{\|\mathbf{t}\|^2 - \sigma_n^2} = \tau_n$$

Así pues, el enunciado no aclaraba qué parte del cuerpo ejerce la acción y cuál la sufre porque no hace falta. En cualquiera de las dos opciones posibles, los componentes intrínsecas del vector tensión son los mismos.





- Ej.2. La figura Ej.2 muestra un tetraedro de aristas diferenciales, aislado del interior de la región ocupada por un cuerpo C en cierta configuración deformada. En ella aparecen, indicadas en megapascals, las componentes de los vectores que representan la acción del resto del cuerpo sobre el tetraedro a través de sus caras PBC , APC y ABP . Se desea conocer: 1) el tensor de tensiones en el punto P ; y 2) la acción del resto del cuerpo sobre el tetraedro a través de la cara ABC .

Nota: Las coordenadas de los vértices son $P(X_0, Y_0, Z_0)$, $A(X_0 + 2dS, Y_0, Z_0)$, $B(X_0, Y_0 + 2dS, Z_0)$ y $C(X_0, Y_0, Z_0 + dS)$.

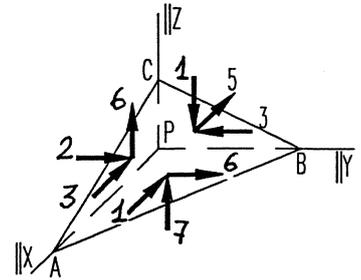


Figura Ej. 2

- 1) TENSOR DE TENSIONES EN P .

Se determina basándose en la interpretación física de sus componentes

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & -6 \\ 1 & -6 & -7 \end{bmatrix} \text{ MPa}$$

- 2) Acción del resto del cuerpo sobre el tetraedro, a través de la cara ABC .

Nos están pidiendo el vector tensión sobre esta cara.

Vector normal a ABC , unitario, apuntando al exterior del tetraedro:

$$\vec{n} = \frac{\vec{AB} \times \vec{AC}}{\|\vec{AB} \times \vec{AC}\|} \quad \text{''} \quad \vec{AB} = -2dS \vec{i} + 2dS \vec{j} \quad \text{''} \quad \vec{AC} = -2dS \vec{i} + dS \vec{k}$$

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2dS & 2dS & 0 \\ -2dS & 0 & dS \end{vmatrix} = (2\vec{i} + 2\vec{j} + 4\vec{k}) (dS)^2$$

$$\|\vec{AB} \times \vec{AC}\| = (dS)^2 \sqrt{4 + 4 + 16} = \sqrt{24} (dS)^2 = 2\sqrt{6} (dS)^2$$

$$\vec{n} = \frac{\vec{AB} \times \vec{AC}}{\|\vec{AB} \times \vec{AC}\|} = \frac{1}{\sqrt{6}} \vec{i} + \frac{1}{\sqrt{6}} \vec{j} + \frac{2}{\sqrt{6}} \vec{k}$$

Vector tensión sobre ABC - mediante la fórmula de Cauchy -

$$\begin{Bmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & -6 \\ 1 & -6 & -7 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 10/\sqrt{6} \\ -11/\sqrt{6} \\ -19/\sqrt{6} \end{Bmatrix}$$

$$\boxed{\vec{t} = \frac{1}{\sqrt{6}} (10\vec{i} - 11\vec{j} - 19\vec{k})}$$

- Ej. 3. Una máquina de ensayo está formada por un recipiente metálico, cuyo hueco interior es un prisma recto de 20×20 cm de base y 50 cm de altura, y un émbolo de 20×20 cm de base con el que presionar la muestra que se esté analizando. Se introduce en ella una probeta cúbica —de 20 cm de arista— de cierto material, apoyada sobre el fondo, y se somete a presión accionando el émbolo. El estado tensional en la probeta, referido al sistema cartesiano dextrógiro definido en la figura —cuyo origen es el centro de la base—, viene dado por las expresiones:

$$\sigma_x = \sigma_y = 0'015Z - 50'003 \quad \text{MPa}$$

$$\sigma_z = 0'03Z - 100'006 \quad \text{MPa}$$

$$\tau_{xy} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$$

donde las coordenadas intervienen en metros.

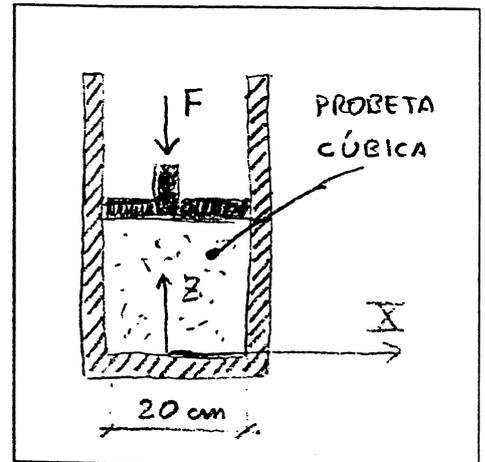


Figura Ej. 3

Se desea conocer: 1) las fuerzas de volumen que solicitan al cuerpo; 2) su peso específico; 3) las fuerzas de superficie sobre cada una de sus caras; y 4) la fuerza F que se ejerce sobre el émbolo.

Conocemos las tensiones. Mediante las ecuaciones de equilibrio interior y las condiciones de contorno estáticas podemos calcular las fuerzas exteriores.

- 1) Fuerzas de volumen

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial X} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial Y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial Z} + b_x = 0 \quad \rightarrow \quad b_x = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial X} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial Y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial Z} + b_y = 0 \quad \rightarrow \quad b_y = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial X} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial Y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial Z} + b_z = 0 \quad \rightarrow \quad 0'03 + b_z = 0$$

$$\boxed{b = -0'03 \text{ k MN/m}^3}$$

- 2) Peso específico del material.

Como las fuerzas de volumen representan el peso propio, pueden expresarse de la forma $b = -\gamma \mathbf{k}$, donde γ es el peso específico del material. Así pues

$$\boxed{\gamma = 0'03 \text{ MN/m}^3 = 30 \text{ kN/m}^3}$$



3) Fuerzas de superficie sobre cada una de las caras.

a) Fondo. $\mathbf{n} = -\mathbf{k}$, $z_1 = 0$.

$$\begin{Bmatrix} \bar{t}_x \\ \bar{t}_y \\ \bar{t}_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{bmatrix}_{z=0} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \sigma_z|_{z=0} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 100'006 \end{Bmatrix} \text{ MPa}$$

$$\bar{\mathbf{t}} = 100'006 \mathbf{k} \text{ MPa}$$

b) Base superior (en contacto con el émbolo). $\mathbf{n} = \mathbf{k}$, $z_1 = 0'20 \text{ m}$.

$$\begin{Bmatrix} \bar{t}_x \\ \bar{t}_y \\ \bar{t}_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{bmatrix}_{z=0'2} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \sigma_z|_{z=0'2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -100 \end{Bmatrix} \text{ MPa}$$

$$\bar{\mathbf{t}} = -100 \mathbf{k} \text{ MPa}$$

c) Cara lateral $X = 0'1 \text{ m}$. $\mathbf{n} = \mathbf{i}$

$$\begin{Bmatrix} \bar{t}_x \\ \bar{t}_y \\ \bar{t}_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{bmatrix}_{X=0'1} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma_x|_{X=0'1} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0'015 z_1 - 50'003 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \text{ MPa}$$

$$\bar{\mathbf{t}} = (0'015 z_1 - 50'003) \mathbf{i} \text{ MPa}$$

d) Cara lateral $X = -0'1 \text{ m}$. $\mathbf{n} = -\mathbf{i}$

$$\bar{\mathbf{t}} = -(0'015 z_1 - 50'003) \mathbf{i} \text{ MPa}$$

e) Cara lateral $Y = 0'1 \text{ m}$. $\mathbf{n} = \mathbf{j}$

$$\begin{Bmatrix} \bar{t}_x \\ \bar{t}_y \\ \bar{t}_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{bmatrix}_{Y=0'1} \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \sigma_y|_{Y=0'1} \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0'015 z_1 - 50'003 \\ 0 \end{Bmatrix} \text{ MPa}$$

$$\bar{\mathbf{t}} = (0'015 z_1 - 50'003) \mathbf{j} \text{ MPa}$$



c) cara lateral $\bar{Y} = -0.1 \text{ m}$. $\bar{n} = -\bar{j}$

$$\bar{\mathbf{t}} = -(0.015 \bar{z}_1 - 50.003) \bar{j} \text{ MPa}$$

4) Fuerza F que se ejerce sobre el émbolo.
 F es la resultante de las presiones sobre la base $\bar{z}_1 = 0.2 \text{ m}$ (despreciando el rozamiento del émbolo con las paredes del recipiente).

En $\bar{z} = 0.2 \text{ m}$, $\bar{\mathbf{t}} = -100 \text{ k MPa}$. Σ es la base $\bar{z} = 0.2 \text{ m}$.

$$\begin{aligned} \text{Resultante de } \bar{\mathbf{t}} \rightarrow \mathbf{R} &= \int_{\Sigma} \bar{\mathbf{t}} d\Sigma = -100 \text{ k} \int_{\Sigma} d\Sigma \\ &= -100 (0.2 \times 0.2) \text{ k} = -4 \text{ k MN} \end{aligned}$$

Según el enunciado $\mathbf{R} = -F \mathbf{k}$
luego

$$F = 4 \text{ MN}$$

Ej. 4. Un cilindro recto de 1'50 m de altura, cuya base es un círculo de 0'75 m de diámetro, ha caído en un depósito en el que se almacena cierto líquido, quedando en el fondo apoyado sobre una de sus bases. Para estudiar el problema, se escoge un sistema cartesiano con origen en el centro de la base inferior del cilindro y eje Z paralelo a su altura —debido a la simetría axial del cuerpo y las fuerzas exteriores, la orientación de los ejes X e Y es irrelevante—. En él, el tensor de tensiones del cuerpo tiene las siguientes componentes:

$$\sigma_x = \sigma_y = 15Z - 150 \quad \text{kPa}$$

$$\sigma_z = 25Z - 165 \quad \text{kPa}$$

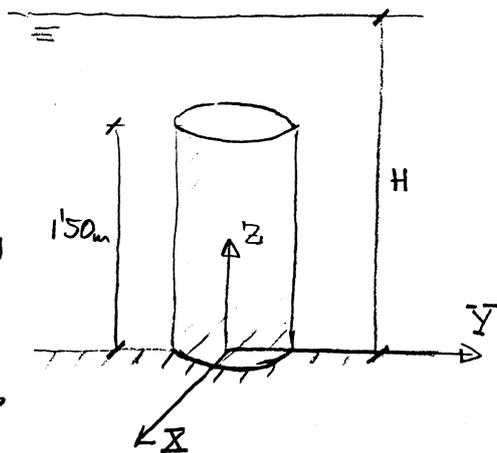
$$\tau_{xy} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$$

donde las coordenadas se expresan en metros. Se desea conocer: 1) el peso específico del material que forma el cilindro; 2) el peso específico del líquido; 3) la altura del líquido sobre el fondo del depósito; 4) las reacciones sobre las bases del cilindro. Así mismo se pide verificar el equilibrio de fuerzas verticales sobre el cuerpo.

Las fuerzas exteriores que actúan sobre el cilindro son:

- su propio peso,
- la presión hidrostática que ejerce el líquido,
- la reacción del fondo.

Conocemos el tensor de tensiones en el cuerpo. Con él, las ecuaciones de equilibrio interno y las condiciones de contorno estáticas podemos calcular las fuerzas exteriores, y con ellos y las ecuaciones de la hidrostática, todos los datos que se piden.



1) Peso específico del material que forma el cilindro.

Como $\mathbf{b} = -\rho_c \mathbf{k}$, basta con que determinemos los fuerzas de volumen.

$$\frac{\partial \tau_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + b_x = 0 \quad \rightarrow \quad b_x = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + b_y = 0 \quad \rightarrow \quad b_y = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + b_z = 0 \quad \rightarrow \quad 25 + b_z = 0 \quad b_z = -25 \text{ kN/m}^3$$

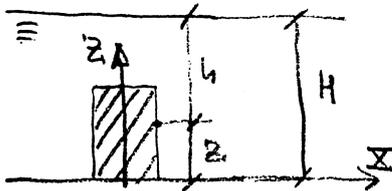
luego $\boxed{\gamma_c = 25 \text{ kN/m}^3}$

2) Peso específico del líquido.

De acuerdo con las leyes de la hidrostática, las fuerzas que ejerce el fluido sobre la superficie lateral del cilindro admiten la expresión

$$\vec{t} = -p_H \vec{n}$$

donde p_H es la presión hidrostática en el punto de aplicación de la fuerza y \vec{n} el vector normal a la superficie lateral, unitario y apuntando hacia el exterior

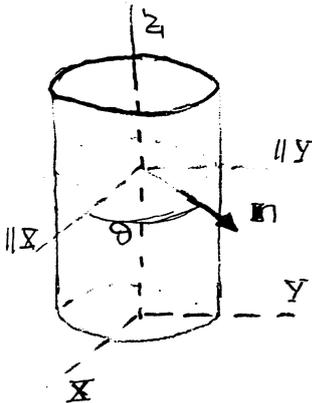


$$p_H = \gamma_L \cdot h \quad \gamma_L \rightarrow \text{peso específico líquido}$$

$h \rightarrow$ profundidad

$$h = H - z_1 \quad (\text{figura})$$

$$p_H = \gamma_L (H - z_1)$$



$$\vec{n} = \cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j}$$

Vector tensión sobre la sup. lateral

$$\begin{Bmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{bmatrix}_{SL} \begin{Bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \cos \theta \\ \sigma_y \sin \theta \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\vec{t} = (15z - 150) (\cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j}) = (15z - 150) \vec{n} \quad \text{kPa}$$

$$\vec{t} = -\gamma_L (H - z) \vec{n}$$

$$15z - 150 = -\gamma_L (H - z) \Rightarrow \begin{aligned} \gamma_L &= 15 \text{ kN/m}^3 \\ -\gamma_L H &= -150 \rightarrow H = 10 \text{ m} \end{aligned}$$

Peso específico del líquido $\rightarrow \boxed{\gamma_L = 15 \text{ kN/m}^3}$

3) Altura del líquido sobre el fondo del depósito

$$\boxed{H = 10 \text{ m}}$$

4) Reacciones sobre las bases.

Base $z = 0$, $n = -k$

$$\begin{Bmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\sigma_z|_{z=0} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ +165 \end{Bmatrix} \text{ kPa}$$

Como $t = \bar{t} \Rightarrow$

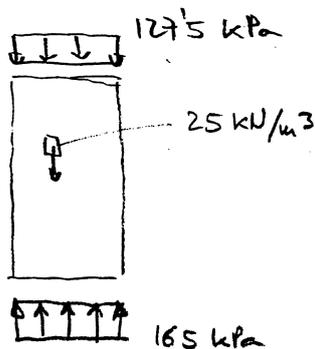
$$\boxed{\bar{t} = 165 \text{ k kPa}}$$

Base $z = 150 \text{ m}$, $n = k$.

Operando análogamente es evidente que $\bar{t} = \sigma_z|_{z=15} \text{ k}$, es decir

$$\boxed{\bar{t} = -127.5 \text{ k kPa}}$$

4) Comprobación equilibrio fuerzas verticales



$$A = \text{area base cilindro} = \pi \frac{0.75^2}{4}$$

$$H = \text{altura cilindro} = 15 \text{ m.}$$

$$\begin{aligned} \Sigma F_v = 0 &\rightarrow -127.5 \times A - 25 \times A \times H + 165 \\ &= (-127.5 - 25 \times 15 + 165) \cdot A \\ &= 0 \cdot A = 0 \quad \text{c.q.d.} \end{aligned}$$

Nótese que no debe considerarse el empuje de Arquímedes, porque no es más que la resultante vertical de las presiones, que se han tenido en cuenta explícitamente.

Ej. 5. Un prisma de madera de $10 \times 20 \times 40$ cm se sierra como se indica en la figura y luego se encola restituyendo la forma inicial. La probeta así formada se somete a un ensayo triaxial, que se realiza colocándola en una prensa en el interior de un camarín y aplicándole una presión en las bases mediante la primera y otra distinta sobre la superficie lateral, mediante el fluido que se introduce en el camarín. Como resultado de todo ello, el estado tensional en el prisma —en el sistema de referencia de la figura— es

$$\sigma_x = \sigma_y = -p \quad \sigma_z = -q$$

$$\tau_{xy} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$$

donde p es la presión del fluido y q la ejercida por la prensa. Se sabe que el pegamento resiste mientras se cumple la condición $\tau < a - b\sigma$, donde σ y τ son la tensión normal y la tensión tangencial sobre el plano de la unión, y a y b dos constantes características del material. Cuando $\tau = a - b\sigma$ falla la unión.

Realizados dos ensayos triaxiales, se ha observado que la pieza se rompe para $p = 4'22$ MPa y $q = 14'22$ MPa en el primer caso, y para $p = 11'29$ MPa y $q = 36'29$ MPa en el segundo. Se desea conocer el valor de las constantes a y b que definen el criterio de rotura del pegamento y la presión q que rompería la probeta a compresión simple —es decir, con $p = 0$ —. No olvide indicar las unidades de a y b .

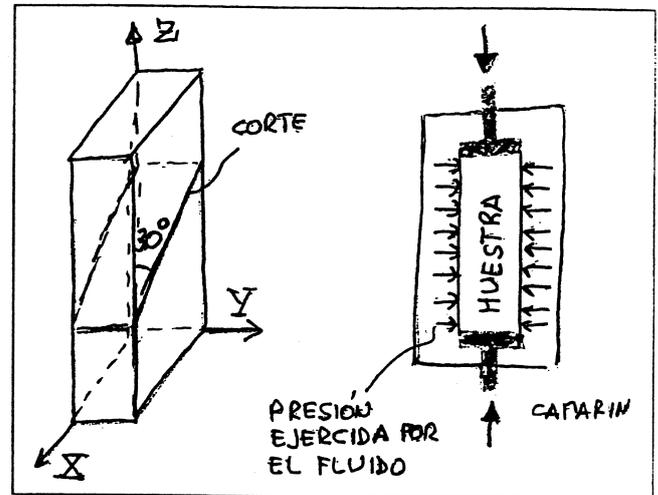
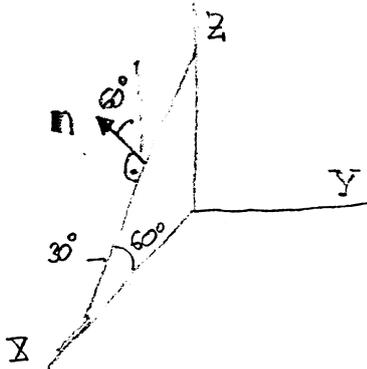


Figura Ej. 5

Vector tensión sobre el plano de la junta.



$$\mathbf{n} = \sin 60 \mathbf{i} + \cos 60 \mathbf{k} = \frac{\sqrt{3}}{2} \mathbf{i} + \frac{1}{2} \mathbf{k}$$

$$\begin{Bmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -q \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sqrt{3}/2 \\ 0 \\ 1/2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\sqrt{3}p/2 \\ 0 \\ -q/2 \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{t} = -\frac{\sqrt{3}p}{2} \mathbf{i} - \frac{q}{2} \mathbf{k}$$

Componentes intrínsecas

$$\sigma_n = \mathbf{t} \cdot \mathbf{n} = -\frac{\sqrt{3}p}{4} - \frac{q}{4}$$

$$\|\mathbf{t}\|^2 = \frac{3}{4}p^2 + \frac{q^2}{4}$$

$$\tau_n = \sqrt{\frac{3}{4}p^2 + \frac{q^2}{4} - \left(-\frac{\sqrt{3}p}{4} - \frac{q}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4}p^2 + \frac{q^2}{4} - \frac{9}{16}p^2 - \frac{1}{16}q^2 - \frac{6}{16}pq}$$



$$\tau_n = \sqrt{\frac{3}{16} p^2 + \frac{3}{16} q^2 - \frac{6}{16} pq} = \frac{1}{4} \sqrt{3(q-p)^2} = \frac{\sqrt{3}}{4} |q-p|$$

Ensayo nº 1. Rotura para $p = 4'22 \text{ MPa}$ y $q = 14'22 \text{ MPa}$.

$$\sigma_n^1 = -\frac{3}{4} p - \frac{1}{4} q = -6'72 \text{ MPa}$$

$$\tau_n^1 = \frac{\sqrt{3}}{4} |q-p| = 4'33 \text{ MPa}$$

$$\tau = a - b\sigma \Rightarrow 4'33 = a + 6'72b$$

Ensayo nº 2. Rotura para $p = 11'29 \text{ MPa}$ y $q = 36'29 \text{ MPa}$

$$\sigma_n^2 = -17'54 \text{ MPa}$$

$$\tau_n^2 = 10'83 \text{ MPa}$$

$$\tau = a - b\sigma \Rightarrow 10'83 = a + 17'54b$$

$$\left. \begin{aligned} 4'33 &= a + 6'72b \\ 10'83 &= a + 17'54b \end{aligned} \right\}$$

$$a = \frac{\begin{vmatrix} 4'33 & 6'72 \\ 10'83 & 17'54 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 6'72 \\ 1 & 17'54 \end{vmatrix}} = \frac{3'1706}{10'82} = 0'29 \text{ MPa}$$

$$b = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 4'33 \\ 1 & 10'83 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 6'72 \\ 1 & 17'54 \end{vmatrix}} = \frac{6'5}{10'82} = 0'60 \text{ ADIMENSIONAL}$$

Rotura a compresión simple $p = 0$.

$$\sigma_n = -\frac{1}{4} q \quad \tau_n = \frac{\sqrt{3}}{4} q$$

$$\tau_n = \frac{\sqrt{3}}{4} q = a - b\left(-\frac{1}{4} q\right) = 0'29 + 0'60 \frac{q}{4}$$

$$\sqrt{3} q - 0'60 q = 1'13 q = 4 \times 0'29 = 1'16 \rightarrow$$

$$\boxed{q = 1'03 \text{ MPa}}$$



Ej. 6. El esquema adjunto representa el estado tensional en el punto $P(1 \text{ m}, 2 \text{ m}, 3 \text{ m})$ del interior de cierto sólido. Se desea conocer 1) los valores máximo y mínimo de la tensión normal en P , y los planos sobre los que se alcanzan; 2) el valor medio de la tensión normal en dicho punto, y 3) el valor máximo de la tensión tangencial en P , y el plano sobre el que se alcanza.

(LAS TENSIONES SE INDICAN EN MEGAPASCALAS)

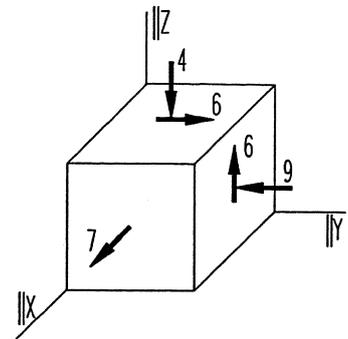


Figura Ej. 6

- Tensor de tensiones

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & -9 & 6 \\ 0 & 6 & -4 \end{bmatrix} \text{ MPa}$$

1) Valores máximos y mínimos de σ_n en P , y planos donde se alcanzan.
No están pidiendo las tensiones y los planos principales.

$$\begin{vmatrix} 7-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -9-\lambda & 6 \\ 0 & 6 & -4-\lambda \end{vmatrix} = (7-\lambda) \left[\left(\frac{36}{\lambda} + 13\lambda + \lambda^2 \right) - \frac{36}{\lambda} \right] = (7-\lambda) \lambda (\lambda + 13) = 0$$

Raíces \rightarrow $\lambda = 7 \text{ MPa}$
 $\lambda = 0$
 $\lambda = -13 \text{ MPa}$

Tensiones principales

$$\sigma_I = 7 \text{ MPa}, \quad \sigma_{II} = 0, \quad \sigma_{III} = -13 \text{ MPa}.$$

Vectores propios:

a) $\lambda = 7 \text{ MPa} = \sigma_I \rightarrow$ Es evidente que $n_I = \hat{i}$. \rightarrow La primera columna de $[\sigma]$ determina el vector tensión sobre un plano normal al eje X . Considerando $n = \hat{i}$ resulta $t = 7 \hat{i} \text{ MPa} \parallel \hat{i} \rightarrow$ por definición, el plano normal a \hat{i} es principal.

$$\bullet \lambda = \sigma_{II} = 0.$$

$$\begin{aligned} (7-\lambda) n_1 = 0 &\rightarrow 7n_1 = 0 \rightarrow n_1 = 0 \\ (-9-\lambda) n_2 + 6n_3 = 0 &\rightarrow -9n_2 + 6n_3 = 0 \rightarrow n_2 = \frac{6}{9} n_3 = \frac{2}{3} n_3 \end{aligned}$$

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1 \rightarrow 0 + \frac{4}{9} n_3^2 + n_3^2 = \frac{13}{9} n_3^2 = 1 \quad n_3 = \pm \sqrt{\frac{9}{13}}$$

$$\text{Escogiendo el signo } + \rightarrow \mathbf{n}_{II} = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{9}{13}} \mathbf{j} + \sqrt{\frac{9}{13}} \mathbf{k} = \sqrt{\frac{4}{13}} \mathbf{j} + \sqrt{\frac{9}{13}} \mathbf{k}$$

$$\bullet \lambda = \sigma_{III} = -13 \text{ MPa.}$$

$$\mathbf{n}_{III} = \mathbf{n}_{I} \times \mathbf{n}_{II} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{4}{13}} & \sqrt{\frac{9}{13}} \end{vmatrix} = -\sqrt{\frac{9}{13}} \mathbf{j} + \sqrt{\frac{4}{13}} \mathbf{k}$$

$$\text{Máxima tensión normal en } P = \sigma_{II} = 7 \text{ MPa}$$

Plano π donde se alcanza

$$\pi \perp \mathbf{i} \Rightarrow \pi: X + D = 0 \quad \text{,,} \quad 1m + D = 0 \rightarrow D = -1m.$$

$$\pi: X = 1m.$$

$$\text{Máxima tensión normal en } P = \sigma_{III} = -13 \text{ MPa.}$$

Plano π donde se alcanza

$$\rightarrow -3Y + 2Z_1 = 0$$

$$\pi \perp -\sqrt{\frac{9}{13}} \mathbf{j} + \sqrt{\frac{4}{13}} \mathbf{k} \Rightarrow -\sqrt{\frac{9}{13}} Y + \sqrt{\frac{4}{13}} Z_1 + D = 0$$

$$-3Y + 2Z_1 + D' = 0$$

$$P(1, 2, 3)$$

$$-3 \times 2 + 2 \times 3 + D' = 0 \rightarrow D' = 0$$

2) Valor medio de la tensión normal en P .

$$\sigma_m = \frac{I_\sigma}{3}$$

$$I_\sigma = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = 7 - 9 - 4 = -6 \text{ MPa}$$

$$I_\sigma = \sigma_x + \sigma_{II} + \sigma_{III} = 7 + 0 - 13 = -6 \text{ MPa}$$

Comprobación del carácter invariante de I_σ .

$$\boxed{\sigma_m = -\frac{6}{3} = -2 \text{ MPa}}$$

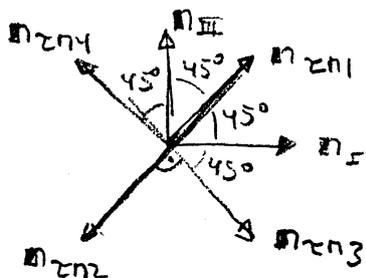
3) Máxima tensión tangencial en P , y planos donde se alcanza.

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_I - \sigma_{III}}{2} = \frac{7 - (-13)}{2} = 10 \text{ MPa}$$

Se alcanza sobre planos $\perp \frac{1}{\sqrt{2}} (\pm n_I \pm n_{III})$

$$\begin{aligned} n_{\tau n1} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (n_I + n_{III}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[i - \sqrt{\frac{9}{13}} j + \sqrt{\frac{4}{13}} k \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} i - \sqrt{\frac{9}{26}} j + \sqrt{\frac{2}{13}} k = -n_{\tau n2} \end{aligned}$$

$$n_{\tau n3} = \frac{1}{\sqrt{2}} (n_I - n_{III}) = \frac{1}{\sqrt{2}} i + \sqrt{\frac{9}{26}} j - \sqrt{\frac{2}{13}} k = -n_{\tau n4}$$



Plano $\perp n_{\tau n1}$ por P (\equiv plano $\perp n_{\tau n2}$ por P)

$$\frac{1}{\sqrt{2}} X - \sqrt{\frac{9}{26}} Y + \sqrt{\frac{2}{13}} Z_1 + D = 0 \quad P(1, 2, 3)$$

$$\sqrt{13} X - 3Y + 2Z_1 + D' = 0 \quad \text{" } \sqrt{13} - 3 \times 2 + 2 \times 3 + D' = 0$$

$$D' = -\sqrt{13}$$

$$\boxed{\sqrt{13} X - 3Y + 2Z_1 - \sqrt{13} = 0}$$

Plano $\perp n_{\tau n3}$ por P (\equiv plano $\perp n_{\tau n4}$ por P)

$$\sqrt{13} X + 3Y - 2Z_1 + D = 0 \rightarrow \sqrt{13} + 3 \times 2 - 2 \times 3 + D = 0$$

$$\boxed{\sqrt{13} X + 3Y - 2Z_1 - \sqrt{13} = 0} \quad D = -\sqrt{13}$$



Ej. 7. El tensor de tensiones en un punto P del interior de la región ocupada por cierto sólido tiene la siguiente expresión:

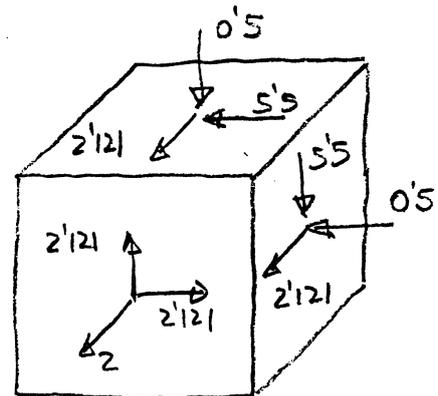
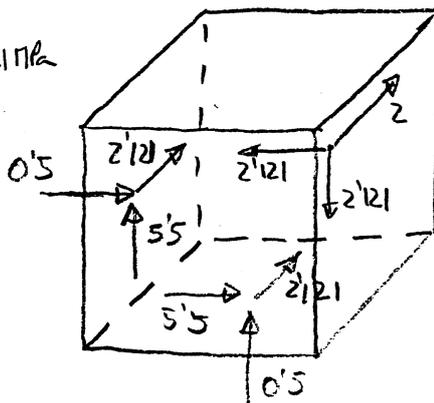
$$[\sigma] = \begin{bmatrix} 2 & 3\sqrt{2} & 3\sqrt{2} \\ 3\sqrt{2} & -0.5 & -5.5 \\ 3\sqrt{2} & -5.5 & -0.5 \end{bmatrix} \text{ MPa}$$

Se sabe que sus valores propios son enteros. Se pide: 1) Dibujar las componentes del vector tensión sobre las seis caras de un hexaedro de aristas diferenciales, paralelas a los ejes, con centro en P . 2) Responder a la cuestión: ¿existe algún plano sobre el que la componente tangente del vector tensión sea nula? Si la respuesta es afirmativa, determinar el vector tensión sobre tal plano, y si no, justificarla.

[Solución: 2) Existen tres planos que cumplen la condición. Los vectores tensión sobre ellos son $t = \pm(2.846i + 0.671j + 0.671k)$, $t = \pm(2.214i - 4.696j - 4.696k)$ y $t = \pm(-3.536j + 3.536k)$ MPa.]

1) Vectores tensión sobre un diferencial de volumen.

En MPa
 $3/\sqrt{2} \approx 2.121 \text{ MPa}$



2) ¿Existe algún plano sobre el que la componente tangente del vector tensión sea nula? ...

Los planos en cuestión son los planos principales. Por lo tanto, existen tres y nos piden los vectores tensión sobre planos principales.

Valores propios

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 3/\sqrt{2} & 3/\sqrt{2} \\ 3/\sqrt{2} & -0.5-\lambda & -5.5 \\ 3/\sqrt{2} & -5.5 & -0.5-\lambda \end{vmatrix} = 0 = -\lambda^3 + \lambda^2 + 41\lambda - 105$$



En realidad, para calcular los coef. de la ecuación se han utilizado los fórmulas

$$I_{\sigma} = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = 2 - 0.5 - 0.5 = 1 \text{ MPa}$$

$$II_{\sigma} = \begin{vmatrix} 2 & 3/\sqrt{2} \\ 3/\sqrt{2} & -0.5 \end{vmatrix} \times 2 + \begin{vmatrix} -0.5 & -5.5 \\ -5.5 & -0.5 \end{vmatrix} = 2 \times (-1 - \frac{9}{2}) + (0.25 - 30.25) = -41 \text{ MPa}^2$$

$$III_{\sigma} = \begin{vmatrix} 2 & 3/\sqrt{2} & 3/\sqrt{2} \\ 3/\sqrt{2} & -0.5 & -5.5 \\ 3/\sqrt{2} & -5.5 & -0.5 \end{vmatrix} = 0.5 - 5.5 \times \frac{9}{2} \times 2 + 0.5 \times \frac{9}{2} \times 2 - 2 \times 5.5^2$$

$$= 0.5 - 49.5 + 4.5 - 60.5 = -105 \text{ MPa}^3$$

$$-\lambda^3 + \lambda^2 + 41\lambda - 105 = 0 \quad (\text{Raíces enteras} \equiv \text{divisores enteros del término independiente})$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & -1 & 1 & 41 & -105 \\ 3 & & -3 & -6 & 105 \\ \hline & -1 & -2 & 35 & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 105 & 3 \\ 35 & 5 \\ 7 & 7 \\ 1 & 1 \end{array}$$

$$-\lambda^3 + \lambda^2 + 41\lambda - 105 = (\lambda - 3)(-\lambda^2 - 2\lambda + 35) = 0$$

$$\lambda = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 140}}{-2} = \frac{2 \pm 12}{-2} = \begin{cases} -7 \\ 5 \end{cases}$$

$$\sigma_I = 5 \text{ MPa} \quad ,, \quad \sigma_{II} = 3 \text{ MPa} \quad ,, \quad \sigma_{III} = -7 \text{ MPa}$$

Vector propio asociado a $\lambda = 5$

$$\left. \begin{aligned} (2-5)n_1 + \frac{3}{\sqrt{2}}n_2 + \frac{3}{\sqrt{2}}n_3 &= 0 \\ \frac{3}{\sqrt{2}}n_1 + (-0.5-5)n_2 - 3.5n_3 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \begin{aligned} -3n_1 + \frac{3}{\sqrt{2}}n_2 &= -\frac{3}{\sqrt{2}}n_3 \\ \frac{3}{\sqrt{2}}n_1 - 3.5n_2 &= +3.5n_3 \end{aligned}$$

$$n_1 = \frac{\begin{vmatrix} -3/\sqrt{2} & 3/\sqrt{2} \\ +3.5 & -3.5 \end{vmatrix} n_3}{\begin{vmatrix} -3 & 3/\sqrt{2} \\ 3/\sqrt{2} & -3.5 \end{vmatrix}} = \frac{0}{12} = 0$$

$$n_2 = \frac{\begin{vmatrix} -3 & -3/\sqrt{2} \\ 3/\sqrt{2} & +3.5 \end{vmatrix} n_3}{12} = \frac{-12n_3}{12} = -n_3$$



$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1 \rightarrow 0 + n_2^2 + n_3^2 = 1 \Rightarrow n_3 = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Escogemos $n_3 = 1/\sqrt{2}$

$$\mathbf{n}_I = -\frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{j} + \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{k}$$

Valor propio asociado a $\lambda = \sigma_{II} = 3 \text{ MPa}$

$$\left. \begin{aligned} -n_1 + 3/\sqrt{2} n_2 &= -3/\sqrt{2} n_3 \\ 3/\sqrt{2} n_1 - 3.5 n_2 &= +5.5 n_3 \end{aligned} \right\}$$

$$n_1 = \frac{\begin{vmatrix} -3/\sqrt{2} & 3/\sqrt{2} \\ 5.5 & -3.5 \end{vmatrix} n_3}{\begin{vmatrix} -1 & 3/\sqrt{2} \\ 3/\sqrt{2} & -3.5 \end{vmatrix}} = \frac{-\frac{6}{\sqrt{2}} n_3}{-1} = +3\sqrt{2} n_3$$

$$n_2 = \frac{\begin{vmatrix} -1 & -3/\sqrt{2} \\ 3/\sqrt{2} & 5.5 \end{vmatrix} n_3}{1} = \frac{-5.5 + 4.5}{-1} n_3 = +n_3$$

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1 \rightarrow 18 n_3^2 + n_3^2 + n_3^2 = 1 \rightarrow n_3 = \pm \frac{1}{\sqrt{20}}$$

Escogemos $n_3 = \frac{1}{\sqrt{20}} = \frac{1}{2\sqrt{5}}$

$$\mathbf{n}_{II} = +\frac{3}{\sqrt{10}} \mathbf{i} + \frac{1}{2\sqrt{5}} \mathbf{j} + \frac{1}{2\sqrt{5}} \mathbf{k}$$

Valor propio asociado a $\lambda = \sigma_{III} = -7 \text{ MPa}$

$$\mathbf{n}_{III} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ +3/\sqrt{10} & 1/2\sqrt{5} & 1/2\sqrt{5} \end{vmatrix} = -\frac{1}{\sqrt{10}} \mathbf{i} + \frac{3}{\sqrt{20}} \mathbf{j} + \frac{3}{\sqrt{20}} \mathbf{k}$$

Vectores tensión sobre los planos principales.

$$\begin{aligned} \mathbf{t} &= \pm 5 \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{j} \right) = \pm (3.536 \mathbf{j} + 3.536 \mathbf{k}) \text{ MPa} \\ \mathbf{t} &= \pm 3 \left(+\frac{3}{\sqrt{10}} \mathbf{i} + \frac{1}{2\sqrt{5}} \mathbf{j} + \frac{1}{2\sqrt{5}} \mathbf{k} \right) = \pm (2.846 \mathbf{i} + 0.671 \mathbf{j} + 0.671 \mathbf{k}) \text{ MPa} \\ \mathbf{t} &= \mp 7 \left(-\frac{1}{\sqrt{10}} \mathbf{i} + \frac{3}{\sqrt{20}} \mathbf{j} + \frac{3}{\sqrt{20}} \mathbf{k} \right) = \pm (2.214 \mathbf{i} - 4.696 \mathbf{j} - 4.696 \mathbf{k}) \text{ MPa} \end{aligned}$$

Ej. 8. El tensor de tensiones en el paralelepipedo de la figura está definido por las siguientes funciones

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \sigma_y = 50 && \text{MPa} \\ \sigma_z &= 50 + 0.02Z && \text{MPa} \\ \tau_{xy} &= 10 && \text{MPa} \\ \tau_{xz} &= \tau_{yz} = 0\end{aligned}$$

donde Z se expresa en metros. El vértice E del prisma tiene por coordenadas (5 m, 15 m, 5 m).

Se desea conocer: 1) las fuerzas exteriores que actúan sobre las caras OABC, BCFE y ABED; 2) las fuerzas de volumen que solicitan el cuerpo; 3) la acción de la parte del cuerpo que está por encima del plano AEC sobre la que está por debajo; y 4) las tensiones principales en un punto genérico del cuerpo.

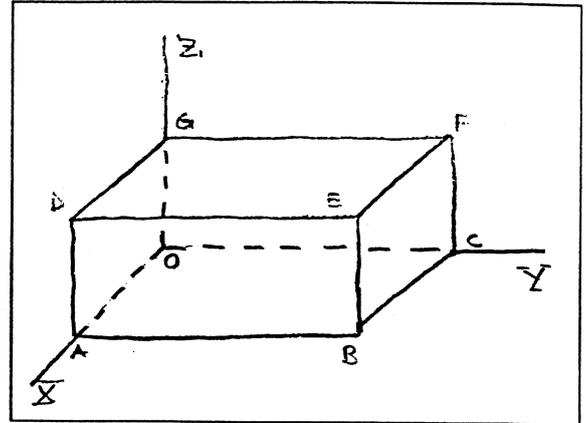


Figura Ej. 8

[Solución: $t_{OABC} = -50k \text{ MPa}$, $t_{BCFE} = 10i + 50j \text{ MPa}$, $t_{ABED} = 50i + 10j \text{ MPa}$; 2) $b = -0.02k \text{ MN/m}^3$; 3) $t_{AEC} = (-160i - 80j + (150 + 0.06Z)k) / \sqrt{19} \text{ MPa}$; 4) $\sigma_I = 60 \text{ MPa}$, $\sigma_{II} = 50 + 0.02Z \text{ MPa}$, Z en metros, $\sigma_{III} = 40 \text{ MPa}$, $n_I = (i+j)/\sqrt{2}$, $n_{II} = k$, $n_{III} = (i-j)/\sqrt{2}$]

1) Fuerzas exteriores sobre las caras OABC, BCFE y ABED.

Se calculan mediante las condiciones de contorno estáticas: $t = \bar{T}$ y la fórmula de Cauchy para hallar el vector tensión sobre el contorno.

Cara OABC $n = -k$, $Z = 0$.

$$\begin{Bmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\sigma_z|_{z=0} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -50 \end{Bmatrix} \text{ MPa} \quad \boxed{\bar{T} = -50k \text{ MPa}}$$

Cara BCFE $n = j$, $Y = 15 \text{ m}$.

$$\begin{Bmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 10 \\ 50 \\ 0 \end{Bmatrix} \text{ MPa} \quad \boxed{\bar{T} = 10i + 50j \text{ MPa}}$$

Cara ABED $n = i$, $X = 5 \text{ m}$.

$$\begin{Bmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 50 \\ 10 \\ 0 \end{Bmatrix} \text{ MPa} \quad \boxed{\bar{T} = 50i + 10j \text{ MPa}}$$

2) Fuerzas de volumen que solicitan al cuerpo

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + b_x = 0 \rightarrow b_x = 0$$



$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + b_y = 0 \rightarrow b_y = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} + b_z = 0 \rightarrow 0 \cdot 0 \cdot 2 + b_z = 0$$

luego

$$\mathbf{b} = -0.02 \mathbf{k} \text{ kN/m}^3$$

3) Acción de la parte del cuerpo que está por encima del plano AEC sobre la que está por debajo.

No piden el vector tensión sobre el plano AEC que representa la acción de la parte del cuerpo por encima de él sobre la que está por debajo.

Vector normal a AEC, apuntando a la parte del cuerpo sobre este plano:

$$\mathbf{n} = \frac{\vec{EC} \times \vec{EA}}{\|\vec{EC} \times \vec{EA}\|} \quad \vec{EC} = -5\mathbf{i} - 5\mathbf{k} \quad \vec{EA} = -15\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$$

$$\vec{EC} \times \vec{EA} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -5 & 0 & -5 \\ 0 & -15 & -5 \end{vmatrix} = -75\mathbf{i} - 25\mathbf{j} + 75\mathbf{k}$$

$$\|\vec{EC} \times \vec{EA}\| = \sqrt{5625 + 625 + 5625} = \sqrt{11875} = 25\sqrt{19}$$

$$\left\| \begin{array}{r|l} 11875 & 5 \\ 2385 & 5 \\ 475 & 5 \\ 19 & 19 \end{array} \right.$$

$$\mathbf{n} = \frac{\vec{EC} \times \vec{EA}}{\|\vec{EC} \times \vec{EA}\|} = -\frac{3}{\sqrt{19}}\mathbf{i} - \frac{1}{\sqrt{19}}\mathbf{j} + \frac{3}{\sqrt{19}}\mathbf{k}$$

Ecuación plano

$$AX + BY + CZ + D = 0$$

$$D = -15 \text{ (escogido arbitrariamente)}$$

$$\text{Pto } A(5, 0, 0) \rightarrow 5A + D = 0 \rightarrow A = 3$$

$$\text{Pto } C(0, 15, 0) \rightarrow 15B + D = 0 \rightarrow B = 1$$

$$\text{Pto } E(5, 15, 5) \rightarrow 5A + 15B + 5C + D = 0 \rightarrow 15 + 15 + 5C - 15 = 0$$

$$C = -3$$

$$3X + Y - 3Z - 15 = 0 \quad z_1 = \frac{3X + Y - 15}{3} = X + \frac{1}{3}Y - 5$$

$$\begin{pmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{pmatrix}_{\text{plano}} \begin{pmatrix} -3/\sqrt{19} \\ -1/\sqrt{19} \\ 3/\sqrt{19} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-3\sigma_x - \tau_{xy})/\sqrt{19} \\ (-3\tau_{xy} - \sigma_y)/\sqrt{19} \\ 3\sigma_z/\sqrt{19} \end{pmatrix}_{\text{plano}} = \begin{pmatrix} -160/\sqrt{19} \\ -80/\sqrt{19} \\ (150 + 0.06z_1)/\sqrt{19} \end{pmatrix}_{\text{plano}}$$

$$\mathbf{t} = \frac{1}{\sqrt{19}} \{ -160\mathbf{i} - 80\mathbf{j} + (150 + 0.06z_1)\mathbf{k} \}_{\text{plano}}$$

También se podría poner z_1 en función de X e Y .



4) Tensiones principales en un punto genérico

$$\begin{vmatrix} 50-\lambda & 10 & 0 \\ 10 & 50-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z-\lambda \end{vmatrix} = (\sigma_z-\lambda) \left\{ 2500 - 100\lambda + \lambda^2 - 100 \right\} = 0$$

$$\lambda = \sigma_z = 50 + 0'02 z_1 \quad \lambda = \frac{100 \pm \sqrt{10000 - 9600}}{2} = \frac{100 \pm 20}{2} = \begin{cases} 60 \\ 40 \end{cases}$$

$$\sigma_I = 60 \text{ MPa}, \quad \sigma_{II} = 50 + 0'02 z_1 \quad (\text{porque } 50 \leq \sigma_z \leq 50 + 0'02 \times 5 = 50'1)$$

$$\sigma_{III} = 40 \text{ MPa}$$

Vector propio asociado a $\sigma_I = 60$

$$-10 n_1 + 10 n_2 = 0$$

$$(50 + 0'02 z_1) n_3 = 0 \quad \forall z_1 \quad \rightarrow \quad n_3 = 0$$

$$n_1 = n_2$$

$$\Rightarrow n_I = \frac{1}{\sqrt{2}} (i + j)$$

Vector propio asociado a σ_{II} \rightarrow $n_{II} = k$ (evidente)

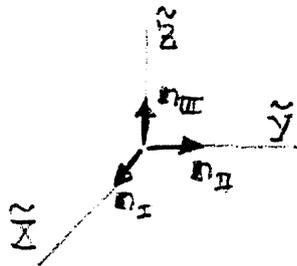
Vector propio asociado a σ_{III}

$$n_{III} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} i - \frac{1}{\sqrt{2}} j$$



- Ej. 9. Demuestre que los valores máximo y mínimo que alcanzan las componentes normales de los vectores tensión en un punto P del interior de la región ocupada por cierto sólido coinciden con las tensiones principales máxima y mínima, respectivamente. Sugerencia: plantee el problema en ejes principales.

Sea $O\tilde{x}\tilde{y}\tilde{z}$ un sistema cartesiano orientado según las direcciones principales.



$$[\tilde{\sigma}] = \begin{bmatrix} \sigma_I & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{II} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{III} \end{bmatrix} \quad \sigma_I \geq \sigma_{II} \geq \sigma_{III}$$

Vector unitario cualquiera $n_1 \mathbf{i} + n_2 \mathbf{j} + n_3 \mathbf{k} = \mathbf{n}$,
con $n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$.

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1 \Rightarrow n_1^2 \leq 1, n_2^2 \leq 1 \text{ y } n_3^2 \leq 1.$$

Vector tensión sobre un plano normal a \mathbf{n}

$$\begin{Bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_I & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{II} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{III} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma_I n_1 \\ \sigma_{II} n_2 \\ \sigma_{III} n_3 \end{Bmatrix} \quad \mathbf{t} = \sigma_I n_1 \mathbf{i} + \sigma_{II} n_2 \mathbf{j} + \sigma_{III} n_3 \mathbf{k}$$

Componente normal de \mathbf{t}

$$\sigma_n = \mathbf{t} \cdot \mathbf{n} = \sigma_I n_1^2 + \sigma_{II} n_2^2 + \sigma_{III} n_3^2$$

Demostración $\sigma_n \leq \sigma_I$

$$\sigma_n = \sigma_I n_1^2 + \sigma_{II} n_2^2 + \sigma_{III} n_3^2 \leq \sigma_I n_1^2 + \sigma_I n_2^2 + \sigma_I n_3^2 = \sigma_I (n_1^2 + n_2^2 + n_3^2) = \sigma_I$$
$$\leq \sigma_I n_1^2 \leq \sigma_I n_3^2$$

Demostración $\sigma_n \geq \sigma_{III}$

$$\sigma_n = \sigma_I n_1^2 + \sigma_{II} n_2^2 + \sigma_{III} n_3^2 \geq \sigma_{III} n_1^2 + \sigma_{III} n_2^2 + \sigma_{III} n_3^2 = \sigma_{III} (n_1^2 + n_2^2 + n_3^2) = \sigma_{III}$$
$$\geq \sigma_{III} n_1^2 \geq \sigma_{III} n_2^2$$

c. q. d. 1123



- Ej. 10. Demuestre que los valores máximo y mínimo que alcanzan los módulos de los vectores tensión en un punto P del interior de la región ocupada por cierto sólido coinciden con el máximo y el mínimo de los valores absolutos de las tensiones principales, respectivamente. Sugerencia: plantee el problema en ejes principales.

Sea $O\tilde{X}\tilde{Y}\tilde{Z}$ un sistema cartesiano orientado según las direcciones principales



$$[\tilde{\sigma}] = \begin{bmatrix} \sigma_I & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{II} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{III} \end{bmatrix} \quad \sigma_I \geq \sigma_{II} \geq \sigma_{III}$$

Vecto. unitario cualquiera $n_1 \mathbf{e}_I + n_2 \mathbf{e}_{II} + n_3 \mathbf{e}_{III} = \mathbf{e}$,
con $n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$.

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1 \Rightarrow n_1^2 \leq 1, n_2^2 \leq 1 \text{ y } n_3^2 \leq 1.$$

Vector tensión sobre un plano normal a \mathbf{n}

$$\begin{Bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_I & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{II} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{III} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma_I n_1 \\ \sigma_{II} n_2 \\ \sigma_{III} n_3 \end{Bmatrix} \quad \mathbf{t} = \sigma_I n_1 \mathbf{e}_I + \sigma_{II} n_2 \mathbf{e}_{II} + \sigma_{III} n_3 \mathbf{e}_{III}$$

Módulo del vector tensión

$$\|\mathbf{t}\|^2 = \sigma_I^2 n_1^2 + \sigma_{II}^2 n_2^2 + \sigma_{III}^2 n_3^2$$

$$\text{Sea } \sigma_A^2 = \max \{ \sigma_I^2, \sigma_{II}^2, \sigma_{III}^2 \} \text{ y } \sigma_B^2 = \min \{ \sigma_I^2, \sigma_{II}^2, \sigma_{III}^2 \}$$

$$\|\mathbf{t}\|^2 = \sigma_I^2 n_1^2 + \sigma_{II}^2 n_2^2 + \sigma_{III}^2 n_3^2 \leq \sigma_A^2 n_1^2 + \sigma_A^2 n_2^2 + \sigma_A^2 n_3^2 = \sigma_A^2 \Rightarrow \|\mathbf{t}\| \leq |\sigma_A|$$

$$\|\mathbf{t}\|^2 = \sigma_I^2 n_1^2 + \sigma_{II}^2 n_2^2 + \sigma_{III}^2 n_3^2 \geq \sigma_B^2 n_1^2 + \sigma_B^2 n_2^2 + \sigma_B^2 n_3^2 = \sigma_B^2 \Rightarrow \|\mathbf{t}\| \geq |\sigma_B|$$

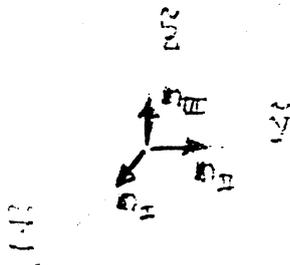
$$\sigma_A = \max \{ |\sigma_I|, |\sigma_{II}|, |\sigma_{III}| \}, \quad \sigma_B = \min \{ |\sigma_I|, |\sigma_{II}|, |\sigma_{III}| \}$$

$$\sigma_B \leq \|\mathbf{t}\| \leq \sigma_A \quad \text{c. q. d.}$$



- Ej. 11. En un punto P del interior de la región ocupada por cierto sólido se determinan los vectores tensión sobre todos los planos imaginables y a continuación se dibujan con origen común en el punto P . Determine el lugar geométrico de los extremos de dichos vectores. Sugerencia: plantee el problema en ejes principales. [Solución: es un elipsoide, de semiejes determinados por el valor absoluto de las tensiones principales, orientados en las direcciones principales —se le conoce como "Elipsoide de tensiones de Lamé"—.]

Sea $O\tilde{X}\tilde{Y}\tilde{Z}$ un sistema cartesiano orientado según las direcciones principales



$$[\tilde{\sigma}] = \begin{bmatrix} \sigma_I & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{II} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{III} \end{bmatrix} \quad \sigma_I \geq \sigma_{II} \geq \sigma_{III}$$

Vectores unitarios cualquiera $n_1 \tilde{e}_1 + n_2 \tilde{e}_2 + n_3 \tilde{e}_3 = \tilde{e}$,
con $n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$.

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1 \Rightarrow n_1^2 \leq 1, n_2^2 \leq 1 \text{ y } n_3^2 \leq 1.$$

$$\hookrightarrow n_3 = \sqrt{1 - n_1^2 - n_2^2}$$

Vectores tensión sobre un plano normal a \tilde{e}

$$\begin{Bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_I & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{II} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{III} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma_I n_1 \\ \sigma_{II} n_2 \\ \sigma_{III} n_3 \end{Bmatrix} \quad \mathbf{t} = \sigma_I n_1 \tilde{e}_1 + \sigma_{II} n_2 \tilde{e}_2 + \sigma_{III} n_3 \tilde{e}_3$$

Ecuaciones paramétricas del lugar geométrico pedido:

$$\left. \begin{aligned} t_1 &= \sigma_I n_1 \\ t_2 &= \sigma_{II} n_2 \\ t_3 &= \sigma_{III} \sqrt{1 - n_1^2 - n_2^2} \end{aligned} \right\} \text{Eliminamos los parámetros } n_1 \text{ y } n_2 \text{ entre ellos}$$

$$n_1 = \frac{t_1}{\sigma_I} \quad n_2 = \frac{t_2}{\sigma_{II}}$$

$$\frac{t_3}{\sigma_{III}} = \sqrt{1 - \left(\frac{t_1}{\sigma_I}\right)^2 - \left(\frac{t_2}{\sigma_{II}}\right)^2} \Rightarrow \boxed{\frac{t_1^2}{\sigma_I^2} + \frac{t_2^2}{\sigma_{II}^2} + \frac{t_3^2}{\sigma_{III}^2} = 1}$$

Se trata de un ELIPSOIDE, cuyo eje se orientan según $O\tilde{X}$, $O\tilde{Y}$ y $O\tilde{Z}$ (en las direcciones principales) y miden $|\sigma_I|$, $|\sigma_{II}|$ y $|\sigma_{III}|$, respectivamente.

Se conoce como ELIPSOIDE DE TENSIONES DE LAMÉ.

Ej. 12 Según la teoría de Saint-Venant, la solución del problema de torsión pura —un pieza alargada, sometida exclusivamente a dos momentos torsores en sus extremos, iguales en módulo pero de signos contrarios— del cilindro definido en la figura, en el que se supone que los desplazamientos en la cara $Z=0$ están impedidos, queda determinada por el siguiente campo de desplazamientos:

$$\begin{aligned} u &= -\theta Z_1 Y \\ v &= \theta Z_1 X \\ w &= 0 \end{aligned}$$

donde θ representa el giro por unidad de longitud de la pieza y X , Y y Z son las coordenadas en el sistema cartesiano definido en la figura.

Suponiendo que el cuerpo está formado por un material hookeano, de módulo de deformación tangencial G , se pide determinar: 1) el tensor de deformaciones, 2) el tensor de tensiones, 3) las fuerzas de volumen, 4) las fuerzas de superficie sobre las bases, 5) las fuerzas de superficie sobre el contorno lateral, y 6) la resultante de las fuerzas que actúan sobre la cara $Z=L$ y su momento resultante respecto al punto $(0,0,L)$, comprobando que la distribución de fuerzas de superficie es estáticamente equivalente a un momento torsor $M_T = G\theta I_0$, donde I_0 es el momento de inercia polar de la sección transversal respecto a su centro.

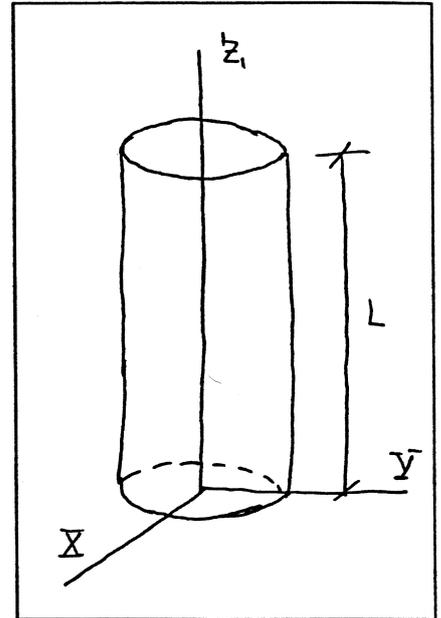


Figura Ej. 13

1) Tensor de deformaciones

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial X} = 0 \quad \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial Y} = 0 \quad \epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial Z} = 0$$

$$\epsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial Y} + \frac{\partial v}{\partial X} \right) = \frac{1}{2} (-\theta Z_1 + \theta Z_1) = 0$$

$$\epsilon_{xz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial Z} + \frac{\partial w}{\partial X} \right) = \frac{1}{2} (-\theta Y)$$

$$\epsilon_{yz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial Z} + \frac{\partial w}{\partial Y} \right) = \frac{1}{2} (\theta X)$$

2) Tensor de tensiones

$$e = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z = 0$$

$$\sigma_x = \lambda e + 2G \epsilon_x = 0$$

$$\sigma_y = \lambda e + 2G \epsilon_y = 0$$

$$\sigma_z = \lambda e + 2G \epsilon_z = 0$$

$$\tau_{xy} = 2G \epsilon_{xy} = 0$$

$$\tau_{xz} = 2G \epsilon_{xz} = -G\theta Y$$

$$\tau_{yz} = 2G \epsilon_{yz} = G\theta X$$

3) Fuerzas de volumen

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + b_x = 0 \rightarrow b_x = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + b_y = 0 \rightarrow b_y = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + b_z = 0 \rightarrow b_z = 0$$

4) Fuerzas de superficie sobre las bases.

$$z = L \quad \mathbf{n} = \mathbf{k}$$

$$\begin{Bmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -G\theta Y \\ 0 & 0 & G\theta X \\ -G\theta Y & G\theta X & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -G\theta Y \\ G\theta X \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \bar{\mathbf{t}} = \mathbf{t} \cdot G\theta (-Y\mathbf{i} + X\mathbf{j})$$

$$z = 0 \quad \mathbf{n} = -\mathbf{k} \rightarrow \bar{\mathbf{t}} = G\theta (Y\mathbf{i} - X\mathbf{j})$$

5) Fuerzas de superficie sobre el contorno lateral

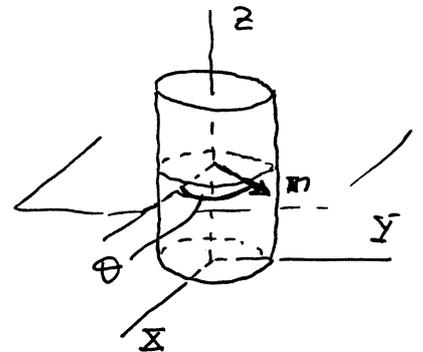
$$\mathbf{n} = \cos\theta \mathbf{i} + \sin\theta \mathbf{j}$$

$$X = R \cos\theta, \quad Y = R \sin\theta$$

$$\begin{Bmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -G\theta R \sin\theta \\ 0 & 0 & G\theta R \cos\theta \\ -G\theta R \sin\theta & G\theta R \cos\theta & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\tau = G\theta R \{-\sin\theta \cos\theta + \cos\theta \sin\theta\} = 0$$

$$\bar{\mathbf{t}} = \mathbf{t} = \mathbf{0}$$


 6) Equivalencia estática de $\bar{\mathbf{t}}$ en la base $z = L$.

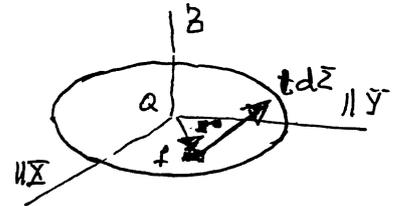
$$\mathbf{R} = \int_{\Sigma} \mathbf{t} d\Sigma = -G\theta \int_{\Sigma} Y d\Sigma \mathbf{i} + G\theta \int_{\Sigma} X d\Sigma \mathbf{j} = \mathbf{0}$$

$$= \underbrace{-Y_a}_{=0} \cdot \Sigma = 0 \quad = \underbrace{X_a}_{=0} \cdot \Sigma = 0$$

 Los coord. X_a, Y_a del
 cdg. de la cara $z=L$
 son 0 y 0, respectivamente



$$d\mathbf{M}_Q = \vec{Q}\vec{r} \times t d\Sigma = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ X & Y & 0 \\ -Y & X & 0 \end{vmatrix} G\theta$$
$$= G\theta (X^2 + Y^2) \mathbf{k}$$



$$\mathbf{M}_Q = G\theta \int_{\Sigma} (X^2 + Y^2) d\Sigma \mathbf{k} = G\theta I_0 \mathbf{k}, \quad I_0 = \text{momento de inercia polar del círculo respecto a su centro.}$$

Momento torsor $\mathbf{M}_Q = \tau_T \mathbf{k}$
 $\mathbf{M}_Q = G\theta I_0 \mathbf{k} \quad | \quad \tau_T = G\theta I_0$

- Ej. 13 El cuerpo del ejercicio Ej. 2 está formado por una material de módulo de deformación tangencial 4500 MPa y módulo de deformación volumétrica 7500 MPa. Se desea conocer: 1) el tensor de deformaciones en P ; 2) los alargamientos unitarios de los PA , AB y AC ; y 3) las distorsiones angulares entre los siguientes pares de segmentos: (PA, PB) , (AB, AP) y (AB, AC) .

ENUNCIADO DEL EJERCICIO CITADO:

- Ej.2. La figura Ej.2 muestra un tetraedro de aristas diferenciales, aislado del interior de la región ocupada por un cuerpo C en cierta configuración deformada. En ella aparecen, indicadas en megapascales, las componentes de los vectores que representan la acción del resto del cuerpo sobre el tetraedro a través de sus caras PBC , APC y ABP . Se desea conocer: 1) el tensor de tensiones en el punto P ; y 2) la acción del resto del cuerpo sobre el tetraedro a través de la cara ABC .

Nota: Las coordenadas de los vértices son $P(X_0, Y_0, Z_0)$, $A(X_0 + 2dS, Y_0, Z_0)$, $B(X_0, Y_0 + 2dS, Z_0)$ y $C(X_0, Y_0, Z_0 + dS)$.

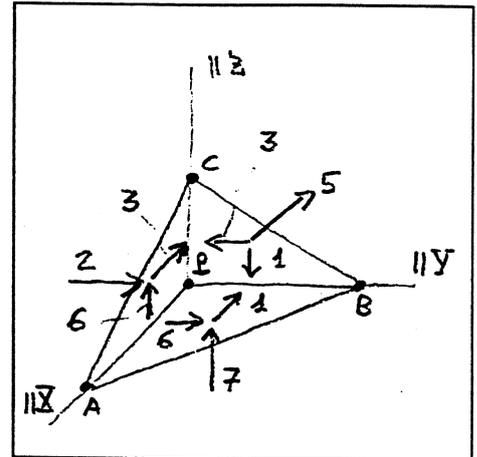


Figura Ej. 2

Constantes elásticas del material.

$$G = 4.500 \text{ MPa} \quad k = 7.500 \text{ MPa} \quad \text{Necesitamos } E \text{ y } \nu.$$

$$\left. \begin{aligned} G &= \frac{E}{2(1+\nu)} = 4500 \\ k &= \frac{E}{3(1-2\nu)} = 7500 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} 4500(2+2\nu) &= 7500(3-6\nu) \\ (9000 + 4500\nu)\nu &= 22500 - 9000\nu \\ \nu &= \frac{13500}{54000} = 0,25 \end{aligned}$$

$$\boxed{E = 2(1+\nu) \times 4500 = 11250 \text{ MPa}}$$

Comprobación $E = 3(1-2\nu)7500 = 11250 \text{ MPa}$ Correcto.

Tensor de tensiones: Obtenido en el ejercicio 13.

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 3 & -2 & -6 \\ 1 & -6 & -7 \end{bmatrix} \text{ MPa}$$



1) Tensión de deformaciones

$$\epsilon_x = \frac{1}{E} \{ \sigma_x - \nu (\sigma_y + \sigma_z) \} = \frac{1}{11250} \{ 5 - 0.25(-2 - 7) \} = 6.44 \times 10^{-4}$$

$$\epsilon_y = \frac{1}{E} \{ \sigma_y - \nu (\sigma_x + \sigma_z) \} = \frac{1}{11250} \{ -2 - 0.25(5 - 7) \} = -1.33 \times 10^{-4}$$

$$\epsilon_z = \frac{1}{E} \{ \sigma_z - \nu (\sigma_x + \sigma_y) \} = \frac{1}{11250} \{ -7 - 0.25(5 - 2) \} = -6.89 \times 10^{-4}$$

$$\epsilon_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{2G} = \frac{3}{2 \times 4500} = 3.33 \times 10^{-4}$$

$$\epsilon_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{2G} = \frac{1}{9000} = 1.11 \times 10^{-4}$$

$$\epsilon_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{2G} = \frac{-6}{9000} = -6.67 \times 10^{-4}$$

2) Alargamientos unitarios de \vec{PA} , \vec{AB} y \vec{AC} .

$$\vec{PA} = 2dS \vec{i} \Rightarrow \epsilon_{PA} = \epsilon_x = 6.44 \times 10^{-4} \quad (\text{Interpretación física } \epsilon_x)$$

$$\vec{AB} = -2dS \vec{i} + 2dS \vec{j}$$

$$\vec{AC} = -2dS \vec{i} + dS \vec{k}$$

$$\vec{n}_{AB} = \frac{-2dS \vec{i} + 2dS \vec{j}}{\sqrt{4dS^2 + 4dS^2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \vec{i} + \frac{1}{\sqrt{2}} \vec{j}$$

$$\vec{n}_{AC} = \frac{-2dS \vec{i} + dS \vec{k}}{\sqrt{4dS^2 + dS^2}} = -\frac{2}{\sqrt{5}} \vec{i} + \frac{1}{\sqrt{5}} \vec{k}$$

$$\epsilon_{AB} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right) 10^{-4} \begin{bmatrix} 6.44 & 3.33 & 1.11 \\ 3.33 & -1.33 & -6.67 \\ 1.11 & -6.67 & -6.89 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{Bmatrix} =$$

$$= 10^{-4} \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right) \begin{Bmatrix} -3.11/\sqrt{2} \\ -4.66/\sqrt{2} \\ -7.78/\sqrt{2} \end{Bmatrix} = -0.775 \times 10^{-4}$$

$$\epsilon_{AC} = \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, 0, \frac{1}{\sqrt{5}} \right) \begin{bmatrix} 6.44 & 3.33 & 1.11 \\ 3.33 & -1.33 & -6.67 \\ 1.11 & -6.67 & -6.89 \end{bmatrix} \times 10^{-4} \begin{Bmatrix} -2/\sqrt{5} \\ 0 \\ 1/\sqrt{5} \end{Bmatrix} = 10^{-4} \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, 0, \frac{1}{\sqrt{5}} \right) \begin{Bmatrix} -11.77/\sqrt{5} \\ -13.33/\sqrt{5} \\ -9.11/\sqrt{5} \end{Bmatrix}$$

$$= 2.89 \times 10^{-4}$$



3) Distorsiones angulares

$$\gamma_{PA, PB} = \frac{2 \{n_{PA}\}^t [E] \{n_{PB}\} - (\epsilon_{PA} + \epsilon_{PB}) \cos A}{\operatorname{sen} A}$$

- Entre $\vec{PA} = 2dS \vec{i}$ y $\vec{PB} = 2dS \vec{j}$ $\rightarrow \gamma_{PA, PB} = \gamma_{APB}$

$$\gamma_{APB} = \gamma_{xy} = 2\epsilon_{xy} = 6'67 \times 10^{-4} \quad (\text{Interpretación física } \epsilon_{xy})$$

- Entre \vec{AB}, \vec{AP} .

$$n_{AB} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \vec{i} + \frac{1}{\sqrt{2}} \vec{j} \quad // \quad n_{AP} = -\vec{i} \quad \begin{matrix} \epsilon_{AP} = \epsilon_x = 6'44 \times 10^{-4} \\ \epsilon_{AB} = -0'775 \times 10^{-4} \end{matrix}$$

$$\begin{aligned} \{n_{AB}\}^t [E] \{n_{AP}\} &= \left\{ -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right\} [E] \begin{Bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \\ &= \left\{ -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right\} \times 10^{-4} \begin{Bmatrix} -6'44 \\ -3'33 \\ -1'11 \end{Bmatrix} = +\frac{3'11}{\sqrt{2}} \times 10^{-4} = +2'20 \times 10^{-4} \end{aligned}$$

$$\cos A = n_{AB} \cdot n_{AP} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \operatorname{sen} A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \sqrt{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\gamma_{AB, AP} = \frac{2 \times \left(\frac{3'11}{\sqrt{2}} \times 10^{-4} \right) - (-0'775 + 6'44) \times 10^{-4} \times \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = 0'555 \times 10^{-4}$$

- Entre \vec{AB} y \vec{AC} .

$$n_{AB} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \vec{i} + \frac{1}{\sqrt{2}} \vec{j} \quad n_{AC} = -\frac{2}{\sqrt{5}} \vec{i} + \frac{1}{\sqrt{5}} \vec{k} \quad \begin{matrix} \epsilon_{AB} = -0'775 \times 10^{-4} \\ \epsilon_{AC} = 2'89 \times 10^{-4} \end{matrix}$$

$$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right) [E] \begin{Bmatrix} -2/\sqrt{5} \\ 0 \\ 1/\sqrt{5} \end{Bmatrix} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right) \begin{Bmatrix} -11'77/\sqrt{5} \\ -13'33/\sqrt{5} \\ -9'11/\sqrt{5} \end{Bmatrix} \times 10^{-4} = -0'493 \times 10^{-4}$$

$$\gamma_{AB, AC} = \frac{2 \times (-0'493 \times 10^{-4}) - (-0'775 + 2'89) \times 10^{-4} \times 0'6325}{0'7746} = -3'00 \times 10^{-4}$$

$$\cos A = n_{AB} \cdot n_{AC} = \frac{2}{\sqrt{10}} = 0'6325.$$

$$\operatorname{sen} A = 0'7746$$



- Ej. 14 El cilindro del ejercicio Ej. 4 está formado por un material hookeano, de parámetro de Lamé $\lambda=4 \times 10^4$ MPa y coeficiente de Poisson $\nu=0.25$. Se desea conocer: 1) el tensor de deformaciones en él, 2) el alargamiento experimentado por la circunferencia contorno de la base superior del cuerpo, y 3) el cambio de volumen sufrido por el cuerpo.

ENUNCIADO DEL EJERCICIO CITADO:

- Ej. 4. Un cilindro recto de 1.50 m de altura, cuya base es un círculo de 0.75 m de diámetro, ha caído en un depósito en el que se almacena cierto líquido, quedando en el fondo apoyado sobre una de sus bases. Para estudiar el problema, se escoge un sistema cartesiano con origen en el centro de la base inferior del cilindro y eje Z paralelo a su altura —debido a la simetría axial del cuerpo y las fuerzas exteriores, la orientación de los ejes X e Y es irrelevante—. En él, el tensor de tensiones del cuerpo tiene las siguientes componentes:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \sigma_y = 15Z - 150 && \text{kPa} \\ \sigma_z &= 25Z - 165 && \text{kPa} \\ \tau_{xy} &= \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0\end{aligned}$$

donde las coordenadas se expresan en metros. Se desea conocer: 1) el peso específico del material que forma el cilindro; 2) el peso específico del líquido; 3) la altura del líquido sobre el fondo del depósito; 4) las reacciones sobre las bases del cilindro. Así mismo se pide verificar el equilibrio de fuerzas verticales sobre el cuerpo.

Constante elásticas

$$\lambda = 4 \times 10^4 \text{ MPa}$$

$$\nu = 0.25$$

Neeritams E

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \rightarrow 40.000 = \frac{0.25 E}{1.25 \times 0.5} \rightarrow \boxed{E = 100.000 \text{ MPa.}} \\ = 10^8 \text{ kPa}$$

1) Tensor de deformaciones

$$\begin{aligned}\epsilon_x &= \frac{1}{E} \left\{ \sigma_x - \nu (\sigma_y + \sigma_z) \right\} = \frac{1}{10^8} \left\{ 15Z - 150 - 0.25 (15Z - 150 + 25Z - 165) \right\} \\ &= \frac{1}{10^8} (5Z - 71.25) = (5Z - 71.25) \times 10^{-8}\end{aligned}$$

$$\epsilon_y = \frac{1}{E} \left\{ \sigma_y - \nu (\sigma_x + \sigma_z) \right\} = \dots = (5Z - 71.25) \times 10^{-8}$$

$$\begin{aligned}\epsilon_z &= \frac{1}{E} \left\{ \sigma_z - \nu (\sigma_x + \sigma_y) \right\} = \frac{1}{10^8} \left\{ 25Z - 165 - 0.25 \times 2 \times (15Z - 150) \right\} \\ &= (17.5Z - 90) \times 10^{-8}\end{aligned}$$

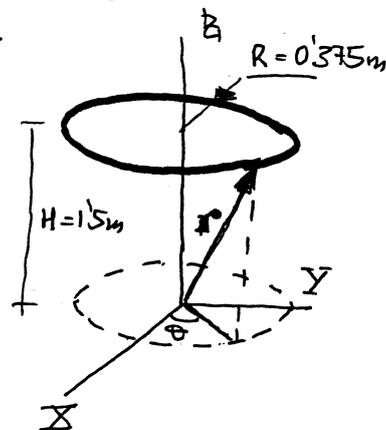
$$\epsilon_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{2G} = 0$$

$$\epsilon_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{2G} = 0$$

$$\epsilon_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{2G} = 0$$

2) Alargamiento del contorno de la base superior del cilindro

La base en cuestión es la circunferencia $\sqrt{x^2 + y^2} = \left(\frac{0.75}{2}\right)^2$
 $R = 1.5$



• Vector posición de un punto genérico de Γ
 (en función del parámetro θ).

$$\mathbf{r} = 0.375 \cos \theta \mathbf{i} + 0.375 \sin \theta \mathbf{j} + 1.5 \mathbf{k}$$

$$d\mathbf{r} = 0.375 (-\sin \theta d\theta \mathbf{i} + \cos \theta d\theta \mathbf{j})$$

$$= \frac{0.375 d\theta}{ds} (-\sin \theta \mathbf{i} + \cos \theta \mathbf{j})$$

$$\mathbf{m} = \frac{d\mathbf{r}}{\|d\mathbf{r}\|} \quad \text{UNITARIO!}$$

• Alargamiento unitario de $d\mathbf{r}$

$$\epsilon = \mathbf{m}^t [E]_{\Gamma} \mathbf{m} = (-\sin \theta, \cos \theta, 0) \begin{bmatrix} 52.7125 & 0 & 0 \\ 0 & 52.7125 & 0 \\ 0 & 0 & 17.52 - 90 \end{bmatrix} \times 10^{-8} \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix}$$

$R = 1.5$

$$= (-\sin \theta, \cos \theta, 0) \begin{bmatrix} -63.75 & 0 & 0 \\ 0 & -63.75 & 0 \\ 0 & 0 & -63.75 \end{bmatrix} \times 10^{-8} \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix} = -63.75 \times 10^{-8}$$

• Alargamiento de la curva Γ

$$\Delta L = \int_{\Gamma} \epsilon ds = \int_0^{2\pi} (-63.75 \times 10^{-8}) \times 0.375 d\theta = 0.375 (-63.75 \times 10^{-8}) [\theta]_0^{2\pi}$$

$$= -1.50 \times 10^{-6} \text{ m.}$$

3) Cambio de volumen.

$$\epsilon = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z = 10^{-8} [2 \times (52.7125) + (17.52 - 90)]$$

$$= 10^{-8} (27.52 - 232.5)$$



$$\begin{aligned}\Delta V &= \int_V e \, dV = \int_V 10^{-8} (27'5 z_1 - 232'5) \, dV \\ &= 27'5 \times 10^{-8} \int_V z_1 \, dV - 232'5 \times 10^{-8} \int_V dV\end{aligned}$$

$$\int_V z_1 \, dV = z_{1G} \cdot V = 0'75 \times (1'5 \times \pi \times 0'375^2) = 0'497 \, \text{m}^4$$

$$\int_V dV = 1'5 \times \pi \times 0'375^2 = 0'663 \, \text{m}^3$$

$$\boxed{\Delta V = (27'5 \times 0'497 - 232'5 \times 0'663) \times 10^{-8} = -1'40 \times 10^{-6} \, \text{m}^3}$$

- Ej. 15 En el ensayo descrito en el ejercicio Ej. 3 se pide averiguar el módulo de elasticidad y el coeficiente de Poisson del material que forma la probeta sabiendo cuanto ha disminuido su volumen, en dos casos: 1) el volumen de la probeta ha disminuido un tres por mil de su valor inicial, y 2) el volumen de la probeta ha disminuido un treinta por ciento de su valor inicial. SUGERENCIA: La segunda condición a considerar, además de la impuesta por el cambio de volumen, es que las fibras inicialmente paralelas a los ejes X o Y no cambian de longitud, pues aunque por efecto Poisson tienden a alargarse, el recipiente se lo impide.

EJERCICIO CITADO

- Ej. 3. Una máquina de ensayo está formada por un recipiente metálico, cuyo hueco interior es un prisma recto de 20×20 cm de base y 50 cm de altura, y un émbolo de 20×20 cm de base con el que presionar la muestra que se esté analizando. Se introduce en ella una probeta cúbica —de 20 cm de arista— de cierto material, apoyada sobre el fondo, y se somete a presión accionando el émbolo. El estado tensional en la probeta, referido al sistema cartesiano dextrógiro definido en la figura —cuyo origen es el centro de la base—, viene dado por las expresiones:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \sigma_y = 0'015Z - 50'003 && \text{MPa} \\ \sigma_z &= 0'03Z - 100'006 && \text{MPa} \\ \tau_{xy} &= \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0\end{aligned}$$

donde las coordenadas intervienen en metros.

Se desea conocer: 1) las fuerzas de volumen que solicitan al cuerpo; 2) su peso específico; 3) las fuerzas de superficie sobre cada una de sus caras; y 4) la fuerza F que se ejerce sobre el émbolo.

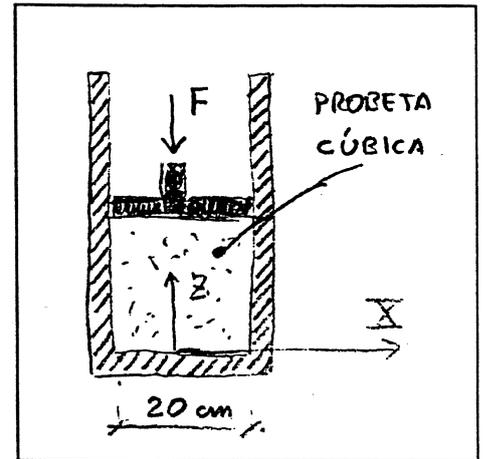


Figura Ej. 3

PRIMER CASO $\Delta V = -0'003 V$

Cambio de volumen unitario $\rightarrow e = \frac{\sigma_m}{K}$

$$\sigma_m = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = 0'06Z - 200'012 \quad \text{MPa}$$

$$e = \frac{0'06Z - 200'012}{K}$$

$$\Delta V = \int_V e \, dV = \frac{0'06}{K} \int_V Z \, dV - \frac{200'012}{K} \int_V dV$$

$$= \frac{0'06}{K} z_a \cdot V - \frac{200'012}{K} V = \frac{0'06}{K} \times 0'1 V - \frac{200'012}{K} V$$

$$= \frac{0'006}{K} V - \frac{200'012}{K} V = -200'006 \frac{V}{K}$$

$$\Delta V = -0'003 V$$

$$\Rightarrow -0'003 V = -200'006 \frac{V}{K} \Rightarrow K = 66.669 \text{ MPa}$$



Alargamiento fibra paralela al eje X unit. \rightarrow Fibra $\begin{cases} Y = Y_0 \\ Z = Z_0 \end{cases}$

$$\epsilon_x = \frac{1}{E} \{ \sigma_x - \nu (\sigma_y + \sigma_z) \} = \frac{1}{E} \{ 0'015Z - 50'003 - \nu (0'045Z - 150'009) \}$$

$$\Delta L = \int_{-0'1}^{0'1} \epsilon_x dX = \int_{-0'1}^{0'1} \frac{1-3\nu}{E} 0'015Z dX - \frac{1-3\nu}{E} \int_{-0'1}^{0'1} 50'003 dX$$

$$= \frac{1-3\nu}{E} \left\{ (0'015Z - 50'003) \cdot X \right\}_{-0'1}^{0'1} = 0 \Rightarrow \frac{1-3\nu}{E} = 0$$

$$1-3\nu = 0 \Rightarrow \nu = \frac{1}{3}$$

$$K = \frac{E}{3(1-2\nu)} = \frac{E}{3(1-\frac{2}{3})} = \frac{E}{3\frac{1}{3}} = E$$

Solución $E = 66.669 \text{ MPa}$, $\nu = 1/3$

SEGUNDO CASO. $\Delta V = -0'30 V$

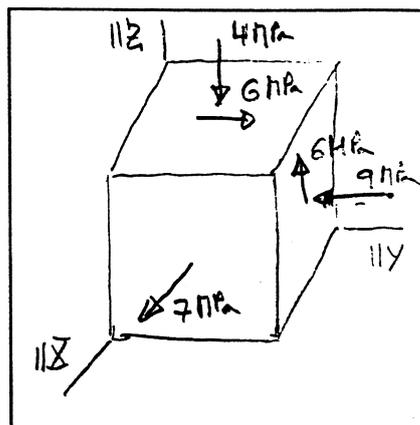
Una variación de volumen del 30% no es una deformación pequeña ni es el resultado de desplazamientos pequeños. Así pues, una de las hipótesis fundamentales en las que se basa la Teoría de la Elasticidad lineal que estamos estudiando, la de pequeños desplazamientos, no se cumple en este caso. Así pues, EL PROBLEMA PLANTEADO NO PUEDE RESOLVERSE EN EL MARCO DE LA TEORÍA QUE ESTAMOS DESARROLLANDO.



- Ej. 16 El cuerpo del ejercicio Ej. 6 está formado por una material de módulo de elasticidad 20.000 MPa y coeficiente de Poisson 0'2. Se pide calcular: 1) el tensor de deformaciones en él, y 2) las deformaciones principales y las direcciones principales de deformación. Compare los resultados con los del ejercicio Ej. 6 y compruebe: 1) que las direcciones principales de tensión y deformación coinciden, y 2) que las tensiones y deformaciones principales están relacionadas por la Ley de Hooke Generalizada.

EJERCICIO QUE SE CITA:

- Ej. 6 El esquema adjunto representa el estado tensional en un punto P del interior de cierto sólido. Se desea conocer 1) los valores máximo y mínimo de la tensión normal en P , y los planos sobre los que se alcanzan; 2) el valor medio de la tensión normal en dicho punto, y 3) el valor máximo de la tensión tangencial en P , y el plano sobre el que se alcanza.



a) Tensor de tensiones

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & -9 & 6 \\ 0 & 6 & -4 \end{bmatrix} \text{ MPa}$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} = \frac{20.000}{2(1+0'2)} \\ = 8333 \text{ MPa.}$$

1) Tensor de deformaciones:

$$\epsilon_x = \frac{1}{E} \{ \sigma_x - \nu (\sigma_y + \sigma_z) \} = \frac{1}{20.000} (7 - 0'2(-9 - 4)) = 4'8 \times 10^{-4}$$

$$\epsilon_y = \frac{1}{E} \{ \sigma_y - \nu (\sigma_x + \sigma_z) \} = \frac{1}{20.000} (-9 - 0'2(7 - 4)) = -4'8 \times 10^{-4}$$

$$\epsilon_z = \frac{1}{E} \{ \sigma_z - \nu (\sigma_x + \sigma_y) \} = \frac{1}{20.000} (-4 - 0'2(7 - 9)) = -1'8 \times 10^{-4}$$

$$\epsilon_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{2G} = 0$$

$$\epsilon_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{2G} = 0$$

$$\epsilon_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{2G} = \frac{6}{\frac{2 \times 20.000}{2 \times 1'2}} = 3'6 \times 10^{-4}$$

2) Deformaciones principales y direc. principales de deformación.

$$\begin{vmatrix} 4'8 \times 10^{-4} - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & -4'8 \times 10^{-4} - \lambda & 3'6 \times 10^{-4} \\ 0 & 3'6 \times 10^{-4} & -1'8 \times 10^{-4} - \lambda \end{vmatrix} \stackrel{\lambda = \xi \times 10^{-4}}{=} 10^{-12} \begin{vmatrix} 4'8 - \xi & 0 & 0 \\ 0 & -4'8 - \xi & 3'6 \\ 0 & 3'6 & -1'8 - \xi \end{vmatrix} = 0$$

$$(4'8 - \xi) [8'64 + 6'6\xi + \xi^2 - 12'96] = (4'8 - \xi) (\xi^2 + 6'6\xi - 4'32) = 0$$

$$\xi = 4'8 \quad \xi = \frac{-6'6 \pm \sqrt{6'6^2 + 17'28}}{2} = \begin{cases} 0'6 \\ -7'2 \end{cases}$$

$$\varepsilon_I = 4'8 \times 10^{-4} \quad \varepsilon_{II} = 0'6 \times 10^{-4} \quad \varepsilon_{III} = -7'2 \times 10^{-4}$$

$$m_I = i$$

Vector propio correspondiente a ε_{II}

$$(4'8 - 0'6) \times 10^{-4} m_1 = 0 \quad \rightarrow \quad m_1 = 0$$

$$(-4'8 - 0'6) \times 10^{-4} m_2 + 3'6 \times 10^{-4} m_3 = 0 \quad \rightarrow \quad -5'4 m_2 + 3'6 m_3 = 0$$

$$m_2 = \frac{3'6}{5'4} m_3 = \frac{2}{3} m_3$$

$$m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 = 1 \quad \rightarrow \quad 0 + \frac{4}{9} m_3^2 + m_3^2 = 1 \quad m_3 = \pm \sqrt{\frac{9}{13}} = 0'832$$

$$m_{II} = 0'555 j + 0'832 k$$

$$m_{III} = m_I \times m_{II} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0'555 & 0'832 \end{vmatrix} = -0'832 j + 0'555 k$$

Comparación con los resultados del ejercicio Ej. 6.

$$m_I = i \quad = m_I$$

$$m_{II} = \sqrt{\frac{4}{13}} j + \sqrt{\frac{9}{13}} k = 0'555 j + 0'832 k \quad = m_{II}$$

$$m_{III} = -\sqrt{\frac{9}{13}} j + \sqrt{\frac{4}{13}} k = -0'832 j + 0'555 k \quad = m_{III}$$



Comparación tensiones y def. pples.

$$\sigma_I = 7 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{II} = 0$$

$$\sigma_{III} = -13 \text{ MPa}$$

$$\epsilon_I = \frac{1}{E} \left\{ \sigma_I - \nu (\sigma_{II} + \sigma_{III}) \right\} = \frac{1}{20.000} \left\{ 7 - 0,2 (-13) \right\} = 4,8 \times 10^{-4} \quad \text{OK.}$$

$$\epsilon_{II} = \frac{1}{E} \left\{ \sigma_{II} - \nu (\sigma_I + \sigma_{III}) \right\} = \frac{1}{20.000} \left\{ 0 - 0,2 (7 - 13) \right\} = 6 \times 10^{-5} \quad \text{OK}$$

$$\epsilon_{III} = \frac{1}{E} \left\{ \sigma_{III} - \nu (\sigma_I + \sigma_{II}) \right\} = \frac{1}{20.000} \left\{ -13 - 0,2 (7) \right\} = -7,2 \times 10^{-4} \quad \text{OK}$$

Queda, pues, comprobado que las direcciones principales de tensión y deformación coinciden y que las def. principales se pueden obtener, a partir de las tens. principales, mediante la ley de Hooke Generalizada. También puede procederse al contrario

$$e = \epsilon_I + \epsilon_{II} + \epsilon_{III} = -1,8 \times 10^{-4}$$

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} = \frac{0,2 \times 20.000}{1,2 \times 0,6} = 5556 \text{ MPa}$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} = \frac{20.000}{2 \times 1,2} = 8333 \text{ MPa}$$

$$\sigma_I = \lambda e + 2G \epsilon_I = 5556 \times (-1,8 \times 10^{-4}) + 16667 \times 4,8 \times 10^{-4} = 7 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{II} = \lambda e + 2G \epsilon_{II} = 5556 \times (-1,8 \times 10^{-4}) + 16667 \times 0,6 \times 10^{-4} = -6 \times 10^{-5} \approx 0$$

$$\sigma_{III} = \lambda e + 2G \epsilon_{III} = 5556 \times (-1,8 \times 10^{-4}) + 16667 \times (-7,2 \times 10^{-4}) = -13 \text{ MPa}$$

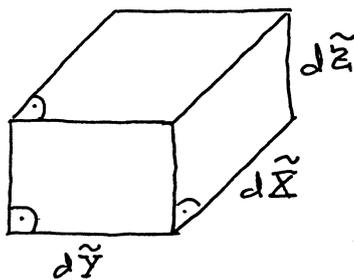
Correcto.

- Ej. 17. Demuestre que la deformación cúbica e queda definida por el primer invariante de deformaciones. Para ello, trabajando en ejes principales, considere un diferencial de volumen de aristas paralelas a los ejes, determine cual es su volumen antes y después de la deformación, sustituya estos parámetros en la definición de e y simplifique teniendo en cuenta la hipótesis de pequeños desplazamientos.

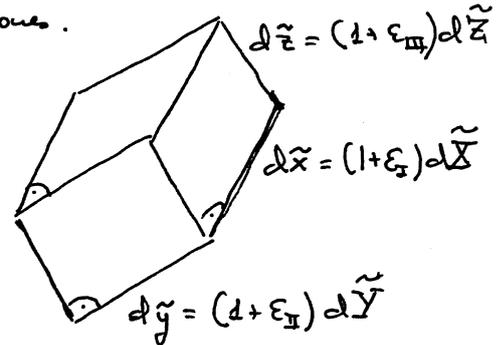
Por definición $e = \frac{dV - dV_0}{dV_0}$, siendo:

dV_0 el diferencial de volumen en la configuración inicial, y
 dV el volumen del prisma imagen de dV_0 en la configuración deformada (que representa un diferencial de volumen en esta).

En el punto P consideremos un prisma elemental, de aristas $d\tilde{X}$, $d\tilde{Y}$ y $d\tilde{Z}$, paralelas a las direcciones principales en P . Como estas son perpendiculares entre sí, se tratará de un prisma recto. Su imagen en la configuración deformada será un prisma recto de aristas $d\tilde{x} = (1 + \epsilon_I) d\tilde{X}$, $d\tilde{y} = (1 + \epsilon_{II}) d\tilde{Y}$ y $d\tilde{z} = (1 + \epsilon_{III}) d\tilde{Z}$, donde $\epsilon_I, \epsilon_{II}, \epsilon_{III}$ son las deformaciones principales en P . Esto se deduce de la interpretación física de las componentes del tensor de deformaciones.



CONFIGURACIÓN INICIAL



CONFIGURACIÓN DEFORMADA

$$dV_0 = d\tilde{X} d\tilde{Y} d\tilde{Z}$$

$$dV = d\tilde{x} d\tilde{y} d\tilde{z} = (1 + \epsilon_I) d\tilde{X} (1 + \epsilon_{II}) d\tilde{Y} (1 + \epsilon_{III}) d\tilde{Z}$$

$$= (1 + \epsilon_I + \epsilon_{II} + \epsilon_{III} + \underbrace{\epsilon_I \epsilon_{II}}_0 + \underbrace{\epsilon_I \epsilon_{III}}_0 + \underbrace{\epsilon_{II} \epsilon_{III}}_0 + \underbrace{\epsilon_I \epsilon_{II} \epsilon_{III}}_0) d\tilde{X} d\tilde{Y} d\tilde{Z}$$

$$= (1 + \epsilon_I + \epsilon_{II} + \epsilon_{III}) dV_0 \quad \text{Infinitésimos de orden superior}$$



$$e = \frac{dv - dV}{dV} = \frac{(1 + \epsilon_I + \epsilon_{II} + \epsilon_{III})dV - dV}{dV} = \epsilon_I + \epsilon_{II} + \epsilon_{III}$$

Como $\epsilon_I + \epsilon_{II} + \epsilon_{III} = \text{tr}(\mathbf{E})$ es un invariante

$$e = \epsilon_I + \epsilon_{II} + \epsilon_{III} = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z$$

c. q. d.

Nótese que, si hubieramos partido de un prisma recto elemental $dX dY dZ$ cualquiera, su imagen en configuración deformada — hubiera sido un prisma oblicuo, como consecuencia de la distorsión angular. Por lo tanto su volumen no hubiera sido, simplemente, el producto de las longitudes de sus aristas, y la demostración hubiese resultado mas complicada. Para eludir esta dificultad se ha partido de un prisma elemental de aristas paralelas a los ejes principales.



EJERCICIO Nº 18

EN UN PUNTO P DEL INTERIOR DE UNA LAJA, QUE SE HALLA EN ESTADO DE TENSIÓN PLANA POR LA ACCIÓN DE CIERTAS FUERZAS EXTERIORES, SE SABE QUE EL TENSOR DE TENSIONES BIDIMENSIONAL ES

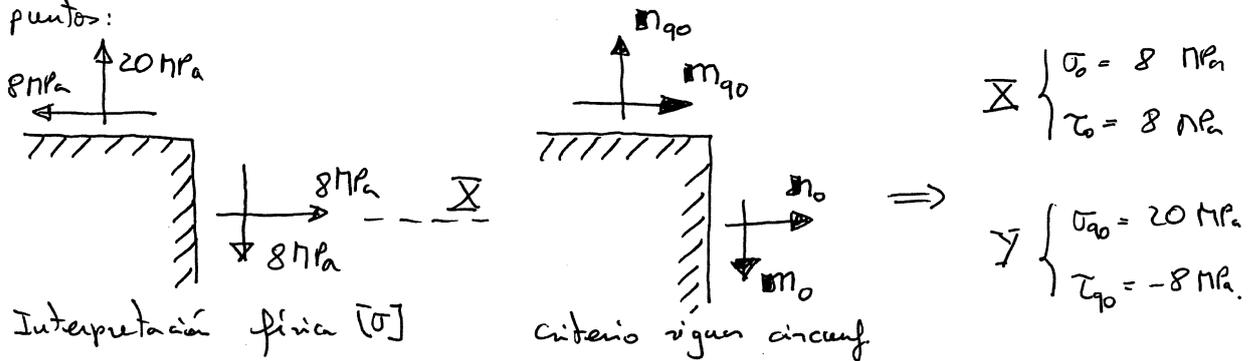
$$[\sigma] = \begin{bmatrix} 8 & -8 \\ -8 & 20 \end{bmatrix} \text{ MPa}$$

RESPECTO AL ESTADO TENSIONAL EN EL PLANO DEL PROBLEMA BIDIMENSIONAL, SE PIDE:

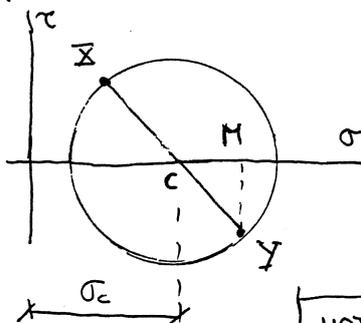
- 1.- DIBUJAR LA CIRCUNFERENCIA DE MOHR.
- 2.- DETERMINAR LAS TENSIONES Y DIRECCIONES PRINCIPALES.
- 3.- HALLAR LOS VECTORES TENSIÓN CUYA COMPONENTE TANGENCIAL ES $\tau_{\max, 2D}$ Y LA ORIENTACIÓN DE LOS PLANOS SOBRE LOS QUE ACTÚAN.
- 4.- CALCULAR EL VECTOR TENSIÓN SOBRE EL PLANO CUYO ^{VECTOR} NORMAL EXTERIOR ES $n = \frac{1}{2} i + \frac{\sqrt{3}}{2} j$
- 5.- OBTENER EL VECTOR TENSIÓN SOBRE EL PLANO CUYA NORMAL FORMA 35° CON LA DIRECCIÓN PRINCIPAL MENOR.
- 6.- DETERMINAR, SI EXISTEN, LOS VECTORES TENSIÓN CUYA COMPONENTE NORMAL ES 20 MPa , Y LAS ORIENTACIONES DE LOS PLANOS SOBRE LOS QUE ACTÚAN.
- 7.- DETERMINAR, SI EXISTEN, LOS VECTORES TENSIÓN CUYA COMPONENTE TANGENTE ES -1 MPa , Y LAS ORIENTACIONES DE LOS PLANOS EN QUE ACTÚAN.
- 8.- DETERMINAR, SI EXISTEN, LOS VECTORES TENSIÓN CUYO MÓDULO ES 15 MPa , Y LAS ORIENTACIONES DE LOS PLANOS SOBRE LOS QUE ACTÚAN.
- 9.- OBTENER EL VECTOR TENSIÓN QUE FORMA EL MÁXIMO ÁNGULO CON LA NORMAL AL PLANO SOBRE EL QUE ACTÚA - CONSIDÉRESE EL ÁNGULO EN VALOR ABSOLUTO -.
- 10.- DIBUJAR EL CÍRCULO DE MOHR QUE REPRESENTA EL ESTADO TENSIONAL COMPLETO.

1) DIBUJAR LA CIRCUNFERENCIA DE MOHR.

da interpretación física de los componentes del tensor de tensiones proporcional a los componentes cartesianos de los vectores tensión sobre los planos normales a los ejes X e Y , que en este caso coinciden con sus componentes intrínsecas. Dando un signo a estas últimas de acuerdo con el criterio propio de la circunferencia de Mohr, se tienen las coordenadas de dos de sus puntos:



Dibujamos los puntos $X(\sigma_0, \tau_0)$ e $Y(\sigma_{90}, \tau_{90})$ en el plano de Mohr. Como para pasar de σ_0 a σ_{90} hay que girar 90° en sentido antihorario, para pasar de CX a CY - C es el centro de la circunferencia - habrá que girar 180° en el mismo sentido. Esto significa que X e Y son los extremos de un diámetro, y por lo tanto C es el punto medio del segmento XY . Además, como el centro de la circunferencia de Mohr debe estar sobre el eje de abscisas, C debería cumplir esta condición; comprobamos que es así. En consecuencia:



$$C(\sigma_c, 0), \quad \sigma_c = \frac{\sigma_0 + \sigma_{90}}{2} = \frac{8 + 20}{2} = 14 \text{ MPa}$$

Triángulo CHY

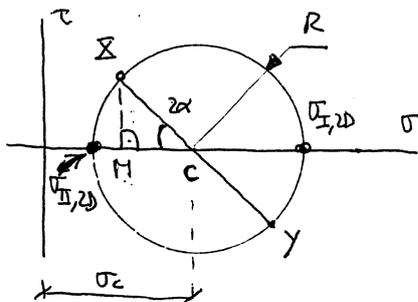
$$CY^2 = R^2 = HY^2 + CH^2 = 8^2 + 6^2 = 100$$

$$R = 10 \text{ MPa}$$

NOTA IMPORTANTE: EL PROBLEMA PUEDE RESOLVERSE DIBUJANDO A ESCALA Y MIDIENDO. COMO ELLO NO PRESENTA NINGUNA DIFICULTAD, SOLO SE DESARROLLA LA OBTENCIÓN DE LOS DISTINTOS PARÁMETROS RESOLVIENDO TRIÁNGULOS, PERO CUALQUIERA DE LAS DOS OPCIONES ES CORRECTA.

2) DETERMINAR LAS TENSIONES Y DIRECCIONES PRINCIPALES.

Vectores tensión sobre planos principales $\Leftrightarrow \tau = 0 \Rightarrow$ puntos de corte de la circunferencia con los ejes.



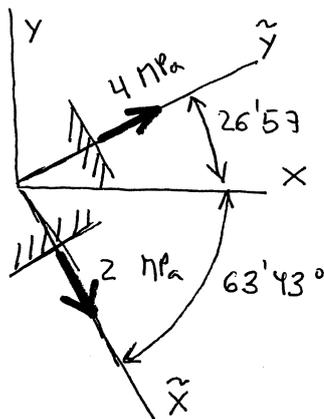
$$\sigma_{I,2D} = \sigma_c + R = 14 + 10 = 24 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{II,2D} = \sigma_c - R = 14 - 10 = 4 \text{ MPa}$$

Triángulo CXM

$$2\alpha = \text{arc tg } \frac{MX}{MC} = \text{arc tg } \frac{8}{6} = 53'13''$$

$$\alpha = 26'57''$$

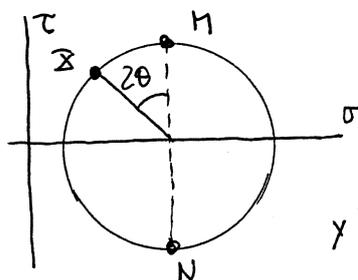


\tilde{X} dirección principal mayor, 2D.
 \tilde{Y} " " menor, 2D.

Presentación gráfica de los resultados.
Facilita su comprensión.

3) VECTORES TENSION CUYA COMPONENTE TANGENTE ES $\tau_{max,2D}$.

Valores extremos de τ en la circunferencia \rightarrow extremos del diámetro vertical.

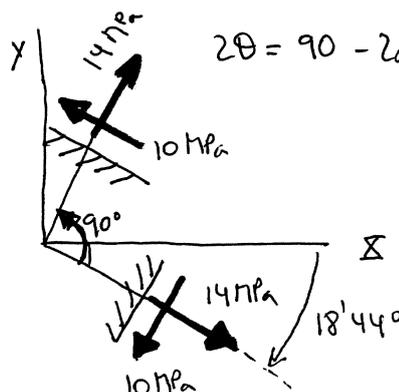


$$\tau_{max,2D} = R = 10 \text{ MPa}$$

$$M(\sigma_c, R) \rightarrow \sigma_M = 14 \text{ MPa}, \tau_M = 10 \text{ MPa}$$

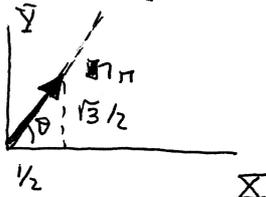
$$N(\sigma_c, -R) \rightarrow \sigma_N = 14 \text{ MPa}, \tau_N = -10 \text{ MPa}$$

$$2\theta = 90 - 2\alpha = 36'87'' \quad \theta = 18'44''$$



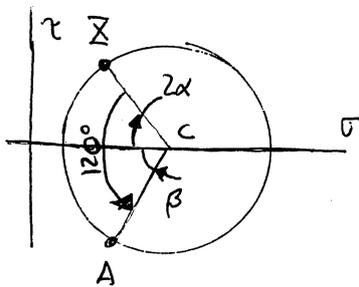
4.- VECTOR TENSION SOBRE π / $n = \frac{1}{2} i + \frac{\sqrt{3}}{2} j$

Utilizaremos la propiedad de que el radio gira, en la circunferencia de Mohr, el doble que el vector normal exterior en la realidad.



$$\theta = \arctan \frac{\sqrt{3}/2}{1/2} = \arctan \sqrt{3} = 60^\circ$$

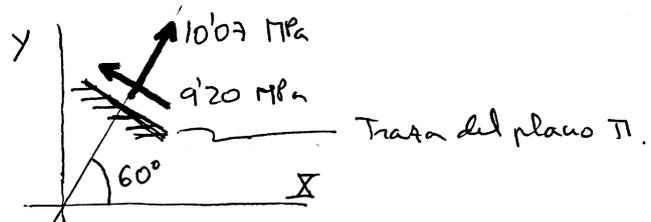
Vector tensión sobre el plano $\pi \equiv$ punto A obtenido girando $2\theta = 120^\circ$ el radio CX.



$$\beta = 120^\circ - 2\alpha = 120^\circ - 53'13'' = 66'87''$$

$$\sigma_A = \sigma_c - R \cos \beta = 10'07 \text{ MPa}$$

$$\tau_A = -R \sin \beta = -9'20 \text{ MPa}$$



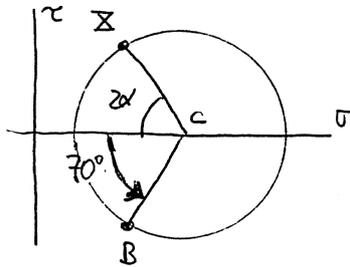
Si vos hubieran pedido componentes cartesianas (como el enunciado no lo especifica, podemos dar las intrínsecas como respuesta) operaríamos del modo siguiente

$$t_{60} = 10'07 n_{60} - 9'20 m_{60}$$

$$\left. \begin{aligned} n_{60} &= \cos 60 i + \sin 60 j = \frac{1}{2} i + \frac{\sqrt{3}}{2} j \\ m_{60} &= \sin 60 i - \cos 60 j = \frac{\sqrt{3}}{2} i - \frac{1}{2} j \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow t_{60} &= 10'07 \left(\frac{1}{2} i + \frac{\sqrt{3}}{2} j \right) - 9'20 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} i - \frac{1}{2} j \right) \\ &= -2'93 i + 13'32 j \text{ MPa} \end{aligned}$$

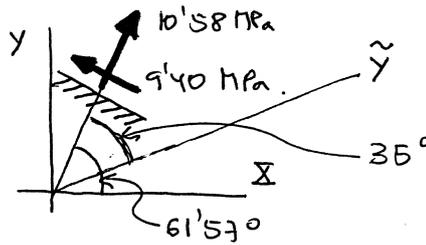
5.- VECTOR TENSION SOBRE π / π_n FORMA 35° CON \tilde{y}



$$2\Theta = 2\alpha + 2 \cdot 35 = 123'13^\circ \quad \Theta = 61'53^\circ$$

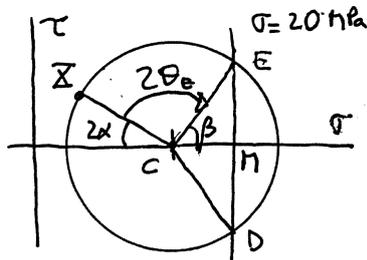
$$\sigma_B = \sigma_c - R \cos 70 = 10'58 \text{ MPa}$$

$$\tau_B = -R \sin 70 = -9'40 \text{ MPa}$$



6.- VECTORES TENSION DE COMPONENTE NORMAL 20 MPa.

$\sigma = 20 \text{ MPa}$ es una recta paralela al eje de ordenadas en el plano σ - τ . Su intersección con la circunferencia resuelve el problema.



$$CH = 20 - 14 = 6 \text{ MPa}$$

$$CE = R = 10 \text{ MPa}$$

$$\beta = \arccos \frac{CH}{CE} = \arccos \frac{6}{10} = 53'13^\circ$$

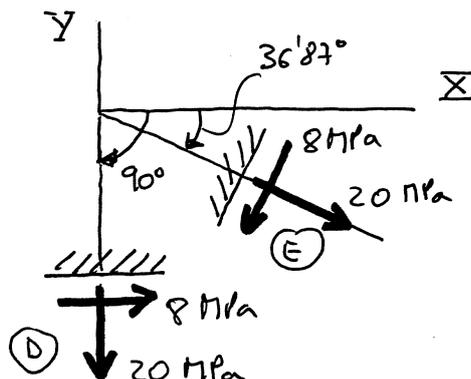
$$\sigma_E = \sigma_D = \sigma_c + R \cos \beta = 20 \text{ MPa}$$

$$\tau_E = R \sin \beta = 8 \text{ MPa}$$

$$\tau_D = -R \sin \beta = -8 \text{ MPa}$$

$$2\Theta_E = -(180 - \beta - 2\alpha) = -73'74^\circ \quad \Rightarrow \quad \Theta_E = -36'87^\circ$$

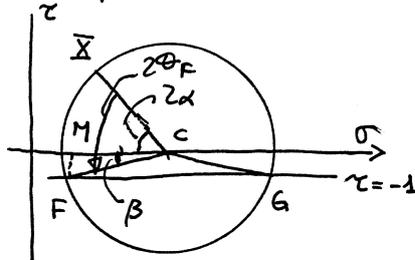
$$2\Theta_D = -(2\Theta_E + 2\beta) = -180^\circ \quad \Rightarrow \quad \Theta_D = -90^\circ$$





7.- VECTORES TENSIÓN DE COMPONENTE TANGENTE -1 MPa.

$\tau = -1$ es una recta paralela al eje de abscisas, cuya intersección con la circunferencia resuelve el problema.



CMF es un triángulo rectángulo.

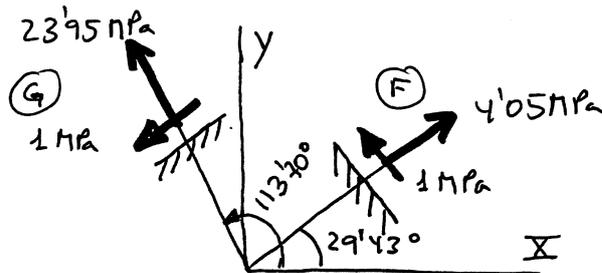
$$\sin \beta = \frac{MF}{CF} = \frac{MF}{R} = \frac{1}{10} \quad \beta = 5'74''$$

$$\sigma_F = \sigma_C - R \cos \beta = 4'05 \text{ MPa}$$

$$\sigma_G = \sigma_C + R \cos \beta = 23'95 \text{ MPa}$$

$$2\theta_F = 2\alpha + \beta = 58'87'' \quad \theta_F = 29'43''$$

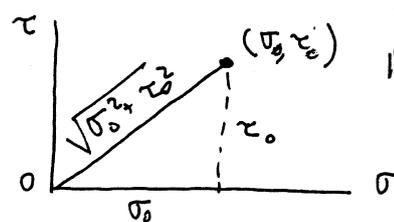
$$2\theta_G = 2\alpha + 180 - \beta = 227'39'' \quad \theta_G = 113'70''$$



8.- VECTORES TENSIÓN DE MÓDULO 15 MPa.

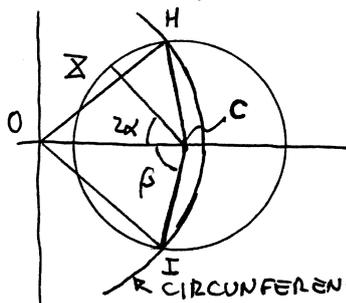
El esquema adjunto justifica que, en el plano de Mohr, el módulo de un vector tensión está determinado por la distancia al origen de coordenadas del punto que lo representa. En consecuencia,

la solución de nuestro problema está determinada ya la intersección entre la circunferencia de centro el origen y radio 15 MPa y la de Mohr.



$$\tau_0 = \sigma_0 \sin \beta + \tau_0 \cos \beta$$

$$|\tau_0| = \sqrt{\sigma_0^2 + \tau_0^2}$$



Triángulo OCI $OI^2 = OC^2 + CI^2 - 2 \cdot OC \cdot CI \cos \beta$

$$15^2 = 14^2 + 10^2 - 2 \times 14 \times 10 \cos \beta$$

$$\cos \beta = 0'253571 \quad \beta = 75'31''$$

$$\sigma_H = \sigma_I = \sigma_C - R \cos \beta = 11'46 \text{ MPa}$$

$$\tau_H = R \sin \beta = 9'67 \text{ MPa}$$

$$\tau_I = -R \sin \beta = -9'67 \text{ MPa}$$

U47

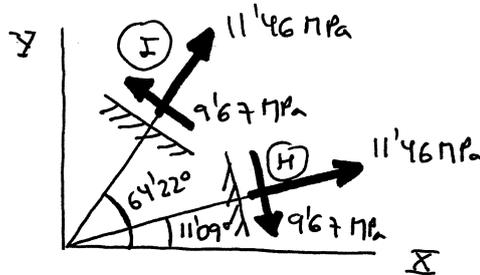


$$2\theta_H = \beta - 2\alpha = -22'18''$$

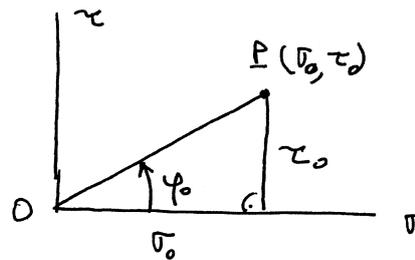
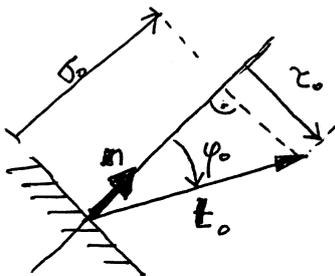
$$\theta_H = 11'09''$$

$$2\theta_I = \beta + 2\alpha = 128'44''$$

$$\theta_I = 64'22''$$

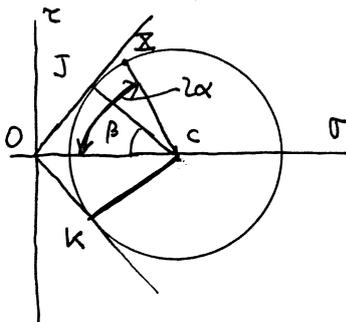


9.- VECTOR TENSIÓN QUE FORMA EL MÁXIMO ÁNGULO CON n CORRESPONDIENTE.



Los esquemas anteriores muestran el ángulo φ_0 que forma un vector tensión con la normal al plano sobre el que actúa coincide con el que forman, en el plano de Mohr, el segmento OP — O = origen de coordenadas, P = punto que representa al vector tensión considerado — con el eje de abscisas. Nótese que estos ángulos SE MIDEN EN SENTIDOS CONTRARIOS.

De esto se deduce que los vectores tensión pedidos corresponden a los puntos de tangencia con la circunferencia de Mohr de las tangentes a la misma trazadas por el origen de coordenadas.



Triángulo OJC

$$\beta = \arccos \frac{JC}{OC} = \arccos \frac{10}{14} = 44'42''$$

$$\sigma_J = \sigma_K = \sigma_c - R \cos \beta = 6'86 \text{ MPa}$$

$$\tau_J = R \sin \beta = 7'00 \text{ MPa}$$

$$\tau_K = -R \sin \beta = -7'00 \text{ MPa}$$

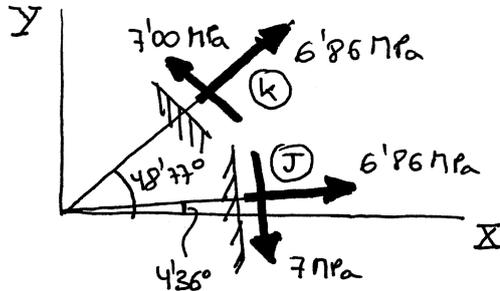
$$2\theta_J = 2\alpha - \beta = 8'71''$$

$$\theta_J = 4'36''$$

$$2\theta_K = 2\alpha + \beta = 97'55''$$

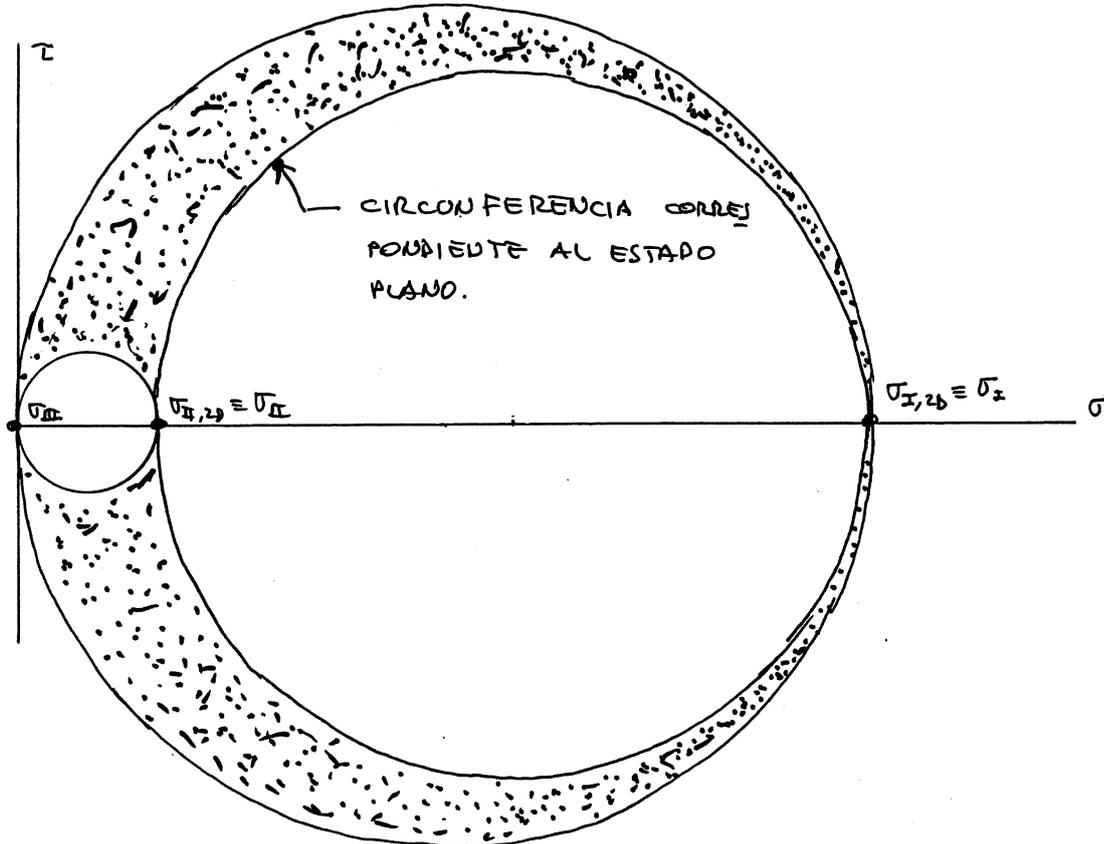
$$\theta_K = 48'77''$$

U48



10.- CÍRCULO DE MOHR.

$$\tau_z = 0 \Rightarrow \sigma_x = \sigma_{I,2} = 24 \text{ MPa}, \quad \sigma_{II} = \sigma_{II,2} = 4 \text{ MPa}, \quad \sigma_{III} = 0.$$

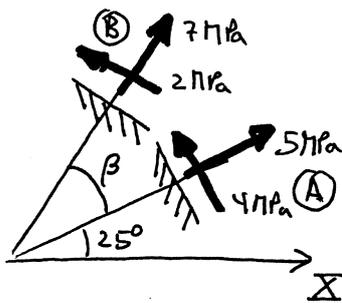


Para terminar, se incluye en la página siguiente la circunferencia, dibujada a escala, con los puntos solución de los distintos apartados señalados con la misma letra que en lo anterior, para mostrar que el problema también puede resolverse midiendo sobre ella.

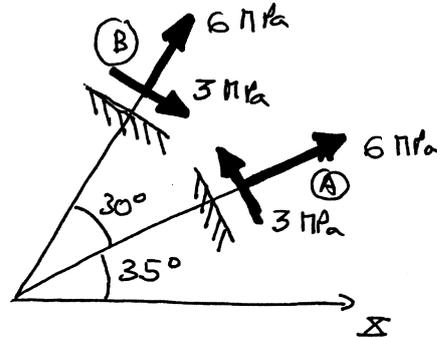


EJERCICIO Nº 19

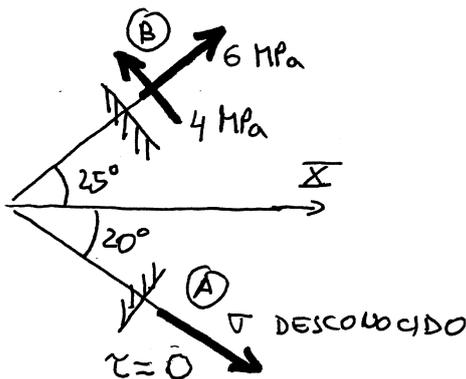
A CONTINUACIÓN SE DEFINEN UNA SERIE DE ESTADOS TENSIONALES CORRESPONDIENTES A PROBLEMAS PLANOS. PARA CADA UNO DE ELLOS SE PIDE: 1) DIBUJAR LA CIRCUNFERENCIA DE MOHR DEL ESTADO PLANO; 2) SITUAR SOBRE ELLA EL PUNTO $X(\sigma_0, \tau_0)$; 3) DIBUJAR EL CÍRCULO DE MOHR DEL ESTADO TENSIONAL 3D, SUPONIENDO QUE EL INICIALMENTE DEFINIDO ERA DE TENSIÓN PLANA; Y 4) DIBUJAR EL CÍRCULO DE MOHR DEL ESTADO TENSIONAL 3D, SUPONIENDO QUE EL DADO ERA DE DEFORMACIÓN PLANA. EN ESTE CASO, $\nu_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y) = \nu(\sigma_{I,2D} + \sigma_{II,2D})$; TÓMESE QUE EL COEFICIENTE DE POISSON ν VALE 0,25.



ESTADO 1
(DETERMÍNESE, TAMBIÉN, EL ÁNGULO β)



ESTADO 2

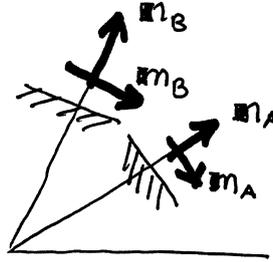
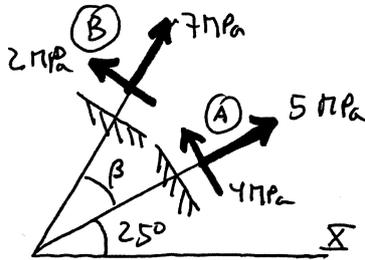


ESTADO 3

ESTADO 4) $\sigma_{I,2D} = -3 \text{ MPa}$, $\sigma_{II,2D} = -6 \text{ MPa}$

ESTADO 5) $\sigma_{z,2D} = \sigma_{II,2D} = -4 \text{ MPa}$.

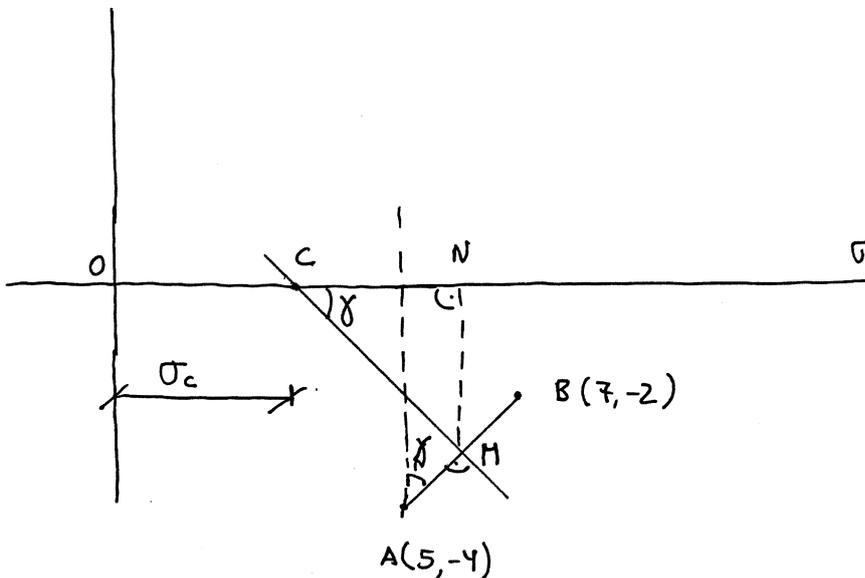
ESTADO 1



$$\Rightarrow \begin{cases} A \\ B \end{cases} \begin{cases} \sigma_A = 5 \text{ MPa} \\ \tau_A = -4 \text{ MPa} \\ \sigma_B = 7 \text{ MPa} \\ \tau_B = -2 \text{ MPa} \end{cases}$$

CRITERIO DE SIGNOS

Conocemos dos puntos, $A(5, -4)$ y $B(7, -2)$, que pertenecen a la circunferencia de Mohr. El lugar geométrico de los centros de la circunferencia que pasan por A y por B es la mediatriz del segmento AB. Por otra parte, el centro de la circunferencia de Mohr debe estar sobre el eje de abscisas. La intersección de los dos rectos donde debe situarse determina el centro C de la circunferencia.



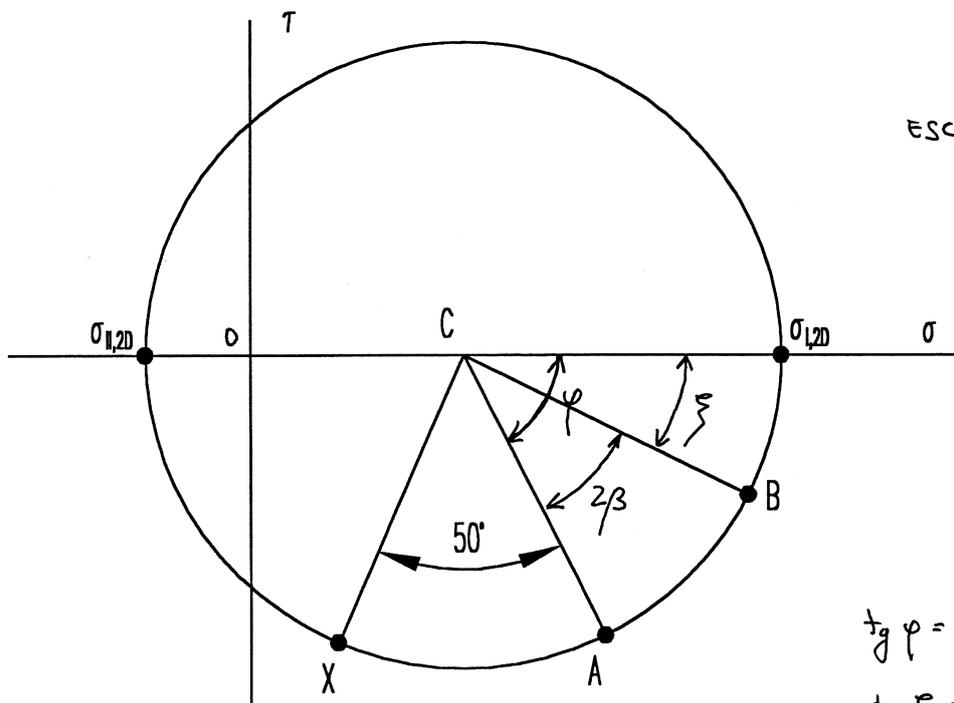
$$N = \text{punto medio de } AB = (6, -3)$$

$$\gamma = \arctan \frac{\sigma_B - \sigma_A}{\tau_B - \tau_A} = \arctan \frac{2}{2} = 45^\circ$$

$$\text{Triángulo } CNM \Rightarrow \tan \gamma = 1 = \frac{MN}{CN} \Rightarrow CN = 3 \text{ MPa}$$

$$\sigma_C = ON - CN = 6 - 3 = 3 \text{ MPa}$$

$$R = d(C, B) = \sqrt{(7-3)^2 + 2^2} = \sqrt{20} \text{ MPa} = 4.47 \text{ MPa}$$



ESCALA 1 = 1

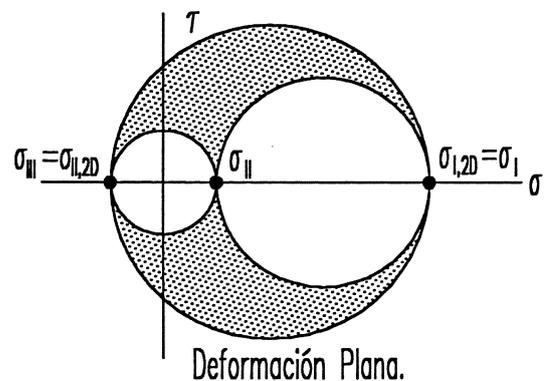
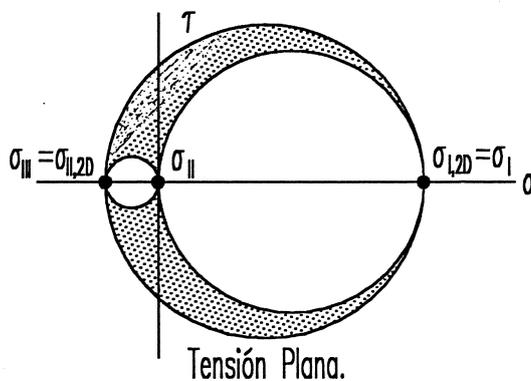
$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \varphi &= \frac{|\tau_A|}{\sigma_A - \sigma_C}, \quad \varphi = 63'43'' \\ \operatorname{tg} \xi &= \frac{|\tau_B|}{\sigma_B - \sigma_C}, \quad \xi = 26'57'' \\ 2\beta &= 36'86'' \\ \beta &= \underline{\underline{18'43''}} \end{aligned}$$

$$\sigma_{I,2D} = \sigma_C + R = 3 + 4'47 = 7'77 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{II,2D} = \sigma_C - R = -1'47 \text{ MPa}$$

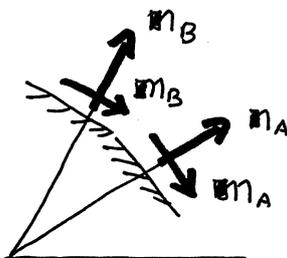
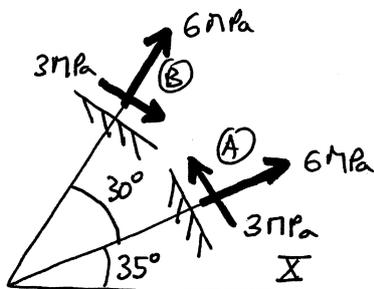
$$\text{TENSIÓN PLANA} \rightarrow \sigma_z = 0$$

$$\text{DEFORMACIÓN PLANA} \rightarrow \epsilon_z = 0'25 (\sigma_{I,2D} + \sigma_{II,2D}) = 1'5 \text{ MPa}$$



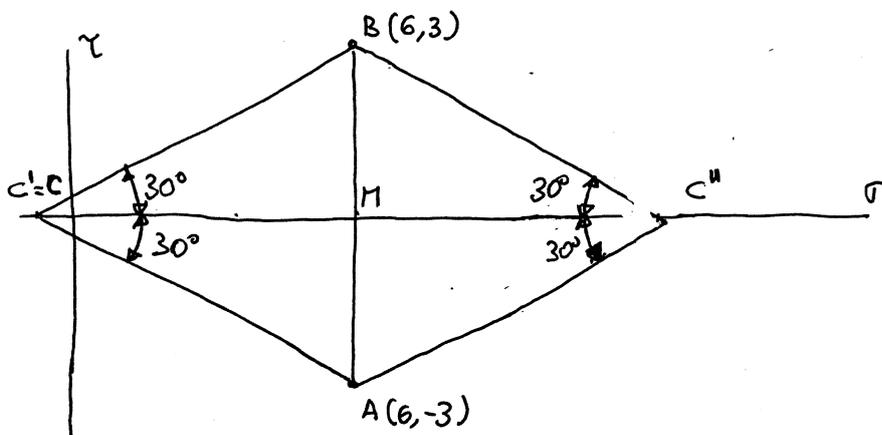


ESTADO 2.



$$A \begin{cases} \sigma_A = 6 \text{ MPa} \\ \tau_A = -3 \text{ MPa} \end{cases}$$

$$B \begin{cases} \sigma_B = 6 \text{ MPa} \\ \tau_B = 3 \text{ MPa} \end{cases}$$

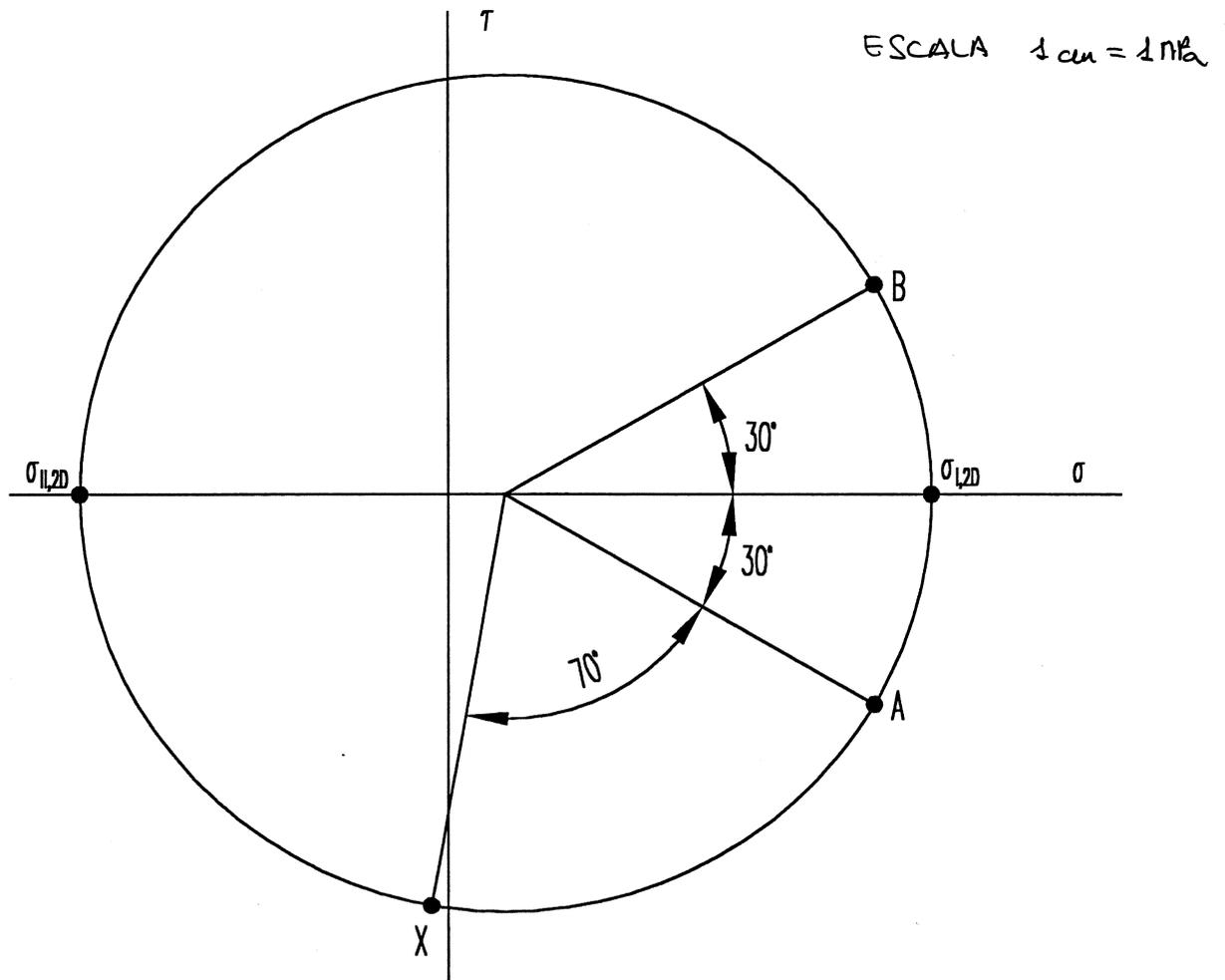


La mediatriz de AB coincide con el eje de abscisas, por lo que no podemos operar como en el caso anterior. Sin embargo, ahora sabemos que las normales a los planos forman 30° , por lo que los radios CA y CB deben formar 60° . Esto exige que el centro de la circunferencia sea uno de los puntos C' ó C'' indicados en esquema anterior. Además, para pasar de σ_A a σ_B se gira en sentido antihorario, luego para pasar de CA a CB debe girarse en el mismo sentido. Ello exige que el centro C de la circunferencia coincida con C' .

$$\operatorname{tg} 30 = \frac{BN}{CM} \Rightarrow CM = \frac{BN}{\operatorname{tg} 30} = \frac{3}{\operatorname{tg} 30} = 5.20 \text{ MPa}$$

$$\sigma_c = \sigma_B - CM = 6 - 5.20 = 0.80 \text{ MPa}$$

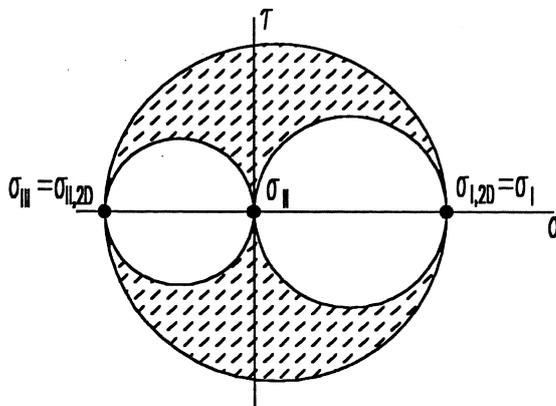
$$R = \sqrt{CM^2 + NB^2} = 6.00 \text{ MPa}$$



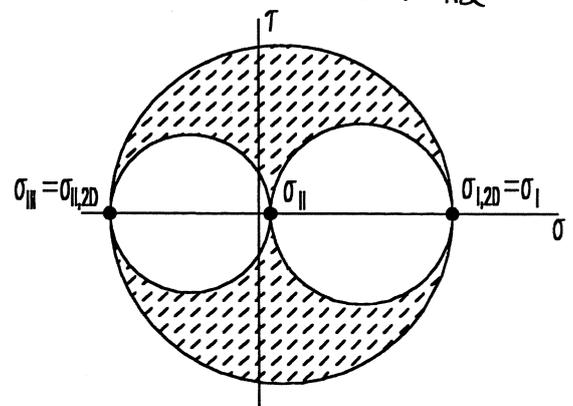
$$\sigma_{I,2D} = \sigma_c + R = 0'8 + 6'00 = 6'80 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{II,2D} = \sigma_c - R = 0'8 - 6'00 = -5'20 \text{ MPa}$$

TENSION PLANA $\sigma_z = 0$,, DEFORMACIÓN PLANA $\sigma_z = 0'25 (6'8 + 5'2) = 0'4 \text{ MPa}$

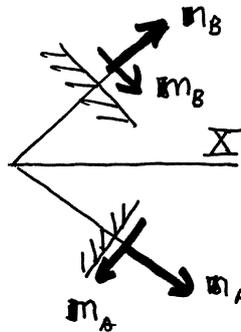
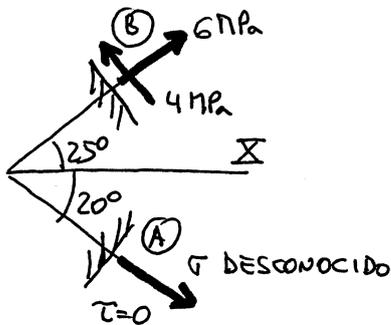


Tensión Plana.



Deformación Plana.

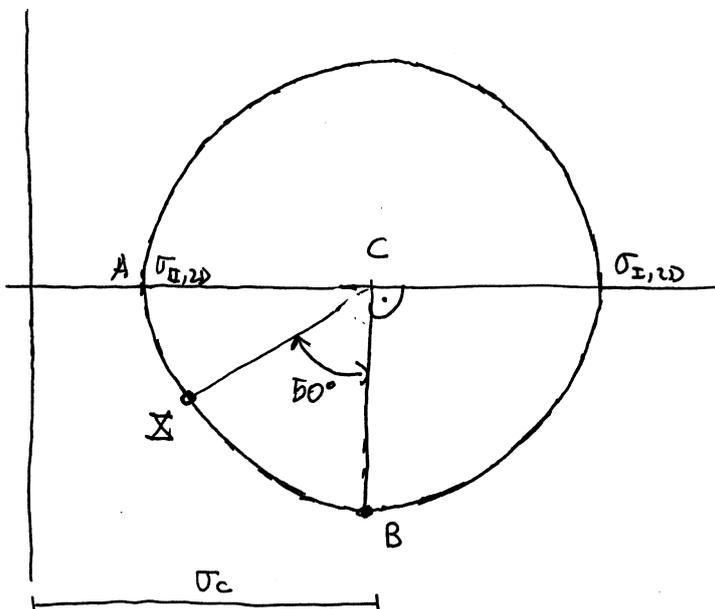
ESTADO 3.



A → DESCONOCIDO,
PERO n_A DE
FINE UNA DI
RECCIÓN PRIN
CIPAL ($\tau=0$).

$$B = \begin{cases} \sigma_B = 6 \text{ MPa} \\ \tau_B = -4 \text{ MPa} \end{cases}$$

Como $\tau_A = 0$, n_A define una dirección principal y, en consecuencia, A estará sobre el eje de abscisas. Por otra parte, como n_B forma 45° con n_A , CB formará 90° con CA, es decir, con el eje de abscisas. Con ello queda resuelto el problema.



$$\sigma_c = \sigma_B = 6 \text{ MPa}$$

$$R = CB = 4 \text{ MPa}$$

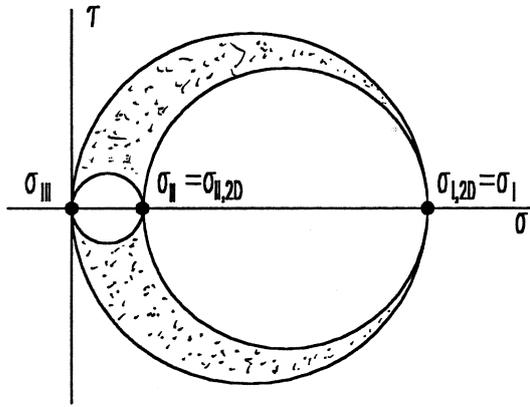
$$\sigma_{I,2D} = \sigma_c + R = 10 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{II,2D} = \sigma_A = \sigma_c - R = 2 \text{ MPa}$$

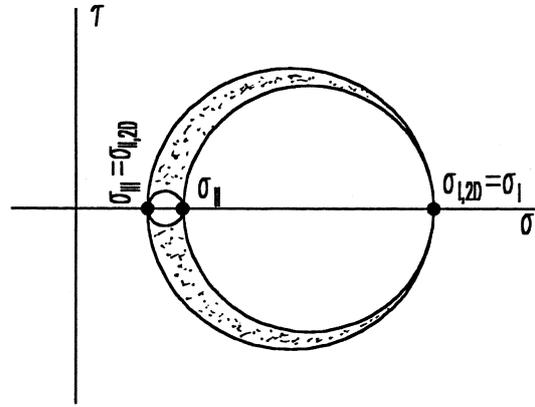
TENS. PLANA → $\sigma_2 = 0$

DEF. PLANA

$$\sigma_2 = \nu(\sigma_{I,2D} + \sigma_{II,2D}) = 0.25(10 + 2) = 3 \text{ MPa}$$



Tensión Plana.



Deformación Plana.

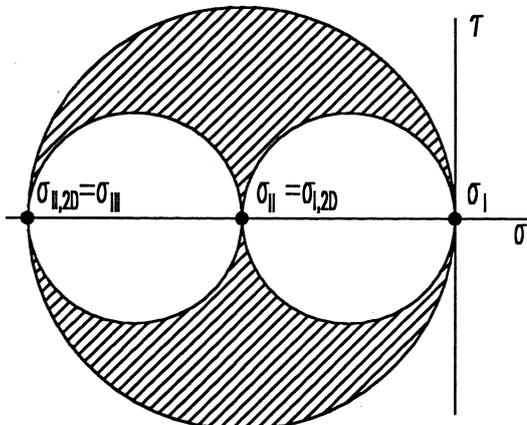
ESTADO 4

Las tensiones principales definen los puntos de corte de la circunferencia con el eje de abscisas. En consecuencia, es inmediato deducir

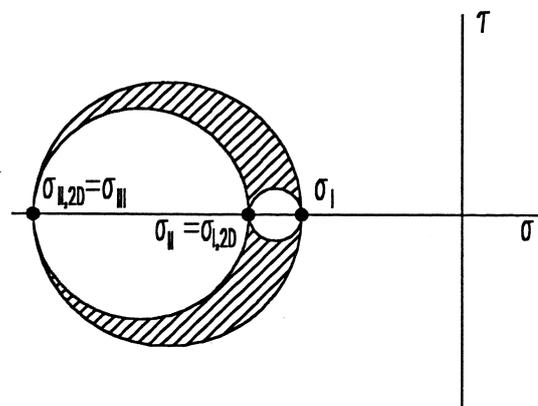
$$\sigma_c = \frac{\sigma_{I,2D} + \sigma_{II,2D}}{2} = \frac{-3 - 6}{2} = -4.5 \text{ MPa}$$

$$R = \frac{\sigma_{I,2D} - \sigma_{II,2D}}{2} = \frac{-3 + 6}{2} = 1.5 \text{ MPa}$$

Por otra parte, en deformación plana $\sigma_2 = 0.25(-6 - 3) = -2.25 \text{ MPa}$
En este ejercicio no tenemos datos suficientes para fijar el punto $X(\sigma_0, \tau_0)$.



Tensión Plana.

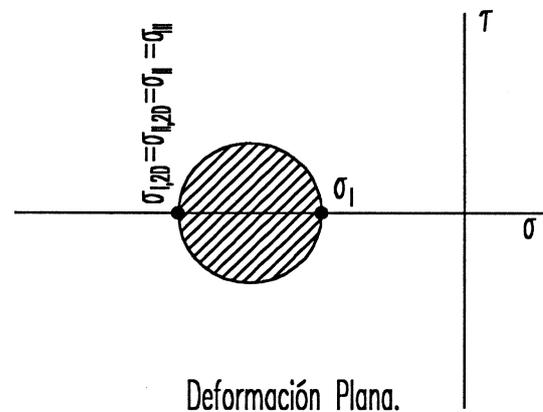
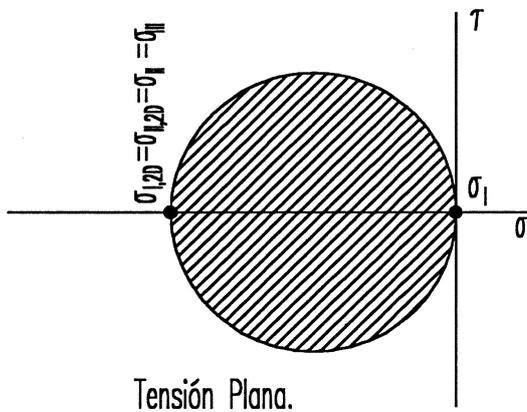


Deformación Plana.

ESTADO 5.

$\sigma_{x,20} = \sigma_{y,20} = -4 \text{ MPa} \Rightarrow$ La circunferencia de Mohr se reduce al punto $(-4, 0)$.

Deformación plana $\rightarrow \sigma_z = \nu (\sigma_{x,20} + \sigma_{y,20}) = 0,25 (-4 - 4) = -2 \text{ MPa}$





EJERCICIO N° 20

LOS SIGUIENTES EJERCICIOS CORTOS SE PROPUSIERON EN EL EXAMEN DE RESISTENCIA DE MATERIALES (2° CURSO ING. TEC. OBRAS PÚBLICAS) DEL 2 DE SEPTIEMBRE DE 1998

Ejercicio n° 1: En su configuración de equilibrio, el tensor de tensiones del cuerpo C queda definido por las siguientes expresiones

$$\begin{aligned} \sigma_x &= -100 + 2y - z & \tau_{xy} &= 45 + 3z \\ \sigma_y &= 100 + 20x - 3z & \tau_{xz} &= 45 + 3y \\ \sigma_z &= -100 - 8y + z & \tau_{yz} &= 45 + 3x \end{aligned}$$

en las que las tensiones aparecen en T/m^2 y las coordenadas en m. Se desea conocer las fuerzas de volumen que solicitan al cuerpo.

Ejercicio n° 2: La figura Ej2 representa un tetraedro irregular, de dimensiones infinitesimales, situado en el interior de la región ocupada por el cuerpo C . Queda definido por las coordenadas de sus vértices, que son

$$\begin{aligned} O(x_0, y_0, z_0) & \quad A(x_0 + dS, y_0, z_0) \\ B(x_0, y_0 + 3dS, z_0) & \quad C(x_0, y_0, z_0 + 2dS) \end{aligned}$$

El tensor de tensiones en O —por ser infinitesimal, puede considerarse el mismo en todo el tetraedro— es

$$[T_{ij}] = \begin{bmatrix} 20 & 0 & 20 \\ 0 & 0 & 0 \\ 20 & 0 & -20 \end{bmatrix} \text{ MPa}$$

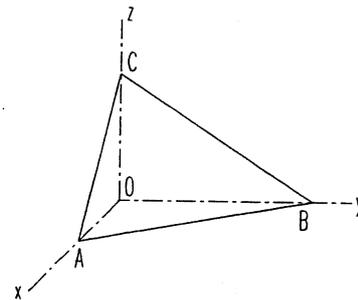


Figura Ej2

Se desea conocer la acción que el resto del cuerpo ejerce sobre el tetraedro OABC a través de la cara ABC.

Ejercicio n° 3: El cuerpo del ejercicio n° 2 está formado por un material elástico lineal de módulo de elasticidad 240.000 MPa y coeficiente de Poisson 0'2. Se pide determinar el tensor de deformaciones en el punto O del cuerpo, sabiendo que el de tensiones está definido en el ejercicio anterior.

Ejercicio n° 4: El tensor de deformaciones en el punto A del tetraedro definido en el ejercicio 2 —en un estado tenso-deformacional que nada tiene que ver con el de los dos ejercicios anteriores— es

$$[E_{ij}] = 10^{-4} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 4 \\ 0 & 4 & 8 \end{bmatrix}$$

Se pide calcular: 1) el alargamiento unitario del vector AB , y 2) la distorsión angular entre los vectores AO y AB .



EJERCICIO 20.1

$$\frac{\partial \tau_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + b_x = 0 \quad \rightarrow \quad 0 + 0 + 0 + b_x = 0 \quad \rightarrow \quad b_x = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + b_y = 0 \quad \rightarrow \quad 0 + 0 + 0 + b_y = 0 \quad \rightarrow \quad b_y = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_z}{\partial z} + b_z = 0 \quad \rightarrow \quad 0 + 0 + 1 + b_z = 0 \quad \rightarrow \quad b_z = -1$$

$$\mathbf{b} = -\mathbf{k} \text{ t/m}^3$$

EJERCICIO 20.2

NOS PIDEN EL VECTOR TENSION SOBRE LA CARA ABC. PARA HALLAR LO DISPONEMOS DE LA FÓRMULA DE CAUCHY. EN ESTA INTERVIENE EL VECTOR NORMAL A ABC, UNITARIO Y APUNTANDO AL EXTERIOR, QUE CALCULAREMOS EN PRIMER LUGAR.

$$\mathbf{n} = \frac{\vec{AB} \times \vec{AC}}{\|\vec{AB} \times \vec{AC}\|} \quad \text{,, } \vec{AB} = -ds \mathbf{i} + 3ds \mathbf{j} \quad \text{,, } \vec{AC} = -ds \mathbf{i} + 2ds \mathbf{k}$$

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -ds & 3ds & 0 \\ -ds & 0 & 2ds \end{vmatrix} = [6\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}] (ds)^2$$

$$\mathbf{n} = \frac{\vec{AB} \times \vec{AC}}{\|\vec{AB} \times \vec{AC}\|} = \frac{(6\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}) (ds)^2}{\sqrt{36+2+9} (ds)^2} = \frac{6}{7} \mathbf{i} + \frac{2}{7} \mathbf{j} + \frac{3}{7} \mathbf{k}$$

FINALMENTE, USANDO LA FÓRMULA DE CAUCHY CALCULAREMOS EL VECTOR TENSION PEDIDO

$$\begin{Bmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 & 0 & 20 \\ 0 & 0 & 0 \\ 20 & 0 & -20 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 6/7 \\ 2/7 \\ 3/7 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 180/7 \\ 0 \\ 60/7 \end{Bmatrix} \text{ MPa}$$

$$\mathbf{t} = \frac{180}{7} \mathbf{i} + \frac{60}{7} \mathbf{k} \text{ MPa}$$



EJERCICIO Nº 20.3

$$E = 240.000 \text{ MPa}$$

$$\nu = 0,2$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} = \frac{240.000}{2 \times 1,2} = 100.000 \text{ MPa}$$

$$\epsilon_x = \frac{1}{E} \left\{ \sigma_x - \nu (\sigma_y + \sigma_z) \right\} = \frac{1}{240.000} \left\{ 20 - 0,2 (0 - 20) \right\} = \frac{24}{240.000} = 10^{-4}$$

$$\epsilon_y = \frac{1}{E} \left\{ \sigma_y - \nu (\sigma_x + \sigma_z) \right\} = \frac{1}{240.000} \left\{ 0 - 0,2 (20 - 20) \right\} = 0$$

$$\epsilon_z = \frac{1}{E} \left\{ \sigma_z - \nu (\sigma_x + \sigma_y) \right\} = \frac{1}{240.000} \left\{ -20 - \nu (20 + 0) \right\} = -\frac{24}{240.000} = 10^{-4}$$

$$\epsilon_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{2G} = 0$$

$$\epsilon_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{2G} = \frac{20}{200.000} = 10^{-4}$$

$$\epsilon_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{2G} = 0$$

EJERCICIO Nº 20.4

ALARGAMIENTO UNITARIO DEL VECTOR $\vec{AB} = -ds\vec{i} + 3ds\vec{j}$

$$n_{AB} = \frac{\vec{AB}}{\|\vec{AB}\|} = \frac{1}{\sqrt{10}} (-\vec{i} + 3\vec{j})$$

$$\epsilon_{AB} = \{n_{AB}\}^t [E] \{n_{AB}\} = \left(-\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{3}{\sqrt{10}}, 0\right) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 4 \\ 0 & 4 & 8 \end{bmatrix} \cdot 10^{-4} \begin{Bmatrix} -1/\sqrt{10} \\ 3/\sqrt{10} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$= \frac{10^{-4}}{10} (-1, 3, 0) \begin{pmatrix} -1 \\ -6 \\ 12 \end{pmatrix} = -17 \times 10^{-5}$$

$$\boxed{\epsilon_{AB} = -17 \times 10^{-5}}$$

DISTORSIÓN ANGULAR ENTRE \vec{AO} Y \vec{AB}

$$\gamma_{OAB} = \frac{2 \{n_{AO}\}^t [E] \{n_{AB}\} - (\epsilon_{AB} + \epsilon_{AO}) \cos A}{\sin A}$$

$$\vec{AO} = -\vec{i} \Rightarrow \epsilon_{AO} = \epsilon_x = 10^{-4}$$

$$\{n_{AO}\}^t [E] \{n_{AB}\} = \{-1, 0, 0\} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 4 \\ 0 & 4 & 8 \end{bmatrix} \times 10^{-4} \begin{Bmatrix} -1/\sqrt{10} \\ 3/\sqrt{10} \\ 0 \end{Bmatrix} = \frac{10^{-4}}{\sqrt{10}} (-1, 0, 0) \begin{pmatrix} -1 \\ -6 \\ 12 \end{pmatrix} = \frac{10^{-4}}{\sqrt{10}}$$

$$\cos A = n_{AO} \cdot n_{AB} = \frac{1}{\sqrt{10}} \quad \sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \sqrt{1 - \frac{1}{10}} = \sqrt{\frac{9}{10}} = \frac{3}{\sqrt{10}}$$

$$\boxed{\gamma_{OAB} = \frac{2 \times 10^{-4} / \sqrt{10} - (-17 \times 10^{-5} + 10^{-4}) \cdot 1/\sqrt{10}}{3/\sqrt{10}} = \frac{2 \times 10^{-4} - (-0,7 \times 10^{-4})}{3} = \frac{2,7}{3} \times 10^{-4} = 9 \times 10^{-5}}$$

EJERCICIO Nº 21

PROPUESTO EN EL EXAMEN DE RESISTENCIA DE MATERIALES (2º CURSO DE ING. TEC. DE OBRAS PÚBLICAS) DEL 1 DE FEBRERO DE 1999.

El cuerpo C ocupa, en su posición inicial, la región limitada por el cilindro $X^2+Y^2=0.04 \text{ m}^2$ y los planos $Z=0$ y $Z=3.0 \text{ m}$. Está formado por un material elástico lineal, de módulo de elasticidad 62.500 Mpa y módulo de deformación por cortante 25.000 Mpa .

Solicitado por ciertas fuerzas exteriores, sufre unos desplazamientos definidos por las siguientes relaciones

$$u = -5 \times 10^{-4} YZ - 10^{-5} X$$

$$v = 5 \times 10^{-4} XZ - 10^{-5} Y$$

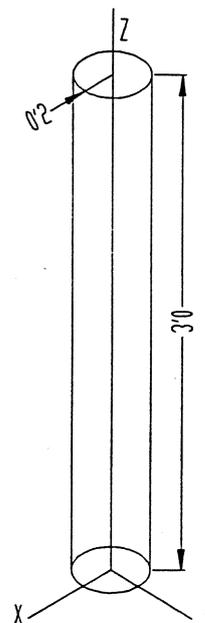
$$w = -3 \times 10^{-5} Z$$

en las que tanto los desplazamientos como las coordenadas se expresan en metros.

En la posición deformada del cuerpo C , definida por los anteriores desplazamientos, se desea conocer:

- 1) El tensor de deformaciones del cuerpo. (0'75 puntos)
- 2) Su tensor de tensiones. (1'50 puntos)
- 3) Las fuerzas de volumen que lo solicitan. (0'75 puntos)
- 4) Las fuerzas de superficie que actúan sobre su cara $Z=3 \text{ m}$. (1'00 punto)

Al responder a las distintas cuestiones, escriba las ecuaciones que va a utilizar antes de sustituir en ellas los parámetros correspondientes.



1) DEFORMACIONES

→ SON ADIMENSIONALES

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial X} = -10^{-5}$$

$$\epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial Y} = -10^{-5}$$

$$\epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial Z} = -3 \times 10^{-5}$$

$$\epsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial Y} + \frac{\partial v}{\partial X} \right) = \frac{1}{2} \left(-5 \times 10^{-4} Z + 5 \times 10^{-4} Z \right) = 0$$

$$\epsilon_{xz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial Z} + \frac{\partial w}{\partial X} \right) = \frac{1}{2} \left(-5 \times 10^{-4} Y + 0 \right) = -2.5 \times 10^{-4} Y$$

$$\epsilon_{yz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial Z} + \frac{\partial w}{\partial Y} \right) = \frac{1}{2} \left(5 \times 10^{-4} X + 0 \right) = 2.5 \times 10^{-4} X$$



2) TENSOR DE TENSIONES.

PARA USAR LAS ECUACIONES DE LAMÉ PREVIAMENTE CALCULAREMOS λ . COMO RESULTADO INTERMEDIO HALLAREMOS ν .

$$\left. \begin{array}{l} E = 62.500 \text{ MPa} \\ G = 25.000 \text{ MPa} \end{array} \right\} G = \frac{E}{2(1+\nu)} \Rightarrow \nu = \frac{E}{2G} - 1$$

$$\nu = \frac{62.500}{2 \times 25.000} - 1 = \frac{625 \times 100}{2 \times 25 \times 1000} - 1 = \frac{25 \times 100}{2000} - 1 = \frac{2'5}{2} - 1 = 1'25 - 1 = 0'25$$

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} = \frac{0'25 \times 62.500}{1'25 \times 0'5} = \frac{0'25 \times 125.000}{1'25} = 25.000 \text{ MPa}$$

$$e = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = -5 \times 10^{-5}$$

$$\sigma_x = \lambda e + 2G \varepsilon_x = 25.000 (-5 \times 10^{-5}) + 50.000 (-10^{-5}) = -175.000 \times 10^{-5} = -1'75 \text{ MPa}$$

$$\sigma_y = \lambda e + 2G \varepsilon_y = -1'75 \text{ MPa} \quad (= \sigma_x)$$

$$\sigma_z = \lambda e + 2G \varepsilon_z = 25.000 (-5 \times 10^{-5}) + 50.000 (-3 \times 10^{-5}) = -275.000 \times 10^{-5} = -2'75 \text{ MPa}$$

$$\tau_{xy} = 2G \varepsilon_{xy} = 0$$

$$\tau_{xz} = 2G \varepsilon_{xz} = 50.000 (-2'5 \times 10^{-4} Y) = -12'5 Y \text{ MPa} \quad \underline{\underline{XeY \text{ en m.}}}$$

$$\tau_{yz} = 2G \varepsilon_{yz} = 50.000 (2'5 \times 10^{-4} X) = 12'5 X \text{ MPa}$$

3) FUERZAS DE VOLUMEN

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial X} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial Y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial Z} + b_x = 0 \quad \Rightarrow \quad b_x = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial X} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial Y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial Z} + b_y = 0 \quad \Rightarrow \quad b_y = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial X} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial Y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial Z} + b_z = 0 \quad \Rightarrow \quad b_z = 0$$



4) FUERZAS DE SUPERFICIE SOBRE LA CARA $z=0'3$.

La condición de contorno $t = \bar{t}$ exige que coincidan con el vector tensión calculado en la cara en cuestión. Para hallarlo recurisemos a la fórmula de Cauchy. Tendremos en cuenta que el vector normal a $z=0'3$ m, unitario y apuntando al exterior del cuerpo es \mathbf{k} .

$$\begin{Bmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -1'75 & 0 & -12'5 Y \\ 0 & -1'75 & 12'5 X \\ -12'5 Y & 12'5 X & -2'75 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -12'5 Y \\ 12'5 X \\ -2'75 \end{Bmatrix} \text{ MPa}$$

$$\bar{t}_{z=0'3} = -12'5 Y \mathbf{i} + 12'5 X \mathbf{j} - 2'75 \mathbf{k} \text{ MPa}$$

con X e Y en metros.



CÁLCULO DE ESTRUCTURAS I.
2º Plan Integral de Estudios de Ingeniería Civil.

PRIMER EXAMEN PARCIAL.
1 de Febrero de 1999.

EJERCICIO Nº 22

(SIN CALCULADORA)

En el punto P(1 m, 1 m, 1 m) del interior de la región ocupada por cierto sólido rígido se conoce el tensor de tensiones, que vale

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} -7 & 6 & 0 \\ 6 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \text{ MPa}$$

Entre todos los vectores tensión que pueden imaginarse en P, averigüe cual es el que tiene mayor módulo y determine la ecuación del plano sobre el que actúa.

El vector tensión pedido es el que actúa sobre el plano normal a la dirección principal correspondiente a la tensión principal de mayor valor absoluto.

Tensiones principales

$$\begin{vmatrix} -7-\lambda & 6 & 0 \\ 6 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda) [(-7-\lambda)(2-\lambda) - 36] = (3-\lambda) [-14 + 5\lambda + \lambda^2 - 36] \\ = (3-\lambda) [\lambda^2 + 5\lambda - 50] = 0 \leftarrow \text{Ec. característica}$$

$$\lambda = \begin{cases} 3 \text{ MPa} \\ \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 200}}{2} = \frac{-5 \pm \sqrt{225}}{2} = \frac{-5 \pm 15}{2} = \begin{cases} -10 \text{ MPa} \\ 5 \text{ MPa} \end{cases} \end{cases}$$

Tensión principal de mayor valor absoluto $\rightarrow \sigma_{III} = -10 \text{ MPa}$.

Autovector asociado

$$\begin{cases} (-7+10)n_1 + 6n_2 = 0 \\ (3+10)n_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3n_1 + 6n_2 = 0 \\ n_3 = 0 \end{cases} \quad n_2 = -\frac{1}{2}n_1$$

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1 \Rightarrow n_1^2 + \frac{1}{4}n_1^2 = 1 \quad n_1 = \pm \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$n_{III} = \frac{2}{\sqrt{5}} \mathbf{i} - \frac{1}{\sqrt{5}} \mathbf{j}$$

$$\text{Vector tensión pedido} \rightarrow \boxed{\mathbf{T} = -10 n_{III} \text{ MPa} = -\frac{20}{\sqrt{5}} \mathbf{i} + \frac{10}{\sqrt{5}} \mathbf{j} \text{ MPa}}$$

$$\text{Plano sobre el que actúa} \rightarrow \pi: \frac{2}{\sqrt{5}} X - \frac{1}{\sqrt{5}} Y + d = 0$$

$$P \in \pi \Rightarrow \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot 1 - \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot 1 + d = 0 \rightarrow d = -\frac{1}{\sqrt{5}} \quad \boxed{\begin{aligned} \pi: \frac{2}{\sqrt{5}} X - \frac{1}{\sqrt{5}} Y - \frac{1}{\sqrt{5}} &= 0 \\ \text{ó } 2X - Y - 1 &= 0 \end{aligned}}$$

CÁLCULO DE ESTRUCTURAS I.
2º Plan Integral de Estudios de Ingeniería Civil.

PRIMER EXAMEN PARCIAL.
1 de Febrero de 1999.

EJERCICIO Nº 23

(25 minutos)

SE PUEDE USAR LA CALCULADORA.

El cuerpo C ocupa, en su posición inicial, la región limitada por el cilindro $X^2+Y^2=0.04 \text{ m}^2$ y los planos $Z=0$ y $Z=3.0 \text{ m}$. Está formado por un material elástico lineal, de módulo de elasticidad 62.500 MPa y módulo de deformación por cortante 25.000 MPa .

Solicitado por ciertas fuerzas exteriores, sufre unos desplazamientos definidos por las siguientes relaciones

$$u = -5 \times 10^{-4} YZ - 10^{-5} X$$

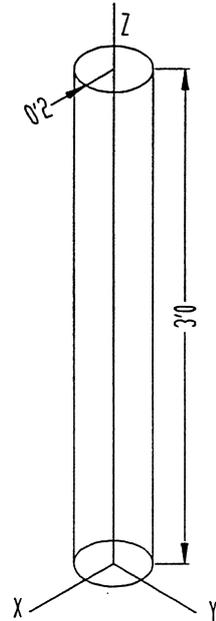
$$v = 5 \times 10^{-4} XZ - 10^{-5} Y$$

$$w = -3 \times 10^{-5} Z$$

en las que tanto los desplazamientos como las coordenadas se expresan en metros.

Se desea conocer:

- 1) El cambio de volumen sufrido por el cuerpo al pasar desde la posición inicial a la deformada.
- 2) El cambio de longitud experimentado por la circunferencia $X^2+Y^2=0.04 \text{ m}^2$, $Z=1 \text{ m}$ al pasar desde la posición inicial a la deformada.
- 3) Las fuerzas que actúan sobre la superficie lateral del cilindro en la configuración deformada.



DEFORMACIONES.

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial X} = -10^{-5}$$

$$\epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial Y} = -10^{-5}$$

$$\epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial Z} = -3 \times 10^{-5}$$

$$\epsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial Y} + \frac{\partial v}{\partial X} \right) = \frac{1}{2} \left(-5 \times 10^{-4} Z + 5 \times 10^{-4} Z \right) = 0$$

$$\epsilon_{xz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial Z} + \frac{\partial w}{\partial X} \right) = \frac{1}{2} \left(-5 \times 10^{-4} Y + 0 \right) = -2.5 \times 10^{-4} Y$$

$$\epsilon_{yz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial Z} + \frac{\partial w}{\partial Y} \right) = \frac{1}{2} \left(5 \times 10^{-4} X + 0 \right) = 2.5 \times 10^{-4} X$$

CAMBIO DE VOLUMEN

$$e = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z = -5 \times 10^{-5}$$

$$\Delta V = \int_V e dV = \int_V (-5 \times 10^{-5}) dV = -5 \times 10^{-5} \int_V dV = -5 \times 10^{-5} V$$

$$V = \pi \times 0.2^2 \times 3 = 0.3770 \text{ m}^3$$

$$\Delta V = -5 \times 10^{-5} \times 0.3770 = -1.885 \times 10^{-5} \text{ m}^3 = -18.85 \text{ cm}^3$$

CAMBIO DE LONGITUD CIRCUNFERENCIA $X^2 + Y^2 = 0.04 \text{ m}^2$, $Z = 1 \text{ m}$.

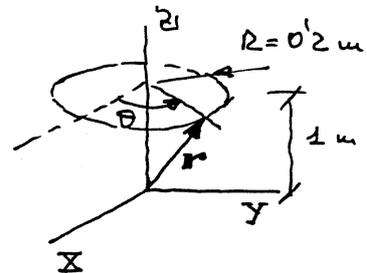
- Vector posición de un punto genérico de la circunferencia

$$\mathbf{r} = 0.2 (\cos \theta \mathbf{i} + \sin \theta \mathbf{j}) + k \text{ m}$$

- Vector tang. a la circunferencia, unitario

$$\mathbf{m} = \frac{d\mathbf{r}/d\theta}{\|d\mathbf{r}/d\theta\|} = \frac{0.2(-\sin \theta \mathbf{i} + \cos \theta \mathbf{j})}{0.2}$$

$$\mathbf{m} = -\sin \theta \mathbf{i} + \cos \theta \mathbf{j}$$



- Particularización del tensor de deformaciones a la circunferencia.

dos ec. paramétricas de la curva son: $X = 0.2 \cos \theta$, $Y = 0.2 \sin \theta$, $Z = 1 \text{ m}$

$$[\epsilon]_e = \begin{bmatrix} -10^{-5} & 0 & -2.5 \times 10^{-5} \times 0.2 \sin \theta \\ 0 & -10^{-5} & 2.5 \times 10^{-5} \times 0.2 \cos \theta \\ -0.5 \times 10^{-5} \sin \theta & 0.5 \times 10^{-5} \cos \theta & -3 \times 10^{-5} \end{bmatrix} \quad e \text{ denota la circunferencia}$$

- Alargamiento unitario de un vector $d\mathbf{r}$ sobre la circunferencia

$$d\mathbf{r} = \frac{d\mathbf{r}}{d\theta} d\theta = \left\| \frac{d\mathbf{r}}{d\theta} \right\| d\theta \cdot \frac{d\mathbf{r}/d\theta}{\|d\mathbf{r}/d\theta\|} = dS \mathbf{m}$$

$$dS = \left\| \frac{d\mathbf{r}}{d\theta} \right\| d\theta = 0.2 d\theta$$

$$\epsilon e = (-\sin \theta, \cos \theta, 0) \begin{bmatrix} -1 & 0 & -0.5 \sin \theta \\ 0 & -1 & 0.5 \cos \theta \\ -0.5 \sin \theta & 0.5 \cos \theta & -3 \end{bmatrix} \cdot 10^{-5} \begin{Bmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$= (-\sin \theta, \cos \theta, 0) \begin{Bmatrix} \sin \theta \\ -\cos \theta \\ 0.5(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) \end{Bmatrix} \cdot 10^{-5} = -(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) \times 10^{-5} = -10^{-5}$$

U67

- Cambio de longitud de la circunferencia

$$\Delta L = \int_e \epsilon_e dS' = \int_0^{2\pi} (-10^{-5}) 0.2 d\theta = -0.2 \times 10^{-5} \int_0^{2\pi} d\theta =$$

$$= -0.2 \times 10^{-5} \times 2\pi = -1.26 \times 10^{-5} \text{ m.}$$

FUERZAS SOBRE LA SUPERFICIE LATERAL DEL CILINDRO

- Tensiones

$$\left. \begin{aligned} E &= 62.500 \text{ MPa} \\ G &= 25.000 \text{ MPa} \end{aligned} \right\}$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \Rightarrow \nu = \frac{E}{2G} - 1 = 0.25$$

$$d = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} = 25.000 \text{ MPa.}$$

$$\sigma_x = d e + 2G \epsilon_x = 25.000 (-5 \times 10^{-5}) + 50.000 (-10^{-5}) = -175.000 \times 10^{-5} = -1.75 \text{ MPa}$$

$$\sigma_y = d e + 2G \epsilon_y = -1.75 \text{ MPa} \quad (= \sigma_x)$$

$$\sigma_z = d e + 2G \epsilon_z = 25.000 (-5 \times 10^{-5}) + 50.000 (-3 \times 10^{-5}) = -2.75 \text{ MPa}$$

$$\tau_{xy} = 2G \epsilon_{xy} = 0$$

$$\tau_{xz} = 2G \epsilon_{xz} = 50.000 (-2.5 \times 10^{-4} y) = -12.5 y \text{ MPa}$$

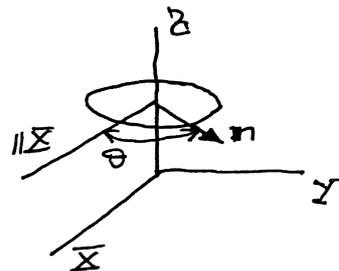
$$\tau_{yz} = 2G \epsilon_{yz} = 50.000 (2.5 \times 10^{-4} x) = 12.5 x \text{ MPa}$$

x e y
en metro.

- Vector normal al contorno, unitario y apuntando al exterior

$$\mathbf{n} = \cos \theta \mathbf{i} + \sin \theta \mathbf{j}$$

$$(\theta = \arctan \frac{y}{x})$$



- Fuerzas de superficie pedidas.

Las condiciones de contorno exigen que coincidan con el vector tensión calculado sobre el contorno.

$$\begin{Bmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.75 & 0 & -12.5 (0.2 \sin \theta) \\ 0 & -1.75 & -12.5 (0.2 \cos \theta) \\ -2.5 \sin \theta & 2.5 \cos \theta & -2.75 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -1.75 \cos \theta \\ -1.75 \sin \theta \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\boxed{\bar{\mathbf{t}} = -1.75 \mathbf{n} \text{ MPa}}$$

EJERCICIO Nº 24

El cuerpo objeto de este ejercicio es una esfera, de centro el origen de coordenadas y radio 1'0 m, formada por un material elástico lineal de módulo de elasticidad 30.000 MPa y coeficiente de Poisson 0'25.

La figura adjunta representa un tetraedro elemental, definido en el interior de la esfera. En ella se indican, en MPa, las componentes de los vectores tensión sobre tres de sus caras.

Las coordenadas de sus vértices son las siguientes:

$$\begin{aligned} P & (X_0, Y_0, Z_0) \\ A & (X_0 + 4dS, Y_0, Z_0) \\ B & (X_0, Y_0 + 3dS, Z_0) \\ C & (X_0, Y_0, Z_0 + 3dS) \end{aligned}$$

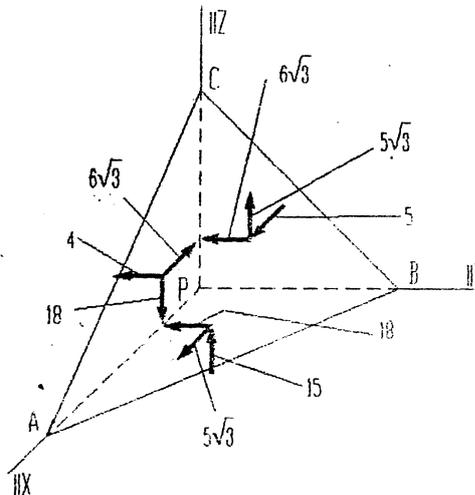


Figura C.2

Se desea conocer:

- 1.- La acción que el resto de la esfera ejerce sobre el tetraedro a través de la cara ABC.
- 2.- La tensión tangencial máxima en el punto P.
- 3.- La orientación del segmento elemental $dr = dSn$, con origen en P, cuyo alargamiento unitario es máximo, así como el valor de dicho parámetro —la orientación queda definida por el vector n —.
- 4.- El cambio de volumen que experimentará la esfera si el estado tensional en todos sus puntos fuese el mismo y coincidiera con el definido en P.

— 0 —

58

5). No pide el vector tensión en la cara ABC, que calcularemos con la fórmula de Cauchy.

Tensor de tensiones $\rightarrow [\sigma] = \begin{bmatrix} -5 & 6\sqrt{3} & -5\sqrt{3} \\ 6\sqrt{3} & 4 & 18 \\ -5\sqrt{3} & 18 & -15 \end{bmatrix} \text{ MPa}$
 (Se obtiene a partir de la interpretación física de sus componentes.)

Vector normal a ABC, apuntando hacia el exterior del cuerpo.

$$n = \frac{\overline{AB} \times \overline{AC}}{|\overline{AB} \times \overline{AC}|} \quad \overline{AB} = (4dS, 3dS, 0) \quad \overline{AC} = (-4dS, 0, 3dS)$$



$$\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -4 & 3 & 0 \\ -4 & 0 & 3 \end{vmatrix} dS^2 = (9\mathbf{i} + 12\mathbf{j} + 12\mathbf{k}) dS^2$$

$$\|\vec{AB} \times \vec{AC}\| = dS^2 \sqrt{81 + 144 + 144} = dS^2 \sqrt{369}$$

$$\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{369}} (9\mathbf{i} + 12\mathbf{j} + 12\mathbf{k})$$

$$\begin{Bmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 6\sqrt{3} & -5\sqrt{3} \\ 6\sqrt{3} & 4 & 18 \\ -5\sqrt{3} & 18 & -15 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 9/\sqrt{369} \\ 12/\sqrt{369} \\ 12/\sqrt{369} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{-45 + 12\sqrt{3}}{\sqrt{369}} \\ (54\sqrt{3} + 264)/\sqrt{369} \\ (-45\sqrt{3} + 36)/\sqrt{369} \end{Bmatrix}$$

el vector tensión pedido es

$$\vec{t} = (-1'26\mathbf{i} + 18'61\mathbf{j} + 2'18\mathbf{k}) \text{ MPa}$$

Tensión tangencial máxima.

$$\tau_{\text{MAX}} = \frac{\sigma_I - \sigma_{III}}{2}$$

Necesitamos las tensiones principales.

$$\begin{vmatrix} -5 - \lambda & 6\sqrt{3} & -5\sqrt{3} \\ 6\sqrt{3} & 4 - \lambda & 18 \\ -5\sqrt{3} & 18 & -15 - \lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + I_T \lambda^2 - II_T \lambda + III_T = 0$$

$$I_T = -5 + 4 - 15 = -16 \text{ MPa}$$

$$II_T = \begin{vmatrix} -5 & 6\sqrt{3} \\ 6\sqrt{3} & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -5 & -5\sqrt{3} \\ -5\sqrt{3} & -15 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & 18 \\ 18 & -15 \end{vmatrix} = -20 - 108 + 75 - 75 - 60 - 324 = -512 \text{ MPa}^2$$

07

Nº	Apellidos y nombre / Cognoms i nom	Firma / Signatura	Fecha / Data 070
----	------------------------------------	-------------------	---------------------



$$III_T = \begin{vmatrix} -5 & 6\sqrt{3} & -5\sqrt{3} \\ 6\sqrt{3} & 4 & 18 \\ -5\sqrt{3} & 18 & -15 \end{vmatrix} = 300 - 1620 \times 2 - 300 + 1620 + 1620 = 0$$

Ec. característica $-\lambda^3 + I_T \lambda^2 - II_T \lambda + III_T = 0$

$$-\lambda^3 - 16\lambda^2 + 512\lambda = 0$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} \lambda = 0 \\ -\lambda^2 + 16\lambda + 512 = 0 \end{matrix}$$

$$\lambda = \frac{16 \pm \sqrt{256 + 2048}}{-2} = \frac{16 \pm \sqrt{2304}}{-2} = \frac{16 \pm 48}{-2} = \begin{matrix} -32 \\ 16 \end{matrix}$$

$$\sigma_I = 16 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{II} = 0$$

$$\sigma_{III} = -32 \text{ MPa}$$

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_I - \sigma_{III}}{2} = \frac{16 - (-32)}{2} = 24 \text{ MPa}$$

3) Nos piden la deformación principal mayor (ϵ_x) y la dirección principal correspondiente ($n = n_x$).

$$\epsilon_I = \frac{1}{E} \left\{ \sigma_I - \nu (\sigma_{II} + \sigma_{III}) \right\} = \frac{1}{30.000} (16 - 0,25(0 - 32)) = 8 \times 10^{-4}$$

$$\lambda = 16 \text{ MPa}$$

$$\begin{cases} 6\sqrt{3} n_x + (4 - 16) n_y + 18 n_z = 0 \\ -5\sqrt{3} n_x + 18 n_y + (-15 - 16) n_z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -12 n_y + 18 n_z = -6\sqrt{3} n_x \\ 18 n_y - 31 n_z = 5\sqrt{3} n_x \end{cases}$$

$$\det = \begin{vmatrix} -12 & 18 \\ 18 & -31 \end{vmatrix} = 48$$

$$n_y = \frac{\begin{vmatrix} -6\sqrt{3} & 18 \\ 5\sqrt{3} & -31 \end{vmatrix} n_x}{48} = \frac{96\sqrt{3} n_x}{48} = 2\sqrt{3} n_x$$



$$n_z = \frac{\begin{vmatrix} -12 & -6\sqrt{3} \\ 18 & 5\sqrt{3} \end{vmatrix} n_x}{48} = \frac{48\sqrt{3} n_x}{48} = \sqrt{3} n_x$$

$$\boxed{n_I = \frac{i + 2\sqrt{3}j + \sqrt{3}k}{\sqrt{1+12+3}} = \frac{1}{4}i + \frac{\sqrt{3}}{2}j + \frac{\sqrt{3}}{4}k}$$

Cambio de volumen.

$$e = \epsilon_I + \epsilon_{II} + \epsilon_{III} = \frac{\sigma_I + \sigma_{II} + \sigma_{III}}{k}$$

$$I_T = \sigma_I + \sigma_{II} + \sigma_{III} = -16 \text{ MPa} \quad \sigma_m = -\frac{16}{3} = -5.33 \text{ MPa}$$

$$k = \frac{E}{3(1-2\nu)} = \frac{30.000}{3 \times 0.5} = 20.000 \text{ MPa}$$

$$e = \frac{I_T}{k} = \frac{-5.33}{20.000} = -2.667 \times 10^{-4} \quad \text{Igual en todos los puntos del cuerpo.}$$

$$\Delta V = \int_V e \, dV = -2.667 \times 10^{-4} \int_V dV = -2.667 \times 10^{-4} V_0$$

$$V_0 = \frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{4}{3} \pi \cdot 1^3 \text{ m}^3$$

$$\Rightarrow \Delta V = 2.667 \times 10^{-4} \cdot \frac{4}{3} \pi = -1.117 \times 10^{-3} \text{ m}^3$$

EJERCICIO Nº 2.5.

Cálculo de Estructuras I.

2º curso, Plan Integral de Estudios de Ingeniería Civil.

Examen de Septiembre.
3 de Septiembre de 1999

Problema nº 1.

El ensayo triaxial se realiza con un aparato como el representado esquemáticamente en la figura adjunta. Consta de una prensa cuyos pistones se hallan en el interior de un camarín que puede llenarse con un líquido a presión. La probeta a ensayar es un cilindro recto, que se coloca apoyada sobre el pistón inferior por una de sus bases.

Para definir el estado tensional originado por este mecanismo en el cilindro conviene utilizar un sistema cartesiano con origen de coordenadas en el centro de su base inferior y eje Z paralelo a su altura. Debido a la simetría, la orientación de los ejes X e Y es irrelevante.

En él, el estado tensional definido sobre la probeta por la acción conjunta de la prensa y el líquido queda definido por el tensor de tensiones

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} a+bZ & 0 & 0 \\ 0 & a+bZ & 0 \\ 0 & 0 & c+dZ \end{bmatrix}$$

donde a , b , c y d son constantes que dependen de la presión ejercida por la prensa, de la ejercida por el líquido, y de los pesos específicos del material que forma la probeta y del líquido.

En este problema se pretende estudiar el ensayo triaxial de un cilindro recto de 50 cm de altura y 20 cm de diámetro de la base, formado por un material elástico lineal. Para realizarlo se utiliza un aparato como el descrito, en el cual el pistón inferior es fijo y la presión del líquido se mide con un manómetro situado 100 cm por encima de la cara superior de éste —véase figura—. En la situación que se quiere analizar se han medido los siguientes valores:

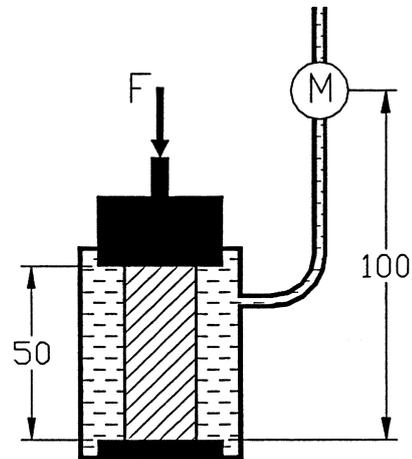
- presión en la cara superior de la probeta 1'99 MPa,
- presión del líquido medida por el manómetro 0'25 MPa,
- cambio de volumen experimentado por la probeta 62'83 cm³ (4% del volumen inicial).

Otros datos conocidos, necesarios para determinar el estado tensional, tienen los siguientes valores:

- peso específico del material que forma la probeta 20 kN/m³,
- peso específico del líquido 10 kN/m³.

Con todo ello, se pide averiguar:

- 1.- las constantes a , b , c y d que definen el tensor de tensiones en la probeta, indicando las unidades de cada una de ellas —opere de modo que las tensiones resulten en megapascales considerando la coordenada Z en metros—, y
- 2.- el módulo de deformación volumétrica del material que la forma.

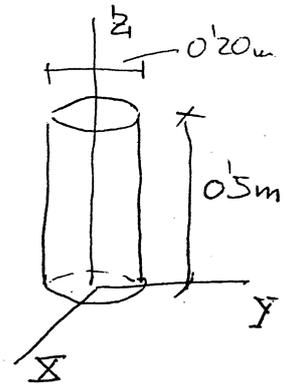


(Las cotas están en cm. La pieza señalada con una M representa el manómetro.)

Tiempo: 45 min.

PROBLEMA Nº 1.

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} a+bz & 0 & 0 \\ 0 & a+bz & 0 \\ 0 & 0 & c+dz \end{bmatrix}$$



Fuerzas de volumen en la probeta

$$\mathbf{b} = (0, 0, 20) \text{ kN/m}^3 = (0, 0, -0.02) \text{ MN/m}^3$$

Ec. eq. internos

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + b_x = 0 \rightarrow 0 = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + b_y = 0 \rightarrow 0 = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + b_z = 0 \rightarrow d - 0.02 = 0 \rightarrow \boxed{d = 0.02 \text{ MN/m}^3}$$

Cond. de contorno en la cara superior

$$\sigma_z = 0 \quad \bar{\epsilon} = -199 \mu \text{ m/m}$$

Form. Cauchy

$$\begin{Bmatrix} \tau_x \\ \tau_y \\ \tau_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a+bz & 0 & 0 \\ 0 & a+bz & 0 \\ 0 & 0 & c+dz \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ c+dz \end{Bmatrix} \Big|_{z=0.5}$$

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -199 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ c+0.5d \end{Bmatrix} \Rightarrow -199 = c + 0.5 \times 0.02 \Rightarrow \boxed{c = -2.00} \text{ MPa}$$

REPROVAL PAPEL 100% RECICLADO

Nº	Apellidos y nombre / Cognoms i nom	Firma / Signatura	Fecha / Data
			074

Condiciones de contorno en la superficie lateral

Vector normal exterior - unitario -

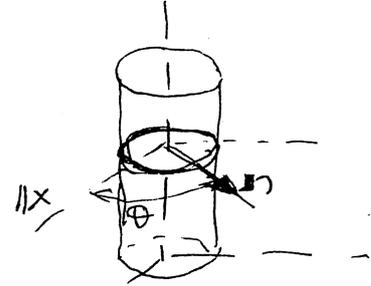
$$\bar{n} = \cos\theta \bar{i} + \sin\theta \bar{j}$$

Fuerzas que actúan sobre el contorno
(presión hidrostática)

$$p = p_0 + \rho h = 0'25 + 0'01 (1-z)$$

presión en el
manómetro

peso esp. líquido,
en MN/m^3



$h =$ profundidad medida desde
el manómetro

$$p = 0'26 - 0'01z$$

$$\bar{T} = -(0'26 - 0'01z) \bar{n} \text{ MPa}, z \text{ en m}$$

Fórmula de Cauchy

$$\begin{bmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+bz & 0 & 0 \\ 0 & a+bz & 0 \\ 0 & 0 & c+dz \end{bmatrix}_{s.l} \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (a+bz)\cos\theta \\ (a+bz)\sin\theta \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} (a+bz)\cos\theta \\ (a+bz)\sin\theta \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-0'26+0'01z)\cos\theta \\ (-0'26+0'01z)\sin\theta \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a = -0'26 \text{ MPa} \\ b = 0'01 \text{ MN/m}^3 \end{cases}$$



Si pues, el tensor de tensiones en la probeta será

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} -0'26 + 0'01z & 0 & 0 \\ 0 & -0'26 + 0'01z & 0 \\ 0 & 0 & -2'00 + 0'02z \end{bmatrix} \text{ MPa}$$

con z en m.

Módulo de deformación volumétrica

$$\Delta V = \int_{V_0} e dV_0 \quad e = \frac{\sigma_m}{k}$$

$$\sigma_m = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3} = \frac{-2'52 + 0'04z}{3} \Rightarrow e = \frac{-2'52 + 0'04z}{3k}$$

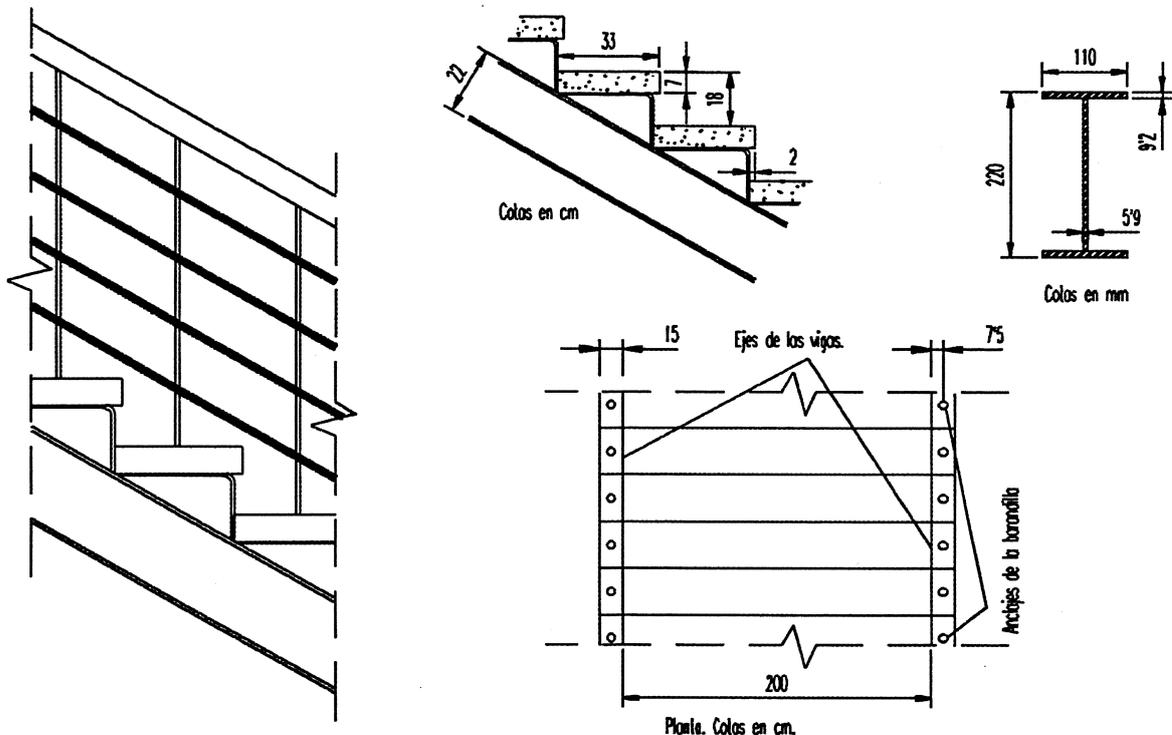
$$\Delta V = \underbrace{-0'004 V_0}_{\text{Dato}} = \int_{V_0} \frac{-2'52 + 0'04z}{3k} dV_0 = -\frac{2'52}{3k} \int_{V_0} dV_0 + \frac{0'04}{3k} \int_{V_0} z dV_0$$

$$\begin{aligned} \int_{V_0} z dV_0 &= \frac{0'25 V_0}{\text{cota del cdg. del cilindro}} \\ \Rightarrow -0'004 V_0 &= \frac{-2'52 V_0 + 0'04 \times 0'25 V_0}{3k} \\ \Rightarrow -0'004 &= \frac{-2'52 + 0'01}{3k} \Rightarrow \boxed{k = 209'16 \text{ MPa}} \end{aligned}$$

Capítulo 2

La Viga Aislada

Ejercicio nº 26



La escalera exterior que da acceso a un hotel, representada en la figura, está formada por dos vigas metálicas IPE-220 sobre las que se han soldado unas pletinas dobladas en ángulo recto para permitir el apoyo horizontal de los peldaños, que son bloques de piedra artificial de $7 \times 33 \times 230$ cm. La barandilla, que se ancla a ellos, está formada por montantes metálicos de tubo de 50 mm de diámetro exterior y de 5 mm de espesor de pared, a razón de uno por escalón, un pasamanos de madera de 7×10 cm de sección transversal y cuatro redondos metálicos $\varnothing 16$ —es decir, de 16 mm de diámetro, paralelos a este. La longitud de los montantes es de 83 cm, para que la altura de la barandilla sea de 90 cm sobre la cara superior del escalón en el centro de este. Las dos vigas IPE-220, cuya sección transversal aparece representada en la esquina superior derecha del dibujo, están separadas 200 cm.

El peso específico de la piedra que forma los escalones es de 23 kN/m^3 , el de la madera del pasamanos, de 5.2 kN/m^3 y el del acero 77 kN/m^3 . De acuerdo con el Eurocódigo 1, las zonas de acceso a edificios de uso público deben proyectarse para que soporten una sobrecarga de uso de 5 kN/m^2 , extendida a la parte de su superficie en que su actuación sea desfavorable, y una puntual de 4 kN , aplicada en el punto pésimo de la superficie, que no actúa simultáneamente con la anterior. Además, se considerará una fuerza horizontal, perpendicular a la barandilla, de 1.5 kN/m , aplicada en el pasamanos, para simular el efecto de una multitud apoyada sobre ella.

Se pide:

1) Indicar si cada uno de los escalones puede calcularse como una viga de Navier-Bernoulli, y, en caso afirmativo, determinar las fuerzas generalizadas y las leyes de esfuerzos sobre uno de ellos, en las hipótesis de carga que originan los máximos momentos flectores positivos y negativos.

2) Determinar las fuerzas generalizadas —incluyendo las que representan los momentos repartidos que suelen despreciarse— sobre las vigas IPE-220, aceptando que el peso de los escalones y de lo que gravite sobre ellos puede representarse mediante fuerzas repartidas sobre los IPE —en rigor, serían fuerzas puntuales en los apoyos



de las pletinas que sustentan los peldaños—.

3) Suponiendo que la escalera tiene 15 peldaños, y que los IPE-220 están articulados en su punto más bajo, y simplemente apoyados en el más alto, de modo que se impide su desplazamiento horizontal, determinar las leyes de esfuerzos sobre ellos, considerando todas las fuerzas generalizadas, incluso las m_1 y m_2 . —La forma de sustentación descrita se ha escogido para que el ejercicio resulte sencillo, pero no es la más razonable en una escalera de este tipo.—

4) Repetir el apartado anterior, pero prescindiendo de las fuerzas generalizadas m_1 y m_2 . Comparar los resultados con los del punto anterior, comprobando que la influencia de estas fuerzas es insignificante.

1.1) Cálculo de los escalones como vigas de Navier-Bernoulli

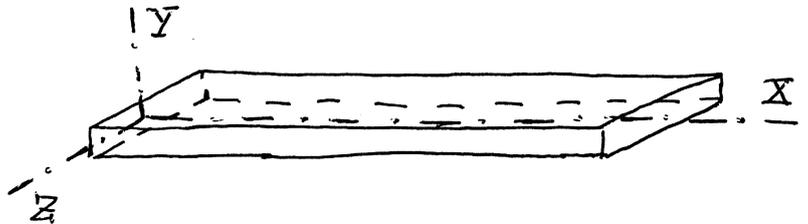
$$L = 200 \text{ cm} \quad b = 33 \text{ cm} \quad h = 7 \text{ cm}.$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{b}{L} &= \frac{33}{200} = \frac{1}{6.06} \\ \frac{h}{L} &= \frac{7}{200} = \frac{1}{28.6} < \frac{1}{10} \end{aligned} \right\} \text{ Satisface estrictamente la limitación del canto, } \frac{h}{L} < \frac{1}{10}.$$

No satisface la limitación de ancho, pero como $\frac{b}{L} < \frac{1}{5}$ podemos admitir como aproximación razonable el cálculo como viga.

1.2) Fuerzas generalizadas sobre el escalón.

Se trata de un problema plano, que resolveremos en los ejes indicados en la figura.



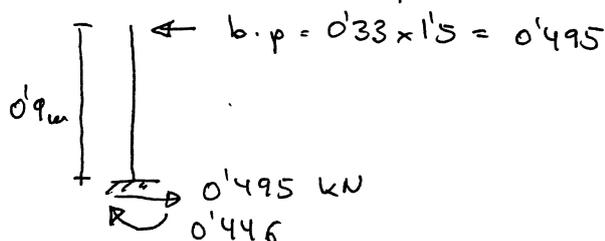
$q_x = 0$ No actúa ninguna fuerza repartida en dirección X.

Cálculo de q_y

- Peso propio $\rightarrow \gamma \cdot b \cdot h = 23 \times 0.33 \times 0.07 = 0.531 \text{ kN/m}$

- Sobrecarga $\rightarrow p \cdot b = 5 \times 0.33 = 1.650 \text{ kN/m}$

Fuerzas transmitidas por el montante de la barandilla



$$\text{Barandilla} \left\{ \begin{aligned} Q_x &= -0.495 \text{ kN} \\ M_z &= 0.446 \text{ kN.m} \end{aligned} \right.$$

Al otro lado, cambian de signo.

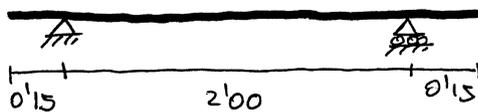
$$Q_{y,sc} = -4.0 \text{ kN}.$$

082

Resumen:

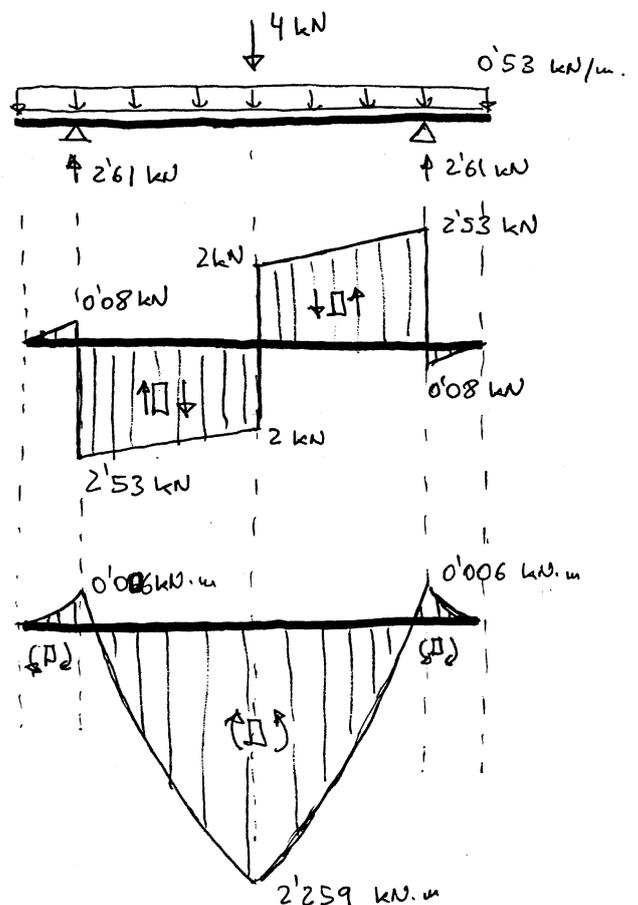
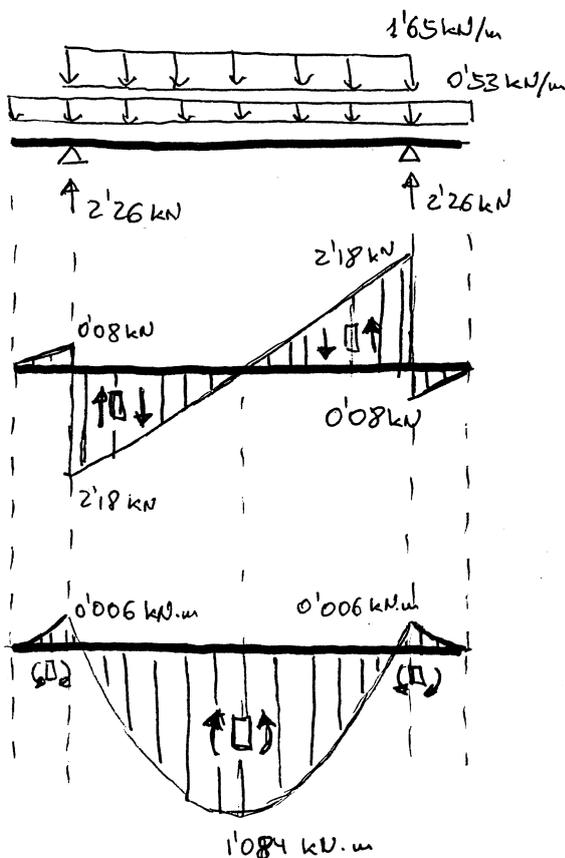
	Fuerzas repartidas		Fuerzas puntuales	
Peso propio	$q_{x,pp} = 0$	$q_{y,pp} = -0.53 \text{ kN/m}$	—	—
Sobrecarga no " barandilla	$q_{x,sc} = 0$	$q_{y,sc} = -1.65 \text{ kN/m}$	$Q_{y,sc} = -4.0 \text{ kN}$	$M_{z,sc} = \pm 0.45 \text{ kN.m}$
		—	$Q_{x,B} = \pm 0.5 \text{ kN}$	

1.3) deyes de esfuerzos sobre el escalón.

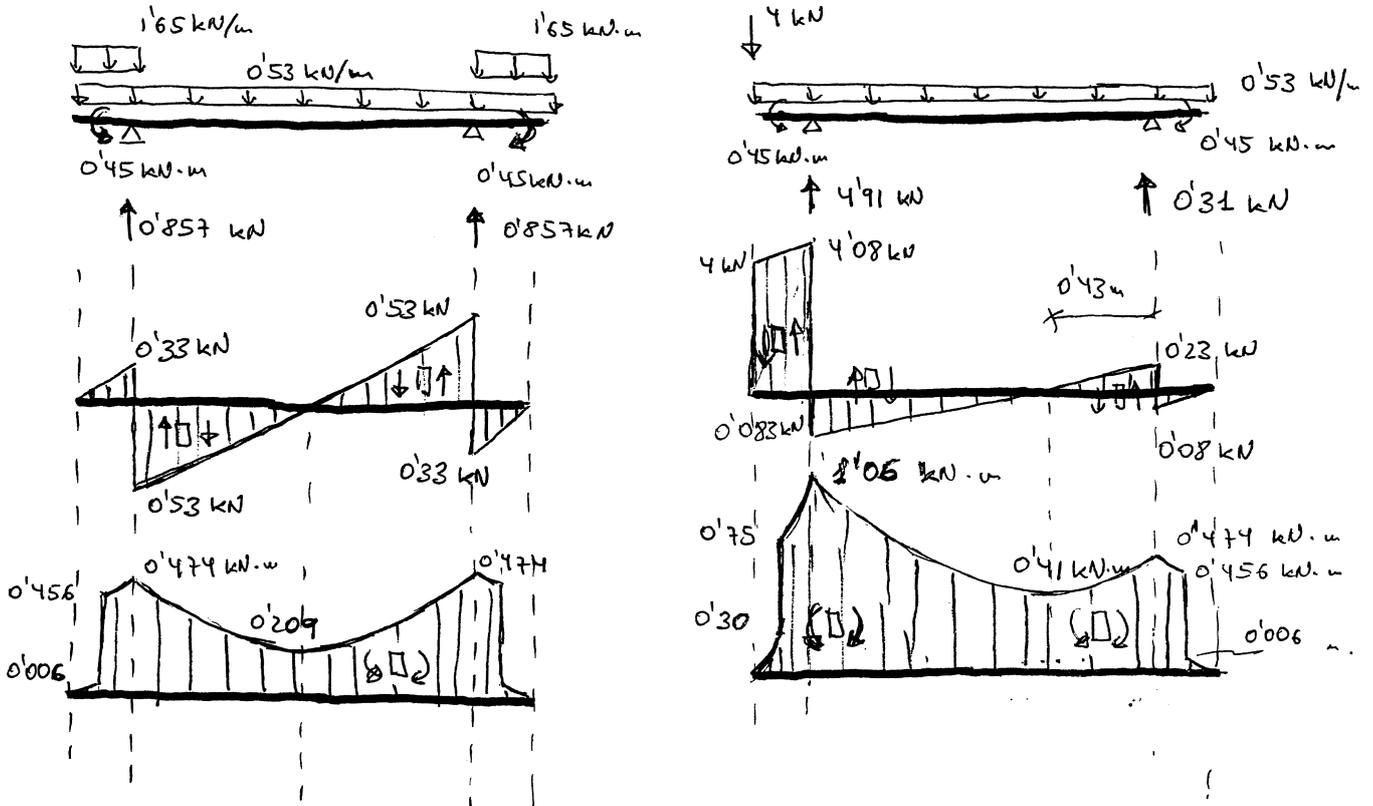


Esquema estructural del escalón.
Es irrelevante a que lado se coloca el apoyo fijo, porque no influye en los esfuerzos debido a cargas verticales y las únicas horizontales están autoequilibradas (carga en ambas barandillas).

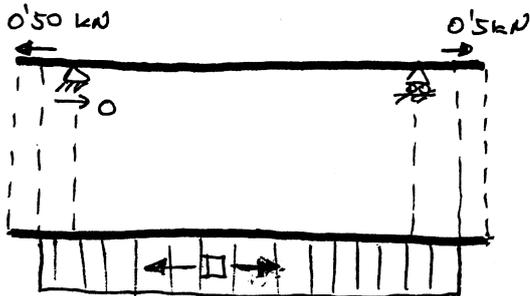
FLECTORES MÁXIMOS:



FLECTORES MÍNIMOS

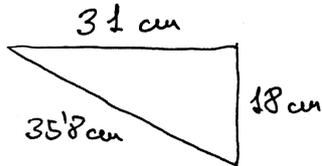


En estos dos últimos casos, además de los cortantes y flectores indicados, actúan unos axiles debidos los fuerzas horizontales en las barandillas, que son



Igual en los dos casos de carga considerados.

2.- Fuerzas generalizadas sobre el IPE.



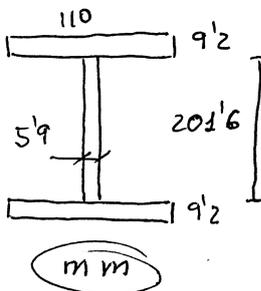
Para hallar las fuerzas verticales determinamos los que actúan sobre cada escalón y consideraremos la unidad sobre cada IPE. Luego repartiremos esta fuerza uniformemente en los 35.8 cm de IPE que corresponden al escalón.

La fuerza puntual de 4 kN la aplicaremos íntegra al IPE que calculamos

$$\text{CARGA MUERTA (PESO ESCALÓN)} \quad \frac{23 \times 0.33 \times 0.07 \times 2.3}{2} = 0.61 \text{ kN} \rightarrow \frac{0.61}{0.358} = 1.71 \text{ kN/m.}$$

$$\text{SOBRECARGA} \quad \frac{5 \times 0.33 \times 2.3}{2} = 1.90 \text{ kN} \rightarrow \frac{1.90}{0.358} = 5.30 \text{ kN/m.}$$

PESO PROPIO



$$A = 2 \times 110 \times 9.2 + 201.6 \times 5.9 = 3213 \text{ mm}^2 = 3.213 \times 10^{-3} \text{ m}^2$$

$$W = \gamma_{\text{ACERO}} \times A = 77 \times 3.213 \times 10^{-3} = 0.25 \text{ kN/m.}$$

PESO DE LA BARANDILLA (POR METRO)

$$\text{Montante} \quad \left(\frac{\pi \times (50^2 - 45^2) \times 10^{-6}}{4} \times 0.83 \times 77 \right) \frac{1}{0.358} = 0.067 \text{ kN/m}$$

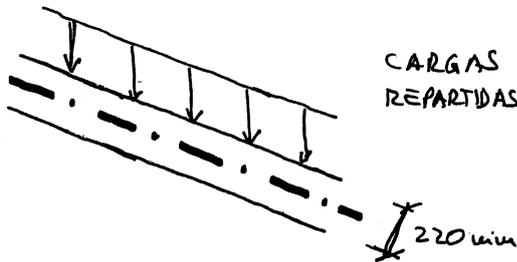
Área sección (m²)
L
γ_{ACERO}

$$\text{Pasamanos} \quad 0.07 \times 0.1 \times 5.2 = 0.036 \text{ kN/m}$$

$$\text{Redondos} \quad \left(\frac{\pi \times 16^2}{4} \times 10^{-6} \times 77 \right) \times 4 = 0.062 \text{ kN/m}$$

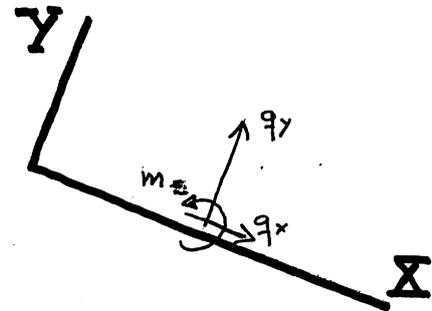
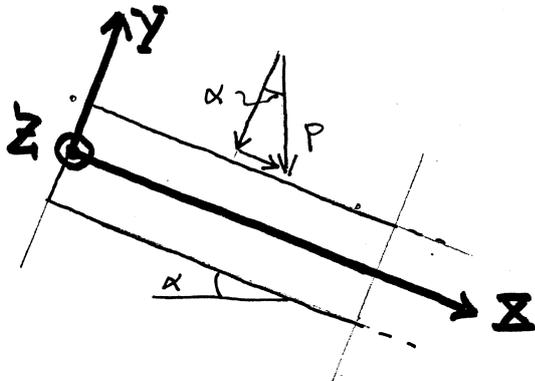
$$\text{Peso total barandilla} \rightarrow 0.165 \text{ kN/m.}$$

DE LAS
RESUMEN FUERZAS SOBRE LA CARA SUPERIOR DEL PERFIL



• CARGAS PERMANENTES:		
PP	→ 0'25	} TOTAL 2'13 kN/m
CP	→ 1'71	
Barandilla	→ 0'17	
• SOBRECARGAS →		5'30 kN/m
FUERZA PUNTUAL →		4'0 kN

FUERZAS GENERALIZADAS



$$q_x = p \sin \alpha \quad " \quad q_y = -p \cos \alpha \quad " \quad m_z = -p \sin \alpha \frac{h}{2}$$

$$\alpha = \arctan \frac{18}{31} = 30'1414''$$

$$h = 0'22 \text{ m (Canto perfil)}$$

Cargas permanentes

$$q_x = 2'13 \sin \alpha = 1'07 \text{ kN/m}$$

$$q_y = -2'13 \cos \alpha = -1'84 \text{ kN/m}$$

$$m_z = -2'13 \sin \alpha \times 0'11 = -0'118 \text{ kN}\cdot\text{m/m}$$

Sobrecargas repartidas

$$q_x = 5'30 \sin \alpha = 2'66 \text{ kN/m}$$

$$q_y = -5'30 \cos \alpha = -4'58 \text{ kN/m}$$

$$m_z = -5'30 \sin \alpha \times 0'11 = -0'293 \text{ kN}\cdot\text{m/m}$$

Sobrecarga puntual

$$Q_x = 4 \sin \alpha = 2'01 \text{ kN}$$

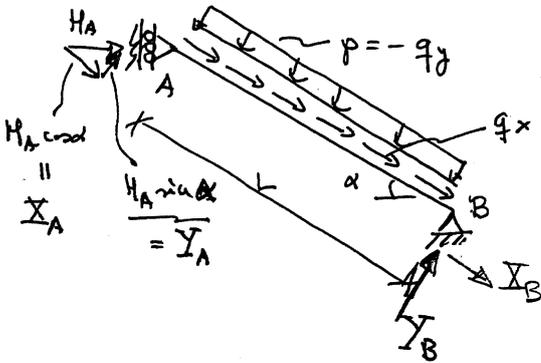
$$Q_y = -4 \cos \alpha = -3'46 \text{ kN}$$

$$M_z = -4 \sin \alpha \times 0'11 = -0'221 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

3) leyes de esfuerzos.

$$L = 15 \times 0.358 = 5.37 \text{ m.}$$

Para resolver a la vez el apartado 4, procederemos ahora por superposición, calculando las leyes debidas a q_x y q_y por una parte, y las debidas a m_z por otra.



$$\circlearrowleft \sum \Pi_B = 0$$

$$pL \frac{L}{2} - H_A \cdot L \sin \alpha = 0$$

$$H_A = \frac{pL}{2 \sin \alpha} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} X_A = \frac{pL}{2 \tan \alpha} \\ Y_A = \frac{pL}{2} \end{array} \right\}$$

$$\sum F_x = 0$$

$$X_A + q_x \cdot L + X_B = 0$$

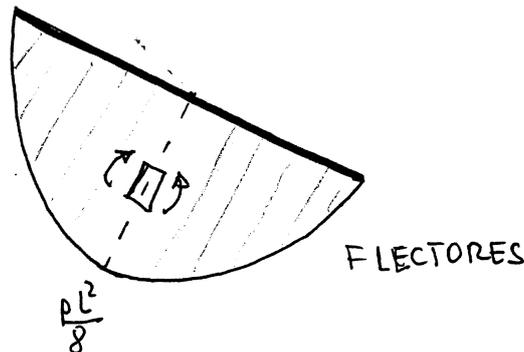
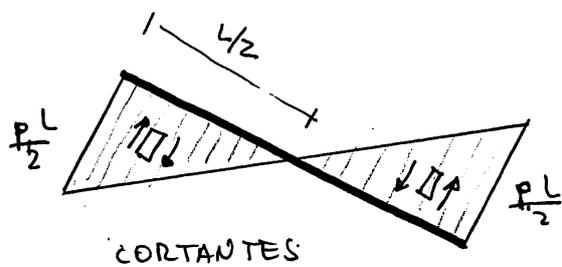
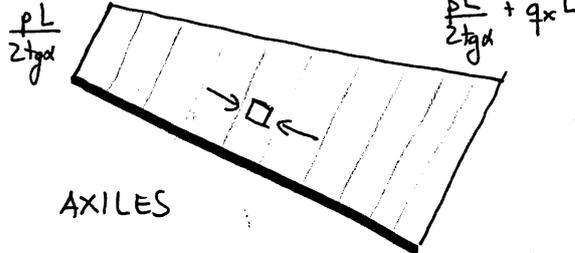
$$X_B = -q_x L - \frac{pL}{2 \tan \alpha}$$

$$\sum F_y = 0$$

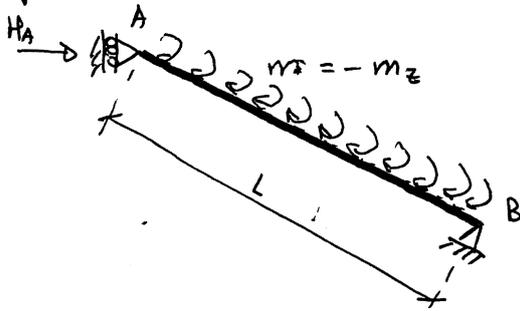
$$Y_A - pL + Y_B = 0$$

$$Y_B = pL - \frac{pL}{2} = \frac{pL}{2}$$

leyes

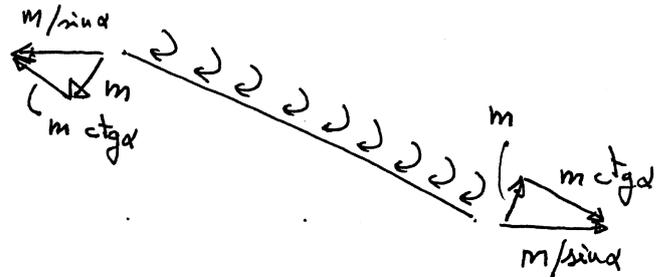


deyes debidas a m_z .

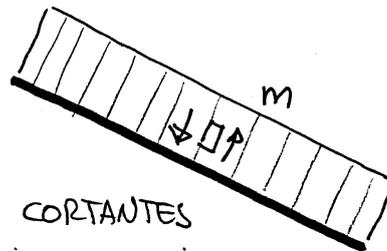
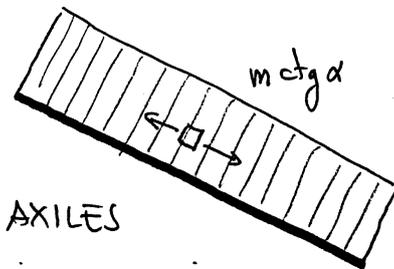


$$\sum \mathcal{H}_A = 0 \quad -mL - H_A \cdot L \sin \alpha = 0$$

$$H_A = -\frac{m}{\sin \alpha}$$



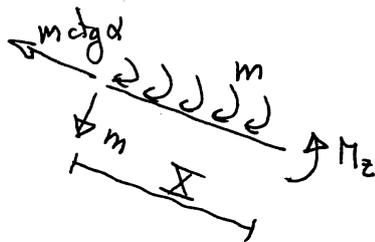
deyes



Flectores \Rightarrow

$$\boxed{M_z = 0}$$

Nótese



$$M_z + mX - mX = 0 \Rightarrow \boxed{M_z = 0}$$

Comparación valores característicos.

$$\alpha = 30'1414^\circ, \quad L = 5'37m.$$

Cargas permanentes

$$q_x = 1'07 \text{ kN/m}, \quad p = -q_y = 1'84 \text{ kN/m}$$

$$m = -m_z = 0'118 \text{ m kN/m}$$

$$N_A = \frac{pL}{2 \operatorname{tg} \alpha} = 8'6 \text{ kN}$$

$$N_A = m \operatorname{ctg} \alpha = 0'20 \text{ kN}$$

$$N_B = \frac{pL}{2 \operatorname{tg} \alpha} + q_x L = 14'4 \text{ kN}$$

$$N_B = N_A = 0'20 \text{ kN}$$

$$Q_A = Q_B = \frac{pL}{2} = 4'9 \text{ kN}$$

$$Q_A = Q_B = m = 0'1 \text{ kN}$$

$$M_c = \frac{qL^2}{8} = 6'66 \text{ m kN}$$

$$M_c = 0$$



Sobrecarga repartida

$$q_x = 2'66 \text{ kN/m} \quad p = -q_y = 4'58 \text{ kN/m}$$

$$N_A = \frac{pL}{2 \operatorname{tg} \alpha} = 21'18 \text{ kN}$$

$$N_B = \frac{pL}{2 \operatorname{tg} \alpha} + q_x L = 35'46 \text{ kN}$$

$$Q_A = Q_B = \frac{pL}{2} = 12'30 \text{ kN}$$

$$M_c = \frac{pL^2}{8} = 16'54 \text{ kN.m}$$

$$m = -m_z = 0'293 \text{ kN.m/m}$$

$$N_A = m \operatorname{ctg} \alpha = 0'505 \text{ kN}$$

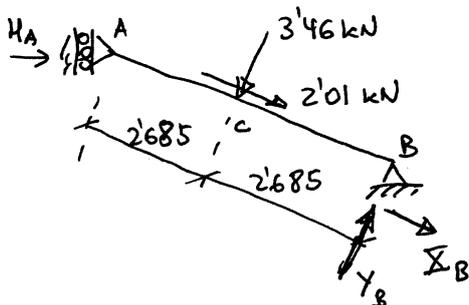
$$N_B = N_A = 0'505 \text{ kN}$$

$$Q_A = Q_B = m = 0'293 \text{ kN}$$

$$M_c = 0$$

Se comprueba que el efecto de m_z es despreciable frente al de q_x y q_y .

ESFUERZOS DEBIDOS A LA FUERZA PUNTUAL

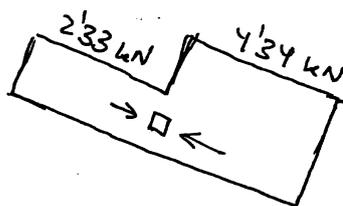


$$\sum M_B = 0 \quad -3'46 \times 2'685 + H_A \times 5'37 \operatorname{sen} \alpha = 0$$

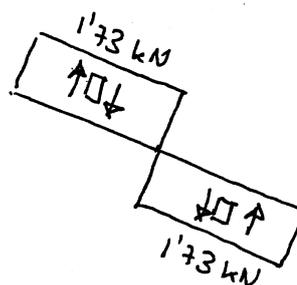
$$H_A = 3'45 \text{ kN} \Rightarrow \begin{cases} X_A = 2'33 \text{ kN} \\ Y_A = 1'73 \text{ kN} \end{cases}$$

$$\sum F_x = 0 \quad X_A + 2'01 + X_B = 0 \Rightarrow X_B = -4'34 \text{ kN}$$

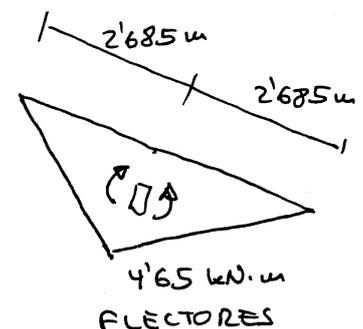
$$\sum F_y = 0 \quad Y_A + Y_B - 3'46 = 0 \Rightarrow Y_B = 1'73 \text{ kN}$$



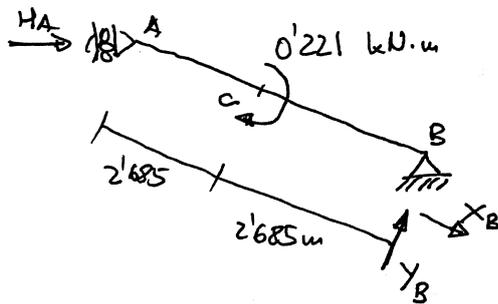
AXILES



CORTANTES



FLECTORES



$$\sum M_B = 0$$

$$H_A \times 5.37 \text{ m} + 0.221 = 0$$

$$H_A = -0.082 \text{ kN} \Rightarrow \begin{cases} X_A = -0.071 \text{ kN} \\ Y_A = -0.041 \text{ kN} \end{cases}$$

$$\sum F_x = 0$$

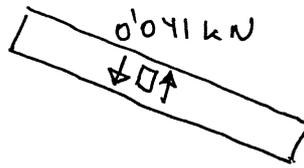
$$X_A + X_B = 0 \Rightarrow X_B = 0.071 \text{ kN}$$

$$\sum F_y = 0$$

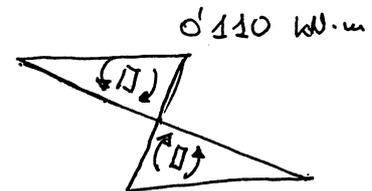
$$Y_A + Y_B = 0 \Rightarrow Y_B = 0.041 \text{ kN}$$



AXILES



CORTANTES



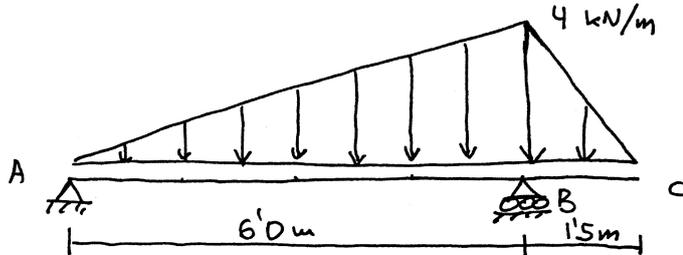
0.110 kN.m.

FLECTORES

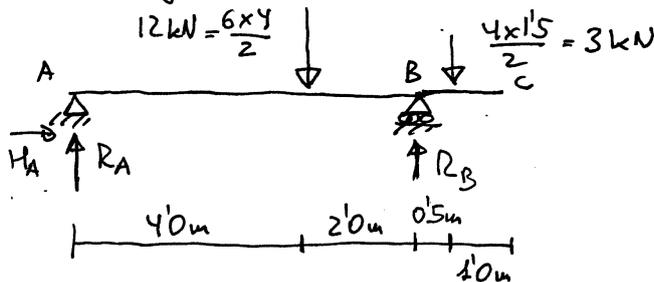
Se comprueba también que los esfuerzos debidos a M_z son despreciables frente a los originados por Q_x y Q_y .

EJERCICIO Nº 27

Determinar las leyes de esfuerzos de la viga



Reacciones. Para determinarlas sustituimos cada tramo de la carga repartida por su resultante (área de la ley de cargas) aplicada en el centro de gravedad de dicha área.



$$\sum F_H = 0 \Rightarrow H_A = 0$$

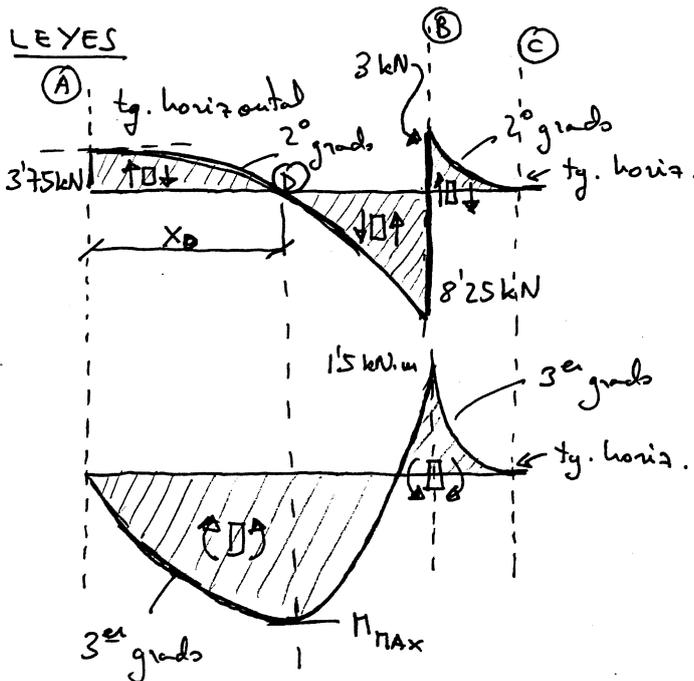
$$\sum M_A = 0 \quad 12 \times 4 + 3 \times 6.5 - 6 R_B = 0$$

$$R_B = 11.25 \text{ kN}$$

$$\sum F_V = 0 \quad R_A + R_B - 12 - 3 = 0$$

$$R_A = 3.75 \text{ kN}$$

LEYES



Para dibujar las leyes representamos todos a la izquierda y acotamos los valores que figuran en ellas no es necesario realizar casi ningún cálculo. Describiremos únicamente como se determinan.



$$1.- \left. \begin{array}{l} q_y \text{ varía linealmente en } AB \\ \frac{dQ_y}{dX} = -q_y \end{array} \right\} \Rightarrow Q_y \text{ es un polinomio de grado 2.}$$

$$\left. \begin{array}{l} q_y = 0 \text{ en } A \\ \frac{dQ_y}{dX} = -q_y \end{array} \right\} \Rightarrow Q_y \text{ tiene tangente horiz. en } A.$$

Por el mismo razonamiento $\Rightarrow Q_y$ es de 2º grado en BC y tiene tangente horizontal en C.

$$2.- |Q_A| = |R_A| = 3.75 \text{ kN}$$

$$|Q_B^-| = |12 - R_A| = 8.25 \text{ kN}, \quad 12 = \text{Resultante de } q_y \text{ en } AB$$

$$|Q_B^+| = 3 \text{ kN} = \text{Resultante } q_y \text{ en } BC.$$

Los signos son evidentes. Se comprueba que el salto del cortante en B ($|Q_B^-| + |Q_B^+|$) coincide con $|R_B|$, como debe ser.

$$3.- \left. \begin{array}{l} Q_y \text{ de } 2^\circ \text{ grado} \\ \frac{dM_z}{dX} = -Q_y \end{array} \right\} \Rightarrow M_z \text{ es un polinomio de } 3^\circ \text{ grado}$$

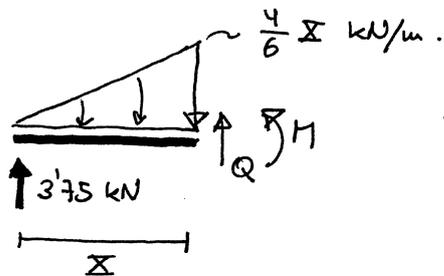
$$\left. \begin{array}{l} Q_y = 0 \text{ en } C \text{ y en } D \\ \frac{dM_z}{dX} = -Q_y \end{array} \right\} \Rightarrow M_z \text{ tiene tangente horizontal (es decir, presenta un extremo relativo) en } C \text{ y } D.$$

$$4.- M_A \equiv M_C \equiv 0 \quad \leftarrow \text{No hay momentos aplicados en los extremos.}$$

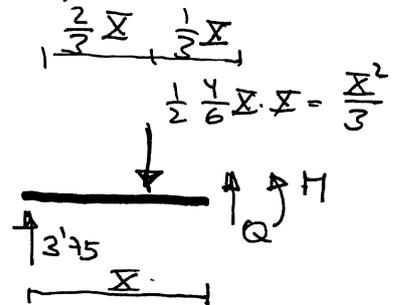
$$|M_B| = 0.5 \times 3 = 1.5 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

Los signos también son evidentes.

Para determinar X_D y M_{MAX} plantearemos el equilibrio de un tramo de viga entre A y un punto genérico.



EQUIVALENTE A



$$Q = \frac{X^2}{3} - 3'75$$

$$M = 3'75X - \frac{X^2}{3} \cdot \frac{X}{3} = 3'75X - \frac{X^3}{9}$$

Punto D $\rightarrow Q = 0 = \frac{X^2}{3} - 3'75 \Rightarrow \boxed{X_D = \sqrt{3 \times 3'75} = 3'35 \text{ m.}}$

$$\boxed{M_{MAX} = M(3'35) = 8'39 \text{ kN.m.}}$$

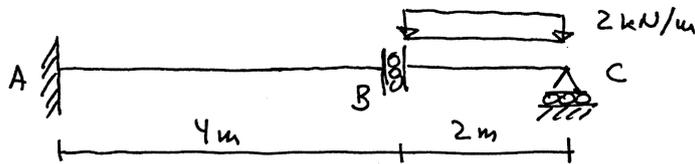
COMENTARIO FINAL:

En general, los estudiantes primerizos tienden a determinar analíticamente las leyes, tramo a tramo, como acabamos de hacer arriba, para luego representarlas. No es un buen procedimiento, porque se alarga demasiado y porque la mayor parte de las veces es tan difícil dibujar la curva a partir de su expresión analítica como hacerlo directamente.

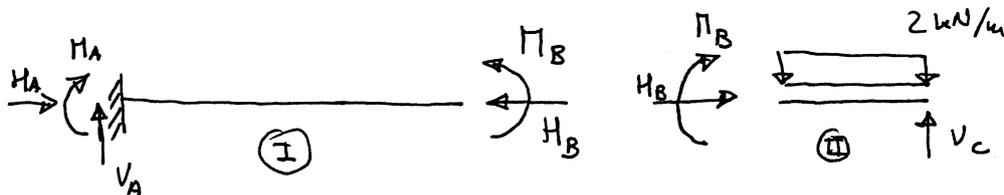
Se recomienda proceder siempre como en este ejercicio, por supuesto sin escribir los razonamientos de la página anterior ni los cálculos allí descritos, que se harían mentalmente o con la calculadora. Solo se recomienda recurrir a las expresiones analíticas para determinar algún valor particular (como X_D y M_{max} en nuestro ejemplo) de difícil obtención por otro camino.

EJERCICIO Nº 28

DETERMINAR LAS LEYES DE ESFUERZOS DE LA ESTRUCTURA

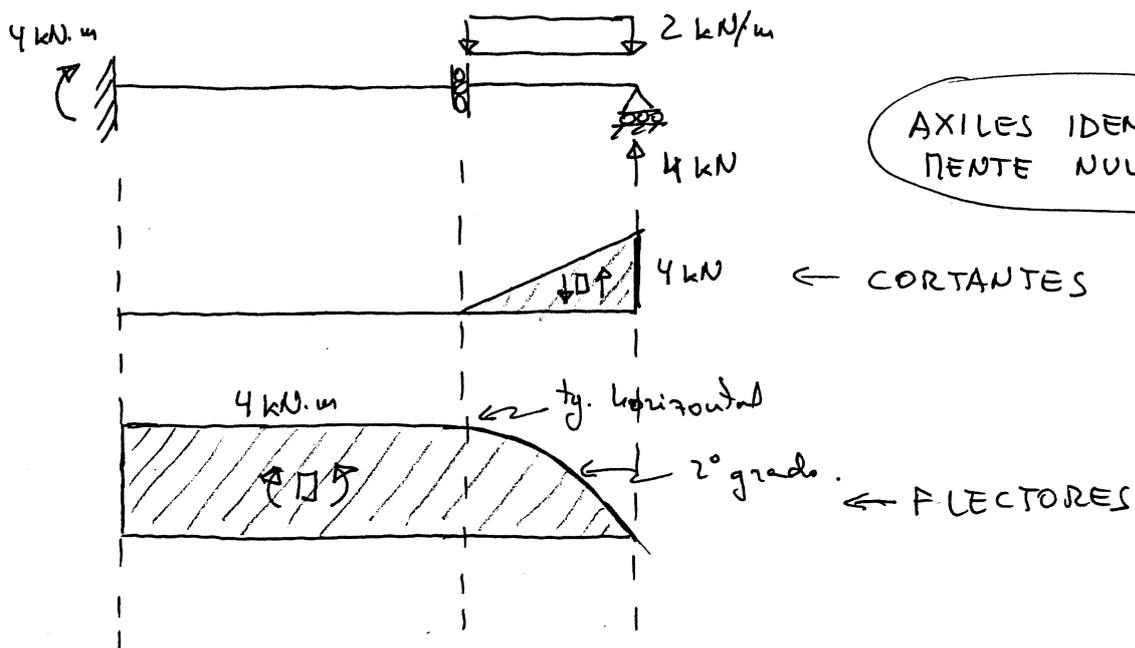


REACCIONES Y LEYES



$$\textcircled{\text{II}} \Rightarrow \begin{cases} \sum F_H = 0 & \rightarrow H_B = 0 \\ \sum F_V = 0 & \rightarrow V_C = 2 \times 2 = 4 \text{ kN} \\ \sum M_B = 0 & \rightarrow 2 \times 2 \times 1 + M_B - 4 \times 2 = 0 \rightarrow M_B = 4 \text{ kN}\cdot\text{m} \end{cases}$$

$$\textcircled{\text{I}} \Rightarrow \begin{cases} \sum F_H = 0 & \rightarrow H_A = H_B = 0 \\ \sum F_V = 0 & \rightarrow V_A = 0 \\ \sum M = 0 & \rightarrow M_A = M_B = 4 \text{ kN}\cdot\text{m} \end{cases}$$

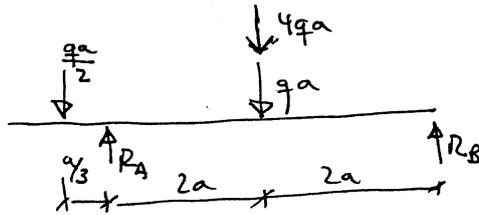
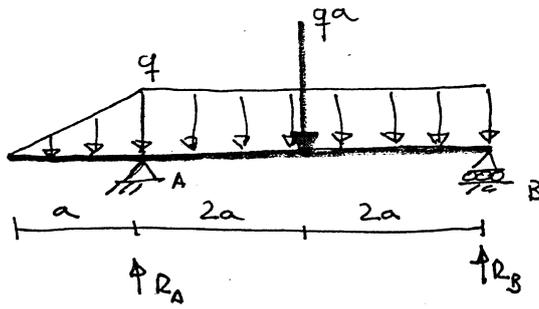




EJERCICIO N.º 29

Curso

Grupo



$$\sum F_H = 0 \Rightarrow H_A = 0$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow$$

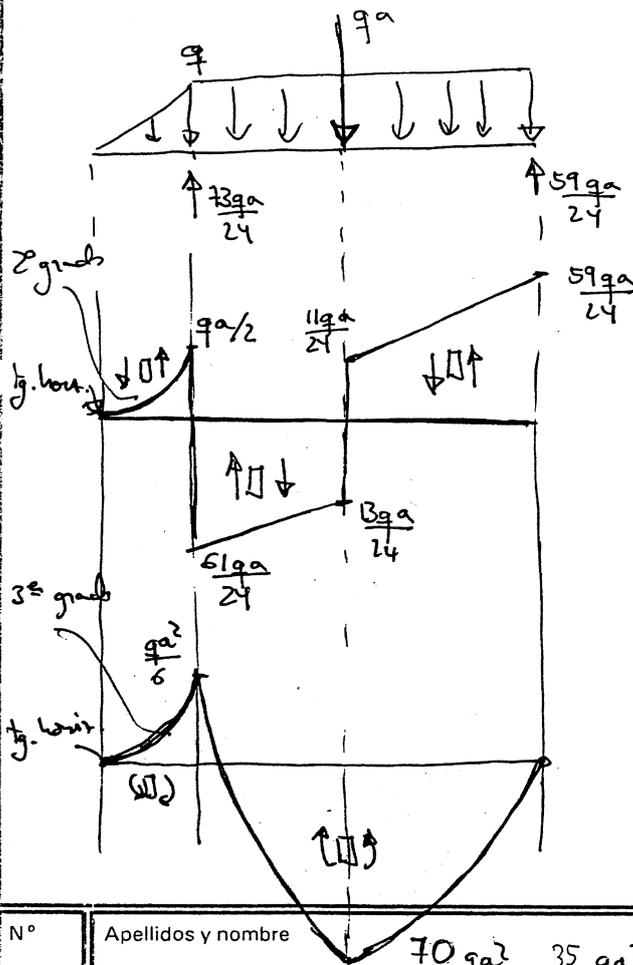
$$5qa \cdot 2a - \frac{qa}{2} \cdot \frac{a}{3} - 4aR_B = 0$$

$$R_B = \frac{1}{4a} \left(10qa^2 - \frac{qa^2}{6} \right)$$

$$= \frac{59qa}{24}$$

$$\sum F_V = 0 \quad 5qa + \frac{qa}{2} - \frac{59qa}{24} - R_A = 0$$

$$R_A = \frac{73qa}{24}$$



Reproval PAPEL 100% RECICLADO

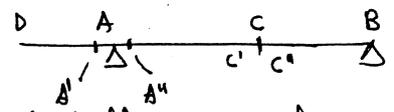
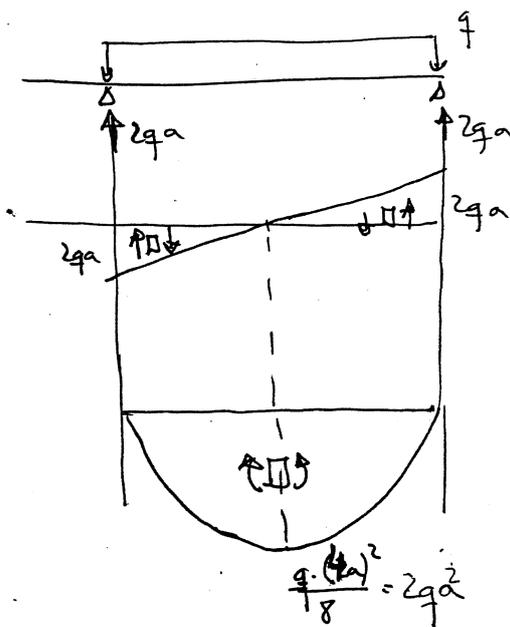
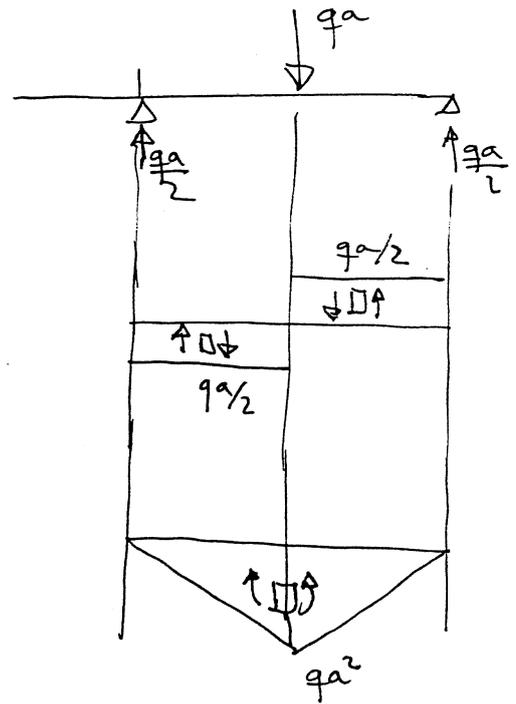
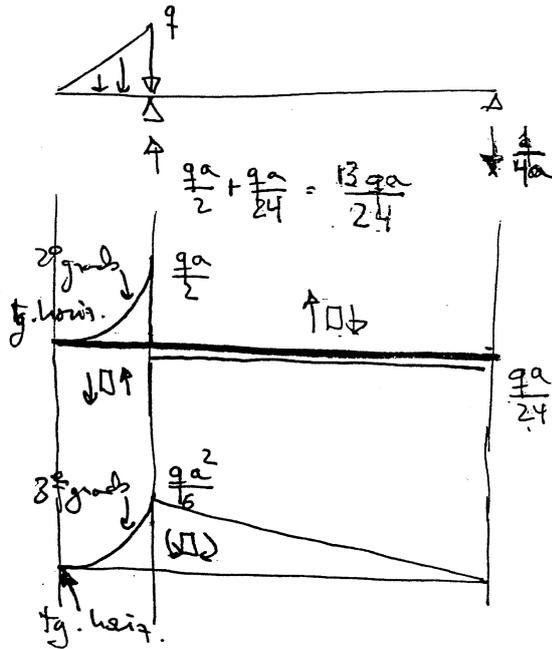
N.º

Apellidos y nombre

$$\frac{70qa^2}{24} = \frac{35qa^2}{12}$$

Firma

Fecha



Superposición (Esquemas → pag. anterior) sólo hallamos los valores en los pts. característicos.

$$Q_D = 0 \quad \text{''} \quad M_D = 0 \quad \text{''} \quad Q_{A'} = \frac{qa}{2} \quad \text{''} \quad M_{A'} = -\frac{qa^2}{6} \quad \text{''}$$

$$Q_{A''} = -\frac{qa}{24} - 2qa - \frac{qa}{2} = -\frac{61qa}{24} \quad \text{''} \quad M_{A''} = -\frac{qa^2}{6} + 0 + 0 = -\frac{qa^2}{6}$$

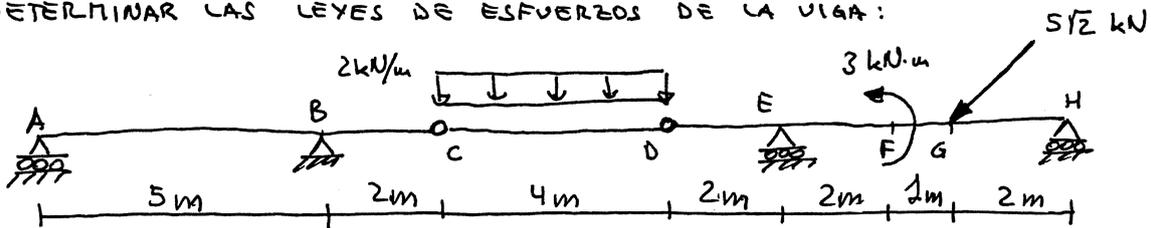
$$Q_C' = -\frac{qa}{24} + 0 - \frac{qa}{2} = -\frac{13qa}{24} \quad \text{''} \quad Q_C'' = -\frac{qa}{24} + 0 + \frac{qa}{2} = \frac{11qa}{24} \quad \text{''}$$

$$M_C = -\frac{qa^2}{12} + 2qa + qa^2 = +\frac{35qa^2}{12} \quad \text{''} \quad Q_B = -\frac{qa}{24} + 2qa + \frac{qa}{2} = \frac{59qa}{24} \quad \text{''} \quad M_B = 0 + 0 + 0 = 0$$

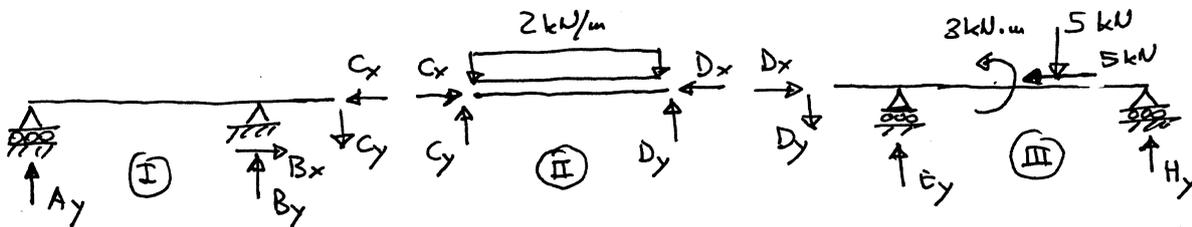


EJERCICIO N°30

DETERMINAR LAS LEYES DE ESFUERZOS DE LA VIGA:



REACCIONES:



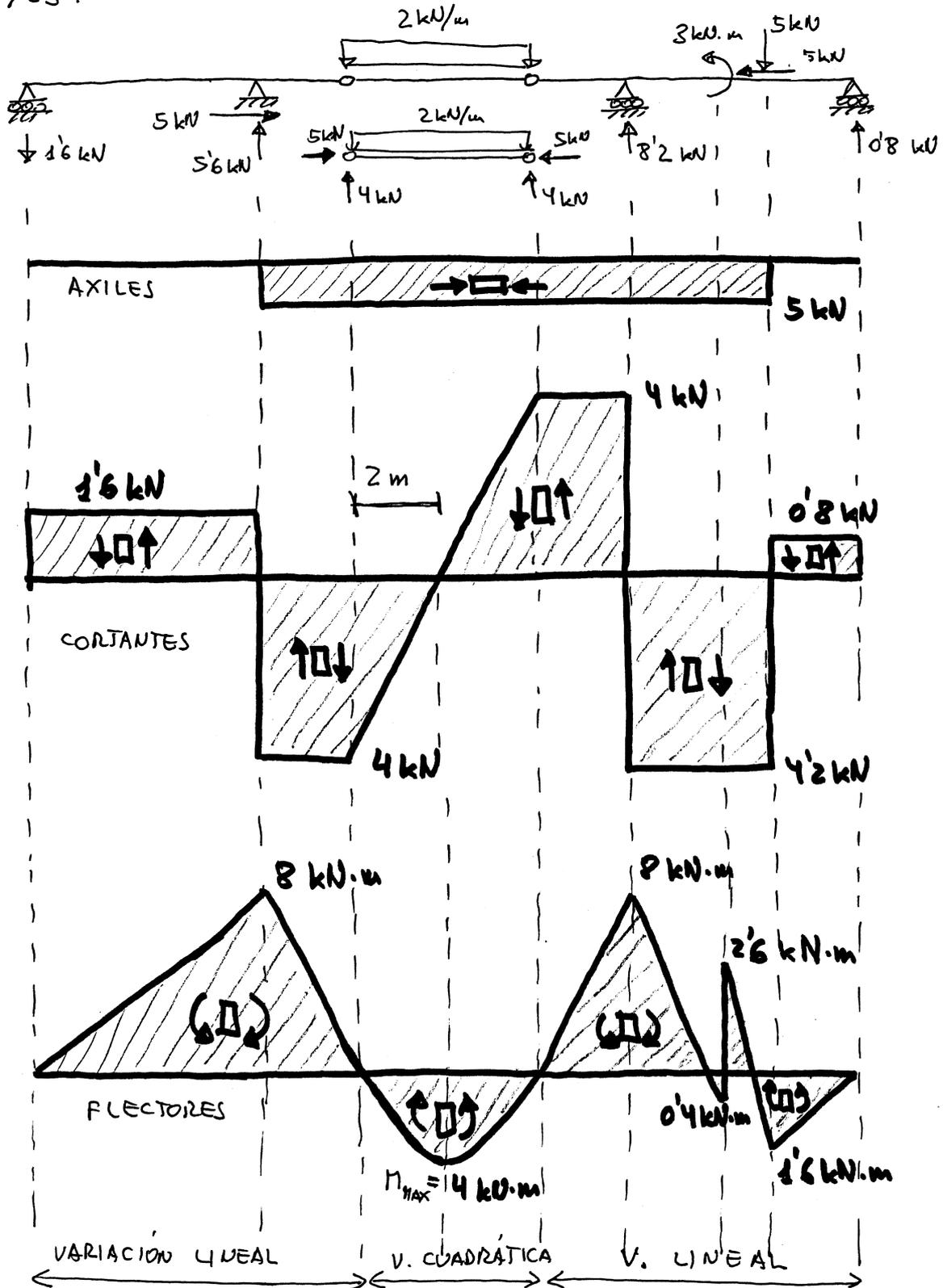
$$\textcircled{\text{II}} \begin{cases} \sum \mathcal{M}_c = 0 & 2 \times 4 \times \frac{4}{2} - 4 \times D_y = 0 \Rightarrow D_y = 4 \text{ kN} \\ \sum F_v = 0 & C_y + D_y - 2 \times 4 = 0 \Rightarrow C_y = 4 \text{ kN} \\ \sum F_H = 0 & C_x = D_x \end{cases}$$

$$\textcircled{\text{III}} \begin{cases} \sum F_H = 0 & D_x - 5 = 0 \Rightarrow D_x = 5 \text{ kN} \Rightarrow C_x = 5 \text{ kN} \\ \sum \mathcal{M}_e = 0 & 5H_y - 5 \times 3 + 3 + 2D_y = 0 \Rightarrow H_y = \frac{4}{5} = 0'8 \text{ kN} \\ \sum F_v = 0 & E_y + H_y - 5 - D_y = 0 \Rightarrow E_y = -\frac{41}{5} = -8'2 \text{ kN} \end{cases}$$

$$\textcircled{\text{I}} \begin{cases} \sum F_H = 0 & B_x = C_x \Rightarrow B_x = 5 \text{ kN} \\ \sum \mathcal{M}_a = 0 & 2C_y + 5A_y = 0 \Rightarrow A_y = -\frac{8}{5} = -1'6 \text{ kN} \\ \sum F_v = 0 & A_y + B_y - C_y = 0 \Rightarrow B_y = \frac{28}{5} = 5'6 \text{ kN} \end{cases}$$



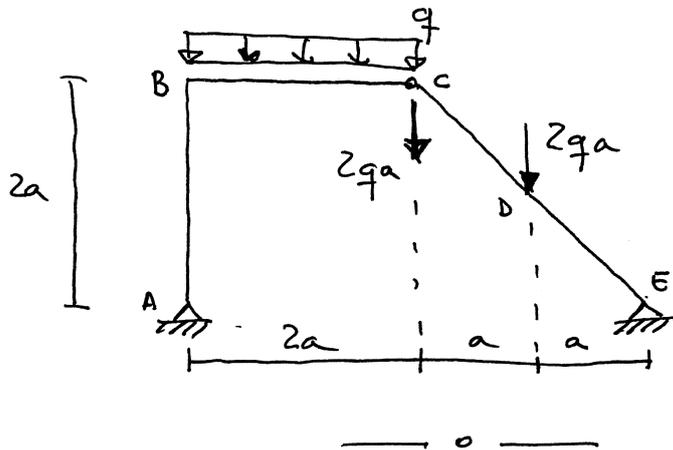
LEYES :



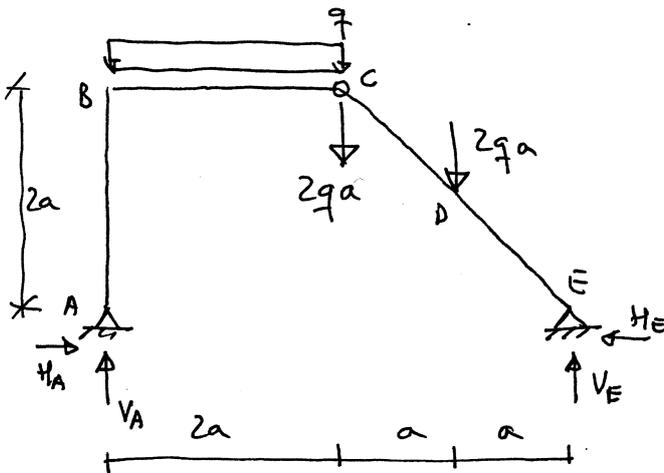


EJERCICIO Nº 31.

DETERMINAR LAS LEYES DE ESFUERZOS EN LA ESTRUCTURA PLANA



REACCIONES



$$\Sigma F_H = 0 \Rightarrow H_A = H_E$$

$$\textcircled{2} \Sigma M_A = 0$$

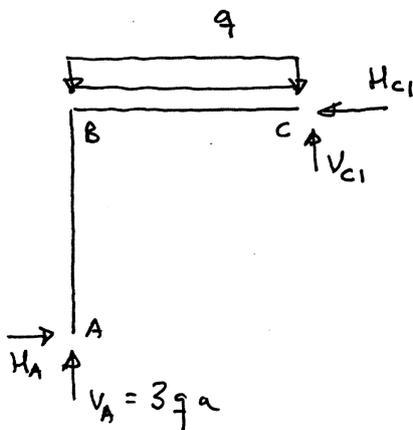
$$4aV_E - 2qa \cdot a - 2qa \cdot 2a - 2qa \cdot 3a = 0$$

$$\boxed{V_E = 3qa}$$

$$\Sigma F_V = 0$$

$$V_A + V_E - 2qa - 2qa - 2qa = 0$$

$$\boxed{V_A = 3qa}$$



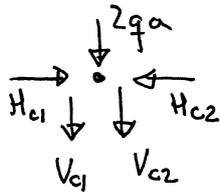
$$\Sigma M_C = 0 \rightarrow 2qa \cdot a + 2a H_A - V_A \cdot 2a = 0$$

$$\boxed{H_A = \frac{2aV_A - 2qa^2}{2a} = 2qa}$$

$$\Sigma F_H = 0 \quad \boxed{H_{c1} = H_A = 2qa}$$

$$\Sigma F_V = 0 \quad V_{c1} + V_A - 2qa = 0$$

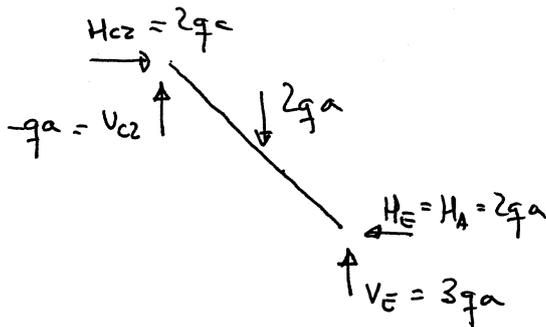
$$\boxed{V_{c1} = -qa}$$



$$\Sigma F_H = 0 \Rightarrow H_{c2} = H_{c1} = 2qa$$

$$\Sigma F_V = 0 \Rightarrow V_{c1} + V_{c2} + 2qa = 0$$

$$V_{c2} = -qa$$



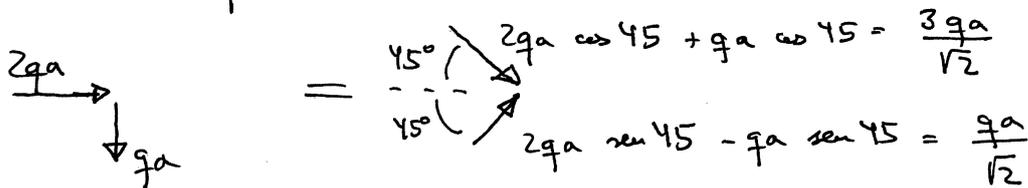
$$\Sigma F_H = 0 \quad 2qa - 2qa = 0$$

$$\Sigma M_c = 0 \quad 2qa \cdot a - H_{c2} \cdot 2a - V_{c2} \cdot 2a = 2qa^2 - 4qa^2 - (-2qa^2) = 0$$

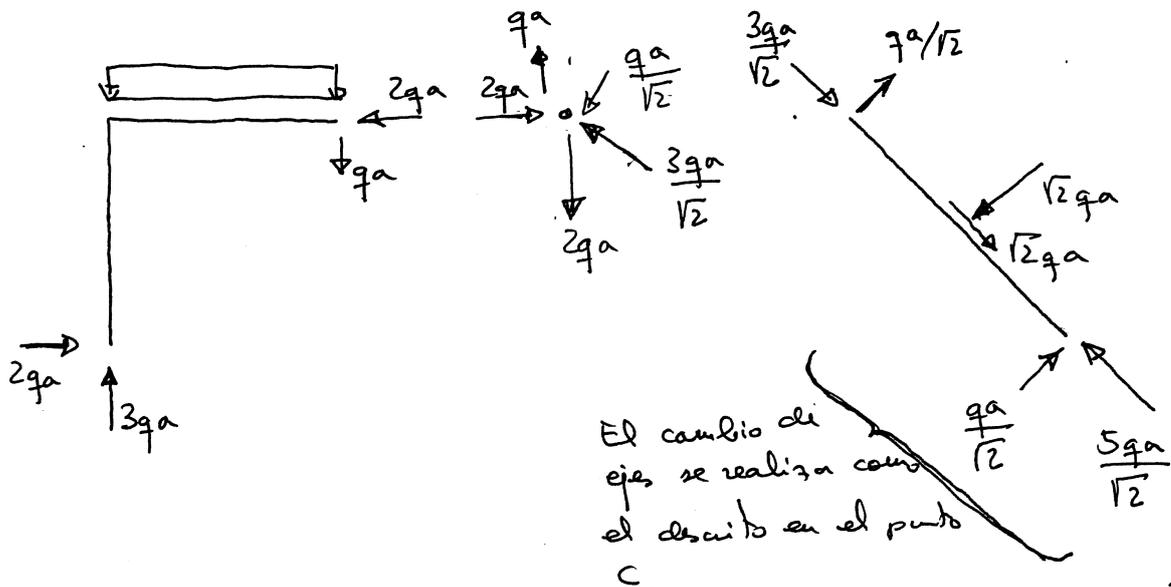
$$\Sigma F_V = 0 \quad V_{c2} + V_e - 2qa = -qa + 3qa - 2qa = 0$$

Comprobación correcta.

Cambio de ejes de las reacciones Hc2 y Vc2.



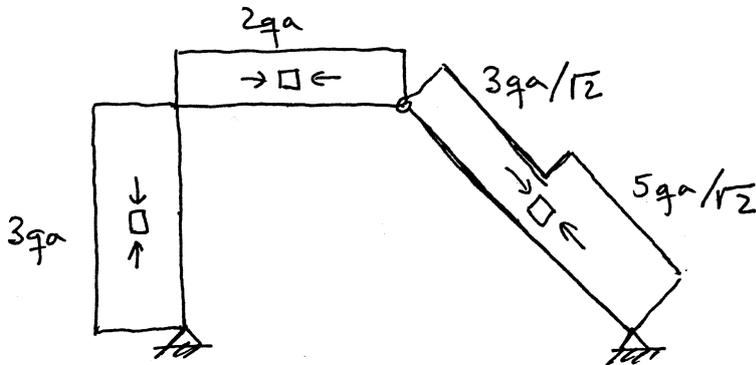
Resumen de fuerzas exteriores y reacciones externas e internas



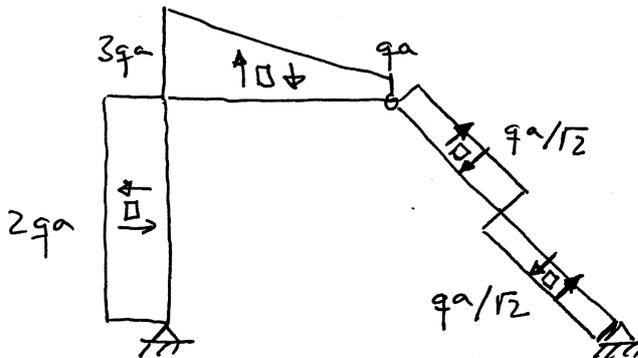
El cambio de ejes se realiza como el descrito en el punto C.



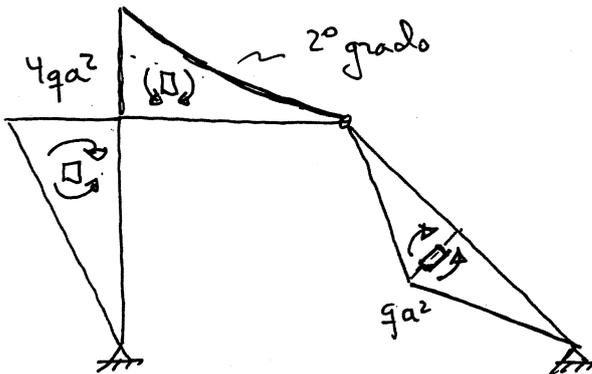
LEYES DE ESFUERZOS



AXILES



CORTANTES .



FLECTORES

Distribución de tensiones normales

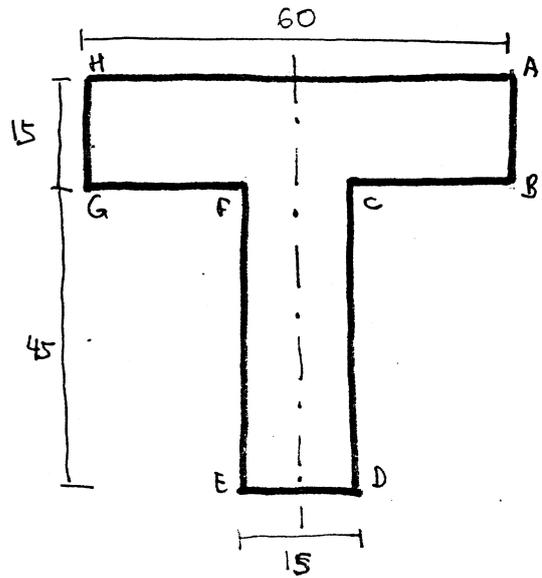


EJERCICIO Nº 32

HALLAR EL NÚCLEO CENTRAL DE LA SECCIÓN REPRESENTADA EN LA FIGURA.

DEMOSTRAR QUE, EL PUNTO DE PASO P DEL AXIL, CUANDO LA FIBRA NEUTRA ES UNA RECTA QUE PASA POR A Y NO CORTA LA SECCIÓN, PERTENECE AL SEGMENTO $[P_1, P_2]$, DONDE

P_1 ES EL PUNTO DE PASO CUANDO LA F.N. ES AB
 P_2 " " " " " " " " " HA.



$$A = \frac{15 \times 60}{900} + \frac{15 \times 45}{675} = 1575 \text{ cm}^2$$

$$d_g = \frac{7.5 \times 900 + 37.5 \times 675}{1575} = 20.4 \text{ cm.}$$

$$I_y = \frac{60 \times 15^3}{12} + 900 \times (20.4 - 7.5)^2 + \frac{15 \times 45^3}{12} + 675 \times (37.5 - 20.4)^2$$

$$= 16875 + 149769 + 113906 + 197377 = 477927 \text{ cm}^4 \approx 478.000 \text{ cm}^4$$

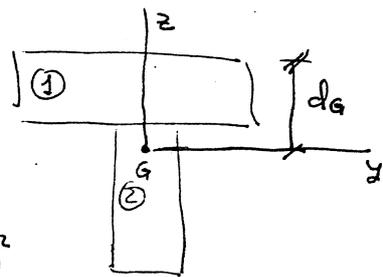
$$I_z = \frac{15 \times 60^3}{12} + \frac{45 \times 15^3}{12} = 270.000 + 12656 = 282656 \text{ cm}^4 \approx 283.000 \text{ cm}^4$$

F.N. \equiv HA $\rightarrow z = 20.4 \text{ cm.}$ $(pY + qZ = r)$ $\begin{cases} p=0 \\ q=1 \\ r=20.4 \end{cases}$

$$\frac{2/I_z}{p} = \frac{\sum I_y}{q} = \frac{-1/A}{r}$$

$$\frac{2/I_z}{0} = \frac{\sum I_y}{1} = \frac{-1/A}{20.4}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 20.4 \frac{2}{I_z} = 0 \Rightarrow 2 = 0 \\ \frac{20.4 \sum I_y}{478.000} = -\frac{1}{1575} \Rightarrow \sum I_y = -14.9 \text{ cm.} \end{cases}$$



$$\underline{F.N. \equiv AB} \rightarrow Y = 30 \quad \left(\frac{\sum Y}{I_z} + \frac{\sum Z}{I_y} = -\frac{1}{A} \right)$$

$$\frac{\sum Y}{I_z} = \frac{\sum Z}{I_y} = \frac{-1/A}{30} \Rightarrow \sum Z = 0$$

$$\frac{30 \eta}{I_z} = -\frac{1}{A} \Rightarrow \eta = -\frac{I_z}{30A} = -5.99 \text{ cm}$$

F.N. \equiv B.D.

$$\left. \begin{array}{l} B(30, 5.4) \\ C(7.5, -39.6) \end{array} \right\} \frac{Y - Y_B}{Y_C - Y_B} = \frac{Z - Z_B}{Z_C - Z_B} \rightarrow \frac{Y - 30}{7.5 - 30} = \frac{Z - 5.4}{-39.6 - 5.4}$$

$$22.5 \cdot (Z - 5.4) = 45 (Y - 30)$$

$$22.5 Z + 45 Y + 1228.5 = 0$$

$$\frac{\sum Y}{I_z} = \frac{\sum Z}{I_y} = \frac{-1/A}{1228.5} \Rightarrow 1228.5 \frac{\eta}{I_z} = \frac{-45}{A} \Rightarrow \eta = -6.58 \text{ cm.}$$

$$1228.5 \frac{\xi}{I_y} = \frac{22.5}{A} \Rightarrow \xi = 5.56 \text{ cm.}$$

F.N. \equiv ED. $Z = - (60 - 20.4) = -39.6 \text{ cm.}$

$$\frac{\sum Y}{I_z} = \frac{\sum Z}{I_y} = \frac{-1/A}{-39.6} \Rightarrow \eta = 0$$

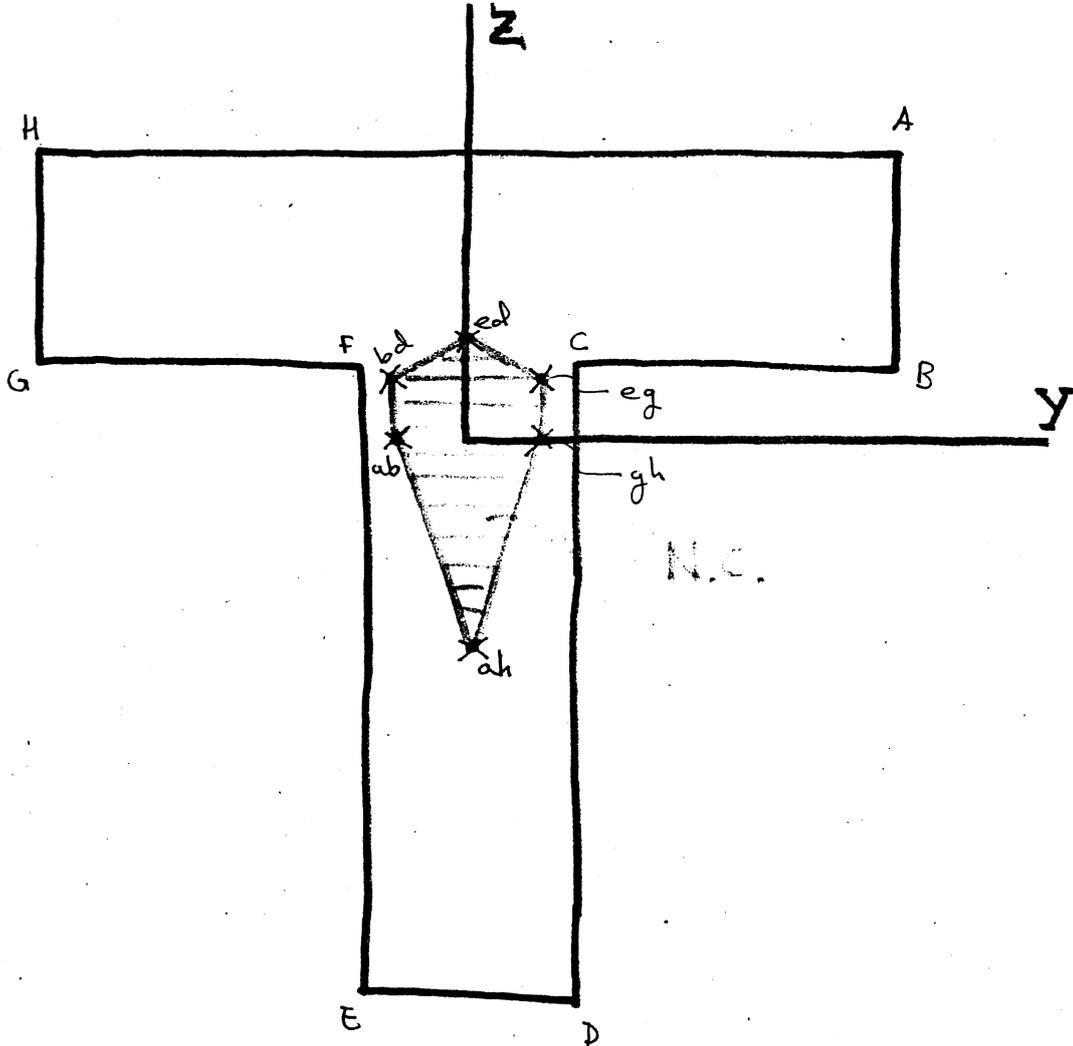
$$39.6 \frac{\xi}{I_y} = \frac{1}{A} \Rightarrow \xi = 7.66 \text{ cm.}$$



Asignatura

Curso

Grupo



Nº

Apellidos y nombre

Firma

Fecha 107

DEMOSTRAR QUE $P \in [P_1, P_2]$ SIENDO

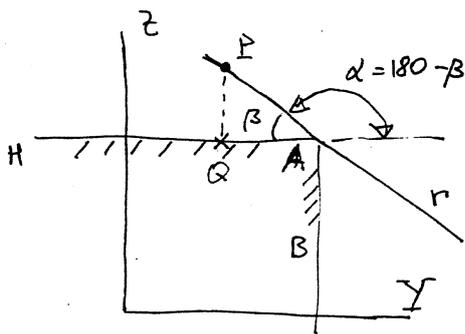
(4/4)

$P_1 =$ PUNTO PASO DEL AXIL CORRESPONDIENTE A QUE AB SEA LA F.U.

$P_2 \rightarrow$ " " " " " " " " HA " " " "

$P \rightarrow$ " " " " " " " " LA FIBRA NEUTRA

SEA UNA RECTA QUE PASE POR A Y NO CORTE A LA SECCIÓN.



$$A(30, 20.4) \quad P(Y, z_1) \in r$$

$$\frac{z_1 - z_A}{y_A - y_P} = \operatorname{tg} \beta = -\operatorname{tg} \alpha$$

$$\frac{z_1 - 20.4}{30 - Y} = \operatorname{tg} \beta$$

$$z_1 - 20.4 = (\operatorname{tg} \beta)(30 - Y) \rightarrow z_1 + \operatorname{tg} \beta Y - 20.4 - 30 \operatorname{tg} \beta = 0$$

$$\beta \in [0, 90^\circ] \Rightarrow \operatorname{tg} \beta > 0$$

$$\frac{z/I_z}{\operatorname{tg} \beta} = \frac{\xi/I_y}{1} = \frac{-1/A}{+20.4 + 30 \operatorname{tg} \beta}$$

$$(+20.4 + 30 \operatorname{tg} \beta) \frac{\xi}{I_y} = -\frac{1}{A} \Rightarrow \xi = \frac{-I_y}{(20.4 + 30 \operatorname{tg} \beta) A} = -\frac{303.49}{20.4 + 30 \operatorname{tg} \beta}$$

$$(20.4 + 30 \operatorname{tg} \beta) \frac{z}{I_z} = -\frac{\operatorname{tg} \beta}{A} \Rightarrow z = \frac{-\operatorname{tg} \beta \cdot I_z}{(20.4 + 30 \operatorname{tg} \beta) A} = -\frac{145.40 \operatorname{tg} \beta}{20.4 + 30 \operatorname{tg} \beta}$$

$$\beta = 0 \rightarrow \operatorname{tg} \beta = 0 \rightarrow z = 0, \xi = 14.9 \text{ cm}$$

$$\beta \rightarrow 90 \rightarrow \operatorname{tg} \beta \rightarrow \infty \rightarrow \xi \rightarrow 0, z \rightarrow -4.9 \text{ cm.}$$

} c.g.d.



EJERCICIO nº 33

Curso

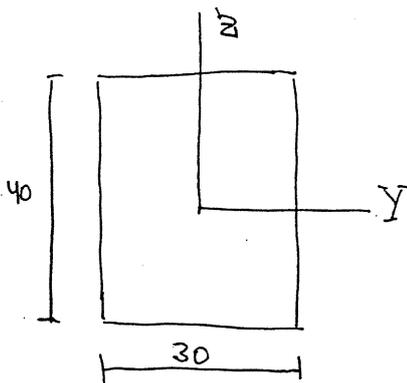
Grupo

SECCION RECTANGULAR DE 30 cm DE ANCHO Y 40 cm DE CANTO.

$$N = 120 \text{ kN}, \quad M_y = 160 \text{ u kN}, \quad M_z = -18 \text{ u kN}$$

SE PIDE:

- Determinar la fibra neutra, representándola sobre un esquema de la sección.
- Determinar el punto P ^{de la sección} donde se produce la mayor compresión y el punto Q , donde se produce la mayor tracción, hallando los valores de las mismas.
- Dibujar un esquema de la distribución de tensiones normales.



$$A = 1200 \text{ cm}^2 = 0.12 \text{ m}^2$$

$$I_y = \frac{30 \times 40^3}{12} = 160.000 \text{ cm}^4 = 0.0016 \text{ m}^4$$

$$I_z = \frac{40 \times 30^3}{12} = 90.000 \text{ cm}^4 = 0.0009 \text{ m}^4$$

$$1) \quad \frac{N}{A} + \frac{M_y}{I_y} z - \frac{M_z}{I_z} Y = 0$$

$$\frac{120}{0.12} + \frac{-160}{0.0016} z - \frac{(-18)}{0.0009} Y = 0 \quad \rightarrow \quad 1000 + 100.000 z + 20.000 Y = 0$$

$$1 + 100 z + 20 Y = 0$$

Ptos corte con los ejes

$$Y = 0 \quad \rightarrow \quad z = \frac{1}{100} = -0.01 \text{ m} = -1 \text{ cm.}$$

$$z = 0 \quad \rightarrow \quad Y = -\frac{1}{20} = -0.05 \text{ m} = -5 \text{ cm.}$$

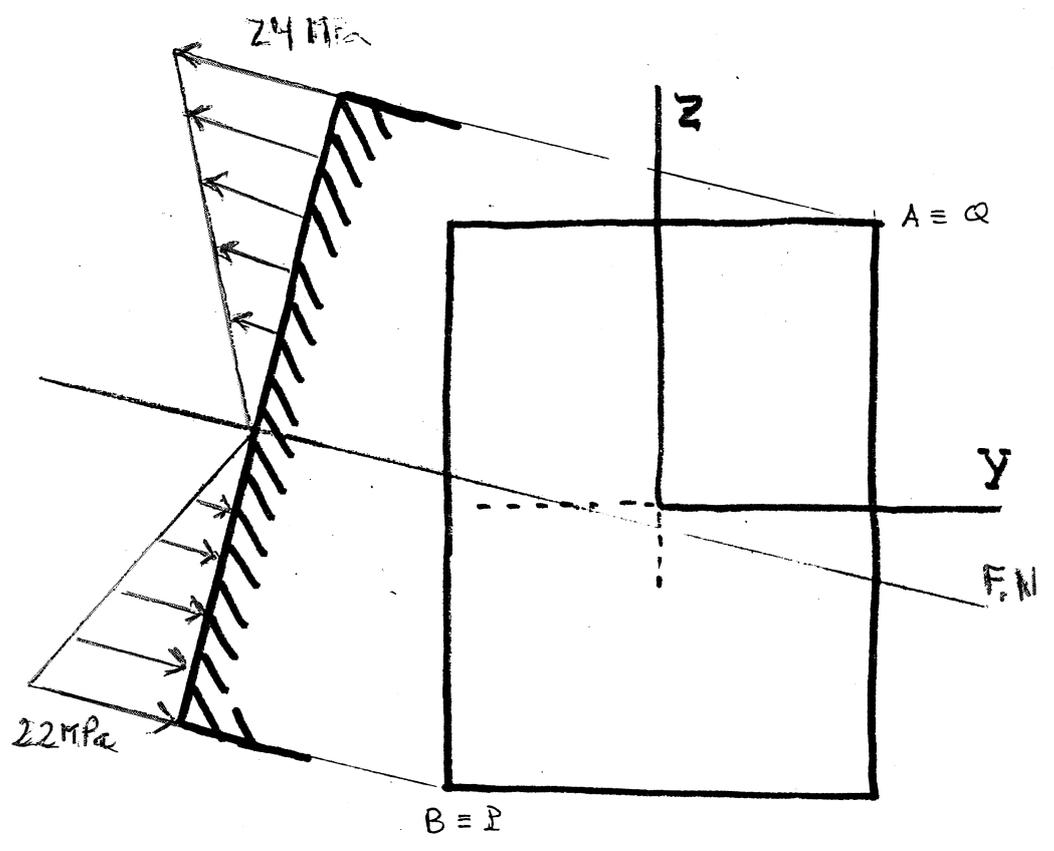
Nº

Apellidos y nombre

Firma

Fecha

109



Puntos más alejados de la F.N., a ambos lados de esta:

A(15, 20) y B(-15, -20).

$$\sigma_A = 1000 + 100.000 \times 0,20 + 20.000 \times 0,15 = 24000 \text{ kN/m}^2 = 24 \text{ MPa} = \sigma_{\text{MAX}}$$

$$\sigma_B = 1000 + 100.000 \times (-0,20) + 20.000 \times (-0,15) = -22000 \text{ kPa} = -22 \text{ MPa} = \sigma_{\text{MIN}}$$

P ≡ B, Q ≡ A



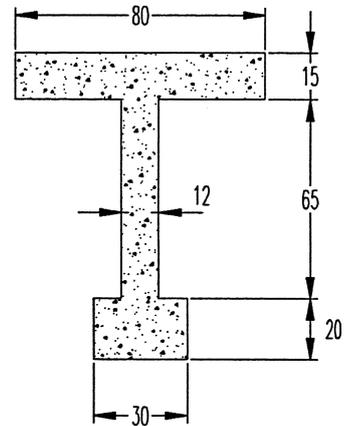
Ejercicio nº 34

La figura adjunta, acotada en centímetros, representa la sección transversal de una viga. Esta sometida a la siguiente sollicitación:

$$\begin{aligned} N &= -258 \text{ kN} \\ M_Y &= 624 \text{ kN}\cdot\text{m} \\ M_Z &= 6'94 \text{ kN}\cdot\text{m} \end{aligned}$$

En ella se pide:

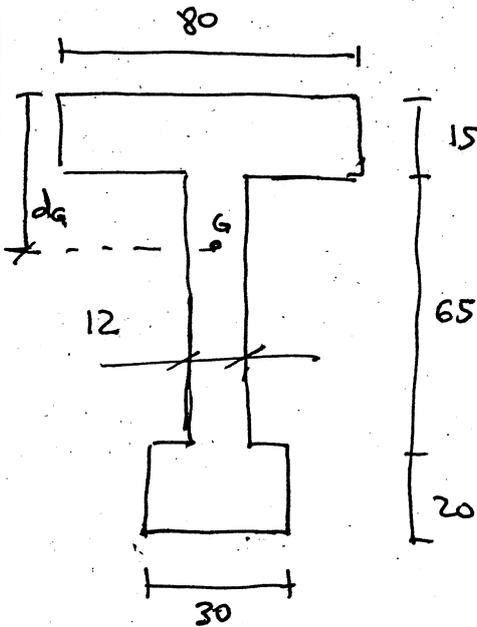
- Determinar la fibra neutra y representarla sobre un croquis de la sección, acotando los puntos de corte con los ejes.
- Determinar los puntos P y Q donde se alcanzan las tensiones normales máxima y mínima, respectivamente, y los valores de estas.
- Dibujar un esquema de la distribución de tensiones normales en la sección.
- Determinar y dibujar el núcleo central.



NOTA: Considérese las características mecánicas de la sección con una precisión de tres cifras significativas.

EJERCICIO Nº

CARACTERÍSTICAS MECÁNICAS



$$A = 80 \times 15 + 65 \times 12 + 20 \times 30$$

$$= 1200 + 780 + 600 = 2580 \text{ cm}^2$$

$$d_G = \frac{1200 \times 7.5 + 780 \times 47.5 + 600 \times 90}{2580}$$

$$= 38.78 \text{ cm.}$$

$$I_y = \frac{80 \times 15^3}{12} + 1200 \times (7.5 - 38.78)^2$$

$$+ \frac{12 \times 65^3}{12} + 780 \times (47.5 - 38.78)^2$$

$$+ \frac{30 \times 20^3}{12} + 600 \times (90 - 38.78)^2$$

$$= 22500 + 1.174.056 + 274625$$

$$+ 59.323 + 20.000 + 1.574.093$$

$$= 3.124.597 \text{ cm}^4$$

$$I_z = \frac{15 \times 80^3}{12} + \frac{65 \times 12^3}{12} + \frac{20 \times 30^3}{12} = 640.000 + 9360 + 45.000$$

$$= 694360 \text{ cm}^4$$

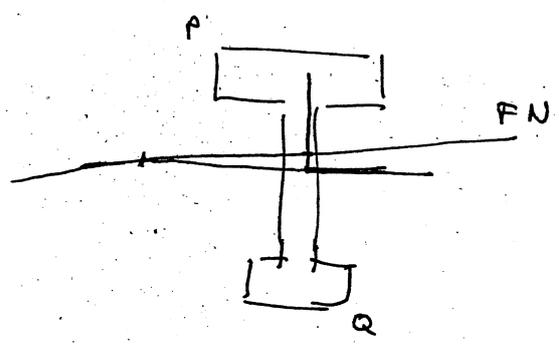
FIBRA NEUTRA

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M_y}{I_y} z - \frac{M_z}{I_z} y$$

$$-\frac{258}{0.258} + \frac{624}{0.0312} z - \frac{694}{0.00694} y = -1000 + 20.000 z - 1000 y = 0$$

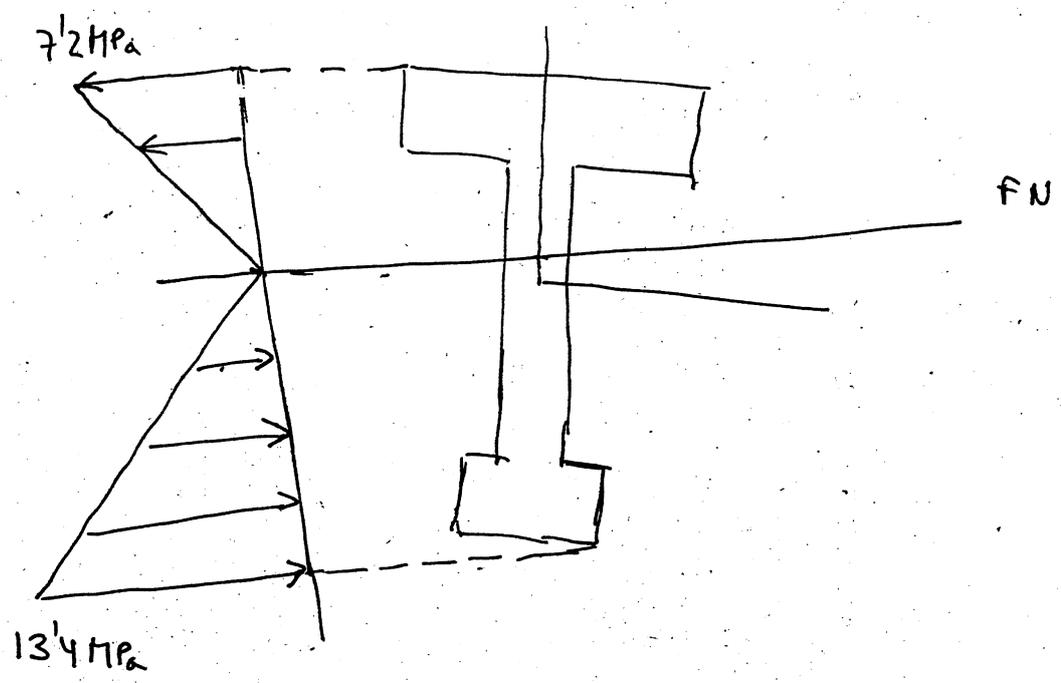
$$y = 0 \quad z = \frac{1000}{20.000} = 0.05 \text{ m.}$$

$$z = 0 \quad y = -\frac{1000}{1000} = -1 \text{ m.}$$



$$P (-0.4, 0.3878) \quad \sigma_p = -1000 + 20.000 \times 0.3878 = 1000 \times (-0.4) = 7156 \text{ kPa}$$

$$Q (0.15, -0.6122) \quad \sigma_q = -1000 + 20.000 \times (-0.6122) - 1000 \times 0.15 = -13394 \text{ kPa}$$





Asignatura

Curso

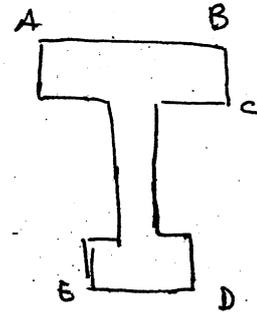
Grupo

NUCLEO CENTRAL.

$$\frac{2Y}{I_z} + \frac{\sum Z}{I_y} = -\frac{1}{A}$$

$$z = 0'39 \text{ m.}$$

$$\frac{0}{I_z} = \frac{1}{\sum Z} = \frac{0'39}{-1/A}$$



$$\eta = 0 \quad 0'39 \frac{\sum Z}{I_y} = -\frac{1}{A} \Rightarrow \sum Z = -\frac{I_y}{0'39 A} = -0'31 \text{ m.}$$

BC

$$y = 0'4$$

$$\frac{2Y}{I_z} + \frac{\sum Z}{I_y} = -\frac{1}{A}$$

$$\frac{1}{I_z} = \frac{0}{\sum Z} = \frac{0'4}{-1/A}$$

$$\sum Z = 0$$

$$\eta = -\frac{I_z}{0'4 A} = -0'067 \text{ m.}$$

CD

$$C(0'4, 0'39 - 0'15) = (0'4, 0'24) \quad D(0'15, -0'61)$$

$$\frac{y - 0'4}{0'15 - 0'4} = \frac{z - 0'24}{-0'61 - 0'24} \Rightarrow y - 0'4 = \frac{-0'25}{-0'85} (z - 0'24)$$

$$y - 0'2942 = 0'329$$

$$\frac{2Y}{I_z} + \frac{\sum Z}{I_y} = -\frac{1}{A}$$

$$\frac{1}{I_z} = \frac{-0'294}{\sum Z} = \frac{0'329}{-1/A}$$

$$0'329 \frac{y}{I_z} = -\frac{1}{A}$$

$$\eta = -\frac{I_z}{0'329 A} = -0'082 \text{ m}$$

$$0'329 \frac{\sum Z}{I_y} = \frac{+0'294}{A}$$

$$\sum Z = \frac{0'294 I_y}{0'329 A} = 0'11 \text{ m.}$$

N°

Apellidos y nombre

Firma

Fecha 11/4

D.2

$$z = -0'61$$

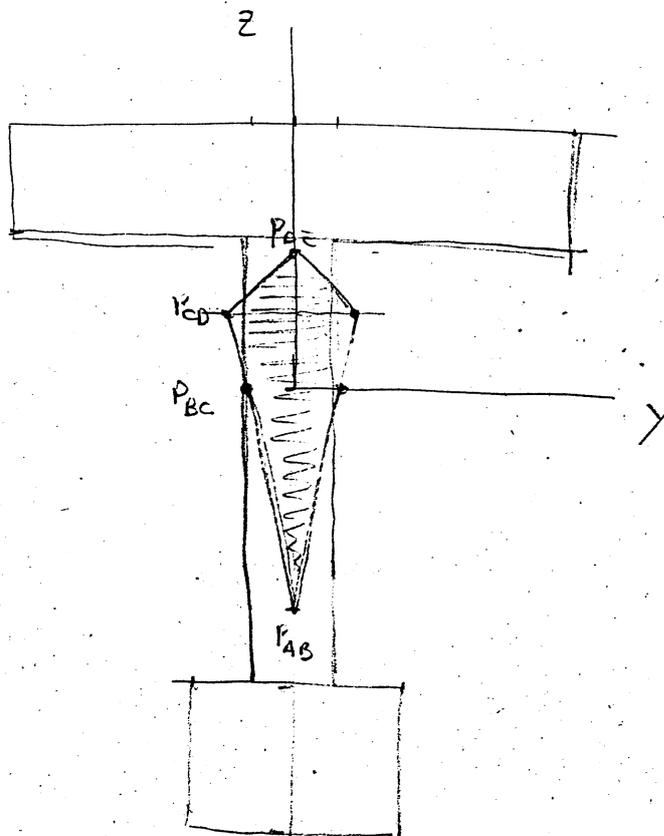
$$\frac{\eta Y}{I_x} + \frac{\xi z}{I_y} = -\frac{1}{A}$$

$$\frac{0}{2/I_x} = \frac{z}{\xi/I_y} = \frac{-0'61}{-1/A}$$

$$\eta = 0$$

$$-0'61 \frac{\xi}{I_y} = -\frac{1}{A}$$

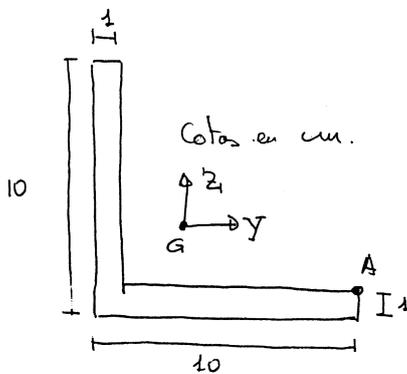
$$\xi = \frac{I_y}{0'61 A} = 0'20 \text{ m.}$$





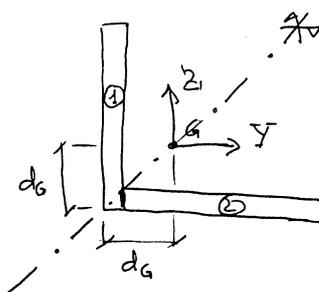
EJERCICIO Nº 35

1 de 3



AXIL $N = 10 \text{ kN}$ (TRACCIÓN) APLICADO EN A.

- FIBRA NEUTRA.
- ESQUEMA σ_x INDICANDO σ_{MAX} Y σ_{MIN}
- NÚCLEO CENTRAL.



$$A = 10 \times 1 + 9 \times 1 = 19 \text{ cm}^2$$

$$d_G = \frac{5 \times 10 + 0.5 \times 9}{19} = 2.87 \text{ cm}$$

$$I_y = \frac{1 \times 10^3}{12} + 10 \times (5 - 2.87)^2 + \frac{0.5^3 \times 9}{12} + 9 \times (0.5 - 2.87)^2$$

$$= 83.3 + 45.4 + 0.0938 + 50.6 = 179.4 \approx 179 \text{ cm}^4$$

$$I_z = I_y \text{ (simetría)}$$

$$P_{yz} = 0 + 10(0.5 - 2.87)(5 - 2.87) + 0 + 9(0.5 - 2.87)(0.5 - 2.87)$$

$$= -50.5 + 56.1 = -106.6 \approx -107 \text{ cm}^4$$

Determinación de los ejes principales:

- 1º procedimiento \rightarrow Diagonalizando el tensor de inercia.

$$[I] = \begin{bmatrix} I_y & -P_{yz} \\ -P_{yz} & I_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 179 & 107 \\ 107 & 179 \end{bmatrix} \text{ cm}^4$$

$$\begin{vmatrix} 179 - \lambda & 107 \\ 107 & 179 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 358\lambda + 32041 - 11449 = \lambda^2 - 358\lambda + 20592 = 0$$

$$\lambda = \frac{358 \pm \sqrt{358^2 - 4 \times 20592}}{2} = \begin{cases} 286 \text{ cm}^4 \\ 72 \text{ cm}^4 \end{cases}$$



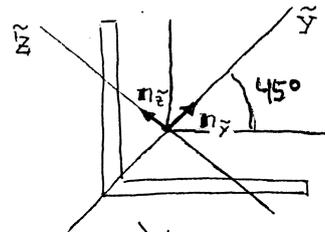
Vector propio asociado a $I_s = 286 \text{ cm}^4$

2 de 7

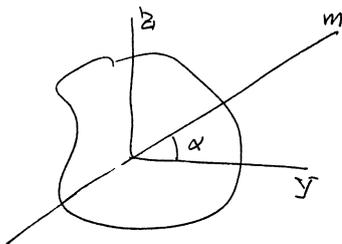
$$(179 - 286) n_y + 107 n_z = 0 \rightarrow -107 n_y + 107 n_z = 0 \rightarrow \underline{n_y = n_z}$$

$$\begin{aligned} n_{\tilde{y}} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{j} + \mathbf{k}) & I_{\tilde{y}} &= 286 \text{ cm}^4 \\ n_{\tilde{z}} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (-\mathbf{j} + \mathbf{k}) & I_{\tilde{z}} &= 72 \text{ cm}^4 \end{aligned}$$

$$n_{\tilde{z}} \perp n_{\tilde{y}}$$

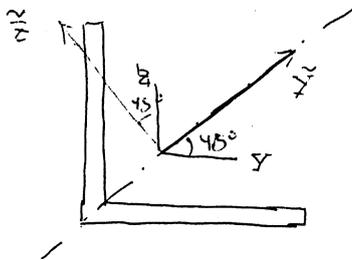


- 2º procedimiento. Basándonos en que el eje de simetría es principal de inercia -y el eje \perp a él también-, y utilizando



$$I_m = (\cos \alpha, \sin \alpha) \begin{bmatrix} I_y & -P_{yz} \\ -P_{yz} & I_z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{Bmatrix}$$

Vector director de la recta m, unitario



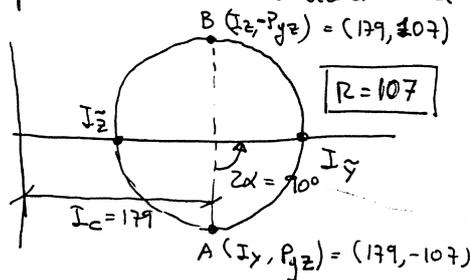
$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{i}} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{i} + \mathbf{j}) \\ \tilde{\mathbf{j}} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (-\mathbf{i} + \mathbf{j}) \end{aligned}$$

$$I_{\tilde{y}} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \begin{bmatrix} 179 & 107 \\ 107 & 179 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{Bmatrix} =$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \begin{Bmatrix} 286/\sqrt{2} \\ 286/\sqrt{2} \end{Bmatrix} = \boxed{286 \text{ cm}^4}$$

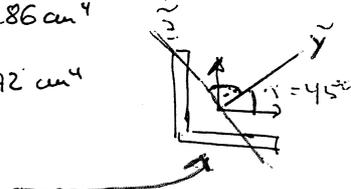
$$I_{\tilde{z}} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \begin{bmatrix} 179 & 107 \\ 107 & 179 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{Bmatrix} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \begin{Bmatrix} -72/\sqrt{2} \\ 72/\sqrt{2} \end{Bmatrix} = \boxed{72 \text{ cm}^4}$$

- 3º procedimiento. Mediante el círculo de Mohr. Representamos los A_y y B_z a partir de ellos dibujamos la circunferencia.



$$I_{\tilde{y}} = I_c + R = 286 \text{ cm}^4$$

$$I_{\tilde{z}} = I_c - R = 72 \text{ cm}^4$$



FIBRA NEUTRA Y ESQUEMA TENSIONAL, EN EJES INICIALES.

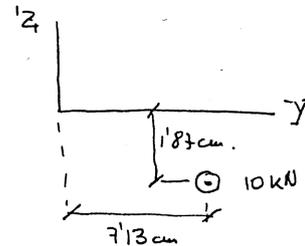
3 de 7

$$A(10 - 2'87, -(2'87 - 1)) = (7'13, -1'87) \text{ cm.}$$

$$N = 10 \text{ kN}$$

$$M_y = -0'0187 \times 10 = -0'187 \text{ m kN}$$

$$M_z = -0'0713 \times 10 = -0'713 \text{ m kN}$$



$$\sigma_x = \frac{N}{A} - \frac{M_y P_{yz} + M_z J_y}{J_y J_z - P_{yz}^2} Y + \frac{M_z P_{yz} + M_y J_z}{J_y J_z - P_{yz}^2} Z_1 = 0$$

$$\frac{10}{19 \times 10^{-4}} - \frac{[-0'187 \times (-107) - 0'713 \times 179] \times 10^{-8}}{[179^2 - 107^2] \times 10^{-16}} Y + \frac{[-0'713 \times (-107) - 0'187 \times 179] \times 10^{-8}}{[179^2 - 107^2] \times 10^{-16}} Z_1 = 0$$

$$5263 - \frac{(-107'618)}{2'0592 \times 10^{-4}} Y + \frac{42'818}{2'0592 \times 10^{-4}} Z_1 = 0$$

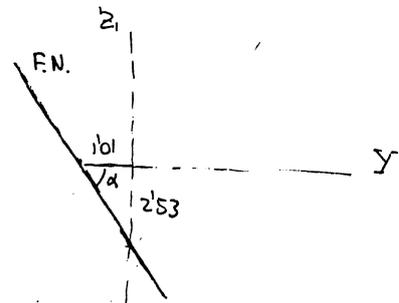
$$5263 + 5'226 \times 10^5 Y + 2'079 \times 10^5 Z_1 = 0$$

Puntos de corte con los ejes

$$Y = 0 \rightarrow Z_1 = 0'0253 \text{ m} = 2'53 \text{ cm.}$$

$$Z_1 = 0 \rightarrow Y = -0'0101 \text{ m} = 1'01 \text{ cm.}$$

$$\tan \alpha = \frac{2'53}{1'01} = 2'50 \Rightarrow \alpha = 68'2^\circ$$



Puntos más alejados de la F.N.

$$A(7'1, -1'9) \text{ cm}$$

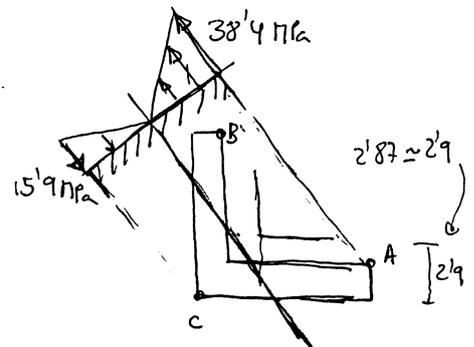
$$B(-2'9, 10'29) = (-2'9, 7'1) \text{ cm}$$

$$C(-2'9, -2'9) \text{ cm}$$

$$\sigma_A = 5263 + 5'226 \times 10^5 (0'071) + 2'079 \times 10^5 \times (-0'019) = 38418 \text{ kPa} = 38'4 \text{ MPa} = \sigma_{\max}$$

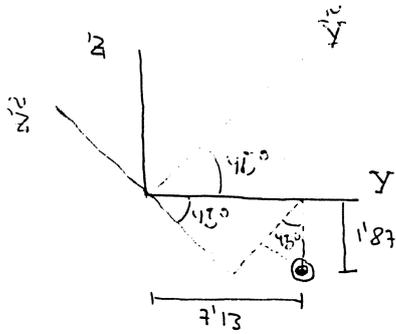
$$\sigma_B = 5263 + 5'226 \times 10^5 \times (-0'019) + 2'079 \times 10^5 \times 0'071 = 10095 \text{ kPa} = 10'1 \text{ MPa}$$

$$\sigma_C = 5263 + 5'226 \times 10^5 \times (-0'029) + 2'079 \times 10^5 \times (-0'029) = -15922 \text{ kPa} = -15'9 \text{ MPa} = \sigma_{\min}$$



FIBRA NEUTRA Y ESQUETA, EN EJES PRINCIPALES.

4 de 7



$$\tilde{Y}_A = 7.13 \sin 45 - 1.87 \cos 45 = 3.72 \text{ cm.}$$

$$\tilde{Z}_A = -7.13 \cos 45 - 1.87 \sin 45 = -6.36 \text{ cm.}$$

$$N = 10 \text{ kN}$$

$$M_{\tilde{Y}} = 10 \times (-0.0636) = -0.636 \text{ m kN}$$

$$M_{\tilde{Z}} = -10 \times 0.0372 = -0.372 \text{ m kN}$$

$$\frac{N}{A} + \frac{M_{\tilde{Y}}}{I_{\tilde{Y}}} \tilde{Z}_1 - \frac{M_{\tilde{Z}}}{I_{\tilde{Z}}} \tilde{Y} = 0$$

$$\frac{10}{19 \times 10^4} + \frac{(-0.636)}{286 \times 10^8} \tilde{Z}_1 - \frac{(-0.372)}{72 \times 10^8} \tilde{Y} = 0$$

$$5263 - 2.224 \times 10^5 \tilde{Z} + 5.167 \times 10^5 \tilde{Y} = 0$$

Puntos de corte con los ejes

$$\tilde{Z} = 0 \rightarrow \tilde{Y} = -1.02 \times 10^{-2} \text{ m} = -1.02 \text{ cm.}$$

$$\tilde{Y} = 0 \rightarrow \tilde{Z} = +2.37 \times 10^{-2} \text{ m} = +2.37 \text{ cm.}$$

$$\tan \beta = \frac{2.37}{1.02} = 2.32 \rightarrow \beta = 66.7^\circ$$

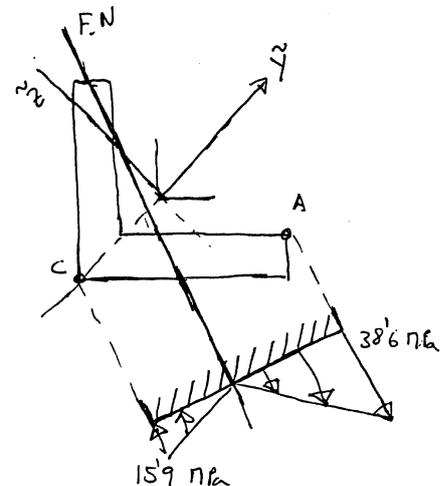
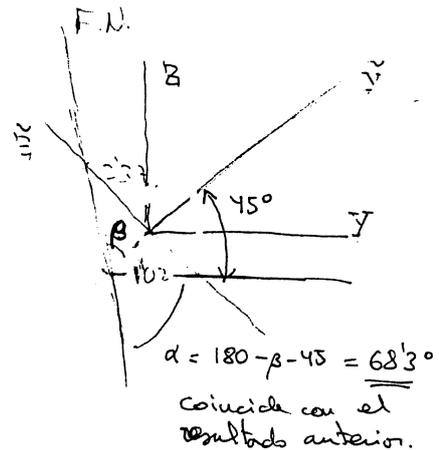
Puntos más alejados de la F.N.

$$A (3.72, -6.36) \text{ cm ya hallado}$$

$$C (-\sqrt{2.9^2 + 2.9^2}, 0) = (-4.10, 0)$$

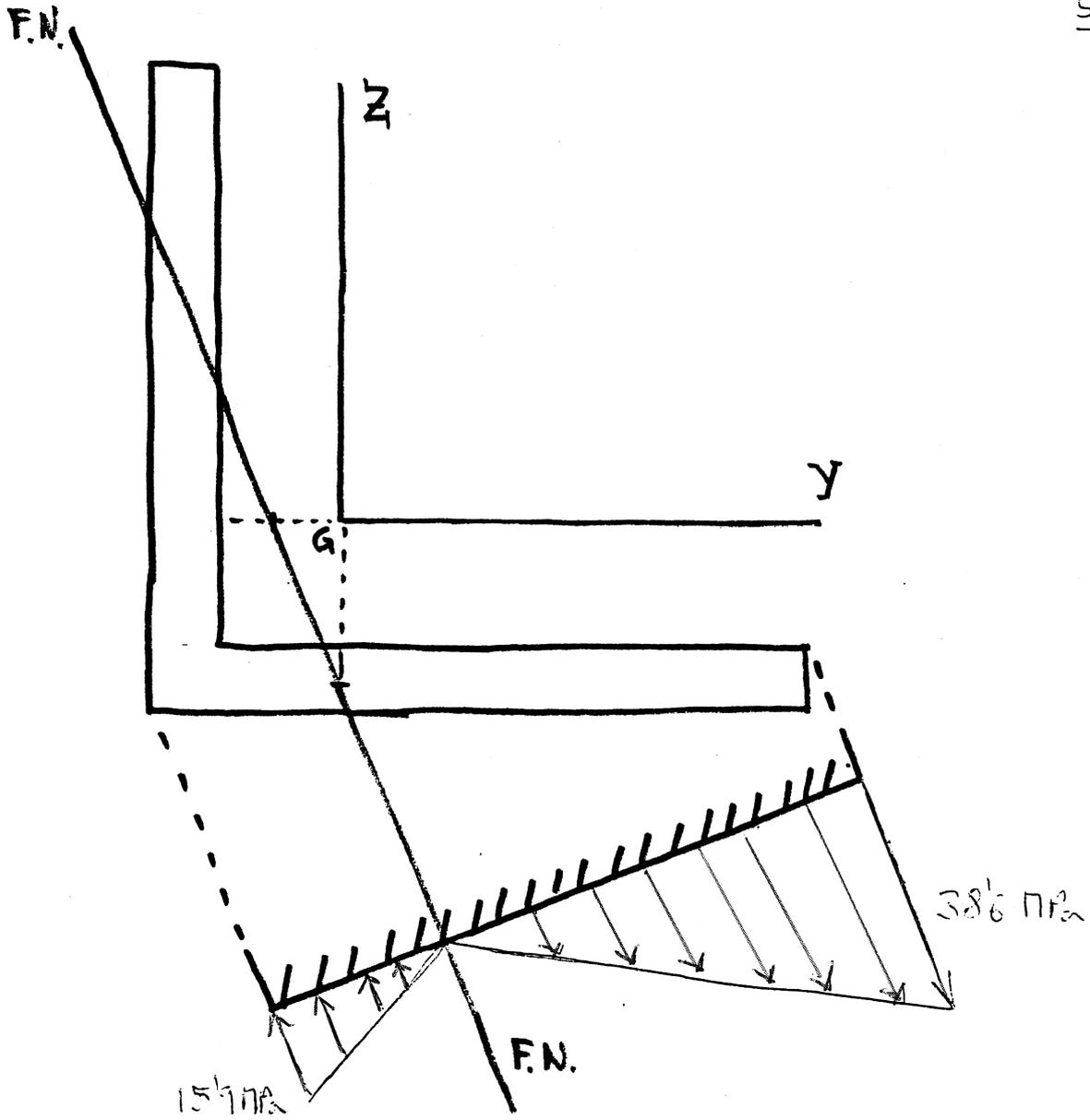
$$\begin{aligned} \sigma_A &= 5264 + 5.167 \times 10^5 \times 0.0372 - 2.224 \times 10^5 \times (-0.0636) \\ &= 38630 \text{ kPa} = 38.6 \text{ MPa} = \sigma_{\max} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_C &= 5264 + 5.167 \times 10^5 \times (-0.041) - 2.224 \times 10^5 \times 0 \\ &= -15921 \text{ kPa} = -15.9 \text{ MPa} = \sigma_{\min} \end{aligned}$$





5 de 7

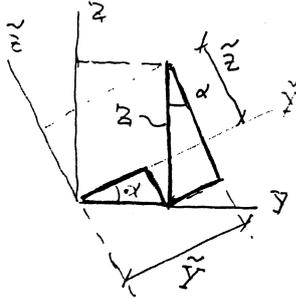




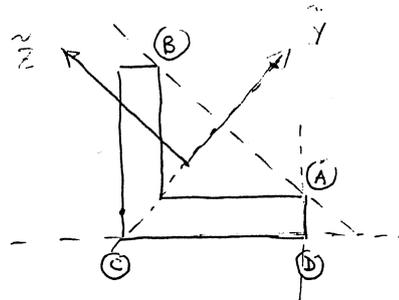
Gale 7

Núcleo central (en ejes principales).

$$\frac{\eta}{I_{\tilde{x}}} + \xi \frac{\tilde{z}}{I_{\tilde{y}}} = -\frac{1}{A}$$



$$\begin{Bmatrix} \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y \\ z \end{Bmatrix}$$



Pto	y	z	\tilde{y}	\tilde{z}
A	3'1	-1'9	3'7	-6'4
C	-2'9	-2'9	-4'1	0
D	7'1	-2'9	3'0	-7'1
B			3'7	6'4

} comprobación

Recta A-B $\tilde{y} = 3'7$

$$\frac{\eta/I_{\tilde{x}}}{1'0} = \frac{\xi/I_{\tilde{y}}}{0} = \frac{-1/A}{3'7} \Rightarrow \xi = 0$$

$$\eta = -\frac{I_{\tilde{x}}}{3'7 \cdot A} = -\frac{72}{3'7 \times 19} = -1'0$$

$$P(\eta, \xi) = (0, -1'0) \text{ cm.}$$

Recta A-D

$$\frac{\tilde{y} - \tilde{y}_A}{\tilde{y}_D - \tilde{y}_A} = \frac{\tilde{z} - \tilde{z}_A}{\tilde{z}_D - \tilde{z}_A} \Rightarrow \frac{\tilde{y} - 3'7}{3'0 - 3'7} = \frac{\tilde{z} - (-6'4)}{-7'1 - (-6'4)} \Rightarrow -\cancel{0'7}(\tilde{y} - 3'7) = -\cancel{0'7}(\tilde{z} + 6'4)$$

$$\tilde{z} - \tilde{y} = -10'1$$

$$\frac{\eta/I_{\tilde{x}}}{-1} = \frac{\xi/I_{\tilde{y}}}{1} = \frac{+1/A}{+10'1} \Rightarrow \begin{cases} \eta = \frac{-I_{\tilde{x}}}{10'1 A} = -0'4 \\ \xi = \frac{I_{\tilde{y}}}{10'1 A} = 1'5 \end{cases}$$

$$P(\eta, \xi) = (-0'4, 1'5) \text{ cm.}$$

Recta C-D

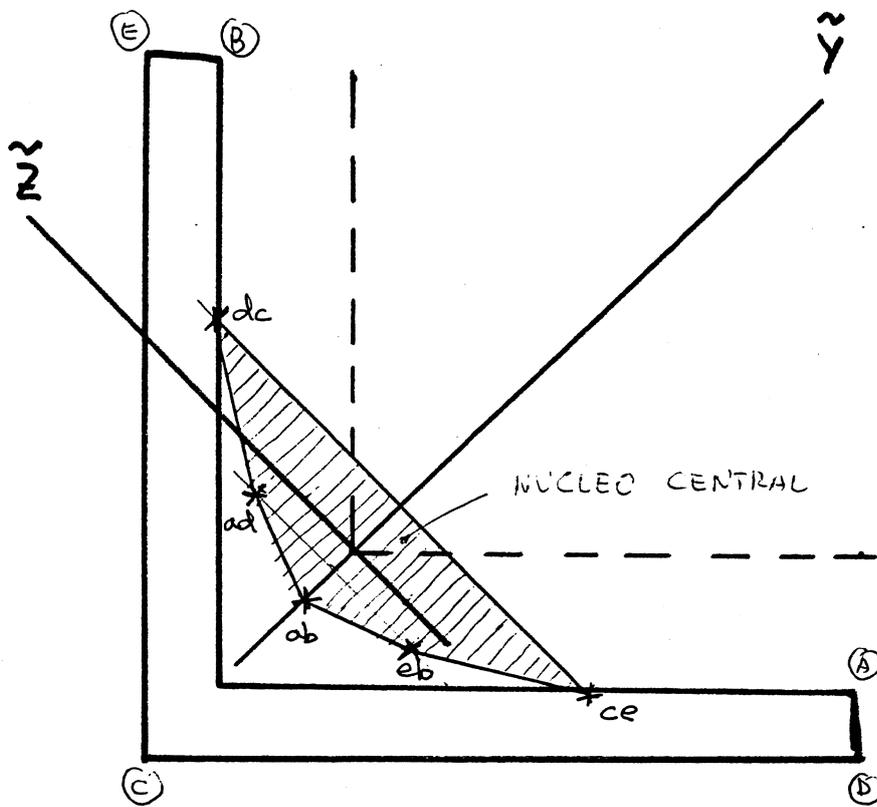
$$\frac{\tilde{y} - (-4'1)}{3 - (-4'1)} = \frac{\tilde{z} - 0}{-7'1 - 0} \Rightarrow \frac{\tilde{y} + 4'1}{+7'1} = \frac{\tilde{z}}{-7'1} \Rightarrow \tilde{y} + 4'1 = -\tilde{z} \Leftrightarrow \tilde{y} + \tilde{z} = -4'1$$

$$\frac{\eta/I_{\tilde{x}}}{1} = \frac{\xi/I_{\tilde{y}}}{+1} = \frac{+1/A}{+4'1} \Rightarrow \begin{cases} \eta = \frac{I_{\tilde{x}}}{4'1 A} = 0'9 \text{ cm} \\ \xi = \frac{+I_{\tilde{y}}}{4'1 A} = +3'7 \text{ cm.} \end{cases}$$

$$P(\eta, \xi) = (0'9, -3'7) \text{ cm.}$$



7 de 7



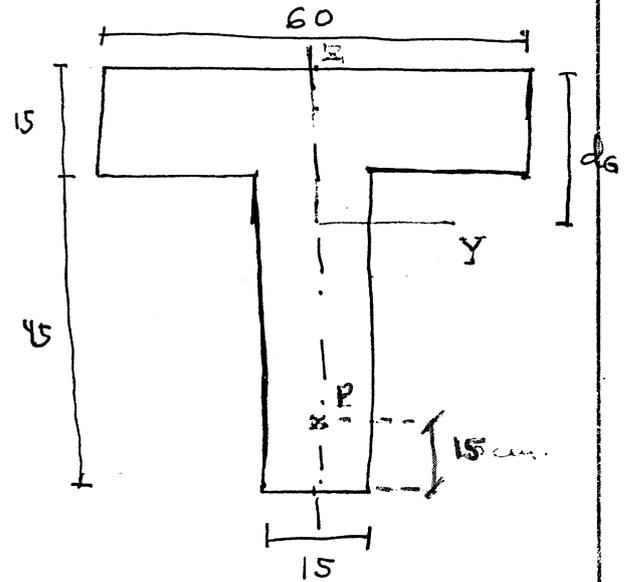


1) La sección representada está sometida a la siguiente sollicitación

$$N = -636 \text{ kN}, \quad M_y = -478 \text{ m.kN}$$

$$M_z = 849 \text{ m.kN}$$

Se pide representar la fibra neutra sobre un croquis de la sección, indicando los puntos de corte con los ejes, y dibujar un esquema de distribución de tensiones normales, señalando los valores max. y mín. de los mismos.



2) La sección de la figura está sometida a unos momentos flecto.

$$M_y = -956 \text{ m.kN} \quad \text{y} \quad M_z = 1132 \text{ m.kN}$$

Se pide determinar:

a) el eje que debe actuar a la vez para que toda la sección esté comprimida.

b) id. para que la toda la sección esté traccionada.

3) La sección representada es la de una viga de hormigón, δ que está sometida, por acción de las fuerzas exteriores, a un momento $M_y = -242 \text{ m.kN}$. Se desea saber cuál es la fuerza de pretensado (un eje de compresión) que debe aplicarse en el punto P para que toda la sección esté comprimida.

$$d_g = 204 \text{ cm.}$$

$$A = 1575 \text{ cm}^2$$

$$I_y = 478.000 \text{ cm}^4$$

$$I_z = 283.000 \text{ cm}^4.$$

$$1) \sigma_y = \frac{N}{A} + \frac{M_y}{I_y} z - \frac{M_z}{I_z} y$$

$$\sigma_y = -\frac{630}{0.1575} + \frac{(-478)z}{478.000 \times 10^{-8}} - \frac{849y}{283.000 \times 10^{-8}} = -400 - 10000z - 30.000y$$

F.N. : $4 + 100z + 300y = 0$

Pto corte con los ejes :

$$z=0 \rightarrow y = -\frac{4}{300} = -0.0133 \text{ m} = -1.33 \text{ cm}$$

$$y=0 \rightarrow z = -\frac{4}{100} = -0.04 \text{ m} = -4.00 \text{ cm}$$

Pto. más alejado de la F.N.

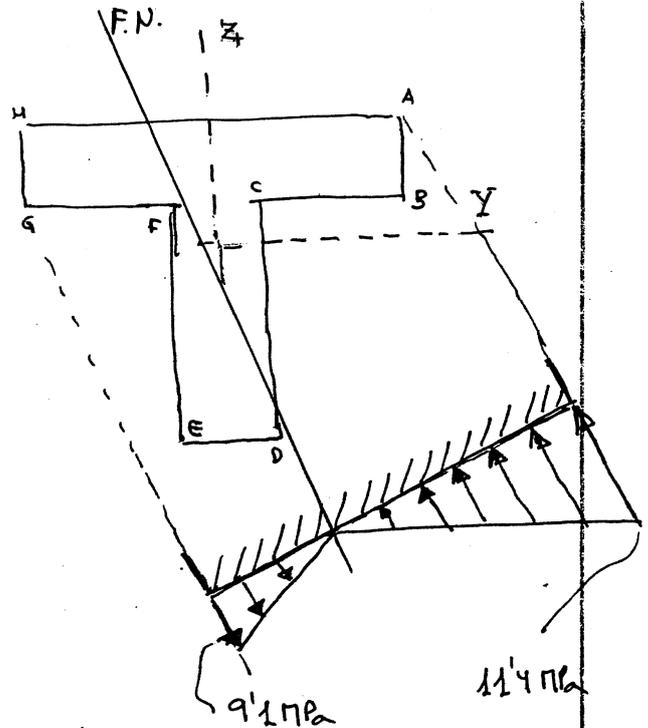
A (0.3, 0.204) m.

E (-0.075, -0.396), G (-0.3, 0.054)

$$\sigma_A = -400 - 10000 \times 0.204 - 30.000 \times 0.3 = -11440 \text{ kPa} = -11.4 \text{ MPa}$$

$$\sigma_E = -400 + 10000 \times 0.396 + 30.000 \times 0.075 = 5810 \text{ kPa} = 5.81 \text{ MPa}$$

$$\sigma_G = -400 + 10.000 \times 0.054 + 30.000 \times 0.3 = 9140 \text{ kPa} = 9.14 \text{ MPa}$$



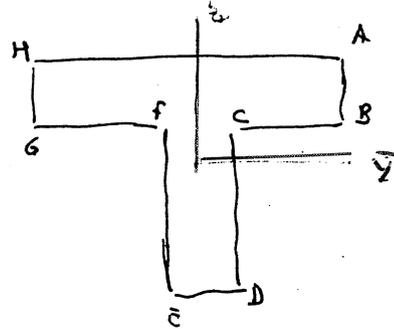


$$2) \quad \sigma_y = \frac{N}{A} + \frac{M_y}{I_y} z - \frac{M_z}{I_z} Y = \frac{N}{0'1575} + \frac{(-95'6)}{0'00478} z - \frac{113'2}{0'00283} Y$$

$$\sigma_y = \frac{N}{0'1575} - 20.000 z - 40.000 Y$$

a) Toda la sección comprimida.

La máxima tracción se produce en los puntos donde $-20.000z - 40.000Y$ sea máxima. Deben en $E(-0'075, -0'396)$ ó $G(-0'3, 0'054)$ m.



$$\sigma_E = \frac{N}{0'1575} - 20.000(-0'396) - 40.000(-0'075)$$

$$= \frac{N}{0'1575} + 10920 \leq 0$$

$$\sigma_G = \frac{N}{0'1575} - 20.000(0'054) + 40.000 \times (-0'3) = \frac{N}{0'1575} + 10920 \leq 0$$

Es casualidad que la tracción en G y en E coincidan. En el caso general, escogeríamos la mayor e impediríamos que fuese nula.

$$\frac{N}{0'1575} + 10920 \leq 0 \Rightarrow \boxed{N \leq -10920 \times 0'1575 = -1720 \text{ kN}}$$

b) Toda la sección traccionada.

El punto más comprimido es, claramente, $A(0'3, 0'204)$ m.

$$\sigma_A = \frac{N}{0'1575} - 20.000(0'204) - 40.000(0'3) = \frac{N}{0'1575} - 16080 \geq 0$$

$$\boxed{N \geq 16080 \times 0'1575 = 2530 \text{ kN}}$$



Asignatura

Curso

Grupo

3) Momento de la fuerza de pretensado F . $\rightarrow M_y = (0'396 - 0'15)F = 0'246F$.

Solicitación: $N = -F$, $M_y = 0'246F - 242$ en kN, F en kN.

$$\sigma_y = \frac{N}{A} + \frac{M_y}{I_y} z_1 - \frac{M_z}{I_z} y = -\frac{F}{0'1575} + \frac{(0'246F - 242) z_1}{0'00478}$$

Punto en que la tracción es máxima $\rightarrow z_1$ mínima $\Rightarrow z_1 = -0'396$ m.

$$\sigma_y = -\frac{F}{0'1575} + \frac{(0'246F - 242)(-0'396)}{0'00478} \leq 0$$

$$\left[-\frac{1}{0'1575} + \frac{0'246 \times (-0'396)}{0'00478} \right] F + \frac{242 \times 0'396}{0'00478} \leq 0$$

$$-26'73 F + 20050 \leq 0$$

$$F \geq \frac{20050}{26'73} = 750 \text{ kN.}$$

Nº

Apellidos y nombre

Firma

Fecha

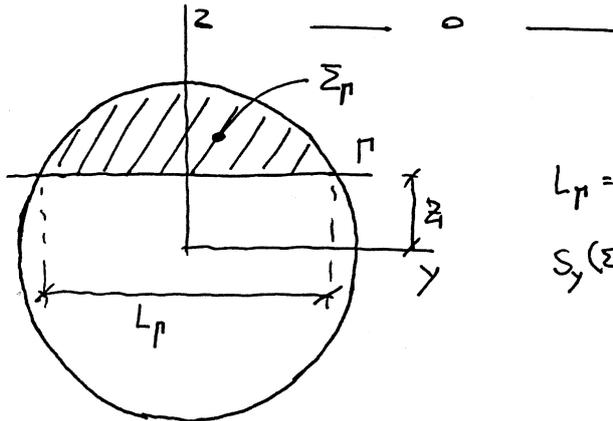
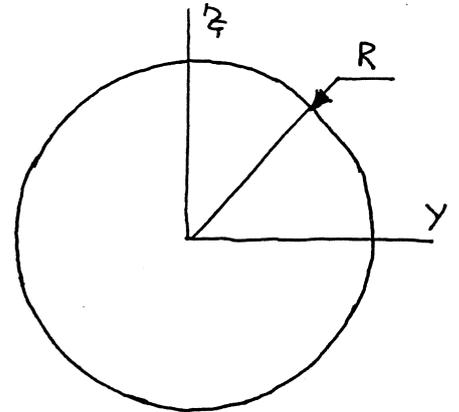
126

Distribución de tensiones tangenciales



EJERCICIO Nº 37

DETERMINAR LA DISTRIBUCIÓN DE TENSIONES TANGENCIALES DEBIDAS A UN CORTANTE $Q_z = -P$ EN LA SECCIÓN CIRCULAR REPRESENTADA.



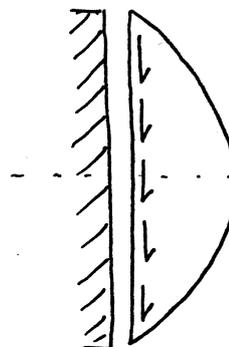
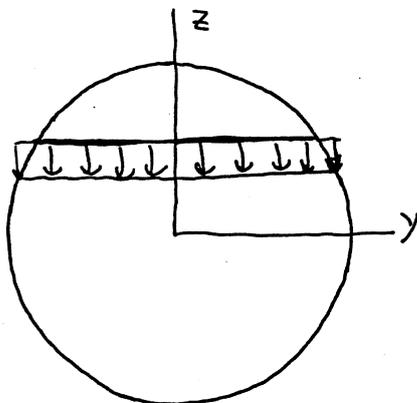
$$L_\pi = 2\sqrt{R^2 - z^2}$$

$$S_y(\Sigma_\pi) = \int_{\Sigma_\pi} z \, dA$$

$$= \int_z^R 2\sqrt{R^2 - \xi^2} \, d\xi$$

$$= \left[-\frac{2}{3} (R^2 - \xi^2)^{3/2} \right]_z^R = \frac{2}{3} (R^2 - z^2)^{3/2}$$

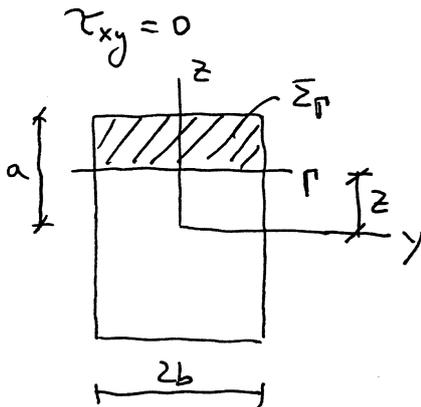
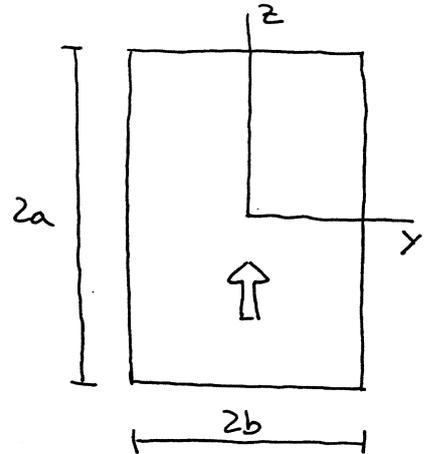
$$\tau = \tau_{xz} = \frac{Q_z S_y(\Sigma_\pi)}{I_y L_\pi} = \frac{\frac{2}{3} (R^2 - z^2)^{3/2} (-P)}{I \cdot 2(R^2 - z^2)^{1/2}} = -\frac{P}{I} \frac{R^2 - z^2}{3}$$



$$\tau = -\frac{P}{I} \frac{R^2}{3} = -\frac{P}{4} \frac{R^2}{I} = -\frac{4}{3} \frac{P}{\pi R^2}$$

EJERCICIO Nº 38

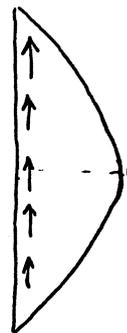
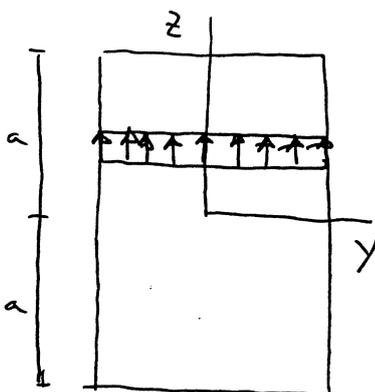
DETERMINAR LA DISTRIBUCIÓN DE TENSIONES TANGENCIALES EN LA SECCIÓN REPRESENTADA, SEGÚN LA TEORÍA ELEMENTAL



$$S_y(\Sigma_F) = 2b(a-z)\frac{(a+z)}{2} = b(a^2 - z^2)$$

$$I_y = \frac{2b(2a)^3}{12} = \frac{4ba^3}{3}$$

$$(\tau_{xz})_m = \frac{Q_z S_y(\Sigma_F)}{I_y L_F} = \frac{Q_z \frac{1}{2}(a^2 - z^2)}{\frac{4ba^3}{3} \cdot 2b} = \frac{3Q_z}{8ab} \left(1 - \frac{z^2}{a^2}\right)$$



$$\tau = \frac{3Q_z}{8ab} \quad (\text{MÁXIMO})$$

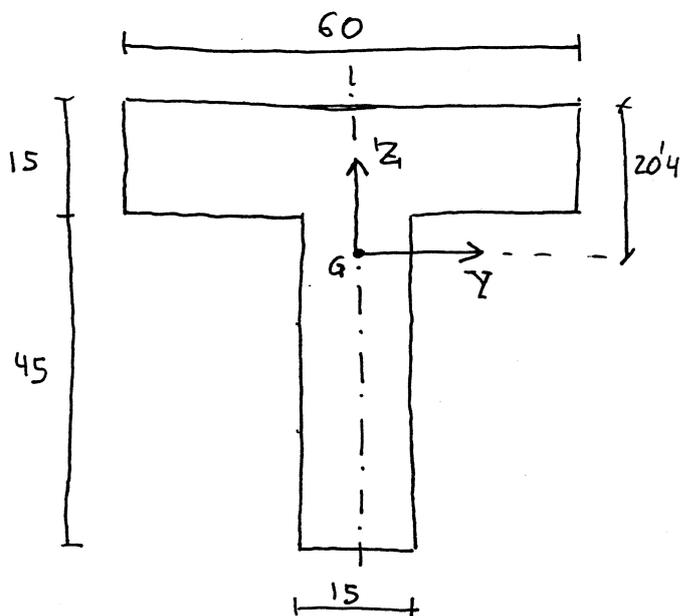
EJERCICIO Nº 39

EN LA SECCIÓN REPRESENTADA
 DETERMINAR LA DISTRIBUCIÓN DE
 TENSIONES TANGENCIALES ORIGINA
 DA POR UN CORTANTE Q_z .

$$A = 1575 \text{ cm}^2$$

$$I_y = 478.000 \text{ cm}^2$$

$$I_z = 283.000 \text{ cm}^2$$



τ EN EL ALA SUPERIOR.

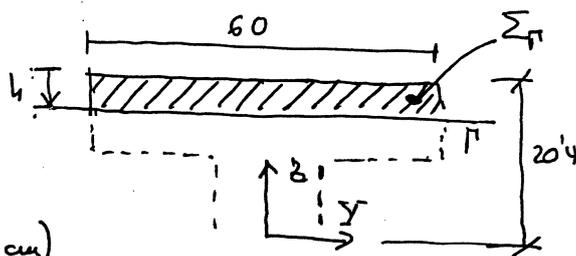
$$\tau = \frac{Q_z S_y(\Sigma_P)}{I_y \cdot L_P}$$

$$S_y(\Sigma_P) = 60h \left(20.4 - \frac{h}{2}\right) = 1224h - 30h^2 \text{ cm}^3 \quad (h \text{ en cm})$$

$$\tau = \frac{Q_z (1224h - 30h^2)}{478.000 \times 60} = \frac{1224h - 30h^2}{2'868 \times 10^7} Q_z \text{ N/cm}^2, \quad (h \text{ en cm}, Q_z \text{ en N})$$

$$\tau|_{h=0} = 0$$

$$\tau|_{h=15} = 4'05 \times 10^{-4} Q_z = 405 \cdot Q_z \text{ Pa} \quad (Q_z \text{ en N}).$$



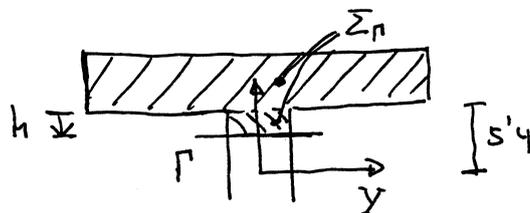
τ EN EL ALA.

Σ_P = UNIÓN DE LOS DOS RECTÁNGULOS

$$S_y(\Sigma_P) = 60 \times 15 (20.4 - 7.5) + 15h (5.4 - \frac{h}{2}) = 11610 + 81h - 7.5h^2$$

$$\tau = \frac{Q_z (11610 + 81h - 7.5h^2)}{478.000 \times 15} = (1'62 \times 10^{-3} + 1'13 \times 10^{-5} h - 1'05 \times 10^{-6} h^2) Q_z \text{ N/cm}^2 \quad (Q_z \text{ en N})$$

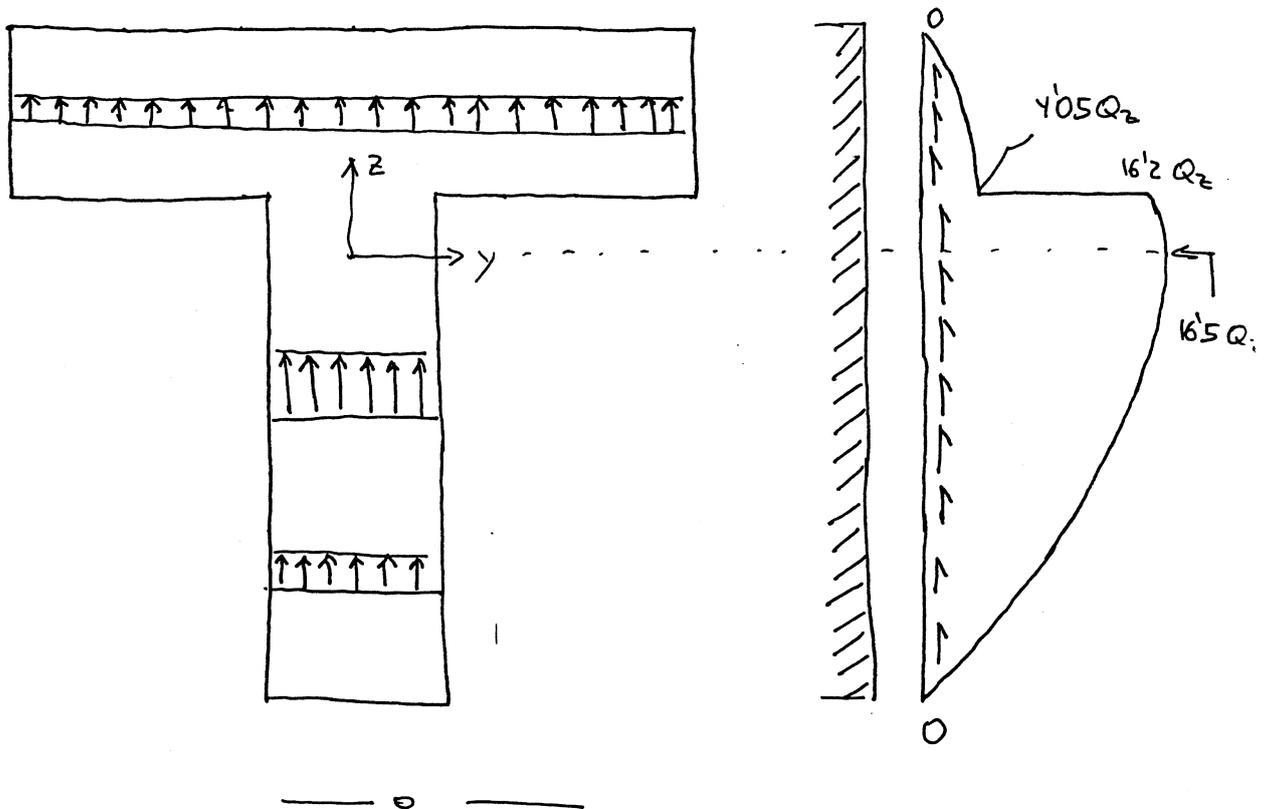
$$\tau|_{h=0} = 1'62 \times 10^{-3} Q_z \text{ N/cm}^2 = 162 Q_z \text{ Pa}, \quad Q_z \text{ en N}.$$



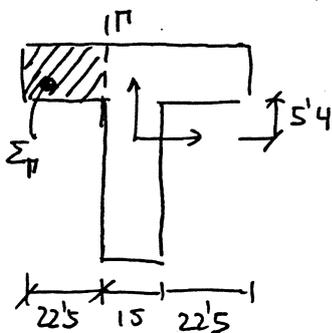
$$\tau|_{h=5'4} = 1'65 \times 10^{-3} Q_z = 16'5 Q_z \text{ Pa} \quad (Q_z \text{ en N})$$

$$\tau|_{h=45} = 2'25 \times 10^{-2} Q_z \approx 0$$

ESQUEMA DISTRIBUCIÓN TENSIONAL



TENSION MEDIA EN π



$$S_y(\Sigma_{\pi}) = 22'5 \times 15 \times (5'4 + 7'5) = 4354 \text{ cm}^3$$

$$\tau_{m,\pi} = \frac{Q_z S_y(\Sigma_{\pi})}{I_y \cdot L_{\pi}} = \frac{4354 Q_z}{478000 \times 15} = 6'07 \times 10^{-4} Q_z \text{ N/cm}^2$$

$$\tau_{m,\pi} = 6'07 Q_z \text{ Pa}, \quad Q_z \text{ en N.}$$

$$\frac{\tau_{m,\pi}}{(\tau_{xz})_{\max}} = \frac{6'07 Q_z}{16'5 Q_z} = 0'37.$$

- Ej.40 La figura adjunta, que está acotada en centímetros, representa una viga de madera formada clavando unos cuadradillos a una tabla. 1) Suponiendo que los clavos están separados 25 mm en la dirección perpendicular al dibujo, determinar la fuerza de cizallamiento que debe transmitir cada uno de ellos cuando la viga está sometida a un cortante vertical de 7 kN. 2) Si cada clavo es capaz de transmitir una fuerza de corte de 400 N, cual es el máximo cortante que puede transmitir la sección —suponiendo que, como en el caso anterior, distan 25 mm entre sí—.

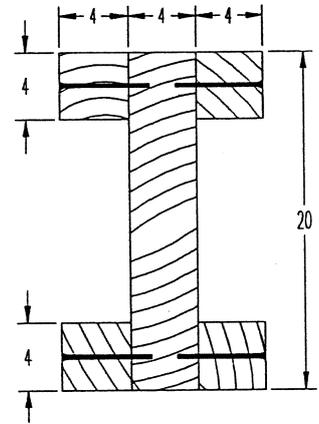


Figura Ej. 33

CARACTERÍSTICAS MECÁNICAS DE LA SECCIÓN.

$$A = 20 \times 4 + 4 \times 4^2 = 144 \text{ cm}^2$$

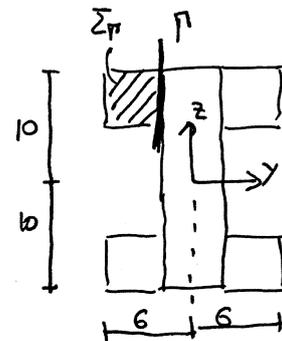
$$I_y = \frac{4 \times 20^3}{12} + 4 \times \frac{4 \times 4^3}{12} + 4 \times 4^2 \times 8^2 = 6848 \text{ cm}^4$$

RASANTE EN π

$$\int_{\pi} \tau ds = \frac{Q_z S_y(\Sigma_{\pi})}{I_y}$$

$$S_y(\Sigma_{\pi}) = 16 \times 8 = 128 \text{ cm}^3$$

$$\int_{\pi} \tau ds = \frac{128}{6848} Q_z = 0'0187 Q_z \quad \text{kN/cm} = 1'87 Q_z \text{ kN/m} \quad (Q_z \text{ en kN}).$$



Caso 1.

$$\int_{\pi} \tau ds = 1'87 \times 7 = 13'09 \text{ kN/m.}$$

$$N^{\circ} \text{ clavos} = N = \frac{\text{long.}}{\text{separación}} = \frac{100}{2'5} = 40 \text{ clavos/m.}$$

$$\text{Fuerza que transmite cada uno} = \frac{13'09 \text{ kN/m}}{40 \text{ clavos/m}} = 0'327 \text{ kN/clavo}$$

Cada clavo transmite 327 N.



Caso 2.

Máximo resante que se puede transmitir = $400 \text{ W/clavo} \times 40 \frac{\text{clavo}}{\text{m}} = 16000 \text{ W/m}$

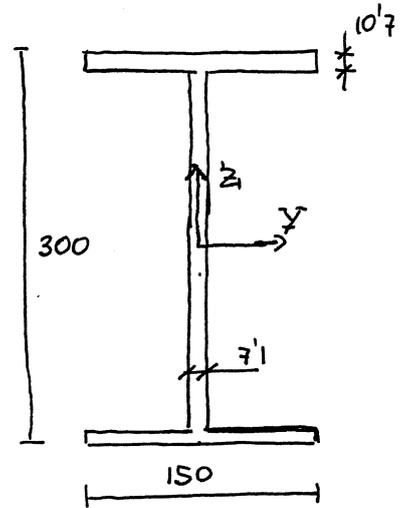
$$\int_{\Gamma} \tau ds = 16 \text{ kN/m} = 1'87 Q_z \Rightarrow Q_z = 8'56 \text{ kN.}$$

Máximo cortante que se puede transmitir $\rightarrow \boxed{Q_z = 8'56 \text{ kN.}}$

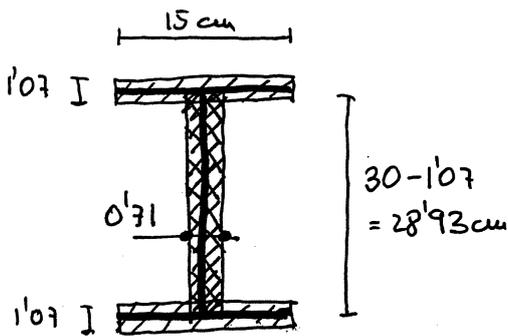
EJERCICIO Nº 41

LA FIGURA ADJUNTA REPRESENTA LA IDEALIZACIÓN DE UN PERFIL METÁLICO IPE-300. SE DESEA CONOCER:

- 1) SUS CARACTERÍSTICAS MECÁNICAS (A, I_y e I_z).
- 2) LA DISTRIBUCIÓN DE TENSIONES TANGENCIALES DEBIDAS A UN CORTANTE Q_z APLICADO EN EL C.E.C.
- 3) LA DISTRIBUCIÓN DE TENSIONES TANGENCIALES DEBIDAS A UN CORTANTE Q_y APLICADO EN EL C.E.C.



1) CARACTERÍSTICAS MECÁNICAS.



$$A = 0.71 \times 28.93 + 2 \times 10.7 \times 15 = 52.6 \text{ cm}^2$$

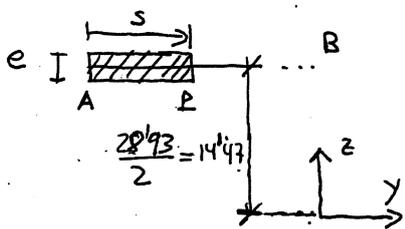
$$I_y = \frac{0.71 \times 28.93^3}{12} + 2 \times \left(\frac{15 \times 10.7^3}{12} + 15 \times 10.7 \times \left[\frac{28.93}{2} \right]^2 \right) = 1432.6 + 2 \times (1.5 + 3358.2) = 8152 \text{ cm}^4$$

$$I_z = \frac{10.7 \times 15^3}{12} \times 2 + \frac{28.93 \times 0.71^3}{12} = 300.9 \times 2 + 0.9 = 603 \text{ cm}^4$$

2) TENSIONES DEBIDAS A Q_z .

EN TODO EL EJERCICIO
S en cm
 Q_z en N

• TRAMO AB



$e = 10.7 \text{ cm.}$

$$\tau_e|_p = \tau_e|_A + \frac{Q_z S_y(A-P)}{I_y}$$

$z_G(A-P) = \text{COTA C.D.G. TRAMO A-P}$

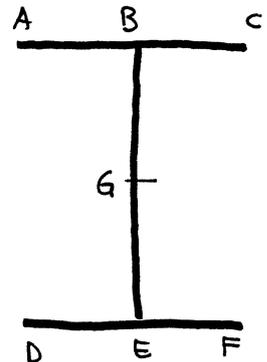
$$S_y(A-P) = e \cdot s \cdot z_G(A-P) = 10.7 s (14.47) = 15.48 s \text{ cm}^3$$

$$\tau_e|_p = \frac{15.48 s}{8152} Q_z = 0.001899 s Q_z \text{ N/cm}$$

$\tau_e|_A = 0$ $\tau_A = 0$

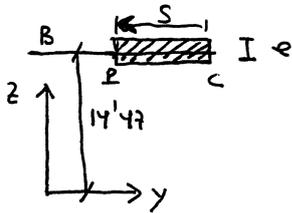
$\tau_e|_B = 0.01424 Q_z \text{ N/cm}$ $s = 7.5 \text{ cm}$

$$\tau_B = \frac{0.01424 Q_z}{10.7} = 0.01331 Q_z \text{ N/cm}^2 = 133.1 Q_z \text{ Pa}$$





• TRAMO C B



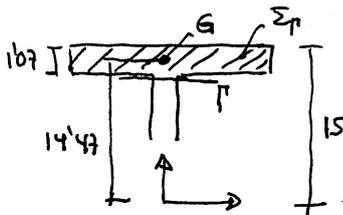
$$\tau e|_p = \tau e|_c + \frac{Q_z S_y (c-p)}{I_y}$$

$$S_y (c-p) = e s z_G (c-p) = 1.07 s (14.47) = 15.48 s \text{ cm}^3$$

NÓTESE $S_y (c-p) \equiv S_y (a-p)$. NO HACE FALTA DESARROLLAR LOS CÁLCULOS, PUES LLEGARÍAMOS A LAS MISMAS EXPRESIONES QUE EN EL TRAMO ANTERIOR. SÓLO HAY QUE INTERPRETAR ADECUADAMENTE LOS RESULTADOS.

• TRAMO BE.

LO PRIMERO QUE NECESITAMOS ES EL RASANTE EN B'''.
PODEMOS CALCULARLO USANDO LA FÓRMULA DE ZHURAVSKI

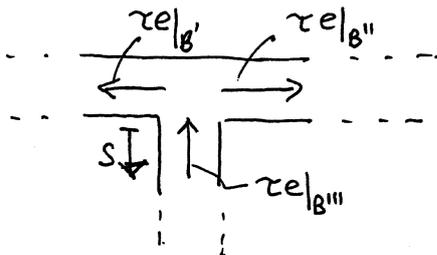


$$\tau e|_{B'''} = \frac{Q_z S_y (z_{G'})}{I_y}$$

$$S_y (z_{G'}) = 15 \times 1.07 \times 14.47 = 232.2 \text{ cm}^3$$

$$\tau e|_{B'''} = \frac{232.2}{8152} Q_z = 0.02849 Q_z \text{ N/cm}$$

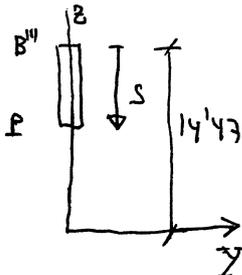
O BIEN IMPONIENDO LA CONTINUIDAD DEL FLUJO DE RASANTES EN EL NUDO



[SE HA SUPUESTO UNA COORDENADA LOCAL S EN EL ALMA, CRECIENTE HACIA ABAJO, PARA DIBUJAR EL SENTIDO DE CORRESPONDIENTE A $\tau e|_{B'''} > 0$]

$$\tau e|_{B'''} = \tau e|_{B'} + \tau e|_{B''} = 2 \times 0.01424 Q_z \text{ N/cm} = 0.02848 Q_z \text{ N/cm}$$

AHORA PODEMOS PROCEDER EN EL ALMA COMO EN LOS TRAMOS ANTERIORES



$$\tau e|_p = \tau e|_{B'''} + \frac{Q_z S_y (B'''-p)}{I_y}$$

$$S_y (B'''-p) = e s z_G (B'''-p) = 0.71 s (14.47 - \frac{s}{2}) = 10.27 s - 0.355 s^2 \text{ cm}^3$$

$$\tau e|_p = 0.02848 Q_z + \frac{10.27 s - 0.355 s^2}{8152} Q_z$$

$$= [0.02848 + 0.001260 s - 4.355 \times 10^{-5} s^2] Q_z \text{ N/cm}$$



$$S = 0 \quad \tau_{e|_B} = 0'02848 Q_z \text{ N/cm}$$

$$\tau_B = \frac{0'02848 Q_z}{0'71} = 0'04011 Q_z \text{ N/cm}^2 = 401'1 Q_z \text{ Pa}$$

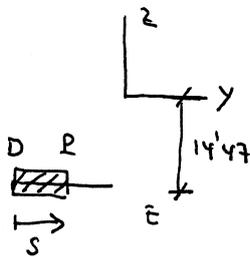
$$S = 14'47 \quad \tau_{e|_G} = 0'03759 Q_z \text{ N/cm}$$

$$\tau_G = 0'05295 Q_z \text{ N/cm}^2 = 529'5 Q_z \text{ Pa}$$

$$S = 28'93 \quad \tau_{e|_E} = 0'02848 Q_z \text{ N/cm}^2$$

$$\tau_E = 401'1 Q_z \text{ Pa}$$

• TRAMO DE



$$\tau_{e|_P} = \tau_{e|_D} + \frac{Q_z S_y (D-P)}{I_y}$$

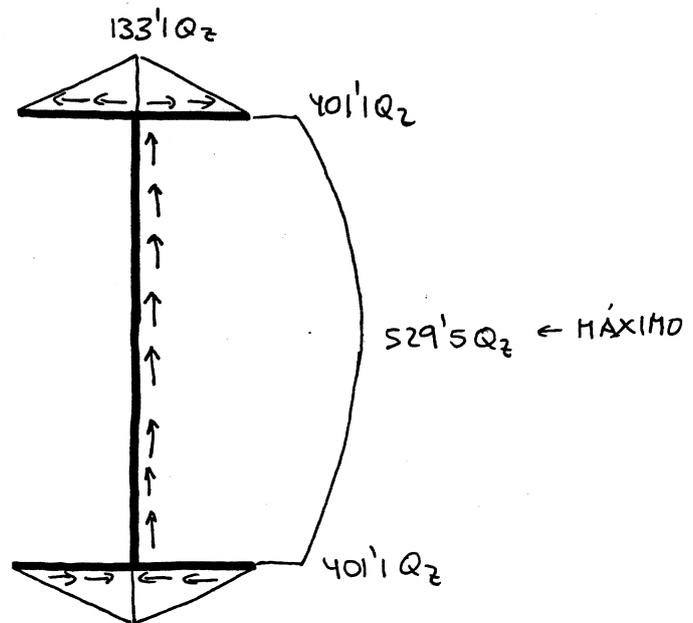
$$S_y (D-P) = S e z_G (D-P) = 1'075 (-14'47) = -15'485 \text{ cm}^3$$

NÓTESE $S_y (D-E) = -S_y (A-B)$. OBTENDREMOS LAS MISMAS EXPRESIONES QUE EN EL TRAMO AB, PERO CAMBIADAS DE SIGNO. NO HACE FALTA NINGÚN CÁLCULO. BASTA INTERPRETAR ADECUADAMENTE LOS RESULTADOS.

• TRAMO FE \rightarrow SIMÉTRICO DE.

• GRÁFICA RESUMEN

τ en Pa
 Q_z en N



de τ aproximadamente a escala.

• COMPROCIÓN DE QUE $Q_z = \int_{\Sigma} \tau_{xz} d\Sigma$

ES EVIDENTE QUE LA RESULTANTE DE LAS COMPONENTES HORIZONTALES ES NULA.

Porque $\tau_{xz} = 0$ en los alas.

$$\int_{\Sigma} \tau_{xz} d\Sigma = \int_{\text{Alma}} \tau_{xz} d\Sigma = \int_0^{2893} \tau e ds =$$

$$= \int_0^{2893} (0'02848 + 0'001260s - 4'355 \times 10^{-5} s^2) Q_z ds$$

$$= Q_z \left[0'02848s + 0'001260 \frac{s^2}{2} - 4'355 \times 10^{-5} \frac{s^3}{3} \right]_0^{2893} = 0'9997 Q_z = Q_z$$

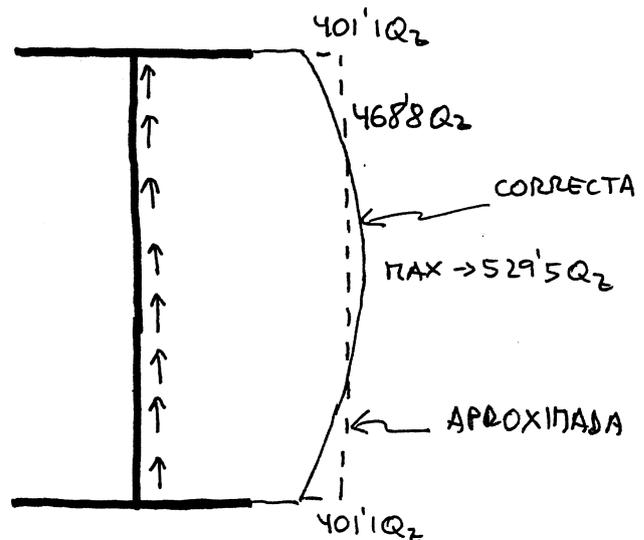
- LA NORMA NBE EA-95 "ESTRUCTURAS DE ACERO EN EDIFICACIÓN", EN SU ARTÍCULO 3.4.3.4, PERMITE ADMITIR COMO TENSIÓN TANGENCIAL EN CUALQUIER PUNTO DEL ALMA DE UNA SECCIÓN DOBLE T -TAL QUE LA MENOR DE LAS ALAS REPRESENTA ^{AL MENOS} EL 15% DEL ÁREA TOTAL- LA DADA POR $\tau = \frac{Q_z}{A_a}$, SIENDO A_a EL ÁREA DEL ALMA. COMPROBAREMOS EL ERROR QUE SE COMETE ACTUANDO ASÍ.

$$\tau_{med} = \frac{Q_z}{A_a} = \frac{Q_z}{2893 \times 0'71}$$

$$= 0'04868 Q_z \text{ N/cm}^2$$

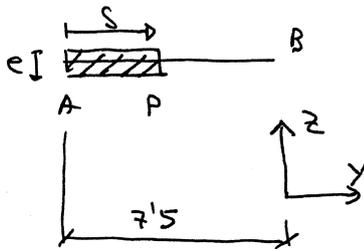
$$= 486'8 Q_z \text{ Pa}$$

SE CONSIGUE UNA ~~BUENA~~ ^{RAZONABLE} APROXIMACIÓN, POR EXCESO EN LOS EXTREMOS Y POR DEFECTO EN EL CENTRO, QUE ADEMÁS QUEDA DEL LADO DE LA SEGURIDAD AL COMPROBAR SIMULTÁNEAMENTE CON LAS TENSIONES NORMALES σ , PUES ESTAS ALCANZAN SUS VALORES MÁXIMOS EN LOS EXTREMOS DE LA PIEZA, DONDE LA ESTIMACIÓN DE τ ES POR EXCESO.



3) TENSIONES DEBIDAS A Q_y .

• TRAMO AB



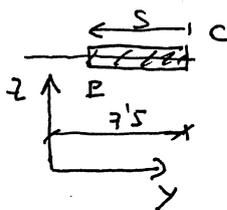
$$\tau_{e|_p} = \tau_{e|_A} + \frac{Q_y S_z(A-P)}{I_z}$$

$$S_z(A-P) = es \gamma_G(A-P) = 1.07s \left(7.5 + \frac{s}{2}\right) = -8.025s + 0.535s^2$$

$$\tau_{e|_p} = \frac{-8.025s + 0.535s^2}{603} Q_y = [0.01331s + 8.872 \times 10^{-4}s^2]$$

$$s = 7.5 \quad \tau_{e|_B} = -0.04992 Q_y \text{ N/cm} \quad \tau_B = -0.04665 Q_z \text{ N/cm} = -466.5 Q_z \text{ Pa.}$$

• TRAMO CB

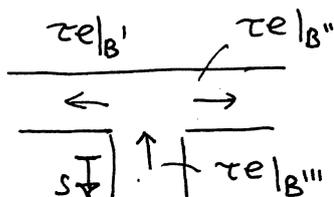


$$\tau_{e|_p} = \tau_{e|_C} + \frac{Q_y S_z(C-P)}{I_z}$$

$$S_z(C-P) = es \gamma_G(C-P) = 1.07s \left(7.5 - \frac{s}{2}\right) = -S_z(A-P)$$

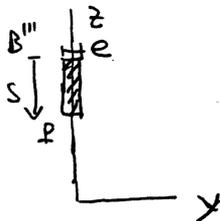
PUEDE DEDUCIRSE LA SOLUCIÓN DE LA DEL TRAMO ANTERIOR.

• TRAMO B-E.



$$\tau_{e|_{B'''}} = \tau_{e|_{B'}} + \tau_{e|_{B''}}$$

$$= -0.04992 Q_y + 0.04992 Q_y = 0$$



$$\tau_{e|_p} = \tau_{e|_{B'''}} + \frac{Q_y S_z(B'''-P)}{I_z}$$

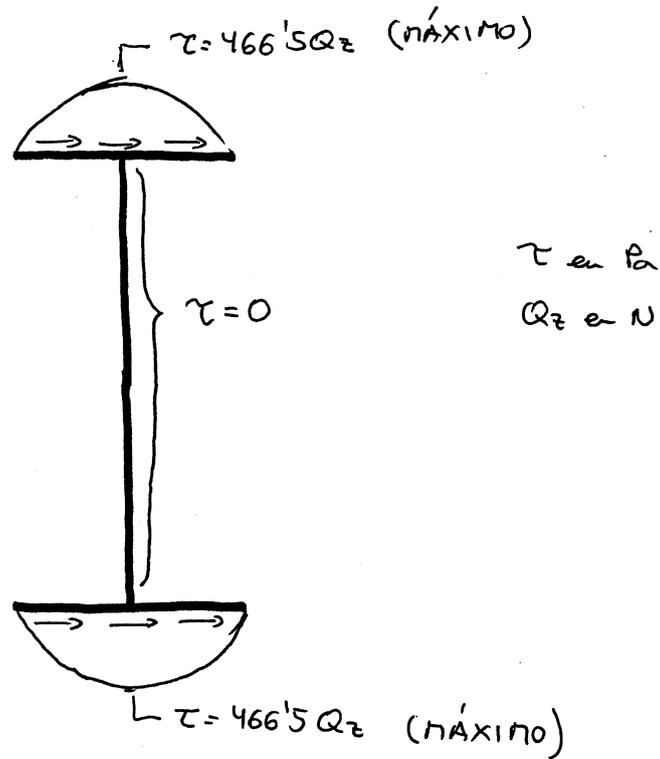
$$S_z(B'''-P) = e \cdot s \gamma_G(B'''-P) = 0.71e \cdot 0 = 0$$

$$\tau_{e|_p} = 0.$$

• TRAMOS DE Y FE. → SIMÉTRICOS AB Y CB.

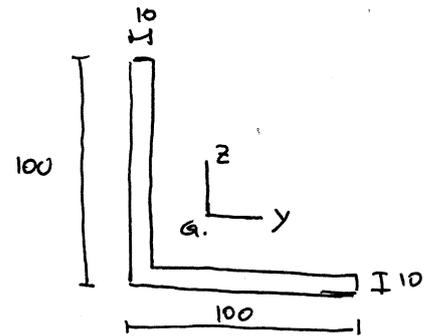


• GRÁFICA:



EN EL ANGULAR L100.10, ESQUEMATIZADO EN LA FIGURA, DETERMINAR:

- 1) LA DISTRIBUCIÓN DE TENSIONES TANGENCIALES DEBIDA A UN CORTANTE $\frac{1}{12} (\mathbf{j} + \mathbf{k})$ APLICADO EN EL C.E.C.
- 2) LA DISTRIBUCIÓN DE TENSIONES TANGENCIALES DEBIDA A UN CORTANTE Q_z APLICADO EN EL C.E.C.

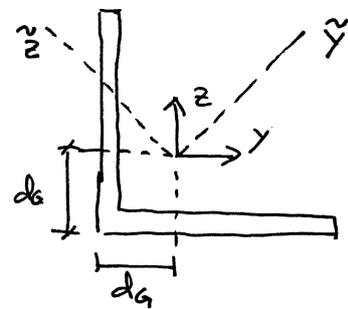


EN UN EJERCICIO ANTERIOR HALLAMOS:

$$A = 19 \text{ cm}^2 \quad d_G = 2.87 \text{ cm}$$

$$I_y = I_z = 179 \text{ cm}^4 \quad P_{yz} = -107 \text{ cm}^4$$

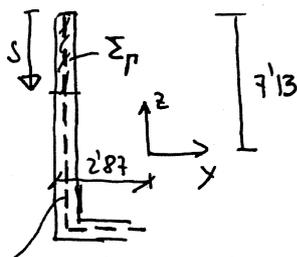
$$I_{\tilde{y}} = 286 \text{ cm}^4 \quad I_{\tilde{z}} = 72 \text{ cm}^4 \quad P_{y\tilde{z}} = 0$$



- 1) $Q = \frac{1}{12} (\mathbf{j} + \mathbf{k})$ EN LOS EJES INICIALES

Q en N
S en cm

$$\tau_e = \frac{S_z (\sum r) I_y - S_y (\sum r) P_{yz}}{I_y I_z - P_{yz}^2} Q_y + \frac{S_y (\sum r) I_z - S_z (\sum r) P_{yz}}{I_y I_z - P_{yz}^2} Q_z$$



long. línea media = 9.5 cm.

$$S_y (\sum r) = e s z_G (\sum r) = 1 \cdot s (7.13 - s/2) = 7.13s - 0.5s^2$$

$$S_z (\sum r) = e s y_G (\sum r) = 1 \cdot s (2.87 + 0.5s) = -2.37s$$

$$I_y I_z - P_{yz}^2 = 20592 \text{ cm}^4$$

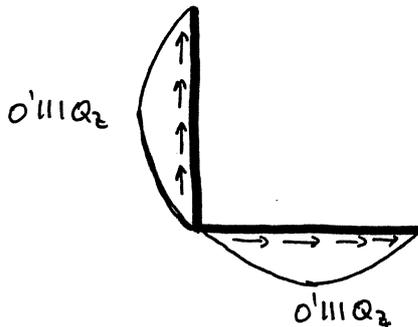
$$\tau_e = \frac{(-2.37s) 179 + 107(7.13s - 0.5s^2)}{20592} Q_y + \frac{179(7.13s - 0.5s^2) + 107(-2.37s)}{20592} Q_z$$

$$= (+0.0164s - 0.00260s^2) Q_y + (0.0497s - 0.00435s^2) Q_z$$

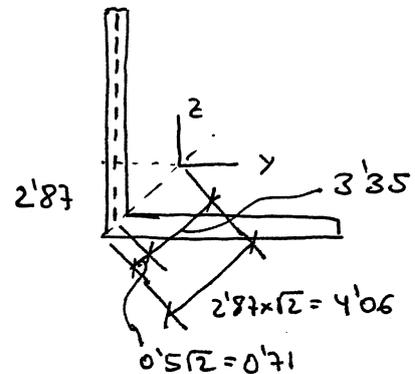
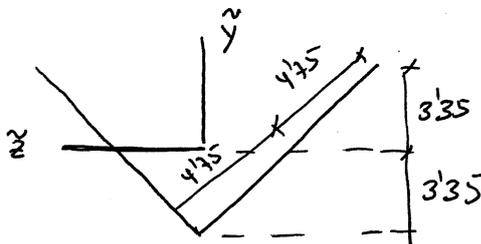


$$\begin{array}{lll}
 S=0 & \tau_e=0 & \tau=0 \\
 S=4'75 \text{ cm} & \tau_e=0'111 \text{ N/cm} & \tau=0'111 \text{ N/cm}^2 = 1110 \text{ Pa.} \\
 S=9'5 & \tau_e=0'0005 \approx 0 & \tau=0
 \end{array}$$

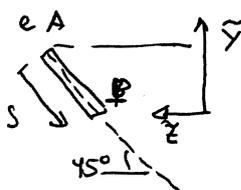
da otra rama por simetría.



CALCULANDO EN EJES PRINCIPALES.



$$Q_y = 1 \text{ N.}$$



$$\tau_e|_P = \tau_e|_A + Q_y \frac{S_z(A-P)}{I_z}$$

$$\begin{aligned}
 S_z(A-P) &= e \cdot s \left(3'35 - \frac{s}{2} \cos 45 \right) \\
 &= 3'35s - 0'354s^2
 \end{aligned}$$

$$\tau_e|_P = \frac{3'35s - 0'354s^2}{72} Q_y = (0'0465s - 0'00492s^2) Q_y \text{ N/cm.}$$

$$\begin{array}{lll}
 S=0 & \tau_e|_A=0 & \tau_A=0 \\
 S=4'75 & \tau_e=0'110 \text{ N/cm} & \tau_{\max}=0'110 \text{ N/cm}^2 = 1100 \text{ Pa.}
 \end{array}$$

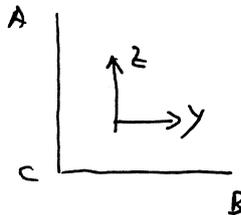
$$\begin{array}{lll}
 S=9'5 \text{ cm} & \tau_e|_C = \underline{-0'002 \text{ N/cm}} \approx 0 & \tau_C=0. \\
 & \text{Error por redondeos} &
 \end{array}$$

Naturalmente, se llega a la misma distribución que antes.

Resto por simetría.



2) Q_z en el C.E.C. Trabajaremos en ejes iniciales.



• TRAMO AB. De los resultados del punto anterior:

$$\tau_e|_p = (0'0497s - 0'00435s^2) Q_z$$

$$\frac{d(\tau_e)}{ds} = (0'0497 - 0'0087s) Q_z = 0 \rightarrow s = 5'71 \text{ cm.}$$

$$s=0 \quad \tau_e = 0 \quad \tau_A = 0$$

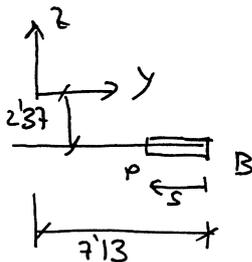
$$s=5'71 \quad \tau_e|_{\max} = 0'142 Q_z \text{ N/cm}$$

$$\tau_{\max} = 0'142 Q_z \text{ N/cm}^2 = 1420 Q_z \text{ Pa}$$

$$s=9'5 \quad \tau_e|_c = 0'0796 Q_z \text{ N/cm}$$

$$\tau_c = 0'0796 Q_z \text{ N/cm}^2 = 796 Q_z \text{ Pa}$$

• TRAMO BC



$$S_y(B-p) = es \quad z_a(B-p) = -2'37s$$

$$S_z(B-p) = es \quad y_a(B-p) = s(7'13 - s/2) = 7'13s - 0'5s^2$$

$$\tau_e|_p = \frac{S_y(B-p) I_z - S_z(B-p) P_{yz}}{I_y I_z - P_{yz}^2} Q_z$$

$$= \frac{179(-2'37s) + 107(7'13s - 0'5s^2)}{20592} Q_z$$

$$= (0'0164s - 0'00260s^2) Q_z$$

$$\frac{d(\tau_e)}{ds} = (0'0164 - 0'0052s) Q_z = 0 \rightarrow s = 3'15 \text{ cm.}$$

$$s=0 \quad \tau_e|_B = 0 \quad \tau_B = 0$$

$$s=3'15 \quad \tau_e|_{\max} = 0'0259 Q_z \text{ N/cm}$$

$$\tau_{\max} = 0'0259 Q_z \text{ N/cm}^2 = 259 Q_z \text{ Pa}$$

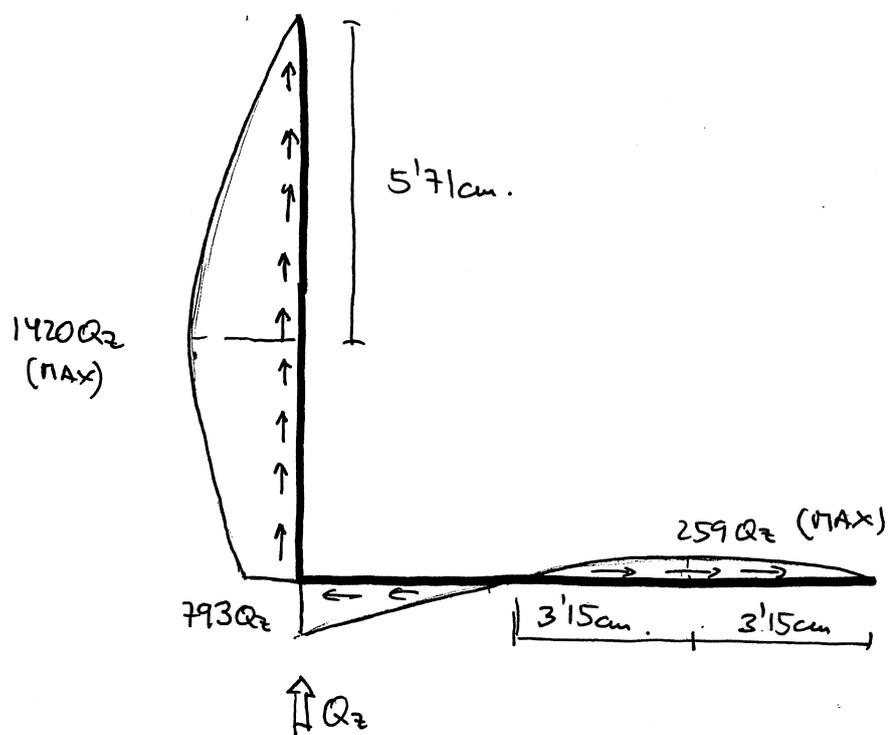
$$s=9'5 \quad \tau_e|_c = -0'0789 Q_z \text{ N/cm}^2$$

$$\tau_c = -0'0789 Q_z \text{ N/cm}^2 = -789 Q_z \text{ Pa}$$

Nótese que la continuidad de flujo en C $\Rightarrow 796 Q_z \approx 789 Q_z$.
Puede deberse simplemente a la acumulación de errores por redondeos.

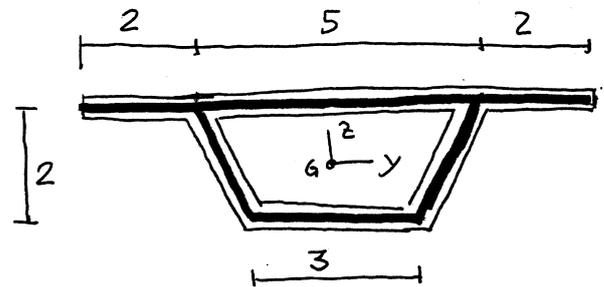


Gráfica.



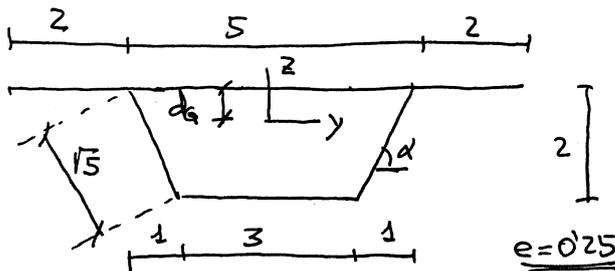
EJERCICIO Nº 43

LA FIGURA ADJUNTA REPRESENTA, CONVENIENTEMENTE SIMPLIFICADA, LA SECCIÓN TRANSVERSAL DE UN PUENTE. LAS COTAS, QUE FIGURAN EN METROS, APARECEN DADAS SOBRE LA LÍNEA MEDIA DE LA PARED, CUYO ESPESOR ES DE 25 cm EN TODOS LOS CASOS.



SE PIDE DETERMINAR:

- 1.- LA DISTRIBUCIÓN DE TENSIONES DEBIDAS A UN CORTANTE Q_z
- 2.- LA DISTRIBUCIÓN DE TENSIONES DEBIDAS A UN CORTANTE Q_y
- 3.- EL CENTRO DE ESFUERZOS CORTANTES.

CARACTERÍSTICAS MECÁNICAS DE LA SECCIÓN.


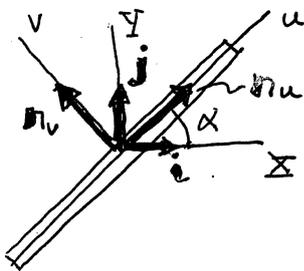
$$\alpha = \arctan \frac{2}{1} = 63'4379''$$

$$\cos \alpha = 0'447214 \quad \cos^2 \alpha = 0'2$$

$$\sin \alpha = 0'894427 \quad \sin^2 \alpha = 0'8$$

$$A = 0'25 \times (2 + 5 + 2 + 3 + 2\sqrt{5}) = 4'118 \text{ m}^2$$

$$d_G = \frac{2\sqrt{5} \times 0'25 \times 1 + 3 \times 0'25 \times 2}{4'118} = 0'6358 \text{ m}$$



$$\mathbf{i} = \cos \alpha \mathbf{m}_u - \sin \alpha \mathbf{m}_y$$

$$\mathbf{j} = \sin \alpha \mathbf{m}_u + \cos \alpha \mathbf{m}_y$$

$$I_u = \frac{be^2}{12} \approx 0$$

$$I_v = \frac{eb^3}{12}$$

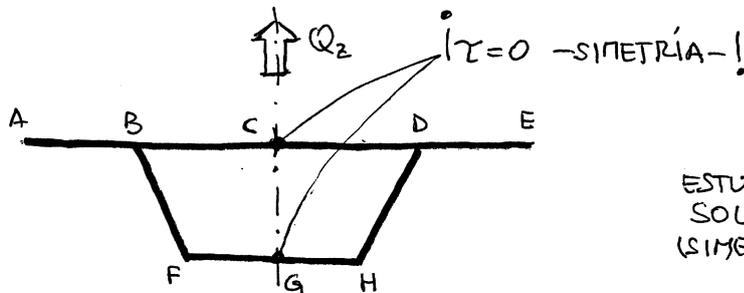
$$I_x = (\cos \alpha, -\sin \alpha) \begin{bmatrix} I_u & 0 \\ 0 & I_v \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \cos \alpha \\ -\sin \alpha \end{Bmatrix} = I_u \cos^2 \alpha + I_v \sin^2 \alpha$$

$$I_y = (\sin \alpha, \cos \alpha) \begin{bmatrix} I_u & 0 \\ 0 & I_v \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sin \alpha \\ \cos \alpha \end{Bmatrix} = I_u \sin^2 \alpha + I_v \cos^2 \alpha$$

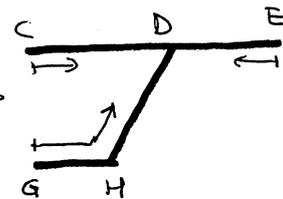
$$\text{Si } I_u \approx 0 \rightarrow I_x = I_v \sin^2 \alpha \quad \text{e} \quad I_y = I_v \cos^2 \alpha$$

$$\begin{aligned}
 I_y &= \frac{9 \times 0'25^3}{12} + 9 \times 0'25 \times 0'6358^2 + \frac{3 \times 0'25^3}{12} + 3 \times 0'25 \times (2 - 0'6358)^2 + 2 \frac{0'25^3 \cdot \sqrt{5}}{12} \cos^2 \alpha \\
 &+ 2 \frac{0'25 \times \sqrt{5}^3}{12} \sin^2 \alpha + 2 \times 0'25 \times (\sqrt{5} \times (1 - 0'6358))^2 \quad (+0'0012) \\
 &= 0'0117 + 0'9095 + 0'0039 + 1'3958 + 0'3727 + 0'1483 = 2'8431 \text{ m}^4 \\
 I_z &= \frac{0'25 \times 9^3}{12} + \frac{0'25 \times 3^3}{12} + 2 \times \frac{0'25 \times \sqrt{5}^3}{12} \cos^2 \alpha + 2 \times 0'25 \times \sqrt{5} \times 2^2 + 2 \frac{0'25^3 \sqrt{5}}{12} \sin^2 \alpha \\
 &= 15'1875 + 0'5625 + 0'0932 + 4'4721 + 0'0047 = 20'3200 \text{ m}^4
 \end{aligned}$$

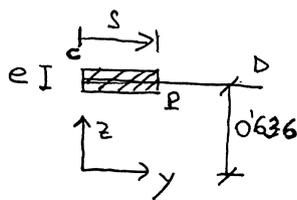
1) TENSIONES TANGENCIALES DEBIDAS A UN CORTANTE Q_z .



ESTUDIAREMOS
SOLO
(SIMETRIA).



• TRAMO C-D



$$\tau_{e|p} = \tau_{e|c} + \frac{Q_z S_y (c-p)}{I_y}$$

$$S_y (c-p) = e \cdot s \cdot z_G (c-p)$$

$$= 0'25 s \times 0'636 = 0'159 s$$

$$\tau_{e|p} = \frac{0'159 s}{2'84} Q_z = 0'0560 s Q_z \text{ MN/m}$$

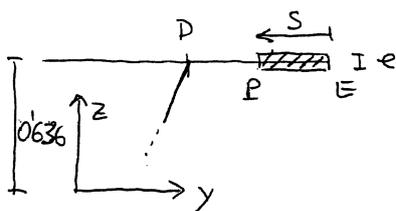
$$s = 2'5 \text{ m}$$

$$\tau_{e|b} = 0'140 Q_z \text{ MN/m}$$

$$\tau_D = 0'560 Q_z \text{ MPa}$$

EN TODO EL DESARROLLO
SUPONDEREMOS
 Q_z EN MN
 s EN m

• TRAMO E-D



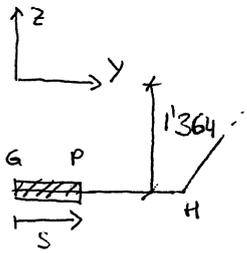
$$\tau_{e|p} = \tau_{e|E} + \frac{Q_z S_y (E-p)}{I_y}$$

$$S_y (E-p) = e s z_d (E-p) = 0'25 s \times 0'636 = 0'159 s$$

$$\tau_{e|p} = 0'0560 s Q_z \text{ MN/m (como tramo anterior)}$$

$$s = 2'0 \text{ m} \quad \tau_{e|D} = 0'112 Q_z \text{ MN/m} \quad \tau_D = 0'448 Q_z \text{ MPa}$$

• TRAMO GH



$$\tau e|_P = \tau e|_G + \frac{Q_z S_y(G-P)}{I_y}$$

$$S_y(G-P) = e s z_G(G-P) = 0.25s (-1.364) = -0.3415 \text{ m}^3$$

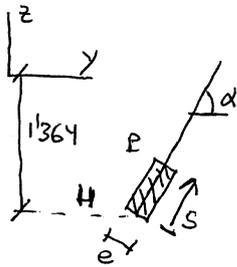
$$\tau e|_P = -\frac{0.3415}{2.84} Q_z = -0.120 Q_z \text{ MN/m}$$

$$s = 1.5 \text{ m}$$

$$\tau e|_H = -0.180 Q_z \text{ MN/m}$$

$$\tau_H = -0.720 Q_z \text{ MPa}$$

• TRAMO H-D



$$\tau e|_P = \tau e|_H + \frac{Q_z S_y(H-P)}{I_y}$$

$$S_y(H-P) = e s z_G(H-P) = 0.25s \left(-1.364 + \frac{s}{2} \sin \alpha\right) = -0.3415s + 0.112s^2$$

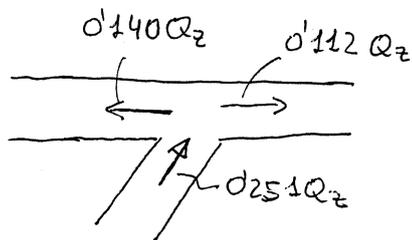
$$\tau e|_P = Q_z \left\{ -0.180 + \frac{-0.3415s + 0.112s^2}{2.84} \right\} = Q_z \left\{ -0.180 - 0.120s + 0.0394s^2 \right\}$$

$$s = \frac{1.364}{\sin \alpha} = 1.525 \text{ m} \quad (\text{Punto I, a la altura del c.d.g.})$$

$$\tau e|_I = -0.271 Q_z \text{ MN/m} \quad \tau_I = -1.084 Q_z \text{ MPa}$$

$$s = 1.5 = 2.236 \text{ m} \quad \tau e|_D = -0.251 Q_z \text{ MN/m} \quad \tau_D = -1.005 Q_z \text{ MPa}$$

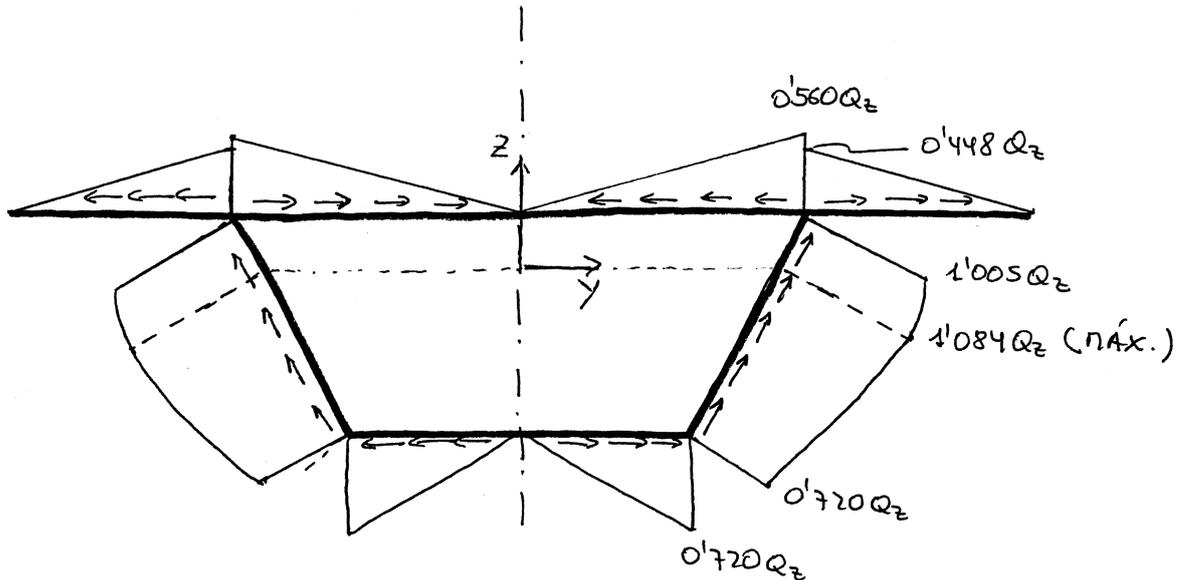
• COMPROBACIÓN DE LA CONTINUIDAD DEL FLUJO DE TANGENCIALES EN D.



$$0.140 + 0.112 = 0.252 \approx 0.251$$

LA DIFERENCIA EN LA TERCERA CIFRA SIGNIFICATIVA ES IRRELEVANTE HABIENDO DESARROLLADO LOS CÁLCULOS CON 3 CIFRAS SIGNIFICATIVAS.

• ESQUEMA DE LA DISTRIBUCIÓN.



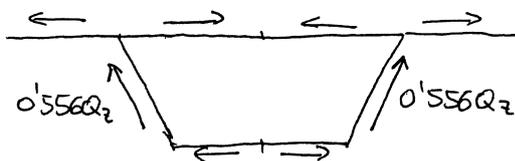
• COMPROBACIÓN DE QUE LA RESULTANTE DE ESTAS TENSIONES ES Q_z .

$\Sigma F_H = 0$ ES EVIDENTE POR LA SIMETRÍA.

ΣF_V RESULTANTE TENSIONES EN EL ALMA H-D \rightarrow LA DETERMINAMOS INTEGRANDO LOS CASANTES HALLADOS ANTES.

$$R_{H-D}(\tau) = \int_0^{\sqrt{5}} \tau e ds = \int_0^{\sqrt{5}} \{-0.180 - 0.120s + 0.00394s^2\} Q_z ds$$

$$= Q_z \left[-0.180s - 0.060s^2 + 0.00394 \frac{s^3}{3} \right]_0^{\sqrt{5}} = -0.556 Q_z \text{ MN}$$

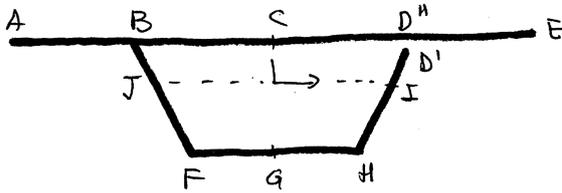


$$\Sigma F_V = 2 \times 0.556 \times \text{mód} = 0.995 Q_z$$

EL RESULTADO ES UNA APROXIMACIÓN RAZONABLE DEL CORTANTE, HABIDA CUENTA DE LA PRECISIÓN DE LOS RESULTADOS INTERMEDIOS.

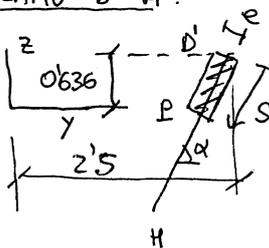
2) TENSIONES TANGENCIALES DEBIDAS A UN CORTANTE Q_y .

■ CORTAMOS POR D PARA ABRIR LA SECCIÓN.



■ ESTADO [0]. SECCIÓN ABIERTA SOMETIDA A Q_y .

• TRAMO D'-H.



$$\tau_{e|_p} = \tau_{e|_{D'}} + \frac{Q_y S_z(D'-P)}{I_z}$$

$$S_y(D'-P) = e \cdot s \cdot y_G(D'-P) = 0.25s \left(2.5 - \frac{s}{2} \cos \alpha \right)$$

$$= 0.625s - 0.0559s^2$$

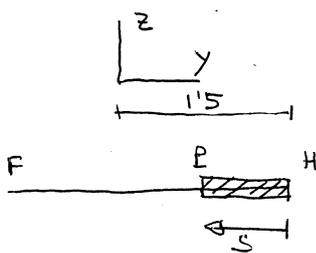
$$\tau_{e|_p} = \frac{0.625s - 0.0559s^2}{20.32} Q_y = (0.0308s - 0.00275s^2) Q_y$$

$$z=0 \rightarrow s = \frac{0.636}{\sin \alpha} = 0.711 \text{ m.}$$

$$s=0.711 \text{ m} \quad \tau_{e|_I} = 0.0205 Q_y \text{ MN/m} \quad \tau_I = 0.0820 Q_y \text{ MPa}$$

$$s=\sqrt{5} \quad \tau_{e|_H} = 0.0551 Q_y \text{ MN/m} \quad \tau_H = 0.220 Q_y \text{ MPa}$$

• TRAMO H-F



$$\tau_{e|_p} = \tau_{e|_H} + \frac{Q_y S_z(H-P)}{I_z}$$

$$S_z(H-P) = es \cdot y_G(H-P) = 0.25s \left(1.5 - \frac{s}{2} \right)$$

$$= 0.375s - 0.125s^2$$

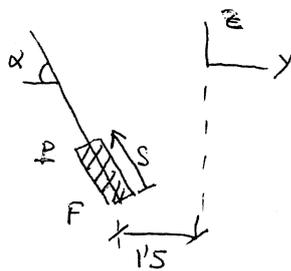
$$\tau_{e|_p} = 0.0551 Q_y + \frac{0.375s - 0.125s^2}{20.32} Q_y$$

$$= Q_y \{ 0.0551 + 0.0185s - 0.00615s^2 \} \text{ MN/m}$$

$$s=1.5 \text{ m} \quad \tau_{e|_G} = 0.0690 Q_y \text{ MN/m} \quad \tau_G = 0.276 Q_y \text{ MPa}$$

$$s=3.0 \text{ m} \quad \tau_{e|_F} = 0.0551 Q_y \text{ MN/m} \quad \tau_F = 0.220 Q_y \text{ MPa}$$

◦ TRAMO F-B



$$\tau_e|_p = \tau_e|_F + \frac{Q_y S_z(F-P)}{I_z}$$

$$S_z(F-P) = e s y_G(F-P) = 0.25s \left(-1.5 - \frac{s}{2} \cos \alpha\right)$$

$$= -0.375s - 0.0559s^2$$

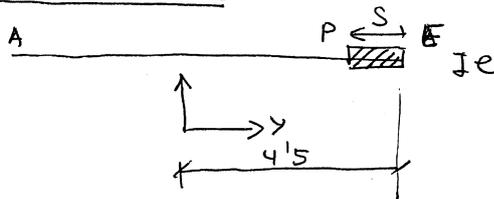
$$\tau_e|_p = 0.0551 Q_y - \frac{0.375s + 0.0559s^2}{20.32} Q_y$$

$$= Q_y \{0.0551 - 0.0185s - 0.00275s^2\} \text{ MN/m}$$

$s = 1.5 \text{ m}$ $\tau_e|_B = \frac{-1.72 \times 10^5 Q_y}{\text{ERROR DE REDONDEO}} = 0$ $\tau_B = 0$

⇒ EL TRAMO D'-H-G-F-B NO TRANSMITE FLUJO AL E-D''-C-B-A. ESTE ÚLTIMO PUEDE CALCULARSE COMO SI ESTUVIERA AISLADO.

◦ TRAMO E-A



$$\tau_e|_p = \tau_e|_E + \frac{Q_y S_z(E-P)}{I_z}$$

$$S_z(E-P) = e \cdot s \cdot y_G(E-P) = 0.25s \left(4.5 - \frac{s}{2}\right)$$

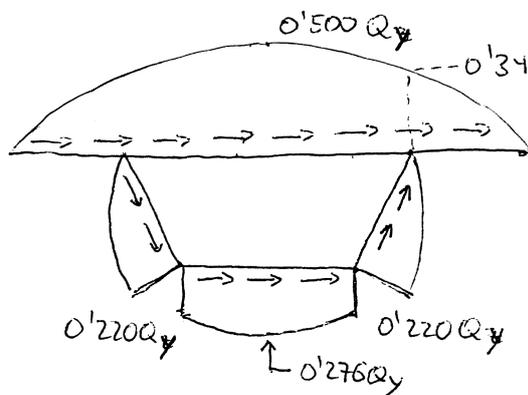
$$= 1.125s - 0.125s^2$$

$$\tau_e|_p = \frac{1.125s - 0.125s^2}{20.32} Q_y = (0.0554s - 0.00615s^2) Q_y \text{ MN/m}$$

$s = 4.5$ $\tau_e|_c = 0.125 Q_y \text{ MN/m}$ $\tau_c = 0.500 Q_y \text{ MPa}$

$s = 9.0$ $\tau_e|_A = \frac{4.5 \times 10^{-4} Q_y}{\text{ERROR}} = 0.000 Q_y = 0$ $\tau_A = 0$

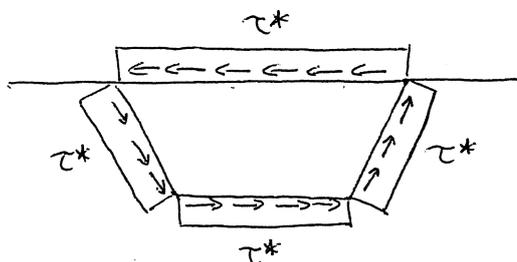
◦ GRÁFICA



$s = 2$ $\tau_e|_{D''} = 0.0862 Q_y$
 $\tau_{D''} = 0.345 Q_y \text{ MPa}$

τ en MPa
 Q_y en MN

ESTADO [1]. RASANTE INCOGNITA τ^* EN D.



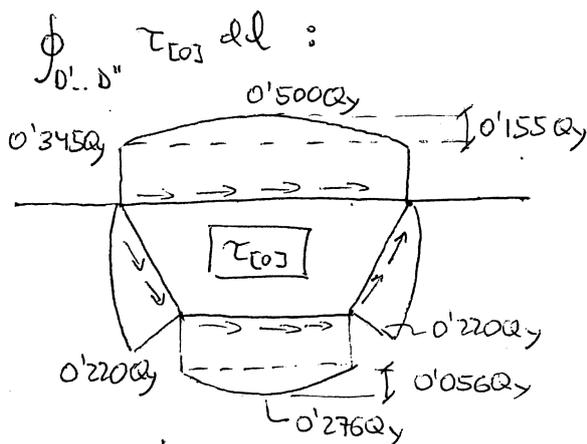
$$\tau e|_p = \tau^* e|_{D'}$$

$$\tau = \frac{\tau^* e_{D'}}{e_p} = \tau^*$$

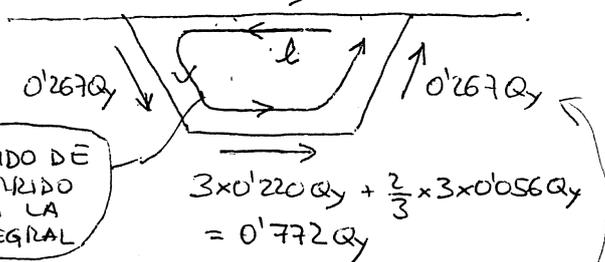
PORQUE $e = \text{cte}$

ECUACIÓN DE COMPATIBILIDAD.

$$\Delta u = \oint_{D'HFBD''} \gamma \, dl = \oint_{D'..D''} \frac{\tau_{[0]} + \tau_{[1]}}{G} \, dl = \frac{1}{G} \oint_{D'..D''} \tau_{[0]} \, dl + \frac{1}{G} \oint_{D'..D''} \tau^* \, dl = 0$$



$$\int_{BD''} \tau_{[0]} \, dl = 0.345 Q_y \times 5 + \frac{2}{3} \times 0.155 Q_y \times 5 = 2.242 Q_y$$



$$\int_{D'..H} \tau \, ds = \frac{1}{e} \int_{D'..H} (\tau e) \, ds = \frac{1}{0.25} \int_0^{\sqrt{5}} (0.0308s - 0.00275s^2) Q_y \, ds$$

$$= 4 \times \left[0.0308 \frac{s^2}{2} - 0.00275 \frac{s^3}{3} \right]_0^{\sqrt{5}} Q_y = 0.267 Q_y$$

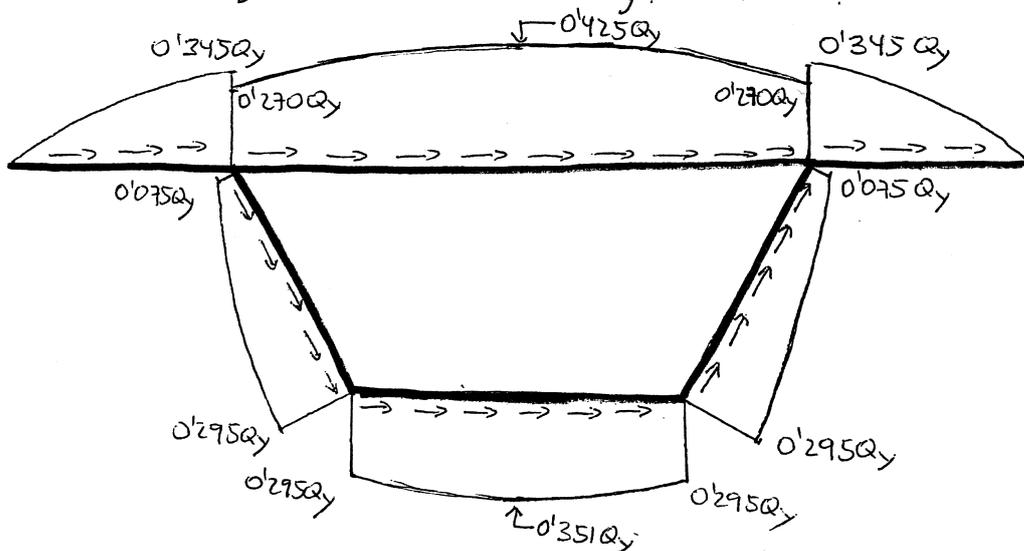
$$\int_{D'..D''} \tau_{[0]} \, dl = Q_y [-2.242 + 0.267 + 0.772 + 0.267] = -0.936 Q_y$$

$$\int_{D'..D''} \tau^* \, dl = \tau^* [5 + \sqrt{5} + 3 + \sqrt{5}] = 12.472 \tau^*$$

$$\Delta u = 0 \Rightarrow -0.936 Q_y + 12.472 \tau^* = 0$$

$$\tau^* = 0.0750 Q_y \, \text{Pa}$$

■ DISTRIBUCIÓN DE τ DEBIDA A Q_y . GRÁFICA.



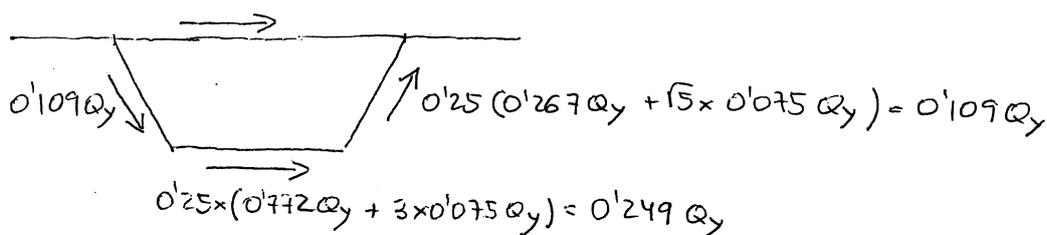
3) CENTRO DE ESFUERZOS CORTANTES.

SIMETRÍA $\rightarrow y_{cec} = 0$

DETERMINACIÓN z_{cec} . A PARTIR τ DEBIDAS A Q_y .

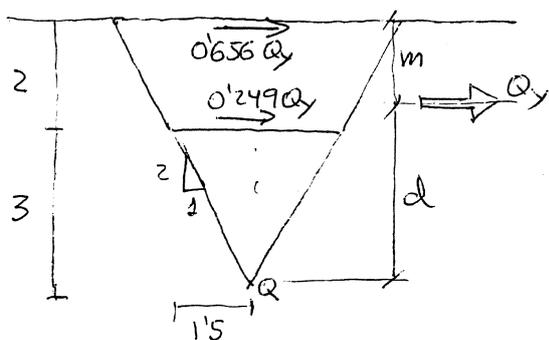
COMENZAMOS HALLANDO LA RESULTANTE DE τ EN CADA TRAMO, A PARTIR DE RESULTADOS ANTERIORES

$$\left(\frac{2}{3} \times 0.500 Q_y \times 9 - 0.075 Q_y \times 5\right) \times 0.25 = 0.656 Q_y$$



$$\Sigma F_H = Q_y (0.656 + 0.249 + 2 \times 0.109 \cos \alpha) = 1.002 Q_y \quad \text{CORRECTO}$$

$$\Sigma F_V = 0 \quad \text{OBVIO.}$$



$$\begin{aligned} \Pi_a(\tau) &= 3 \times 0.249 Q_y + 5 \times 0.656 Q_y \\ &= 4.027 Q_y \end{aligned}$$

$$\Pi_a(Q_y) = d \cdot Q_y$$

$$\Pi_a(\tau) = \Pi_a(Q_y) \Rightarrow d = 4.027 \text{ m}$$

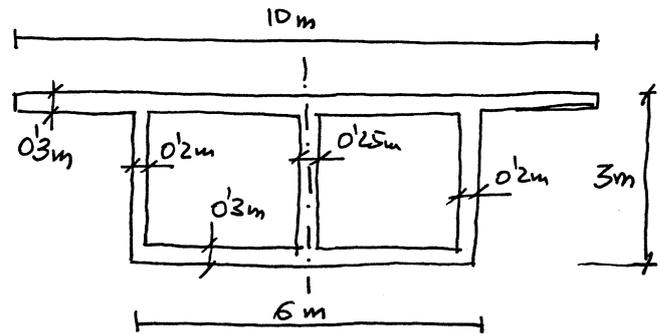
$$m = 5 - d = 0.973$$

$$z_{cec} = -(0.973 - 0.636) = -0.337 \text{ m}$$

da, hoja 1.

EJERCICIO Nº 44

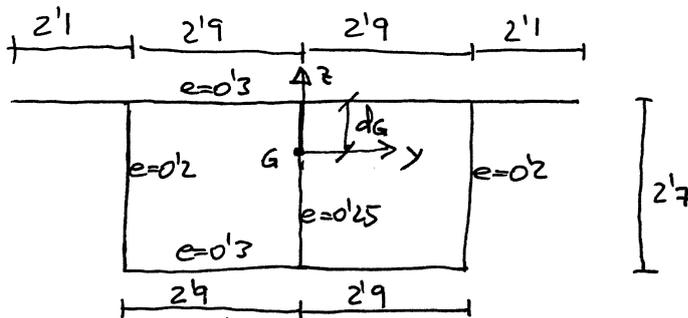
LA FIGURA ADJUNTA REPRESENTA, CONVENIENTEMENTE SIMPLIFICADA, LA SECCIÓN TRANSVERSAL DE UN PUENTE FORMADO POR 6 VAMOS DE 50m DE LUZ Y DOS VAMOS MÁS



- LOS EXTREMOS - DE 38m DE LUZ. EN ELLA SE PIDE DETERMINAR:

- 1) LAS CARACTERÍSTICAS MECÁNICAS DE LA SECCIÓN.
 - 2) LA DISTRIBUCIÓN DE TENSIONES DEBIDA A UN CORTANTE VERTICAL.
 - 3) LA DISTRIBUCIÓN DE TENSIONES DEBIDA A UN CORTANTE HORIZONTAL.
 - 4) EL CENTRO DE ESFUERZOS CORTANTES.
- } APLICADOS EN EL C.E.C.

1. CARACTERÍSTICAS MECÁNICAS DE LA SECCIÓN.



$$A = 10 \times 0.3 + 2 \times 2.7 \times 0.2 + 2.7 \times 0.25 + 2 \times 2.9 \times 0.3 = 6.495 \text{ m}^2$$

$$d_G = \frac{(2 \times 0.2 + 0.25) \times 2.7^2 / 2 + 2 \times 2.9 \times 0.3 \times 2.7}{6.495} = 1.088 \text{ m}$$

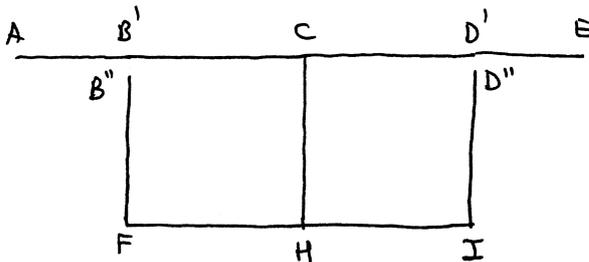
$$\begin{aligned} I_y &= \frac{10 \times 0.3^3}{12} + 3 \times 1.088^2 + 2 \times \frac{0.2 \times 2.7^3}{12} + 2 \times 0.2 \times 2.7 \times (1.35 - 1.088)^2 + \frac{0.25 \times 2.7^3}{12} \\ &+ 0.25 \times 2.7 \times (1.35 - 1.088)^2 + \frac{0.3^3 \times 5.8}{12} + 5.8 \times 0.3 \times (2.7 - 1.088)^2 \\ &= 0.0225 + 3.5512 + 0.6561 + 0.0741 + 0.4101 + 0.0463 + 0.0131 + 4.5215 \\ &= 9.2949 \text{ m}^4 \end{aligned}$$

$$I_z = \frac{0.3 \times 10^3}{12} + \frac{0.3 \times 5.8^3}{12} + \frac{2.7 \times 0.25^3}{12} + 2 \times \frac{2.7 \times 0.2^3}{12} + 2 \times 2.7 \times 0.2 \times 2.9^2 =$$

$$= 25 + 4'8778 + 0'0035 + 0'0036 + 9'0828 = 38'9677 \text{ m}^4$$

Tomaremos: $A = 6'50 \text{ m}^2$, $d_a = 1'09 \text{ m}$.
 $I_y = 9'29 \text{ m}^4$, $I_z = 38'97 \text{ m}^4$

2.- DISTRIBUCIÓN DE TENSIONES DEBIDA A UN CORTANTE VERTICAL.

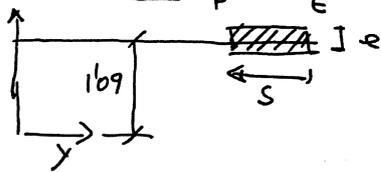


SECCIÓN ABIERTA MEDIANTE
CORTES FICTICIOS.

SUPONDREMOS
S EN METROS
 Q_y y Q_z en MN

2.1. ESTADO [0]. SECCIÓN ABIERTA SOMETIDA A Q_z .

• TRAMO EC.



$$\tau_{e|_p} = \tau_{e|_E} + \frac{Q_z S_y (E-p)}{I_y}$$

$$S_y (E-p) = e \cdot s \cdot z_G (E-p) = 0'35 \times 1'09 = 0'3275 \text{ m}^3$$

$$\tau_{e|_p} = \frac{0'3275 Q_z}{9'29} = 0'03525 Q_z \text{ MN/m}$$

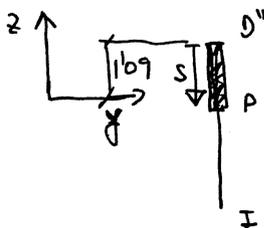
$s = 2'1$ $\tau_{e|_{D'}} = 0'0739 Q_z \text{ MN/m}$

$\tau_{D'} = 0'246 Q_z \text{ MPa}$

$s = 5'0$ $\tau_{e|_C} = 0'176 Q_z \text{ MN/m}$

$\tau_C = 0'587 Q_z \text{ MPa}$

• TRAMO D''I



$$\tau_{e|_p} = \tau_{e|_{D''}} + \frac{Q_z S_y (D''-p)}{I_y}$$

$$S_y (D''-p) = e s z_G (D''-p) = 0'25 (1'09 - \frac{s}{2})$$

$$= 0'2185 - 0'125 s$$

$$\tau_{e|_p} = Q_z \frac{0'2185 - 0'125 s}{9'29} = (0'02355 - 0'01085 s) Q_z \text{ MN/m}$$

$s = 1'09$ $\tau_{e|_{\max}} = 0'0128 Q_z \text{ MN/m}$

$\tau_{\max} = 0'0639 Q_z \text{ MPa}$

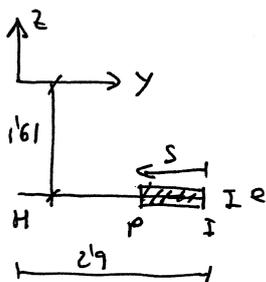
$s = 2'7$ $\tau_{e|_I} = -0'0153 Q_z \text{ MN/m}$

$\tau_I = -0'0764 Q_z$

DETERMINAREMOS EL PUNTO DONDE SE PRODUCE EL CAMBIO DE SIGNO

$$(0'0235s - 0'0108s^2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} s = 0 \\ s = \frac{0'0235}{0'0108} = 2'18m. \end{cases}$$

• TRAMO I-H.



$$\tau_{e|p} = \tau_{e|s} + \frac{Q_z S_y (I-H)}{I_y}$$

$$S_y = e \cdot s \cdot z_G (I-H) = 0'3s (-1'61) = -0'483s \text{ m}^3$$

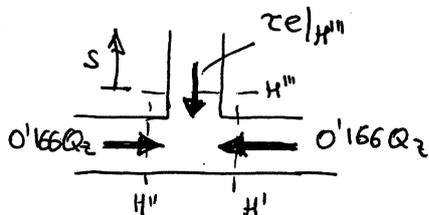
$$\begin{aligned} \tau_{e|p} &= -0'0153Q_z + Q_z \frac{(-0'483s)}{9'29} \\ &= Q_z [-0'0153 - 0'0520s] \text{ MN/m.} \end{aligned}$$

$$s=0 \quad \tau_{e|s} = -0'0153Q_z \text{ MN/m} \quad \tau_{I'} = -0'0510Q_z \text{ MPa}$$

$$s=2'9 \quad \tau_{e|H} = -0'166Q_z \text{ MN/m} \quad \tau_H = -0'554Q_z \text{ MPa.}$$

• TRAMOS B''F y FH. \rightarrow Simétricos a D''I e IH.

• TRAMO HC.



Continuidad en el nudo

$$\tau_{e|H'''} = -2 \times 0'166Q_z = -0'332Q_z \text{ MN/m.}$$

$$\tau_{e|p} = \tau_{e|H'''} + \frac{Q_z S_y (H'''-p)}{I_y}$$

$$\begin{aligned} S_y (H'''-p) &= e \cdot s \cdot z_G (H'''-p) = 0'25s (1'61 + s/2) \\ &= -0'403s + 0'125s^2 \end{aligned}$$

$$\tau_{e|p} = -0'332Q_z + \frac{-0'403s + 0'125s^2}{9'29} Q_z$$

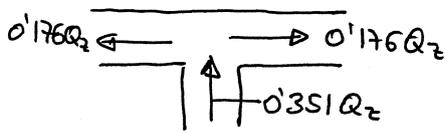
$$= Q_z \left\{ -0'332 - 0'0434s + 0'0135s^2 \right\} \text{ MN/m}$$

$$s=0 \quad \tau_{e|H'''} = -0'332Q_z \text{ MN/m} \quad \tau_{H'''} = -1'328Q_z \text{ MPa}$$

$$s=1'61 \quad \tau_{e|H'''} = -0'363Q_z \text{ MN/m} \quad \tau_{MIN} = -1'468Q_z \text{ MPa.}$$

$$s=2'7 \quad \tau_{e|c} = -0'351Q_z \text{ MN/m} \quad \tau_c = -1'403Q_z \text{ MPa}$$

• COMPROBACIÓN FLUJOS EN C

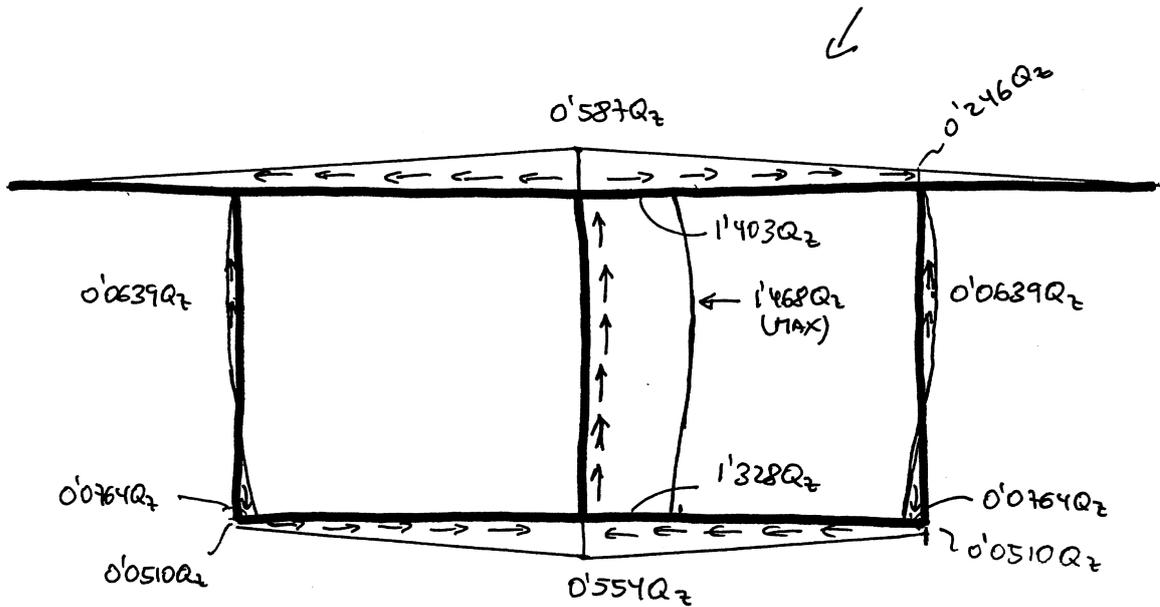


$$0.176 Q_z \times 2 = 0.352 Q_z \approx 0.351 Q_z$$

CORRECTO.

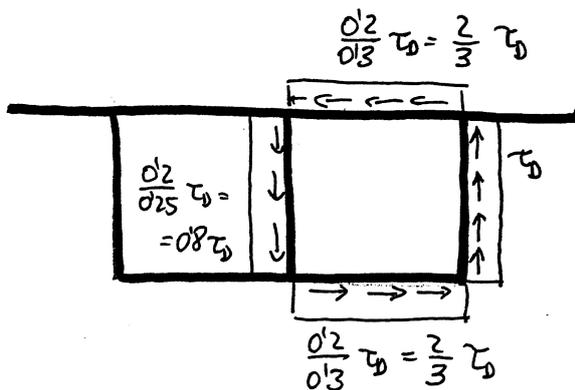
• ESQUEMA DISTRIBUCIÓN DE τ .

Q_z en NN, τ en MPa.

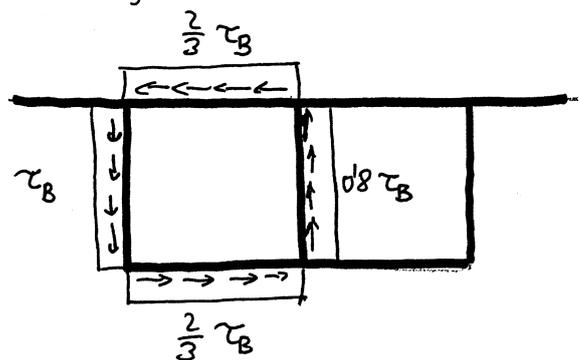


2.2.- ESTADOS [1] Y [2].

$$\tau_p = \frac{\tau_A e_A}{e_p}$$



ESTADO [1].
 $\tau = \tau_D$ en D'' .



ESTADO [2].
 $\tau = \tau_B$ en B'' .



2.3.- ECUACIONES DE COMPATIBILIDAD.

$$\Delta u_{B''-B'} = 0 \Rightarrow \oint_{B''-F-H-C-B'} \gamma ds = \oint_{B''-B'} \frac{\tau_{03} + \tau_{01} + \tau_{02}}{E} ds = 0$$

$$\Delta u_{D''-D'} = 0 \Rightarrow \oint_{D''-I-H-C-D'} \gamma ds = \oint_{D''-D'} \frac{\tau_{03} + \tau_{01} + \tau_{02}}{E} ds = 0$$

Cálculo de las integrales $\int_{ij} \tau_{03} ds$ en cada tramo y estado.

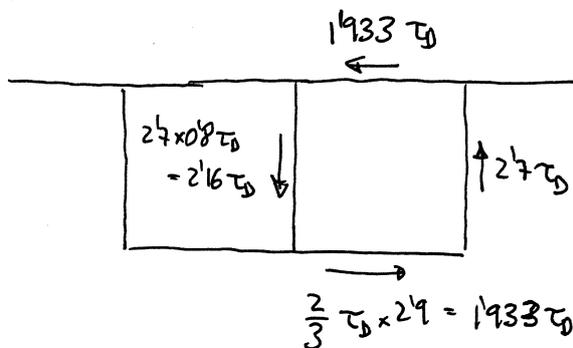
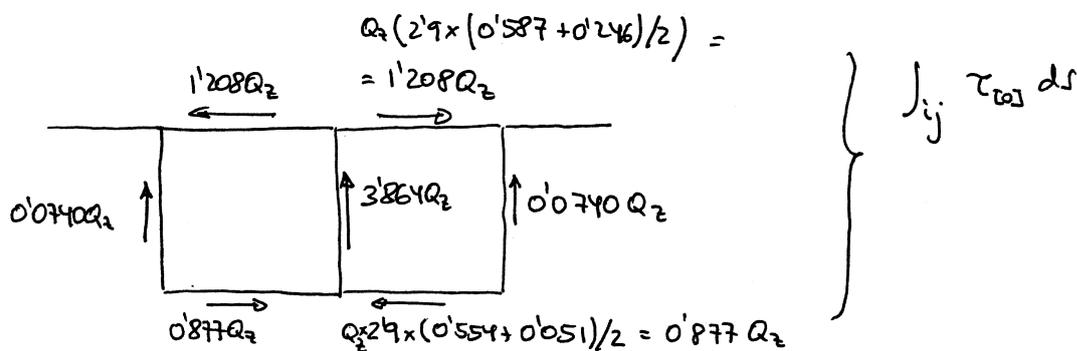
Estado [0]

$$\int_{B''-F} \tau ds = \int_0^{2'7} \frac{\tau e}{e} ds = \frac{1}{0'2} \int_0^{2'7} (0'0235s - 0'0108s^2) Q_2 ds$$

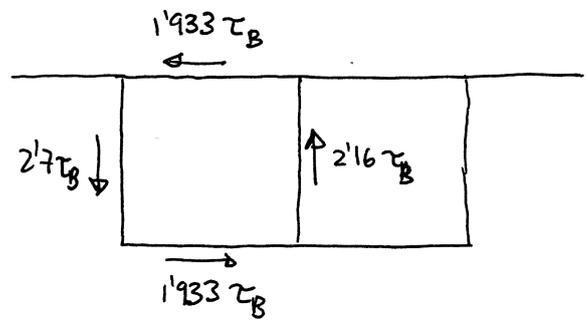
$$= \frac{Q_2}{0'2} \left[0'0235 \frac{s^2}{2} - 0'0108 \frac{s^3}{3} \right]_0^{2'7} = 0'0740 Q_2 \text{ MN/m.}$$

$$\int_{H-C} \tau ds = \frac{Q_2}{0'25} \int_0^{2'7} (-0'332 - 0'0434s + 0'0135s^2) ds$$

$$= \frac{Q_2}{0'25} \left[-0'332s - 0'0434 \frac{s^2}{2} + 0'0135 \frac{s^3}{3} \right]_0^{2'7} = -3'864 Q_2 \text{ MN/m.}$$



Estado [1]



Estado [2]



Sentidos de recorridos de cada célula para los integrales.



$$\Delta u_{B''-B'} = \frac{1}{G} \left\{ \oint_{B''-B'} \tau_{\theta z} ds + \oint_{B''-B'} -\tau_{\theta z} ds + \oint_{B''-B'} \tau_{\theta z} ds \right\} = 0$$

$$\Delta u_{B''-B'} = \frac{1}{G} \left\{ Q_z (-0'074 + 0'877 + 3'864 + 1'208) - 2'16 \tau_D + \tau_B (2'7 + 1'933 + 2'16 + 1'933) \right\} = \frac{1}{G} \left\{ 5'875 Q_z - 2'16 \tau_D + 8'726 \tau_B \right\} = 0$$

$$\Delta u_{B''-B'} = \frac{1}{G} \left\{ \oint_{B''-B'} \tau_{\theta z} ds + \oint_{B''-B'} \tau_{\theta z} ds + \oint_{B''-B'} \tau_{\theta z} ds \right\}$$

$$= \frac{1}{G} \left\{ Q_z (0'074 - 0'877 - 3'864 - 1'208) + (2'7 + 2 \times 1'933 + 2'16) \tau_D - 2'16 \tau_B \right\}$$

$$= \frac{1}{G} \left\{ -5'875 Q_z + 8'726 \tau_D - 2'16 \tau_B \right\} = 0$$

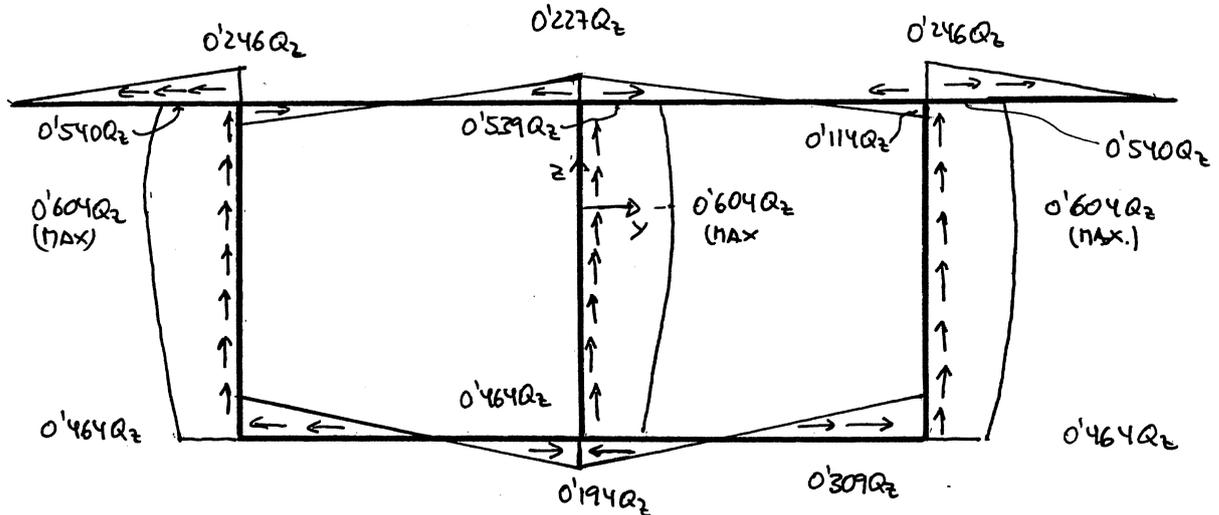
$$\begin{cases} -2'16 \tau_D + 8'726 \tau_B = -5'875 Q_z \\ 8'726 \tau_D - 2'16 \tau_B = 5'875 Q_z \end{cases}$$

$$\tau_D = \frac{\begin{vmatrix} -5'875 & 8'726 \\ 5'875 & -2'16 \end{vmatrix} Q_z}{\begin{vmatrix} -2'16 & 8'726 \\ 8'726 & -2'16 \end{vmatrix}} = \frac{-38'58 Q_z}{-71'48} = 0'540 Q_z$$

$$\tau_B = \frac{\begin{vmatrix} -2'16 & -5'875 \\ 8'726 & 5'875 \end{vmatrix} Q_z}{-63'83} = \frac{38'58 Q_z}{-71'48} = -0'540 Q_z$$

SE HA PLANTEADO LA RESOLUCIÓN, COMO EJEMPLO, POR EL PROCEDIMIENTO GENERAL. TENIENDO EN CUENTA QUE $\tau_D = -\tau_B$ POR SIMETRÍA - CON LOS SENTIDOS ANTES SUPUESTOS -, LA RESOLUCIÓN PUEDE SIMPLIFICARSE, YA QUE BASTA PLANTEAR LA COMPATIBILIDAD EN UNA CÉLULA, YA QUE ^{FN} LA OTRA LA ECUACIÓN RESULTANTE ES, OBUVIAMENTE, LA MISMA.

2.4.- DISTRIBUCIÓN DEFINITIVA DE τ .

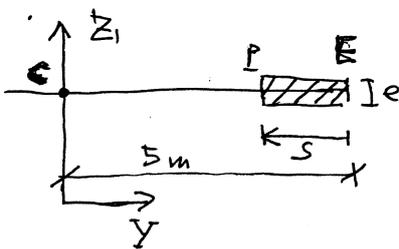


3.- DISTRIBUCIÓN DE τ DEBIDAS A UN CORTANTE HORIZONTAL.

Abriremos la sección del mismo modo que para estudiar el cortante vertical. El esquema figura en la hoja n.º 2.

3.1.- ESTADO [0], SECCIÓN ABIERTA SOMETIDA A Q_y .

• TRAMO EC



$$\tau_e|_P = \tau_e|_E + \frac{Q_y S_z(E-P)}{I_z}$$

$$S_z(E-P) = e \cdot s \left(5 - \frac{s}{2}\right) = 0.3s \left(5 - \frac{s}{2}\right)$$

$$= 1.5s - 0.15s^2 \text{ m}^3$$

$$\tau_e|_P = \frac{(1.5s - 0.15s^2) Q_y}{38.97}$$

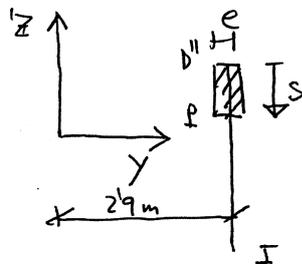
$$= [0.03849s - 0.003849s^2] Q_y \text{ MN/m}$$



$$\begin{aligned}
 s=0 & \quad \tau_e|_E = 0 \\
 s=2'1 \text{ m} & \quad \tau_e|_{D'} = 0'06386 Q_y \text{ MN/m} \quad \tau_{D'} = 0'2129 Q_y \text{ MPa} \\
 s=5'0 \text{ m} & \quad \tau_e|_C = 0'09623 Q_y \text{ MN/m} \quad \tau_C = 0'3208 Q_y \text{ MPa}
 \end{aligned}$$

• TRAMO AC → Por condiciones de simetría deben obtenerse los mismos resultados cambiando de signo.

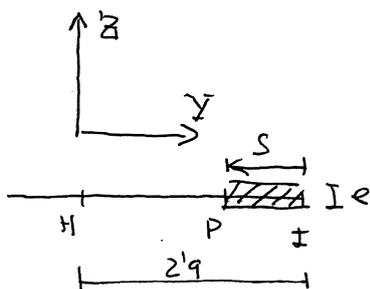
• TRAMO D''I



$$\begin{aligned}
 S_z(D''-P) &= e \cdot s \cdot 2'9 = 0'2 \times 2'9 s = 0'58 s \text{ m}^3 \\
 \tau_e|_P &= \tau_e|_{D''} + \frac{Q_y S_z(D''-P)}{I_z} = \frac{0'58 s Q_y}{38'97} \\
 &= 0'01488 s Q_y \text{ MN/m}
 \end{aligned}$$

$$s=2'7 \quad \tau_e|_I = 0'04018 Q_y \text{ MN/m} \quad \tau_I = 0'2009 Q_y \text{ MPa}$$

• TRAMO IH



$$\begin{aligned}
 S_z(I-P) &= e \cdot s (2'9 - s/2) = 0'3 s (2'9 - 0'5 s) \\
 &= 0'87 s - 0'15 s^2 \text{ m}^3
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \tau_e|_P &= \tau_e|_I + \frac{Q_y S_z(I-P)}{I_z} \\
 &= 0'04018 Q_y + \frac{0'87 s - 0'15 s^2}{38'97} Q_y \\
 &= Q_y [0'04018 + 0'02232 s - 0'003849 s^2] \text{ MN/m}
 \end{aligned}$$

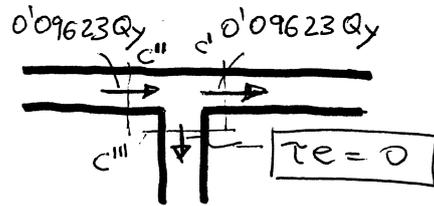
$$s=0 \quad \tau_e|_I = 0'04018 Q_y \text{ MN/m} \quad \tau_I = 0'1339 Q_y \text{ MPa}$$

$$s=2'9 \quad \tau_e|_H = 0'07256 Q_y \text{ MN/m} \quad \tau_H = 0'2419 Q_y \text{ MPa}$$

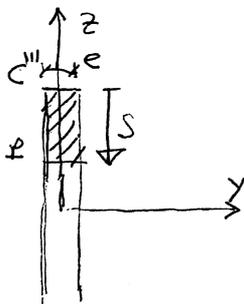
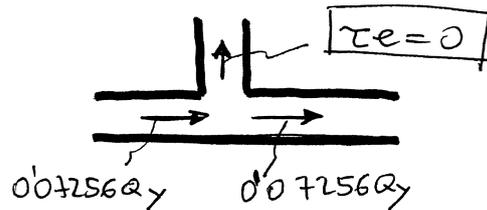
• TRAMO B''FH → Por condiciones de simetría deben obtenerse los mismos resultados que en D''IH pero cambiando de signo. 160

• TRAMO H-C.

Flujo de tangenciales en C



Flujo de tangenciales en H

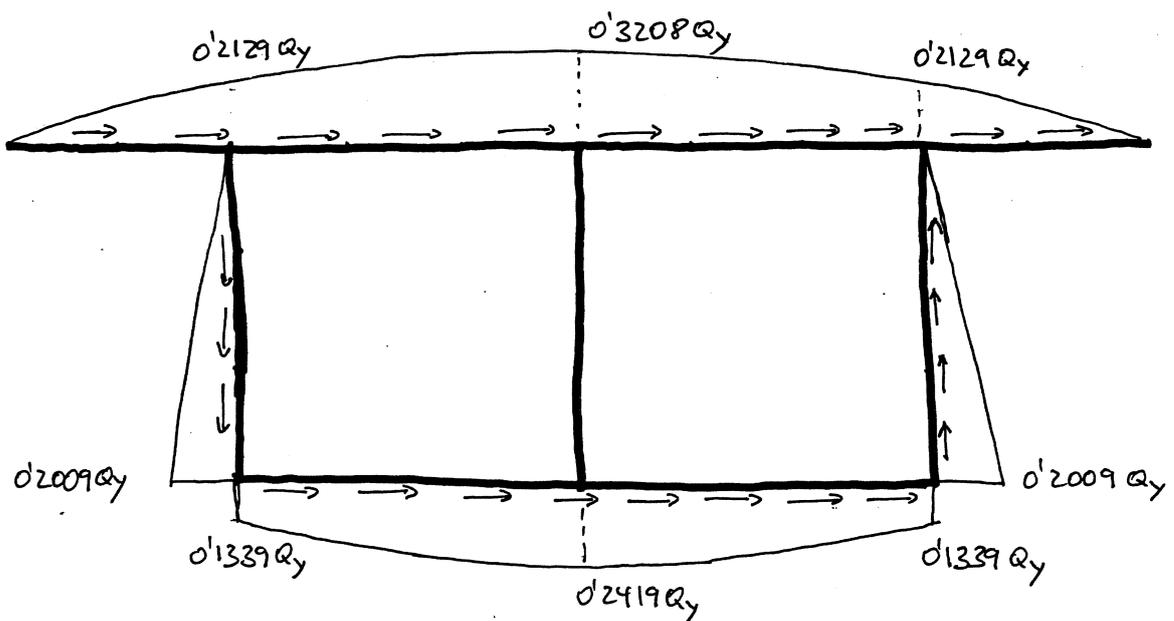


$$S_z(C-P) = e \cdot s \cdot 0 = 0$$

$$\tau_e|_P = \tau_e|_{C''} + \frac{S_z(C''-P) \cdot Q_y}{I_z} = 0 + 0 = 0$$

De acuerdo con esta expresión, el flujo en H es nulo, como habíamos previsto.

• ESQUEMA DE LA DISTRIBUCIÓN DE τ .



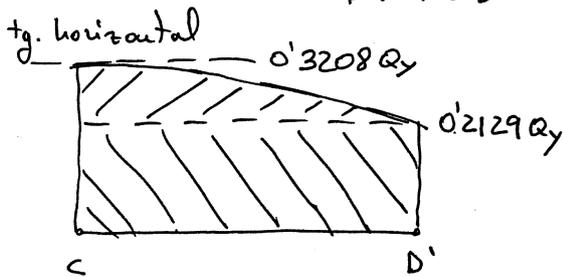
3.2.- ESTADOS [1] Y [2].

Consideraremos los mismos que en el caso anterior. Están esquematizados en la página 4.

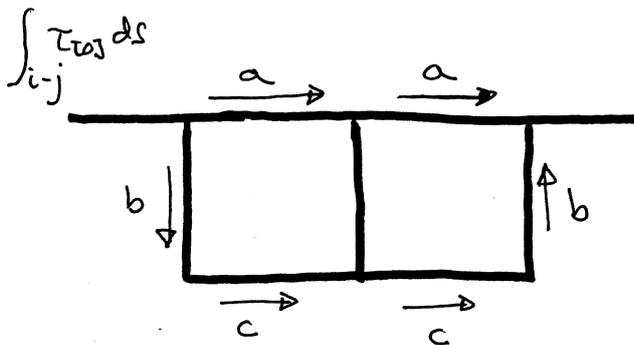
3.3.- ECUACIONES DE COMPATIBILIDAD.

$$\Delta u_{B''-B'} = 0 \Rightarrow \oint_{B''-F-H-C-B'} \gamma ds = \oint_{B''-B'} \frac{\tau_{12} + \tau_{21} + \tau_{32}}{G} ds = 0$$

$$\Delta u_{D''-D'} = 0 \Rightarrow \oint_{D''-I-H-C-D'} \gamma ds = \oint_{D''-D'} \frac{\tau_{23} + \tau_{32} + \tau_{13}}{G} ds = 0$$



Descomposición utilizada para el cálculo de los áreas. En B'C, IH y HF se opera de forma análoga.



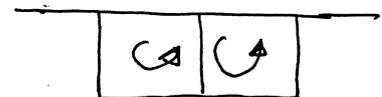
$$a = 2.9 \times 0.2129 Q_y + \frac{2}{3} \times 2.9 \times (0.3208 - 0.2129) Q_y = 0.8260 Q_y$$

$$b = \frac{1}{2} \times 2.7 \times 0.2009 Q_y = 0.2712 Q_y$$

$$c = 0.1339 \times 2.9 Q_y + \frac{2}{3} \times 2.9 \times (0.2419 - 0.1339) Q_y = 0.5971 Q_y$$

Integrales correspondientes a los estados [1] y [2] → página 5.

Sentido de recorridos de los celdas



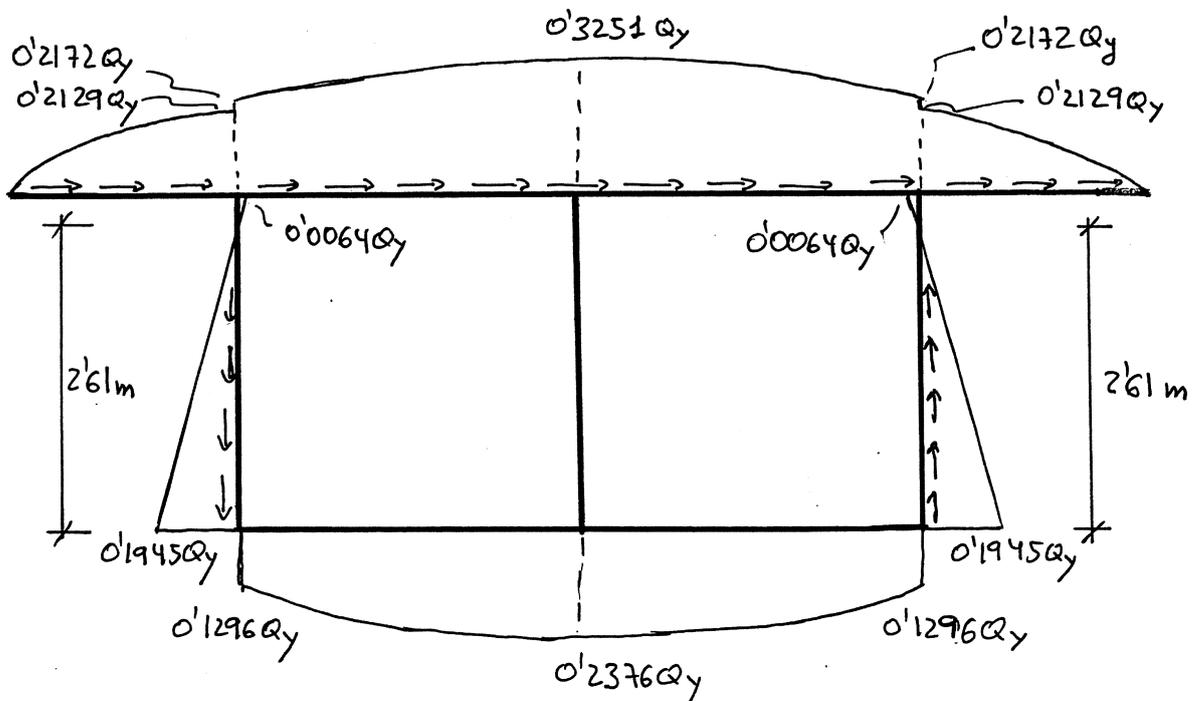


$$\Delta u_{B''-B'} = 0 \Rightarrow \frac{Q_y}{G} [0'2712 + 0'5971 + 0 - 0'8260] - 2'16 \frac{\tau_D}{G} + \frac{\tau_B}{G} [2'7 + 1'933 + 2'16 + 1'933] = 0$$
$$0'0423 Q_y - 2'16 \tau_D + 8'726 \tau_B = 0$$

$$\Delta u_{D''-D'} = 0 \Rightarrow \frac{Q_y}{G} [-0'8260 + 0 + 0'5971 + 0'2712] + \frac{\tau_D}{G} [1'933 + 2'16 + 1'933 + 2'7] - 2'16 \frac{\tau_B}{G} = 0$$
$$0'0423 Q_y + 8'726 \tau_B - 2'16 \tau_D = 0$$

$$\left. \begin{aligned} 8'726 \tau_B - 2'16 \tau_D &= -0'0423 Q_y \\ -2'16 \tau_B + 8'726 \tau_D &= -0'0423 Q_y \end{aligned} \right\} \Rightarrow \underline{\tau_B = \tau_D = 0'006442 Q_y}$$

3.4.- DISTRIBUCIÓN DEFINITIVA DE τ .

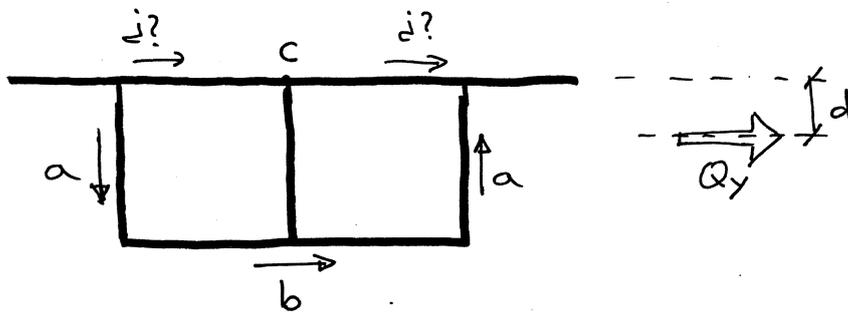




4.- CENTRO DE ESFUERZOS CORTANTES.

SIMETRIA $\Rightarrow \gamma_{CEC} = 0$

CÁLCULO DE z_{CEC} . Tomaremos momentos respecto al punto C, para que la resultante sobre ABCDE no de momento.



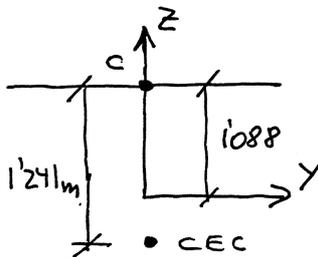
$$a = \left(\frac{1}{2} \times 0.1945 Q_y \times 2.61 - \frac{1}{2} \times 0.0064 Q_y \times 0.09 \right) \times 0.2 = 0.0507 Q_y$$

$$b = \left(0.1296 Q_y \times 2.9 \times 2 + \frac{2}{3} (0.2376 - 0.1296) Q_y \times 2 \times 2.9 \right) \times 0.3 = 0.3508 Q_y$$

$$\uparrow M_c(\tau) = 2 \times 0.0507 Q_y \times 2.9 + 0.3508 Q_y \times 2.7 = 1.241 Q_y$$

$$\uparrow M_c(Q) = d Q_y$$

$$M_c(\tau) = M_c(Q) \Rightarrow \boxed{d = 1.241 \text{ m.}}$$



$$z_{CEC} = -1.241 + 1.088 = -0.153$$

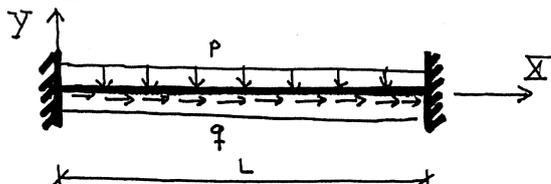
$$\boxed{\text{C.E.C. } (0, -0.153 \text{ m})}$$

Deformada de la viga a flexión



EJERCICIO Nº 45

DETERMINAR LAS LEYES DE DESPLAZAMIENTOS, GIROS Y ESFUERZOS EN LA VIGA DE LA FIGURA:



$q_x = q$
 $q_y = -p$
 PROBLEMA PLANO $\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} q_z = 0 \\ w = 0 \end{array} \right.$

$$\frac{d^4 v}{dX^4} = \frac{1}{EI} q_y = -\frac{1}{EI} p$$

$$\frac{d^2 u}{dX^2} = -\frac{q_x}{EA} = -\frac{q}{EA}$$

$$\frac{d^3 v}{dX^3} = -\frac{p}{EI} X + a$$

$$\frac{du}{dX} = -\frac{q}{EA} X + \alpha$$

$$\frac{d^2 v}{dX^2} = -\frac{p}{EI} \frac{X^2}{2} + aX + b$$

$$u = -\frac{q}{EA} \frac{X^2}{2} + \alpha X + \beta$$

$$\frac{dv}{dX} = -\frac{p}{EI} \frac{X^3}{6} + a \frac{X^2}{2} + bX + c$$

$$v = -\frac{p}{EI} \frac{X^4}{24} + a \frac{X^3}{6} + b \frac{X^2}{2} + cX + d$$

CONDICIONES DE CONTORNO:

- En $X=0 \rightarrow v=0 \Rightarrow \boxed{d=0}$

$\theta=0 \Leftrightarrow \frac{dv}{dX}=0 \Rightarrow \boxed{c=0}$

$u=0 \Rightarrow \boxed{\beta=0}$

- En $X=L \rightarrow v=0 \Rightarrow -\frac{p}{EI} \frac{L^4}{24} + a \frac{L^3}{6} + b \frac{L^2}{2} = 0$

$\theta=0 = \frac{dv}{dX} \Rightarrow -\frac{p}{EI} \frac{L^3}{6} + a \frac{L^2}{2} + bL = 0$

$u=0 \Rightarrow 0 = -\frac{q}{EA} \frac{L^2}{2} + \alpha L \Rightarrow \boxed{\alpha = \frac{q}{EA} \frac{L}{2}}$



$$\left. \begin{aligned} \frac{aL^3}{6} + \frac{bL^2}{2} &= \frac{P}{EI} \frac{L^4}{24} \Rightarrow aL + 3b = \frac{P}{EI} \frac{L^2}{4} \\ \frac{aL^2}{2} + bL &= \frac{P}{EI} \frac{L^3}{6} \Rightarrow aL + 2b = \frac{P}{EI} \frac{L^2}{3} \end{aligned} \right\}$$

$$b = \frac{P}{EI} \left(\frac{L^2}{4} - \frac{L^2}{3} \right) = - \frac{PL^2}{12EI} \quad -aL = \frac{P}{EI} \left(\frac{L^2}{2} - L^2 \right) = - \frac{PL^2}{2EI}$$

$$a = \frac{PL}{2EI}$$

LUEGO:

$$v = - \frac{P}{24EI} (X^4 - 2X^3L + X^2L^2) = - \frac{P}{24EI} X^2(X-L)^2$$

$$\theta = \frac{dv}{dX} = - \frac{P}{24EI} (4X^3 - 6X^2L + 2XL^2) = - \frac{P}{12EI} (2X^3 - 3X^2L + XL^2)$$

$$M_x = EI \frac{d^2v}{dX^2} = - \frac{P}{12} (6X^2 - 6XL + L^2)$$

$$Q_y = - \frac{dM_x}{dX} = \frac{P}{12} (12X - 6L) = \frac{P}{2} (2X - L)$$

$$u = - \frac{Q_y}{EA} \frac{X^2}{2} + \frac{Q_y}{EA} \frac{L}{2} X = \frac{Q_y}{2EA} X(L-X)$$

$$N = EA \frac{du}{dX} = \frac{Q_y}{2} (L - 2X)$$

NÓTESE QUE, AUNQUE LA ESTRUCTURA ES HIPERESTÁTICA, NO HEMOS NECESITADO NINGÚN MÉTODO ESPECÍFICO PARA SU RESOLUCIÓN.

DATOS PARA EL DIBUJO DE LAS LEYES:

- PUNTOS DE MOMENTO NULO

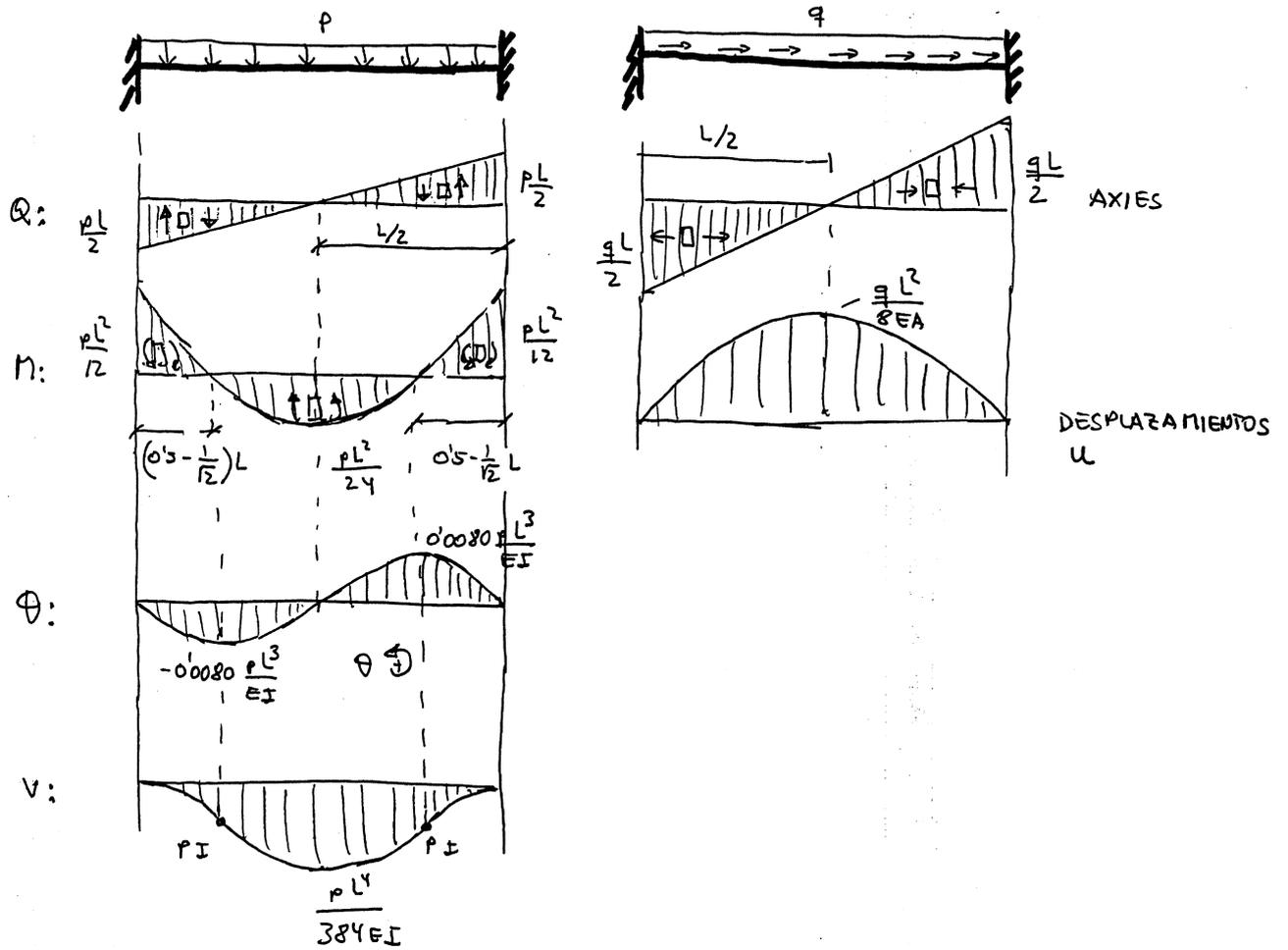
$$6X^2 - 6XL + L^2 = 0 \Rightarrow X = \frac{6L \pm \sqrt{36L^2 - 24L^2}}{12} = \frac{6L \pm \sqrt{12}L}{12} = \left(0.5 \pm \frac{1}{\sqrt{12}}\right)L$$

- FLECHA MÁXIMA (EN $X = 0.5L$)

$$v = - \frac{P}{24EI} \left(\frac{L}{2}\right)^2 \left(-\frac{L}{2}\right)^2 = - \frac{PL^4}{384EI}$$

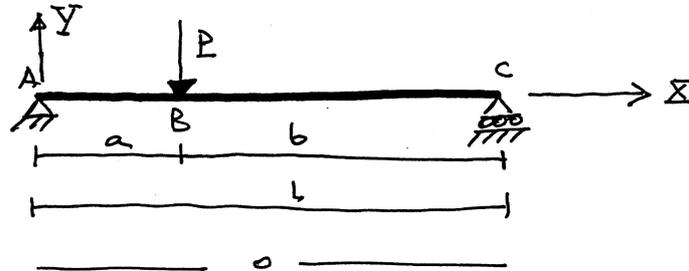


ESQUEMAS DE LAS LEYES



EJERCICIO Nº 46

POR INTEGRACIÓN DE LA ECUACIÓN DIFERENCIAL, DETERMINAR LAS LEYES DE DESPLAZAMIENTOS Y ESFUERZOS EN LA VIGA PLANA DE LA FIGURA:



NO HAY FUERZAS SEGÚN $x \Rightarrow u \equiv 0, w \equiv 0$

PROBLEMA PLANO (\Leftrightarrow SECCIÓN Y FUERZAS EXTERIORES SIMÉTRICAS RESPECTO A $z=0$) $\Rightarrow w \equiv 0, Q_z \equiv 0, M_y \equiv 0$

ASÍ PUES, SÓLO HAY QUE DETERMINAR v, Q_y Y M_z .

COMO EN B HAY UNA DISCONTINUIDAD EN LA CARGA, HABRÁ QUE DEFINIR LA SOLUCIÓN POR TRAMOS, DEL TUDO SIGUIENTE

$$v = \begin{cases} v^I & \text{si } x \in [0, a] \\ v^{II} & \text{si } x \in [a, L] \end{cases}$$

$$M = \begin{cases} M^I & \text{si } x \in [0, a[\\ M^{II} & \text{si } x \in]a, L] \end{cases}$$

$$Q = \begin{cases} Q^I & \text{si } x \in [0, a[\\ Q^{II} & \text{si } x \in]a, L] \end{cases}$$

NOTÉSE QUE LA FLECHA DEBE ESTAR DEFINIDA EN B - PUESTO QUE EL MISMO PUNTO DE LA VIGA NO PUEDE OCUPAR DOS POSICIONES DISTINTAS -, PERO LOS ESFUERZOS PUEDEN NO ESTARLO.

LA ECUACIÓN A CUMPLIR POR LAS FLECHAS ES

$$\frac{d^4 v}{dx^4} = \frac{q_x}{EI}$$

PERO, COMO $q_y \equiv 0$ EN AB Y EN BC, SE REDUCE EN AMBOS TRAMOS

$$\frac{d^4 v}{dx^4} = 0$$

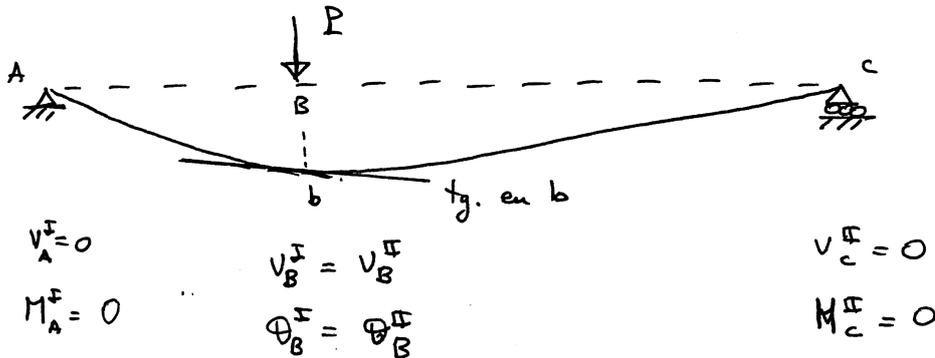
CUYA SOLUCIÓN ES

$$v^I = k \cdot x^3 + l \cdot x^2 + c \cdot x + d$$

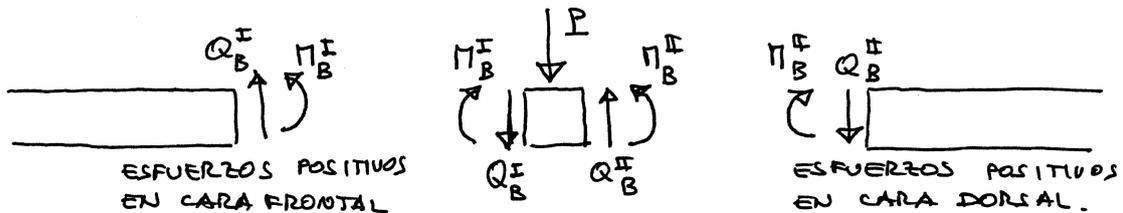
$$v^{II} = e \cdot x^3 + f \cdot x^2 + g \cdot x + h$$

ES DECIR, UN POLINOMIO COMPLETO DE GRADO 3 EN CADA TRAMO, PARA QUE SUS CUARTAS DERIVADAS SEAN IDÉNTICAMENTE NULAS.

CONDICIONES DE CONTORNO Y DE COMPATIBILIDAD EN B:



ESTO SON 6 CONDICIONES, PERO TENEMOS 8 CONSTANTES INDETERMINADAS. LAS CONDICIONES QUE FALTAN SON DE EQUILIBRIO EN B. AISLEMO EL TRAMO AB, EL PUNTO B Y EL TRAMO BC



$$\sum F_v = 0 \Rightarrow P + Q_B^I = Q_B^{II}$$

$$\sum M_B = 0 \Rightarrow M_B^I = M_B^{II}$$

AHORA SÓLO FALTA SUSTITUIR EN ESTAS RELACIONES Θ , M Y Q EN FUNCIÓN DE v , MEDIANTE

$$\Theta = \frac{dv}{dx}$$

$$M = EI \frac{d^2v}{dx^2}$$

$$Q = -\frac{dM}{dx} = -EI \frac{d^3v}{dx^3}$$



ASÍ PUES, PARA DETERMINAR LAS CONSTANTES DISPONEMOS DE LAS SIGUIENTES ECUACIONES:

$$V_A^I = 0 \Rightarrow \boxed{d = 0}$$

$$M_A^I = 0 \Rightarrow \frac{d^2 V^I}{dX^2} = 0 \Rightarrow \boxed{l = 0}$$

$$V_B^II = 0 \Rightarrow eL^3 + fL^2 + gL + h = 0 \quad (1)$$

$$M_B^II = 0 \Rightarrow \frac{d^2 V^II}{dX^2} = 0 \Rightarrow 6eL + 2f = 0 \quad (2)$$

$$V_B^I = V_B^II \Rightarrow ka^3 + ca = ea^3 + fa^2 + ga + h \quad (3)$$

$$\theta_B^I = \theta_B^II \Rightarrow \left. \frac{dV^I}{dX} \right|_B = \left. \frac{dV^II}{dX} \right|_B \Rightarrow 3ka^2 + c = 3ea^2 + 2fa + g \quad (4)$$

$$M_B^I = M_B^II \Rightarrow \left. \frac{d^2 V^I}{dX^2} \right|_B = \left. \frac{d^2 V^II}{dX^2} \right|_B \Rightarrow 6ka = 6ea + 2f \quad (5)$$

$$Q_B^I + P = Q_B^II \Rightarrow -EI \left. \frac{d^3 V^I}{dX^3} \right|_B + P = -EI \left. \frac{d^3 V^II}{dX^3} \right|_B$$

$$\Rightarrow -(6k) + \frac{P}{EI} = -6e \Rightarrow k - e = \frac{P}{6EI} \quad (6)$$

$$\left. \begin{array}{l} (5) \rightarrow k - e = \frac{2f}{6a} = \frac{f}{3a} \\ (6) \rightarrow k - e = \frac{P}{6EI} \end{array} \right\} \frac{f}{3a} = \frac{P}{6EI} \Rightarrow \boxed{f = \frac{Pa}{2EI}}$$

$$(2) \rightarrow 6eL = 2f \rightarrow \boxed{e = -\frac{f}{3L} = -\frac{Pa}{6EIL}}$$

$$(6) \rightarrow \left[k = \frac{P}{6EI} + e = \frac{P}{6EI} - \frac{Pa}{6EIL} = \frac{PL - Pa}{6EIL} = \frac{Pb}{6EIL} \right]$$

$$\left. \begin{array}{l} (3) \rightarrow ka^3 + ca = ea^3 + fa^2 + ga + h \\ (4) \rightarrow 3ka^2 + c = 3ea^2 + 2fa + g \\ (1) \rightarrow eL^3 + fL^2 + gL + h = 0 \end{array} \right\} \text{quedan por imponer}$$



$$\textcircled{3} - a \textcircled{4} \rightarrow -2ka^3 = -2ea^3 - fa^2 + h$$

$$\left[h = fa^2 + 2ea^3 - 2ka^3 = \frac{Pa^3}{2EI} - \frac{Pa^4}{3EIL} - \frac{Pba^3}{3EI} \right. \\ \left. = \frac{Pa^3}{2EI} - \frac{Pa^3(a+b)}{3EI} = \frac{Pa^3}{6EI} \right]$$

$$\textcircled{1} \rightarrow g = \frac{1}{L} (-eL^3 - fL^2 - h) = \frac{1}{L} \left(\frac{PaL^2}{6EI} - \frac{PaL^2}{2EI} - \frac{Pa^3}{6EI} \right) \\ = \frac{1}{L} \left(-\frac{PaL^2}{3EI} - \frac{Pa^3}{6EI} \right) = -\frac{1}{L} \frac{Pa}{6EI} (2L^2 + a^2)$$

$$\left[g = -\frac{PaL}{6EI} \left(2 + \frac{a^2}{L^2} \right) \right]$$

$$\textcircled{4} \rightarrow c = 3ea^2 + 2fa + g - 3ka^2 \\ = -\frac{Pa^3}{2EIL} + \frac{Pa^2}{EI} - \frac{PaL}{6EI} \left(2 + \frac{a^2}{L^2} \right) - \frac{Pba^2}{2EIL} \\ = -\frac{Pa^2(a+b)}{2EI} + \frac{Pa^2}{EI} - \frac{PaL}{6EI} \left(2 + \frac{a^2}{L^2} \right) = \frac{Pa^2}{2EI} - \frac{PaL}{6EI} \left(2 + \frac{a^2}{L^2} \right) \\ c = \frac{Pa^2}{2EI} - \frac{PaL}{6EI} \left(2 + \frac{a^2}{L^2} \right)$$

SOLUCIÓN:

$$v^I = \frac{Pb}{6EIL} X^3 + \left[\frac{Pa^2}{2EI} - \frac{PaL}{6EI} \left(2 + \frac{a^2}{L^2} \right) \right] X$$

$$v^{II} = -\frac{Pa}{6EIL} X^3 + \frac{Pa}{2EI} X^2 - \frac{PaL}{6EI} \left(2 + \frac{a^2}{L^2} \right) X + \frac{Pa^3}{6EI}$$

$$\theta^I = \frac{dv^I}{dX} = 3kX^2 + 2lX + c = \frac{Pb}{2EIL} X^2 + \frac{Pa^2}{2EI} - \frac{PaL}{6EI} \left(2 + \frac{a^2}{L^2} \right)$$

$$\theta^{II} = \frac{dv^{II}}{dX} = 3eX^2 + 2fX + g = -\frac{Pa}{2EIL} X^2 + \frac{Pa}{EI} X - \frac{PaL}{6EI} \left(2 + \frac{a^2}{L^2} \right)$$



$$M^F = EI \frac{d^2 v^F}{dx^2} = EI (6kx + 2l) = \frac{Pb}{L} x$$

$$M^II = EI \frac{d^2 v^II}{dx^2} = EI (6ex + 2f) = -\frac{Pa}{L} x + Pa$$

$$Q^F = -\frac{dM^F}{dx} = -\frac{Pb}{L}$$

$$Q^II = -\frac{dM^II}{dx} = +\frac{Pa}{L}$$

Valores auxiliares para dibujar las leyes.

$$M_B = M^F(a) = \frac{Pba}{L}$$

$$M_B = M^II(a) = -\frac{Pa^2}{L} + Pa = \frac{Pa}{L} \left(-a + \frac{a+b}{L}\right) = \frac{Pab}{L} \quad \left. \vphantom{M_B} \right\} \text{correcto.}$$

$$\Theta_A = \Theta^F(0) = \frac{Pa^2}{2EI} - \frac{PaL}{6EI} \left(2 + \frac{a^2}{L^2}\right) = \dots = -\frac{Pab}{6EIL} (a+2b)$$

$$\Theta_C = \Theta^II(L) = -\frac{PaL}{2EI} + \frac{PaL}{EI} - \frac{PaL}{6EI} \left(2 + \frac{a^2}{L^2}\right) = \frac{PaL}{2EI} - \frac{PaL}{6EI} \left(2 + \frac{a^2}{L^2}\right) = \dots = \frac{Pab}{6EIL} (2a+b)$$

$$v_B^F = v^F(a) = \frac{Pba^3}{6EIL} + \frac{Pa^3}{2EI} - \frac{Pa^2L}{6EI} \left(2 + \frac{a^2}{L^2}\right) = \dots = -\frac{Pa^2b^2}{3EIL}$$

$$v_B^{II} = v^II(a) = -\frac{Pa^2a}{6EIL} + \frac{Pa^3}{2EI} - \frac{Pa^2L}{6EI} \left(2 + \frac{a^2}{L^2}\right) + \frac{Pa^3}{6EI} = \dots = -\frac{Pa^2b^2}{3EIL}$$

(DIBUJO DE LAS LEYES → HOJA 6)

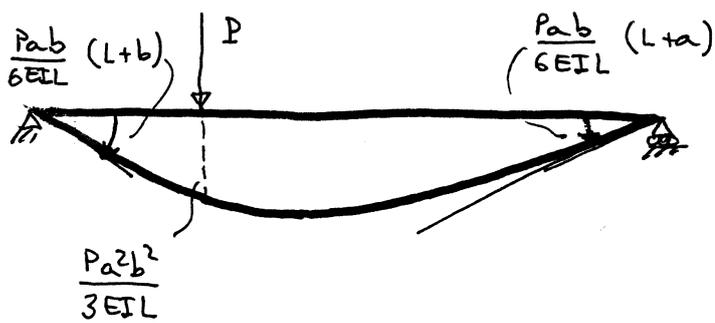
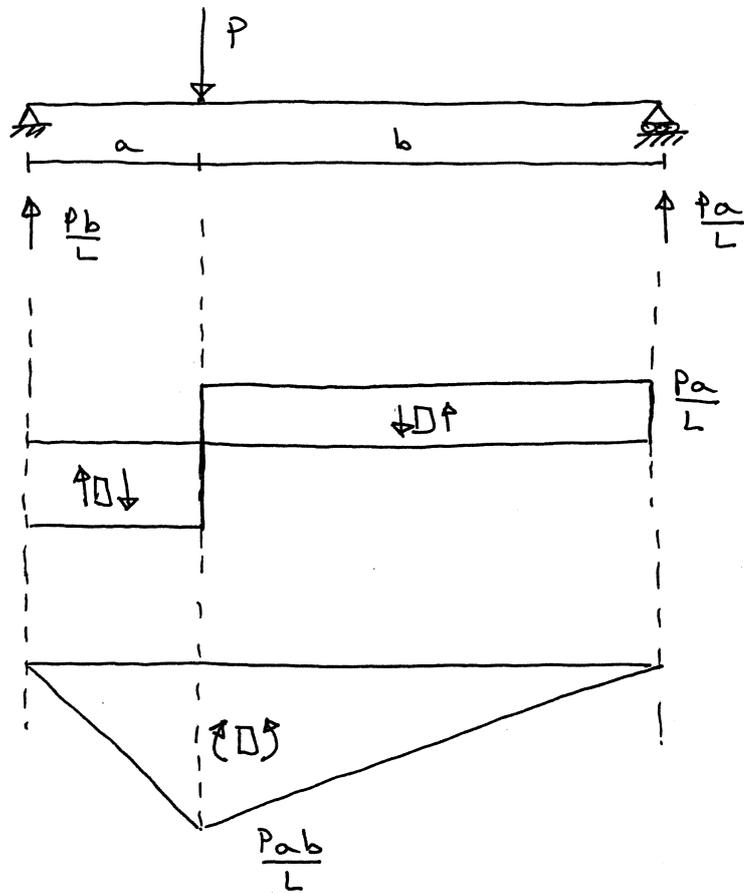
LA FLECHA MÁXIMA (CARACTERIZADA POR $\Theta=0$) SE ALCANZA PARA UN VALOR DE x ENTRE a Y L . SU DETERMINACIÓN EN FUNCIÓN DE a Y b CONDUCE A EXPRESIONES DEMASIADO COMPLICADAS PARA SER ÚTILES. LAS QUE VAMOS A PRESENTAR SE HAN PREPARADO PARA QUE RESULTEN CÓMODAS PARA DETERMINAR LA FLECHA EN UN CASO CONCRETO.

SE BASAN EN LOS SIGUIENTES CAMBIOS DE VARIABLE:

$$a = \alpha L \quad b = \beta L = (1-\alpha)L \quad \text{porque } a+b=L$$

$$\begin{aligned} \Theta^{II} &= -\frac{P\alpha L}{2EI} x^2 + \frac{P\alpha L}{EI} x - \frac{P\alpha L^2}{6EI} (2+\alpha^2) \\ &= -\frac{P\alpha}{6EI} [3x^2 - 6Lx + L^2(2+\alpha^2)] \end{aligned}$$

Como la flecha máxima se alcanza entre B y C, si $a < b$, sólo estudiamos Θ^{II} y v^{II}



DEFORMADA



$$\Theta^{\text{II}} = 0 \Rightarrow X = \frac{6L \pm \sqrt{36L^2 - 12L^2(2+\alpha^2)}}{6} = \frac{6 \pm \sqrt{12-12\alpha^2}}{6} L = \delta L$$

$$V^{\text{II}}(X) = -\frac{P\alpha K}{6EI} X^3 + \frac{P\alpha L}{2EI} X^2 - \frac{P\alpha L^2}{6EI} (2+\alpha^2) X + \frac{P\alpha^3 L^3}{6EI}$$

$$V_{\text{MAX}}^{\text{II}} = V^{\text{II}}(\delta L) = \frac{PL^3}{6EI} [-\delta^3\alpha + 3\alpha\delta^2 - 2\alpha\delta - \alpha^3\delta + \alpha^3] = \delta \frac{PL^3}{6EI} \quad (*)$$

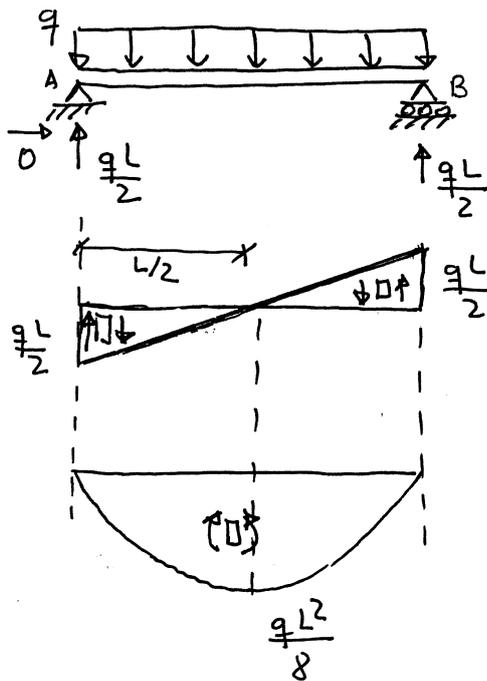
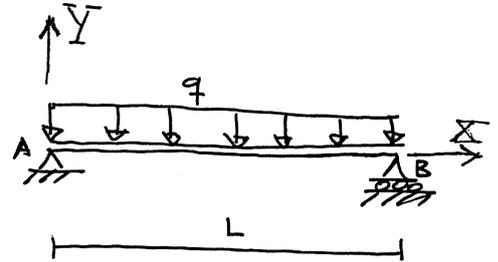
Con estas expresiones ya resulta relativamente fácil calcular, en función de α , la flecha máxima. Lo haremos para valores de α entre 0,05 y 0,5 ($\alpha > 0,5 \Rightarrow a > b$ y la flecha máxima estaría en AB y no en BC como hemos supuesto), que utilizaremos para mostrar que, EN GENERAL, LA VARIACIÓN DE FLECHAS EN EL TRAMO CENTRAL DE UNA VIGA ES MUY SUAVE - LA PARÁBOLA SUELE SER CASI PLANA -, POR LO QUE SE CONSIGUE UNA ESTIMACIÓN RAZONABLE DE LA FLECHA MÁXIMA APROXIMÁNDOLA POR LA FLECHA EN EL CENTRO DE LA LUZ. La flecha en el centro de la luz se determina substituyendo $\delta=0,5$ en (*). En la tabla siguiente se presentan, para distintos valores de α , los de δ , δ y φ ($\varphi / V^{\text{II}}(0,5L) = \varphi \frac{PL^3}{6EI}$), así como el error cometido al aproximar $V_{\text{MAX}}^{\text{II}}$ por $V^{\text{II}}(0,5L)$, expresado en tanto por cien

α	γ	δ	φ	Error relativo en %
0,05	0,42337	-0,01917	-0,01869	2,5
0,1	0,42554	-0,03791	-0,03700	2,4
0,15	0,42918	-0,05580	-0,05456	2,2
0,2	0,43431	-0,07241	-0,07100	1,9
0,25	0,44098	-0,08735	-0,08594	1,6
0,3	0,44924	-0,10024	-0,09900	1,2
0,35	0,45917	-0,11074	-0,10981	0,8
0,4	0,47085	-0,11853	-0,11800	0,4
0,45	0,48441	-0,12335	-0,12319	0,1
0,5	0,50000	-0,12500	-0,12500	0,0

EJERCICIO N° 47

EN LA VIGA DE LA FIGURA, SE PIDE:

- 1.- REACCIONES.
- 2.- LEYES DE ESFUERZOS
- 3.- GIROS EN A Y B, Y FLECHA EN EL CENTRO DE LA LUZ (CALCULADOS MEDIANTE LOS TEOR. DE MOHR O LAS FORM. DE NAVIER-BRESSE)
- 4.- DIBUJAR LA DEFORMADA A ESTIMA.



CÁLCULO DEL GIRO EN A.

$$V_B = V_A + \theta_A \cdot L + \frac{1}{EI} \int_{AB} M^V$$

$$0 = 0 + \theta_A L + \frac{1}{EI} \left[\frac{2}{3} \frac{qL^2}{8} \cdot L \cdot \frac{L}{2} \right]$$

$$= \theta_A L + \frac{qL^4}{24EI}$$

$$\Rightarrow \theta_A = -\frac{qL^3}{24EI}$$

$$\theta_B = \theta_A + \frac{1}{EI} \int_{AB} M$$

$$\theta_B = -\frac{qL^3}{24EI} + \frac{1}{EI} \left\{ \frac{2}{3} \frac{qL^2}{8} L \right\}$$

$$= -\frac{qL^3}{24EI} + \frac{qL^3}{12EI} = \frac{qL^3}{24EI}$$

$$V_E = V_A + \theta_A L + \frac{1}{EI} \int_{AE} M^V = 0 - \frac{qL^3}{24EI} \cdot \frac{L}{2} + \frac{1}{EI} \left\{ \frac{2}{3} \frac{qL^2}{8} \cdot \frac{L}{2} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{L}{2} \right\}$$

$$= -\frac{qL^4}{48EI} + \frac{qL^4}{128EI} = \frac{qL^4}{384EI} (-8+3) = -\frac{5qL^4}{384EI}$$



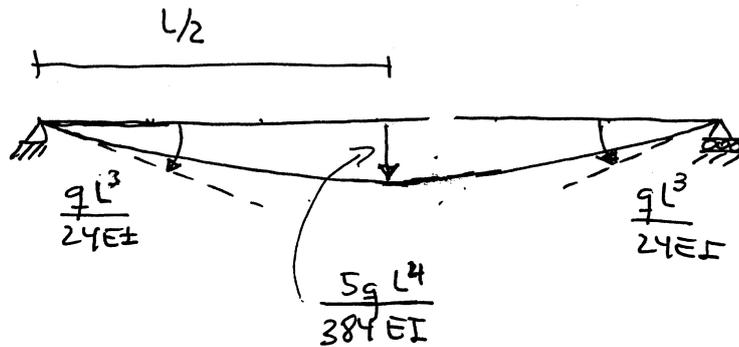
OTRA MANERA DE CALCULAR LOS GIROS.

Por simetría, el giro en el centro de la luz será nulo, luego:

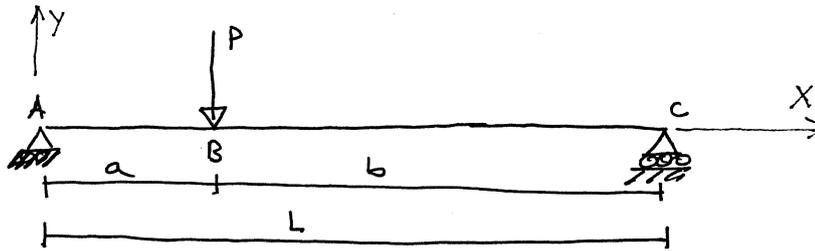
$$\theta_B = \theta_E + \frac{1}{EI} \mathcal{M}_{EB} = 0 + \frac{1}{EI} \left\{ \frac{2}{3} \frac{qL^2}{8} \frac{L}{2} \right\} = \frac{qL^3}{24EI}$$

$$\theta_A = \theta_B = \frac{1}{EI} \mathcal{M}_{BA} = \frac{qL^2}{24EI} - \frac{1}{EI} \left\{ \frac{2}{3} \frac{qL^2}{8} L \right\} = -\frac{qL^3}{24EI}$$

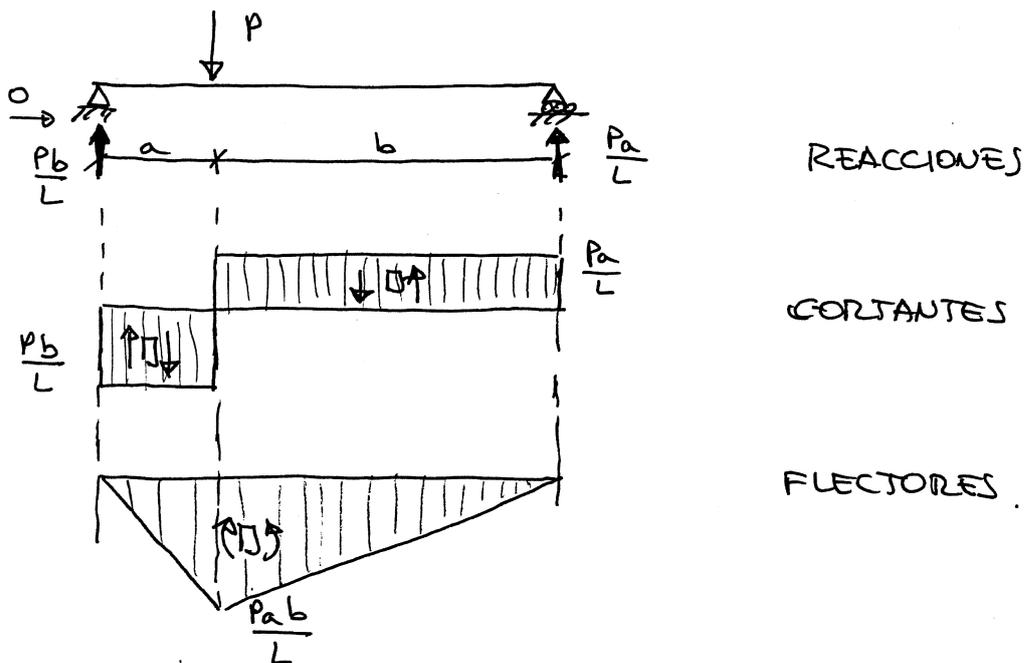
DEFORMADA



Ej. 48



EN LA VIGA DIBUJADA SE PIDE: 1) DETERMINAR LAS REACCIONES, 2) DIBUJAR LAS LEYES DE ESFUERZOS, 3) CALCULAR LOS GIROS EN A, B Y C, Y LA FLECHA EN B -USANDO LOS TEOREMAS DE MOHR, O LAS FÓRMULAS DE NAVIER-BRESSÉ-, Y 4) DIBUJAR A ESTIMA LA DEFORMADA.



3) GIROS Y DESPLAZAMIENTOS.

CÁLCULO DEL GIRO EN A \rightarrow CONDICIÓN $v_c = 0$

$$v_c = 0 = \overset{\circ}{\theta}_A \cdot L + \frac{1}{EI} \int_0^L M(x) dx$$

$$= \theta_A \cdot L + \frac{1}{EI} \left\{ \frac{1}{2} \frac{Pab}{L} a \left(b + \frac{a}{3} \right) + \frac{1}{2} \frac{Pab}{L} b \cdot \frac{2b}{3} \right\}$$

$$= \theta_A \cdot L + \frac{1}{EI} \left\{ \frac{1}{2} \frac{Pa^2b^2}{L} + \frac{Pa^3b}{6L} + \frac{Pa^2b^3}{3L} \right\}$$

$$= \theta_A \cdot L + \frac{Pab}{6LEI} \{ 3ab + a^2 + 2b^2 \}$$



$$= \vartheta_A L + \frac{Pab}{6EIL} \{ (a+b)^2 + ab + b^2 \} = \vartheta_A L + \frac{Pab}{6EIL} \{ L^2 + b(a+b) \}$$

$$= \vartheta_A L + \frac{Pab}{6EIL} L(L+b) \Rightarrow \boxed{\vartheta_A = -\frac{Pab}{6EIL} (L+b)}$$

$$\boxed{\vartheta_B = \vartheta_A + \frac{1}{EI} M_{AB}}$$

$$= \vartheta_A + \frac{1}{EI} \left\{ \frac{1}{2} \frac{Pab}{L} a \right\} = -\frac{Pab}{6EIL} (L+b) + \frac{Pab}{2EIL} a$$

$$= \frac{Pab}{6EIL} (-L-b+3a) = \frac{Pab}{6EIL} (-(L+b)-b+3a) = \frac{Pab}{6EIL} (2a-2b)$$

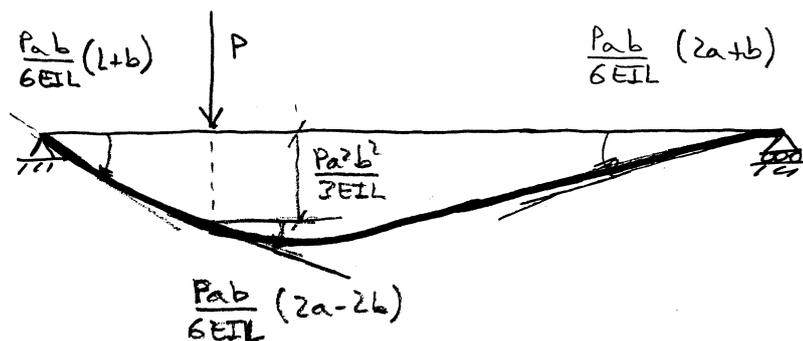
$$\boxed{\vartheta_C = \vartheta_B + \frac{1}{EI} M_{BC} = \frac{Pab}{6EIL} (2a-2b) + \frac{1}{EI} \frac{1}{2} \frac{Pab}{L} b =$$

$$= \frac{Pab}{6EIL} (2a-2b+3b) = \frac{Pab}{6EIL} (2a+b)}$$

$$\boxed{w_B = w_A + \vartheta_A \cdot a + \frac{1}{EI} M_{AB}^{vB}}$$

$$= 0 - \frac{Pab}{6EIL} (L+b)a + \frac{1}{EI} \left\{ \frac{1}{2} \frac{Pab}{L} a \frac{a}{3} \right\} =$$

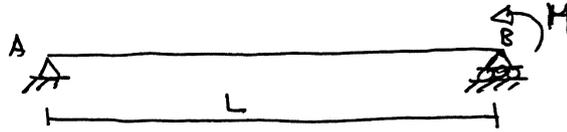
$$= -\frac{Pab}{6EIL} \{ (L+b)a - a^2 \} = -\frac{Pab}{6EIL} \{ (a+2b)a - a^2 \} = -\frac{Pa^2b^2}{3EIL}$$



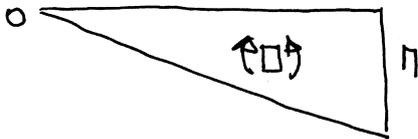


EJERCICIO 49

DETERMINAR LOS GIROS EN LOS EXTREMOS DE LA VIGA:



FLECTORES



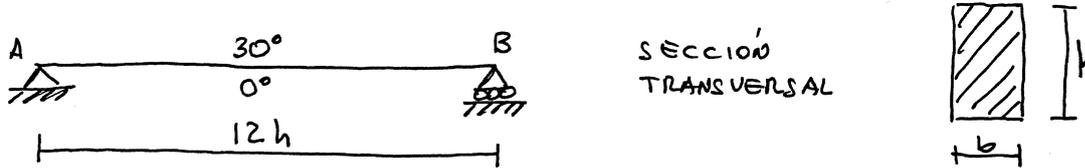
$$v_B = v_A + \theta_A \cdot L + \frac{1}{EI} \left\{ \frac{1}{2} \pi \cdot L \cdot \frac{L}{3} \right\}$$

$$0 = 0 + \theta_A L + \frac{\pi L^2}{6EI} \Rightarrow \boxed{\theta_A = -\frac{\pi L}{6EI}}$$

$$\theta_B = \theta_A + \frac{1}{EI} \left\{ \frac{1}{2} \pi \cdot L \right\} = -\frac{\pi L}{6EI} + \frac{\pi L}{2EI}$$

$$\boxed{\theta_B = \frac{\pi L}{3EI}}$$

EJERCICIO Nº 50



DIBUJAR A ESTIMA LA DEFORMADA DE LA VIGA DE LA FIGURA, ACOTANDO LOS PUNTOS MÁS CARACTERÍSTICOS.

Las acciones térmicas no originan reacciones ni esfuerzos, puesto que se trata de una viga isostática.

DESPLAZAMIENTO HORIZONTAL DE B.

Por tratarse de una viga simétrica respecto al plano horizontal

$$T_g = \frac{T_i + T_s}{2} = \frac{0 + 30}{2} = 15^\circ$$

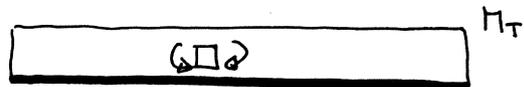
Así pues, el alargamiento de la directriz, que en nuestro caso coincide con el desplazamiento horizontal de B, será

$$u_B = \Delta l = \alpha l T = \alpha (12h) \cdot 15 = 180\alpha h$$

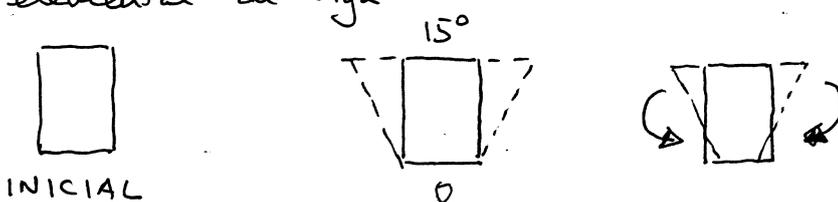
CAMBIO DE CURVATURA ORIGINADO POR EL MOVIMIENTOS DEBIDOS AL GRADIENTE TÉRMICO.

Flector ficticio $\rightarrow M_T = \left| \frac{\alpha EI (T_s - T_i)}{h} \right| = \frac{30 \alpha EI}{h}$

Ley de flectores ficticia



En lo anterior, M_T se ha determinado en valor absoluto y el signo de la ley de flectores ficticia se ha escogido comparando la deformación que produce la temperatura y un momento en un prisma elemental de viga



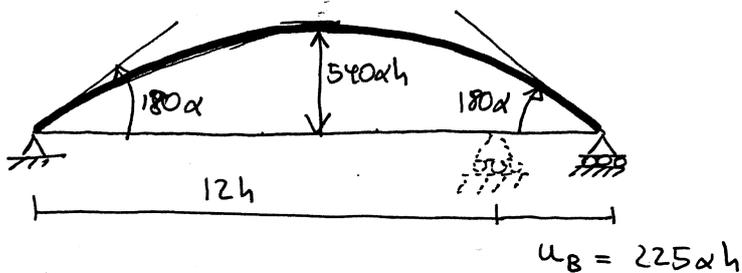
Cálculo de los giros. En el centro de la viga el giro es nulo por simetría, luego

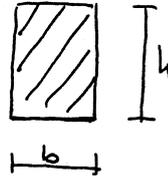
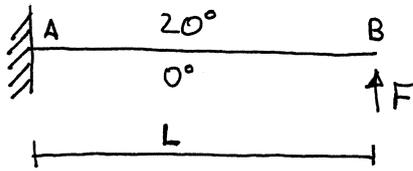
$$\theta_B = \theta_E - \frac{1}{EI} M_{EB} = 0 - \frac{1}{EI} M_T \cdot 6h = -\frac{1}{EI} \frac{30\alpha EI}{h} \cdot 6h = -180\alpha$$

$$\theta_A = \theta_E + \frac{1}{EI} M_{EA} = 0 + \frac{1}{EI} M_T \cdot 6h = 180\alpha$$

$$V_B = V_E + \theta_E \frac{L}{2} + \frac{1}{EI} M_{E,B}^{v,B} = 0$$

$$V_E = -\frac{1}{EI} M_{E,B}^{v,B} = -\frac{1}{EI} \left\{ -M_T \cdot 6h \cdot 3h \right\} = \frac{1}{EI} \frac{30\alpha EI}{h} \cdot 18h^2 = 540\alpha h$$



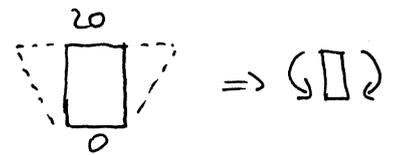
EJERCICIO Nº 51


$$\begin{aligned}
 L &= 2'6 \text{ m} \\
 h &= 0'2 \text{ m} \\
 b &= 0'15 \text{ m} \\
 E &= 25 \text{ GPa} \\
 \alpha &= 10^{-5} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}
 \end{aligned}$$

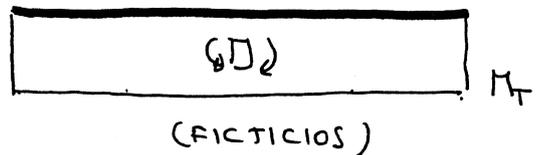
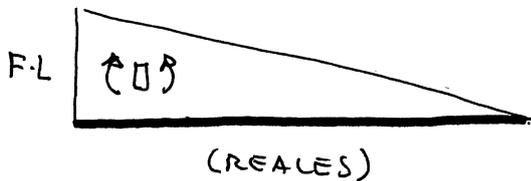
Determinar el valor de F para que el desplazamiento vertical del punto B sea nulo. En esta situación determinar: a) las reacciones, b) las leyes de esfuerzos, y c) la deformada - que se dibujará a esta ma, acotando los valores mas característicos -.

Cálculo de F .

$$M_T = \left| \frac{\alpha EI (T_s - T_c)}{h} \right| = \frac{20 \alpha EI}{h}$$



Flectores para el cálculo de los desplazamientos



$$\begin{aligned}
 V_B &= V_A + \cancel{\vartheta_A \cdot L} + \frac{1}{EI} \left\{ \frac{1}{2} FL \cdot L \cdot \frac{2}{3} L - M_T \cdot L \cdot \frac{L}{2} \right\} \\
 &= \frac{FL^3}{3EI} - \frac{1}{EI} \frac{20 \alpha EI}{h} \frac{L^2}{2} = \frac{FL^3}{3EI} - \frac{10 \alpha L^2}{h}
 \end{aligned}$$

$$V_B = 0 \Rightarrow F = \frac{3}{L^3} \frac{EI}{h} \frac{10 \alpha L^2}{h} = \frac{30 \cdot EI \alpha}{L h}$$

Giro en B (para el dibujo posterior de la deformada)

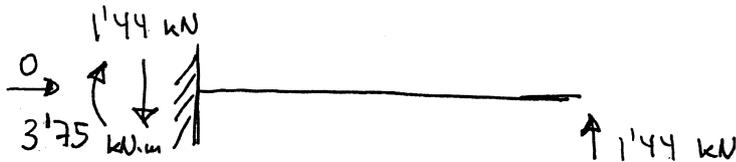
$$\begin{aligned}
 \vartheta_B &= \cancel{\vartheta_A} + \frac{1}{EI} M_{AB} = \frac{1}{EI} \left\{ \frac{1}{2} FL \cdot L - M_T L \right\} = \frac{1}{EI} \left\{ \frac{30 \cdot EI \alpha}{L h} \frac{L^2}{2} - \frac{20 \alpha EI}{h} L \right\} \\
 &= \frac{30 \cdot \alpha L}{2h} - \frac{20 \alpha L}{h} = - \frac{5 \cdot \alpha L}{h}
 \end{aligned}$$

• REACCIONES Y LEYES DE ESFUERZOS

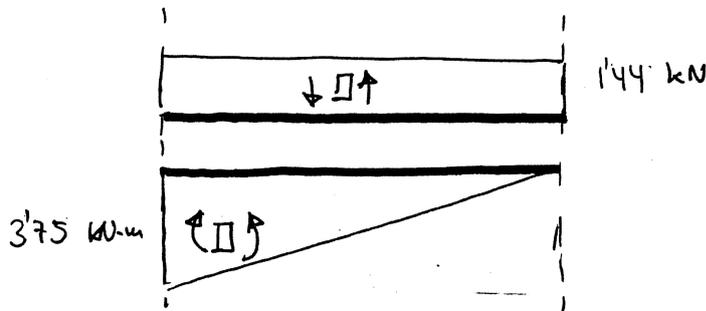
$$I = \frac{0'15 \times 0'2^3}{12} = 10^{-4} \text{ m}^4$$

$$E = 25 \text{ GPa} = 25 \times 10^6 \text{ kPa}$$

$$F = \frac{30 EI \alpha}{hL} = \frac{30 \times 25 \times 10^6 \times 10^{-4} \times 10^{-5}}{0'2 \times 2'6} = 1'44 \text{ kN}$$



AXILES NULOS.



CORTANTES.

FLECTORES.

• DEFORMADA.

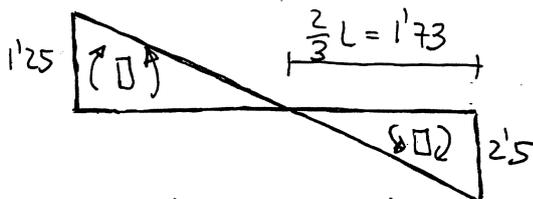
Primero hallaremos el desplazamiento horizontal de B, calculando el alargamiento de la directriz

$$\tau_a = \frac{\tau_s + \tau_i}{2} = \frac{20 + 0}{2} = 10^\circ$$

$$\Delta l = u_B = \alpha \cdot L \cdot \tau_a = 10 \alpha L = 2'6 \times 10^{-4} \text{ m} = 0'26 \text{ mm.}$$

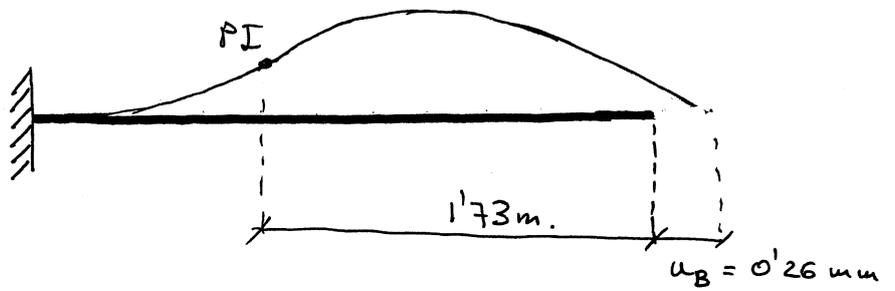
La ley de cambios de curvaturas coincide, en rigor, con la de flectores reales más ficticios (sumados), que es

$$M_T = \frac{20 \alpha EI}{h} = \frac{20 \times 10^{-5} \times 25 \times 10^6 \times 10^{-4}}{0'2} = 2'5 \text{ kN} \cdot \text{m}$$



Flectores reales + ficticios.

$$\theta_B = \frac{-5 \alpha L}{h} = \frac{-5 \times 10^{-5} \times 2'6}{0'2} = -6'5 \times 10^{-4} \text{ rad}$$



Torsión de vigas

EJERCICIO Nº 52

DETERMINAR EL MÓDULO DE TORSIÓN Y LA DISTRIBUCIÓN DE TENSIONES TANGENCIALES EN LAS SECCIONES DE LOS EJERCICIOS 41 Y 43

SECCIÓN DEL EJERCICIO Nº 41

Sección de pared delgada que se puede descomponer en rectángulos. $\Rightarrow J = \sum J_i$, $\tau_{max,i} = \frac{\eta_T}{J} e_i$

Proporción de lados:

$$\frac{e_1}{L_1} = \frac{10.7}{150} = \frac{1}{14.0}$$

$$\frac{e_2}{L_2} = \frac{7.1}{(300 - 2 \times 10.7)} = \frac{1}{39.2}$$

$$J_1 = \frac{L_1 \cdot e_1^3}{3} = \frac{15 \times 10.7^3}{3} = 6.13 \text{ cm}^4$$

$$J_2 = \frac{L_2 \cdot e_2^3}{3} = \frac{27.86 \times 0.71^3}{3} = 3.43 \text{ cm}^4$$

$$J = 2J_1 + J_2 = 15.7 \text{ cm}^4$$

$$\tau_{max,1} = \frac{\eta_T}{J} e_1 = \frac{\eta_T \times 10.7}{15.7} = 0.68 \eta_T \text{ kp/cm}^2$$

$$\tau_{max,2} = \frac{\eta_T}{J} e_2 = \frac{\eta_T \times 0.71}{15.7} = 0.045 \eta_T \text{ kp/cm}^2$$

Con η_T en $\text{kp} \cdot \text{cm}$.

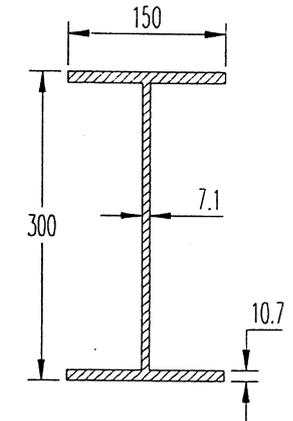
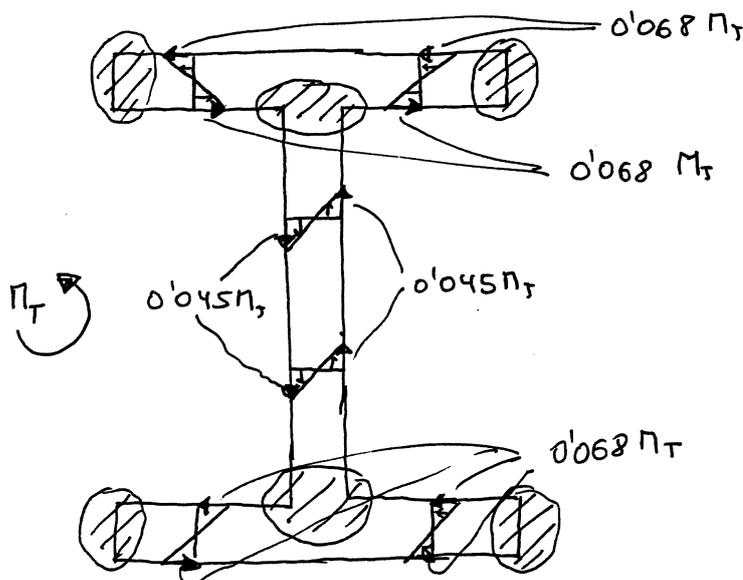


Figura Ej. 35



τ en kp/cm^2

η_T en $\text{kp} \cdot \text{cm}$



ZONAS DONDE LA ESTIMACIÓN DE τ ES INCORRECTA.

SECCIÓN DEL EJERCICIO 43

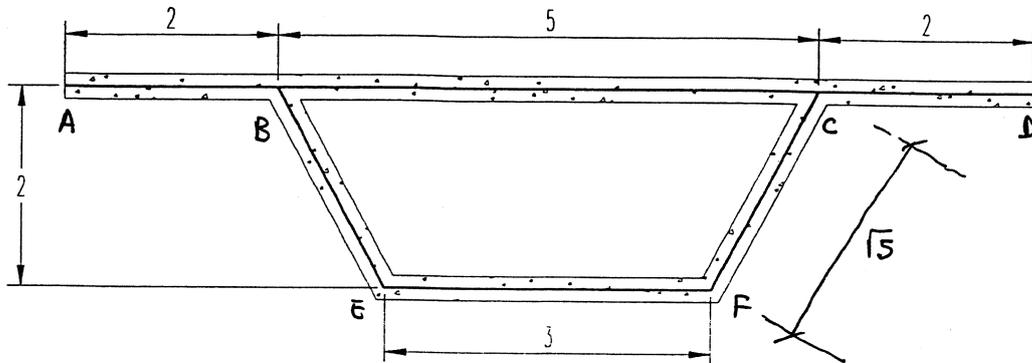


Figura Ej. 38

SE TRATA DE UNA SECCIÓN CERRADA, UNICELULAR, DE PARED DELGADA. LA COLABORACIÓN DE LOS VOLADIZOS AB Y CD A RESISTIR LA TORSIÓN ES INAPRECIABLE, POR LO QUE PUEDE PRESCINDIRSE DE ELLOS PARA RESOLVER EL PROBLEMA. (SIEMPRE QUE EN UNA SECCIÓN CERRADA, DE PARED DELGADA, ENCONTREMOS SALIENTES QUE DETERMINAN RAMAS ABIERTAS, PODEMOS PRESCINDIR DE ELLOS AL RESOLVER EL PROBLEMA DE TORSIÓN.)

$$\text{MÓDULO DE TORSIÓN : } J = \frac{4 A_a^2}{\oint_{\Gamma} \frac{ds}{e}}$$

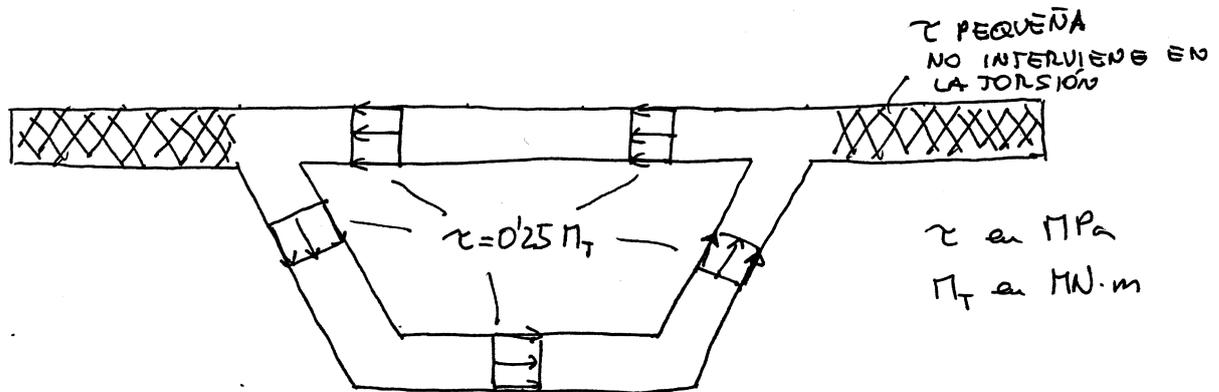
$$\text{ÁREA ENCERRADA POR LA LÍNEA MEDIA } \Gamma \equiv BEFCB \rightarrow A_a = \frac{5+3}{2} \times 2 = 8 \text{ m}^2$$

$$\oint_{\Gamma} \frac{ds}{e} = \frac{\sqrt{5}}{0.25} + \frac{3}{0.25} + \frac{\sqrt{5}}{0.25} + \frac{5}{0.25} = 49.89$$

$$J = \frac{4 \times 8^2}{49.89} = 5.131 \text{ m}^4$$

$$\tau_{\max} = \frac{M_T}{2 A_a \cdot e} = \frac{M_T}{2 \times 8 \times 0.25} = 0.25 M_T \text{ MPa, CON } M_T \text{ EN MN}\cdot\text{m.}$$

DISTRIBUCIÓN DE TENSIONES.



UTILIZAREMOS ESTE EJEMPLO PARA JUSTIFICAR QUE LAS RAMAS ABIERTAS, COMO AB Y CD, NO INFLUYEN EN LA TORSIÓN. PARA ELLO, TRATAREMOS DE RESOLVER EL PROBLEMA TENIÉNDOLAS EN CUENTA. EN ESTE PROBLEMA ES RAZONABLE PENSAR QUE LA MEMBRANA SOBRE TODA LA SECCIÓN PUEDE APROXIMARSE POR LA UNIÓN DE LAS CORRESPONDIENTES A LOS RECTÁNGULOS AB Y CD, Y A LA SECCIÓN CERRADA BEFCB, HALLADAS POR SEPARADO. DE ELLO SE DEDUCE:

- EL MÓDULO DE TORSIÓN J DE LA SECCIÓN COMPLETA ES LA SUMA DE LOS DE LOS TRES ELEMENTOS PARCIALES.
- EL MOMENTO TORSOR TOTAL SE REPARTE ENTRE LOS TRES ELEMENTOS PROPORCIONALMENTE A SU COLABORACIÓN A J .
- LA TENSIÓN TANGENCIAL SE DETERMINA ELEMENTO A ELEMENTO A PARTIR DE LA PARTE DE Π_T QUE LE CORRESPONDE.

EL ELEMENTO CENTRAL LO HEMOS ESTUDIADO YA. ANALICEMOS, PUES, LOS RECTÁNGULOS AB Y CD.

$$\frac{e}{L} = \frac{0.25}{2} = 0.125 = \beta$$

$$J_{AB} = J_{CD} = (0.33 - 0.22\beta + 0.03\beta^2) L e^3 = 0.30 \times 2 \times 0.25^3 = 0.0094 \text{ m}^4$$



MÓDULO DE TORSIÓN TOTAL $J = J_{AB} + J_{BEFCB} + J_{BC} = 5'131 + 2 \times 0'0094 = 5'150 \text{ m}^4$
El error cometido al aproximar J por J_{BEFCB} es del 3'6%.

REPARTO DEL MOMENTO TORSOR

$$M_{T,AB} = M_{T,CD} = \frac{J_{AB}}{J} M_T = \frac{0'0094}{5'150} M_T = 0'0018 M_T$$

$$M_{T,BEFCB} = \frac{J_{BEFCB}}{J} M_T = \frac{5'131}{5'150} M_T = 0'9964 M_T$$

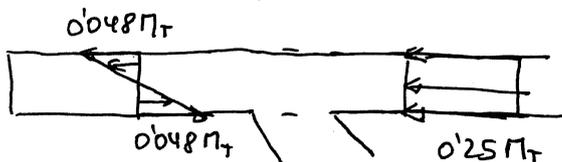
DISTRIBUCIÓN DE TENSIONES TANGENCIALES.

- EN BEFCB \rightarrow LA HALLADA ANTES, PERO MULTIPLICANDO LAS TENSIONES TANGENCIALES POR 0'9964 \approx LA ANTERIOR.

- EN AB ó CD.

$$\mu = (0'33 - 0'22\beta + 0'10\beta^2) L e^2 = 0'30 \times 2 \times 0'25^2 = 0'0375 \text{ m}^3$$

$$\tau_{\max} = \frac{M_{T,AB}}{\mu} = \frac{0'0018 M_T}{0'0375} = 0'048 M_T \text{ MPa, } M_T \text{ en MN}\cdot\text{m.}$$



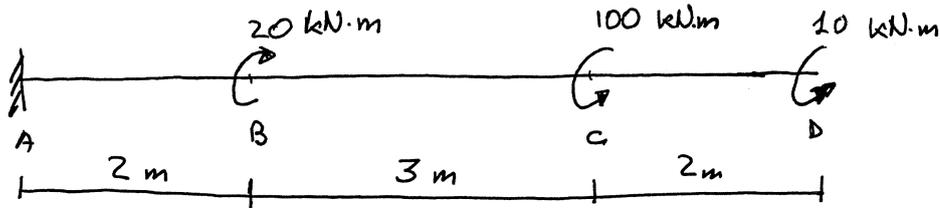
$$\frac{0'048 M_T}{0'25 M_T} = 0'192$$

Pese a que el momento resistido por los voladizos es pequeño, las tensiones tangenciales son el 20% de las que aparecen en la parte central.

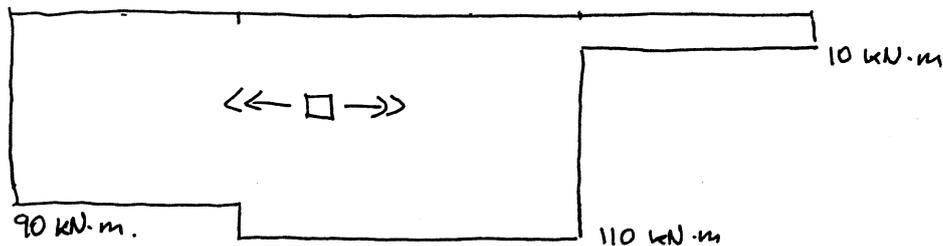
QUEDA DEMOSTRADO QUE, EN PERFILES CERRADOS DE PARED DELGADA, LA COLABORACIÓN DE RAMAS ABIERTAS A LA TORSIÓN ES DESPRECIABLE. LAS TENSIONES TANGENCIALES, AUNQUE ^{EN ESTAS RAMAS,} SON MENORES QUE EN LA ZONA CERRADA, PUEDEN NO SER DESPRECIABLES.

EJERCICIO Nº 53

Determinar las leyes de momentos torsores y de giros de torsión en la viga representada en la figura, cuya sección transversal es un hexágono regular de lado 0'1 m. ($G = 79 \text{ GPa}$)

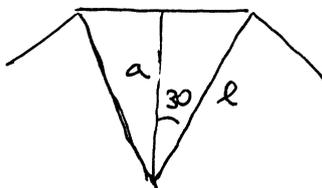


Sec. hexagonal (maciza) → Puede estudiarse la torsión no uniforme por la teor. simplificada LEY DE TORSORES. Se hallamos planteando el equilibrio de la parte de la pieza que está por delante de una sección. Resulta.



LEY DE GIROS.
$$\varphi_B = \varphi_A + \frac{1}{GJ} \int_{x_A}^{x_B} T_T dx = \varphi_A + \frac{\text{Área torsores entre } A \text{ y } B}{GJ}$$

$J = 0'133 A d^2$ (Tabla). $A = \text{Área}$. $d = \text{apotema} \times 2$.

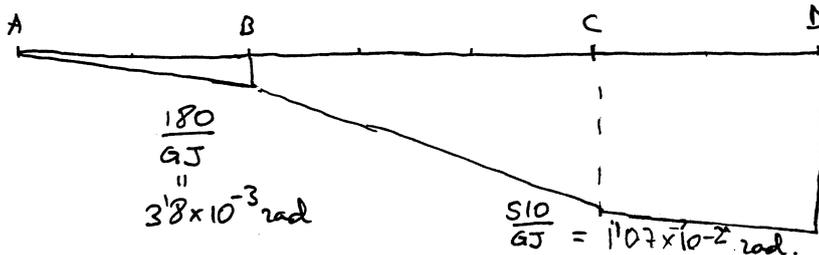


Apotema = $a = l \cos 30 = 0'1 \cos 30 = 0'0866 \text{ m}$.

Área = $\text{semiperímetro} \times \text{apotema} = 0'02598 \text{ m}^2$

$J = 0'133 \times 0'02598 \times 2 \times 0'0866 = 5'99 \times 10^{-4} \text{ m}^4$

$G = 79 \text{ GPa} = 79 \times 10^6 \text{ kPa}$

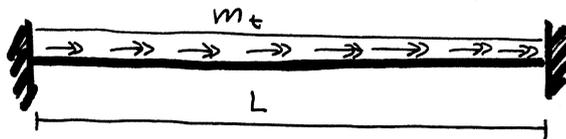


key giros.

$530/GJ = 1'12 \times 10^{-2} \text{ rad}$

EJERCICIO Nº 54

Determina las leyes de momentos torsores y giros de torsión en la viga de la figura, cuya sección transversal es maciza.



$m_t = \text{cte.}$

Sección maciza \rightarrow Puede estudiarse la torsión no uniforme por la teoría simplificada.

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 \varphi}{dX^2} &= -\frac{m_t}{GJ} \\ m_t &= \text{cte} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \frac{d\varphi}{dX} &= -\frac{m_t}{GJ} X + \alpha \\ \varphi &= -\frac{m_t}{2GJ} X^2 + \alpha X + \beta \end{aligned}$$

α y β son constantes de integración.

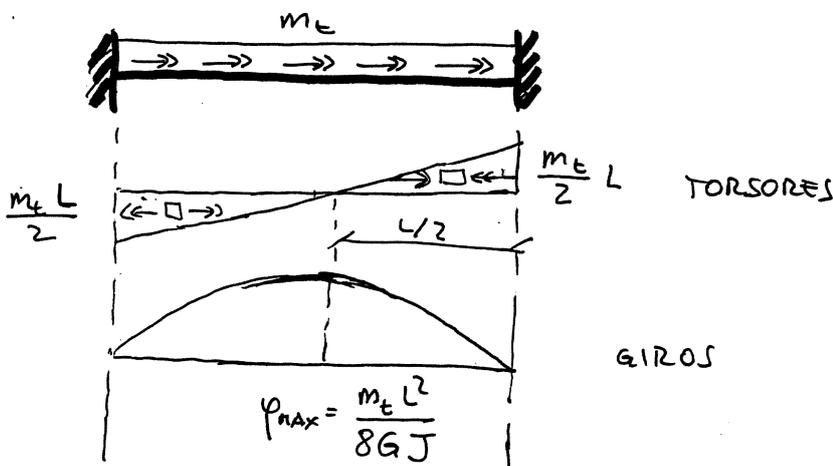
Condiciones de contorno

- En $X=0$, $\varphi=0 \Rightarrow \varphi(0) = \beta = 0 \Rightarrow \boxed{\beta = 0}$

- En $X=L$, $\varphi=0 \Rightarrow \varphi(L) = -\frac{m_t}{2GJ} L^2 + \alpha L = 0 \Rightarrow \boxed{\alpha = +\frac{m_t L}{2GJ}}$

luego $\varphi = -\frac{m_t}{2GJ} (X^2 - LX)$

$M_T = GJ \frac{d\varphi}{dX} = \frac{m_t}{2} (2X - L)$





Ej. 55 En la sección de la figura, determinar el módulo de torsión y la distribución de tensiones tangenciales originada el cortante indicado.

La sección representada es la de una puente recto de 60 m de luz, que tiene impedido el giro por torsión en ambos extremos. Suponiendo que está formado por un material elástico lineal, de módulo de ELASTICIDAD TRANSVERSAL 10.000 Mpa y coeficiente de Poisson 0'25, calcule el mencionado giro en la sección media de la viga, cuando en ella una fuerza puntual de 600 kN en la posición indicada en la figura —que es una sección frontal—.

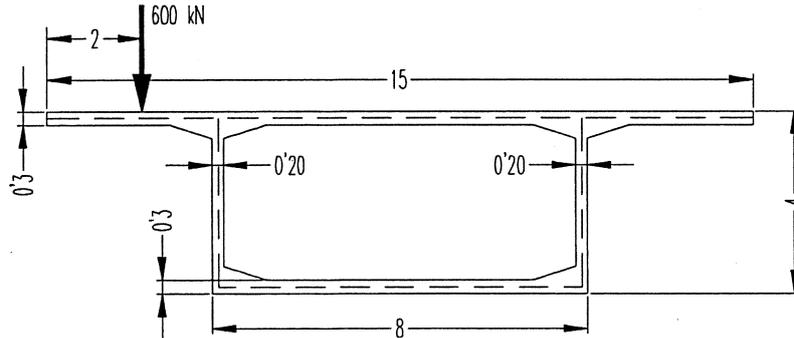


Figura Ej.-45

NOTAS: 1) Las cartelas garantizan que la torsión no produce una tensiones desmesuradas en los ángulos entrantes, pero influyen muy poco en el módulo de torsión y en las tensiones tangenciales lejos de estas zonas —que son las que se pide en el apartado 1—, por lo que no hace falta considerarlas en su cálculo.

CÁLCULO DE LAS CARACTERÍSTICAS MECÁNICAS DE LA SECCIÓN. (DESPRECIANDO EL EFECTO DE LAS CARTELAS.)

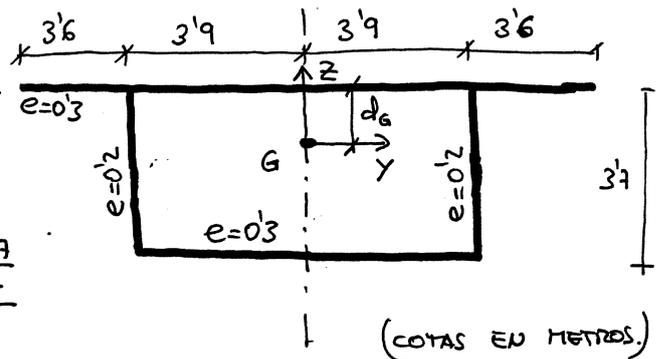
$$A = 15 \times 0'3 + 2 \times 3'9 \times 0'3 + 2 \times 3'7 \times 0'2$$

$$= 8'32 \text{ m}^2$$

$$d_G = \frac{15 \times 0'3 \times 0 + 2 \times 3'9 \times 0'3 \times 3'7 + 2 \times 3'7 \times 0'2 \times \frac{3'7}{2}}{8'32}$$

$$= \frac{11'396}{8'32} = 1'3697 \text{ m}$$

TOMAREMOS $d_G = 1'370 \text{ m}$.



$$I_y = \frac{15 \times 0'3^3}{12} + 15 \times 0'3 \times 1'370^2 + 2 \times \left(\frac{0'2 \times 3'7^3}{12} + 0'2 \times 3'7 \times \left(\frac{3'7}{2} - 1'370 \right)^2 \right) + \frac{7'8 \times 0'3^3}{12}$$

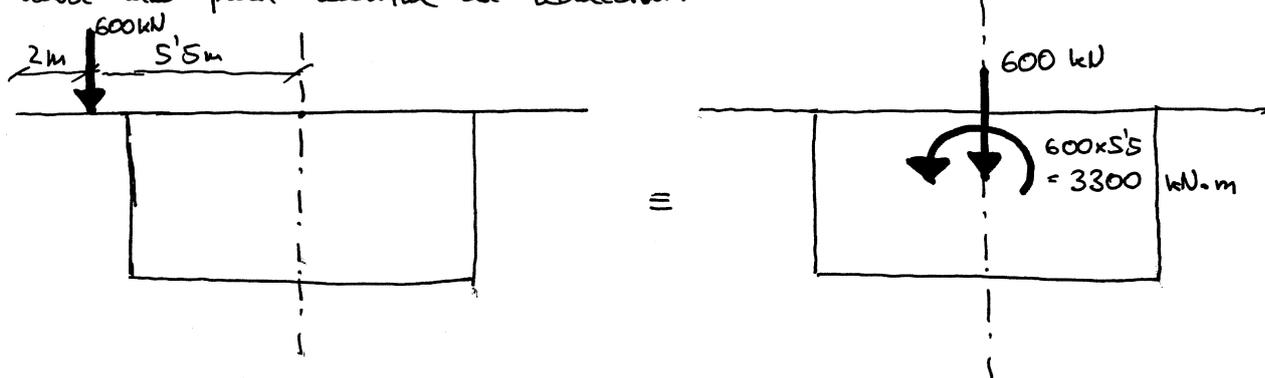
$$+ 7'8 \times 0'3 \times (3'7 - 1'370)^2 = 3'375 \times 10^{-2} + 8'44605 + 2 \times (0'844217 + 0'170496) + 0'01755$$

$$+ 12'70363 = 23'2304 \text{ m}^4 \quad \text{TOMAREMOS } 23'23 \text{ m}^4.$$

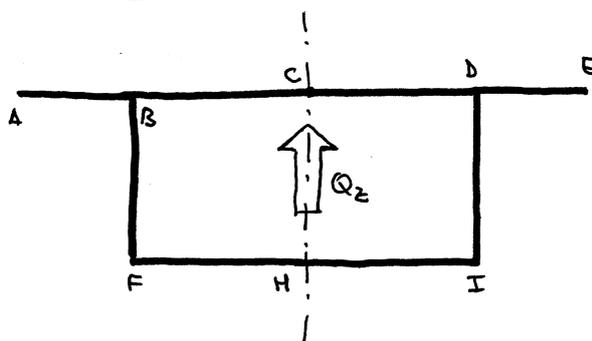
(Trabajamos con cuatro cifras significativas en d_G y en I_y .)

REDUCCIÓN DEL SISTEMA DE FUERZAS EXTERIORES AL C.E.C.

Como el eje Z_1 es de simetría, el C.E.C. estará sobre él. Dado que el cortante definido en el enunciado es paralelo a este eje, no necesitamos saber más para realizar la reducción.



DISTRIBUCIÓN DE TENSIONES TANGENCIALES ORIGINADA POR UN CORTANTE Q_z QUE ACTÚA EN EL C.E.C.

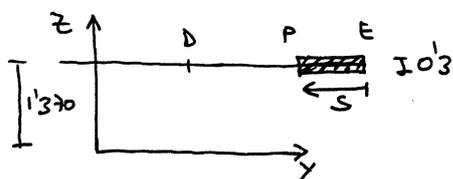


SIMETRÍA $\Rightarrow \begin{cases} \tau_e = 0 \\ \tau_H = 0 \end{cases}$

ADEMÁS, BASTA ESTUDIAR MEDIA ESTRUCTURA.

s en METROS
 Q_z en KILONEUTONS

• TRAMO ED



$\tau_e = 0$

$\tau_e|_P = \tau_e|_E + \frac{Q_z S_y (E-P)}{I_y}$

$S_y (E-P) = 0.3 \cdot s (1.370) = 0.411s \text{ m}^3$

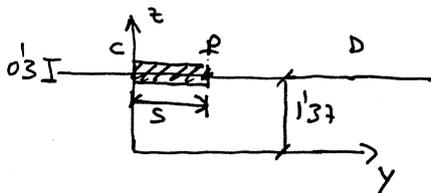
$\tau_e|_P = 0 + \frac{0.411s}{23.23} Q_z = 0.01769s Q_z \text{ kN/m}$

Nótese que en $\tau_e|_P$ se indican cuatro cifras significativas, los mismos que tenemos en d_0 o en I_y . Sería absurdo considerar menos, ya que perderíamos precisión, pero también lo sería considerar más de cuatro, porque los siguientes no los conocemos con precisión, puesto que su valor depende de cifras omitidas en d_0 o I_y .



En el punto D $\rightarrow s = 3'6 \text{ m}$, $\tau_{e|_D} = 0'06369 Q_z \text{ kN/m}$, $\tau_D = 0'2123 \text{ kPa}$

• TRAMO CD. $\tau_{e|_P} = \tau_{e|_C} + \frac{Q_z S_y (C-P)}{I_y}$

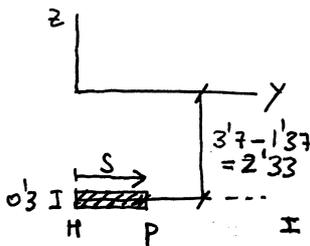


$$S_y (C-P) = 0'35 \times 1'37 = 0'4115 \text{ m}^3$$

$$\tau_{e|_P} = \frac{0'4115}{23'23} Q_z = 0'017695 Q_z \text{ kN/m}$$

Punto D $\rightarrow s = 3'9 \text{ m}$, $\tau_{e|_D} = 0'06900 Q_z \text{ kN/m}$, $\tau_D = 0'2300 Q_z \text{ kPa}$

• TRAMO H-I.



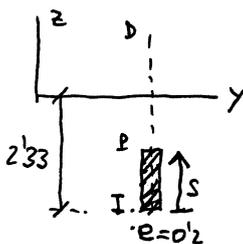
$$\tau_{e|_P} = \tau_{e|_H} + \frac{Q_z S_y (H-P)}{I_y}$$

$$S_y (H-P) = 0'35 \times (-2'33) = -0'6995 \text{ m}^3$$

$$\tau_{e|_P} = -\frac{0'6995}{23'23} Q_z = -0'030095 Q_z \text{ kN/m}$$

Pto I $\rightarrow s = 3'9 \text{ m}$, $\tau_{e|_I} = -0'1174 Q_z \text{ kN/m}$, $\tau_I = -0'3912 Q_z \text{ kPa}$

• TRAMO I-D



$$\tau_{e|_P} = \tau_{e|_I} + \frac{Q_z S_y (I-P)}{I_y}$$

$$S_y (I-P) = 0'2 \cdot s \cdot (-2'33 + \frac{s}{2}) = -0'466s + 0'1s^2 \text{ m}^3$$

$$\tau_{e|_P} = -0'1174 Q_z + \frac{0'1s^2 - 0'466s}{23'23} Q_z$$

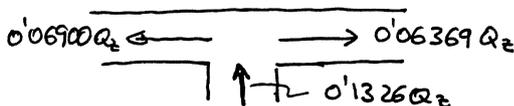
$$= [-0'1174 - 0'02006s + 0'004305s^2] Q_z \text{ kN/m}$$

Pto I $\rightarrow s = 0$, $\tau_{e|_I} = -0'1174 Q_z \text{ kN/m}$, $\tau_I = -0'5868 Q_z \text{ kPa}$

τ_{MAX} $s = 2'33 \text{ m}$, $\tau_{e|_{MAX}} = -0'1407 Q_z \text{ kN/m}$, $\tau_{MAX} = -0'7036 Q_z \text{ kPa}$

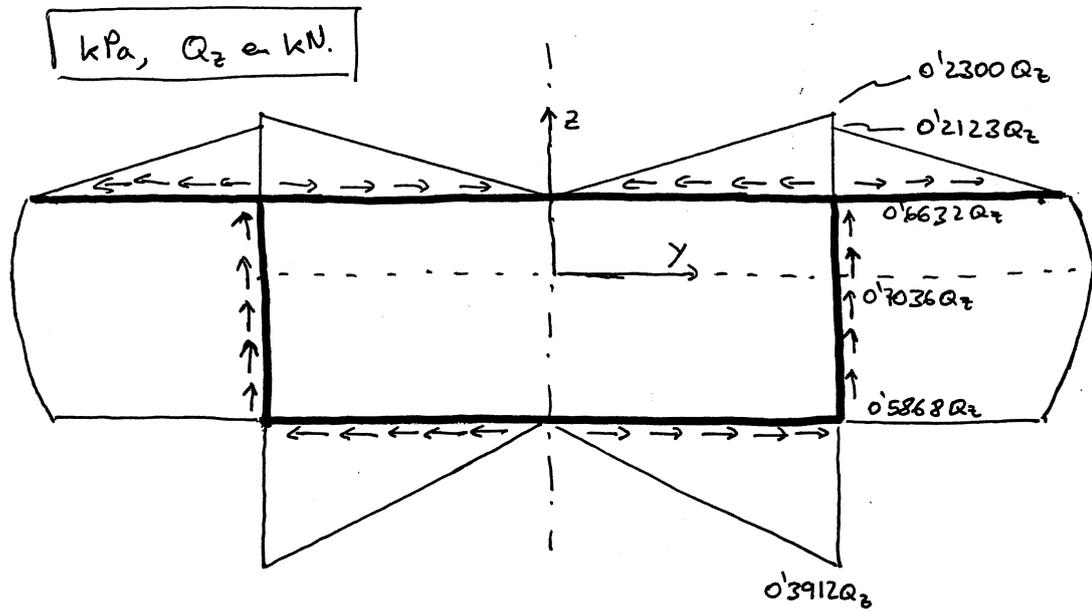
Pto D $\rightarrow s = 3'7 \text{ m}$, $\tau_{e|_D} = -0'1326 Q_z \text{ kN/m}$, $\tau_D = -0'6632 Q_z \text{ kPa}$

• COMPROBACIÓN DEL FLUJO EN D.

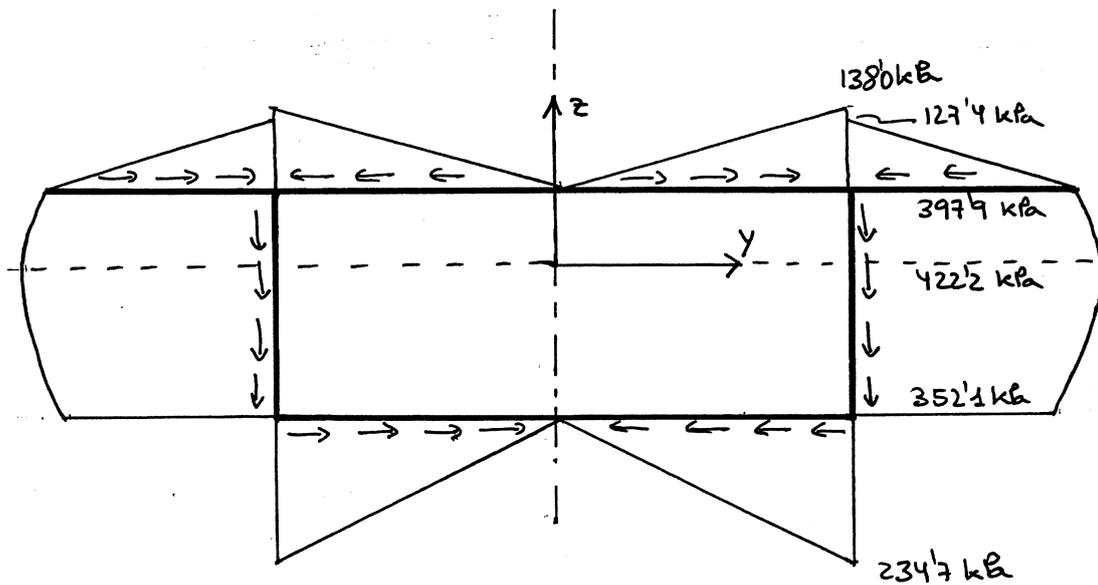


$$0'06900 + 0'06369 = 0'13269 = 0'1327$$

Error de una unidad en la última cifra significativa \rightarrow admisible.

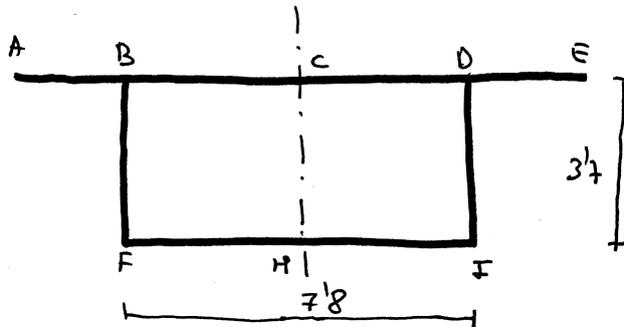


Para $Q_z = -600 \text{ kN}.$





DISTRIBUCIÓN DE TENSIONES TANGENCIALES ORIGINADA POR UN TORSOR.



LA COLABORACIÓN DE LAS ALAS "AB" Y "DE" PARA RESISTIR LA TORSIÓN ES MUY PEQUEÑA, Y PUEDE DESPRECIARSE. → ESTUDIAREMOS LA SECCIÓN CERRADA, UNICELULAR, "BCD I H F".

$$\tau = \frac{M_T}{2A_a e}$$

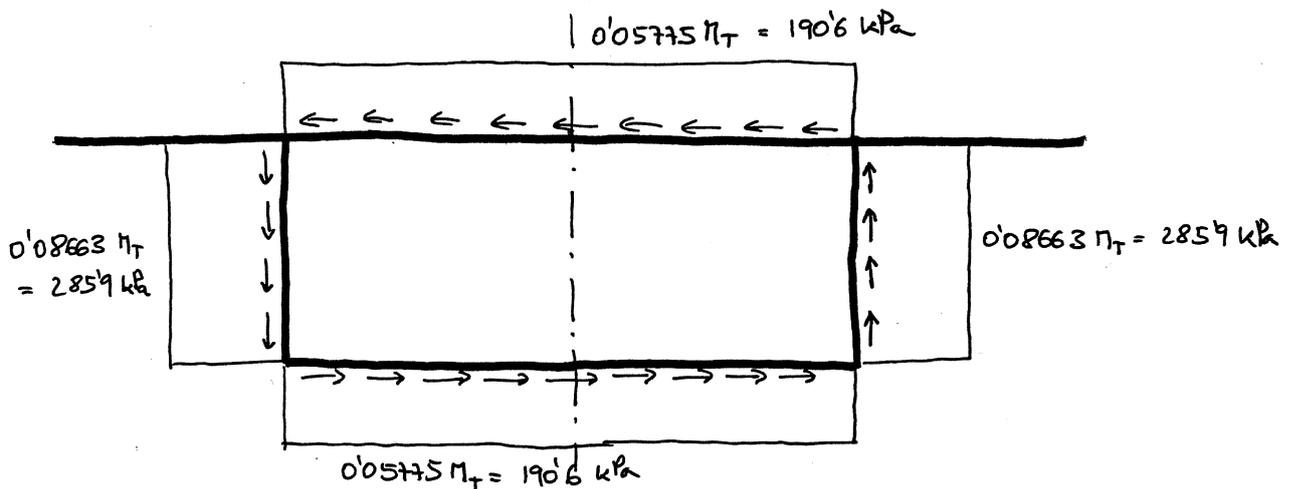
$$A_a = 3.7 \times 7.8 = 28.86 \text{ m}^2$$

M_T en kN·m

$$\tau_{ALAS} = \frac{M_T}{2 \times 28.86 \times 0.3} = \frac{M_T}{17.316} = 0.05775 M_T \text{ kPa}$$

$$\tau_{ALMAS} = \frac{M_T}{2 \times 28.86 \times 0.2} = \frac{M_T}{11.544} = 0.08663 M_T \text{ kPa}$$

PARA $M_T = 3300 \text{ kN}\cdot\text{m}$ → $\tau_{ALAS} = 190.6 \text{ kPa}$, $\tau_{ALMAS} = 285.9 \text{ kPa}$



MÓDULO DE TORSIÓN.

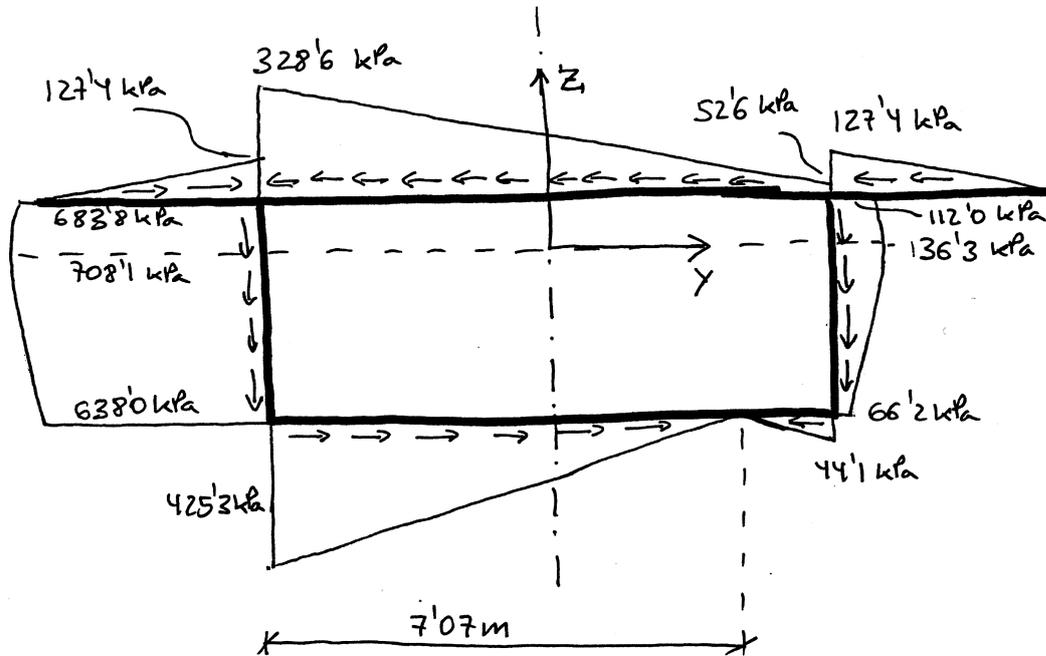
$$J = \frac{4A_a^2}{\oint \frac{ds}{e}}$$

$$\oint \frac{ds}{e} = \frac{7.8}{0.3} + \frac{3.7}{0.2} + \frac{7.8}{0.3} + \frac{3.7}{0.2} = 89$$

$$J = \frac{4 \times 28.86^2}{89} = 37.43 \text{ m}^4$$

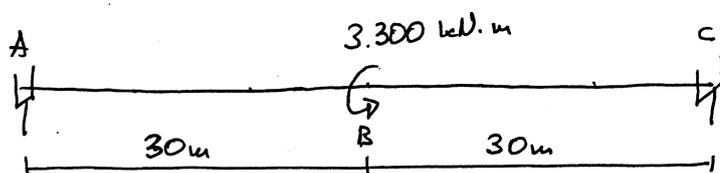


DISTRIBUCIÓN DE TENSIONES TANGENCIALES ORIGINADA POR EL CORTANTE EN LA POSICIÓN INDICADA EN EL ENUNCIADO.



GIRO DEL PUENTE.

El puente es una viga cajón con proporción de lados de 1 a 2. Puede, pues, estudiarse a torsión mediante la teoría simplificada.



INDICA GIRO DE TORSIÓN IMPEDIDO.

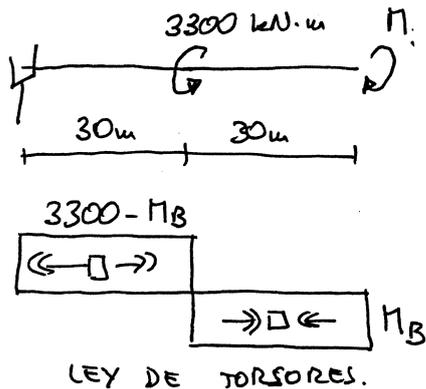
El problema planteado es hiperestático, pues la única ecuación de equilibrio relevante no permite determinar las dos reacciones.

$$\leftarrow M_A \quad \rightarrow 3300 \text{ kN.m} \quad \leftarrow M_C \quad \rightarrow X \quad \Sigma M_x = 0 \Rightarrow M_A + M_C = 3300 \text{ kN.m}$$

Adelantándonos a lo que debe verse en temas posteriores, lo resolvemos por el método de flexibilidad. Consiste en eliminar de la estructura



los apoyos cuyas reacciones no se pueden calcular, tomar estos como incógnitas y para determinarlas plantear que el desplazamiento libre en la estructura modificada tenga el valor que el enlace le imponía en la inicial. En nuestro caso



$$+ \boxed{\alpha_C = 0}$$

$$\alpha_C = \alpha_A + \int_A^C \frac{M_T}{GJ} dX$$

$$\alpha_C = 0 + \int_0^{30} \frac{3300 - M_C}{GJ} dX + \int_{30}^{60} \frac{(-M_C)}{GJ} dX$$

$$= 30 \frac{3300 - M_C}{GJ} - 30 \frac{M_C}{GJ} =$$

$$= \frac{99000 - 60 M_C}{GJ} = 0 \Rightarrow \boxed{M_C = 1650 \text{ kW}\cdot\text{m}}$$

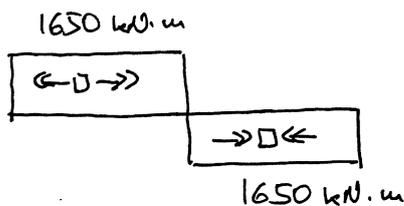
GIRO EN B

$$\alpha_B = \alpha_A + \int_A^B \frac{M_T}{GJ} dX = \int_0^{30} \frac{1650}{10 \times 10^6 \times 37^43} dX = 4'408 \times 10^{-4} [X]_0^{30}$$

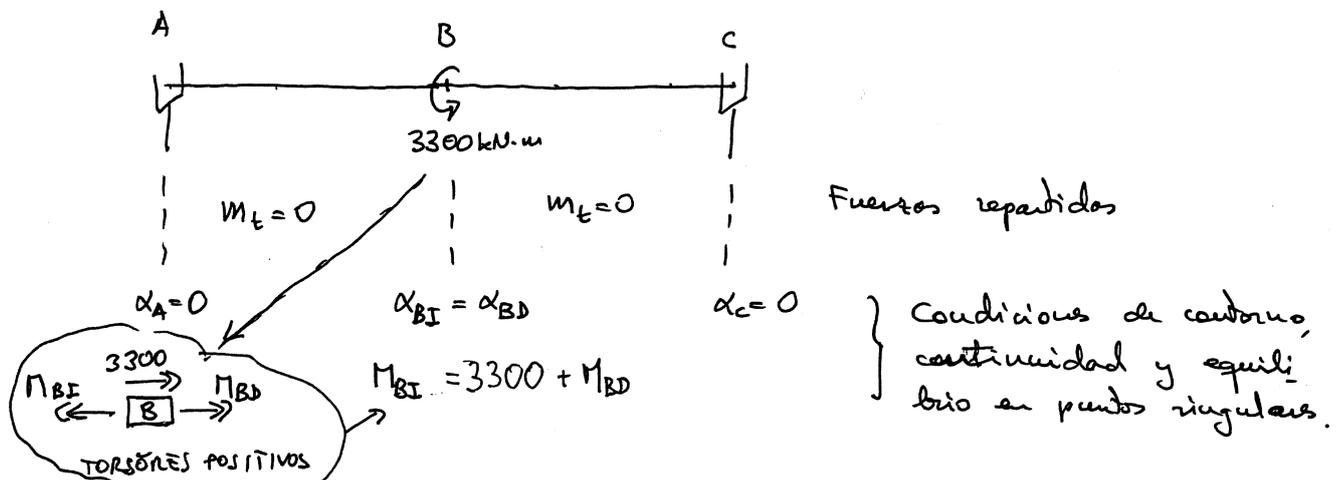
G en kPa

$$= 1'322 \times 10^{-4} \text{ rad.}$$

LEY DEFINITIVA DE TORSORES



Sin necesidad de adelantar el método de flexibilidad, este problema podría haberse resuelto mediante ecuaciones diferenciales.



$$\text{TRAMO AB} \quad \frac{d^2 \alpha}{dX^2} = - \frac{m_t}{GJ} = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha_I = aX + b$$

$$\text{TRAMO BC} \quad \frac{d^2 \alpha}{dX^2} = - \frac{m_t}{GJ} = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha_{II} = cX + d$$

$$\alpha_A = 0 \quad \Leftrightarrow \quad X=0, \quad \alpha_I = 0 \quad \Rightarrow \quad b = 0$$

$$\alpha_C = 0 \quad \Leftrightarrow \quad X=60, \quad \alpha_{II} = 0 \quad \Rightarrow \quad 60c + d = 0$$

$$\alpha_{BI} = \alpha_{BD} \quad \Leftrightarrow \quad X=30 \quad \alpha_I = \alpha_{II} \quad \Rightarrow \quad 30a = 30c + d$$

$$M_T = GJ \frac{d\alpha}{dX} \quad M_{T,I} = GJa \quad \text{,,} \quad M_{T,II} = GJc$$

$$M_{BI} = 3300 + M_{BD} \quad \Rightarrow \quad GJa = 3300 + GJc$$

$$\left. \begin{aligned} 60c + d &= 0 \\ 30a - 30c - d &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} d &= -60c \\ 30 \left(\frac{3300}{GJ} + c \right) - 30c + 60c &= 0 \end{aligned}$$

$$60c = - \frac{3300}{GJ} \times 30 \quad c = - \frac{1650}{GJ} \quad a = \frac{3300 - 1650}{GJ} = \frac{1650}{GJ}$$

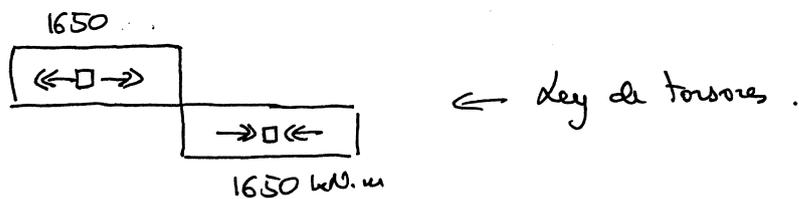
$$d = -60c = \frac{99000}{GJ}$$



$$\alpha_I = \frac{1650}{GJ} \bar{x} \quad \Rightarrow \quad 0 \leq \bar{x} \leq 30 \text{ m} \quad \leftarrow M_{T,I} = 1650 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$\alpha_{II} = -\frac{1650}{GJ} \bar{x} + \frac{99000}{GJ} \quad \Rightarrow \quad 30 \leq \bar{x} \leq 60 \text{ m}. \quad \leftarrow M_{T,II} = -1650 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$\alpha_B = \alpha_I(30) = \alpha_{II}(30) = \frac{1650 \times 30}{10 \times 10^6 \times 37.43} = 1.322 \times 10^{-4} \text{ rad.}$$



Aunque siempre es posible resolver mediante ecuaciones diferenciales, el procedimiento de flexibilidad es más práctico cuando la presencia de varios momentos puntuales obliga a dividir la viga en muchos tramos.



EJERCICIO Nº 56

INCLUYE APARTADOS RELATIVOS A TODOS LOS TEMAS DE DISTRIBUCIÓN DE TENSIONES EN LA SECCIÓN DE UNA VIGA: TENS. NORMALES, TENS. TANG. POR CORTANTES Y TENS. TANGENCIALES POR TORSIÓN

Cálculo de Estructuras I.

2º curso, Plan Integral de Estudios de Ingeniería Civil.

Examen final.
30 de Junio de 1999

Problema nº 1.

La figura P-1 representa la sección transversal de una viga de 15'0 m de longitud. Las cotas que figuran en ella vienen dadas en centímetros y se miden sobre la línea media de la pared, cuyo espesor es de 3'0 cm en todos los casos.

En ella se desea conocer:

- 1) La fibra neutra y las tensiones máxima y mínima originadas por un axil de 480 kN aplicado en el punto I de la sección. Como respuesta a este apartado, dibuje un croquis de la sección e indique sobre él
 - la fibra neutra acotando las distancias de los punto de corte con lo ejes al origen de coordenadas,
 - los puntos donde se alcanzan las tensiones máxima y mínima, y
 - el esquema de la distribución de tensiones normales.
- 2) La distribución de tensiones originadas por un cortante $Q_z = -684'68$ kN aplicado en el centro de esfuerzos cortantes de la sección. La respuesta deberá darse dibujando la distribución tensional sobre un croquis de la sección, e indicando en él los valores más característicos.
- 3) Las coordenadas del centro de esfuerzos cortantes.
- 4) La variación que sufriría la distribución tensional pedida en el punto 2) si la línea de acción del cortante $Q_z = -684'68$ kN se trasladase hasta la línea media del alma vertical —suponiendo que la sección responde en torsión pura—. Esquematice sobre un croquis de la sección las tensiones a añadir a las obtenidas en 2) por este motivo.

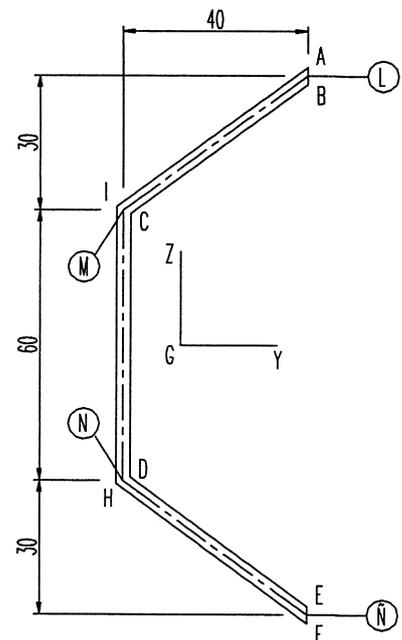


Figura P-1

Parámetros geométricos de la sección:

$$A = 480 \text{ cm}^2$$

$$I_y = 684.680 \text{ cm}^4$$

$$I_z = 85.262 \text{ cm}^4$$

Coordenadas de los vértices de la sección (las no indicados se deducen por la simetría respecto al eje Y)

Punto	Y (cm)	Z (cm)
A	27'51	61'86
B	27'51	58'13
C	-10'99	29'25
I	-13'99	30'75

Todas las tensiones se indicarán en unidades del S.I. —preferentemente, kPa o MPa—.

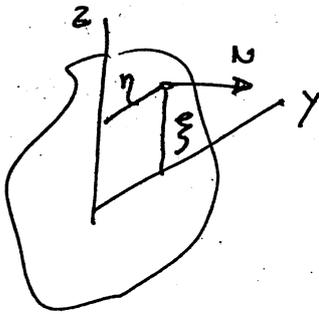
Tiempo: 1 hora.



13/35

PROBLEMA N° 1.

Determinación de los momentos



$$\text{Punto I} \rightarrow \begin{cases} \eta = -0'1399 \text{ m} \\ \xi = 0'3075 \text{ m} \end{cases}$$

$$M_y = \xi N = 0'3075 \times 480 = 147'6 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_z = -\eta N = -(-0'1399) \times 480 = 67'2 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

Tensiones normales

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M_y}{I_y} z - \frac{M_z}{I_z} y$$

$$\sigma_y = \frac{480}{480 \times 10^{-4}} + \frac{147'6}{684,680 \times 10^{-8}} z - \frac{67'2}{85,262 \times 10^{-8}} y$$

$$\sigma_y = 10.000 + 21.558 z - 78.816 y \quad \begin{matrix} \text{kPa, con } (y, z) \text{ en m.} \\ \text{KN/cm}^2, (y, z) \text{ en cm.} \end{matrix}$$

$$\text{F.N.} \rightarrow 10.000 + 21.558 z - 78.816 y = 0$$

$$y = 0$$

$$z = -0'464 \text{ m.}$$

$$z = 0$$

$$y = 0'127 \text{ m.}$$

} Punto de corte con los ejes.

Tensiones extremas

$$\sigma_r = 10.000 + 21.558 \times (-0'6186) - 78.816 \times (0'2751) = -25.018 \text{ kPa}$$

$$\sigma_I = 10.000 + 21.558 \times 0'3075 - 78.816 \times (-0'1399) = 27.655 \text{ kPa}$$

← Includido dibujo

N°

Apellidos y nombre

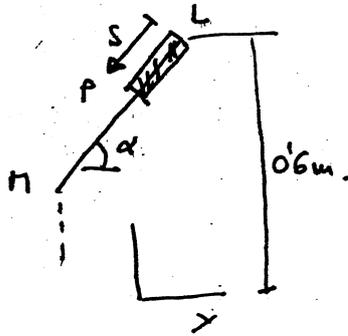
Firma

Fecha 205





2) Distribución τ debidos a $Q_z = -684'68 \text{ kN}$.



Tramo LM

$e = 0'03 \text{ m}$
 $\sin \alpha = 0'6$

$$\tau_e|_p = \tau_e|_L + \frac{Q_z B_y (L-p)}{I_y}$$

$$B_y (L-p) = s \cdot e \cdot (0'6 - \frac{s}{2} \sin \alpha)$$

$$= 0'018 s - 0'009 s^2 \text{ m}^3$$

$$\tau_e|_p = \frac{-684'68}{684680 \times 10^{-8}} (0'018 s - 0'009 s^2)$$

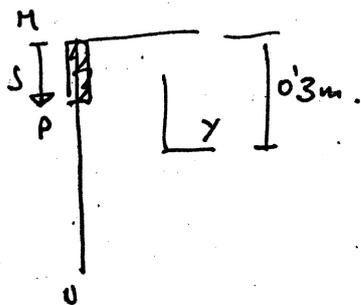
$$= -(1800 s - 900 s^2) \text{ kN/m}$$

$\tau_e|_L = 0$ $\tau = 0$

$s = 0'5 \text{ m} \rightarrow \tau_e|_n = -675 \text{ kN/m}$

$\tau_n = \frac{\tau_e}{e} = -22500 \text{ kPa}$

Tramo MN



$$B_y (M-p) = e \cdot s (0'3 - s/2)$$

$$= 0'009 s - 0'015 s^2$$

$$\tau_e|_p = \tau_e|_n + \frac{Q_z B_y (M-p)}{I_z}$$

$$= -675 - (900 s - 1500 s^2)$$

$\tau_e|_n = -675 \text{ kN/m}$

$\tau_n = -22500 \text{ kPa}$

$s = 0'3 \text{ m}$

$\tau_e|_a = -810 \text{ kN/m}$

$\tau_n = -27500 \text{ kPa}$

$s = 0'6 \text{ m}$

$\tau_e|_u = -675 \text{ kN/m}$

$\tau_n = -22500 \text{ kPa}$

Induso dibujo

Nº	Apellidos y nombre	Firma	Fecha 206
----	--------------------	-------	--------------



6'47

3) Centro de esfuerzos cortantes.

Utilizaremos los resultados anteriores para determinar el C.E.C.

Respecto a Q no dan momento ni R_{LH} ni R_{VH} .

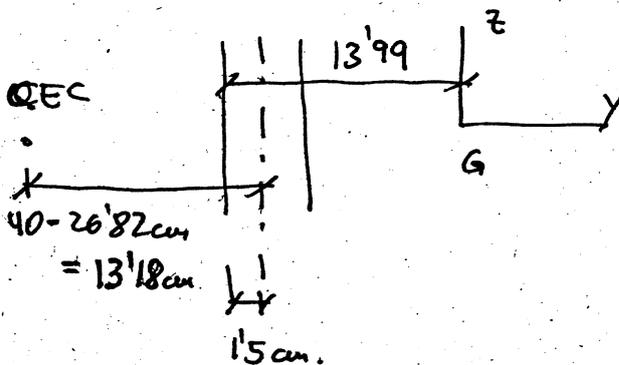
$$R_{Hw} = \int_0^{0'6} \tau_e ds$$

$$= \int_0^{0'6} \underbrace{(-675 - 900s + 1.500s^2)}_{\tau_e} ds$$

$$= [-675s - 450s^2 + 500s^3]_0^{0'6} = -459 \text{ kN.}$$

El signo - indica que va en el mismo sentido que coordenada s usada en el cálculo de τ_e , es decir, en el sentido indicado en el dibujo.

$$\begin{aligned} +) M_a(Q_z) &= 684'68 d \\ M_a(\tau) &= 459 \times 0'4 \end{aligned} \Rightarrow M_a(Q_z) = M_a(\tau) \Rightarrow d = 0'2682 \text{ m.}$$



$$\begin{aligned} Y_{CEC} &= -13'99 + 1'5 - 13'18 \\ &= -25'67 \end{aligned}$$

$$Y_{CEC} = -25'67 \text{ cm.}$$

$$Z_{CEC} = 0$$

Nº

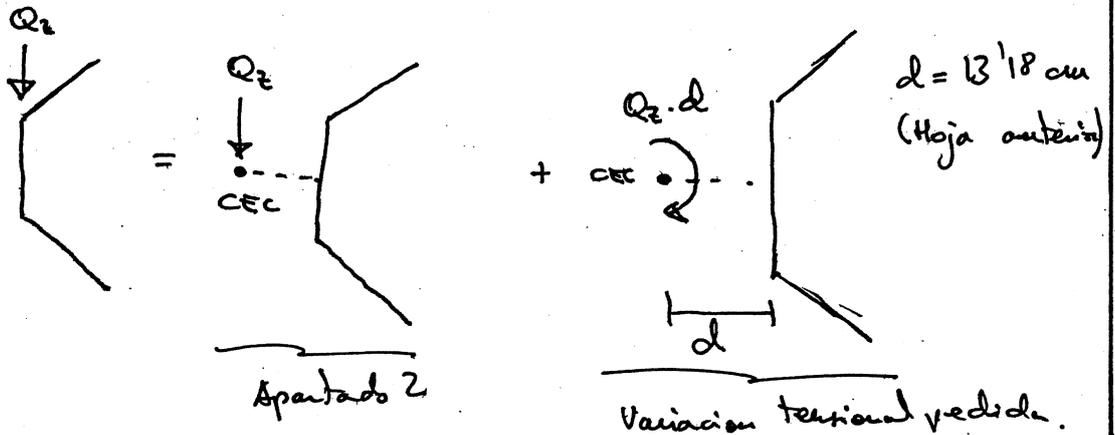
Apellidos y nombre

Firma

Fecha 207



17/01

4) Q_z actúa en el alma vertical.

Nos piden la distribución de tensiones originada por un torsor

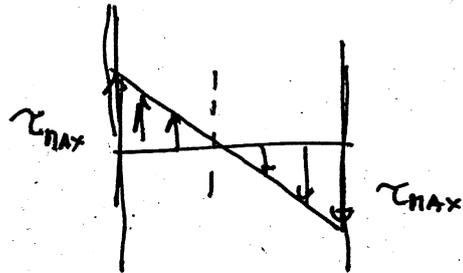
$$M_T = Q_z \cdot d = 684.68 \times 0.1318 = 90.272 \text{ kN}\cdot\text{m} \text{ en la sección.}$$

Sección abierta de pared delgada.

$$\text{Relación } \frac{e}{L} = \begin{cases} \frac{3}{60} = \frac{1}{20} \text{ alma vertical} \\ \frac{3}{50} = \frac{1}{16.7} \text{ lados inclinados.} \end{cases}$$

$$J = \sum \frac{L_i e_i^3}{3} = 2 \times \frac{0.5 \times 0.03^3}{3} + \frac{0.6 \times 0.03^3}{3} = 1.44 \times 10^{-5} \text{ m}^4$$

$$\tau_{\text{max}} = \frac{M_T}{J} e = \frac{90.272}{1.44 \times 10^{-5}} \times 0.03 = 188.067 \text{ kPa.}$$



Indice dibujo

Nº

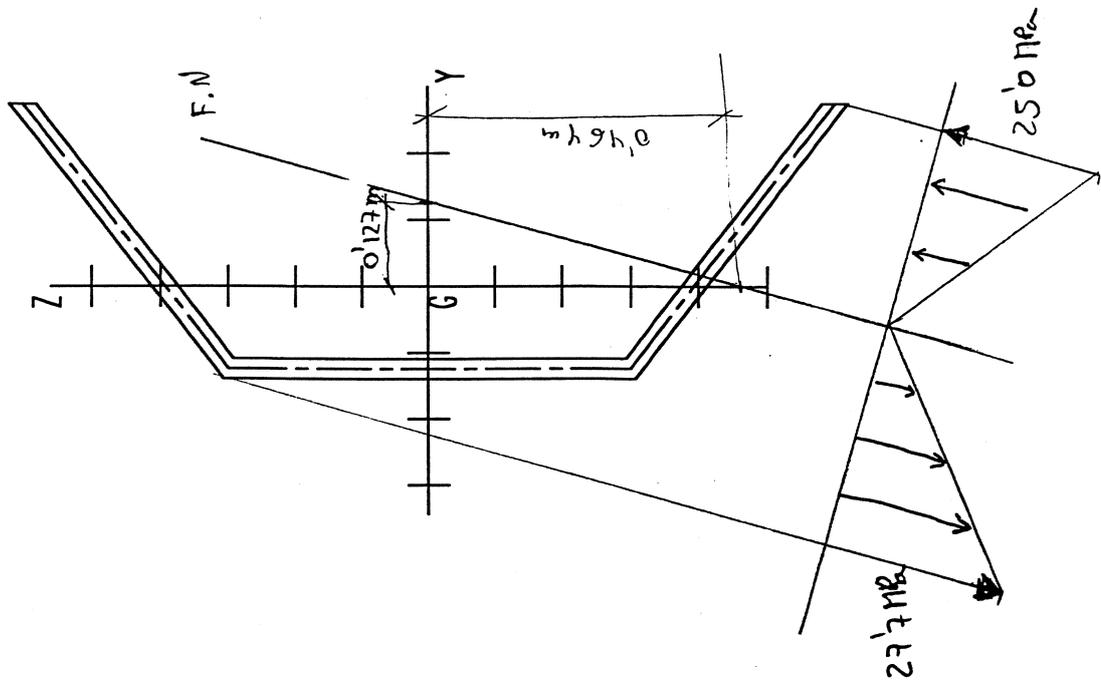
Apellidos y nombre

Firma

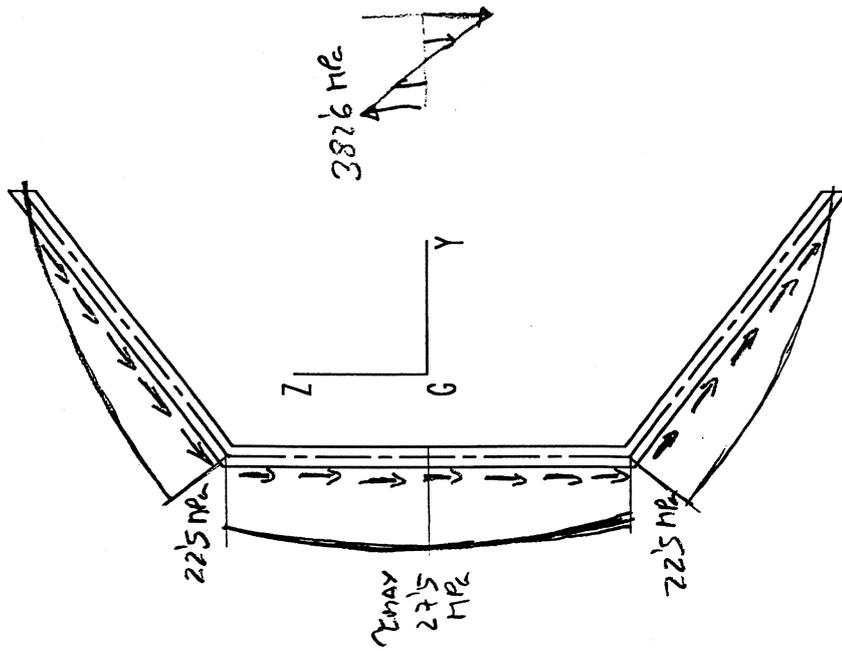
Fecha 208

Problema nº 1

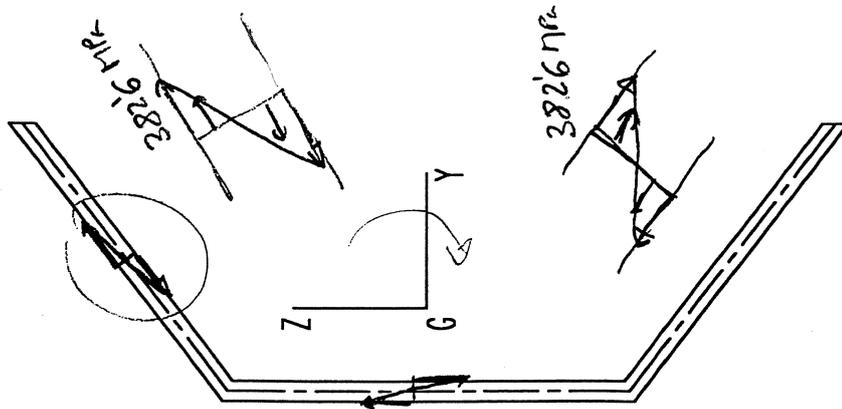
Apartado 1



Apartado 2



Apartado 4



Distribución válida solo en el entorno de los vértices.

Apellidos y nombre:

6/6

Solución homogénea del problema de la viga recta



EJERCICIO Nº 57

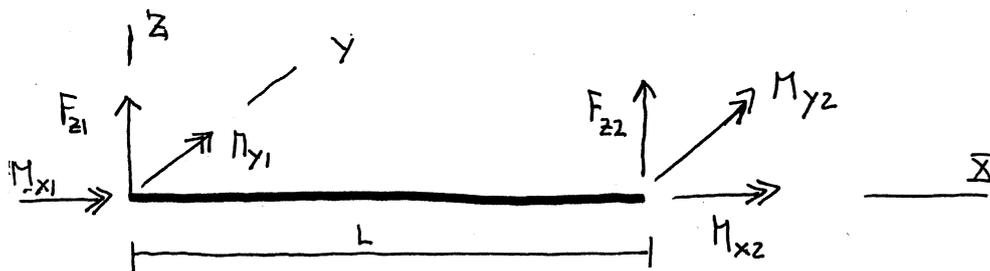
Sea una viga recta, de sección transversal constante, referida a un sistema cartesiano cuyos ejes X, Y y Z son, respectivamente, la directriz de la pieza y los principales de inercia de la sección inicial. Forma parte de un emparrillado, que es una estructura formada por una serie de vigas cuyas directrices están en el mismo plano y que está sometida exclusivamente a fuerzas perpendiculares a él. Esto implica que, en el sistema de referencia descrito, los esfuerzos y reacciones que sean fuerzas en dirección X o Y, o momentos de eje Z, son idénticamente nulos, al igual que los desplazamientos u y v, y el giro θ_z .

Para esta barra, considerando únicamente las fuerzas y desplazamientos no idénticamente nulos, se pide determinar:

- 1) la matriz de equilibrio,
- 2) la matriz de transferencia,
- 3) la matriz de deformación pura,
- 4) la matriz de rigidez a partir de la de transferencia y de la de deformación pura.

Para resolver este problema basta operar siguiendo los mismos pasos que en el tema 15 permitieron determinar las mismas matrices para una viga plana.

MATRIZ DE EQUILIBRIO.



$$\left. \begin{aligned} \sum F_z = 0 &\Rightarrow F_{z1} + F_{z2} = 0 \\ \sum M_x = 0 &\Rightarrow M_{x1} + M_{x2} = 0 \\ \sum M_y = 0 &\Rightarrow M_{y1} + M_{y2} - F_{z2}L = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} F_{z1} \\ M_{x1} \\ M_{y1} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -L & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_{z2} \\ M_{x2} \\ M_{y2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\{F_1\} + [H] \{F_2\} = \{0\}$$

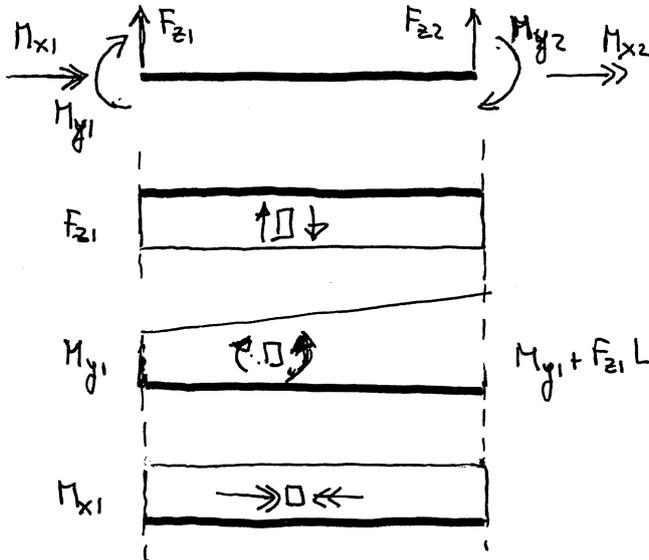
MATRIZ DE EQUILIBRIO

$$[H] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -L & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[H]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ L & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



MATRIZ DE TRANSFERENCIA.



$$w_2 = w_1 + \theta_{y1} L + \frac{1}{EI} M_{1-2}^{v,2}$$

$$= w_1 + \theta_{y1} L + \frac{1}{EI} \left\{ M_{y1} \cdot L \cdot \frac{L}{2} - \frac{1}{2} F_{z1} L \cdot L \cdot \frac{1}{3} L \right\}$$

$$= w_1 + \theta_{y1} L + \frac{M_{y1} L^2}{2EI} + \frac{F_{z1} L^3}{6EI}$$

$$\theta_{y2} = \theta_{y1} + \frac{1}{EI} A_{1-2}$$

$$= \theta_{y1} + \frac{1}{EI} \left[-\frac{M_{y1} + (M_{y1} + F_{z1} L)}{2} L \right]$$

$$= \theta_{y1} - \frac{M_{y1} L}{EI} - \frac{F_{z1} L^2}{2EI}$$

LEYES DE ESFUERZOS EN LA VIGA,
EN FUNCIÓN DE LAS FUERZAS DORSALES.

$$\theta_{x2} = \theta_{x1} + \int_0^L \frac{M_T}{GJ} dX = \theta_{x1} - \frac{M_{x1} \cdot L}{GJ}$$

$$\begin{Bmatrix} w_2 \\ \theta_{x2} \\ \theta_{y2} \\ F_{z2} \\ M_{x2} \\ M_{y2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & L & \frac{L^3}{6EI} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{L}{GJ} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{L^2}{2EI} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -L & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_1 \\ \theta_{x1} \\ \theta_{y1} \\ F_{z1} \\ M_{x1} \\ M_{y1} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \{d_2\} \\ \{F_2\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [H]^t & [G_{dF}] \\ [Z] & -[H]^{-1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{d_1\} \\ \{F_1\} \end{Bmatrix}$$

$$[G_{dF}] = \begin{bmatrix} \frac{L^3}{6EI} & 0 & \frac{L^2}{2EI} \\ 0 & -\frac{L}{GJ} & 0 \\ \frac{L^2}{2EI} & 0 & -\frac{L}{EI} \end{bmatrix}$$



MATRIZ DE RIGIDEZ (a partir de la de transferencia).

$$\{d_2\} = [H]^t \{d_1\} + [G_{df}] \{F_1\}$$

$$\Rightarrow \{F_1\} = [G_{df}]^{-1} [\{d_2\} - [H]^t \{d_1\}]$$

$$\{F_2\} = -[H^{-1}] \{F_1\} = -[H]^{-1} [G_{df}]^{-1} \{d_2\} + [H]^{-1} [G_{df}]^{-1} [H]^t \{d_1\}$$

$$\begin{Bmatrix} \{F_1\} \\ \{F_2\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -[G_{df}]^{-1} [H]^t & [G_{df}]^{-1} \\ [H]^{-1} [G_{df}]^{-1} [H]^t & -[H]^{-1} [G_{df}]^{-1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{d_1\} \\ \{d_2\} \end{Bmatrix}$$

↑ MATRIZ DE RIGIDEZ.

$$[G_{df}]^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{12EI}{L^3} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & -\frac{6J}{L} & 0 \\ \frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{2EI}{L} \end{bmatrix}$$

$$-[H]^{-1} [G_{df}]^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{L^3} & 0 & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6J}{L} & 0 \\ \frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix}$$

$$-[G_{df}]^{-1} [H]^t = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{L^3} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6J}{L} & 0 \\ -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix}$$

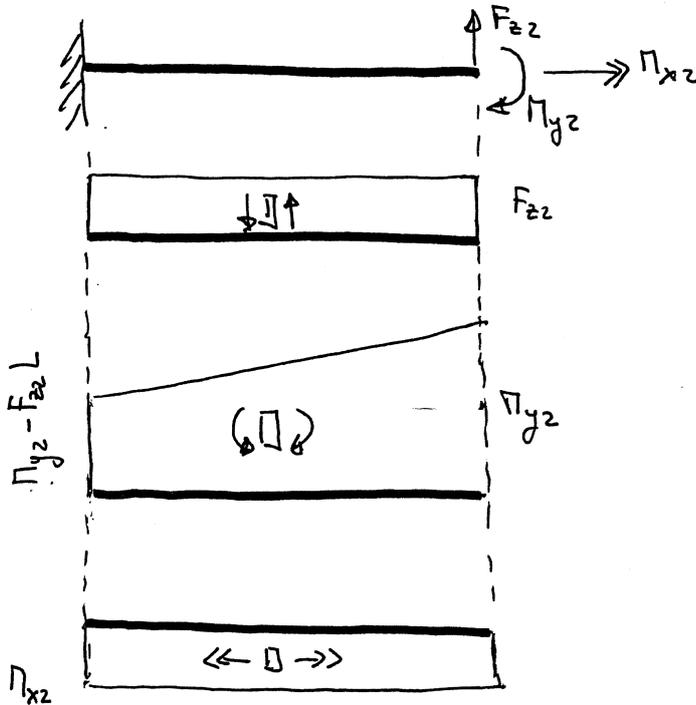
$$[H]^{-1} [G_{df}]^{-1} [H]^t = \begin{bmatrix} -\frac{12EI}{L^3} & 0 & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & -\frac{6J}{L} & 0 \\ -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{2EI}{L} \end{bmatrix}$$

luego

$$[k] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} \frac{12EI}{L^3} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & -\frac{12EI}{L^3} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6J}{L} & 0 & 0 & -\frac{6J}{L} & 0 \\ -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{4EI}{L} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{2EI}{L} \\ \hline -\frac{12EI}{L^3} & 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} & 0 & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & -\frac{6J}{L} & 0 & 0 & \frac{6J}{L} & 0 \\ -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{2EI}{L} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{4EI}{L} \end{array} \right]$$



MATRIZ DE DEFORMACIÓN PURA



$$\theta_{x2} = \theta_{x1} + \int_0^L \frac{\pi_x}{GJ} dX = 0 + \frac{\pi_{x2} L}{GJ}$$

$$\begin{aligned} \theta_{y2} &= \theta_{y1} + \frac{1}{EI} \int_0^L M_{1-2} dX = 0 + \frac{1}{EI} \cdot \frac{\pi_{y2} + \pi_{y2} - F_{22}L}{2} L \\ &= \frac{\pi_{y2} L}{EI} - \frac{F_{22} L^2}{2EI} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w_2 &= w_1 + \theta_{y1} L + \frac{1}{EI} \int_0^L \int_0^X M_{1-2} dX dx \\ &= 0 + 0 + \frac{1}{EI} \left[-\pi_{y2} \cdot L \cdot \frac{L}{2} + \frac{1}{2} F_{22} L \cdot L \cdot \frac{2}{3} L \right] \\ &= -\frac{\pi_{y2} L^2}{2EI} + \frac{F_{22} L^3}{3EI} \end{aligned}$$

$$\begin{Bmatrix} w_2 \\ \theta_{x2} \\ \theta_{y2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{L^3}{3EI} & 0 & -\frac{L^2}{2EI} \\ 0 & \frac{L}{GJ} & 0 \\ -\frac{L^2}{2EI} & 0 & \frac{L}{EI} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_{22} \\ \pi_{x2} \\ \pi_{y2} \end{Bmatrix}$$

$$\leftarrow \{d_2\} = [S] \{F_2\}$$

MATRIZ DE DEFORMACIÓN PURA

MATRIZ DE RIGIDEZ (a partir de la deformación pura)

$$\begin{Bmatrix} \{F_1\} \\ \{F_2\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [k_{11}] & [k_{12}] \\ [k_{12}]^t & [k_{22}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{d_1\} \\ \{d_2\} \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \left. \begin{aligned} \{F_1\} &= [k_{11}] \{d_1\} + [k_{12}] \{d_2\} \\ \{F_2\} &= [k_{12}]^t \{d_1\} + [k_{22}] \{d_2\} \end{aligned} \right\} \textcircled{1}$$



Particularizando la segunda de las expresiones anteriores al caso de la mienbra considerada para determinar la matriz de deformación para $d_1 = 0$ que $\{d_1\} = \{0\}$ - obtenemos

$$\{F_2\} = [k_{22}] \{d_2\}$$

que comparada con

$$\{d_2\} = [S] \{F_2\}$$

conduce a

$$[k_{22}] = [S]^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{L^3} & 0 & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{GJ}{L} & 0 \\ \frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{2EI}{L} \end{bmatrix}$$

Por otra parte, sustituyendo la segunda ecuación (1) en $\{F_1\} + [H] \{F_2\} = \{0\}$ se obtiene

$$\{F_2\} = -[H] \left([k_{12}]^t \{d_1\} + [k_{22}] \{d_2\} \right) = -[H] [k_{12}]^t \{d_1\} - [H] [k_{22}] \{d_2\}$$

que, comparada con la primera ecuación (1), conduce a

$$[k_{11}] = -[H] [k_{12}]^t \quad [k_{12}] = -[H] [k_{22}]$$

$$[k_{12}] = -[H] [k_{22}] = \begin{bmatrix} -\frac{12EI}{L^3} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & -\frac{GJ}{L} & 0 \\ \frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{2EI}{L} \end{bmatrix} \quad [k_{11}] = -[H] [k_{12}]^t = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{L^3} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{GJ}{L} & 0 \\ -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{2EI}{L} \end{bmatrix}$$

Naturalmente, se obtiene de nuevo la matriz escrita en la página 3.

EJERCICIO n° 58

CÁLCULO DE ESTRUCTURAS I.
2° curso Plan Integral de Estudios de Ingeniería Civil.

SEGUNDO EXAMEN PARCIAL.
10 de Junio de 1999.

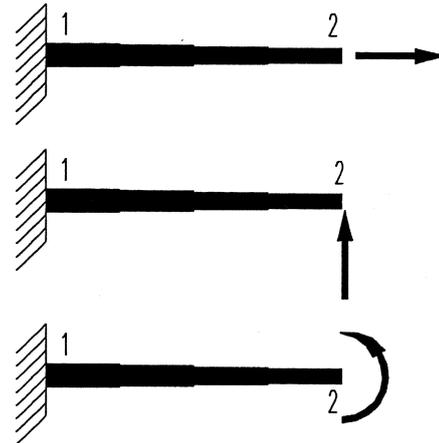
Cuestión n° 3.

Una estructura, que trata de analizarse como pórtico plano, incluye varias barras de inercia variable, iguales entre sí. Se pretende determinar experimentalmente su matriz de rigidez.

Para ello, se empotra una de ellas por su extremo 1 y se aplican en su extremo 2, sucesivamente, las siguientes sollicitaciones:

- 1.- Una fuerza de un kilonewton, que actúa según i ($F = i$ kN.).
- 2.- Una fuerza de un kilonewton, que actúa según j ($F = j$ kN.).
- 3.- Un momento de un kilonewton por metro, que actúa según k ($M = k$ kN·m.).

Estas cargas están referidas a un sistema cartesiano con origen de coordenadas en el punto 1, cuyo eje X coincide con la directriz de la pieza y crece de 1 hacia 2, y los ejes Y y Z forman con él un sistema dextrógiro. En la figura, Y crece hacia arriba y Z hacia fuera del papel.



Los desplazamientos del nudo 2 en cada uno de los tres casos de carga resultan ser los siguientes:

Caso de carga	Sollicitación	u_2 (m)	v_2 (m)	θ_2 (rad)
1	$F = 1i$ kN	$0'3966 \times 10^{-5}$	0	0
2	$F = 1j$ kN.	0	$0'2638 \times 10^{-2}$	$0'470 \times 10^{-3}$
3	$M = 1k$ kN·m	0	$0'470 \times 10^{-3}$	$0'1312 \times 10^{-3}$

La longitud de estas barras es de 10 m.

Se pide:

- 1.- La matriz de flexibilidad por deformación pura de la barra, que define los desplazamientos en el nudo 2 de una ménsula como la de la figura originados por una sollicitación $\{F_{x2}, F_{y2}, M_2\}$ cualquiera aplicada en el propio nudo 2.
- 2.- El bloque $\{K_{22}\}$ de la matriz de rigidez de la barra, que define las fuerzas que deben aplicarse en 2 para producir en él unos desplazamientos $\{u_2, v_2, \theta_2\}$ determinados.
- 3.- La matriz de equilibrio de la barra.
- 4.- El bloque $\{K_{12}\}$ de la matriz de rigidez de la barra.
- 5.- El bloque $\{K_{21}\}$ de la matriz de rigidez de la barra.
- 6.- El bloque $\{K_{11}\}$ de la matriz de rigidez de la barra.

Tiempo estimado: 30 min.



CUESTIÓN Nº 3

1) Matriz de flexibilidad por deformación pura



No piden la matriz $[S]$ que define la relación $\{d\}_2 = [S] \{f\}_2$ en la malla representada, siendo

$$\{d_i\} = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ \theta_i \end{Bmatrix} \quad \{f_i\} = \begin{Bmatrix} f_{xi} \\ f_{yi} \\ m_i \end{Bmatrix}$$

Sustituyendo en $\{d\}_2 = [S] \{f\}_2$ los resultados de los ensayos descritos en el enunciado tenemos

Ensayo 1

$$\begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0,3966 \times 10^{-5} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = [S] \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} S_{11} \\ S_{21} \\ S_{31} \end{Bmatrix}$$

Ensayo 2

$$\begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0,2638 \times 10^{-2} \\ 0,4700 \times 10^{-3} \end{Bmatrix} = [S] \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} S_{12} \\ S_{22} \\ S_{32} \end{Bmatrix}$$

Ensayo 3

$$\begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0,4700 \times 10^{-3} \\ 0,1312 \times 10^{-3} \end{Bmatrix} = [S] \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} S_{13} \\ S_{23} \\ S_{33} \end{Bmatrix}$$

luego

$$[S] = \begin{bmatrix} 0,3966 \times 10^{-5} & 0 & 0 \\ 0 & 0,2638 \times 10^{-2} & 0,4700 \times 10^{-3} \\ 0 & 0,4700 \times 10^{-3} & 0,1312 \times 10^{-3} \end{bmatrix}$$

Nº

Apellidos y nombre

Firma

Fecha

219



2) Bloque K_{22} de la matriz de rigidez.

Relación ^{general} de rigidez $\rightarrow \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{Bmatrix} \quad \text{--- (1)}$

En una viga como la dibujada en la hoja 1, $d_1 = 0$ y esta ecuación se reduce a $f_1 = K_{12} d_2$ y $f_2 = K_{22} d_2$.

$$\left. \begin{array}{l} f_1 = K_{12} d_2 \\ d_2 = S f_2 \end{array} \right\} \Rightarrow K_{22} = S^{-1}$$

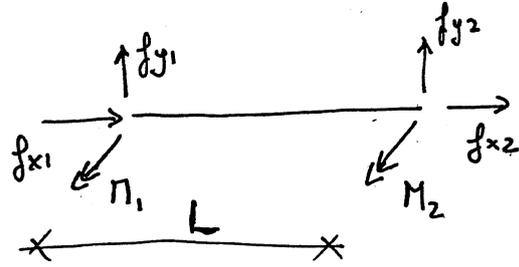
$$[K_{22}] = \begin{bmatrix} \frac{1}{0'3966 \times 10^{-5}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{0'1312 \times 10^{-3}}{B} & -\frac{0'4700 \times 10^{-3}}{B} \\ 0 & -\frac{0'4700 \times 10^{-3}}{B} & \frac{0'2638 \times 10^{-3}}{B} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2'512 \times 10^5 & 0 & 0 \\ 0 & 1'048 \times 10^3 & -3'754 \times 10^3 \\ 0 & -3'754 \times 10^3 & 2'107 \times 10^3 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{vmatrix} 0'2638 \times 10^{-2} & 0'4700 \times 10^{-3} \\ 0'4700 \times 10^{-3} & 0'1312 \times 10^{-3} \end{vmatrix} = 1'2520 \times 10^{-7}$$

3) Matriz de equilibrio

$$H / \underbrace{f_1 + H f_2 = 0}_{(2)}$$



Ecuaciones de equilibrio:

$$\left. \begin{aligned} f_{x1} + f_{x2} &= 0 \\ f_{y1} + f_{y2} &= 0 \\ N_1 + N_2 + f_{y2} \cdot L &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{Bmatrix} f_{x1} \\ f_{y1} \\ N_1 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & L & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f_{x2} \\ f_{y2} \\ N_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

luego $[H] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & L & 1 \end{bmatrix}$

4) Bloque $[K]_{12}$ de la matriz de rigidez.

De (1) tenemos que

$$f_1 = [K]_{11} d_1 + [K]_{12} d_2$$

$$f_2 = [K]_{21} d_1 + [K]_{22} d_2$$

Sustituyendo la segunda de estas relaciones en (2) obtenemos

$$f_1 + H ([K]_{21} d_1 + [K]_{22} d_2) = 0$$

$$\Rightarrow f_1 = -H [K]_{21} d_1 - H [K]_{22} d_2 \quad \left. \begin{array}{l} [K]_{11} = -H [K]_{21} \\ [K]_{12} = -H [K]_{22} \end{array} \right\}$$

$$f_1 = [K]_{11} d_1 + [K]_{12} d_2$$



$$[K_{12}] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -10 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 252100 & 0 & 0 \\ 0 & 1048 & -3754 \\ 0 & -3754 & 2107 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -252100 & 0 & 0 \\ 0 & -1048 & 3754 \\ 0 & -6726 & 16470 \end{bmatrix}$$

5) Bloque $[K_{21}]$ de la matriz de rigidez.

$$[K_{21}] = [K_{12}]^t \Rightarrow [K_{21}] = \begin{bmatrix} -252100 & 0 & 0 \\ 0 & -1048 & -6726 \\ 0 & 3754 & 16470 \end{bmatrix}$$

6) Bloque $[K_{11}]$ de la matriz de rigidez.

Hemos hallado hace un momento que $[K_{11}] = -I [K_{21}]$, luego

$$[K_{11}] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -10 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -252100 & 0 & 0 \\ 0 & -1048 & -6726 \\ 0 & 3754 & 16470 \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} 252100 & 0 & 0 \\ 0 & 1048 & 6726 \\ 0 & 6726 & 50390 \end{bmatrix}$$

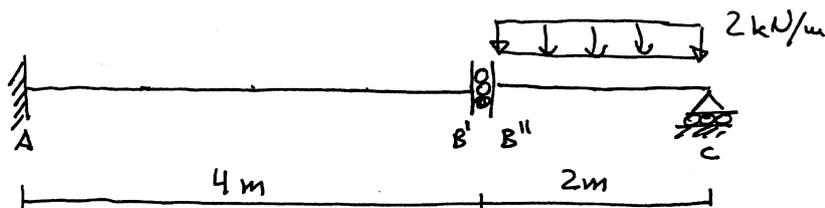
Capítulo 3

Estructuras de Barras

**El método de flexibilidad:
aplicación a estructuras isostáticas.**

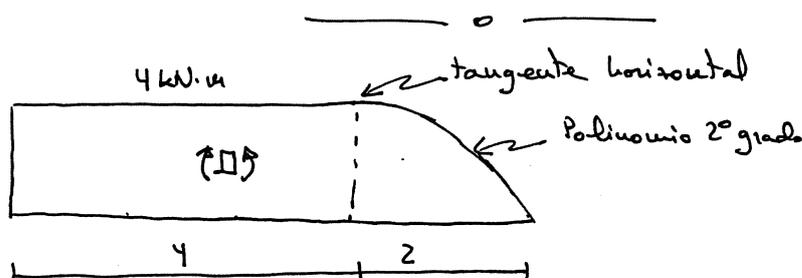
EJERCICIO Nº 59

DIBUJAR LA DEFORMADA DE LA VIGA INDICADA, ACOTANDO LOS DESPLAZAMIENTOS Y GIROS MÁS CARACTERÍSTICOS, ASÍ COMO LOS PUNTOS DE INFLEXIÓN, SI LOS HAY.



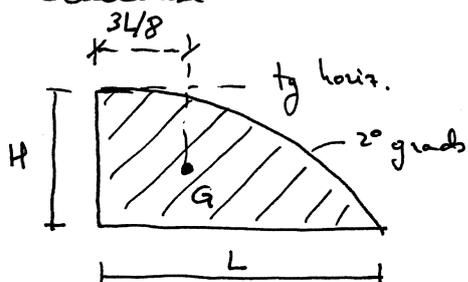
$$EI = 10 \text{ MN}\cdot\text{m}^2$$

(LAS LEYES DE ESFUERZOS SE DETERMINARON EN EL EJERCICIO Nº 28)



ley de flectores calculada en el ejercicio 28.

Recuérdese



$$A = \frac{2}{3} HL.$$

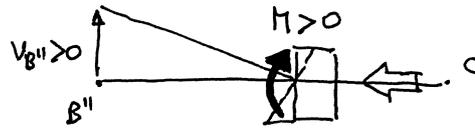
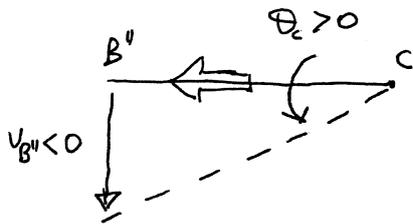
$$EI = 10 \text{ MN}\cdot\text{m}^2 = 10^4 \text{ kN}\cdot\text{m}^2$$

$$\theta_{B'} = \theta_A + \frac{1}{EI} \mathcal{A}_{AB'} = 0 + \frac{1}{10^4 \text{ kN}\cdot\text{m}^2} \{ 4 \text{ kN}\cdot\text{m} \times 4 \text{ m} \} = 16 \times 10^{-4} \text{ rad}$$

$$V_{B'} = V_A + \theta_A L_{AB'} + \frac{1}{EI} \mathcal{M}_{AB'}^{V, B'} = 0 + 0 + \frac{1}{10^4} \{ 4 \times 4 \times 2 \} = 32 \times 10^{-4} \text{ m} = 32 \text{ mm}$$

$$\theta_{B''} = \theta_{B'}$$

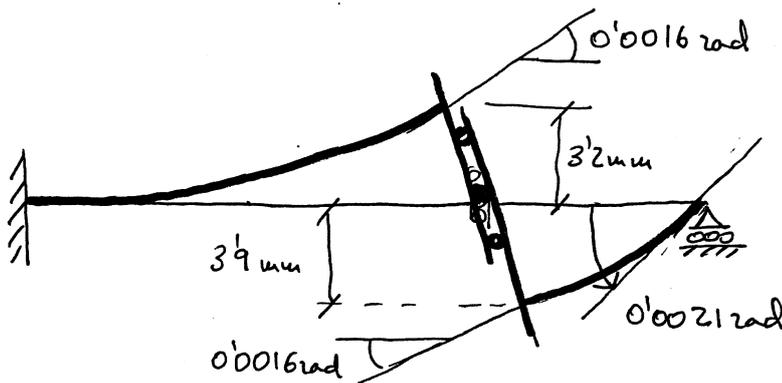
$$\theta_C = \theta_{B''} + \frac{1}{EI} \mathcal{A}_{B''C} = 16 \times 10^{-4} + \frac{1}{10^4} \left\{ \frac{2}{3} \cdot 4 \times 2 \right\} = \frac{64}{3} \times 10^{-4} \text{ rad} = 21.33 \times 10^{-4} \text{ rad}$$



Seguimos de los remandos del 2º teorema de Mohr,
si avanzamos de C hacia B''.

$$V_{B''} = V_C - \theta_c \cdot L_{CB''} \quad \theta_{CB''} = 0 - \frac{64}{3} \times 10^{-4} \times 2 + \frac{1}{10^4} \left\{ \frac{2}{3} \times 4 \times 2 \times \frac{3}{8} \times 2 \right\}$$

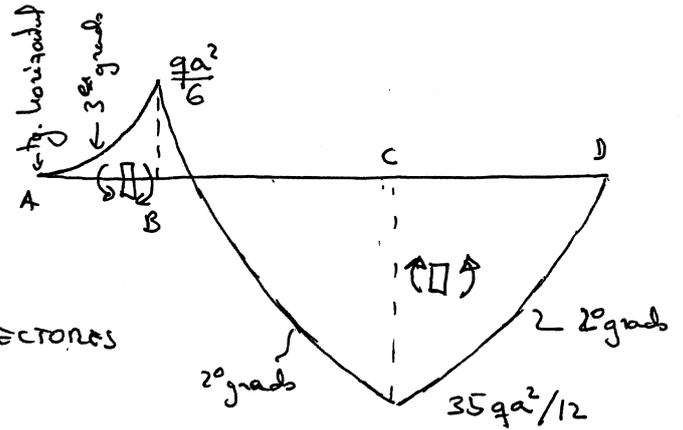
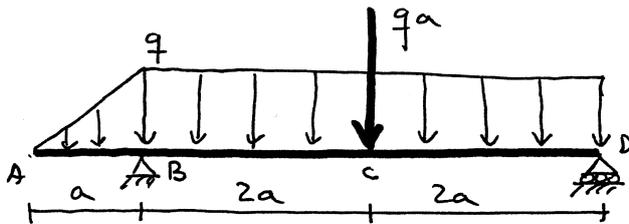
$$= 10^{-4} \left\{ -\frac{128}{3} + 4 \right\} = 10^{-4} \times \left(-\frac{116}{3} \right) = -38'67 \times 10^{-4} \text{ m} = -3'9 \text{ mm}.$$





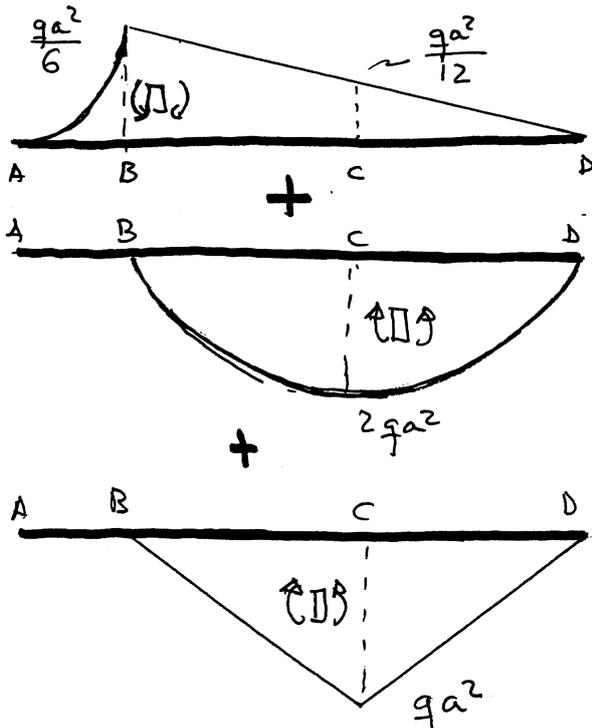
ESERCICIO N° 60

DIBUJAR A ESTIMA LA DEFORMADA DE LA VIGA DEL EJERCICIO N° 29, ACOTANDO LOS DESPLAZAMIENTOS Y GIROS DE LOS PUNTOS MÁS REPRESENTATIVOS.



ESQUEMA DE LA VIGA Y LEY DE FLECTORES OBTENIDA EN EL EJERCICIO N° 29.

La ley de flectores dada no permite usar directamente relaciones geométricas para hallar áreas y momentos estáticos, pero sí que es posible hacerlo utilizando las leyes parciales halladas en la segunda hoja de dicho ejercicio, cuya superposición conduce a la anterior.



TRAMO AB \rightarrow 3° grado
tg. horiz. en A.

TRAMO BD \rightarrow lineal.

TRAMO BD \rightarrow 2° grado

CÁLCULO DEL GIRO EN B.

$$\begin{aligned}
 v_D &= v_B + \theta_B \cdot d(B,D) + \frac{1}{EI} \mathcal{M}_{BD}^{v,D} \\
 &= 0 + 4a\theta_B + \frac{1}{EI} \left\{ -\frac{1}{2} \frac{qa^2}{6} \cdot 4a \cdot \frac{2}{3} 4a + \frac{2}{3} 2qa^2 \cdot 4a \cdot 2a + \frac{1}{2} qa^2 \cdot 4a \cdot 2a \right\} \\
 &= 4a\theta_B + \frac{1}{EI} \left\{ -\frac{16qa^4}{18} + \frac{32qa^4}{3} + 4qa^4 \right\} = 2a\theta_B + \frac{qa^4}{EI} \left\{ \frac{-16+192+72}{18} \right\} \\
 &= 4a\theta_B + \frac{248qa^4}{18EI} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\theta_B = -\frac{31qa^3}{9EI}}
 \end{aligned}$$

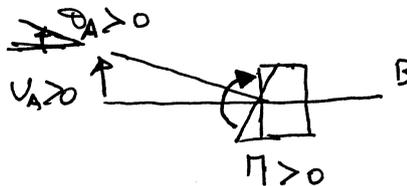
CÁLCULO DEL GIRO EN D Y LA FLECHA EN C.

$$\begin{aligned}
 \theta_D &= \theta_B + \mathcal{M}_{BD} = -\frac{31qa^3}{9EI} + \frac{1}{EI} \left\{ -\frac{1}{2} \frac{qa^2}{6} 4a + \frac{2}{3} 2qa^2 \cdot 4a + \frac{1}{2} qa^2 \cdot 4a \right\} \\
 &= -\frac{31qa^3}{9EI} + \frac{qa^3}{EI} \left\{ -\frac{1}{3} + \frac{16}{3} + 2 \right\} = \frac{qa^3}{9EI} (-31 - 3 + 48 + 18) = \frac{32qa^3}{9EI}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 v_C &= v_B + \theta_B d(B,C) + \frac{1}{EI} \mathcal{M}_{Bc}^{v,C} \\
 &= 0 - \frac{31qa^3}{9EI} 2a + \frac{1}{EI} \left\{ -\frac{qa^2}{12} \cdot 2a \cdot a - \frac{1}{2} \frac{qa^2}{12} 2a \cdot \frac{2}{3} 2a + \frac{2}{3} 2qa^2 \cdot 2a \cdot \frac{3}{8} 2a \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{2} qa^2 \cdot 2a \cdot \frac{1}{3} 2a \right\} = -\frac{62qa^4}{9EI} + \frac{qa^4}{EI} \left\{ -\frac{1}{6} - \frac{1}{9} + 2 + \frac{2}{3} \right\} \\
 &= -\frac{qa^4}{18EI} \left\{ -124 - 3 - 2 + 36 + 12 \right\} = -\frac{81qa^4}{18EI} = -\frac{9qa^4}{2EI}
 \end{aligned}$$

CÁLCULO DEL GIRO Y LA FLECHA EN A.

Signos (yendo de B a A)



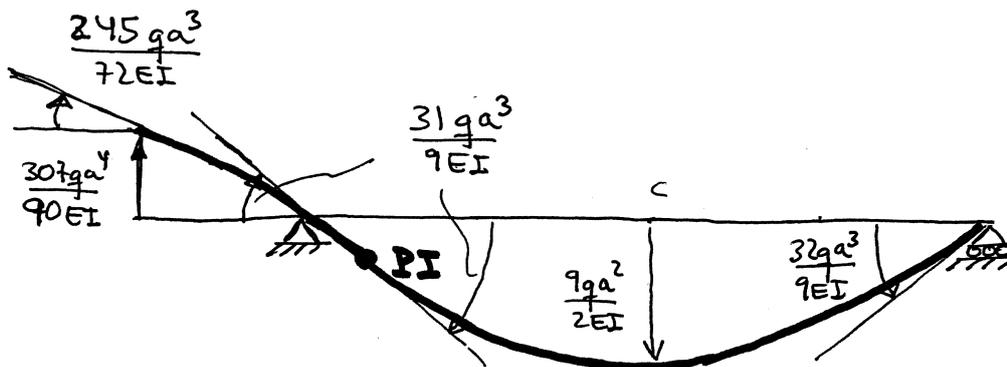
Recorreremos a la integración para calcular áreas y momentos estáticos en el tramo AB, en el que la ley de flexores es de 3º grado

$$\begin{aligned}
 \frac{q}{a} t \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Diagrama de un triángulo de altura } \frac{q}{a}t \text{ y base } t \\ \text{con una fuerza } M \text{ aplicada en la base} \end{array} \right. \quad M + \frac{1}{2} \frac{q}{a} t \cdot t \cdot \frac{1}{3} t = 0 \quad \Rightarrow \quad M = -\frac{qt^3}{6a}
 \end{aligned}$$



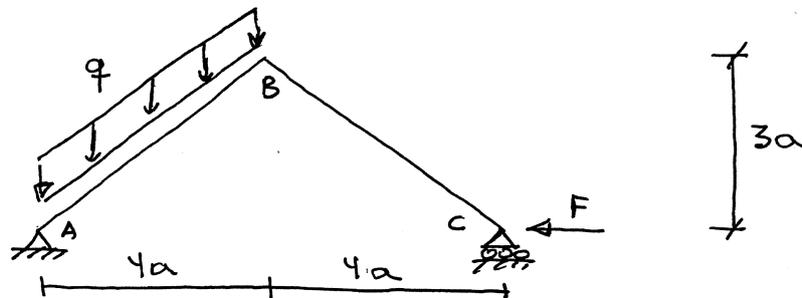
$$\begin{aligned}\theta_A &= \theta_B - \frac{1}{EI} \int_{B-A} M_{B-A} = -\frac{31qa^3}{9EI} - \frac{1}{EI} \int_0^a \left(-\frac{qt^3}{6a}\right) dt = -\frac{31qa^3}{9EI} + \frac{q}{60EI} \left[\frac{t^4}{4}\right]_0^a \\ &= -\frac{31qa^3}{9EI} + \frac{qa^3}{24EI} = \frac{qa^3}{72EI} (-248 + 3) = -\frac{245qa^3}{72EI}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}V_A &= V_B - \theta_B d(B-A) + \frac{1}{EI} \int_{B-A} M_{B-A}^{V,A} = 0 - \left(-\frac{31qa^3}{9EI}\right) \cdot a + \frac{1}{EI} \int_0^a \left(-\frac{qt^3}{6a}\right) t dt \\ &= \frac{31qa^4}{9EI} - \frac{q}{6EIa} \left[\frac{t^5}{5}\right]_0^a = \frac{31qa^4}{9EI} - \frac{qa^4}{30EI} = \frac{qa^4}{90EI} [310 - 3] = \frac{307qa^4}{90EI}\end{aligned}$$



P.I. → PUNTO DE INFLEXIÓN.

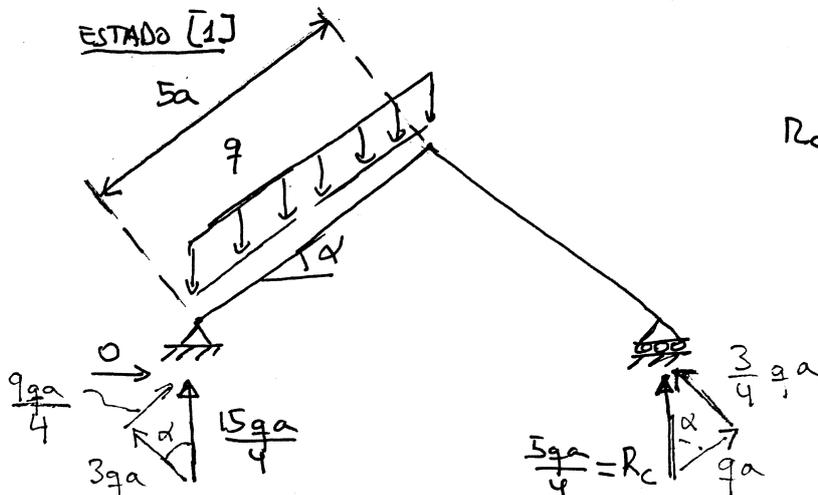
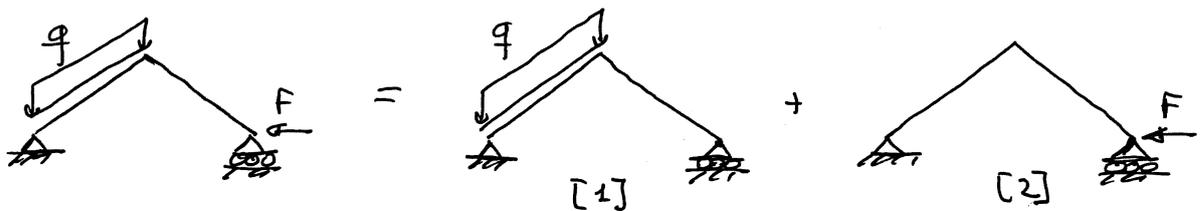
EJERCICIO N° 61.



¿CUANTO DEBE VALER LA FUERZA F PARA QUE EL DESPLAZAMIENTO HORIZONTAL DE C SEA NULO?

HALLAR LAS LEYES DE ESFUERZOS Y DIBUJAR A ESTIMA LA DEFORMADA - ACOTANDO SUS PUNTOS MÁS CARACTERÍSTICOS - PARA ESTE VALOR DE F.

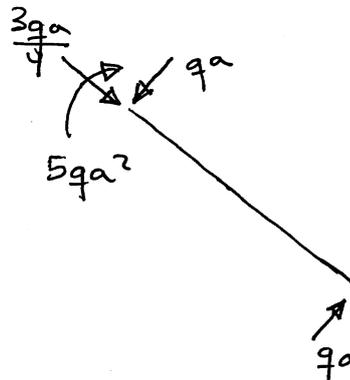
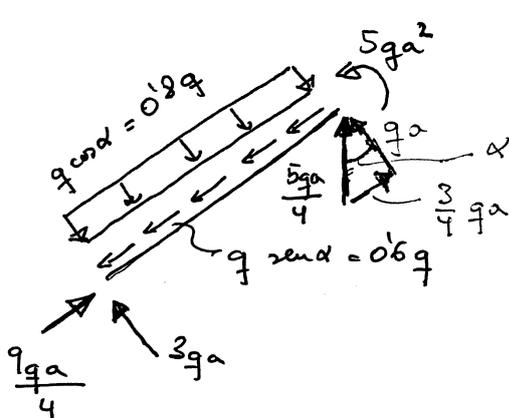
Apoyándonos en el teorema de superposición, descompondremos el problema en suma de dos más sencillos, cuyas leyes de esfuerzos particulares también lo serán.



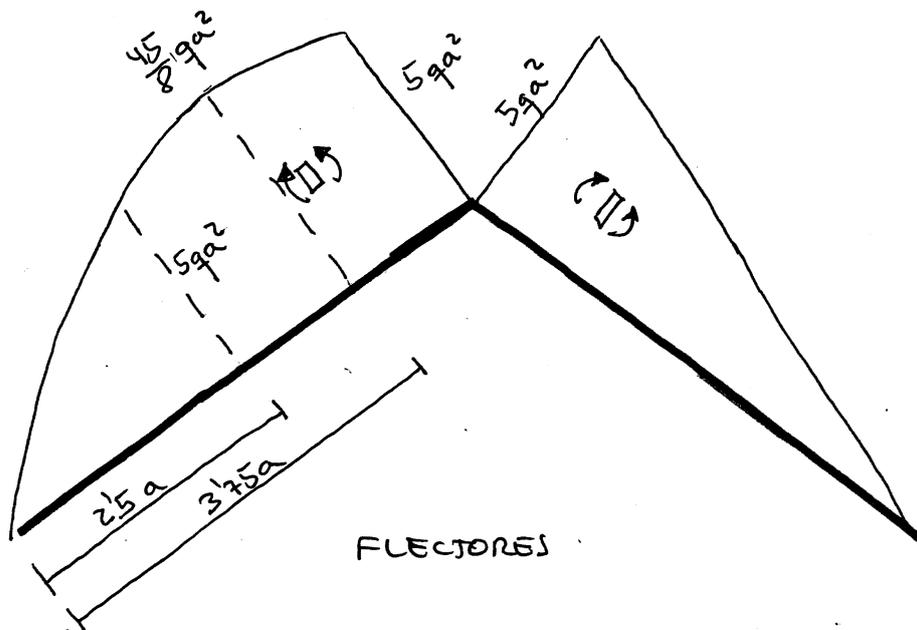
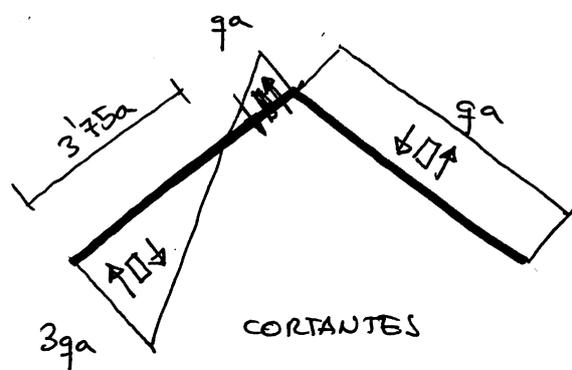
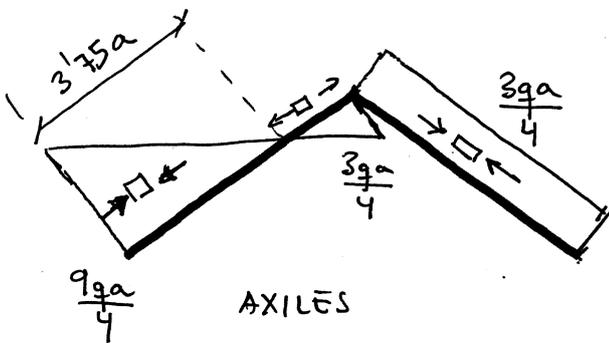
$$R_c = \frac{5ga \cdot 2a}{8a} = \frac{5}{4}ga$$

$$\cos \alpha = 0'8$$

$$\sin \alpha = 0'6$$

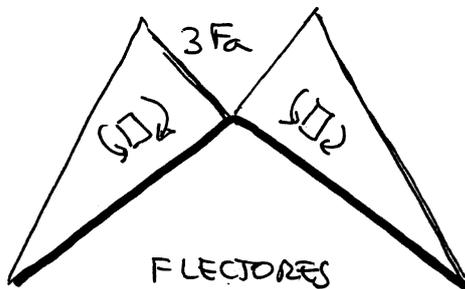
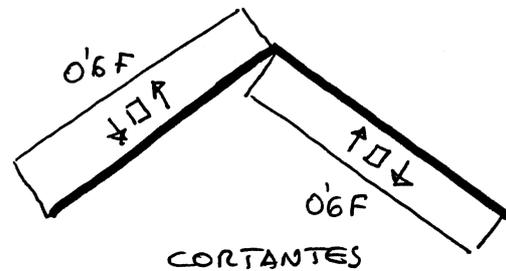
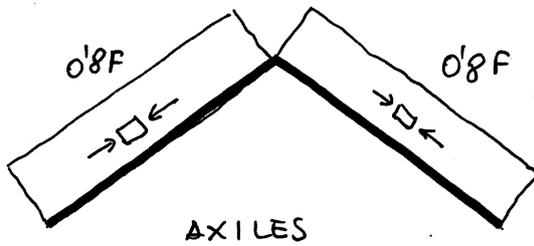
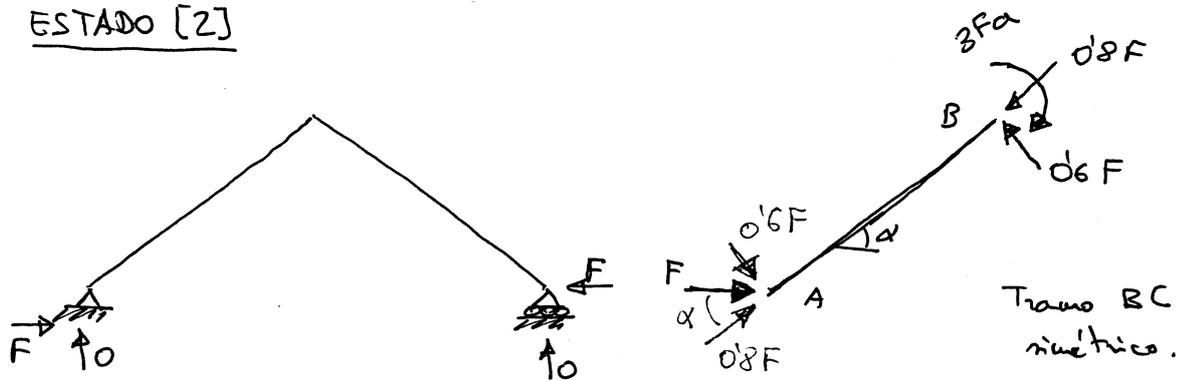


No hay ningún error en las fuerzas transmitidas en el punto B. En cada barra, están descritos puntos en las direcciones tangente y normal, que no son las mismas en AB y en BC.





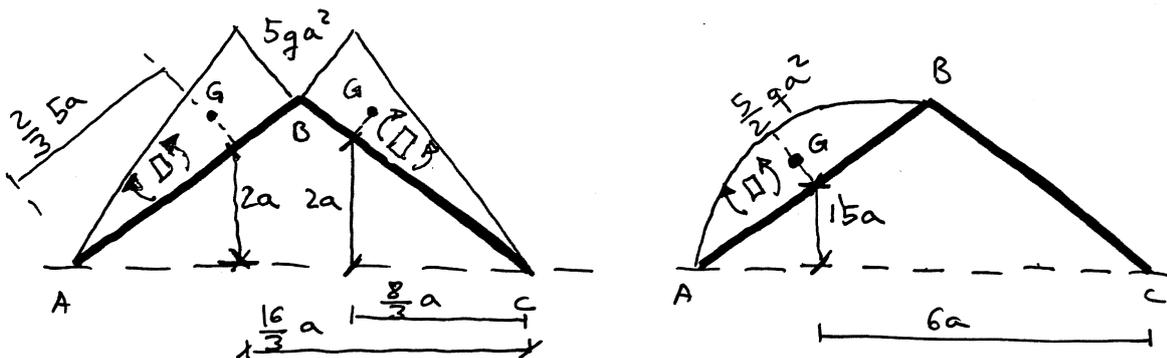
ESTADO [2]



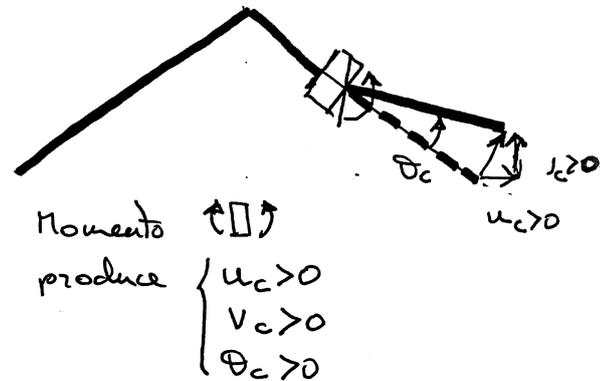
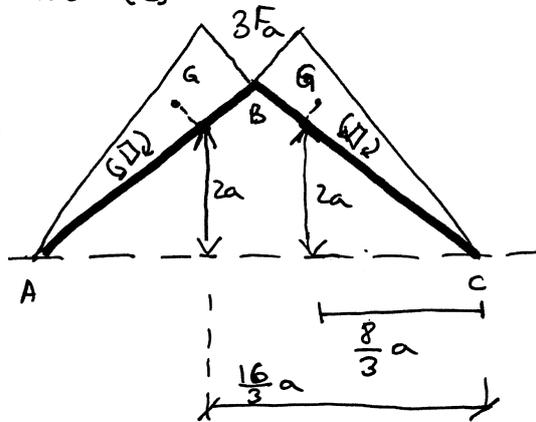
CÁLCULO DE u_c (En función de F)

Comenzaremos indicando los esquemas de las leyes de flectores con todos los parámetros necesarios para aplicar los teor. de Mohr acotados.

ESTADO [1]



ESTADO (2)



Cálculo del giro en A.

$$\begin{aligned}
 V_c = 0 &= \cancel{V_A} + \theta_A \cdot 8a + \frac{1}{EI} M_{Ac}^{V,c} \\
 &= 8a\theta_A + \frac{1}{EI} \left\{ \frac{1}{2} 5qa^2 \cdot 5a \cdot \frac{16}{3}a + \frac{1}{2} 5qa^2 \cdot 5a \cdot \frac{8}{3}a + \frac{2}{3} \frac{5}{2} qa^2 \cdot 5a \cdot 6a \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{2} 3Fa \cdot 5a \cdot \frac{16}{3}a - \frac{1}{2} 3Fa \cdot 5a \cdot \frac{8}{3}a \right\} \\
 &= 8a\theta_A + \frac{1}{EI} \left\{ \frac{25}{2} qa^4 \left(\frac{16}{3} + \frac{8}{3} \right) + 50 qa^4 - \frac{15}{2} Fa^3 \left(\frac{16}{3} + \frac{8}{3} \right) \right\} \\
 &\quad \quad \quad = 24/3 = 8 \\
 &= 8a\theta_A + \frac{1}{EI} \left\{ 150 qa^4 - 60 Fa^3 \right\} = 0 \\
 \theta_A &= \frac{15Fa^3}{2EI} - \frac{75qa^4}{4EI}
 \end{aligned}$$

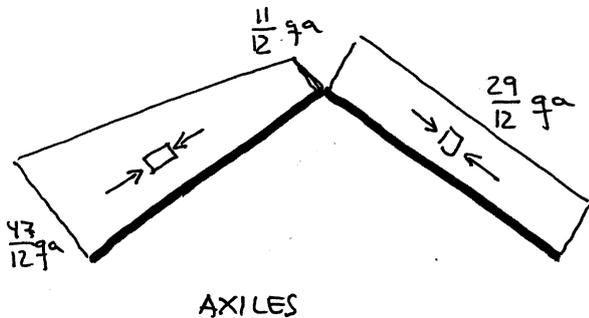
 ¡ NO HACÍA FALTA θ_A !

$$\begin{aligned}
 u_c &= \cancel{u_A} + \cancel{\theta_A} \cdot 0 + \frac{1}{EI} \left\{ \frac{1}{2} 5qa^2 \cdot 5a \cdot 2a + \frac{1}{2} 5qa^2 \cdot 5a \cdot 2a + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{2}{3} \frac{5}{2} qa^2 \cdot 5a \cdot \frac{3}{2}a - \frac{1}{2} 3Fa \cdot 5a \cdot 2a - \frac{1}{2} 3Fa \cdot 5a \cdot 2a \right\} \\
 &= \frac{1}{EI} \left\{ 50 qa^4 + \frac{25}{2} qa^4 - 30 Fa^3 \right\} = \frac{1}{EI} \left\{ \frac{125}{2} qa^4 - 30 Fa^3 \right\}
 \end{aligned}$$

$$u_c = 0 \Rightarrow \frac{125}{2} qa^4 = 30 Fa^3 \quad \boxed{F = \frac{125}{60} qa}$$

LEYES DE ESFUERZOS DEFINITIVAS.

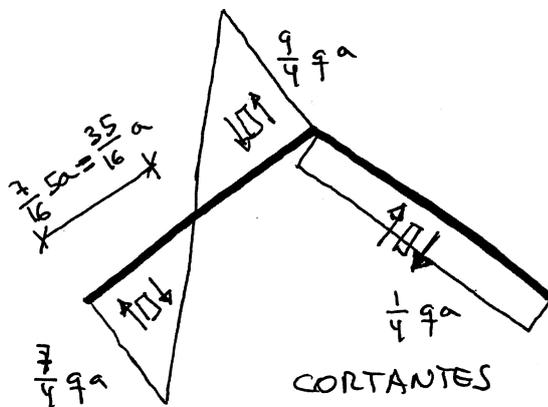
Se obtienen sumando las anteriores después de sustituir F por su valor.



$$N_A = -\frac{9qa}{4} - 0,8 \frac{125}{60} qa = -\left(\frac{9}{4} + \frac{25}{15}\right) qa = -\frac{47}{12} qa$$

$$N_B = \frac{3qa}{4} - 0,8 \frac{125}{60} qa = \dots = -\frac{11}{12} qa$$

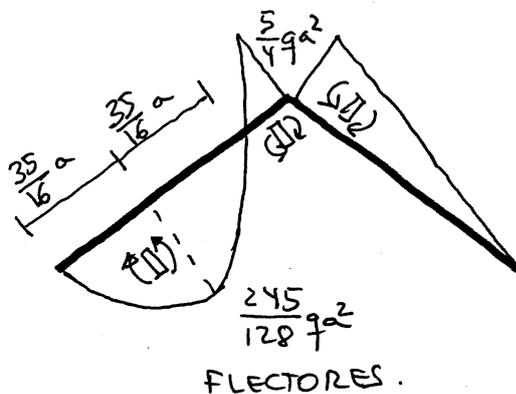
$$N_C = N_B = -\frac{3qa}{4} - 0,8 \frac{125}{60} qa = \dots = \frac{29}{12} qa$$



$$Q_A = -3qa + 0,6 \frac{125}{60} qa = \dots = -\frac{7}{4} qa$$

$$Q_B = qa + 0,6 \frac{125}{60} qa = \dots = \frac{9}{4} qa$$

$$Q_B = Q_C = qa - 0,6 \frac{125}{60} qa = \dots = -\frac{1}{4} qa$$



$$M_B = +5qa^2 - 3 \frac{125}{60} qa^2 = \dots = -\frac{5}{4} qa^2$$

$$M_{max} = \frac{7}{4} qa \cdot \frac{35}{16} a - 0,8q \left(\frac{35}{16} a\right)^2 \cdot \frac{1}{2}$$

$$= \dots = \frac{245}{128} qa^2$$

DIBUJO DE LA DEFORMADA A ESTIMA.

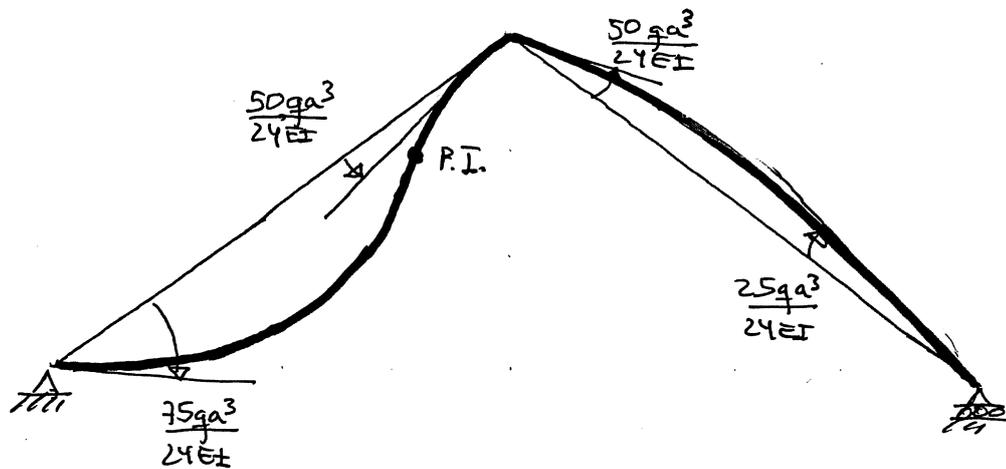
Comenzaremos hallando los giros de los vértices y los desplazamientos de B.

$$\theta_A = \frac{15Fa^2}{2EI} - \frac{75qa^3}{4EI} = \frac{15 \times 125qa^3}{120EI} - \frac{75qa^3}{4EI} = -\frac{25}{8} \frac{qa^3}{EI}$$

$$\begin{aligned}\theta_B &= \theta_A + \frac{1}{EI} \int_{AB} M_{AB} = -\frac{25qa^3}{8EI} + \frac{1}{EI} \left\{ \frac{1}{2} 5qa^2 \cdot 5a + \frac{2}{3} \frac{5}{2} qa^2 \cdot 5a - \frac{1}{2} 3 \frac{125}{60} qa^2 \cdot 5a \right\} \\ &= \frac{qa^3}{EI} \left\{ -\frac{25}{8} + \frac{25}{2} + \frac{25}{3} - \frac{125}{8} \right\} = \frac{50qa^3}{24EI}\end{aligned}$$

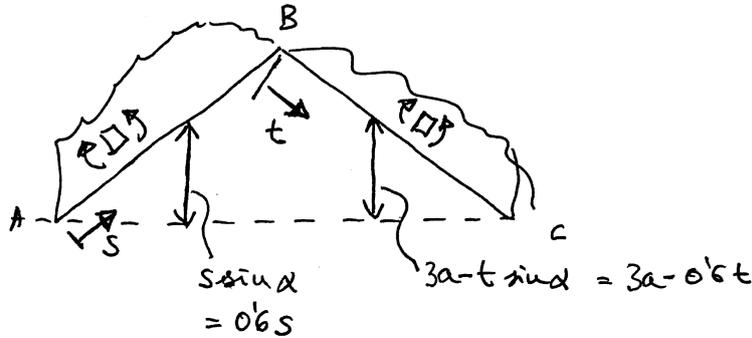
$$\begin{aligned}\theta_C &= \theta_B + \frac{1}{EI} \int_{BC} M_{BC} = \frac{50qa^3}{24EI} + \frac{1}{EI} \left\{ \frac{1}{2} 5qa^2 \cdot 5a - \frac{1}{2} 3 \frac{125}{60} qa^2 \cdot 5a \right\} \\ &= \frac{qa^3}{EI} \left\{ \frac{50}{24} + \frac{25}{2} - \frac{125}{8} \right\} = -\frac{25qa^3}{24EI}\end{aligned}$$

Como estamos despreciando las deformaciones por axil, los desplazamientos de B en las direcciones AB y BC deben ser nulos, y en consecuencia B no puede moverse.



PLANTEAMIENTO ALTERNATIVO DEL CÁLCULO DE u_c , MEDIANTE INTEGRALES.

VARIABLES DE INTEGRACIÓN Y SIGNOS



A partir de los esquemas de la página 2 deducimos

$$M_{AB, [s]} = 3qa \cdot s - 0.8q \cdot \frac{s^2}{2} = 3qas - 0.4qs^2$$

$$M_{BC, [t]} = 5qa^2 - qat$$

y, a partir de los de la página 3,

$$M_{AB, [s]} = -0.6Fs$$

$$M_{BC, [t]} = -3Fa + 0.6Ft$$

Usando estas funciones, el momento estático que aparece en los teor. de Politz - pag. 4 - queda:

$$\begin{aligned} M_{Ac}^{H,C} &= \int_0^{5a} (3qas - 0.4qs^2) 0.6s \, ds + \int_0^{5a} (5qa^2 - qat)(3a - 0.6t) \, dt \\ &+ \int_0^{5a} (-0.6Fs) \cdot 0.6s \, ds + \int_0^{5a} (-3Fa + 0.6Ft)(3a - 0.6t) \, dt \\ &= \int_0^{5a} [1.8qas^2 - 0.24qs^3] \, ds + \int_0^{5a} [15qa^3 - 6qa^2t + 0.6qat^2] \, dt \\ &+ \int_0^{5a} [-0.36Fs^2] \, ds + \int_0^{5a} [-9Fa^2 + 3.6Fat - 0.36Ft^2] \, dt \\ &= [0.6qas^3 - 0.06qs^4]_0^{5a} + [15qa^3t - 3qa^2t^2 + 0.2qat^3]_0^{5a} \\ &+ [-0.12Fs^3]_0^{5a} + [-9Fa^2t + 1.8Fat^2 - 0.12Ft^3]_0^{5a} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} M_{AC}^{H,C} &= qa^4 [0'6 \times 125 - 0'08 \times 625 + 15 \times 5 - 3 \times 25 + 0'2 \times 125] \\ &\quad + Fa^3 [-0'12 \times 125 - 9 \times 5 + 1'8 \times 25 - 0'12 \times 125] \\ &= 62'5 qa^4 - 30 Fa^3 \end{aligned}$$

$$u_c = \frac{u_A}{0} + \frac{\theta_A}{0} + \frac{1}{EI} M_{AC}^{H,C} = \frac{1}{EI} \{ 62'5 qa^4 - 30 Fa^3 \}$$

Naturalmente, el resultado coincide con el obtenido en la página 4.

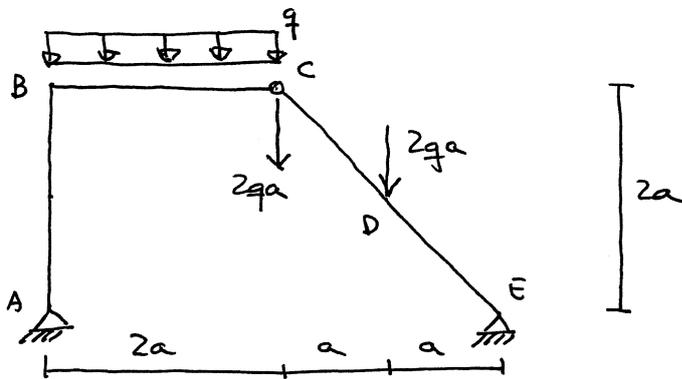
El cálculo mediante integrales, en general, resulta más laborioso en los tramos en que la ley es constante o lineal. Cuando la ley es parabólica posiblemente resulte más corto que descomponerla en dos leyes lineales y una parabólica con máximo en el centro. Si la ley de flectores es de grado superior o igual a 3, o no es polinómica en el tramo considerado, la integración es el único camino posible. Observe el lector que siempre puede calcular los tramos más sencillos mediante resultados de geometría elemental y los más complicados por integración.



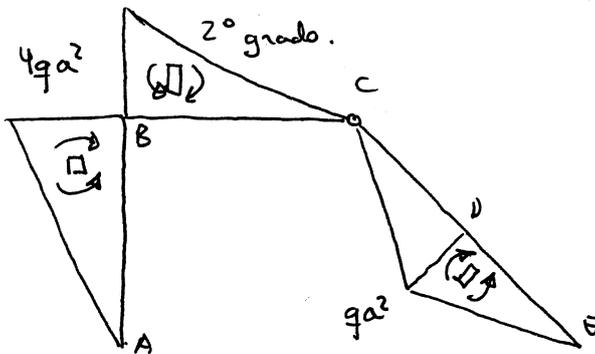
EJERCICIO Nº 62

DIBUJAR A ESTIMA LA DEFORMADA DE LA ESTRUCTURA DEL EJERCICIO Nº 31, ACOTANDO LOS DESPLAZAMIENTOS Y GIROS DE LOS PUNTOS MÁS REPRESENTATIVOS.

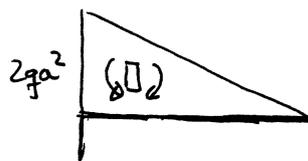
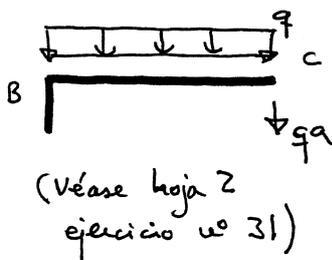
ESTRUCTURA Y CARGAS



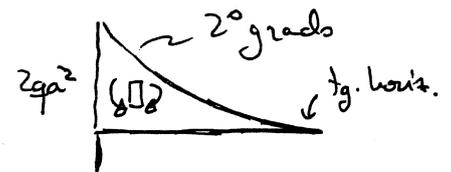
LEY DE FLECTORES



DESCOMPOSICIÓN DE LA LEY EN EL TRAMO BC

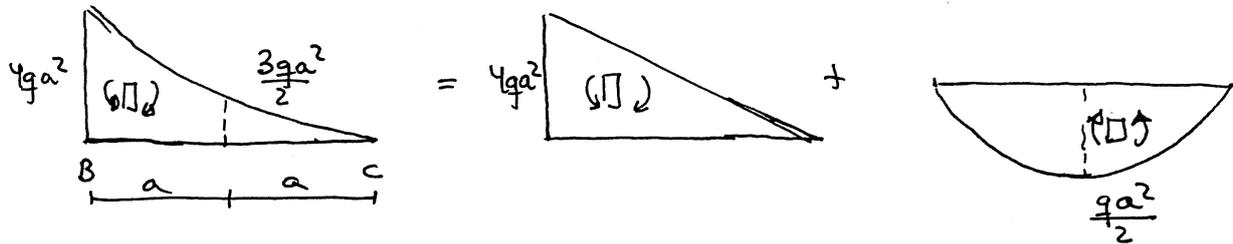


Flectores debidos a la carga puntual qa en C



Flectores debidos a la carga repartida

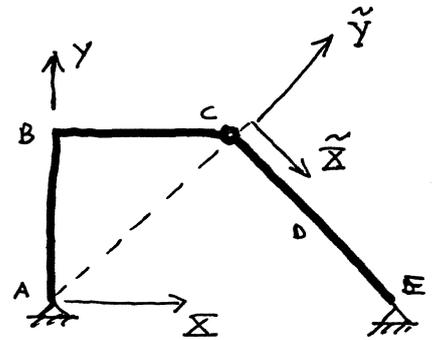
OTRA DESCOMPOSICIÓN POSIBLE DE LA LEY DE FLECTORES EN BC.



REALIZAREMOS LOS CÁLCULOS CON LA PRIMERA DESCOMPOSICIÓN, AUNQUE TAMBIÉN SERÍA VÁLIDO USAR LA SEGUNDA.

DETERMINACIÓN DE LOS DESPLAZAMIENTOS

Si conociésemos el giro de un punto en el tramo ABC y el de otro en el CDE, los términos de Γ_{01} nos permitirían calcular fácilmente todos los desplazamientos y giros necesarios. Por ello, comenzaremos determinando el giro en A y el giro en E. Para hacerlo, calcularemos los desplazamientos de C a partir

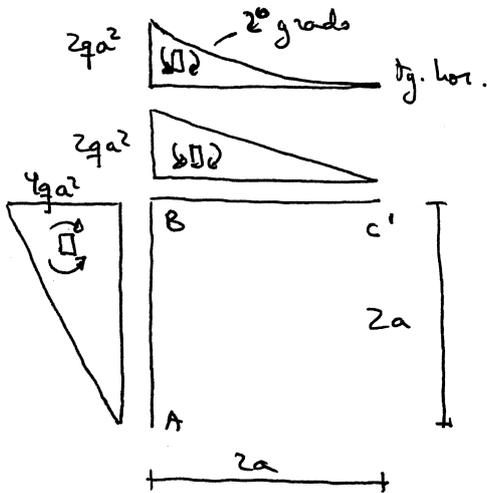


de A y a partir de E y los igualaremos. Nótese que, a partir de A, lo más cómodo es expresarlos en los ejes X e Y , y que, a partir de E, es hacerlo en \tilde{X} \tilde{Y} . Además, como despreciamos las deformaciones debidas al axil frente a las debidas al flector, $\tilde{u}_C = 0$. Todo ello nos sugiere la siguiente secuencia de operaciones a realizar:

- 1) En el tramo ABC calculamos u_C y v_C en función de θ_A . (C' representa al punto C cuando se considera formando parte del tramo ABC.)
- 2) Combinando u_C y v_C hallamos \tilde{u}_C y \tilde{v}_C .
- 3) En el tramo CE calculamos \tilde{v}_C'' . $\tilde{u}_C'' = 0$. (C'' representa al punto C cuando se considera formando parte del tramo CDE.)
- 4) De $\tilde{u}_C = \tilde{u}_C'' = 0$ despejamos θ_A .
- 5) Sustituyendo θ_A en la expresión \tilde{v}_C' obtenemos este desplazamiento.
- 6) De $\tilde{v}_C = \tilde{v}_C''$ despejamos θ_E .



1) Cálculo de $u_{c'}$ y $v_{c'}$



$H_{c'}$ → horizontal que pesa por c'
 $V_{c'}$ → vertical " " " c'

$$u_{c'} = u_A - \theta_A d(A, H_{c'}) + \frac{1}{EI} \mathcal{M}_{Ac'}^{H_{c'}}$$

$$= 0 - 2a\theta_A + \frac{1}{EI} \left\{ \frac{1}{2} 4qa^2 \cdot 2a \cdot \frac{1}{3} 2a \right\}$$

$$= -2a\theta_A + \frac{8qa^4}{3EI}$$

$$v_{c'} = v_A + \theta_A d(A, V_{c'}) - \frac{1}{EI} \mathcal{M}_{Ac'}^{V_{c'}}$$

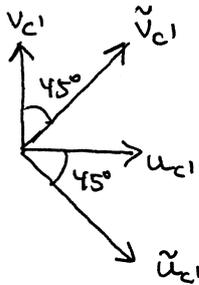
$$= 0 + 2a\theta_A - \frac{1}{EI} \left\{ \frac{1}{2} 4qa^2 \cdot 2a \cdot 2a \right.$$

$$\left. + \frac{1}{3} 2qa^2 \cdot 2a \cdot \frac{3}{4} 2a + \frac{1}{2} 2qa^2 \cdot 2a \cdot \frac{2}{3} 2a \right\}$$

$$= 2a\theta_A - \frac{9a^4}{EI} \left\{ 8 + 2 + \frac{8}{3} \right\}$$

$$= 2a\theta_A - \frac{38qa^4}{3EI}$$

2) Determinación de $\tilde{u}_{c'}$ y $\tilde{v}_{c'}$



$$\tilde{v}_{c'} = u_{c'} \cos 45 + v_{c'} \cos 45$$

$$\tilde{u}_{c'} = u_{c'} \cos 45 - v_{c'} \sin 45$$

Con esto ya podemos imponer la condición $\tilde{u}_{c'} = 0$ para despejar θ_A (paso 4 de la relación anterior).

$$\tilde{u}_{c'} = 0 \Rightarrow u_{c'} - v_{c'} = 0 \Rightarrow -2a\theta_A + \frac{8qa^4}{3EI} = 2a\theta_A - \frac{38qa^4}{3EI}$$

$$4a\theta_A = \frac{46qa^4}{3EI} \Rightarrow \theta_A = \frac{23qa^3}{6EI}$$

$$u_{c'} = -2a \frac{23qa^3}{6EI} + \frac{8qa^4}{3EI} = -\frac{15qa^4}{3EI} = -\frac{5qa^4}{EI}$$

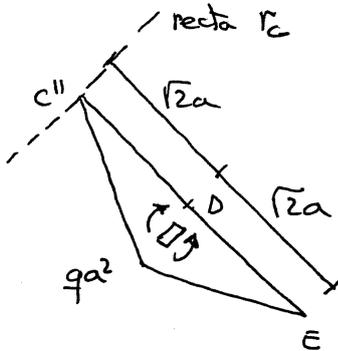
$$v_{c'} = 2a \frac{23qa^3}{6EI} - \frac{38qa^4}{3EI} = -\frac{15qa^4}{3EI} = -\frac{5qa^4}{EI}$$

$$\tilde{v}_{c'} = u_{c'} \cos 45 + v_{c'} \cos 45 = -\frac{10qa^4}{\sqrt{2}EI} = -\frac{5\sqrt{2}qa^4}{EI}$$

Paso 5 de la relación anterior



3) Determinación de $\tilde{V}_{C''}$



$$\begin{aligned}\tilde{V}_{C''} &= \tilde{V}_E - \Theta_E d(E, r_c) + \frac{1}{EI} \mathcal{M}_{EC''}^{r_c} \\ &= 0 - 2\sqrt{2}a \Theta_E + \frac{1}{EI} \left\{ \frac{1}{2} qa^2 \cdot 2\sqrt{2}a \cdot \sqrt{2}a \right\} \\ &= -2\sqrt{2}a \Theta_E + \frac{2qa^2}{EI}\end{aligned}$$

Paso nº 6 (y último)

$$\begin{aligned}\tilde{V}_{C'} &= \tilde{V}_{C''} \Rightarrow -2\sqrt{2}a \Theta_E + \frac{2qa^2}{EI} = -\frac{5\sqrt{2}qa^2}{EI} \\ -2\sqrt{2}a \Theta_E &= -\frac{(2+5\sqrt{2})qa^2}{EI}\end{aligned}$$

$$\boxed{\Theta_E = \frac{(2+5\sqrt{2})qa^3}{2\sqrt{2}EI} = \frac{(\sqrt{2}+5)qa^3}{2EI}}$$

4) Desplazamientos y giros en B, C y D

Conocidos ya Θ_A y Θ_E , es fácil calcular cualquier otro desplazamiento o giro en la estructura.

$$\Theta_B = \Theta_A - \frac{1}{EI} \mathcal{M}_{AB} = \frac{23qa^3}{6EI} - \frac{1}{EI} \left\{ \frac{1}{2} 4qa^2 \cdot 2a \right\} = \frac{qa^3}{EI} \left\{ \frac{23}{6} - 4 \right\} = -\frac{qa^3}{6EI}$$

$u_B = u_C$ porque BC es inextensible (despreciamos las deformaciones por axil)

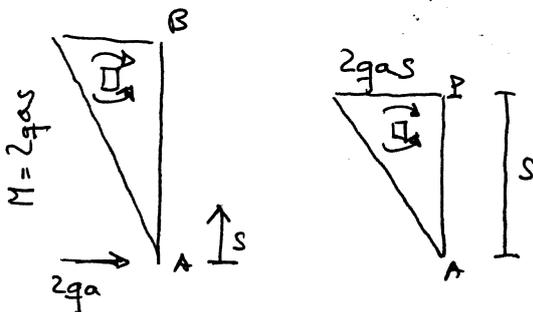
$v_B = 0$ " AB " " "

$$\begin{aligned}\Theta_{C'} &= \Theta_B - \frac{1}{EI} \mathcal{M}_{BC} = -\frac{qa^3}{6EI} - \frac{1}{EI} \left\{ \frac{1}{3} 2qa^2 \cdot 2a + \frac{1}{2} 2qa^2 \cdot 2a \right\} \\ &= \frac{qa^3}{EI} \left\{ -\frac{1}{6} - \frac{4}{3} - 2 \right\} = -\frac{21qa^3}{6EI} = -\frac{7qa^3}{2EI}\end{aligned}$$

$$\Theta_{C''} = \Theta_E - \frac{1}{EI} \mathcal{M}_{EC} = \frac{(\sqrt{2}+5)qa^3}{2EI} - \frac{1}{EI} \left\{ \frac{1}{2} qa^2 \cdot 2\sqrt{2}a \right\} = \frac{(5-\sqrt{2})qa^3}{2EI}$$

$$\begin{aligned} \tilde{V}_B &= \tilde{V}_E - \Theta_B d(E, \parallel \tilde{Y}_D) + \frac{1}{EI} M_{ED}^{\parallel \tilde{Y}_D} & \parallel \tilde{Y}_D &\Rightarrow \text{Paralela a } \tilde{Y}_{pa} \perp D. \\ &= 0 - \sqrt{2} a \frac{(\sqrt{2}+5)qa^3}{2EI} + \frac{1}{EI} \frac{1}{2} qa^2 \cdot \sqrt{2} a \cdot \frac{1}{3} \sqrt{2} a \\ &= - \frac{(2+5\sqrt{2})qa^4}{2EI} + \frac{qa^4}{3EI} = - \frac{(4+15\sqrt{2})qa^4}{6EI} \end{aligned}$$

Nótese que el giro cambia de signo entre A y B, lo que significa que entre A y B hay un punto de giro nulo y, por lo tanto, un máximo del desplazamiento perpendicular a la barra (recuérdese que el giro es la derivada de la flecha). Como el giro de A es, en módulo, veintitrés veces mayor que el de B, es razonable suponer que el máximo estará muy próximo a B. Aunque no haya falta de determinar para dibujar una buena estimación de la deformada, vamos a hacerlo.



$$\begin{aligned} \Theta_P &= \Theta_A - \frac{1}{EI} M_{AP} \\ &= \frac{23qa^3}{6EI} - \frac{1}{EI} \frac{1}{2} 2qas \cdot s \\ &= \frac{23qa^3}{6EI} - \frac{qas^2}{EI} \end{aligned}$$

$$\Theta_P = 0 \Rightarrow \frac{23qa^3}{6EI} - \frac{qas^2}{EI} = 0$$

$$s = \sqrt{\frac{23}{6}} a = 1.96 a$$

$$\begin{aligned} u(s = \sqrt{\frac{23}{6}} a) &= u_{\text{MIN}} = u_A - \Theta_A \cdot d(A, P) + \frac{1}{EI} M_{AP}^{\perp, P} \\ &= 0 - \frac{23qa^3}{6EI} \sqrt{\frac{23}{6}} a + \frac{1}{EI} \frac{1}{2} 2qa \sqrt{\frac{23}{6}} a \cdot \sqrt{\frac{23}{6}} a \cdot \frac{1}{3} \sqrt{\frac{23}{6}} a \\ &= \frac{qa^4}{EI} \left(\frac{23}{6}\right)^{3/2} \left[-1 + \frac{1}{3}\right] = -\frac{2}{3} \left(\frac{23}{6}\right)^{3/2} \frac{qa}{EI} \end{aligned}$$



A efectos de comparación, se indican los valores decimales de los coeficientes de los distintos desplazamientos y giros:

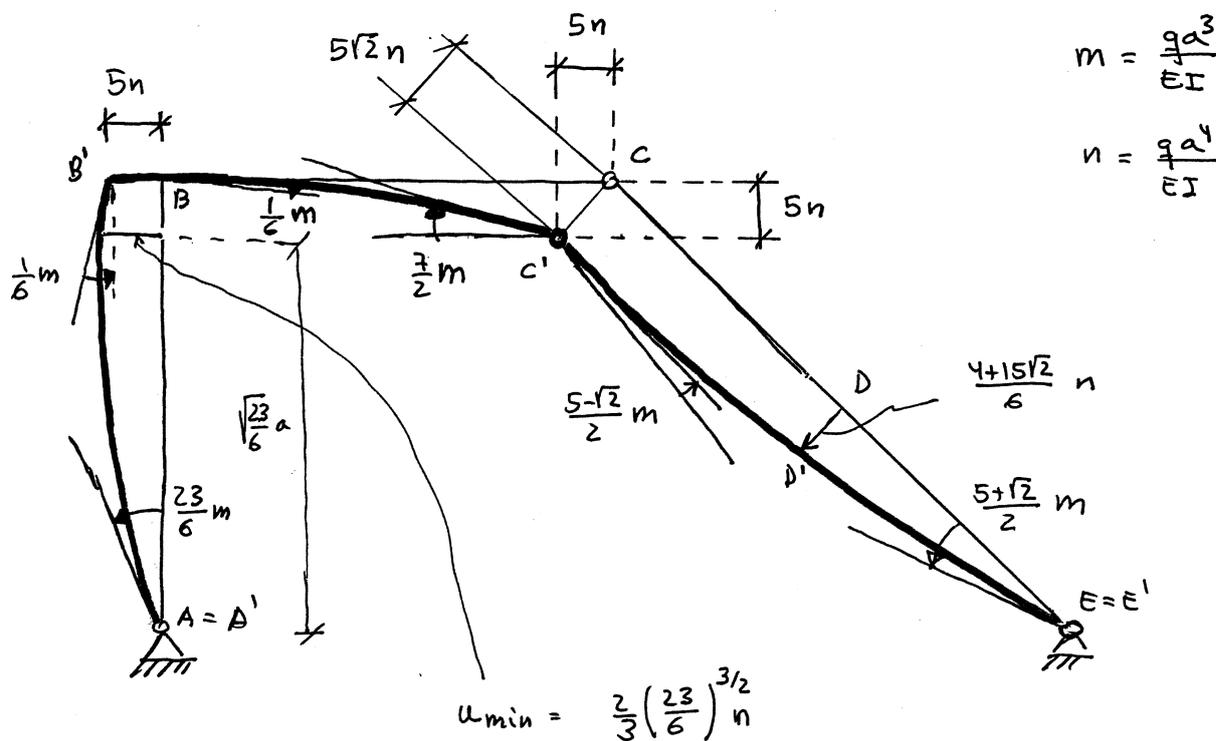
$$\theta_A = \frac{23 qa^3}{6EI} = 3'83 \frac{qa^3}{EI} \quad \theta_B = -\frac{qa^3}{6EI} = -0'17 \frac{qa^3}{EI} \quad \theta_C = -\frac{7qa^3}{2EI} = -3'5 \frac{qa^3}{EI}$$

$$\theta_{C''} = \frac{(5-\sqrt{2}) qa^3}{2EI} = 1'79 \frac{qa^3}{EI} \quad \theta_E = \frac{(5+\sqrt{2}) qa^3}{2EI} = 3'21 \frac{qa^3}{EI}$$

$$u_B = u_C = -5 \frac{qa^4}{EI} \quad v_C = -5 \frac{qa^4}{EI} \quad \tilde{v}_C = -5\sqrt{2} \frac{qa^4}{EI} = -7'07 \frac{qa^4}{EI}$$

$$\tilde{v}_D = -\frac{(4+15\sqrt{2}) qa^4}{6EI} = -4'20 \frac{qa^4}{EI} \quad u_{N|N, AB} = -\frac{2}{3} \left(\frac{23}{6}\right)^{3/2} \frac{qa^4}{EI} = -5'003 \frac{qa^4}{EI}$$

DEFORMADA A ESTIMA (ACOTADA)



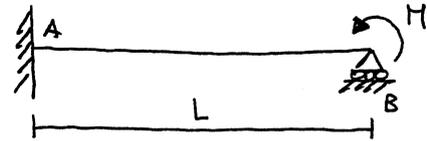
**El método de flexibilidad:
aplicación a estructuras hiperestáticas**



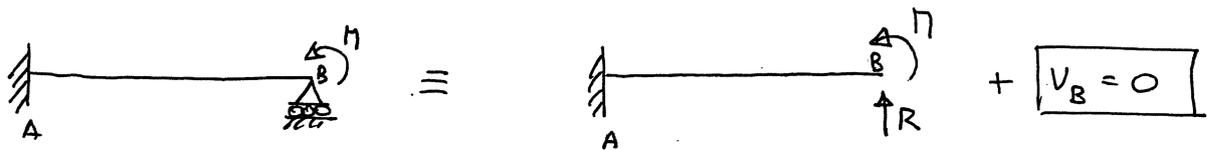
EJERCICIO Nº 63

EN LA ESTRUCTURA REPRESENTADA SE PIDE:

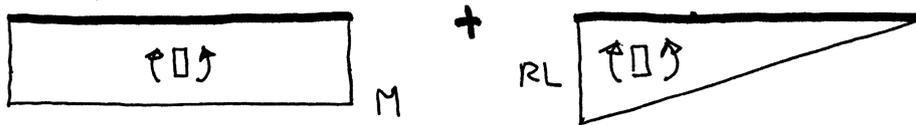
- 1) CALCULAR LAS REACCIONES.
(Y ACOTAR)
- 2) DIBUJAR LAS LEYES DE ESFUERZOS.
- 3) DIBUJAR A ESTIMA LA DEFORMADA, ACOTANDO LOS DESPLAZAMIENTOS Y GIROS MÁS CARACTERÍSTICOS E INDICANDO LOS PUNTOS DE INFLEXIÓN, SI LOS HAY.



- La estructura es hiperestática de grado 1.
- Isostatación.



- Ley de flectores en la estructura isostaticada.



- Cálculo de V_B

$$V_B = V_A + \theta_A L + \frac{1}{EI} \int_{AV}^{y,B} M_{AV} = 0 + 0 + \frac{1}{EI} \left\{ M \cdot L \cdot \frac{L}{2} + \frac{1}{2} RL \cdot L \cdot \frac{2}{3} L \right\}$$

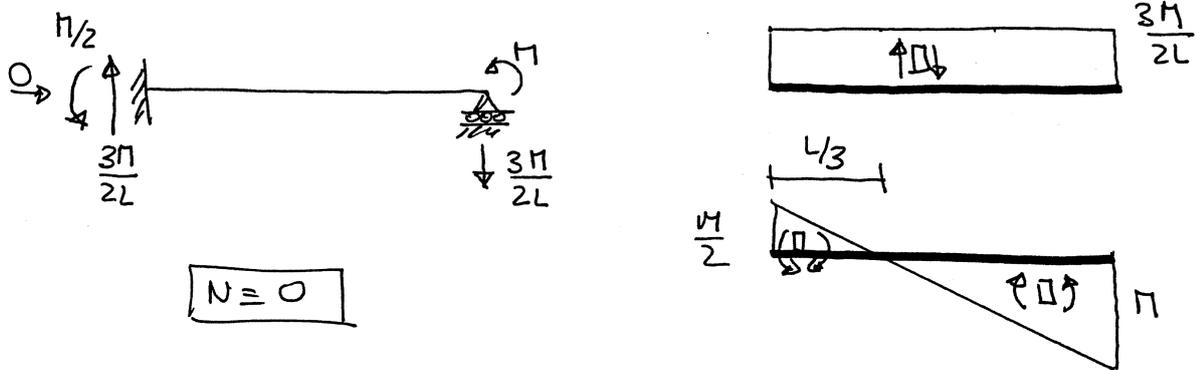
$$= \frac{ML^2}{2EI} + \frac{RL^3}{3EI}$$

- Ecuación de compatibilidad

$$V_B = 0 \Rightarrow \frac{ML^2}{2EI} + \frac{RL^3}{3EI} = 0 \Rightarrow \boxed{R = -\frac{3M}{2L}}$$

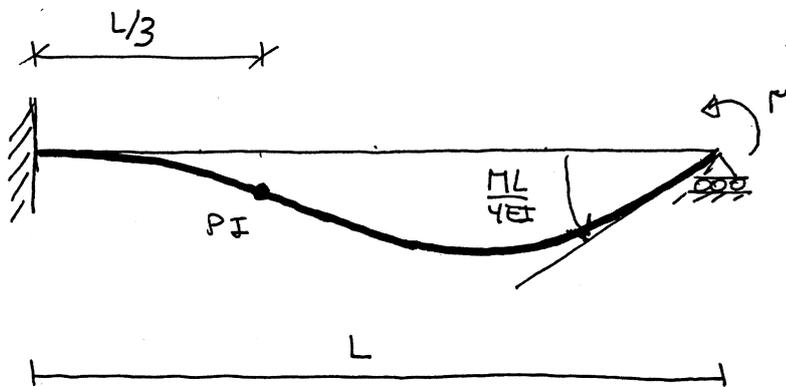


- Reacciones y leyes de esfuerzos

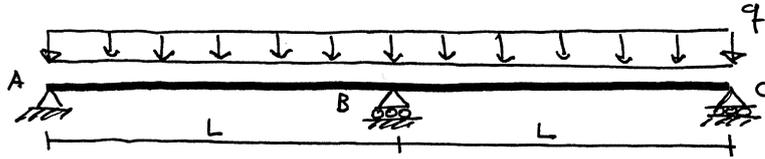


- Desplazamientos, giros y deformada.

$$\theta_B = \theta_A + \frac{1}{EI} \mathcal{A}_{AB} = 0 + \frac{1}{EI} \left\{ -\frac{1}{2} \frac{M}{2} \frac{L}{3} + \frac{1}{2} M \frac{2}{3} L \right\} = \frac{ML}{4EI}$$



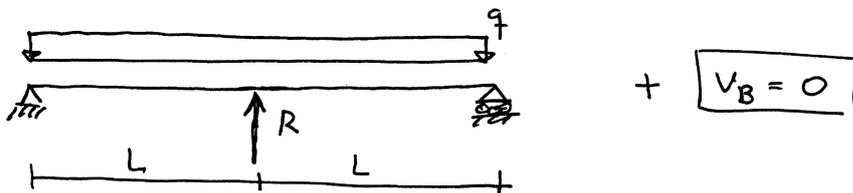
EJERCICIO Nº 64



EN LA ESTRUCTURA REPRESENTADA SE PIDE:

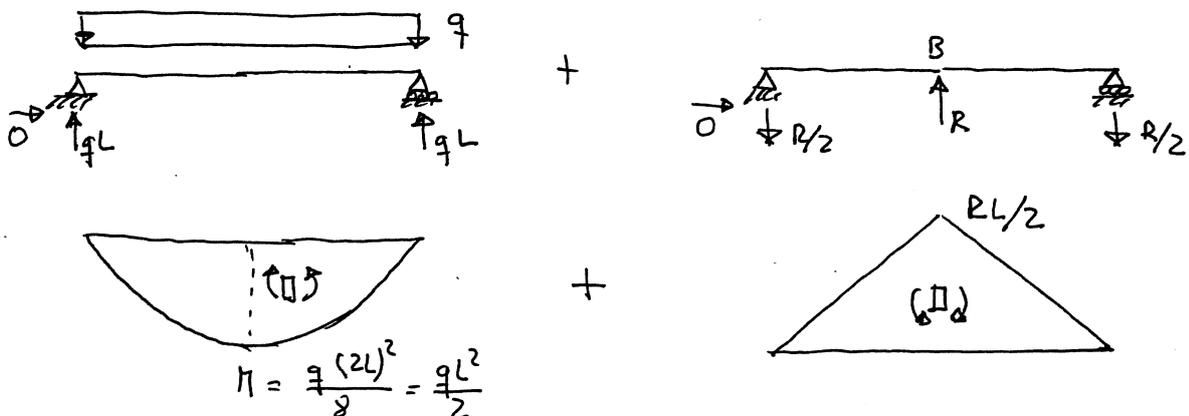
- 1) CALCULAR LAS REACCIONES.
- 2) DIBUJAR ^{Y ACOTAR} LAS LEYES DE ESFUERZOS.
- 3) DIBUJAR A ESTIMA LA DEFORMADA, ACOTANDO LOS DESPLAZAMIENTOS Y GIROS MÁS CARACTERÍSTICOS E INDICANDO LOS PUNTOS DE INFLEXIÓN, SI LOS HAY.

- Es evidente que la estructura es hiperestática de grado 1.
- Isostatación



$$+ \boxed{V_B = 0}$$

- Reacciones y leyes de flectores en la estructura isostática



$$M = \frac{q(2L)^2}{8} = \frac{qL^2}{2}$$

- Cálculo de V_B . Nótese que la simetría exige que $\Phi_B = 0$.

$$V_C = 0 = V_B + \Phi_B \cdot \theta(B,C) + \frac{1}{EI} \int_{B,C}^{V,C} M$$

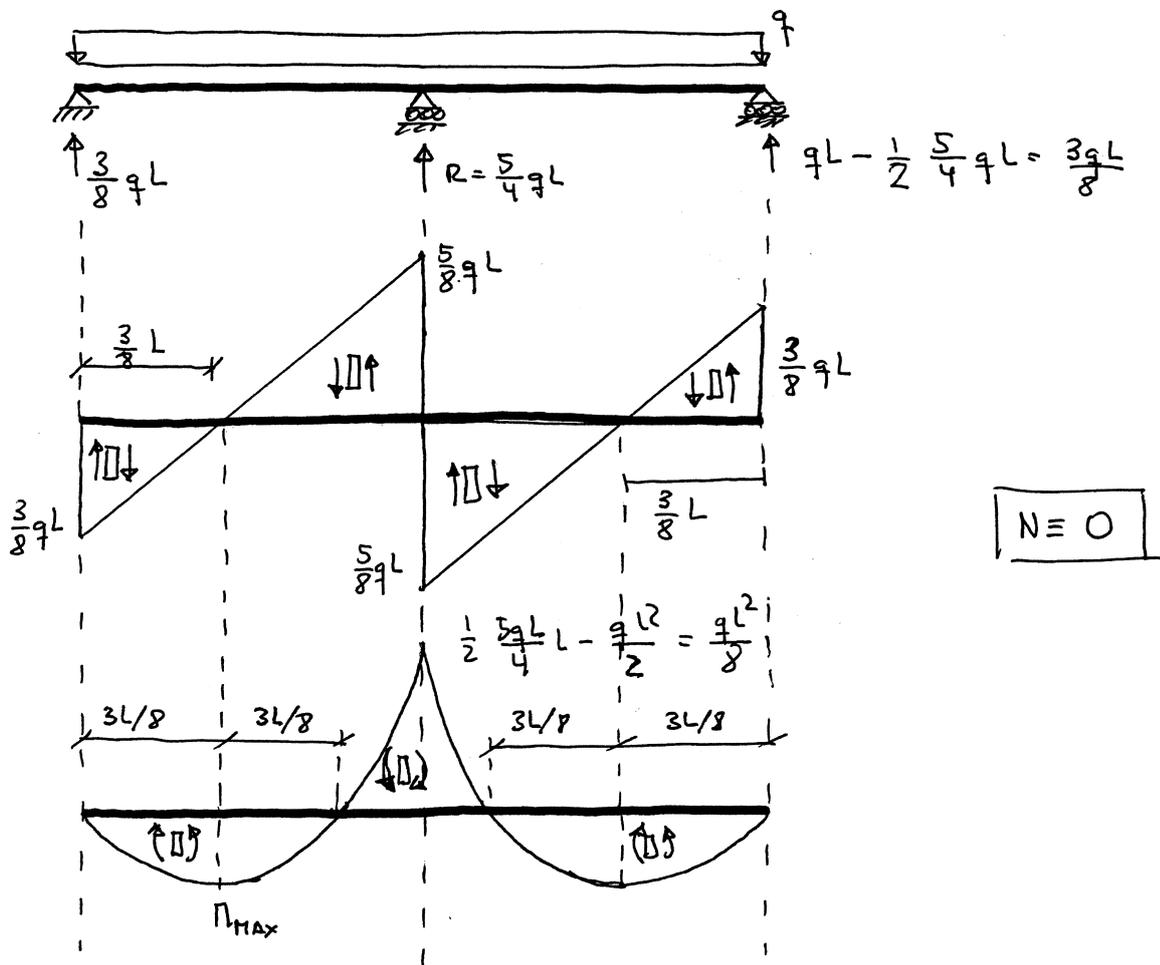
$$0 = v_B + \frac{1}{EI} \int_{BC} v_{,c} = v_B + \frac{1}{EI} \left[\frac{2}{3} \frac{qL^2}{2} \cdot L \cdot \frac{5}{8} L - \frac{1}{2} \frac{RL}{2} \cdot L \cdot \frac{2}{3} L \right]$$

$$= v_B + \frac{5qL^4}{24EI} - \frac{RL^3}{6EI} = 0 \Rightarrow v_B = \frac{RL^3}{6EI} - \frac{5qL^4}{24EI}$$

• Condición de compatibilidad

$$v_B = 0 \Rightarrow \frac{RL^3}{6EI} = \frac{5qL^4}{24EI} \Rightarrow R = \frac{5}{4} qL$$

• REACCIONES Y LEYES DE ESFUERZOS



$$M_{MAX} = \frac{3}{8} qL \cdot \frac{3L}{8} - \frac{1}{2} q \left(\frac{3L}{8} \right)^2 = \frac{9}{128} qL^2$$

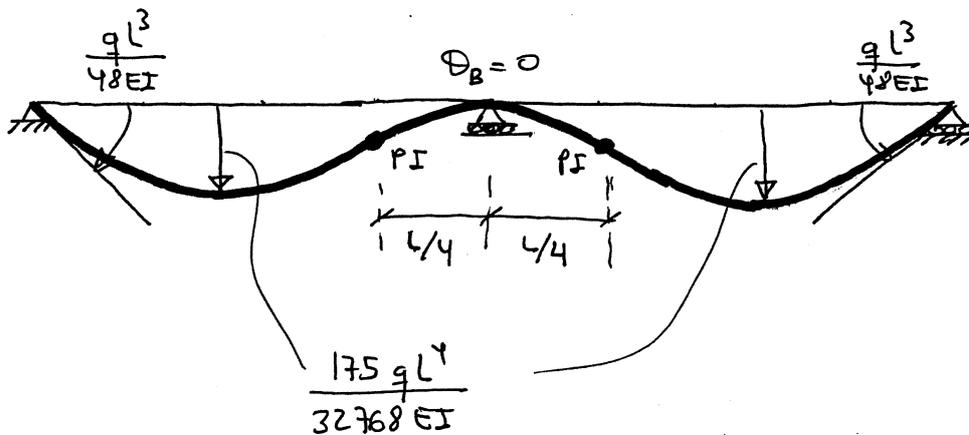
- DESPLAZAMIENTOS Y DEFORMADA.

$$\begin{aligned}\theta_c &= \theta_B^0 + \frac{1}{EI} \int_{BC} M_{BC} = \frac{1}{EI} \left\{ \frac{2}{3} \frac{qL^2}{2} \cdot L - \frac{1}{2} \frac{RL}{2} L \right\} \\ &= \frac{1}{EI} \left\{ \frac{qL^3}{3} - \frac{L^2}{4} \frac{5}{4} qL \right\} = \frac{qL^3}{EI} \left(\frac{1}{3} - \frac{5}{16} \right) = \frac{qL^3}{48EI}\end{aligned}$$

$$\theta_A = -\theta_c \quad (\text{simetría}).$$

Calculamos con la ley combinada (pag. 2)

$$\begin{aligned}V_{MIN} &\approx V \Big|_{x=\frac{3L}{8}} = V_A + \theta_A \cdot \frac{3L}{8} + \frac{1}{EI} \frac{2}{3} \frac{q}{128} qL^2 \cdot \frac{3L}{8} \cdot \frac{3}{8} \frac{3}{8} L \\ &= 0 - \frac{3qL^3}{384EI} + \frac{81qL^4}{128 \times 256EI} = -\frac{qL^3}{128EI} + \frac{81qL^4}{128 \times 256EI} = -\frac{175qL^4}{32768EI}\end{aligned}$$



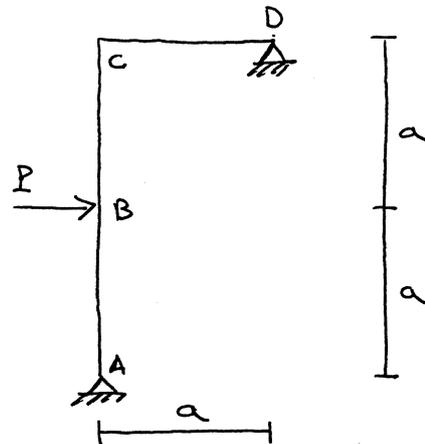
Nótese que no se ha obtenido la flecha máxima, sino la flecha en el punto de momento máximo. Esta última es mucho más fácil de calcular, y debe proporcionar una buena aproximación a la primera.

EJERCICIO Nº 65

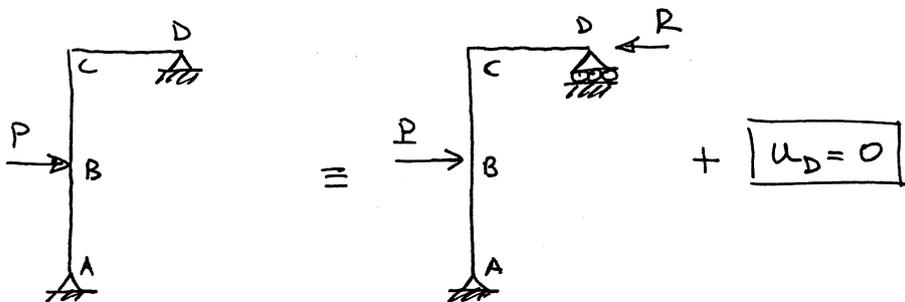
EN LA ESTRUCTURA REPRESENTADA

SE PIDE:

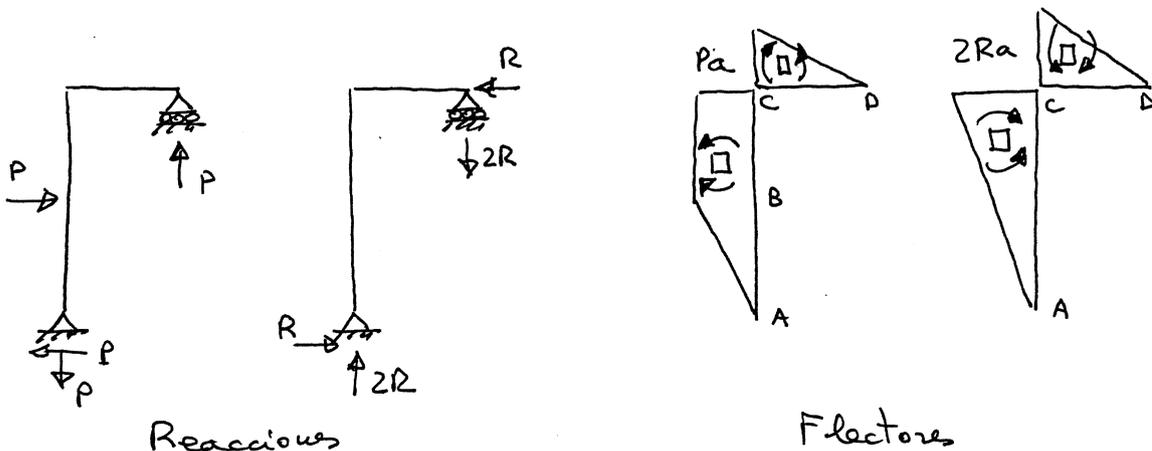
- 1) CALCULAR LAS REACCIONES.
- 2) DIBUJAR ^{Y ACOTAR} LAS LEYES DE ESFUERZOS.
- 3) DIBUJAR LA DEFORMADA, ACOTANDO LOS DESPLAZAMIENTOS Y GIROS MÁS REPRESENTATIVOS E INDICANDO LOS PUNTOS DE INFLEXIÓN, SI LOS HAY.



- La estructura es hiperestática de grado 1.
- Isostatación



- Reacciones y leyes de flectores en la estructura isostática.





- Cálculo de v_D . Para abordarlo se necesita conocer θ_A , que se determina a partir de la ecuación $v_D = 0$.

$$v_D = v_A + \theta_A \cdot a + \frac{1}{EI} M_{A \rightarrow D}^{v,D}$$

$$= 0 + a \theta_A + \frac{1}{EI} \left\{ \frac{1}{2} Pa \cdot a \cdot a + Pa \cdot a \cdot a + \frac{1}{2} Pa \cdot a \cdot \frac{2}{3} a - \frac{1}{2} 2Ra \cdot 2a \cdot a - \frac{1}{2} 2Ra \cdot a \cdot \frac{2}{3} a \right\} = a \theta_A + \frac{Pa^3}{EI} \left(\frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{3} \right) - \frac{Ra^3}{EI} \left(2 + \frac{2}{3} \right)$$

$$= a \theta_A + \frac{11 Pa^3}{6 EI} - \frac{8 Ra^3}{3 EI} = 0$$

$$\theta_A = \frac{8 Ra^2}{3 EI} - \frac{11 Pa^2}{6 EI}$$

$$u_D = u_A - \theta_A \cdot 2a + \frac{1}{EI} M_{AD}^{H,D} = 0 - 2a \theta_A + \frac{1}{EI} \left\{ -\frac{1}{2} Pa \cdot a \cdot \left(a + \frac{a}{3} \right) - Pa \cdot a \cdot \frac{a}{2} + \frac{1}{2} 2Ra \cdot 2a \cdot \frac{2}{3} 2a \right\}$$

$$= \frac{Ra^3}{EI} \left(-\frac{16}{3} + \frac{4}{3} \right) + \frac{Pa^3}{EI} \left(\frac{11}{3} - \frac{7}{6} \right) = -\frac{12 Ra^3}{3 EI} + \frac{15 Pa^3}{6 EI}$$

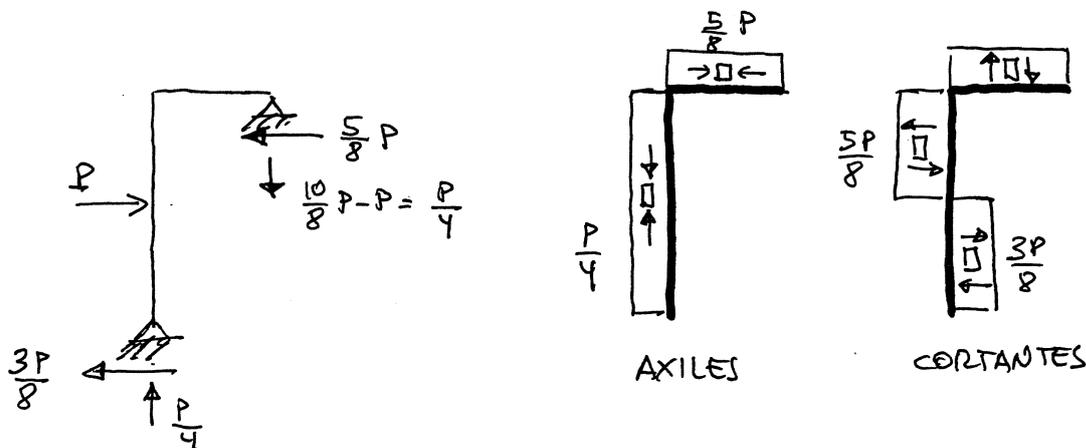
$$= -\frac{4 Ra^3}{EI} + \frac{5 Pa^3}{2 EI}$$

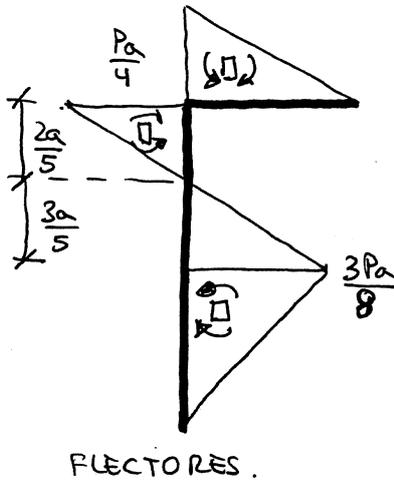
- Ecuación de compatibilidad

$$u_D = 0 \Rightarrow \frac{4 Ra^3}{EI} = \frac{5 Pa^3}{2 EI}$$

$$\Rightarrow R = \frac{5}{8} P$$

- REACCIONES Y LEYES DE ESFUERZOS.





• DESPLAZAMIENTOS Y DEFORMADA.

AC inextensible $\Rightarrow v_c = 0$

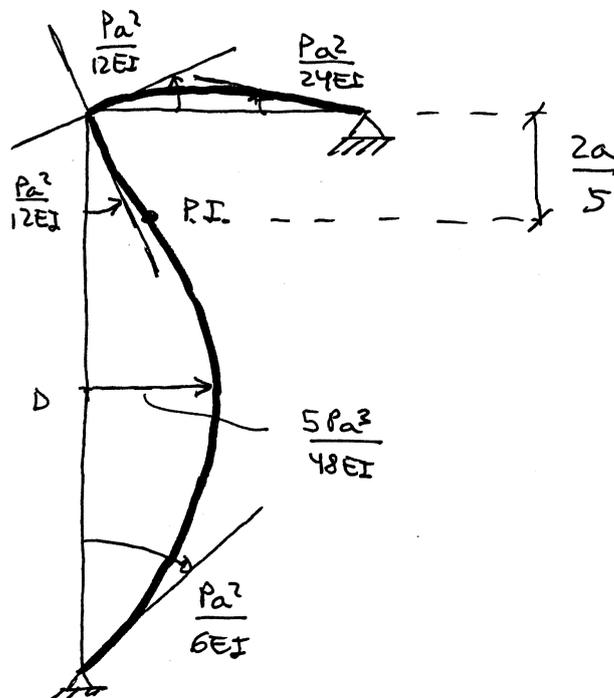
CD inextensible $\Rightarrow u_c = 0$

$$\theta_A = \frac{8Pa^2}{3EI} - \frac{11Pa^2}{6EI} = \frac{5Pa^2}{3EI} - \frac{11Pa^2}{6EI} = -\frac{Pa^2}{6EI}$$

$$\begin{aligned} \theta_B &= \theta_A + \frac{1}{EI} \int_{AC} M_{AC} = -\frac{Pa^2}{6EI} + \frac{1}{EI} \left\{ \frac{1}{2} \frac{3Pa}{8} a \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \frac{3Pa}{8} \frac{3a}{5} - \frac{1}{2} \frac{Pa}{4} \frac{2a}{5} \right\} \\ &= \frac{Pa^2}{EI} \left\{ -\frac{1}{6} + \frac{3}{16} + \frac{9}{80} - \frac{1}{20} \right\} = \frac{Pa^2}{240EI} \left\{ -40 + 45 \right. \\ &\quad \left. + 27 - 12 \right\} = \frac{Pa^2}{12EI} \end{aligned}$$

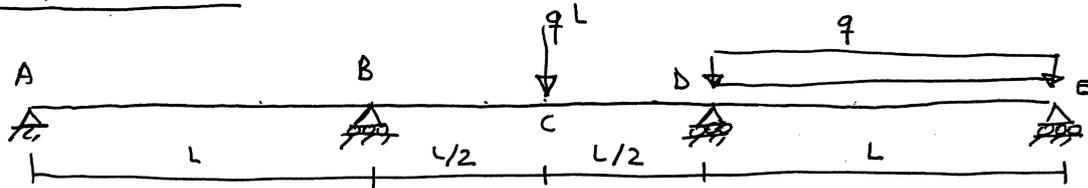
$$\theta_D = \theta_C + \frac{1}{EI} \int_{CD} M_{CD} = \frac{Pa^2}{12EI} + \frac{1}{EI} \left(-\frac{1}{2} \frac{Pa}{4} a \right) = \frac{Pa^2}{12EI} - \frac{Pa^2}{8EI} = -\frac{Pa^2}{24EI}$$

$$u_B = u_A = \theta_A \cdot a + \frac{1}{EI} \int_{AB} M_{AB} = 0 + \frac{Pa^3}{6EI} - \frac{1}{EI} \frac{1}{2} \frac{3Pa}{8} a \frac{a}{3} = \frac{Pa^3}{EI} \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{16} \right) = \frac{5Pa^3}{48EI}$$

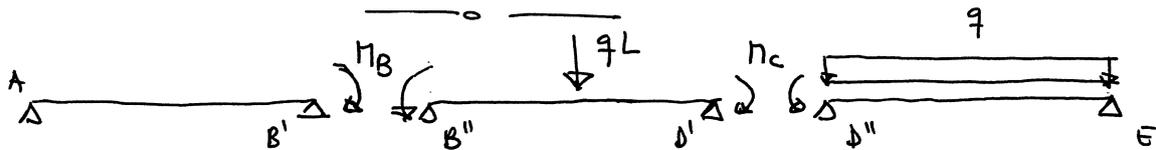




EJERCICIO Nº 66



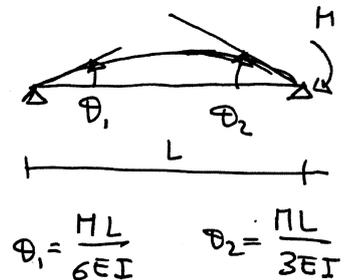
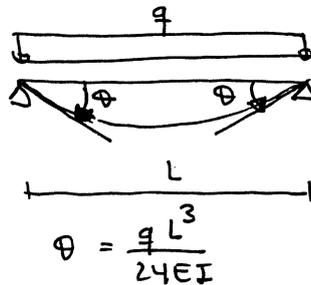
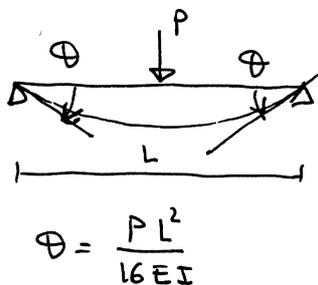
SE PIDE: REACCIONES, LEYES DE ESFUERZOS Y DEFORMADA.
(RESOLVER POR DESCOMPOSICIÓN EN VIGAS)



$$\theta_{B'} = \theta_{B''} \rightarrow -\frac{M_B L}{3EI} = \frac{M_B L}{3EI} + \frac{M_c L}{6EI} - \frac{(qL)L^2}{16EI}$$

$$\theta_{C'} = \theta_{C''} \rightarrow -\frac{M_c L}{3EI} - \frac{M_B L}{6EI} + \frac{(qL)L^2}{16EI} = \frac{M_c L}{3EI} - \frac{qL^3}{24EI}$$

Para escribir estas ecuaciones hemos utilizado:



Sist. de ecuaciones:

$$\frac{2M_B L}{3EI} + \frac{M_c L}{6EI} = \frac{qL^3}{16EI}$$

$$\frac{M_B L}{6EI} + \frac{2M_c L}{3EI} = \frac{qL^3}{16EI} + \frac{qL^3}{24EI} = \frac{5qL^3}{48EI}$$

$$\left. \begin{aligned} 32M_B + 8M_c &= 3qL^2 \\ 8M_B + 32M_c &= 5qL^2 \end{aligned} \right\}$$

$$(8 - 32 \times 4)M_c = (3 - 20)qL^2$$

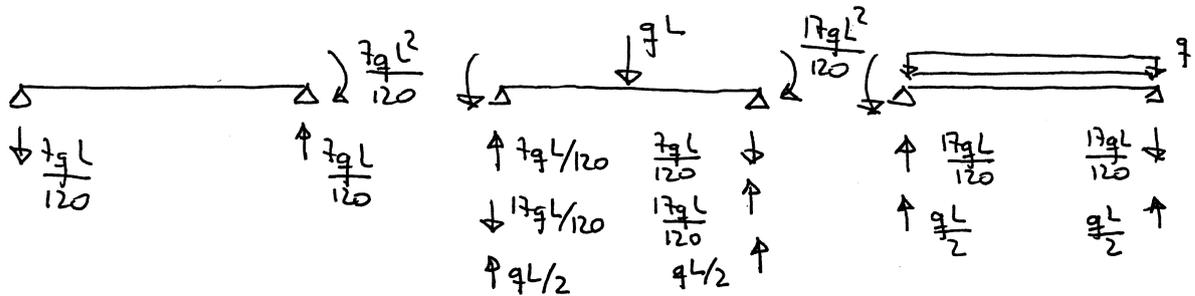
$$-120M_c = -17qL^2 \quad \boxed{M_c = +\frac{17qL^2}{120}}$$

$$(4 \times 32 - 8)M_B = (12 - 5)qL^2$$

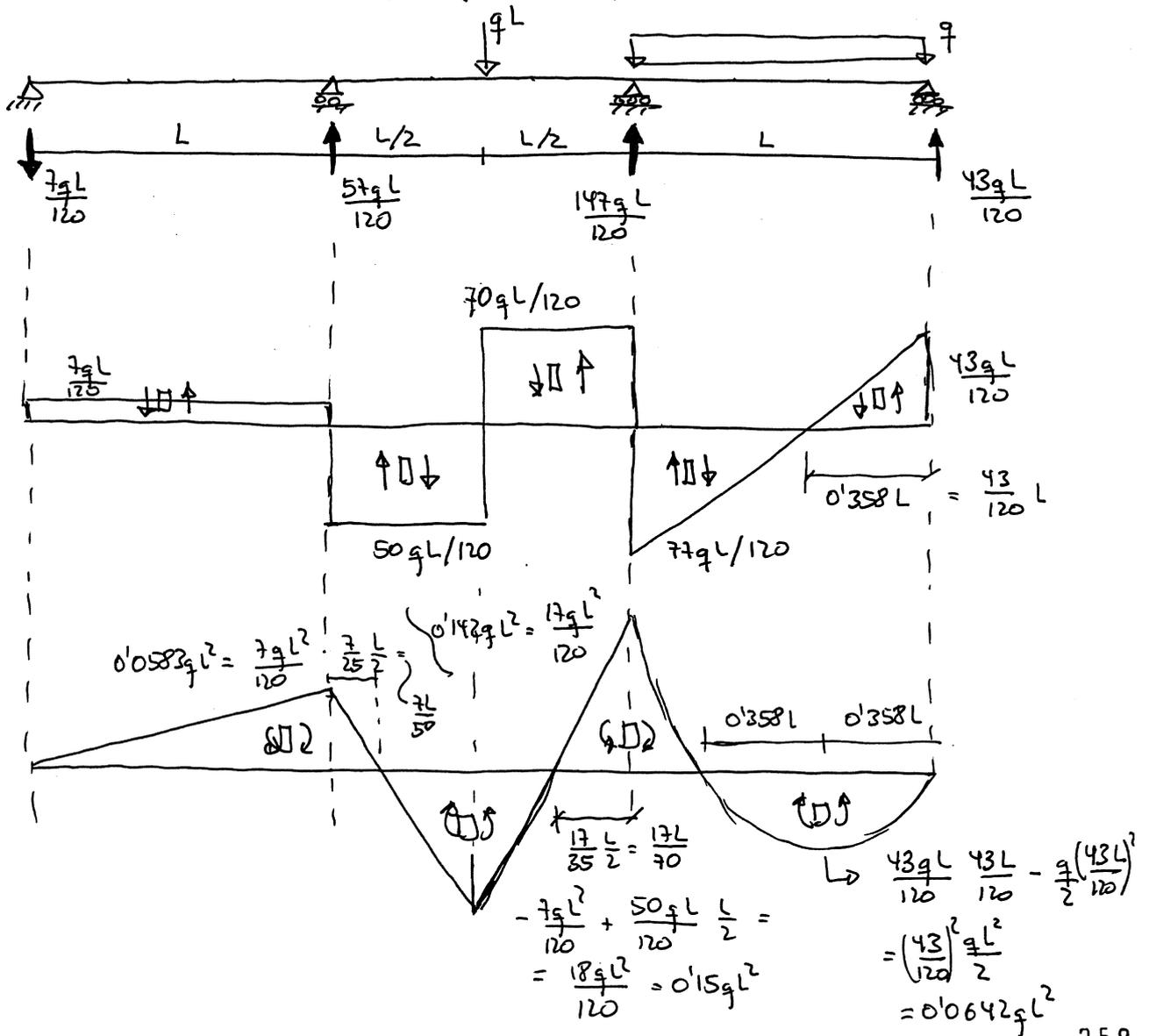
$$\boxed{M_B = \frac{7qL^2}{120}}$$



Calculo de las reacciones



Resumen de reacciones y leyes de esfuerzos





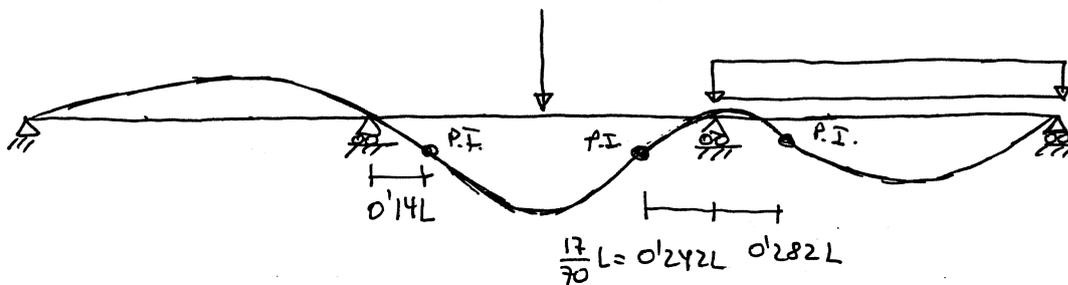
Giro y deformada.

$$\theta_A = + \frac{M_0 L}{6EI} = + \frac{7qL^3}{720EI}$$

$$\theta_B = - \frac{M_0 L}{8EI} = - \frac{14qL^3}{720EI}$$

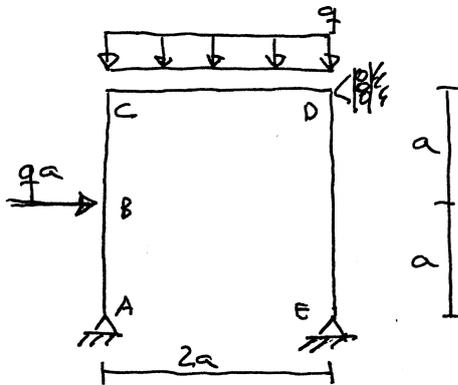
$$\theta_D = \frac{M_0 L}{3EI} - \frac{qL^3}{24EI} = \frac{17qL^3}{360EI} - \frac{qL^3}{24EI} = \frac{2qL^3}{360EI} = \frac{4qL^3}{720EI}$$

$$\theta_E = - \frac{M_0 L}{6EI} + \frac{qL^3}{24EI} = - \frac{17qL^3}{720EI} + \frac{qL^3}{24EI} = \frac{13qL^3}{720EI}$$





EJERCICIO Nº 67

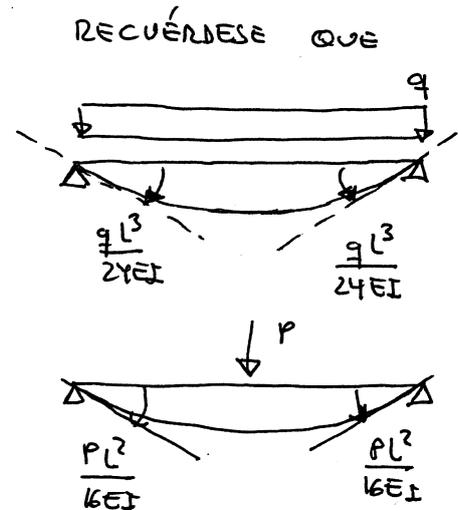
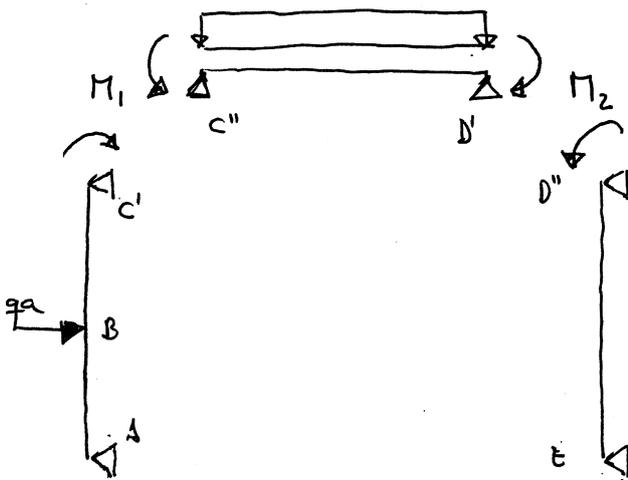


EN LA ESTRUCTURA REPRESENTADA SE PIDE:

- 1) DETERMINAR LAS REACCIONES.
- 2) DIBUJAR Y ACOTAR LAS LEYES DE ESFUERZOS.
- 3) DIBUJAR Y ACOTAR LA DEFORMADA.

• El pórtico es hiperestático de grado 2 e intrínsecamente. Se resolverá por descomposición en vigas.

• Descomposición



• Ecuaciones de compatibilidad

$$\theta_{C'} = \theta_{C''} \Rightarrow \frac{qa(2a)^2}{16EI} - \frac{M_1 \cdot 2a}{3EI} = -\frac{q(2a)^3}{24EI} + \frac{M_1 \cdot 2a}{3EI} + \frac{M_2 \cdot 2a}{6EI} \quad (1)$$

$$\theta_{D'} = \theta_{D''} \Rightarrow \frac{q(2a)^3}{24EI} - \frac{M_1 \cdot 2a}{6EI} - \frac{M_2 \cdot 2a}{3EI} = \frac{M_2 \cdot 2a}{3EI} \quad (2)$$

$$(1) \rightarrow \frac{7a^2}{8} + \frac{qa^2}{6} = \frac{2M_1}{3} + \frac{M_2}{6} \rightarrow \frac{14ga^2}{48EI} = \frac{2}{3} M_1 + \frac{1}{6} M_2$$

$$(2) \rightarrow \frac{7a^2}{6} = \frac{M_1}{6} + \frac{2M_2}{3}$$

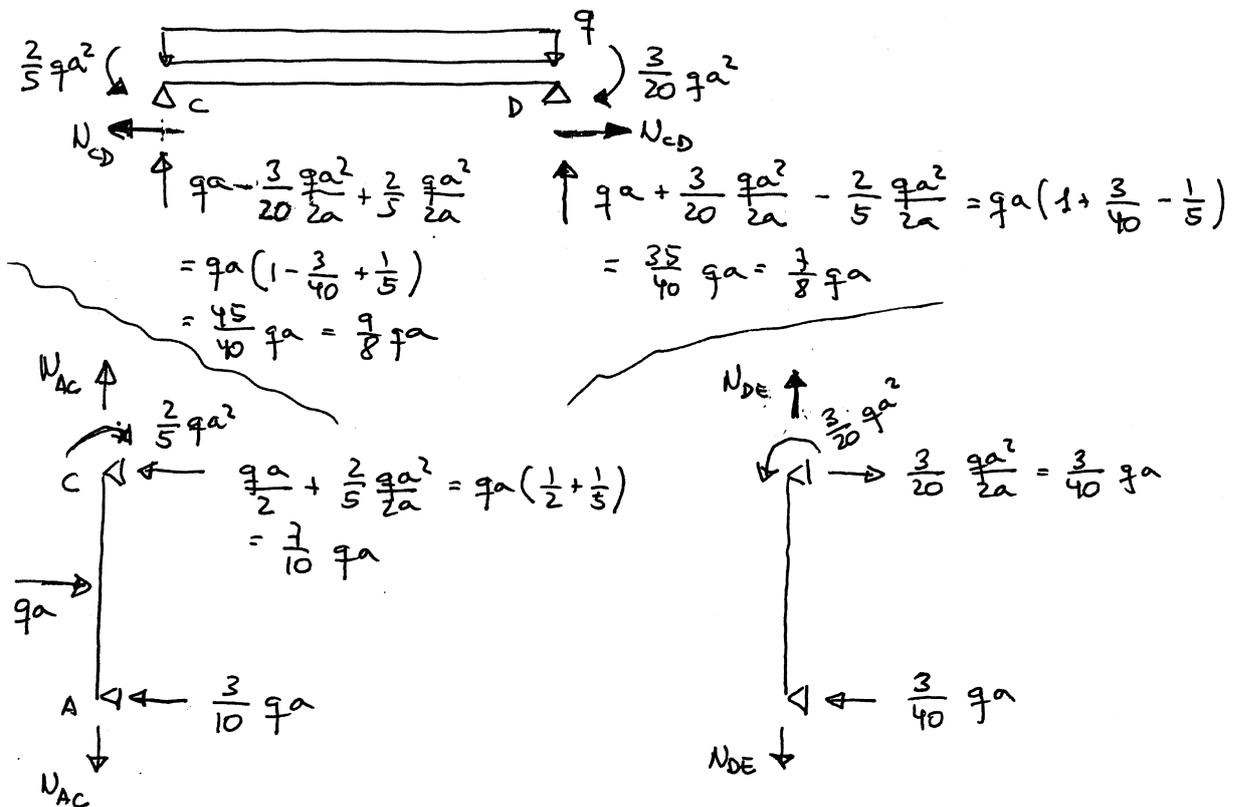
$$\left. \begin{aligned} \frac{2}{3} M_1 + \frac{1}{6} N_2 &= \frac{14qa^2}{48} \\ \frac{1}{6} M_1 + \frac{2}{3} N_2 &= \frac{qa^2}{6} \end{aligned} \right\} \quad \left. \begin{aligned} 4M_1 + N_2 &= \frac{14qa^2}{8} = \frac{7}{4} qa^2 \\ M_1 + 4N_2 &= qa^2 \end{aligned} \right\}$$

$$15M_1 = (7 - 4) qa^2 = 3qa^2 \Rightarrow$$

$$15N_2 = (4 - \frac{7}{4}) qa^2 = \frac{9}{4} qa^2 \Rightarrow$$

$$\boxed{\begin{aligned} M_1 &= \frac{2}{5} qa^2 \\ N_2 &= \frac{3}{20} qa^2 \end{aligned}}$$

• Determinación de cortantes y axiles

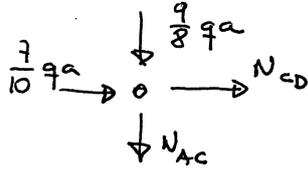


Nótese que los axiles se han dibujado en equilibrio en cada barra. Si hubiese habido fuerzas paralelas a la directriz, hubiésemos considerado en cada barra una fuerza ^{distribuida} distinta en cada extremo y los hubiésemos relacionado mediante las ecuaciones de equilibrio de la barra.

Para determinar los axiles, plantearemos el equilibrio de los nudos C y D (el de los nudos A y E proporciona las reacciones.)



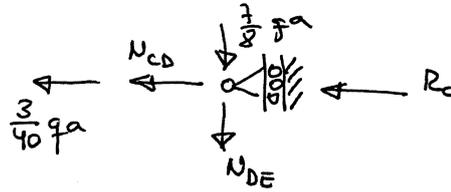
Nudo C



$$N_{CD} = -\frac{7}{10} qa$$

$$N_{AC} = -\frac{9}{8} qa$$

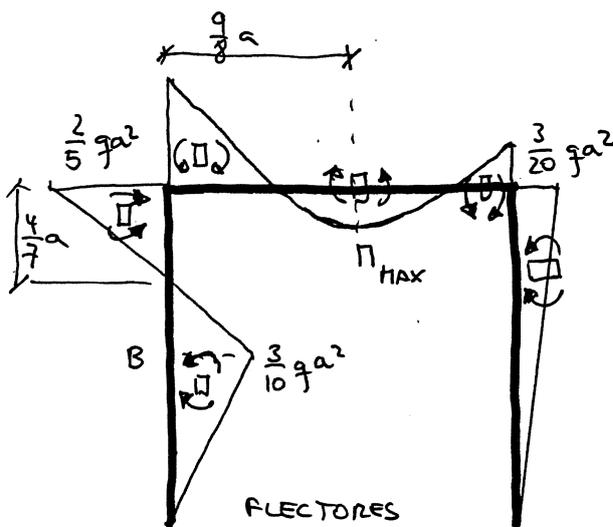
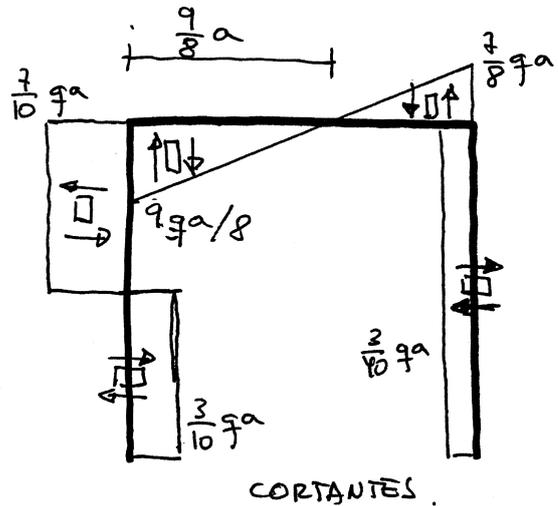
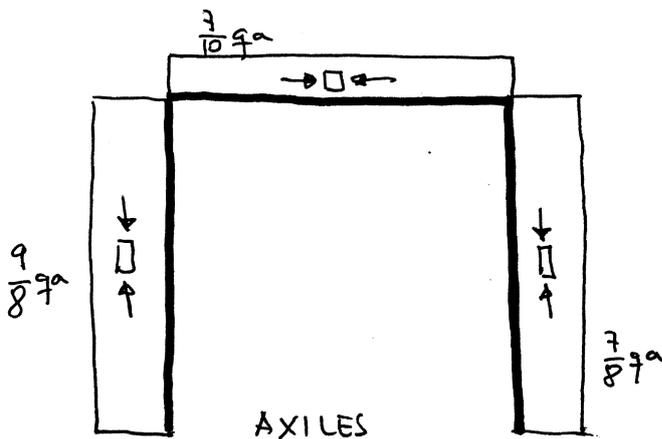
Nudo D



$$N_{DE} = -\frac{7}{8} qa$$

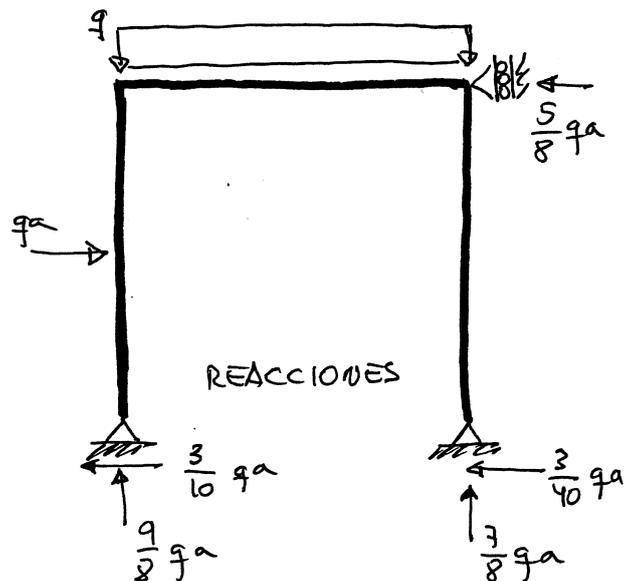
$$R_C = -N_{CD} - \frac{3}{40} qa = qa \left(+\frac{7}{10} - \frac{3}{40} \right) = \frac{25}{40} qa$$

• Leyes de esfuerzos.



$$M_{MAX} = \frac{9}{8} qa \cdot \frac{9}{8} a - q \left(\frac{9}{8} a \right)^2 \frac{1}{2} - \frac{2}{5} qa^2$$

$$= \frac{qa^2}{640} (810 - 405 - 256) = \frac{149 qa^2}{640}$$



• Desplazamientos y deformada.

$$\theta_A = -\frac{qa(2a)^2}{16EI} + \frac{M_1 \cdot 2a}{6EI} = -\frac{qa^3}{4EI} + \frac{4qa^3}{30EI} = -\frac{7qa^3}{60EI}$$

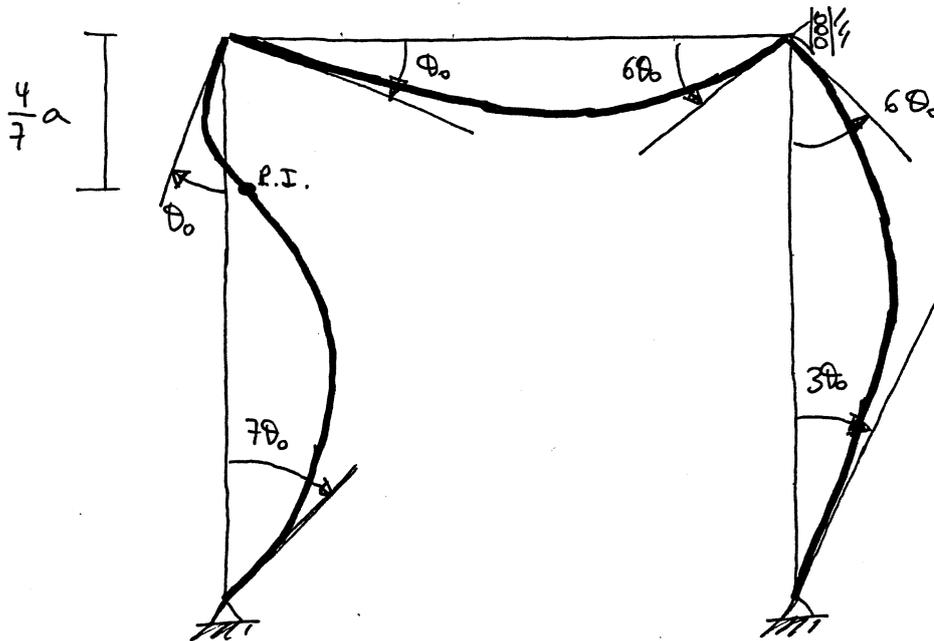
$$\theta_B = \theta_A + \frac{1}{EI} \int_{AB} M_{AB} = -\frac{7qa^3}{60EI} + \frac{1}{EI} \left[\frac{3}{10} qa^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot a \right] = \frac{qa^3}{EI} \left[-\frac{7}{60} + \frac{3}{20} \right] = \frac{2qa^3}{60EI}$$

$$\theta_C = \frac{qa(2a)^2}{16EI} - \frac{M_1 \cdot 2a}{3EI} = \frac{qa^3}{4EI} - \frac{4qa^3}{15EI} = \frac{qa^3}{60EI} (15 - 16) = -\frac{qa^3}{60EI}$$

$$\theta_D = \frac{M_2 \cdot 2a}{3EI} = \frac{3qa^3}{30EI} = \frac{qa^3}{10EI}$$

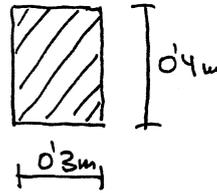
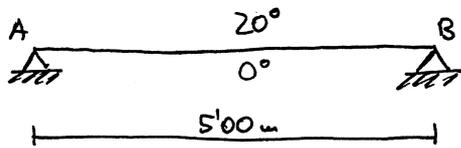
$$\theta_E = -\frac{M_2 \cdot 2a}{6EI} = -\frac{qa^3}{20EI}$$

$$\theta_0 = \frac{qa^3}{60EI}$$



**Problemas de simetrías y antimetrías,
solicitaciones térmicas, apoyos elásticos y
desplazamientos de apoyo, resueltos en flexibilidad**

EJERCICIO Nº 68



$$E = 20.000 \text{ MPa}$$

$$\alpha = 10^{-5} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$$

DETERMINAR:

- REACCIONES.
- LEYES DE ESFUERZOS.
- DEFORMADA.

o) Isostaticación



Como la reacción hiperestática sólo origina axiles, no se puede resolver el problema despreciando la deformación por axil. La tendremos, pues, en cuenta.

o) Características mecánicas de la sección y esfuerzos ficticios de temperatura.

$$A = 0.4 \times 0.3 = 0.12 \text{ m}^2$$

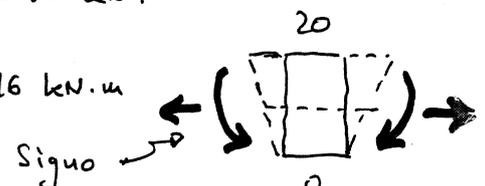
$$EA = 2400 \text{ MN} = 2.4 \times 10^6 \text{ kN}$$

$$I = \frac{0.3 \times 0.4^3}{12} = 0.0016 \text{ m}^4$$

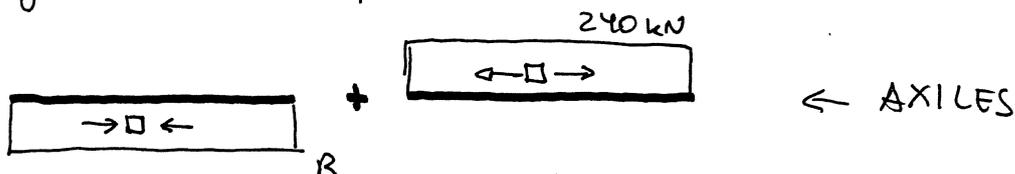
$$EI = 32 \text{ MN}\cdot\text{m}^2 = 32000 \text{ kN}\cdot\text{m}^2$$

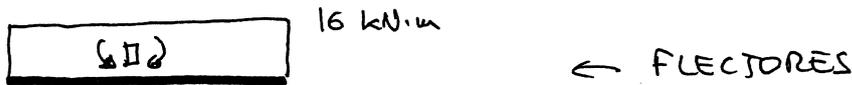
$$N_T = \alpha \frac{T_i + T_s}{2} EA = 10^{-5} \frac{20 + 0}{2} \cdot 2.4 \times 10^6 = 240 \text{ kN.}$$

$$|M_T| = \alpha \frac{|T_s - T_i|}{h} EI = 10^{-5} \frac{20 - 0}{0.4} 32000 = 16 \text{ kN}\cdot\text{m}$$



o) Leyes de esfuerzos para determinar desplazamientos (Reales + ficticios)



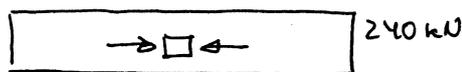
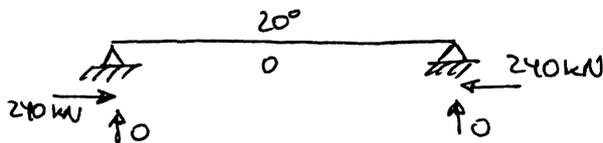


o) Condición de compatibilidad.

$$u_B = u_A + \int_A^B \frac{N}{EA} dX = 0 + \int_0^5 \frac{240 - R}{2'4 \times 10^6} dX = \frac{5}{2'4 \times 10^6} (240 - R) \text{ m.}$$

$$u_B = 0 \Rightarrow \boxed{R = 240 \text{ kN.}}$$

o) Reacciones y leyes de esfuerzos reales.



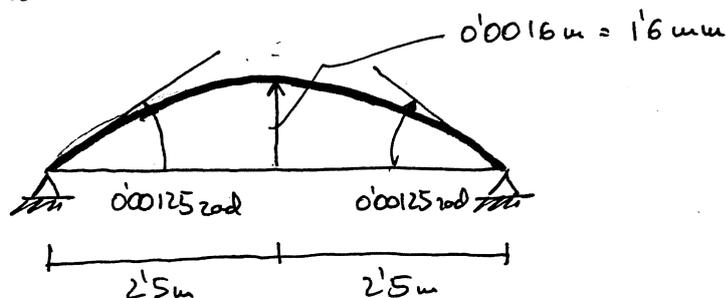
LOS CORTANTES Y LOS FLECTORES SON IDÉNTICAMENTE NULOS.

o) Desplazamientos y deformaciones. (Recuérdese que los desplazamientos se determinan a partir de los esfuerzos reales y ficticios, conjuntamente.)

$$\text{Simetría} \rightarrow \vartheta_E = 0 \quad \vartheta_B = \vartheta_{CL} + \frac{1}{EI} M_{EB} = 0 - \frac{1}{EI} (16 \times 2'5) = -\frac{16 \times 2'5}{32000} = 0'00125 \text{ rad.}$$

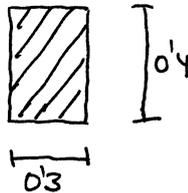
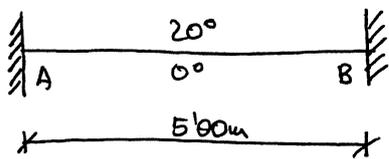
$$v_B = 0 = v_E + \vartheta_E \cdot \frac{L}{2} + \frac{1}{EI} M_{EB}^{v,B} = v_E + 0 + \frac{1}{EI} \left[-16 \times 2'5 \times \frac{2'5}{2} \right] = v_E - \frac{50}{3200}$$

$$v_E = \frac{50}{32000} = 0'0016 \text{ m.}$$





EJERCICIO Nº 69

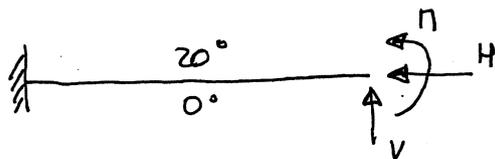


$E = 20.000 \text{ MPa}$
 $\alpha = 10^{-5} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$

SE PIDE:

- REACCIONES,
- LEYES DE ESFUERZOS Y
- DEFORMADA.

o) Isotermización



$u_B = 0$
$\phi_B = 0$
$v_B = 0$

o) Características mecánicas de la sección y esfuerzos ficticios por temperatura

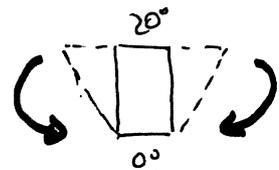
$A = 0.3 \times 0.4 = 0.12 \text{ m}^2$

$EA = 2400 \text{ MN} = 2.4 \times 10^6 \text{ kN}$

$I = \frac{0.3 \times 0.4^3}{12} = 0.0016 \text{ m}^4$

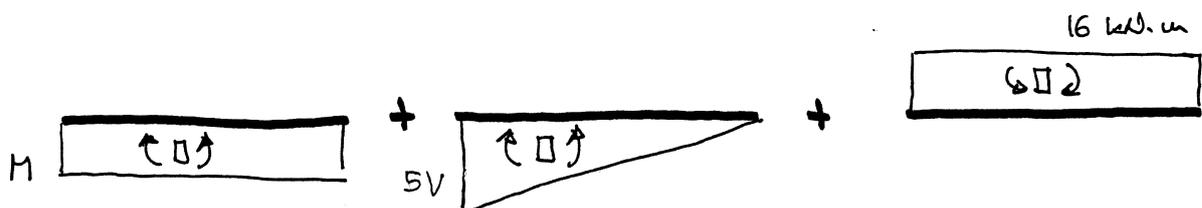
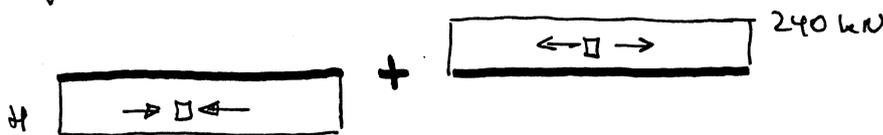
$EI = 32 \text{ MN}\cdot\text{m}^2 = 32000 \text{ kN}\cdot\text{m}^2$

$N_T = \alpha \frac{T_i + T_s}{2} EA = 10^{-5} \frac{0 + 20}{2} 2.4 \times 10^6 = 240 \text{ kN}$



$|M_T| = \alpha \frac{|T_s - T_i|}{h} EI = 10^{-5} \frac{20 - 0}{0.4} 32000 = 16 \text{ kN}\cdot\text{m}$

o) Leyes de esfuerzos para calcular desplazamientos (reales + ficticios)





e) Ecuaciones de compatibilidad.

$$u_B = u_A + \int_A^B \frac{N}{EA} d\bar{x} = 0 + \int_0^5 \frac{240-H}{EA} dx = \frac{5}{EA} (240-H) m.$$

$$u_B = 0 \Rightarrow \boxed{H = 240 \text{ kN}}$$

$$\begin{aligned} \Theta_B &= \Theta_A + \frac{1}{EI} A_{AB} = 0 + \frac{1}{EI} \left\{ 5 \cdot \eta + \frac{1}{2} 5 \cdot V \cdot 5 - 16 \times 5 \right\} \\ &= \frac{1}{EI} \left\{ 5\eta + 12.5V - 80 \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_B &= v_A + \Theta_A \cdot 5 + \frac{1}{EI} M_{AB}^{u,v} = 0 + 0 + \frac{1}{EI} \left\{ 5 \cdot \eta \cdot 2.5 + \frac{1}{2} 5 \eta \cdot 5 \cdot \frac{2}{3} 5 - 16 \times 5 \times 2.5 \right\} \\ &= \frac{1}{EI} \left\{ 12.5\eta + \frac{125}{3} V - 200 \right\} m. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Theta_B = 0 &\Rightarrow 5\eta + 12.5V = 80 \\ v_B = 0 &\Rightarrow 12.5\eta + \frac{125}{3}V = 200 \end{aligned} \Rightarrow$$

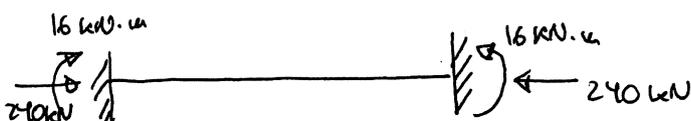
$$\begin{cases} \eta + 2.5V = 16 \\ \eta + \frac{10}{3}V = 16 \end{cases}$$

$$0 + (2.5 - \frac{10}{3})V = 0 \Rightarrow V = 0$$

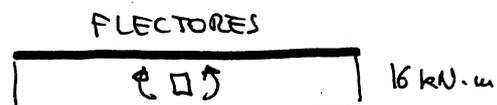
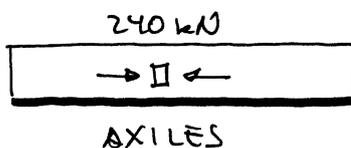
$$\eta = 16$$

$$\boxed{V = 0 \quad \eta = 16 \text{ kN}\cdot\text{m} \quad H = 240 \text{ kN}}$$

e) Reacciones y leyes de esfuerzos.

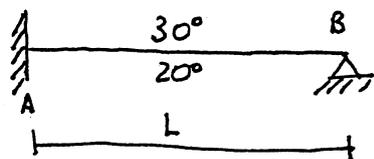


CORTANTES $\equiv 0$



e) Desplazamientos y deformada.

Nótese que $N + N^T \equiv 0$, $Q \equiv 0$ y $\eta + \eta^T \equiv 0 \Rightarrow$ las deformaciones generalizadas son nulas, y como el movimiento como sólido rígido está impedido \Rightarrow LOS DESPLAZAMIENTOS SON IDÉNTICAMENTE NULOS.



$$EI = 3200 \text{ t m}^2$$

$$EA = 240.000 \text{ t}$$

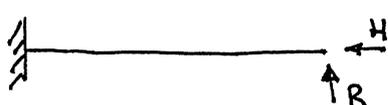
$$\alpha = 10^{-5} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1} \quad h = 0'40 \text{ m}$$

$$L = 60 \text{ m.}$$

$$M^T = \alpha \frac{T_s - T_i}{h} EI = 10^{-5} \frac{30 - 20}{0'4} 3.200 = 0'8 \text{ m.t}$$

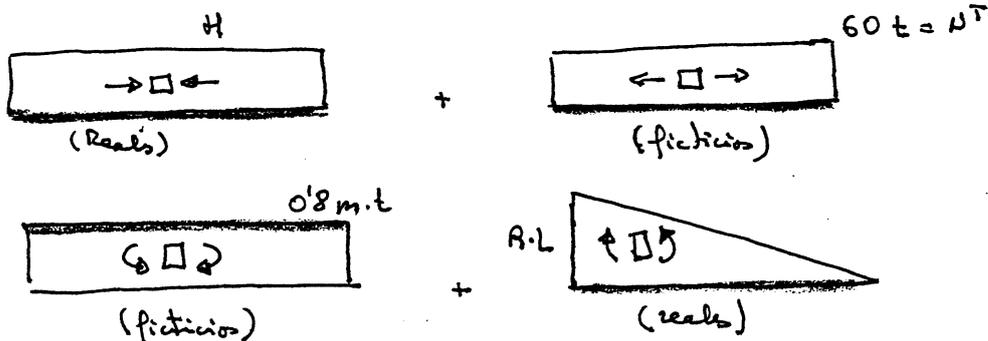
$$N^T = \alpha \frac{T_s + T_i}{2} EA = 10^{-5} \frac{30 + 20}{2} 240.000 = 60 \text{ t}$$

ISOSTATIZACIÓN:



$$\begin{cases} u_B = 0 \\ v_B = 0 \end{cases}$$

LEYES DE ESFUERZOS PARA CALCULAR DESPLAZAMIENTOS:



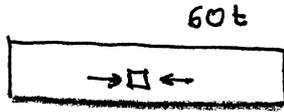
DESPLAZAMIENTOS (ECUACIONES DE COMPATIBILIDAD)

$$u_B = \cancel{u_A} + \frac{1}{EA} [60 \cdot L - H L] = 0 \Rightarrow \boxed{H = 60 \text{ t.}}$$

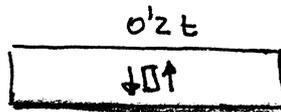
$$\begin{aligned} v_B &= \cancel{v_A} + \cancel{\theta_A} \cdot L + \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{2} R L \cdot L \cdot \frac{2}{3} L - 0'8 \cdot L \cdot \frac{L}{2} \right] \\ &= \frac{1}{EI} \left[\frac{R \cdot 6^3}{3} - \frac{0'8 \times 6^2}{2} \right] = \frac{1}{EI} [72R - 14'4] = 0 \\ &\Rightarrow \boxed{R = 0'2 \text{ t}} \end{aligned}$$



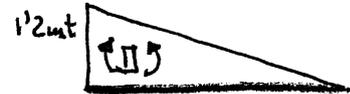
LEYES DE ESFUERZOS REALES



AXILES

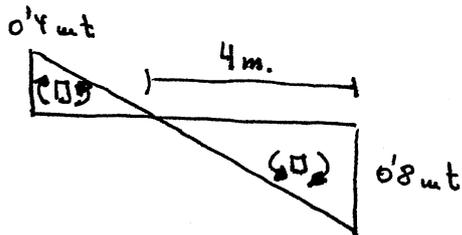


CORTANTES



FLECTORES

LEYES DE ESFUERZOS PARA CALCULAR DESPLAZAMIENTOS

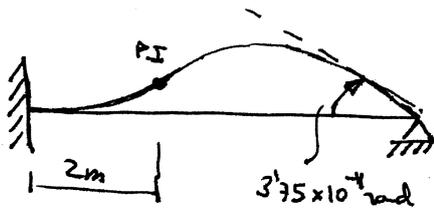


AXILES → NULOS.

DESPLAZAMIENTOS

$$\theta_B = \theta_A + \frac{1}{EI} \left\{ \frac{1}{2} 0.4 \times 2 - \frac{1}{2} 0.8 \times 4 \right\} = -\frac{1.2}{3.200} = -3.75 \times 10^{-4} \text{ rad.}$$

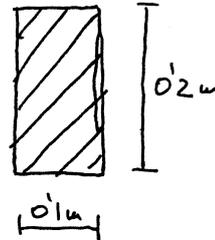
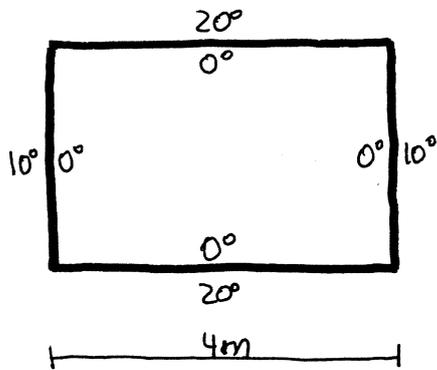
DEFORMADA.



Desp. horizontales idénticamente nulos.



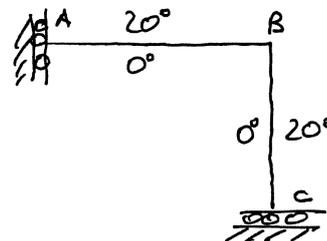
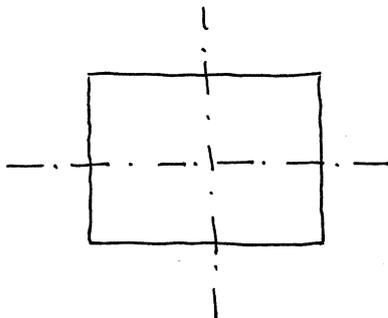
EJERCICIO Nº 71



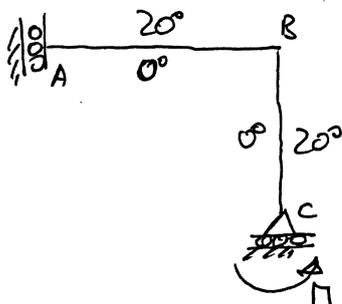
$E = 22.500 \text{ MPa}$
 $\alpha = 10^{-5} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$

DIBUJAR LAS LEYES DE ESFUERZOS Y LA DEFORMADA DEL MARCO REPRESENTADO.

a) Simetría



b) Isostatisación



+ $c = 0$

c) Características mecánicas y esfuerzos ficticios de temperatura

$A = 0.1 \times 0.2 = 0.02 \text{ m}^2$

$EA = 450 \text{ MN} = 450.000 \text{ kN}$

$I = \frac{0.1 \times 0.2^3}{12} = 6.67 \times 10^{-5} \text{ m}^4$

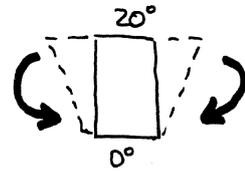
$EI = 1.5 \text{ MN}\cdot\text{m}^2 = 1500 \text{ kN}\cdot\text{m}^2$



Barra AB

$$N^T = \alpha \frac{T_i + T_s}{2} EA = 10^{-5} \frac{0 + 20}{2} 450.000 = 45 \text{ kN}$$

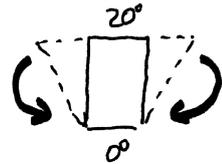
$$|M^T| = \alpha \frac{|T_s - T_i|}{h} EI = 10^{-5} \frac{20 - 0}{0,2} 1500 = 1,5 \text{ kN}\cdot\text{m}$$



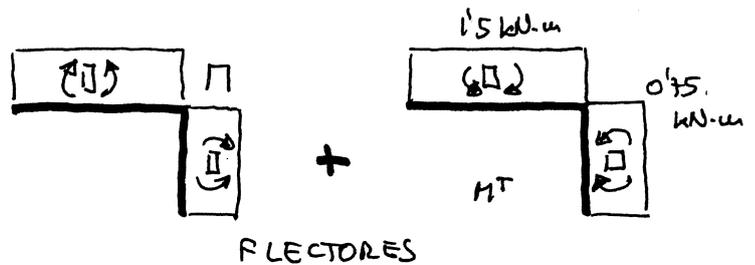
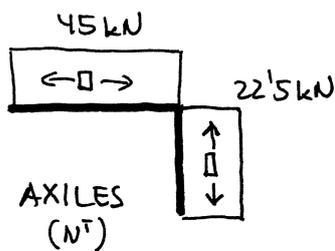
Barra BC

$$N^T = \alpha \frac{T_i + T_s}{2} EA = 10^{-5} \frac{0 + 10}{2} 450.000 = 22,5 \text{ kN}$$

$$|M^T| = \alpha \frac{|T_s - T_i|}{h} EI = 10^{-5} \frac{10 - 0}{0,2} 1500 = 0,75 \text{ kN}\cdot\text{m}$$



• Leyes de esfuerzos para determinar los desplazamientos (reales + ficticios).

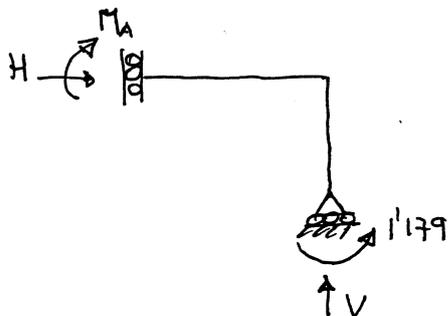


• Ecuación de compatibilidad

$$\begin{aligned} \theta_c &= \theta_A + \frac{1}{EI} \mathcal{M}_{CA} = 0 + \frac{1}{EI} \{ M \cdot 2 + M \cdot 1,5 - 1,5 \times 2 - 0,75 \times 1,5 \} \\ &= 0 + \frac{1}{EI} \{ 3,5 M - 4,125 \} \end{aligned}$$

$$\theta_c = 0 \Rightarrow 3,5 M = 4,125 \quad M = 1,179 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

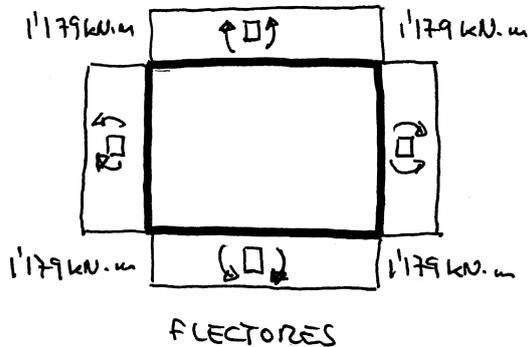
• Reacciones y leyes de esfuerzos



$$\sum F_v = 0 \Rightarrow V = 0$$

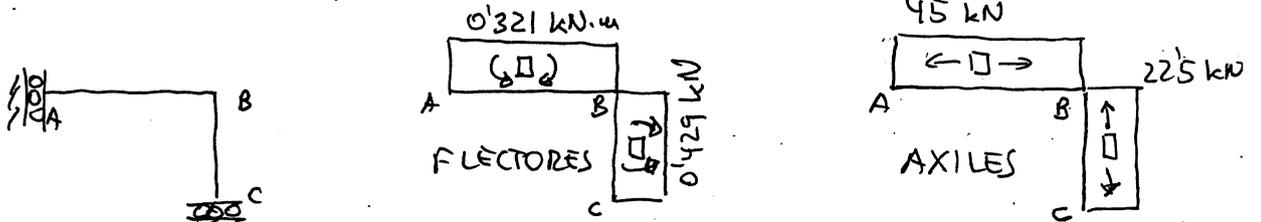
$$\sum F_h = 0 \Rightarrow H = 0$$

$$\sum \mathcal{M} = 0 \Rightarrow M_A = 1,179 \text{ kN}\cdot\text{m}$$



AXILES $\equiv 0$
CORTANTES $\equiv 0$

c) Desplazamientos y deformada



deyes de esfuerzos auxiliares para el cálculo de los desplazamientos (enf. reales + ficticio).

$$u_B = u_A + \int_A^B \frac{N}{EA} ds = 0 + \int_0^2 \frac{45}{450.000} ds = 2 \times 10^{-4} \text{ m} = 0'2 \text{ mm}$$

$$\theta_B = \theta_A + \frac{1}{EI} \mathcal{M}_{BA} = 0 + \frac{1}{1500} [-0'321 \times 2] = -4'28 \times 10^{-4} \text{ rad.}$$

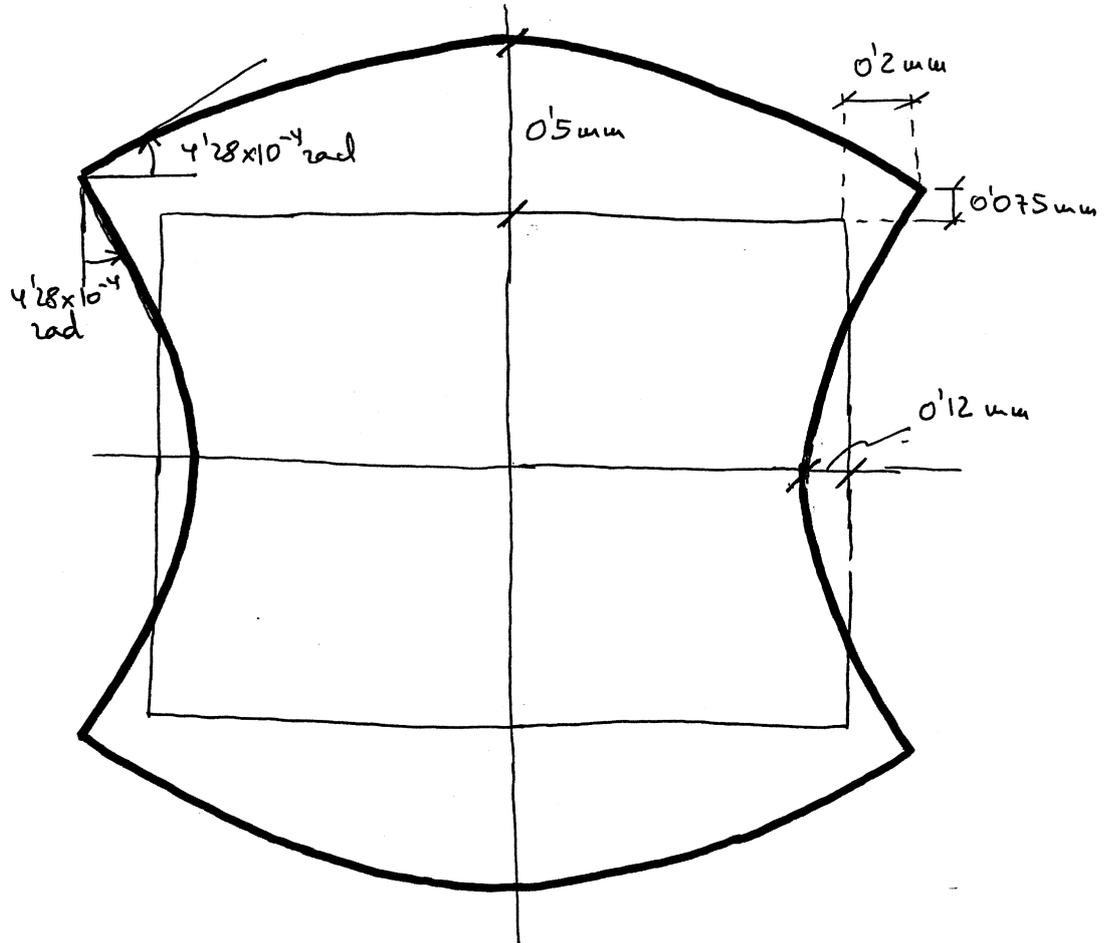
$$u_C = u_B + \frac{1}{EI} \mathcal{M}_{BC}^{H,C} = 2 \times 10^{-4} - 4'28 \times 10^{-4} \times 1'5 + \frac{1}{1500} [0'429 \times 1'5 \times \frac{1'5}{2}]$$

$$= 2 \times 10^{-4} - 6'42 \times 10^{-4} + 3'218 \times 10^{-4} = -1'20 \times 10^{-4} \text{ m} = -0'12 \text{ mm}$$

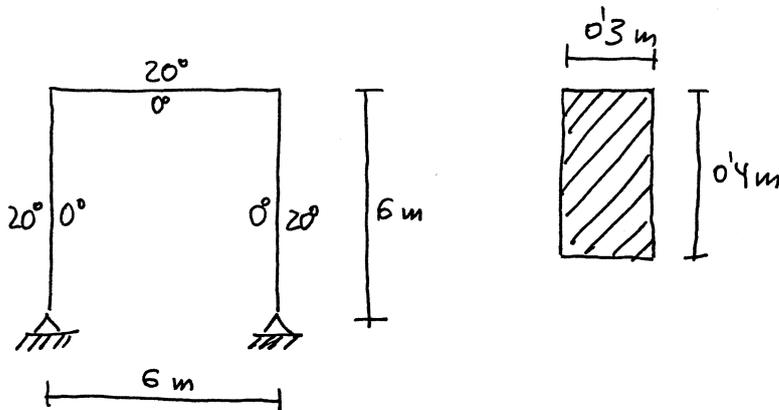
$$v_B = v_C + \int_B^C \frac{N}{EA} ds = 0 + \frac{22'5}{450.000} \times 1'5 = 7'5 \times 10^{-5} \text{ m} = 0'075 \text{ mm}$$

$$v_A = v_B - \theta_B \times 2 + \frac{1}{EI} \mathcal{M}_{BA}^{V,A} = 7'5 \times 10^{-5} + 4'28 \times 10^{-4} \times 2 + \frac{1}{1500} [-0'321 \times 2 \times \frac{2}{2}]$$

$$= 5'03 \times 10^{-4} \text{ m} = 0'50 \text{ mm}$$



EJERCICIO Nº 72

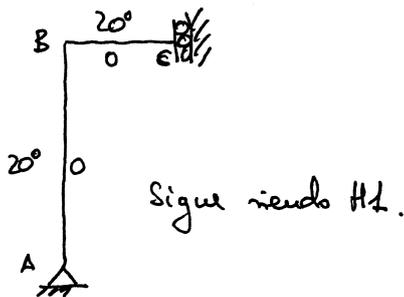


$E = 20.000 \text{ MPa}$
 $\alpha = 10^{-5} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$

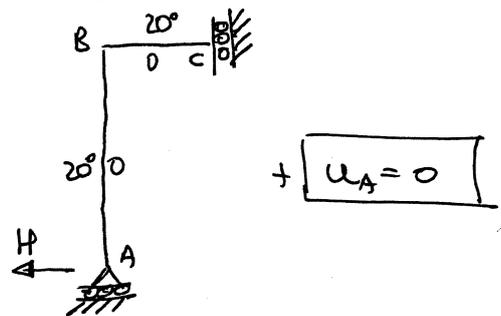
EN LA ESTRUCTURA REPRESENTADA SE PIDE:

- 1) CALCULAR LAS REACCIONES
- 2) DIBUJAR LAS LEYES DE ESFUERZOS
- 3) DIBUJAR LA DEFORMADA

- o) La estructura es hiperestática de grado 1.
- o) Simetría



o) Instabilización



- o) Características mecánicas de la sección y esfuerzos ficticios de temperatura.

$A = 0.3 \times 0.4 = 0.12 \text{ m}^2$

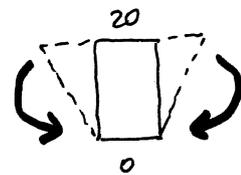
$EA = 2400 \text{ MN} = 2.4 \times 10^6 \text{ kN}$

$I = \frac{0.3 \times 0.4^3}{12} = 0.0016 \text{ m}^4$

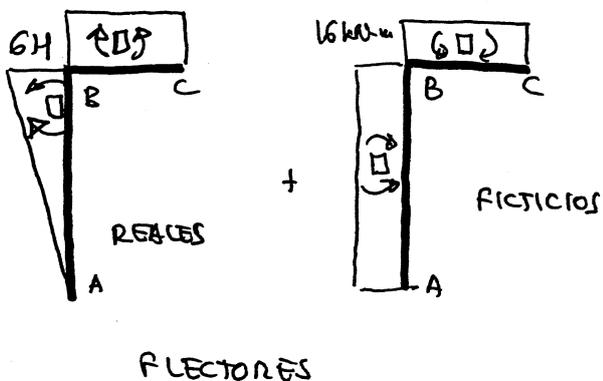
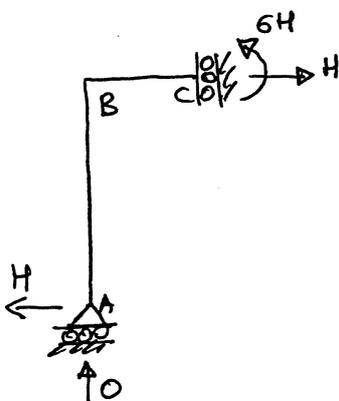
$EI = 32 \text{ MN}\cdot\text{m} = 32000 \text{ kN}\cdot\text{m}$

$N^T = \alpha \frac{T_i + T_s}{2} EA = 10^{-5} \frac{0 + 20}{2} 2.4 \times 10^6 = 240 \text{ kN}$

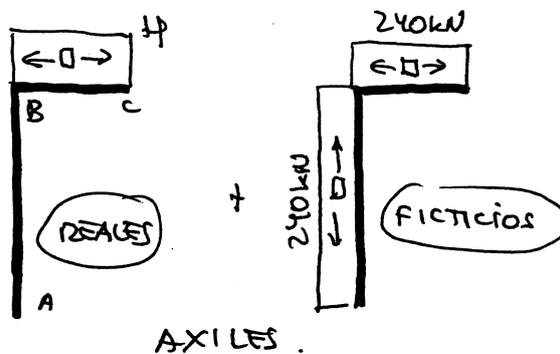
$M^T = \alpha \frac{|T_s - T_i|}{h} EI = 10^{-5} \frac{20 - 0}{0.4} 32000 = 16 \text{ kN}\cdot\text{m}^2$



o) diagramas de esfuerzos (reales + ficticios) para determinar desplazamientos



FLECTORES



AXIALES

o) Condición de compatibilidad

$$\begin{aligned}
 u_A &= u_C + \theta_C \cdot 6 + \frac{1}{EI} M_{CA}^{H,A} + \int_A^C \frac{N}{EA} \cos \alpha \, dS \\
 &= 0 + 0 + \frac{1}{EI} \left\{ 16 \times 3 \times 6 + 16 \times 6 \times 3 - 6H \times 3 \times 6 - \frac{1}{2} 6H \times 6 \times \frac{2}{3} 6 \right\} \\
 &\quad + \underbrace{\int_0^3 \frac{240+H}{EA} (-1) \, d\bar{X}}_{\text{TRAMO CB}} + \underbrace{\int_0^6 \frac{240}{EA} 0 \, dY}_{\text{TRAMO BA}} \\
 &= 0 + 0 + \frac{1}{32000} \left\{ 576 - 180H \right\} - \frac{240+H}{24 \times 10^6} 3 \\
 &= 0'018 - 0'005625H - 3 \times 10^{-4} - 1'25 \times 10^{-6} H
 \end{aligned}$$

Nótese que se ha tenido en cuenta la deformación por axil, en contra de lo que ha ocurrido siendo habitual. Es imprescindible tener en cuenta el alargamiento de los barras originado por la acción térmica, que puede



de determinarse bien a través del axil ficticio N^T , bien mediante la fórmula del alargamiento de una varilla homogénea $-\Delta L = \alpha L \Delta t$; pero pueden despreciarse las deformaciones originadas por los axiles reales, como hacemos habitualmente. A continuación resolveremos el problema de dos maneras, para constatar que la diferencia de resultados es inapreciable.

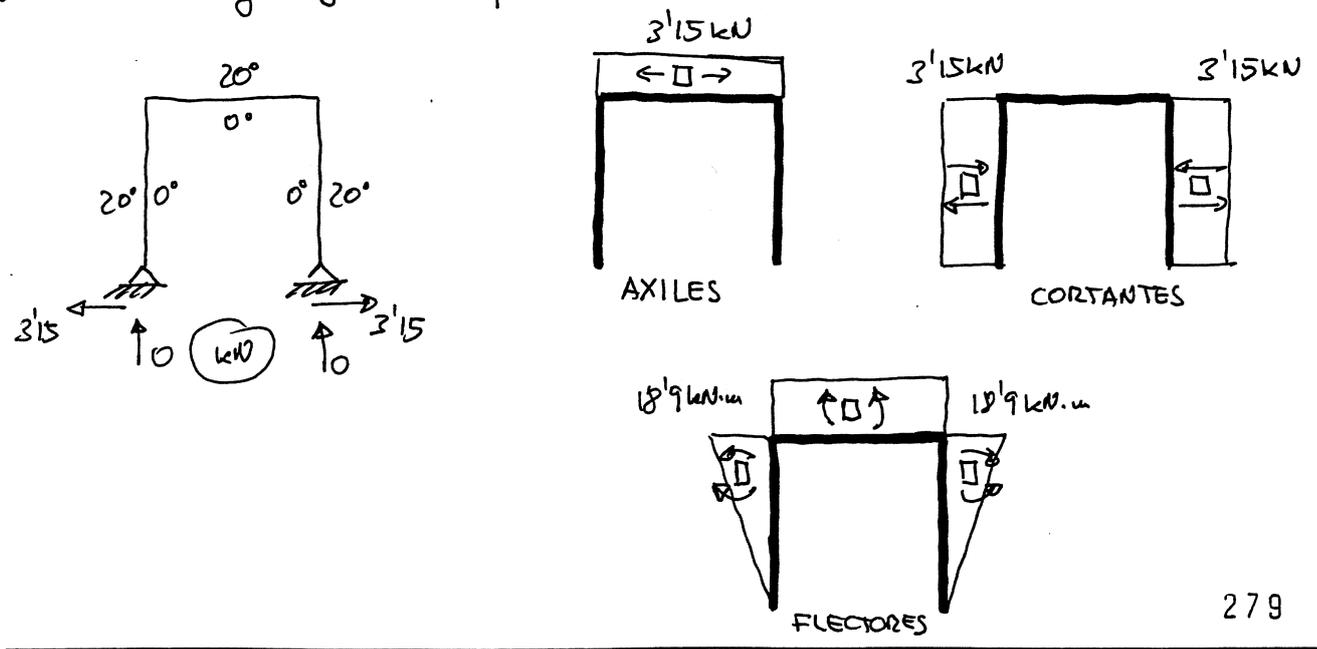
$$u_A = 0 \Rightarrow 0'005625 H + 1'25 \times 10^{-6} H = 0'018 - 3 \times 10^{-4} = 0'0177$$
$$H = 3'145968 = 3'15 \text{ kN}$$

\Rightarrow Despreciando la deformación por axil (pero no el alargamiento térmico)

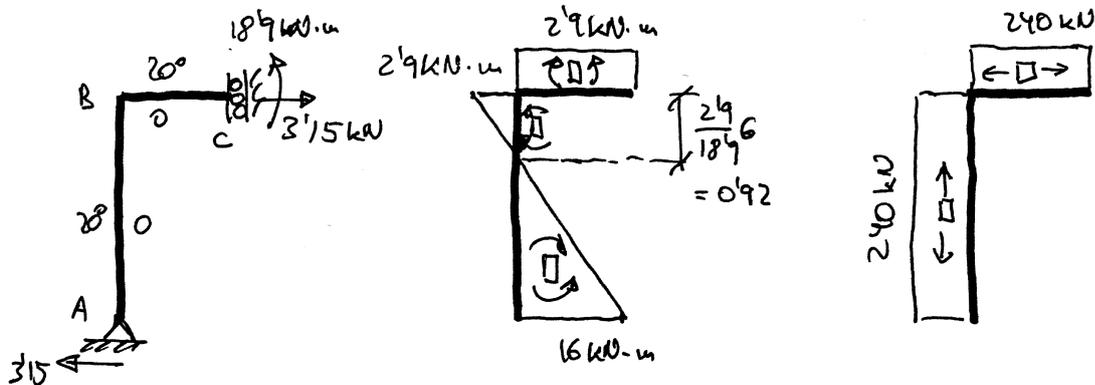
$$0'005625 H = 0'018 - 3 \times 10^{-4} = 0'0177$$
$$H = 3'146667 = 3'15 \text{ kN}$$

Se recomienda operar del segundo modo, pero no hay que olvidar que las deformaciones debidas al axil ficticio son deformaciones térmicas, y por lo tanto la regla de despreciar las debidas al axil frente a las debidas al flector no les afecta.

g) Reacciones y leyes de esfuerzos



o) leyes de esfuerzos (reales + ficticios) para calcular desplazamientos.



Como vamos a despreciar las deformaciones por axial frente a las de flexión, para el cálculo de desplazamientos sólo consideraremos los leyes de axiles ficticios.

o) Desplazamientos y deformada

$$\theta_B = \theta_C + \frac{1}{EI} \mathcal{M}_{CB} = 0 + \frac{1}{EI} (-29 \times 3) = -\frac{29 \times 3}{32000} = -2'72 \times 10^{-4} \text{ rad}$$

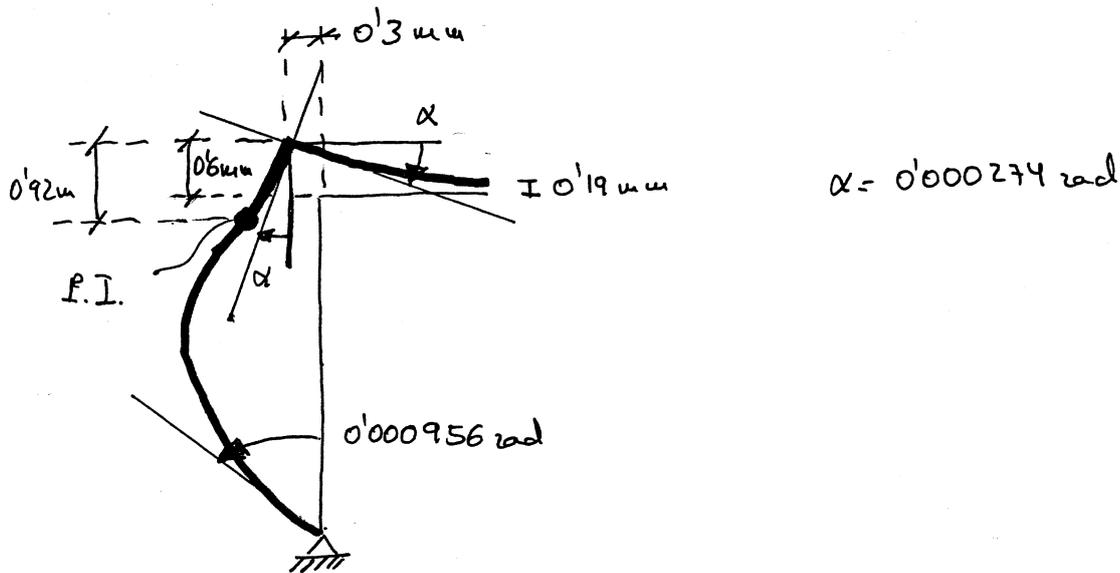
$$\theta_A = \theta_B + \frac{1}{EI} \mathcal{M}_{BA} = -2'72 \times 10^{-4} + \frac{1}{EI} \left(-\frac{1}{2} 29 \times 0'92 + \frac{1}{2} 16 \times 5'08 \right) = 9'56 \times 10^{-4} \text{ rad}$$

$$u_B = u_C + \int_C^B \frac{N}{EA} \cos \alpha \, dS = 0 - \frac{240}{24 \times 10^6} \times 3 = -3 \times 10^{-4} \text{ m} = -0'3 \text{ mm}$$

$$v_B = v_A + \int_A^B \frac{N}{EA} \sin \alpha \, dS = 0 + \frac{240}{24 \times 10^6} \times 6 = 6 \times 10^{-4} \text{ m} = 0'6 \text{ mm}$$

$$v_C = v_B + \theta_B \times 3 + \frac{1}{EI} \mathcal{M}_{BC}^{v_B} = 6 \times 10^{-4} - 2'72 \times 10^{-4} \times 3 + \frac{1}{EI} (29 \times 3 \times 1'5)$$

$$= 10^{-4} (6 - 8'16) + 4'09 \times 10^{-4} = 1'93 \times 10^{-4} \text{ m} = 0'19 \text{ mm}$$

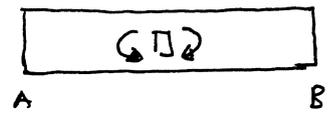
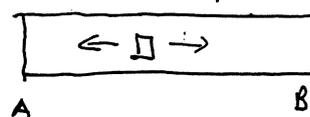
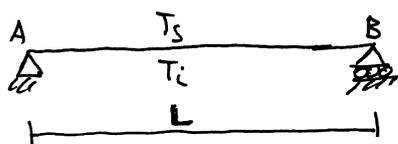


RESOLUCIÓN ALTERNATIVA POR DESCOMPOSICIÓN EN VIGAS

Aunque en este curso sólo se considera la resolución por descomposición en vigas de estructuras intrastacionales (los desplazamientos de todos los nudos son nulos), en este ejercicio vemos como se aplica este método a estructuras donde los desplazamientos de los nudos son conocidos a priori, que es el caso de la que nos ocupa. El método también se puede extender a estructuras trastacionales (algunos desplazamientos nodales son incógnitas del problema), pero en este curso no nos ocuparemos de ello.

Comenzaremos estudiando los movimientos que produce un gradiente térmico en una viga biarticulada.

Esfuerzos ficticios - los reales son $\equiv 0$ -



$$N^T = \alpha \frac{T_i + T_s}{2} EA$$

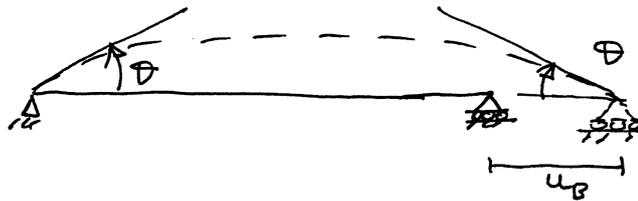
$$M^T = \alpha \frac{T_s - T_i}{h} EI$$

} ¡ Recuérdese que la sección es rectangular!

$$u_B = u_A + \int_A^B \frac{N}{EA} dX = 0 + \frac{N^T L}{EA} = \alpha L \frac{T_S + T_i}{2}$$

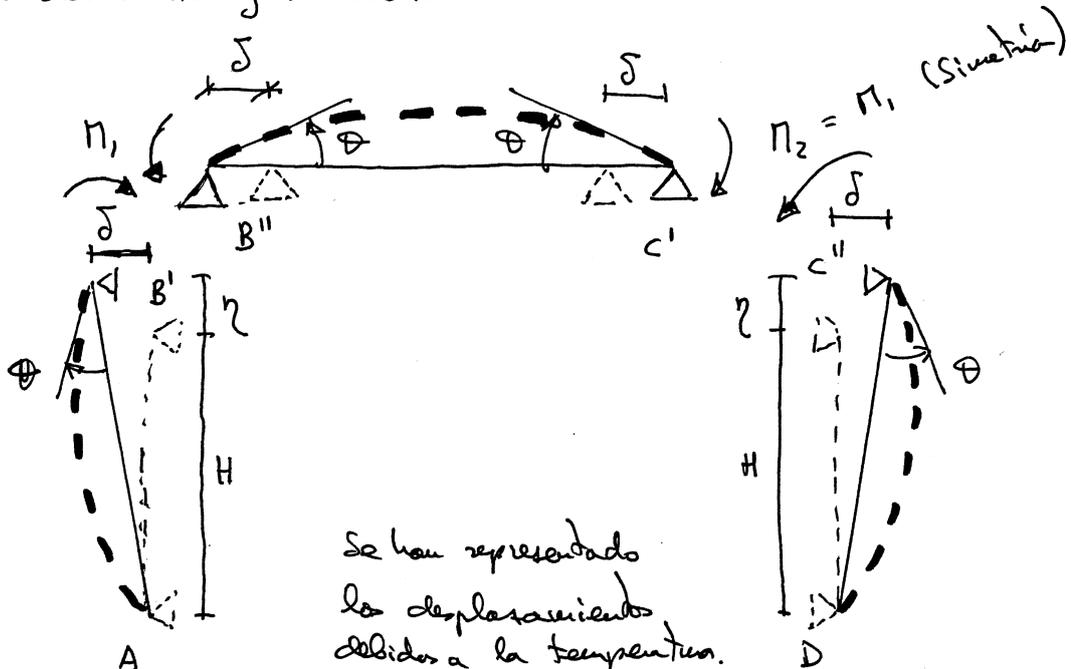
Simetría $\Rightarrow \theta_E = 0$ y $\theta_A = -\theta_B$.

$$\theta_B = \theta_E + \frac{1}{EI} M_{EB} = 0 - \frac{M^T L}{2EI} = -\alpha L \frac{T_S - T_i}{2h}$$



$$\theta = \alpha L \frac{T_S - T_i}{2h}$$

.) Descomposición en vigas. Ya dibujamos teniendo en cuenta que los nudos extremos del diñtal se mueven. Sus desplazamientos verticales vienen dados por los alargamientos de los pilas. Los horizontales, por el alargamiento del diñtal y la condición de simetría.



Se han representado los desplazamientos debidos a la temperatura. Falta los origines por M_1 y M_2 .

$$\delta = \frac{1}{2} \alpha L \frac{T_S + T_i}{2} = \frac{1}{2} 10^{-5} \times 6 \times \frac{20+0}{2} = 3 \times 10^{-4} \text{ m.}$$

$$\eta = \alpha L \frac{T_S + T_i}{2} = 6 \times 10^{-4} \text{ m}$$

$$H + \eta = 6 + 6 \times 10^{-4} \text{ m} \approx 6 \text{ m.} = H$$



$$\Theta = \alpha L \frac{T_s - T_i}{2L} = 10^{-5} \times 6 \times \frac{20 - 0}{0.4 \times 2} = 0.0015 \text{ rad.}$$

- Ecuaciones de compatibilidad. La condición de simetría implica que $M_2 = M_1$, y que las condiciones $\Theta_B' = \Theta_B''$ y $\Theta_C = \Theta_C'$ conduzcan a la misma ecuación.

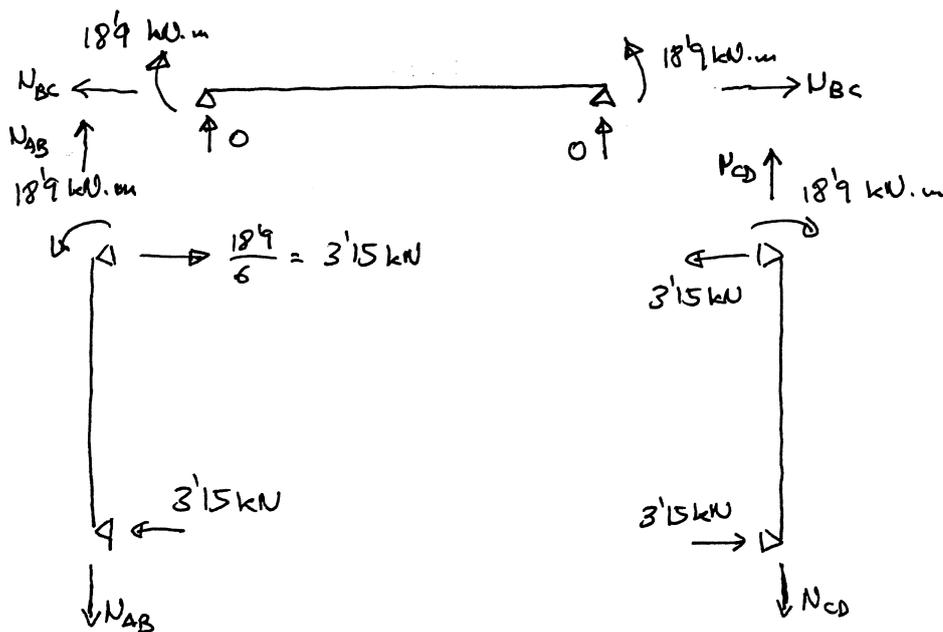
$$\Theta_B' = \Theta_B'' \Rightarrow \frac{\delta}{H} - \Theta - \frac{M_1 \cdot H}{3EI} = \Theta + \frac{M_1 L}{3EI} + \frac{M_1 L}{6EI}$$

Nótese que δ/H es el giro debido al desplazamiento δ , moviendo que la barra se comporta como un sólido rígido. En el denominador, de acuerdo con la hipótesis de pequeños desplazamientos, hemos hecho $H + \eta = H$.

$$\frac{3 \times 10^{-4}}{6} - 0.0015 - \frac{6 M_1}{3 \times 32000} = 0.0015 + \frac{6 M_1}{3 \times 32000} + \frac{6 M_1}{6 \times 32000}$$

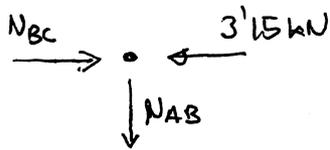
$$-0.00295 = \frac{6 M_1}{6 \times 32000} (2 + 1 + 2) = \frac{5 M_1}{32000} \Rightarrow M_1 = -18.88 \text{ kN.m.}$$

- Determinación de cortantes y axiles.





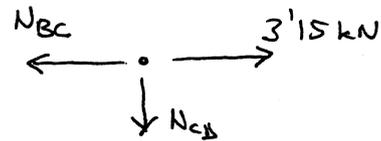
Equilibrio nudo B



$$N_{BC} = 3'15 \text{ kN}$$

$$N_{AB} = 0$$

Equilibrio nudo C



$$N_{BC} = 3'15 \text{ kN}$$

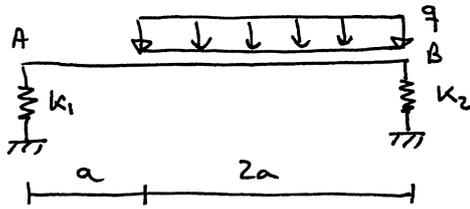
$$N_{CB} = 0$$

A partir de aquí, se dibujaron las leyes como en la página 3 y se termina el problema como en las hojas 4 y 5, aunque podrían utilizarse otras fórmulas para el cálculo de los giros.

- los propios del método de descomposición en vigas -



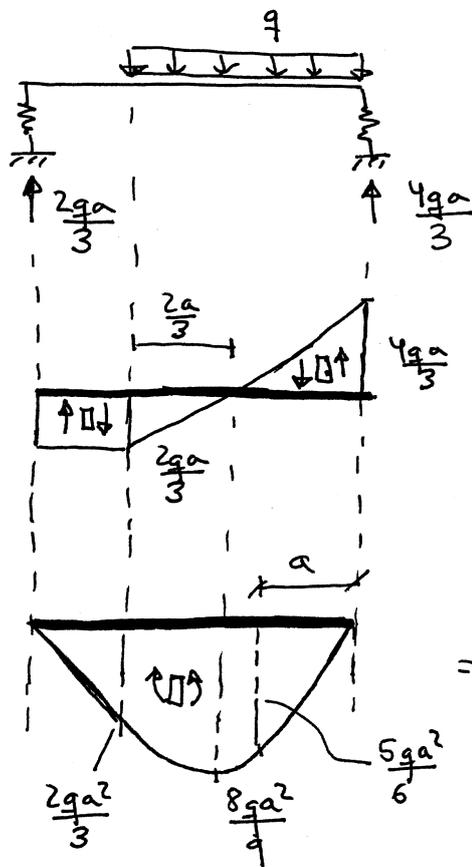
EJERCICIO Nº 73



$$k_1 = \frac{2EI}{a^3}$$

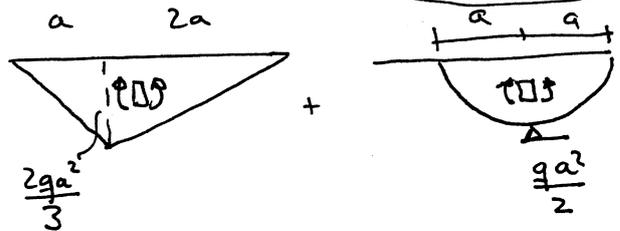
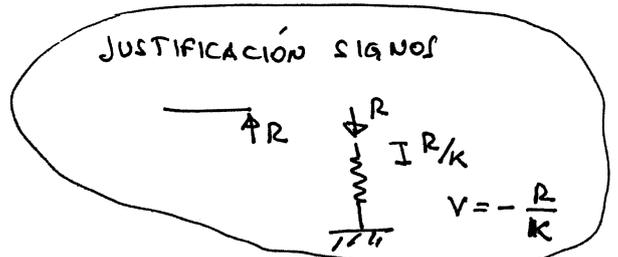
$$k_2 = \frac{EI}{a^3}$$

LA ESTRUCTURA ES ISOSTÁTICA.



$$V_A = -\frac{R_A}{k_1} = -\frac{2qa/3}{2EI/a^3} = -\frac{qa^4}{3EI}$$

$$V_B = -\frac{R_B}{k_2} = -\frac{4qa/3}{EI/a^3} = -\frac{4qa^4}{3EI}$$



GIROS

$$V_B = V_A + \Theta_A \cdot 3a + \frac{1}{EI} \left\{ \frac{1}{2} \frac{2qa^2}{3} a \frac{7a}{3} + \frac{1}{2} \frac{2qa^2}{3} \cdot 2a \cdot \frac{4a}{3} + \frac{1}{3} \frac{qa^2}{2} \cdot 2a \cdot a \right\}$$

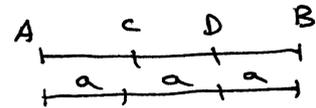
$$-\frac{4qa^4}{3EI} = -\frac{qa^4}{3EI} + 3a\Theta_A + \left\{ \frac{7qa^4}{9} + \frac{8qa^4}{9} + \frac{2qa^4}{3} \right\} \frac{1}{EI}$$



$$-\frac{3qa^4}{3EI} = 3a\theta_A + \frac{21qa^4}{9EI} \Rightarrow \left[\theta_A = \frac{1}{3a} \left(-\frac{qa^4}{EI} - \frac{21qa^4}{9EI} \right) \right. \\ \left. = \frac{1}{3a} \left(-\frac{30qa^4}{9EI} \right) = -\frac{10qa^3}{9EI} \right]$$

$$\left[\theta_B = \theta_A + \frac{1}{EI} \left\{ \frac{1}{2} \frac{2qa^2}{3} \cdot 3a + \frac{2}{3} \frac{qa^2}{2} \cdot 3a \right\} \right. \\ \left. = -\frac{10qa^3}{9EI} + \frac{qa^3}{EI} + \frac{2qa^3}{3EI} = \frac{5qa^3}{9EI} \right]$$

FLECHAS EN PUNTOS INTERMEDIOS



$$V_C = V_A + \theta_A a + \frac{1}{EI} \frac{1}{2} \frac{2qa^2}{3} \cdot a \cdot \frac{1}{3} a$$

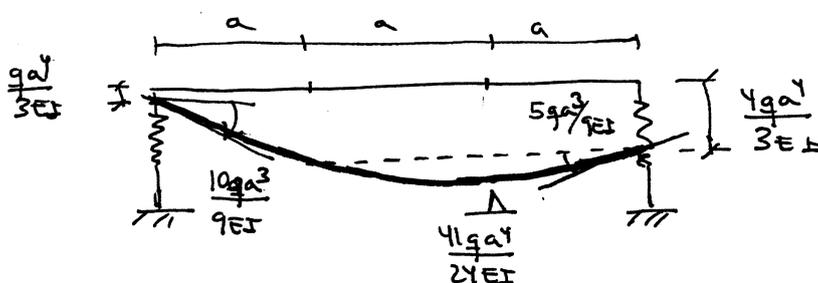
$$= -\frac{qa^4}{3EI} - \frac{10qa^4}{9EI} + \frac{qa^4}{9EI} = -\frac{12qa^4}{9EI} = -\frac{4qa^4}{3EI}$$

$$V_D = V_B - \theta_B a + \frac{1}{EI} \left\{ \frac{1}{2} \frac{qa^2}{3} \cdot a \cdot \frac{a}{3} + \frac{2}{3} \frac{qa^2}{2} \cdot a \cdot \frac{3a}{8} \right\}$$

$$= -\frac{4qa^4}{3EI} - \frac{5qa^4}{9EI} + \frac{1}{EI} \left\{ \frac{qa^4}{18} + \frac{qa^4}{8} \right\} = \frac{qa^4}{72EI} (-96 - 40 + 4 + 9)$$

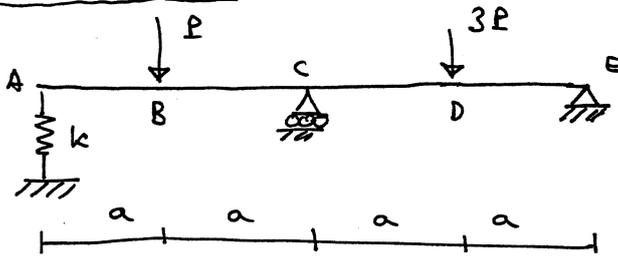
$$= -\frac{123qa^4}{72EI} = -\frac{41qa^4}{24EI}$$

DEFORNADA A ESTIMA



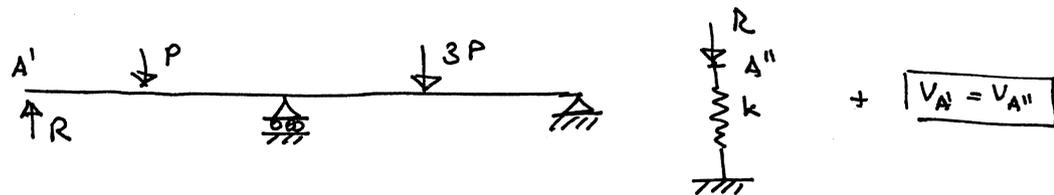


EJERCICIO N° 74



$$k = \frac{EI}{a^3}$$

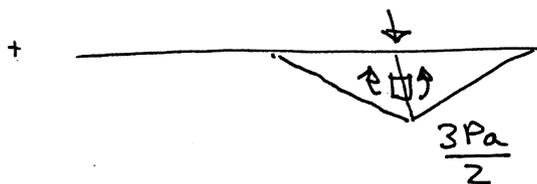
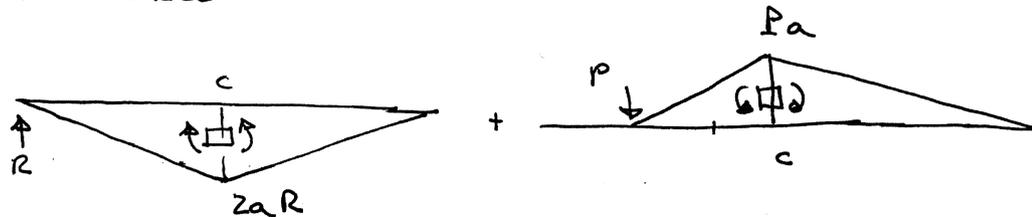
ISOSTATIZACIÓN



$$V_{A'} = V_{A''}$$

$$V_{A'} = V_{A''} = -\frac{R}{k}$$

FLECTORES



DESPLAZAMIENTOS

$$V_E = V_C + \theta_C \cdot 2a + \frac{1}{EI} \left\{ \frac{2aR \cdot 2a}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 2a - \frac{1}{2} Pa \cdot 2a \cdot \frac{2}{3} \cdot 2a + \frac{1}{2} \frac{3Pa}{2} \cdot 2a \cdot a \right\}$$



$$0 = 0 + 2a\theta_c + \frac{1}{EI} \left\{ \frac{8Ra^3}{3} - \frac{4Pa^3}{3} + \frac{3Pa^3}{2} \right\}$$

$$= 2a\theta_c + \frac{8Ra^3}{3EI} - \frac{Pa^3}{6EI} \Rightarrow \boxed{\theta_c = \frac{Pa^2}{12EI} - \frac{4Ra^2}{3EI}}$$

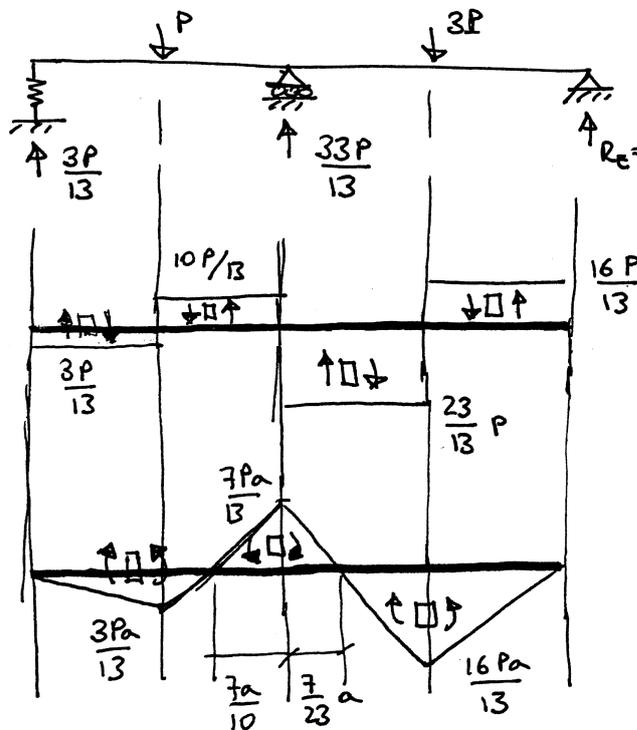
$$V_A' = \frac{1}{EI} \int_0^a P(x) dx - \theta_c \cdot 2a + \frac{1}{EI} \left\{ \frac{1}{2} \cdot 2Ra \cdot 2a \cdot \frac{2}{3} \cdot 2a - \frac{1}{2} Pa \cdot a \cdot \frac{5a}{3} \right\}$$

$$= -\frac{Pa^3}{6EI} + \frac{8Ra^3}{3EI} + \frac{8Ra^3}{3EI} - \frac{5Pa^3}{6EI} = \frac{32Ra^3}{6EI} - \frac{6Pa^3}{6EI}$$

$$V_A' = V_A'' \Rightarrow \frac{32Ra^3}{6EI} - \frac{Pa^3}{6EI} = -\frac{Ra^3}{EI}$$

$$\frac{26R}{6} - P = 0 \quad \boxed{R = \frac{6P}{26} = \frac{3P}{13}}$$

REACCIONES Y LEYES



$$\begin{cases} 2aR_e - 3Pa + Pa - \frac{3Pa}{13} \cdot 2a = 0 \\ 2aR_e - 2Pa - \frac{6Pa}{13} = 0 \end{cases} \Rightarrow R_e = \frac{16P}{13}$$



DESPLAZAMIENTOS Y GIROS

$$\theta_c = \frac{Pa^2}{12EI} - \frac{4Ra^2}{8EI} = \frac{Pa^2}{12EI} - \frac{12Pa^2}{39EI} = \frac{(13-4 \times 12) Pa^2}{156EI} = -\frac{35 Pa^2}{156EI}$$

$$\theta_A = \theta_c + \frac{1}{EI} \left\{ -\frac{1}{2} \times 2aR \cdot 2a + \frac{1}{2} Pa \cdot a \right\} = -\frac{35 Pa^2}{156EI} - \frac{2a^2}{EI} \frac{3P}{13} + \frac{Pa^2}{2}$$

$$= \frac{Pa^2}{156EI} (-35 - 72 + 78) = -\frac{29 Pa^2}{156EI}$$

$$\theta_E = \theta_c + \frac{1}{EI} \left\{ -\frac{1}{2} Pa \cdot 2a + \frac{1}{2} \frac{3Pa}{2} \cdot 2a \right\} = -\frac{35 Pa^2}{156EI} - \frac{Pa^2}{EI} + \frac{3Pa^2}{2EI}$$

$$= \frac{Pa^2}{156EI} (-35 - 156 + 234) = \frac{43 Pa^2}{156EI}$$

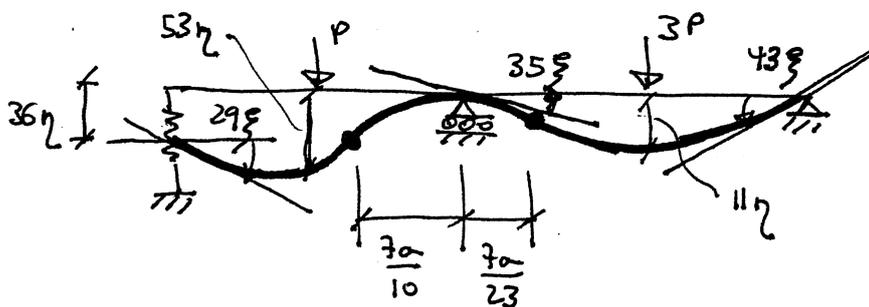
$$V_B = V_A + \theta_A a + \frac{1}{EI} \left\{ \frac{1}{2} \frac{3Pa}{13} \cdot a \cdot \frac{a}{2} \right\} = -\frac{3Pa^3}{13EI} - \frac{29 Pa^3}{156EI} + \frac{Pa^3}{26EI}$$

$$V_A = -\frac{R}{K} = -\frac{3Pa^3}{13EI} \quad \left\| \quad = \frac{Pa^3}{156EI} (-36 - 29 + 6) = -\frac{59 Pa^3}{156EI}$$

$$V_A = -\frac{36 Pa^3}{156EI} \quad V_B = -\frac{53 Pa^3}{156EI}$$

$$V_D = V_E - \theta_E a + \frac{1}{EI} \left\{ \frac{1}{2} \frac{16Pa}{13} \cdot a \cdot \frac{a}{3} \right\} = 0 - \frac{43 Pa^3}{156EI} + \frac{8Pa^3}{39EI} = -\frac{11 Pa^3}{156EI}$$

DEFORNADA A ESTIMA

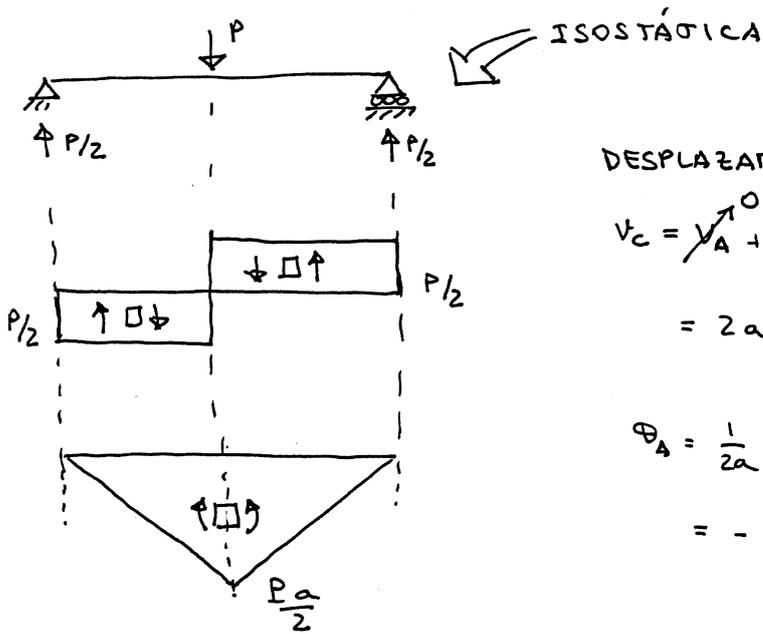
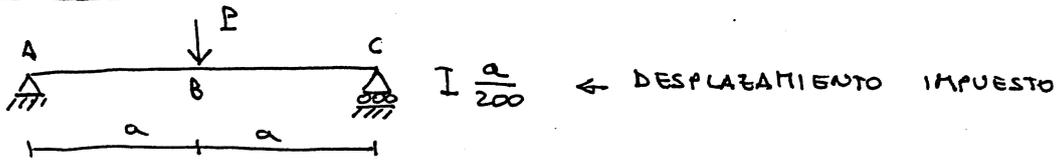


$$\xi = \frac{Pa^2}{156EI}$$

$$\eta = \frac{Pa^3}{156EI}$$



EJERCICIO Nº 75



DESPLAZAMIENTOS:

$$v_C = v_A + \theta_A \cdot 2a + \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{2} \frac{Pa}{2} \cdot 2a \cdot a \right]$$

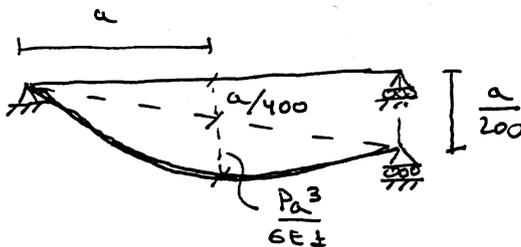
$$= 2a\theta_A + \frac{1}{EI} \frac{Pa^3}{2} = -\frac{a}{200}$$

$$\theta_A = \frac{1}{2a} \left[-\frac{a}{200} - \frac{Pa^3}{2EI} \right]$$

$$= -\frac{1}{400} - \frac{Pa^2}{4EI}$$

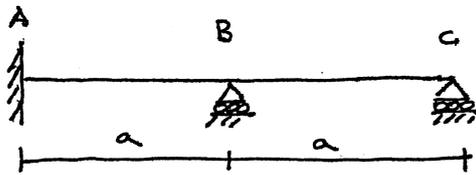
$$v_C = v_A + \theta_A a + \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{2} \frac{Pa}{2} \cdot a \cdot \frac{a}{3} \right] = -\frac{a}{400} - \frac{Pa^3}{4EI} + \frac{Pa^3}{12EI} = -\frac{a}{400} - \frac{Pa^3}{6EI}$$

DEFORMADA A ESTIMA





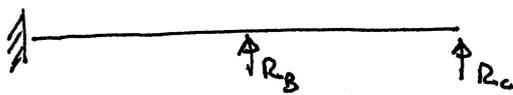
EJERCICIO Nº 76



Desplazamiento impuesto en B

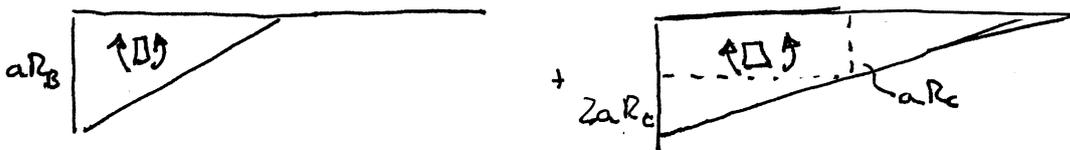
$$v_B = -\frac{a}{300}$$

ISOSTATIZACIÓN



$$\boxed{\begin{matrix} v_B = -\frac{a}{300} \\ v_C = 0 \end{matrix}}$$

FLECTORES



DESPLAZAMIENTOS

$$\begin{aligned} v_B &= \cancel{v_A} + \cancel{\theta_A} \cdot a + \frac{1}{EI} \left\{ \frac{1}{2} R_B a \cdot a \cdot \frac{2}{3} a + R_C a \cdot a \cdot \frac{a}{2} + \frac{1}{2} R_C a \cdot a \cdot \frac{2}{3} a \right\} \\ &= \frac{1}{EI} \left\{ \frac{R_B a^3}{3} + R_C a^3 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) \right\} = \frac{R_B a^3}{3EI} + \frac{5R_C a^3}{6EI} = -\frac{a}{300} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_C &= \cancel{v_A} + \cancel{\theta_A} \cdot 2a + \frac{1}{EI} \left\{ \frac{1}{2} R_B a \cdot a \cdot \frac{5a}{3} + \frac{1}{2} 2R_C a \cdot 2a \cdot \frac{2}{3} 2a \right\} \\ &= \frac{5R_B a^3}{6EI} + \frac{8R_C a^3}{3EI} = 0 \end{aligned}$$

ECUACIONES COMPATIBILIDAD

$$\left. \begin{aligned} 2a^3 R_B + 5a^3 R_C &= -\frac{6EIa}{300} & (1) \\ 5a^3 R_B + 16a^3 R_C &= 0 & (2) \end{aligned} \right\}$$

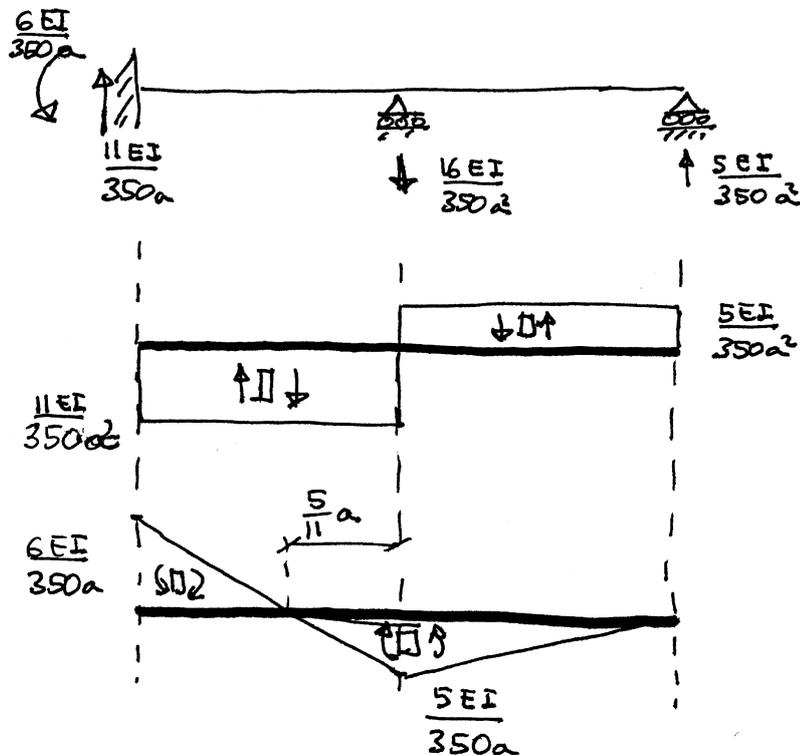


$$5 \cdot (1) - 2 \cdot (2)$$

$$-7a^3 R_c = -\frac{30 EI a}{300} = -\frac{EI a}{10} \Rightarrow R_c = \frac{EI}{70a^2}$$

$$R_B = -\frac{16a^3}{5a^3} R_B = -\frac{16}{5} R_B = -\frac{16 EI}{350a} = -\frac{8 EI}{175a^2}$$

RESUMEN REACCIONES Y LEYES.



GIROS

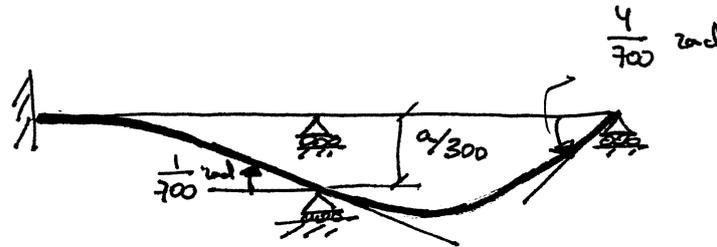
$$\theta_B = \theta_A + \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{2} \frac{6EI}{350a} \cdot \frac{6}{11} a + \frac{1}{2} \frac{5EI}{350a} \cdot \frac{5}{11} a \right]$$

$$= -\frac{36}{7700} + \frac{25}{7700} = -\frac{11}{7700} = -\frac{1}{700} = -0.00143 \text{ rad.}$$

$$\theta_c = \theta_B + \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{2} \frac{5EI}{350a} \cdot a \right] = -\frac{1}{700} + \frac{5}{700} = \frac{4}{700} = 0.00571 \text{ rad.}$$



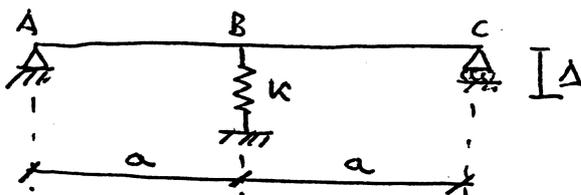
DEFORNADA A ESTIMA





EJERCICIO Nº 77

PLANTEADO EN EL EXAMEN DE DICIEMBRE DE 1996 DE LA ASIGNATURA
RESISTENCIA DE MATERIALES DE 2º CURSO DE ING. TEC. DE OBRAS PÚBLICAS.



$$k = \frac{12 EI}{a^3}$$

EN LA ESTRUCTURA DIBUJADA:

- 1.- DETERMINAR LAS REACCIONES,
- 2.- DIBUJAR LAS LEYES DE ESFUERZOS, Y
- 3.- DIBUJAR A ESTIMA LA DEFORMADA

DEBIDAS A UN DESCENSO DEL APOYO C, DE MAGNITUD Δ , ORIGINADO
POR UN ASIENTO DIFERENCIAL. (EN LOS ESQUEMAS CORRESPONDIENTES
SE ACOTARÁN LOS ESFUERZOS, DESPLAZAMIENTOS Y GIROS EN LOS
NUDOS A, B Y C.)



Asignatura

Curso

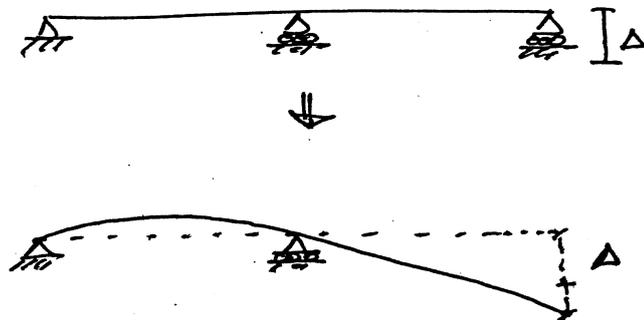
Grupo

INTRODUCCIÓN TEÓRICA:

MOVIMIENTO DE APOYO → EN UNA ESTRUCTURA ISOSTÁTICA HACE QUE TODA ELLA SE MUEVA COMO UN SÓLIDO RÍGIDO Y POR LO TANTO NO ORIGINA ESFUERZOS. EJEMPLO



→ EN UNA ESTRUCTURA HIPERESTÁTICA ORIGINA DEFORMACIONES, Y EN CONSECUENCIA ESFUERZOS, PORQUE NO SE PUEDE ADAPTAR A LA NUEVA POSICIÓN DE LOS APOYOS SIN DEFORMARSE. EJEMPLO



DETERMINACIÓN DE ESFUERZOS EN UNA ESTRUCTURA HIPERESTÁTICA; SE OPERA IGUAL QUE CUANDO LA SOLICITACIÓN ES UNA FUERZA EXTERIOR, PERO TENIENDO EN CUENTA AL DETERMINAR DESPLAZAMIENTOS PARA IMPONER LA COMPATIBILIDAD EL VALOR DEL DESPLAZAMIENTO IMPUESTO. SUELE DAR BUEN RESULTADO, PARA RESOLVER EL PROBLEMA, LIBERAR EL APOYO QUE SUFRE EL MOVIMIENTO Y TENERLO EN CUENTA EN LA ECUACIÓN DE COMPATIBILIDAD.

Nº

Apellidos y nombre

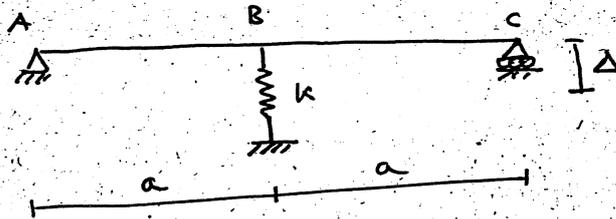
Firma

Fecha

295

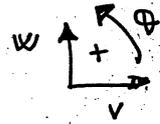


PRIMER PROCEDIMIENTO DE RESOLUCIÓN

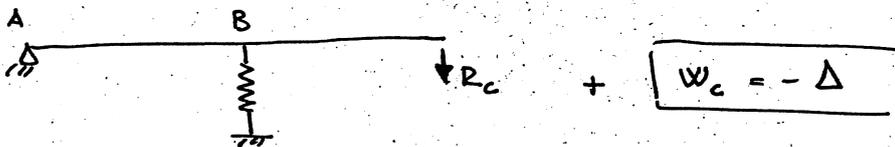


$$k = \frac{12EI}{a^3}$$

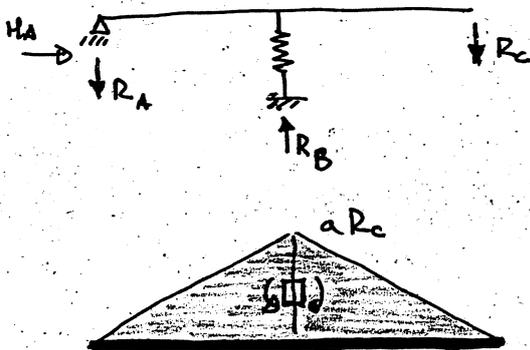
ES HIPERESTÁTICA GRADO 1.



LIBERAMOS EL APOYO C. LA SITUACIÓN ANTERIOR ES EQUIVALENTE A

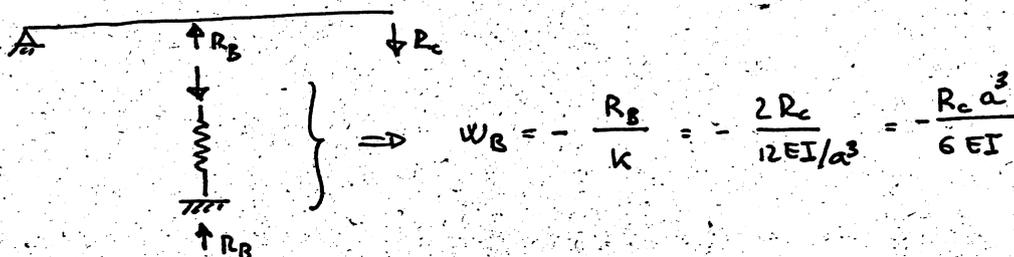


REACCIONES Y LEY DE FLECTORES



$$\begin{aligned} \sum F_H = 0 &\Rightarrow H_A = 0 \\ \sum M_B = 0 &\Rightarrow a R_A = a R_c \\ \sum F_V = 0 &\Rightarrow R_A + R_B + R_c = 0 \\ &R_B = 2 R_c \end{aligned}$$

MOVIMIENTO DE B



Reprovel PAPEL 100% RECICLADO

Nº	Apellidos y nombre	Firma	Fecha 29/6
----	--------------------	-------	------------



MOVIMIENTO DE C.

$$w_c = w_A + \theta_A \cdot 2a - \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} a R_c \cdot a \cdot a = 2a\theta_A - \frac{R_c a^3}{EI}$$

$$w_B = w_A + \theta_A a - \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} a R_c \cdot a \cdot \frac{a}{3} = \theta_A a - \frac{R_c a^3}{6EI}$$

$$w_B = -\frac{R_c a^3}{6EI} \quad (\text{autónom}) \quad \Rightarrow$$

$$\theta_A a - \frac{R_c a^3}{6EI} = -\frac{R_c a^3}{6EI} \Rightarrow \theta_A = 0$$

$$w_c = -\frac{R_c a^3}{EI}$$

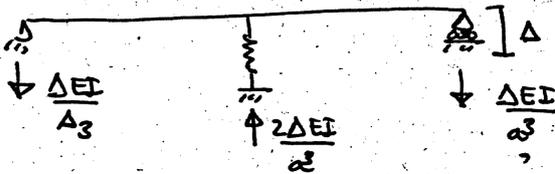
COMPATIBILIDAD

$$w_c = -\frac{R_c a^3}{EI} = -\Delta$$

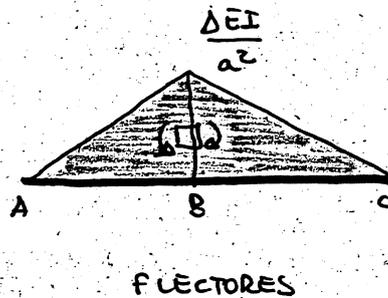
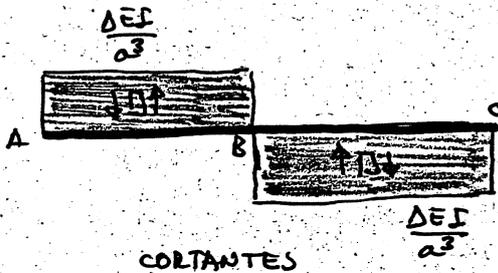
$$R_c = \frac{\Delta EI}{a^3}$$

RESULTADOS:

REACCIONES



ESFUERZOS



Nº	Apellidos y nombre	Firma	Fecha 29/7
----	--------------------	-------	------------

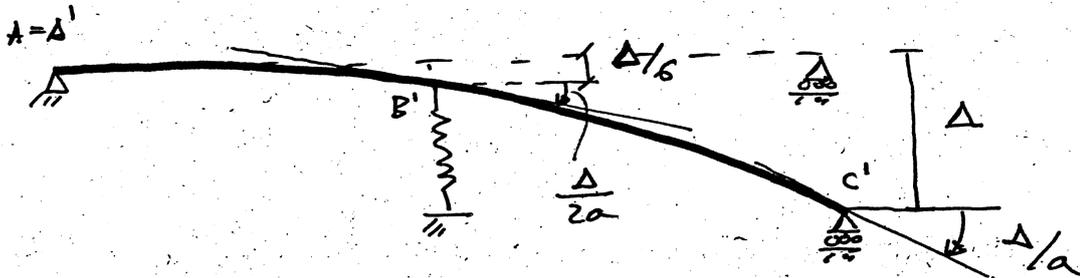


DEFORMADA :

$$W_B = \theta_A a - \frac{R_c a^3}{6EI} = 0 - \frac{\Delta EI}{a^3} \frac{a^3}{6EI} = -\frac{\Delta}{6}$$

$$\theta_B = \theta_A - \frac{1}{2EI} R_c a = 0 - \frac{a^2}{2EI} \frac{\Delta EI}{a^3} = -\frac{\Delta}{2a}$$

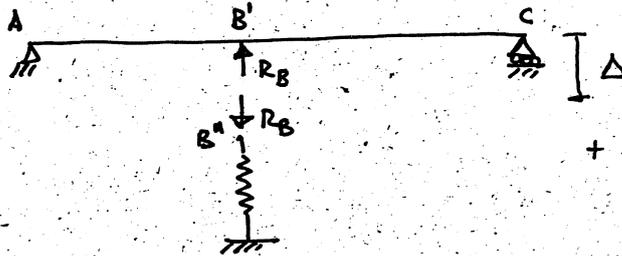
$$\theta_C = \theta_B - \frac{1}{EI} \frac{1}{2} R_c a = -\frac{\Delta}{2a} - \frac{a^2}{2EI} \frac{\Delta EI}{a^3} = -\frac{\Delta}{a}$$



SEGUNDO PROCEDIMIENTO DE RESOLUCIÓN

(LIBERANDO EL MUELLE)

1. SOSTITUCIÓN



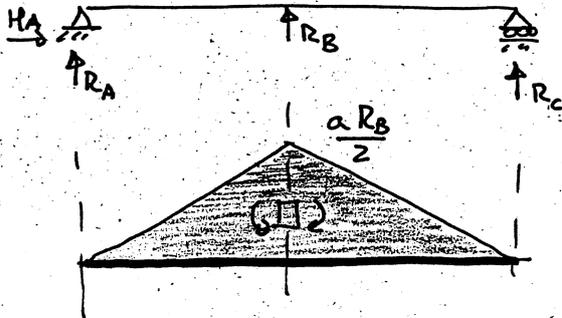
$$+ W_B^0 = W_B^{1'} \Rightarrow W_B^0 = -\frac{R_B}{K}$$

$$W_B^0 = -\frac{R_B a^3}{12EI}$$

Reproval PAPEL 100% RECICLADO

Nº	Apellidos y nombre	Firma	Fecha 298
----	--------------------	-------	-----------

REACCIONES Y LEY DE MOMENTOS



$$\sum F_H = 0 \Rightarrow H_A = 0$$

$$\sum M_B = 0 \Rightarrow R_A = R_C$$

$$\sum F_V = 0 \Rightarrow R_A = R_C = -\frac{R_B}{2}$$

DESPLAZAMIENTOS Y COMPATIBILIDAD

$$w_B = w_A + \theta_A \cdot a - \frac{1}{6} \frac{1}{2} \frac{a R_B}{2} \cdot a \frac{a}{3} = a \theta_A - \frac{a^3 R_B}{12EI}$$

$$w_C = -\Delta = w_A + 2a \theta_A - \frac{1}{6} \frac{1}{2} \frac{a R_B}{2} \cdot 2a \cdot a = 2a \theta_A - \frac{a^3 R_B}{2EI} = -\Delta \Rightarrow$$

$$\theta_A = -\frac{\Delta}{2a} + \frac{a^2 R_B}{4EI}$$

$$w_B = \left(-\frac{\Delta}{2a} + \frac{a^2 R_B}{4EI} \right) \cdot a - \frac{a^3 R_B}{12EI} = -\frac{\Delta}{2} + \frac{a^3 R_B}{6EI} \Rightarrow$$

$$w_B = -\frac{R_B a^3}{12EI} \quad (\text{ec. compatibilidad})$$

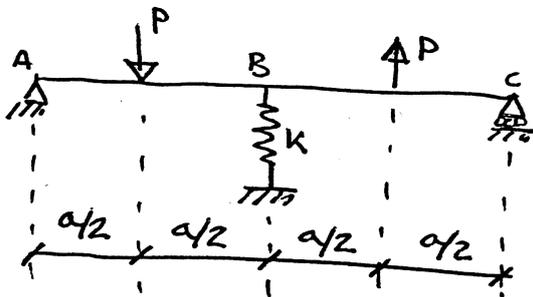
$$-\frac{\Delta}{2} + \frac{a^3 R_B}{6EI} = -\frac{a^3 R_B}{12EI} \Rightarrow \frac{a^3 R_B}{4EI} = \frac{\Delta}{2} \Rightarrow R_B = \frac{2\Delta EI}{a^3}$$

Se obtiene el mismo valor de R_B que en el caso anterior, como debe ser. A partir de aquí, se completa el problema como en el citado caso anterior.



EJERCICIO Nº 78

PLANTEADO EN EL EXAMEN DE RESISTENCIA DE MATERIALES DE 2º CURSO DE
ING. TEC. DE OBRAS PÚBLICAS DE DICIEMBRE DE 1996.



$$k = \frac{12EI}{a^3}$$

PARA LA ESTRUCTURA Y CARGA REPRESENTADAS, DETERMINAR
LA REACCIÓN EN B.

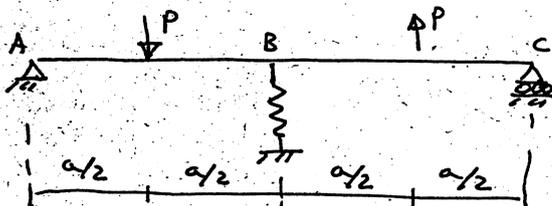


Asignatura:

Curso

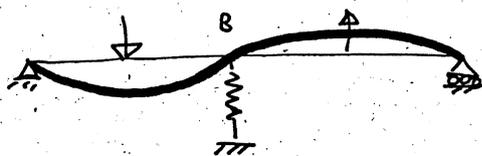
Grupo

EJERCICIO Nº 3



ESTRUCTURA SIMÉTRICA DE FORMA Y ANTISIMÉTRICA DE CARGA

⇒ DEFORMADA ANTISIMÉTRICA ⇒ $w_B = 0$



REACCION EN EL NIVELLE

$$R_B = k w_B = 0$$

Nº

Apellidos y nombre

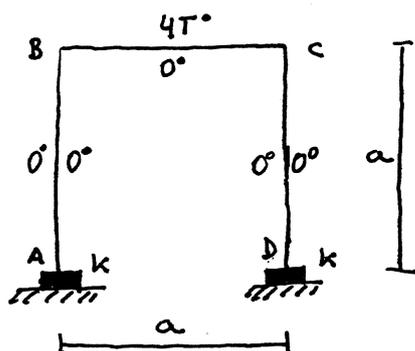
Firma

Fecha 30.1

EJERCICIO Nº 79

RESISTENCIA DE MATERIALES OO. PP.

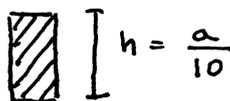
1 - IX - 97



- CONSTANTE EMPOTRAMIENTOS ELÁSTICOS

$$k = \frac{6EI}{a}$$

- SECCIÓN TRANSVERSAL DE LAS BARRAS (SON TODAS IGUALES)



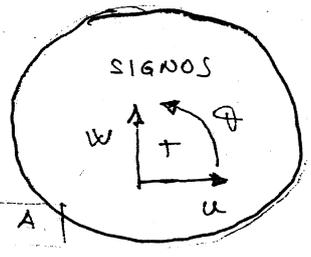
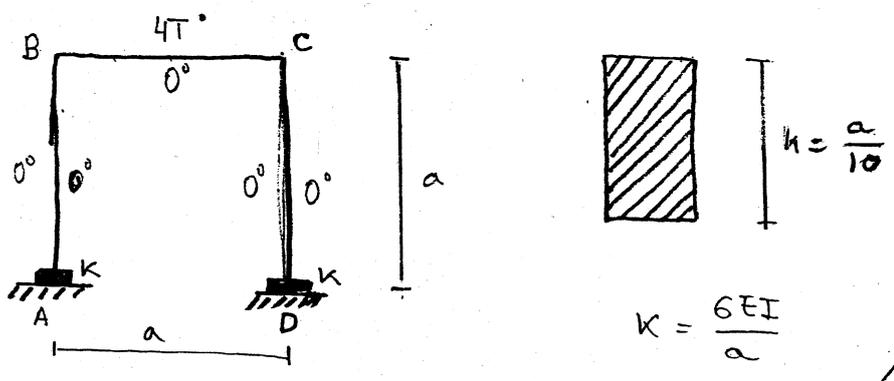
" MOMENTO DE INERCIA = I

- SOLICITACIÓN: GRADIENTE TÉRMICO EN EL DINTEL BC.
- COEFICIENTE DE DILATACIÓN TÉRMICA = α °C⁻¹
- MÓDULO DE ELASTICIDAD = E.

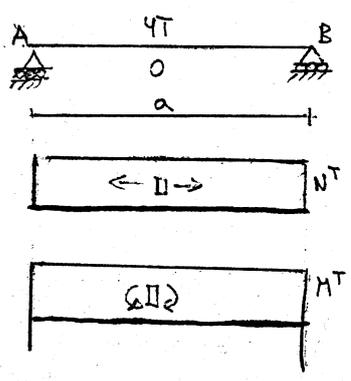
SE PIDE:

- 1.- REACCIONES.
- 2.- LEYES DE ESFUERZOS (DIBUJAR UN ESQUEMA INDICANDO LOS PUNTOS MÁS CARACTERÍSTICOS)
- 3.- DESPLAZAMIENTOS Y GIROS DE LOS NUDOS.
- 4.- DIBUJAR LA DEFORMADA A ESTIMA.

TIEMPO: 1 HORA.



- ESTRUCTURA H-3.
- RESOLVEREMOS POR DESCOMPOSICIÓN EN VIGAS. → ALTERNATIVA A
- PRIMERO ESTUDIAREMOS EL LINTEL COMO VIGA ENFOYADA:



$$N^T = \alpha EA \frac{T_2 - T_1}{2} = \alpha EA \frac{4T + 0}{2} = 2TEA\alpha$$

$$M^T = \alpha EI \frac{T_2 - T_1}{h} = \alpha EI \frac{4T - 0}{h} = \frac{40T\alpha EI}{a}$$

$$\theta_A = -\theta_B \quad (\text{POR SIMETRÍA})$$

$$\theta_B = \theta_A + \frac{1}{EI} N^T \cdot a = -\theta_B + 40T\alpha$$

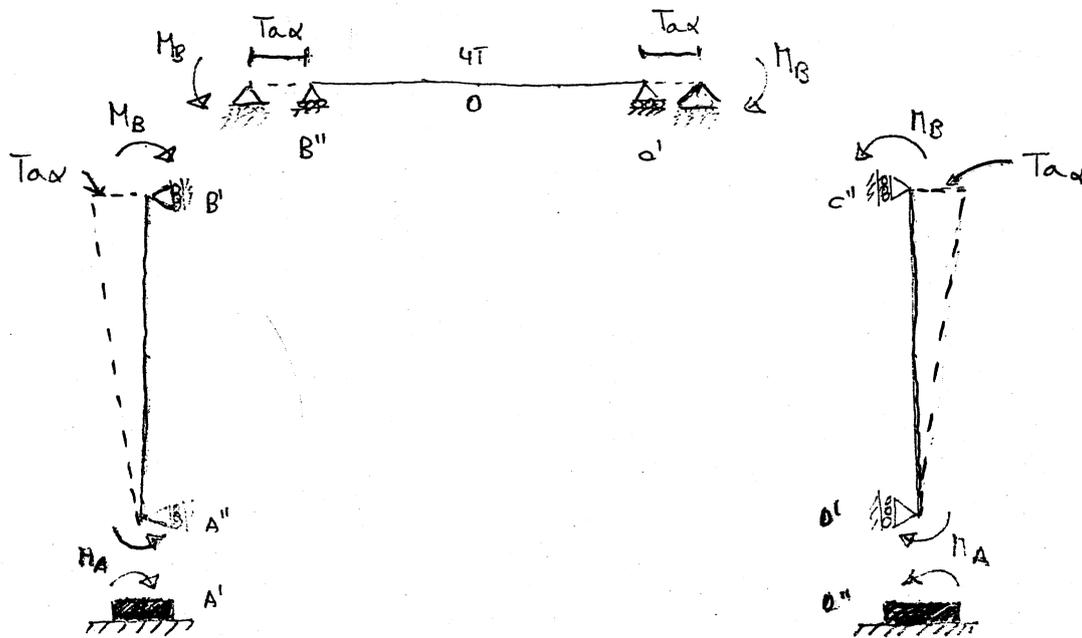
$$\theta_B = 20T\alpha = -\theta_A$$

POR LA SIMETRÍA, EL PUNTO CUYO MOVIMIENTO HORIZONTAL ES NULO ES EL PUNTO MEDIO DE LA VIGA. REPRESENTÉMOLO POR ξ .

$$u_B = u_\xi + \frac{1}{EA} N^T \frac{a}{2} = 0 + \frac{1}{EA} 2TEA\alpha \cdot \frac{a}{2} = T\alpha a = -u_A$$

- EL DESPLAZAMIENTO VERTICAL DE LOS PUNTOS C Y D (ESTRUCTURA INICIAL) ES NULO, PORQUE AC Y BD SON INEXTENSIBLES.
- LOS NUDOS C Y D PUEDEN ROVERSE, LUEGO LA ESTRUCTURA ES TRASLACIONAL. DESPRECIANDO LAS DEFORMACIONES POR AXIL FRENTE A LAS DEBIDAS A LA FLEXIÓN Y A LOS ALARGAMIENTOS TÉRMICOS, LOS MOVIMIENTOS DE ESTOS NUDOS SON CONOCIDOS A PRIORI ($w_c = w_d = 0$, $u_d = +T\alpha a$, $u_c = -T\alpha a$). EN LA DESCOMPOSICIÓN EN VIGAS, SE TRATAN IGUAL QUE LOS GRADOS DE TRASLACIONALIDAD, PERO NO SON INCOGNITAS DEL PROBLEMA.

• DESCOMPOSICIÓN EN VIGAS. (TENIENDO EN CUENTA LA SIMETRÍA Y LOS MOVIMIENTOS DE LOS NUDOS).



• ECUACIONES DE COMPATIBILIDAD DE GIROS.

$$\theta_{A'} = \theta_{A''} \rightarrow -\frac{M_A}{k} = \frac{T\alpha \cdot a}{a} + \frac{M_A \cdot a}{3EI} - \frac{M_B \cdot a}{6EI}$$

$$-\frac{M_A \cdot a}{6EI} = T\alpha + \frac{M_A \cdot a}{3EI} - \frac{M_B \cdot a}{6EI}$$

$$\frac{M_A \cdot a}{2EI} + \frac{M_B \cdot a}{6EI} = -T\alpha$$

$$3M_A + M_B = -\frac{6EI}{a} T\alpha = -\xi$$

$$\theta_{B'} = \theta_{B''} \rightarrow \frac{T\alpha \cdot a}{a} - \frac{M_B \cdot a}{3EI} - \frac{M_A \cdot a}{6EI} = \frac{M_B \cdot a}{3EI} + \frac{M_B \cdot a}{6EI} + 2\theta T\alpha$$

$$-19T\alpha = \frac{5M_B \cdot a}{6EI} + \frac{M_A \cdot a}{6EI}$$

$$M_A + 5M_B = -19\frac{6EI}{a} T\alpha = -19\xi$$

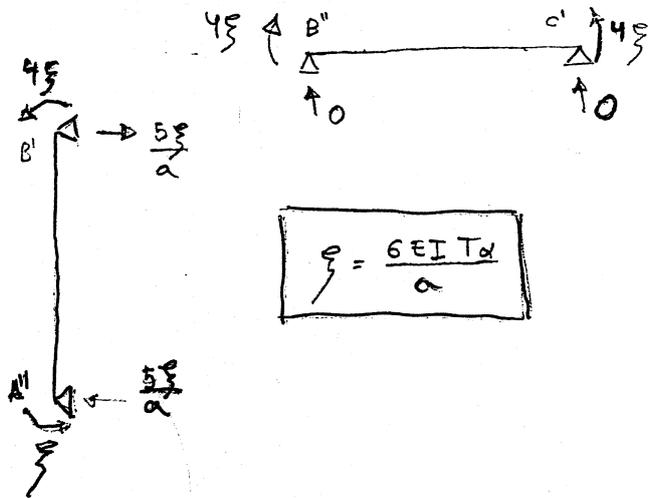
$$\left. \begin{aligned} 3M_A + M_B &= -\xi \\ M_A + 5M_B &= -19\xi \end{aligned} \right\}$$

$$14M_A = (-3+19)\xi = 14\xi \rightarrow$$

$$\xi + 5M_B = -19\xi \rightarrow$$

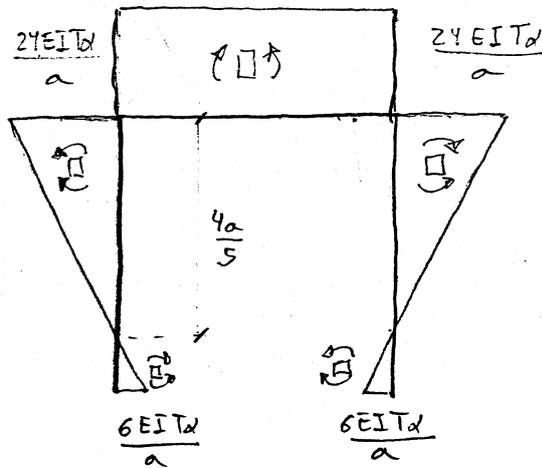
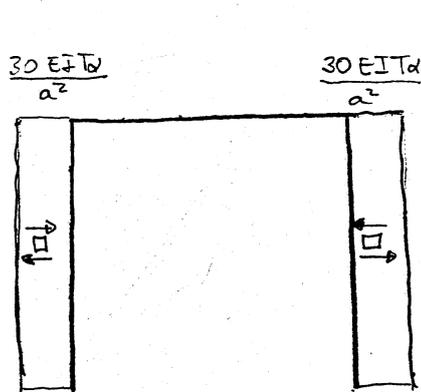
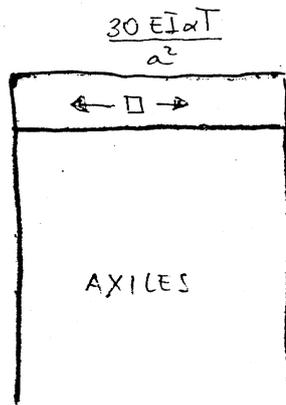
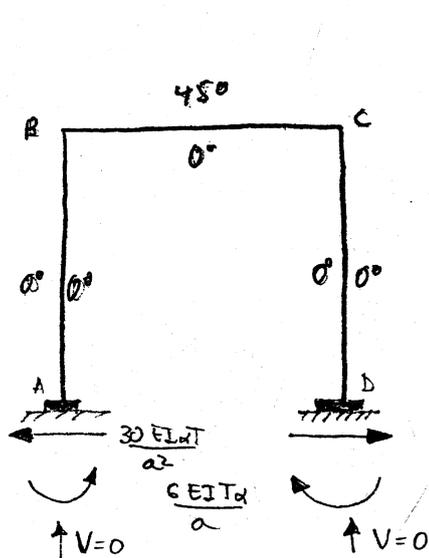
$$\begin{aligned} M_A &= \xi = \frac{6EI T\alpha}{a} \\ M_B &= -4\xi = -\frac{24EI T\alpha}{a} \end{aligned}$$

• REACCIONES Y LEYES DE ESFUERZOS.



$$\theta = \frac{6EI\alpha T}{a}$$

Simétrico



•) DESPLAZAMIENTOS Y GIROS EN LOS NUDOS.

$$u_A = w_A = u_D = w_D = 0$$

$$w_B = w_C = 0 \quad u_B = -T\alpha \quad u_C = T\alpha$$

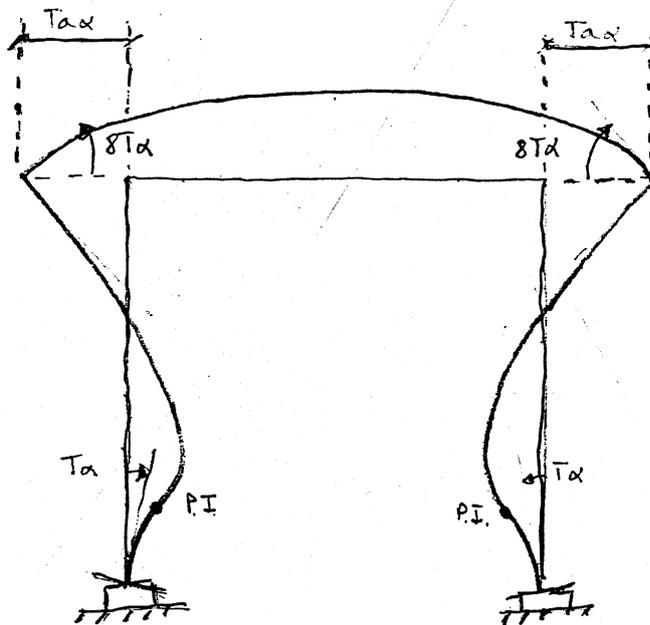
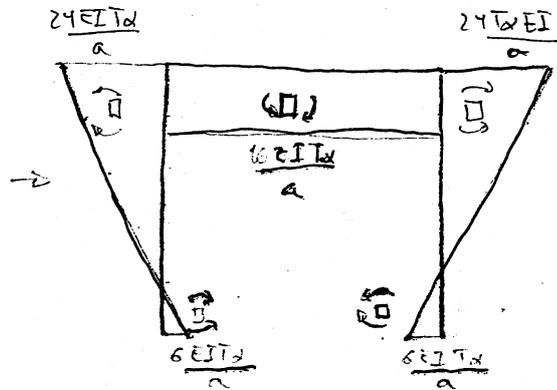
$$\theta_A = -\frac{M_A}{K} = -\frac{6EI T\alpha}{a} \cdot \frac{a}{6EI} = -T\alpha \quad \theta_D = T\alpha$$

$$\theta_B = T\alpha - M_B \frac{a}{3EI} - \pi_A \frac{a}{6EI} = T\alpha + \frac{24EI T\alpha}{a} \frac{a}{3EI} - \frac{6EI T\alpha}{a} \frac{a}{6EI} = T\alpha + 8T\alpha - T\alpha = 8T\alpha$$

$$\theta_C = -\theta_B = -8T\alpha$$

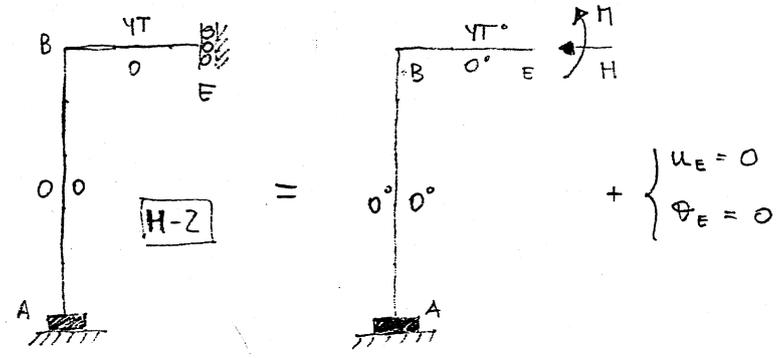
• DEFORMADA A ESTIMA

LEY FLECTORES FICTICIA
PARA DIBUJAR LA DEFORMADA



ALTERNATIVA B.

- SIMETRÍA E ISOSTATIZACIÓN.

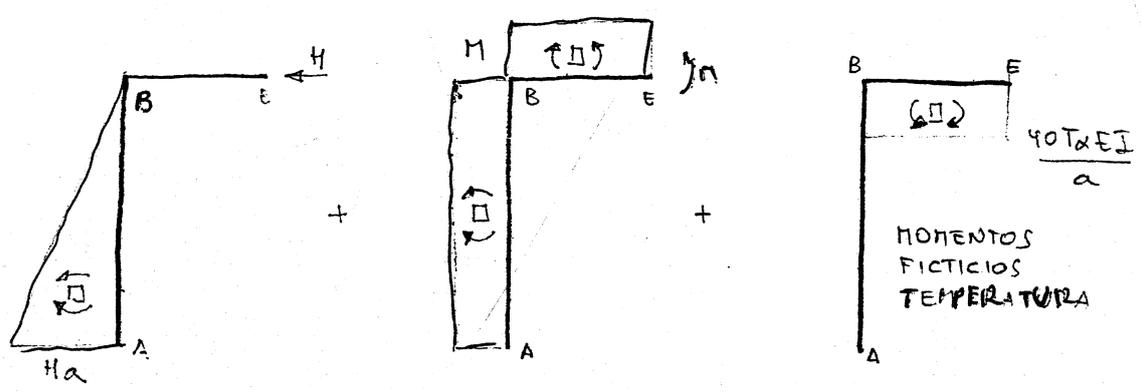


- ESFUERZOS FICTICIOS TEMPERATURA

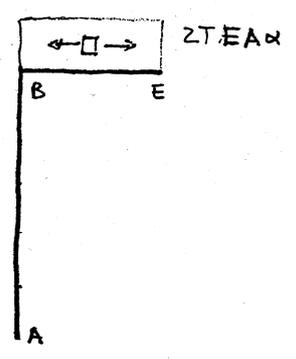
$$N^T = \alpha EA \frac{T_2 + T_1}{2} = \alpha EA \frac{4T + 0}{2} = 2TEA\alpha$$

$$M^T = \alpha EI \frac{T_2 - T_1}{h} = \alpha EI \frac{4T - 0}{a/h} = \frac{40T\alpha EI}{a}$$

- LEY DE FLECTORES



- LEY DE AXILES FICTICIOS. (LA REAL NO HACE FALTA POR AHORA, YA QUE DESPRECIAMOS LAS DEFORMACIONES POR AXIL FRENTE A LAS DE FLEXIÓN Y A LOS ALARGATIENOS TÉRMICOS.)



• ECUACIONES DE COMPATIBILIDAD.

$$\begin{aligned} \vartheta_E = 0 & \quad \left(= \frac{H a}{k} \right) \\ \vartheta_E = \vartheta_A + \frac{1}{EI} \left\{ \frac{1}{2} H a \cdot a + M \cdot a + H \frac{a}{2} - \frac{40 T \alpha EI}{a} \frac{a}{2} \right\} \\ &= \frac{M + H a}{6EI/a} + \frac{1}{EI} \left\{ \frac{H a^2}{2} + \frac{3 M a}{2} - 20 T \alpha EI \right\} \\ &= \frac{H a}{6EI} + \frac{3 M a}{2EI} + \frac{H a^2}{6EI} + \frac{H a^2}{2EI} - 20 T \alpha = \frac{10 M a}{6EI} + \frac{4 H a^2}{6EI} - 20 T \alpha = 0 \end{aligned}$$

$u_E = 0$

$$\begin{aligned} u_E = \cancel{\vartheta_A} \cdot a - \vartheta_A \cdot a + \frac{1}{EI} \left\{ -\frac{1}{2} H a \cdot a \frac{2}{3} a - M a \frac{a}{2} \right\} &= \frac{1}{EI} \left\{ 2 T \alpha EI \frac{a}{2} \right\} \\ &= -\frac{M + H a}{6EI/a} \cdot a + \frac{1}{EI} \left\{ -\frac{H a^3}{3} - \frac{M a^2}{2} \right\} + T \alpha a \\ &= -\frac{H a^2}{6EI} - \frac{M a^2}{2EI} - \frac{H a^2}{6EI} - \frac{H a^2}{3EI} + T \alpha a = -\frac{2 M a^2}{3EI} - \frac{H a^2}{2EI} + T \alpha a = 0 \end{aligned}$$

$$10 M + 4 H a = \frac{120 T \alpha EI}{a} \rightarrow 5 M + 2 H a = 60 \frac{T \alpha EI}{a} = 60 \mu$$

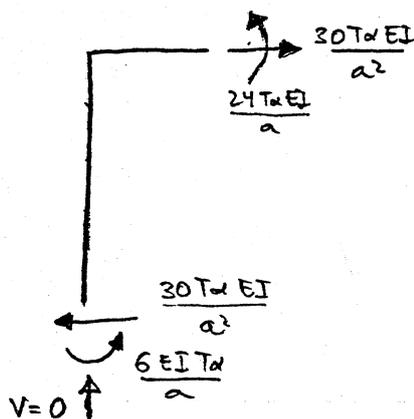
$$4 H a + 3 H a^2 = 6 \frac{T \alpha EI}{a} \alpha \rightarrow 4 M + 3 H a = 6 \frac{T \alpha EI}{a} = 6 \mu$$

$$\left. \begin{aligned} 5 M + 2 H a &= 60 \mu \\ 4 M + 3 H a &= 6 \mu \end{aligned} \right\} M = \frac{\begin{vmatrix} 60 \mu & 2 a \\ 6 \mu & 3 a \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & 2 a \\ 4 & 3 a \end{vmatrix}} = \frac{\mu \alpha (180 - 12)}{\alpha (15 - 8)} = \frac{168 \mu}{7} = 24 \mu$$

$$H = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 60 \mu \\ 4 & 6 \mu \end{vmatrix}}{7 a} = \frac{\mu (30 - 240)}{7 a} = -\frac{210 \mu}{7 a} = -30 \frac{\mu}{a}$$

$M = 24 \mu = \frac{24 T \alpha EI}{a}$
 $H = -30 \frac{\mu}{a} = -\frac{30 T \alpha EI}{a^2}$

• REACCIONES



• LEYES DE ESFUERZOS → VÉASE HOJA 3.

• DESPLAZAMIENTOS Y GIROS EN LOS NUDOS.

$$u_A = w_A = u_D = w_D = 0$$

$$\Phi_A = \frac{M_A}{K} = -\frac{6EI T \alpha}{a} \frac{a}{6EI} = -T \alpha \quad \Phi_D = -\Phi_A = T \alpha$$

$$w_B = w_C = 0$$

$$u_B = u_E + \frac{1}{EI} \{0\} + \frac{1}{EA} \left\{ -2TAE \alpha \frac{a}{2} \right\} = -T \alpha a$$

$$u_C = -u_B = T \alpha a$$

$$\Phi_B = \Phi_E + \frac{1}{EI} \left\{ -\pi \frac{a}{2} + \frac{40T \alpha EI \alpha}{a} \frac{a}{2} \right\} = \frac{1}{EI} \frac{(-24 + 40) T \alpha EI}{a} \frac{a}{2} = +8T \alpha$$

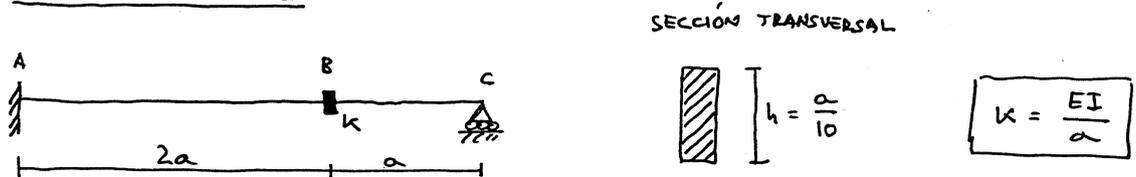
$$\Phi_C = -\Phi_B = -8T \alpha$$

• DEFORMADA A ESTIMA → VÉASE HOJA 4.

EJ. Nº 80 SEGUNDO EXAMEN PARCIAL DE RESISTENCIA DE MATERIALES
(2º CURSO ING. TEC. OO. PP.)

4-JUNIO-97

EJERCICIOS 1 Y 2.



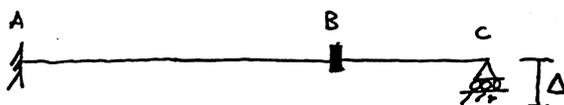
LA FIGURA ANTERIOR MUESTRA LA VIGA ABC, CUYA RIGIDEZ A FLEXIÓN ES EI Y SU SECCIÓN TRANSVERSAL LA REPRESENTADA. EL COEFICIENTE DE DILATACIÓN TÉRMICA DEL MATERIAL QUE LA FORMA ES α , Y EL SÍMBOLO QUE APARECE EN B (—■—) REPRESENTA UN RESORTE HELICOIDAL, O EMPOTRAMIENTO ELÁSTICO, DE CONSTANTE $k = \frac{EI}{a}$. (NOTA: EN OCASIONES EL RESORTE HELICOIDAL SE REPRESENTA .)

LOS EJERCICIOS 1 Y 2 SE REFIEREN A ESTA ESTRUCTURA. EN AMBOS CASOS, PARA LAS SOLICITACIONES QUE SE DEFINEN A CONTINUACIÓN, SE PIDE:

- 1.- REACCIONES (INDICÁNDOLAS SOBRE UN ESQUEMA DE LA ESTRUCTURA)
- 2.- DIBUJAR LEYES DE ESFUERZOS.
- 3.- DESPLAZAMIENTO VERTICAL EN B Y GIRO RELATIVO EN EL RESORTE HELICOIDAL.
- 4.- DIBUJAR LA DEFORMADA A ESTIMA.

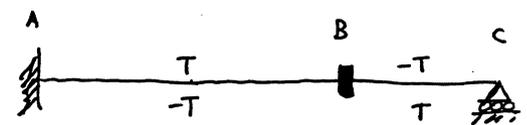
LAS SOLICITACIONES, EN CADA CASO, SON LAS SIGUIENTES:

EJERCICIO 1



ASIENTO DIFERENCIAL EN C DE VALOR $\Delta = \frac{a}{100}$

EJERCICIO Nº 2

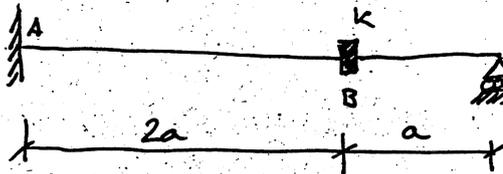


GRADIENTE TÉRMICO. NÓTESE QUE EL SIGNO EN AB ES EL CONTRARIO QUE EN BC

TIEMPO: 1 HORA 10 MINUTOS

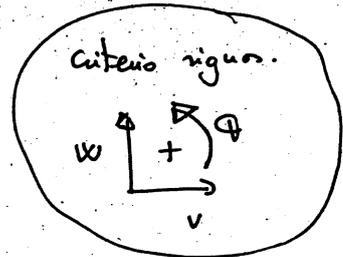


EJERCICIO Nº 80.1



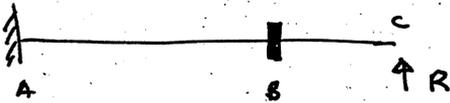
$I \Delta = \frac{a}{100}$

$K = \frac{EI}{a}$

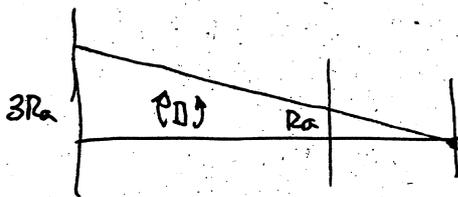


19/03

ISOSTATIZACIÓN.



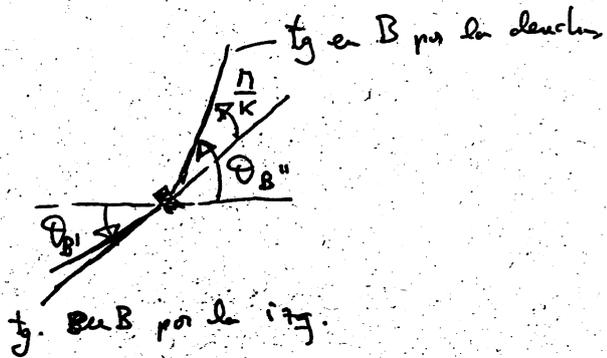
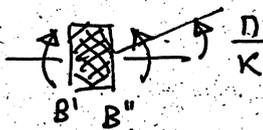
$+ |w_c = -\Delta|$



$$w_B = w_A + \theta_A \cdot 2a + \frac{1}{EI} \left\{ \frac{1}{2} \cdot 2Ra \cdot 2a \cdot \frac{2}{3} \cdot 2a + Ra \cdot 2a \cdot a \right\}$$

$$= \frac{8Ra^3}{3EI} + \frac{2Ra^3}{EI} = \frac{14Ra^3}{3EI}$$

$$\theta_B = \theta_A + \frac{1}{EI} \left\{ \frac{1}{2} \cdot 2Ra \cdot 2a + Ra \cdot 2a \right\} = \frac{4Ra^2}{EI}$$



Reproval PAPEL 100% RECICLADO

Nº	Apellidos y nombre	Firma	Fecha 3/11
----	--------------------	-------	------------



$$\Theta_{B''} = \Theta_{B'} + \frac{M}{K} = \frac{4Ra^2}{EI} + \frac{Ra \cdot a}{EI} = \frac{5Ra^2}{EI}$$

$$W_c = W_B + \Theta_{B''} \cdot a + \frac{1}{EI} \left(\frac{1}{2} Ra \cdot a \cdot \frac{2}{3} a \right)$$

$$= \frac{14Ra^3}{3EI} + \frac{5Ra^2}{EI} a + \frac{Ra^3}{3EI} = \frac{30Ra^3}{3EI} = \frac{10Ra^3}{EI}$$

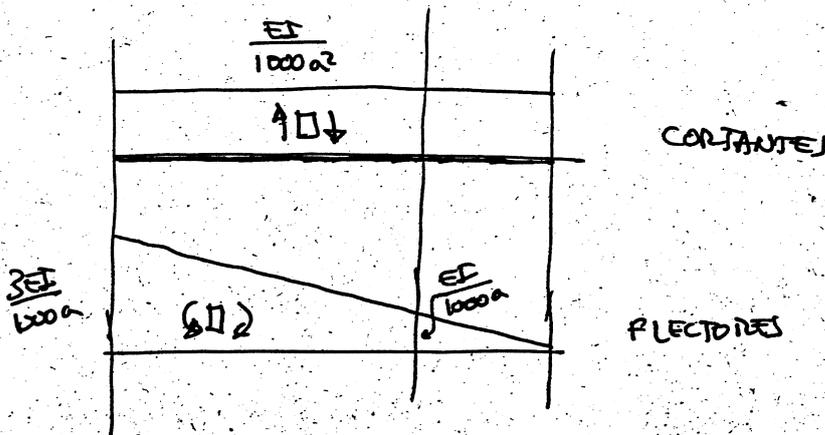
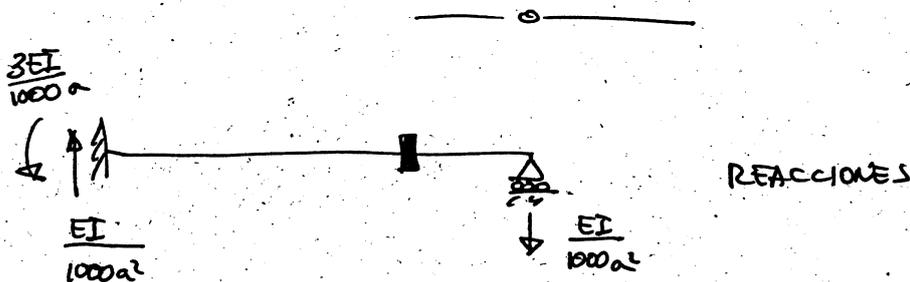
$$W_c = -\Delta = -\frac{9}{100} \Rightarrow \frac{10Ra^3}{EI} = -\frac{9}{100}$$

$$R = -\frac{EI}{1000a^2}$$

9 min.

19'22

19'50





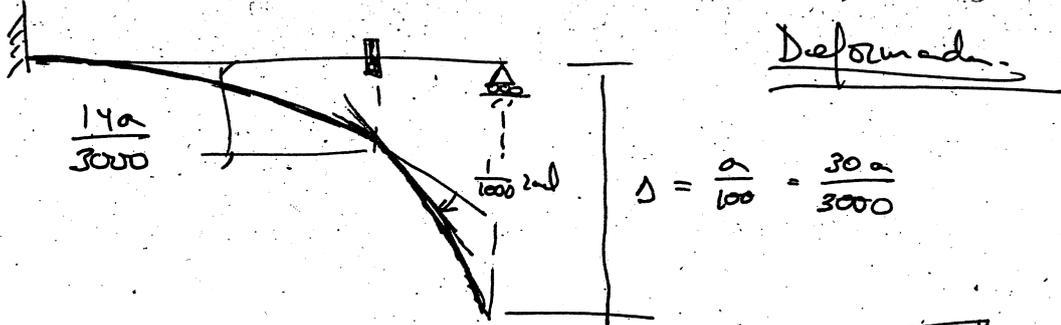
Asignatura

Curso

Grupo

$$w_B = \frac{14 R a^3}{3EI} = \frac{14 a^3}{3EI} \left(-\frac{EI}{600 a^2} \right) = -\frac{14 a}{3000}$$

$$\Delta\theta = \frac{R a}{K} = -\frac{EI}{1000 a} \cdot \frac{a}{EI} = -\frac{1}{1000} \text{ rad.}$$



$$\Delta = \frac{a}{100} = \frac{30 a}{3000}$$

Swi

19/5

N°

Apellidos y nombre

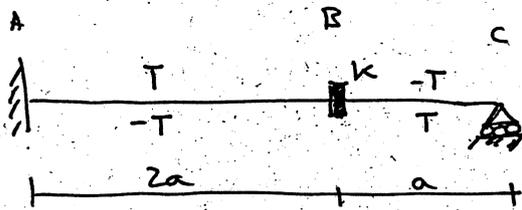
Firma

Fecha

3/3

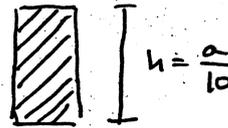


EJERCICIO 80.2



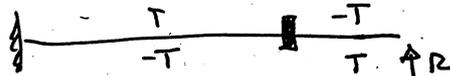
$$k = \frac{EI}{a}$$

Sección:



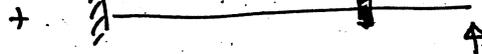
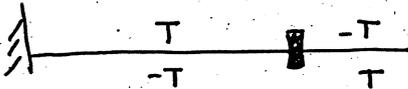
19/27

DESPLAZAMIENTO



$$+ W_c = 0$$

||



Estado I

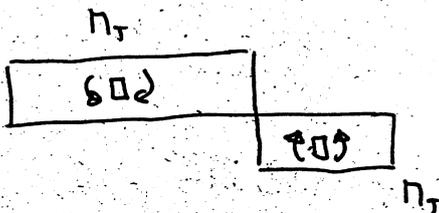
Estado II (resorte auto)

Caso en el resorte helicoidal no actúa momento alguno, no hay giro relativo en él.

$$W_c^I = \frac{10 R a^3}{EI}$$

Resolución estado I.

$$M_T = \alpha EI \frac{T - (-T)}{h} = \alpha EI \frac{2T}{10a} = \frac{20 \alpha T EI}{a}$$



dey de momento ficticia



$$w_c^I = w_{c1}^I + w_{c2}^I + \frac{1}{EI} \left(-\pi_T \cdot 2a \cdot 2a + \pi_T \cdot a \cdot \frac{a}{2} \right) =$$

$$= -\frac{7\pi_T a^2}{2EI} = -\frac{7a^2}{2EI} \frac{20\alpha T EI}{a} = -70\alpha T a$$

$$w_c = w_c^I + w_c^{II} = -70\alpha T a + \frac{10Ra^3}{EI}$$

$$w_c = 0$$

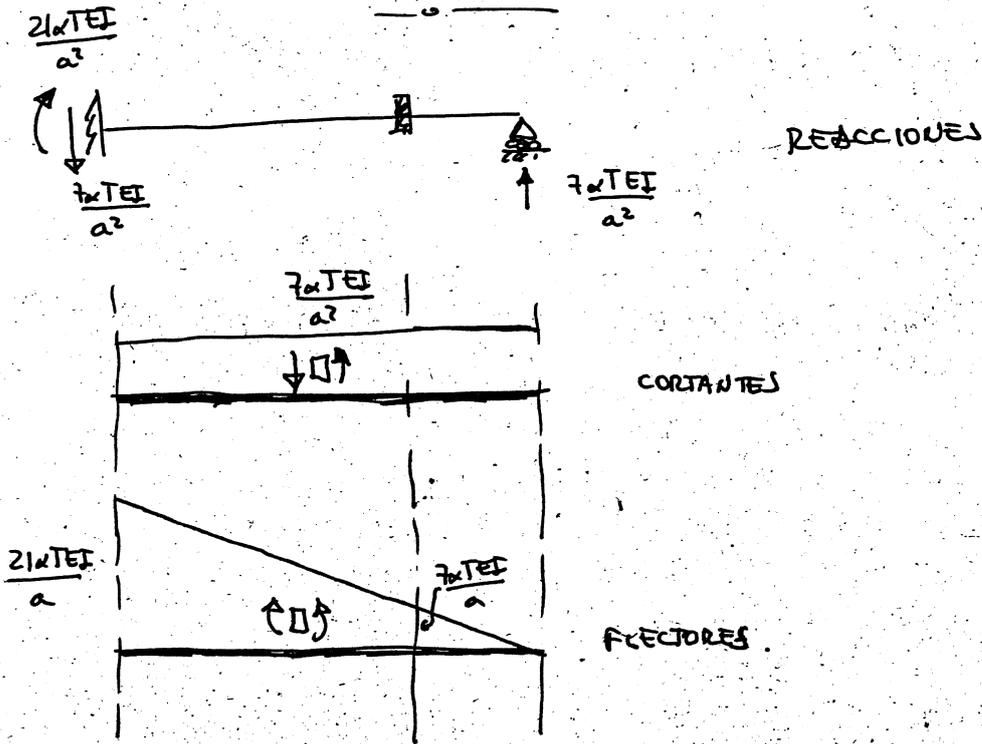
$$\frac{10Ra^3}{EI} = 70\alpha T a$$

$$R = \frac{70\alpha T EI}{10a^2}$$

6 min

19'33

19'36



Fieproval PAPEL 100% RECICLADO

Nº	Apellidos y nombre	Firma	Fecha 3/5
----	--------------------	-------	-----------



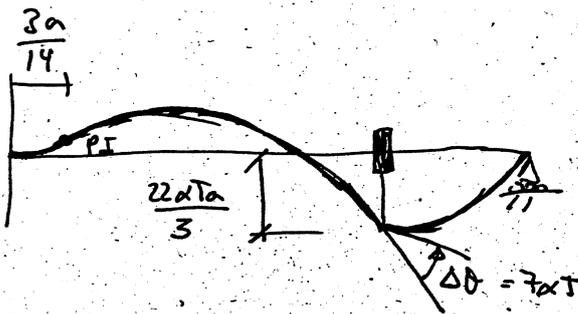
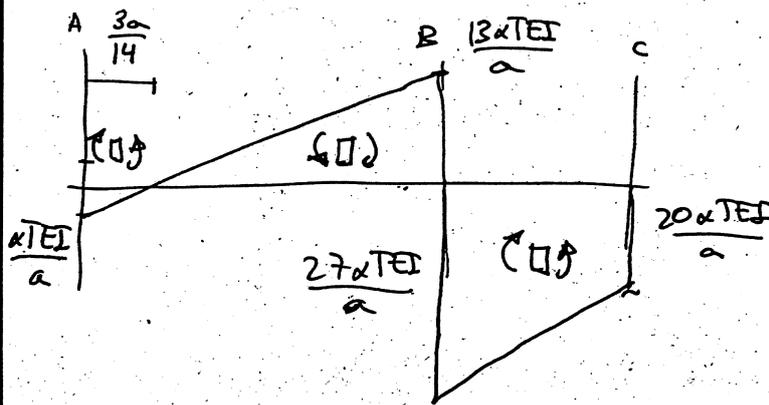
$$W_B = W_B^I + W_B^{II} = \cancel{W_B^I} + \cancel{W_B^{II}} + \frac{1}{EI} \left(-\frac{1}{2} \cdot \eta_T \cdot 2a \cdot a \right) + \frac{14Ra^3}{3EI} \leftarrow \text{Pag. 1}$$

$$= -\frac{2\eta_T a^3}{EI} + \frac{14Ra^3}{3EI}$$

$$= -\frac{20 \times T \cancel{EI} \cdot 2a^3}{\cancel{a} \cancel{EI}} + \frac{14a^3 \cdot 7 \cancel{a} T \cancel{EI}}{\cancel{3EI} \cancel{a^2}} = \left(\frac{98}{3} - 40 \right) \alpha T a = -\frac{22}{3} \alpha T a$$

$$\Delta \theta = \frac{\eta}{K} = \frac{Ra}{EI/a} = \frac{7 \alpha T EI}{a^2} \frac{a^2}{EI} = 7 \alpha T$$

key factores ficticia para dibujar la deformada



12 unia.

19/10/10
PAPEL 100
Reproval

Nº	Apellidos y nombre	Firma	Fecha 3/6
----	--------------------	-------	-----------

Cálculo de estructuras articuladas en flexibilidad

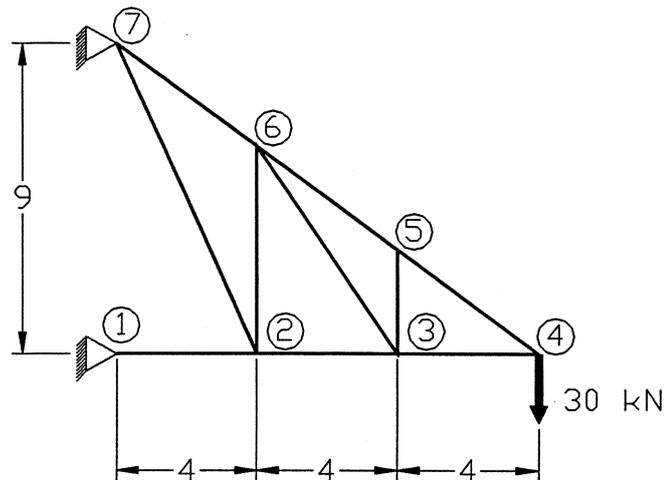


EJERCICIO nº 81

Cálculo de Estructuras I.
2º curso, Plan Integral de Estudios de Ingeniería Civil.

Examen de Septiembre.
3 de Septiembre de 1999

Cuestión nº 2.

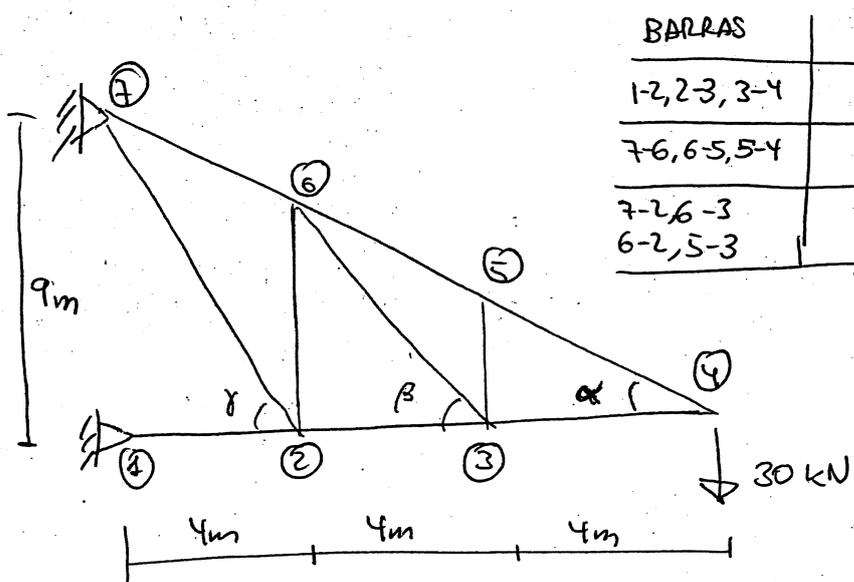


La figura anterior —acotada en metros— representa una estructura articulada plana y la única fuerza que la solicita. En ella se pide determinar:

- 1.- los axiles en todas las barras, y
- 2.- los desplazamientos horizontal y vertical del nudo 4.

Características mecánicas de las distintas barras.		
Barras	Área (cm ²)	Módulo de elasticidad E (MPa)
1-2, 2-3, 3-4	20	200.000
7-6, 6-5, 5-4	10	200.000
7-2, 6-3, 6-2, 5,3	5	200.000

Tiempo: 30 min.



BARRAS	A (cm ²)	E (MPa)
1-2, 2-3, 3-4	20	200.000
7-6, 6-5, 5-4	10	200.000
7-2, 6-3 6-2, 5-3	5	200.000

$$\sin \alpha = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}$$

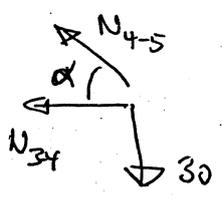
$$\cos \alpha = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}$$

12/12

Esfuerzos

Método de los nudos

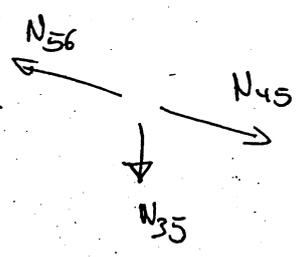
Nudo 4



$$N_{45} \sin \alpha - 30 = 0 \quad N_{45} = \frac{5}{3} \cdot 30 = 50 \text{ kN}$$

$$N_{34} + N_{45} \cos \alpha = 0 \quad N_{34} = -\frac{4}{5} \cdot 50 = -40 \text{ kN}$$

Nudo 5



$$\Rightarrow N_{45} = N_{56}$$

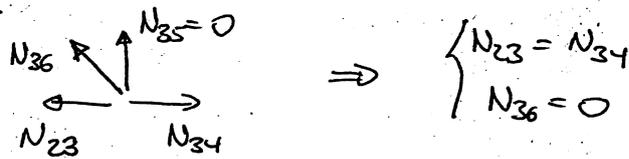
$$N_{35} = 0$$

Reproval
 PAPEL 100% RECICLADO

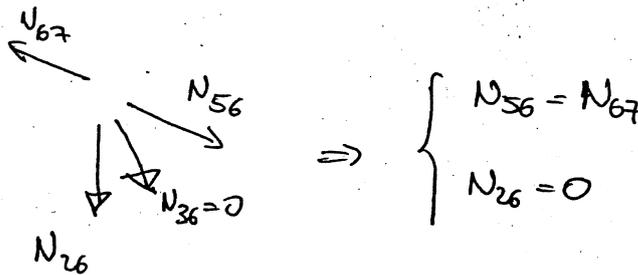
Nº	Apellidos y nombre / Cognoms i nom	Firma / Signatura	Fecha / Data
			3/20



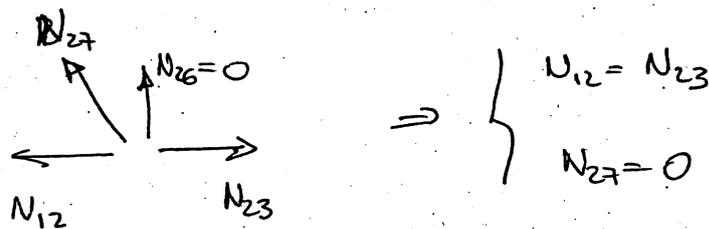
Nudo 3



Nudo 6



Nudo 2



EN RESUMEN

$$N_{12} = N_{23} = N_{34} = -40 \text{ kN}$$

$$N_{67} = N_{56} = N_{45} = 50 \text{ kN}$$

$$N_{32} = N_{63} = N_{26} = N_{35} = 0$$

Nº

Apellidos y nombre / Cognoms i nom

Firma / Signatura

Fecha / Data

321



El desplazamiento horizontal de (4) se obtiene, simplemente, sumando los alargamientos de los barras 1-2, 2-3 y 3-4.

$$\Delta L_{ij} = \frac{N_{ij} L_{ij}}{EA_{ij}} \Rightarrow \Delta L_{12} = \Delta L_{23} = \Delta L_{34} = \frac{\overset{\text{kN}}{-40} \times \overset{\text{m}}{4}}{\underset{\text{kN/m}^2}{200.000}} = -4 \times 10^{-4} \text{ m}$$

$$EA = \frac{200.000 \times 10^3}{\text{E en kN/m}^2} \times \frac{20 \times 10^{-4}}{\text{A en m}^2} = 400.000 \text{ kN}$$

$$u_4 = 3 \times (-4 \times 10^{-4}) = -12 \times 10^{-4} \text{ m} = -12 \text{ mm}$$

Para hallar el despl. vertical utilizaremos el teorema de los trabajos virtuales, considerando el estado analizado ~~como~~ como estado real y como estado virtual.

$$\sum F^{\text{VIRT.}} \delta^{\text{REAL.}} = \sum N^{\text{VIRT.}} \delta^{\text{REAL.}}$$

$$e = \frac{NL}{EA}$$

$$(-30) \cdot w_4$$

$$\sum N^{\text{V}} e^{\text{R}} = 3 \times 50 \times \frac{50 \times 5}{200.000} + 3 \times (-40) \times \frac{(-40) \times 4}{400.000} = 0'2355$$

Cordon superior
 $EA = 200.000 \times 10^3 \times 10 \times 10^{-4}$
 $= 200.000 \text{ kN}$
 $L_{67} = L_{56} = L_{45} = 5 \text{ m}$

$$-30 \cdot w_4 = 0'2355 \Rightarrow$$

$$w_4 = -7'85 \times 10^{-3} \text{ m} = -7'85 \text{ mm}$$

Reproval PAPEL 100% RECICLADO

12'30

18 min

Nº

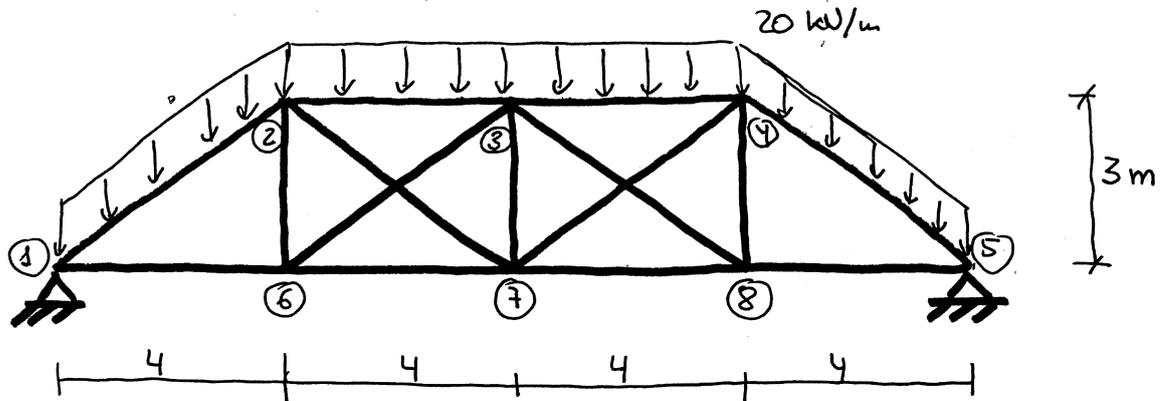
Apellidos y nombre / Cognoms i nom

Firma / Signatura

Fecha / Data

322

EJERCICIO 1º 82



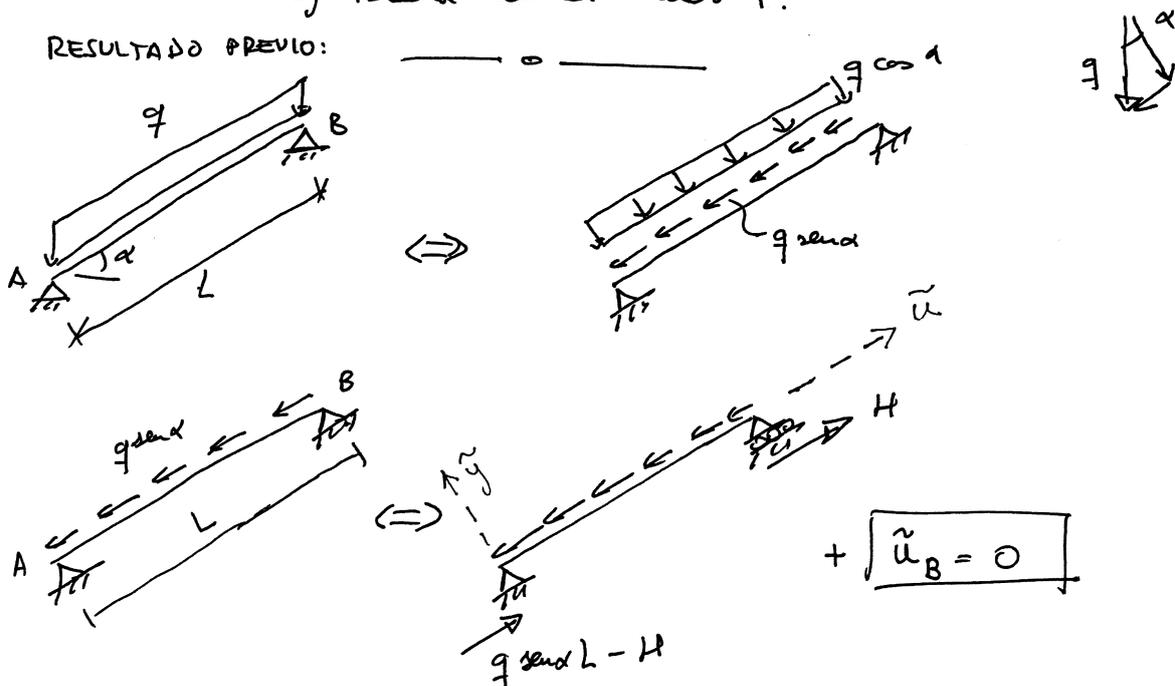
Todos los bamos, excepto el cordón inferior, sufren un aumento de temperatura de 10°C .

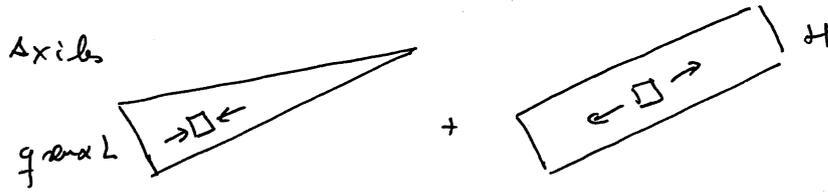
Bamos	1-2, 2-3, 3-4, 4-5	1-6, 6-7, 7-8, 8-5	Montantes y diagonales
Áreas	30 cm^2	20 cm^2	10 cm^2

Material $E = 210\text{ GPa}$, $\alpha = 12 \times 10^{-5}\text{ }^\circ\text{C}^{-1}$.

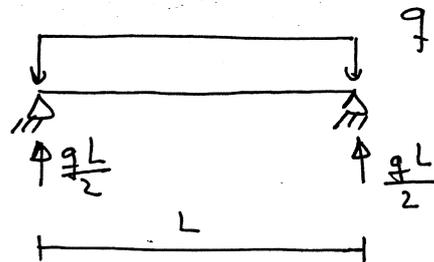
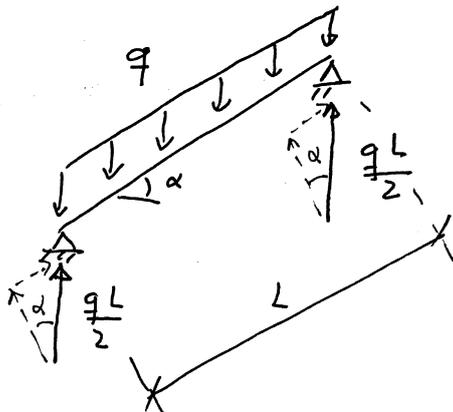
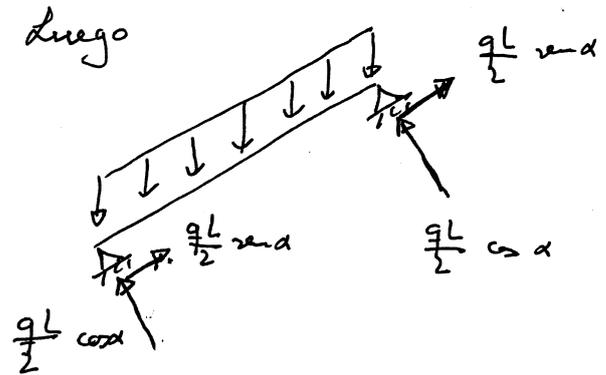
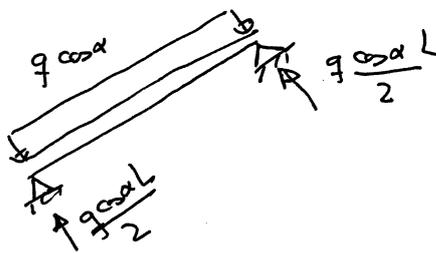
- Se pide:
- 1) Esfuerzos en todos los bamos.
 - 2) Flecha en el nudo 7.

RESULTADO PREVIO:



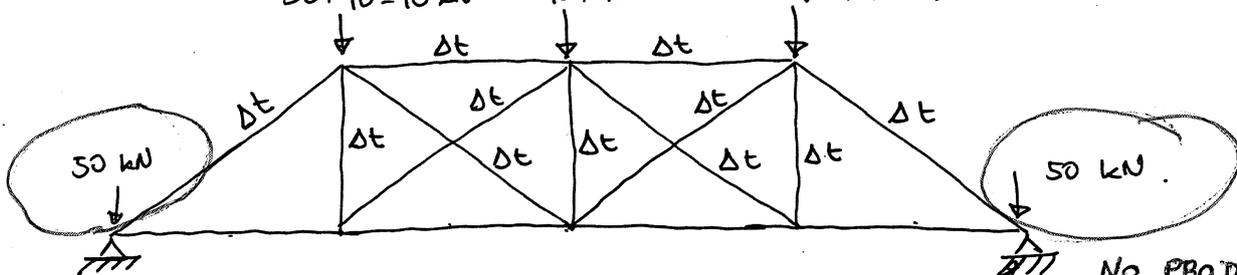


$$\tilde{u}_B = \tilde{u}_A + \frac{1}{EA} \left\{ -\frac{1}{2} q \sin \alpha L \cdot L + HL \right\} = 0 \Rightarrow H = \frac{q \sin \alpha L}{2}$$



3) LLEVAMOS LAS CARGAS A LOS NUDOS

$50 + 40 = 90 \text{ kN}$ $40 + 40 = 80 \text{ kN}$ $50 + 40 = 90 \text{ kN}$

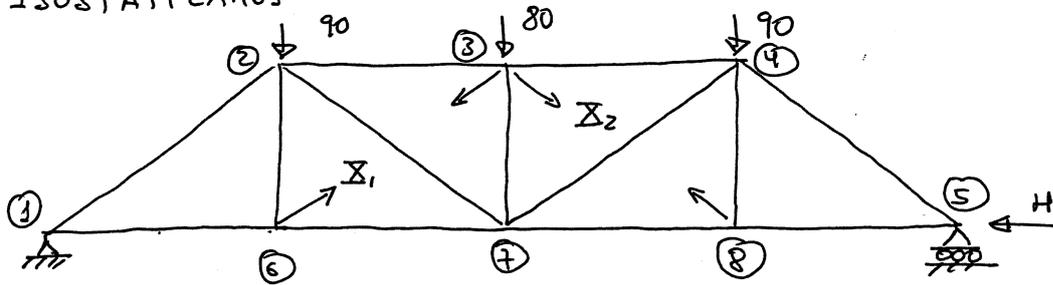


NO PRODUCEN ESFUERZOS.

$\Delta t = 10^\circ \text{C}$

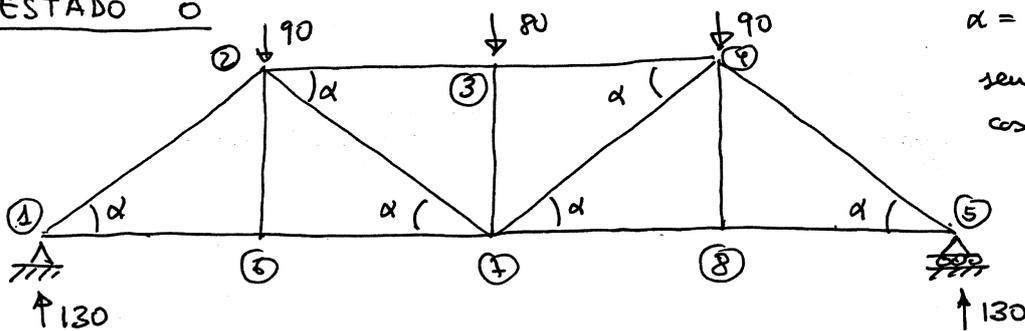


◦ ISOSTATIZAMOS



$$+ \begin{cases} u_5 = 0 \\ \Delta_{36} = - \frac{X_1 \cdot L}{EA} - \alpha L \Delta t \\ \Delta_{38} = - \frac{X_2 \cdot L}{EA} - \alpha L \Delta t \end{cases}$$

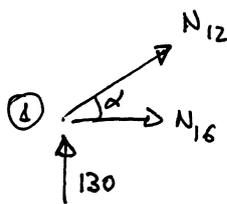
◦ ESTADO 0



$$\alpha = \arctg \frac{3}{4}$$

$$\operatorname{sen} \alpha = 0.6$$

$$\operatorname{cos} \alpha = 0.8$$

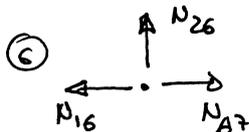


$$N_{12} \operatorname{sen} \alpha + 130 = 0$$

$$N_{12} = - \frac{130}{0.6} = -216.7 \text{ kN}$$

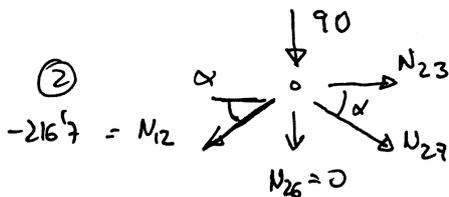
$$N_{16} + N_{12} \operatorname{cos} \alpha = 0$$

$$N_{16} = -N_{12} \operatorname{cos} \alpha = 173.3 \text{ kN}$$



$$N_{26} = 0$$

$$N_{87} = N_{16} = 173.3 \text{ kN}$$

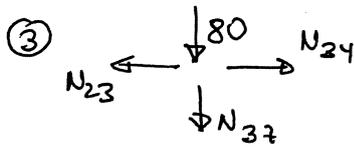


$$90 + N_{12} \operatorname{sen} \alpha + N_{27} \operatorname{sen} \alpha = 0$$

$$N_{27} = \frac{1}{\operatorname{sen} \alpha} (-90 - N_{12} \operatorname{sen} \alpha) = 66.7 \text{ kN}$$

$$N_{23} + N_{27} \operatorname{cos} \alpha - N_{12} \operatorname{cos} \alpha = 0$$

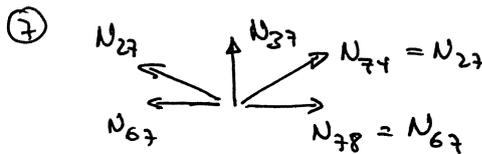
$$N_{23} = N_{12} \operatorname{cos} \alpha - N_{27} \operatorname{cos} \alpha = -226.7 \text{ kN}$$



$$N_{37} = -80 \text{ kN}$$

$$N_{34} = N_{23} = -226.7 \text{ kN}$$

Resto simétrico. Como comprobación planteamos el eq. del nodo 7.



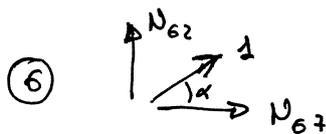
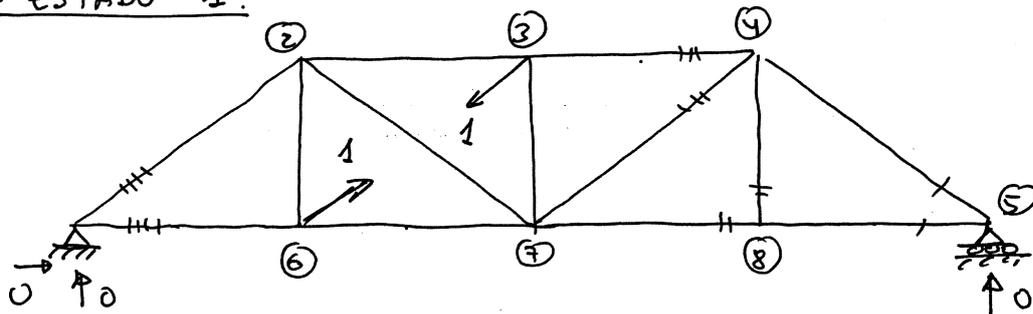
$$\sum F_H = 0 \quad \text{Obvio.}$$

$$N_{27} \text{ sen } \alpha + N_{74} \text{ sen } \alpha + N_{37}$$

$$= 2 \times (66.7 \times 0.6) + (-80) = 0.04 \approx 0.$$

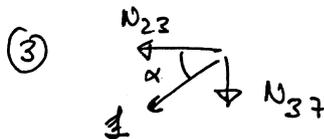
Los resultados se resumen en una tabla más adelante (Hoja 11).

• ESTADO 1.



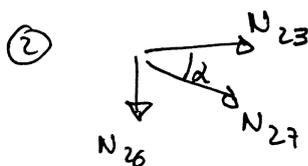
$$N_{62} + \text{sen } \alpha = 0 \quad N_{62} = -0.6 \text{ kN}$$

$$N_{67} + \text{cos } \alpha = 0 \quad N_{67} = -0.8 \text{ kN}$$



$$N_{37} + \text{sen } \alpha = 0 \quad N_{37} = -0.6 \text{ kN}$$

$$N_{23} + \text{cos } \alpha = 0 \quad N_{23} = -0.8 \text{ kN}$$



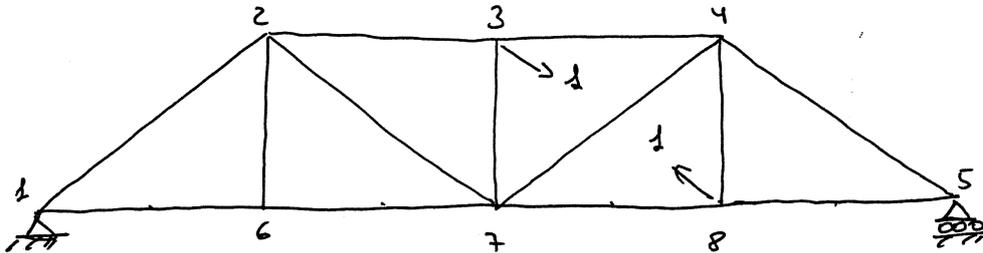
$$N_{26} + N_{27} \text{ sen } \alpha = 0 \quad N_{27} = -\frac{N_{26}}{\text{sen } \alpha} = +1$$

$$N_{23} + N_{27} \text{ cos } \alpha = 0 \quad N_{27} = 1$$

⑦ Se comprueba el equilibrio.

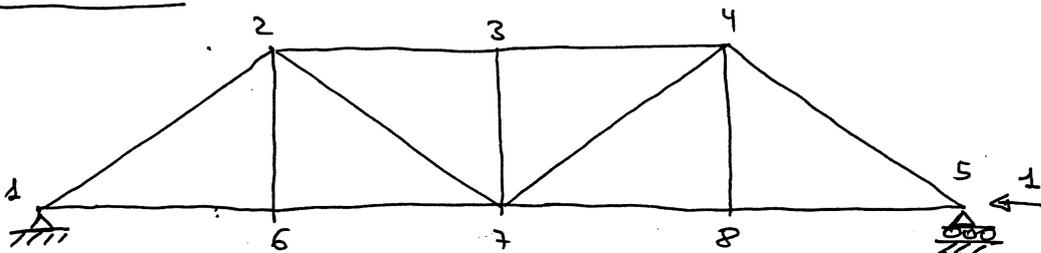


◦ ESTADO 2



Los resultados se pueden deducir directamente de los del estado 2.
Figuran en la tabla resumen (hoja 11).

◦ ESTADO 3.



Cordón inferior $N = -1$, resto $N = 0$.

- PRIMERA ECUACIÓN DE COMPATIBILIDAD $(\Delta_{36} = -\sum_2 \frac{L}{EA} - \alpha \Delta t L)$
Planteamos trabajos virtuales ^{complementarios} entre el estado real $[0] + \sum_1 [1] + \sum_2 [2] + \sum_3 [3]$ y el estado $[1]$, considerado virtual, para calcular Δ_{36}

$$\{F^V\} \{d^R\} = \{N^V\} \{e^R\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 \cdot \text{Proy}_{\vec{e}_3} (d_6^R) + 1 \cdot \text{Proy}_{\vec{e}_3} (d_3^R) = \sum_{k=1}^{b-1} N_k^1 e_k^R$$

$\text{Proy}_{\vec{e}_3} (d_6^R) \rightarrow$ Proyección sobre el vector \vec{e}_3 del despl. real del nudo 6.

$\text{Proy}_{\vec{e}_3} (d_3^R) \rightarrow$ " " " " \vec{e}_3 " " " " 3.

$\text{Proy}_{\vec{e}_3} (d_6^R) + \text{Proy}_{\vec{e}_3} (d_3^R) = \Delta_{36} \rightarrow$ Acortamiento de la barra 36.

$N_k^1 \rightarrow$ Axil de la barra k (se supone que los hemos numerado) en el estado $[1]$.

$e_k^R \rightarrow$ Alargamiento real de la barra k .

$$e_k^R = e_k^\Delta + \frac{N_k^0}{K_k} + \bar{X}_1 \frac{N_k^1}{K_k} + \bar{X}_2 \frac{N_k^2}{K_k} + \bar{X}_3 \frac{N_k^3}{K_k}$$

$$K_k = \text{Rigidez a axial de la barra } k = L_k / EA_k.$$

$$\text{Trabajos virtuales} \Rightarrow \Delta_{36} = \sum_{k=1}^{b-h} N_k^1 \left(e_k^\Delta + \frac{N_k^0}{K_k} + \bar{X}_1 \frac{N_k^1}{K_k} + \bar{X}_2 \frac{N_k^2}{K_k} + \bar{X}_3 \frac{N_k^3}{K_k} \right)$$

Ec. compatibilidad

$$\sum_{k=1}^{b-h} N_k^1 \left(e_k^\Delta + \frac{N_k^0}{K_k} + \bar{X}_1 \frac{N_k^1}{K_k} + \bar{X}_2 \frac{N_k^2}{K_k} + \bar{X}_3 \frac{N_k^3}{K_k} \right) = - \frac{\bar{X}_4}{K_{3-6}} - \alpha \frac{L_{36}}{K_{3-6}} \Delta t = e_{3-6}^\Delta$$

La estructura inicial tenía 15 barras ($b=15$), de los cuales hemos quitado 2 al isostatar ($h=2$). Supongamos numerados del 1 al 13 los barras de la estructura isostatazadas, y sean 3-6 y 3-8 los números 14 y 15, respectivamente. La ecuación anterior puede escribirse como

$$\sum_{j=1}^{13} N_j^1 \left(e_j^\Delta + \frac{N_j^0}{K_j} + \bar{X}_1 \frac{N_j^1}{K_j} + \bar{X}_2 \frac{N_j^2}{K_j} + \bar{X}_3 \frac{N_j^3}{K_j} \right) = - \frac{\bar{X}_4}{K_{14}} - e_{14}^\Delta$$

o bien, conviniendo que

$$N_N^0 = N_{15}^0 = 0 \quad N_N^1 = 1 \quad N_{15}^1 = 0 \quad N_N^2 = 0 \quad N_{15}^2 = 1$$

queda

$$\sum_{j=1}^{15} N_j^1 \left(e_j^\Delta + \frac{N_j^0}{K_j} + \bar{X}_1 \frac{N_j^1}{K_j} + \bar{X}_2 \frac{N_j^2}{K_j} + \bar{X}_3 \frac{N_j^3}{K_j} \right) = 0$$

Compruébese en la tabla resumen que figura al final la equivalencia de estas expresiones, la ventaja de la segunda es que los distintos coeficientes que intervienen se obtienen de dicha tabla simplemente sumando columnas.

• SEGUNDA ECUACIÓN DE COMPATIBILIDAD. ($\Delta_{38} = -\bar{X}_2 / K_{15} - e_{15}^\Delta$)

Operando de forma similar al caso anterior llegamos a

$$\sum_{j=1}^{15} N_j^2 \left(e_j^\Delta + \frac{N_j^0}{K_j} + \bar{X}_1 \frac{N_j^1}{K_j} + \bar{X}_2 \frac{N_j^2}{K_j} + \bar{X}_3 \frac{N_j^3}{K_j} \right) = 0$$

- TERCERA ECUACIÓN DE COMPATIBILIDAD. $u_5 = 0$
 Planteando trabajos virtuales ^{complementarios} entre el estado real y el estado 3 tenemos.

$$\begin{aligned}
 (-1) u_5 &= \sum_{j=1}^{13} N_j^3 e_j^R = \sum_{j=1}^{15} N_j^3 e_j^R \\
 &= \sum_{j=1}^{15} N_j^3 \left(e_j^\Delta + \frac{N_j^0}{k_j} + \bar{X}_1 \frac{N_j^1}{k_j} + \bar{X}_2 \frac{N_j^2}{k_j} + \bar{X}_3 \frac{N_j^3}{k_j} \right) = 0.
 \end{aligned}$$

- OBTENCIÓN DE LAS INCOGNITAS HIPERESTÁTICAS. El sistema a resolver es

$$\begin{bmatrix} \sum \frac{N_j^1 N_j^1}{k_j} & \sum \frac{N_j^1 N_j^2}{k_j} & \sum \frac{N_j^1 N_j^3}{k_j} \\ \sum \frac{N_j^2 N_j^1}{k_j} & \sum \frac{N_j^2 N_j^2}{k_j} & \sum \frac{N_j^2 N_j^3}{k_j} \\ \sum \frac{N_j^3 N_j^1}{k_j} & \sum \frac{N_j^3 N_j^2}{k_j} & \sum \frac{N_j^3 N_j^3}{k_j} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{X}_1 \\ \bar{X}_2 \\ \bar{X}_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\sum N_j^1 e_j^\Delta - \sum \frac{N_j^1 N_j^0}{k_j} \\ -\sum N_j^2 e_j^\Delta - \sum \frac{N_j^2 N_j^0}{k_j} \\ -\sum N_j^3 e_j^\Delta - \sum \frac{N_j^3 N_j^0}{k_j} \end{Bmatrix}$$

Cada uno de los coeficientes se ha calculado en la tabla que figura al final, y debidamente ordenados conducen al sistema

$$\begin{bmatrix} 6'806 \times 10^{-5} & 5'143 \times 10^{-6} & 7'619 \times 10^{-6} \\ 5'143 \times 10^{-6} & 6'806 \times 10^{-5} & 7'619 \times 10^{-6} \\ 7'619 \times 10^{-6} & 7'619 \times 10^{-6} & 3'810 \times 10^{-5} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{X}_1 \\ \bar{X}_2 \\ \bar{X}_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0'00249 \\ -0'00249 \\ 0'00660 \end{Bmatrix}$$

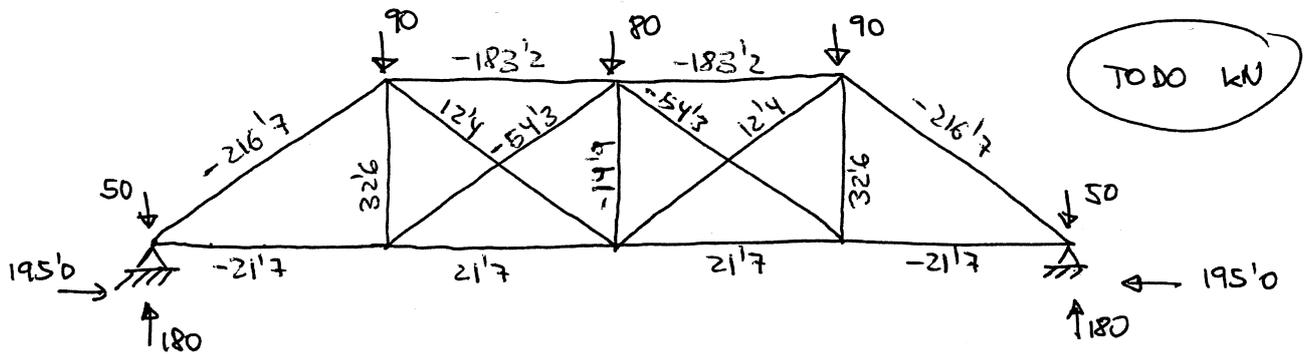
de donde:

$$\bar{X}_1 = \bar{X}_2 = -54'282 \text{ kN}, \quad \bar{X}_3 = 195'04 \text{ kN}.$$

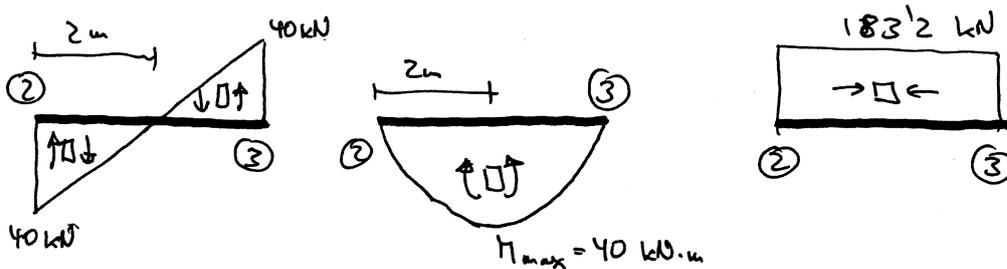
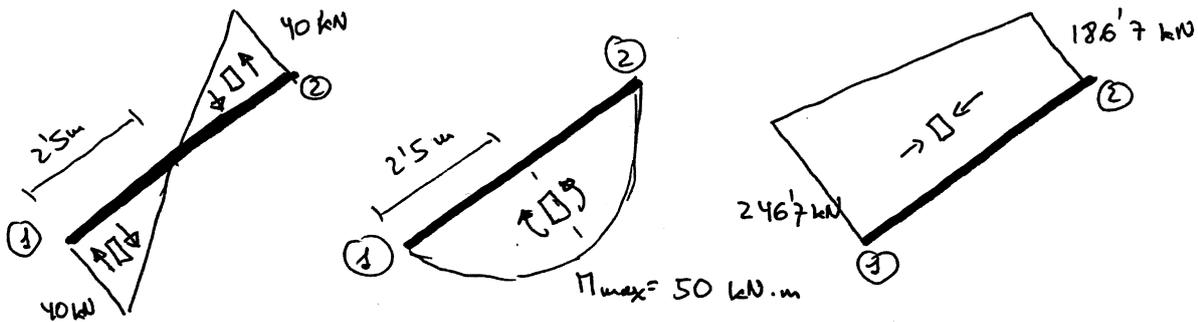
- OBTENCIÓN FINAL DE LOS AXILES Y REACCIONES.
 Los axiles se calculan mediante

$$N_j^{\text{Real}} = N_j^0 + \bar{X}_1 N_j^1 + \bar{X}_2 N_j^2 + \bar{X}_3 N_j^3$$

y se han incorporado como última columna en la tabla repetidamente citada. Se resumen en el siguiente esquema, donde también figuran las reacciones (en cuyo cálculo no deben omitirse los dos fuerza de 50 kN de los que habíamos prescindido en la página 2 porque no producen axiles).



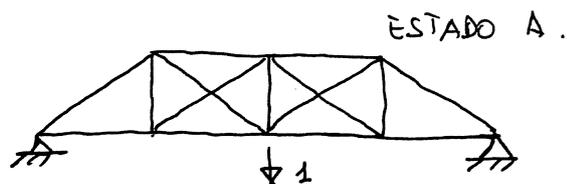
- ESFUERZOS EN LAS BARRAS CARGADAS. A los anteriores hay que sumar les los debidos a los caigos repartidos sobre las barras. Apoyándose en los resultados de la página 2, obtenemos:



Los otros dos barras se determinan igual.

FLECHA DEL UVEDO 7.

Se calcula mediante el teor. de los trabajos virtuales aplicando entre el estado real resuelto y el virtual representado en el esquema adjunto, que es hiperestático de grado 2.

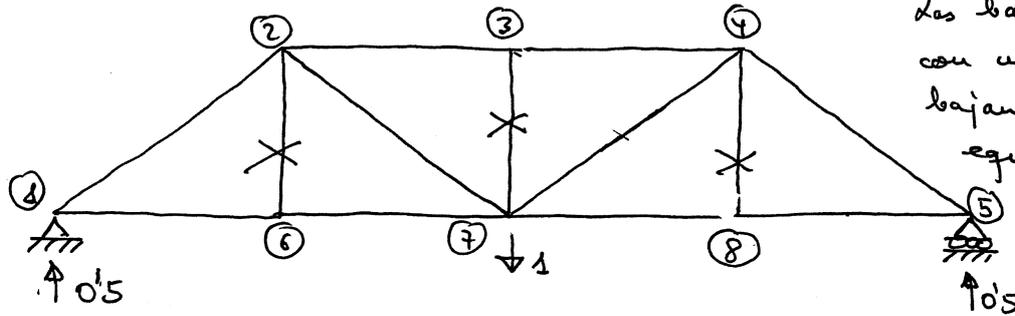




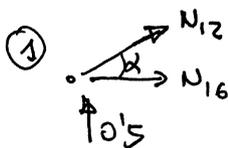
• ISOSTATIZACIÓN DEL ESTADO A.

Consideramos la misma que en el cálculo anterior.

• ESTADO OA.



Las barras indicadas con una X no trabajan. (Lo exige el equilibrio de uno de sus extremos.)



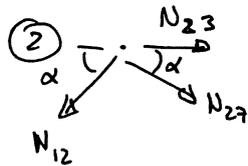
$$N_{12} \sin \alpha + 0.5 = 0$$

$$\Rightarrow N_{12} = -\frac{0.5}{0.6} = -\frac{5}{6}$$

$$N_{16} + N_{12} \cos \alpha = 0$$

$$\Rightarrow N_{16} = +\frac{5}{6} \times 0.8 = \frac{4}{3}$$

$$N_{67} = N_{16}$$



$$\sum F_v = 0 \Rightarrow N_{27} = -N_{12} = +\frac{5}{6}$$

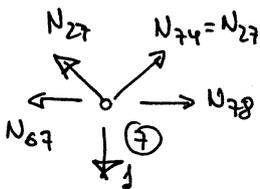
$$N_{23} + N_{27} \cos \alpha + N_{12} \cos \alpha = 0$$

$$N_{23} = (N_{12} - N_{27}) \cos \alpha = -2 \times \frac{5}{6} \times 0.8 = -\frac{8}{6} = -\frac{4}{3}$$

$$2 N_{27} \sin \alpha - 1 = 2 \times \frac{5}{6} \times 0.6 - 1 = \frac{10 \times 0.6}{6} - 1 = 0$$

$$\sum F_h = 0 \text{ Evidente.}$$

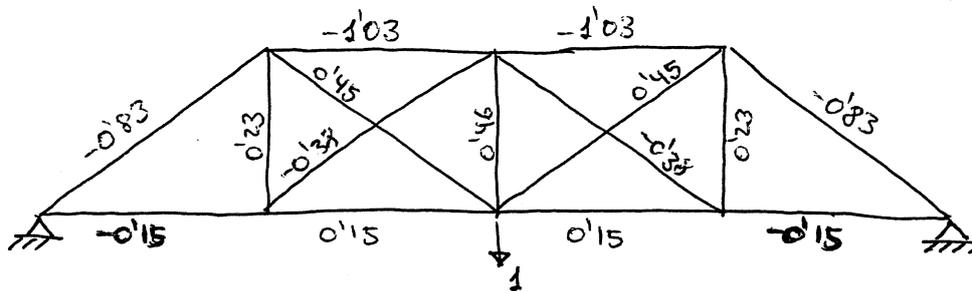
Comprobación válida.



El resto por simetría.

• ESTADOS 1, 2 y 3 → los mismos del caso anterior.

• DETERMINACIÓN DE AXILES. Mediante un proceso análogo al del caso anterior, resumido en la tabla correspondiente, que figura al final del ejercicio. Nótese que basta calcular las columnas en las que interviene N_j^i (las restantes coinciden con las del caso anterior) y resolver de nuevo el sistema, del que sólo ha cambiado el término independiente.



- APLICACIÓN DEL TEOREMA DE LOS TRABAJOS VIRTUALES

$$-1 \cdot V_7 = \sum_{j=1}^{15} N_j^{OA} e_j^R = \sum_{j=1}^{15} N_j^{OA} \left(e_j^A + \frac{N_j^R}{K_j} \right)$$

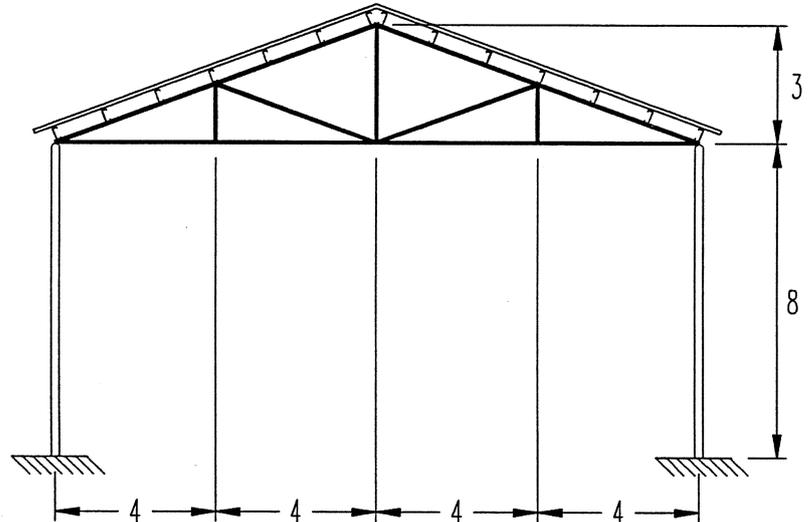
Determinación de la flecha del nudo 7

n = nº barra	Nudos i-j	1/K _n (m·kN)	e _n ^Δ	N _n ^{Real}	N _n ^{Virtual}	N _n ^{Virtual} (e _n ^Δ + N _n ^{Real} /K _n)
1	1-2	7,937E-06	6,E-04	-216,67	-0,83333	9,330,E-04
2	2-3	6,349E-06	5,E-04	-183,24	-1,02986	7,038,E-04
3	3-4	6,349E-06	5,E-04	-183,24	-1,02986	7,038,E-04
4	4-5	7,937E-06	6,E-04	-216,67	-0,83333	9,330,E-04
5	1-6	9,524E-06	0	-21,71	-0,15173	3,138,E-05
6	6-7	9,524E-06	0	21,71	0,15173	3,138,E-05
7	7-8	9,524E-06	0	21,71	0,15173	3,138,E-05
8	8-5	9,524E-06	0	-21,71	-0,15173	3,138,E-05
9	2-6	1,429E-05	4,E-04	32,57	0,22760	1,878,E-04
10	3-7	1,429E-05	4,E-04	-14,86	0,45520	6,723,E-05
11	4-8	1,429E-05	4,E-04	32,57	0,22760	1,878,E-04
12	2-7	2,381E-05	6,E-04	12,38	0,45400	4,063,E-04
13	4-7	2,381E-05	6,E-04	12,38	0,45400	4,063,E-04
14	3-6	2,381E-05	6,E-04	-54,28	-0,37934	2,627,E-04
15	3-8	2,381E-05	6,E-04	-54,28	-0,37934	2,627,E-04
Suma =						5,180,E-03

EN RESUMEN, LA FLECHA EN EL NUDO 7 ES DE 5,18 mm.

Ej. 83 Se está proyectando una nave industrial cuya sección transversal se prevé que sea la representada en la figura adjunta. La longitud de la nave será de 60 m y para sujetar el cerramiento se dispondrá un pórtico como el dibujado cada 6'00 m.

El elemento de cubrición será un panel sandwich, formado por dos chapas grecadas de acero galvanizado, de 0'5 mm de espesor, y un aislamiento de espuma de poliuretano rígido, de 30 mm de espesor, colocado entre ellas. Su peso es de 12 kp/m². Este cerramiento estará sostenido por unas correas CF 200×2'5, de 6'74 kp/m de peso, biapoyadas sobre el cordón superior de la cercha, y colocadas con una separación entre ellas de 1'42 m.



Todas las barras de la celosía son perfiles de acero A42b — $E=210$ GPa, $\nu=0'3$ —. El cordón superior está formado por $\frac{1}{2}$ PE 270 — $A=23'0$ cm²—, el inferior, por $\frac{1}{2}$ IPE 180 — $A=12'0$ cm²—, los montantes por 2 L 60.5 — $A=2 \times 5'82$ cm²— y las diagonales por 2 L 70.6 empresillados — $A=2 \times 8'13$ cm²—.

Los pilares sobre los que se apoya son de hormigón armado — $E=27$ GPa, $G=10'4$ GPa—, de sección cuadrada de 35 cm de lado. La cercha debe calcularse considerándola articulada sobre ellos.

La nave se ubicará en la comarca del Alto Palancia —provincia de Castellón—, a una altitud topográfica de 758 m sobre el nivel del mar. De acuerdo con ello, la carga de nieve a considerar en el cálculo de la cubierta que prescribe la normativa vigente es de 0'5 kN/m².

Según dicha normativa, el empuje del viento, soplando en el plano del dibujo de izquierda a derecha, debe considerarse representado por las siguientes presiones:

paramento vertical a barlovento	presión de 1'0 kPa
paramento vertical a sotavento	succión de 0'5 kPa
faldón de la cubierta a barlovento	presión de 0'2 kPa
faldón de la cubierta a sotavento	succión de 0'8 kPa

Con estos datos se pide:

- 1.- Determinar las reacciones en cimentación, las leyes de esfuerzos en todas las barras de la estructura y la flecha del nudo central del cordón inferior de la celosía debidos a las cargas gravitatorias.
- 2.- Determinar las reacciones en cimentación, las leyes de esfuerzos en todas las barras de la estructura y la flecha del nudo central del cordón inferior de la celosía debidos a la acción del viento.

Los valores de las acciones anteriormente definidos son los característicos. Se utilizan para el cálculo de los desplazamientos. Para el de los esfuerzos deben mayorarse, multiplicando los debidos a cargas permanentes por 1'35 y los restantes por 1'5.



1.- CERCIA SOMETIDA A CARGAS GRAVITATORIAS.

(1)

• REACCIONES TRANSMITIDAS POR LAS CORREAS.

CARGA QUE SOPORTAN:

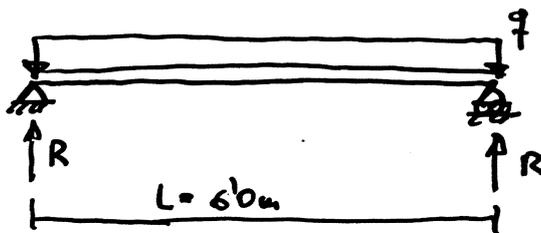
- PESO PROPIO ----- 6'74 kp/m
 - CARGA MUERTA (PESO PANEL) ... $12 \times 1'42 = 17'04$ kp/m
- $\Sigma = 23'78$ kp/m

\Rightarrow PERMANENTES $\rightarrow 23'78$ kp/m $\approx 0'24$ kN/m

NIEVE $\rightarrow 0'5$ kN/m² $\times 1'42 = 0'71$ kN/m

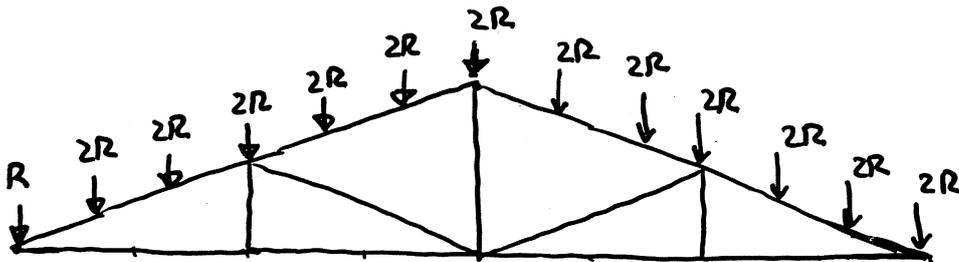
$q_k = 0'24 + 0'71 = 0'95$ kN/m

$q_d = 1'35 \times 0'24 + 1'5 \times 0'71 = 1'389 \approx 1'40$ kN/m

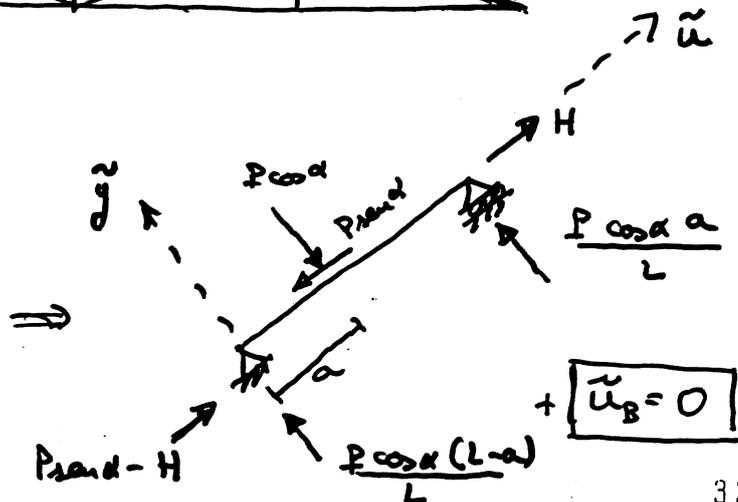
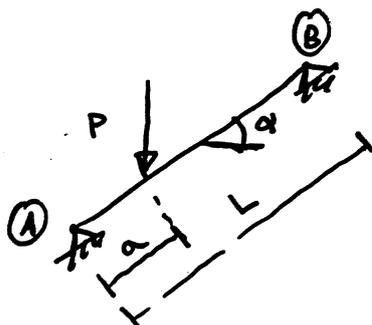


$R = \frac{qL}{2} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} R_u = 2'85 \text{ kN} \\ R_d = 4'2 \text{ kN} \end{array} \right.$

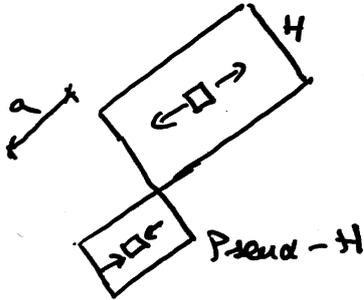
• CARGAS SOBRE LOS CORDONES



• CARGAS A LOS NUDOS

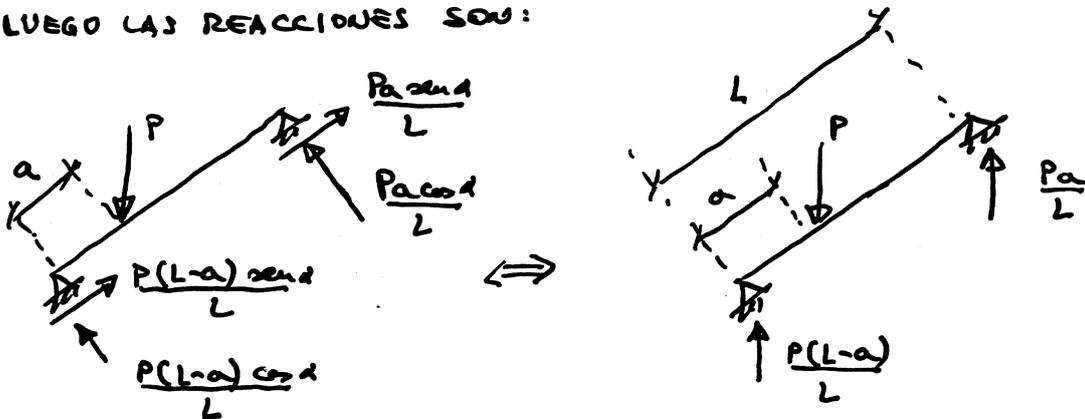


EL DESPLAZAMIENTO \tilde{u} SE DEBE, EXCLUSIVAMENTE, A LOS AXILES.

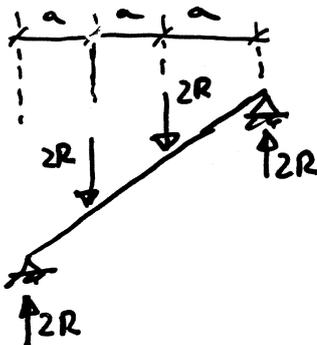


$$\begin{aligned} \tilde{u}_B &= \tilde{u}_A + \frac{1}{EA} \left\{ H(L-a) - (P \operatorname{sen} \alpha - H)a \right\} \\ &= \frac{1}{EA} \left\{ HL - Ha + Pa \operatorname{sen} \alpha + Ha \right\} = 0 \\ H &= \frac{Pa \operatorname{sen} \alpha}{L} \end{aligned}$$

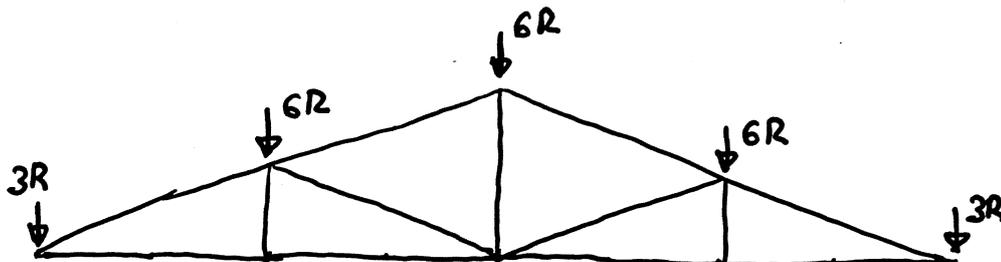
LUEGO LAS REACCIONES SON:



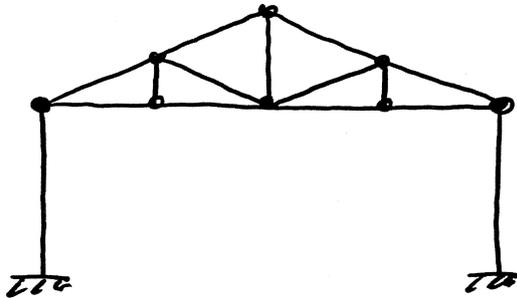
APLICADO A NUESTRO CASO CONDUCE A



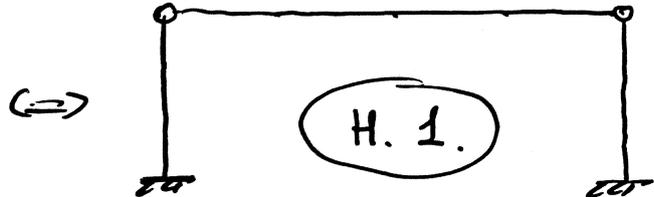
LUEGO, EN RESUMEN



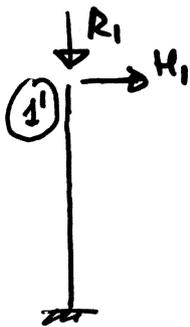
• GRADO DE HIPERESTATISMO DE LA ESTRUCTURA COMPLETA.



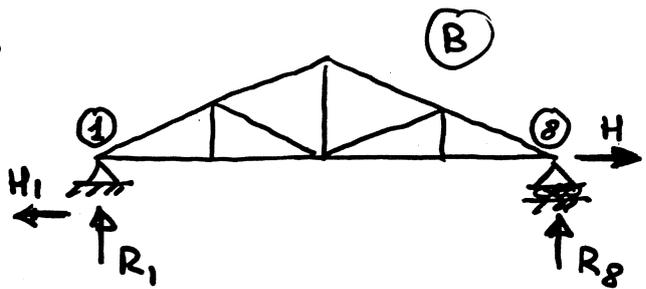
COMO LA CERCHA ES CANÓNICA (ISOSTÁTICA)



• ISOSTATIZACIÓN



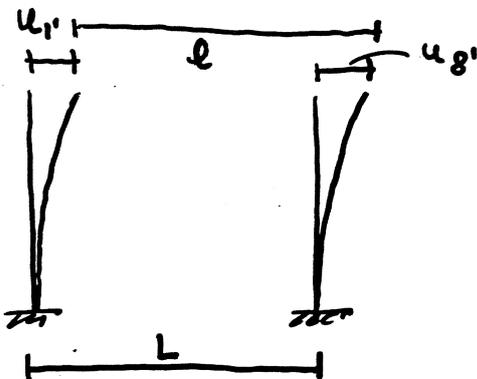
(A)



H → REACCIÓN HIPERESTÁTICA
H₁, R₁, R_g → EC. ESTÁTICA

EC. COMPATIBILIDAD

$$+ \Delta_{1-8} = \Delta_{1'-8'}$$



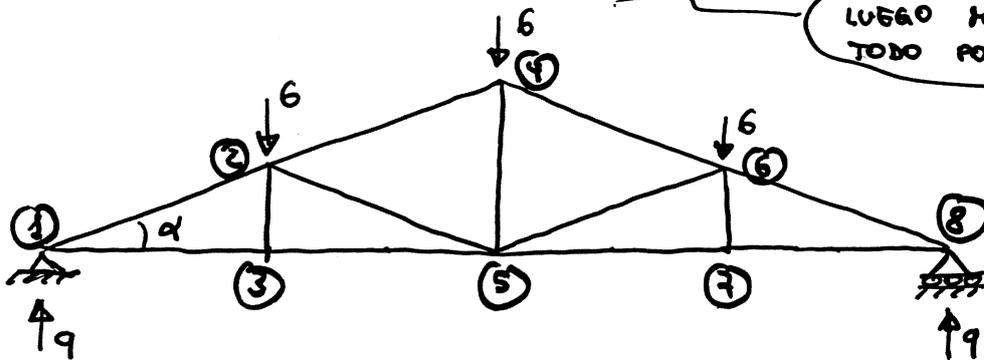
Δ_{i-j} = ALARGAMIENTO DEL SEGMENTO i-j

$$\Delta_{1'-8'} = l - L = u_{8'} - u_{1'}$$

$$\Delta_{1-8} = u_8$$

$$\underbrace{u_{8'} - u_{1'}}_{\text{CALCULADO EN (A)}} = u_8 \quad \downarrow \quad \text{CALCULADO EN (B)}$$

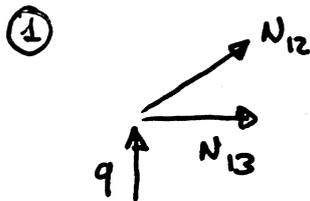
• CÁLCULO DE LA CERCHA (ESTADO 0)



Eq. NUDO 3 $\Rightarrow \begin{cases} N_{23} = 0 \\ N_{13} = N_{35} \end{cases}$

Eq. NUDO 7 $\Rightarrow \begin{cases} N_{67} = 0 \\ N_{57} = N_{78} \end{cases}$

$\alpha = \arctan \frac{3}{8} = 20'5560''$

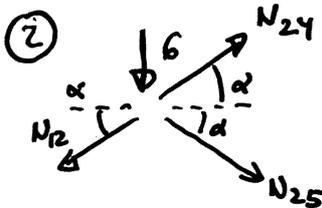


$N_{12} \sin \alpha + 9 = 0$

$N_{12} = -\frac{9}{\sin \alpha} = -25'63$

$N_{12} \cos \alpha + N_{13} = 0$

$N_{13} = -N_{12} \cos \alpha = 24'00$



$N_{24} \sin \alpha - N_{25} \sin \alpha - N_{12} \sin \alpha - 6 = 0$

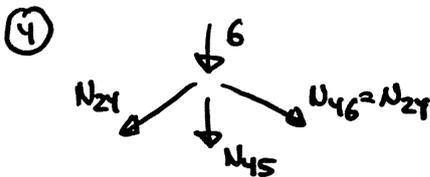
$N_{24} - N_{25} = \frac{1}{\sin \alpha} (6 + N_{12} \sin \alpha) = -8'54$

$N_{24} \cos \alpha + N_{25} \cos \alpha - N_{12} \cos \alpha = 0$

$N_{24} + N_{25} = \frac{1}{\cos \alpha} N_{12} \cos \alpha = -25'63$

$N_{24} = -17'69$

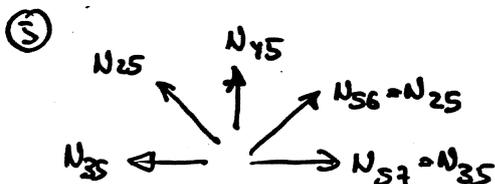
$N_{25} = -8'54$



$\sum F_H = 0$ OBVIU.

$N_{45} + 6 + 2 \times N_{24} \sin \alpha = N_{45} + (-6'00) = 0$

$N_{45} = 6'00$

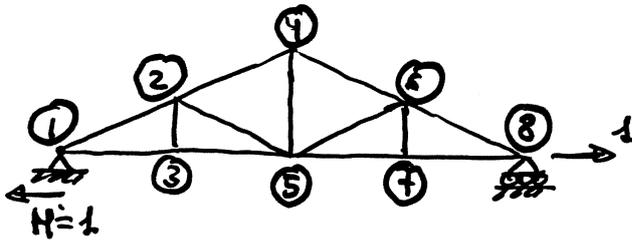


$\sum F_H = 0$ OBVIU

$2 \times N_{25} \sin \alpha + N_{45} = 2(-8'54 \sin \alpha) + 6 = 0$

CORRECTO

• ESTADO 1



$$N_{13} = N_{25} = N_{57} = N_{78} = 1$$

$$N_{12} = N_{23} = N_{25} = N_{27} = 0$$

$$N_{45} = N_{46} = N_{56} = N_{67} = N_{68} = 0$$

• CÁLCULO DE u_8 (TRABAJOS VIRTUALES)

ESTADO REAL $\rightarrow [0] + \lambda [1] \Rightarrow N_i^R = N_i^0 + \lambda N_i^1$

ESTADO VIRTUAL $\rightarrow [1]$

TRAB. VIRTUALES $\rightarrow 1 \cdot u_8 = \sum N_i^1 e_0^R = \sum \frac{N_i^1 (u_i^0 + \lambda N_i^1)}{k_i}$

$$k_i = \frac{E A_i}{L_i}$$

n = nº barra	Nudos i-j	L	A	$1/K_n$ (m·kN)	N_n^0	N_n^1	$N_n^1 \cdot N_n^0 / K_n$	$N_n^1 \cdot N_n^1 / K_n$
1	1-2	4,27	2,30E-03	8,84E-06	-25,63	0	0,00E+00	0,00E+00
2	2-4	4,27	2,30E-03	8,84E-06	-17,09	0	0,00E+00	0,00E+00
3	4-6	4,27	2,30E-03	8,84E-06	-17,09	0	0,00E+00	0,00E+00
4	6-8	4,27	2,30E-03	8,84E-06	-25,63	0	0,00E+00	0,00E+00
5	1-3	4,00	1,20E-03	1,59E-05	24,00	1	3,81E-04	1,59E-05
6	3-5	4,00	1,20E-03	1,59E-05	24,00	1	3,81E-04	1,59E-05
7	5-7	4,00	1,20E-03	1,59E-05	24,00	-1	3,81E-04	1,59E-05
8	7-8	4,00	1,20E-03	1,59E-05	24,00	1	3,81E-04	1,59E-05
9	2-3	1,50	1,16E-03	6,14E-06	0,00	0	0,00E+00	0,00E+00
10	4-5	3,00	1,16E-03	1,23E-05	6,00	0	0,00E+00	0,00E+00
11	6-7	1,50	1,16E-03	6,14E-06	0,00	0	0,00E+00	0,00E+00
12	2-5	4,27	1,63E-03	1,25E-05	-8,54	0	0,00E+00	0,00E+00
13	5-6	4,27	1,63E-03	1,25E-05	-8,54	0	0,00E+00	0,00E+00
Suma =					1,5238E-03	6,3492E-05		

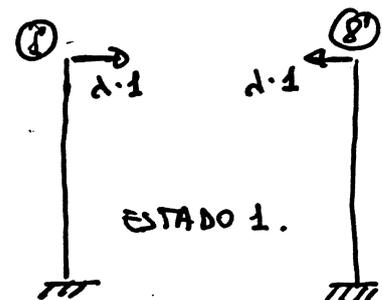
EN RESUMEN

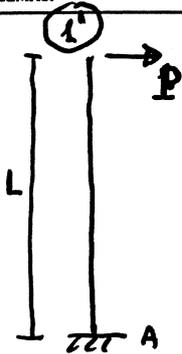
$$u_8 = 1,5238 \times 10^{-3} + \lambda 6,3492 \times 10^{-5}$$

• DESPLAZAMIENTOS EN CABEZA DE PILAR.

$$I = \frac{0,35^4}{12} = 1,2505 \times 10^{-3} \text{ m}^4$$

LAS REACCIONES DEL ESTADO 0 SOLO PRODUCEN AXILES EN LOS PILARES, LUEGO NO INFLUYEN EN u_{p1} Y u_{p2}





$$u_A = \cancel{u_A} + \cancel{\theta_A} L + \frac{1}{EI} \left\{ \frac{1}{2} PL L \frac{2}{3} L \right\}$$

$$= \frac{PL^3}{3EI}$$

$$u_d = \frac{\lambda \times 8^3}{3 \times 27 \times 10^6 \times 12508 \times 10^{-3}}$$

$$= 5'0548 \times 10^{-3} \cdot \lambda$$



$$\Rightarrow u_d = -u_{d'} \quad (\text{SINETRÍA})$$

• ECUACIÓN COMPATIBILIDAD

$$u_{d'} - u_d = u_g$$

$$- 2 \times 5'0548 \times 10^{-3} \lambda = 1'5238 \times 10^{-3} + \lambda 6'3492 \times 10^{-5}$$

$$- 0'010173 \lambda = 1'5238 \times 10^{-3}$$

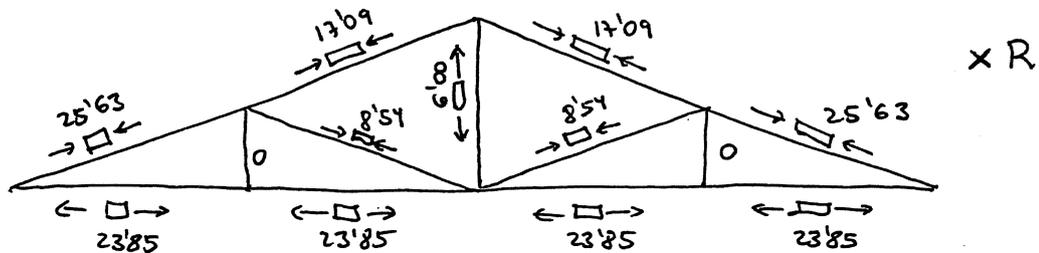
$$\lambda = -0'14979 \text{ kN}$$

• VALOR FINAL DE LOS AXILES

N_n^0	N_n^1	N_n^{Real}
-25,63	0	-25,63
-17,09	0	-17,09
-17,09	0	-17,09
-25,63	0	-25,63
24,00	1	23,85
24,00	1	23,85
24,00	1	23,85
24,00	1	23,85
0,00	0	0,00
6,00	0	6,00
0,00	0	0,00
-8,54	0	-8,54
-8,54	0	-8,54

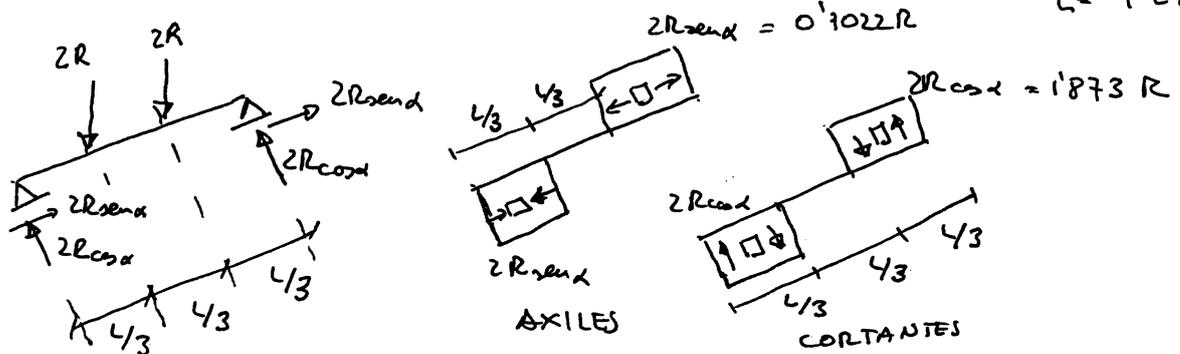


Resumen de los axiles en la estructura cargada en los nodos.



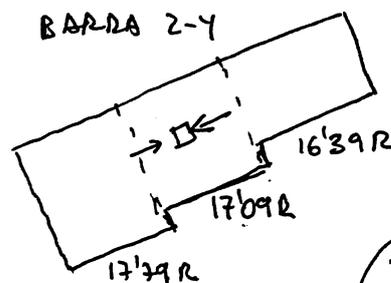
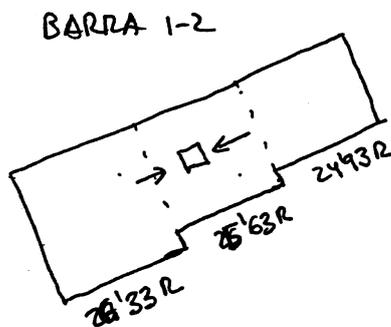
Leyes de esfuerzos en los barras cargadas

$\sin \alpha = 0'3511$ $\cos \alpha = 0'9363$
 $L = 4'27m$



Las leyes de cortantes y flexores en las barras 1-2, 2-4, 4-6 y 6-8 son las que se acaban de dibujar.

Las leyes de axiles finales son

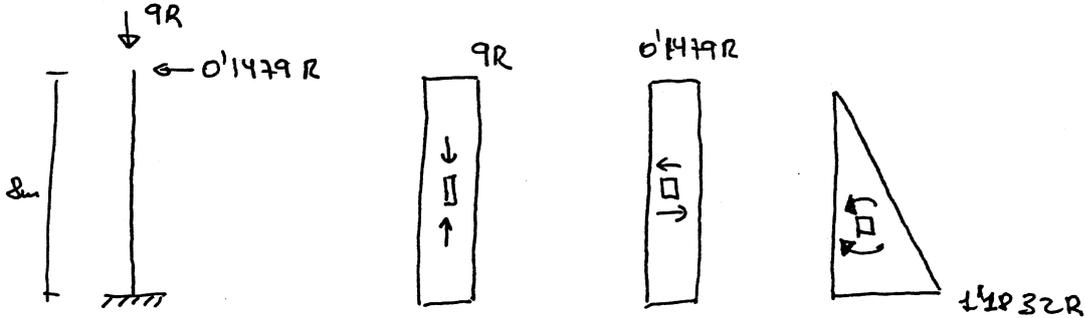


y la 6-8 y 4-6, simétricos.

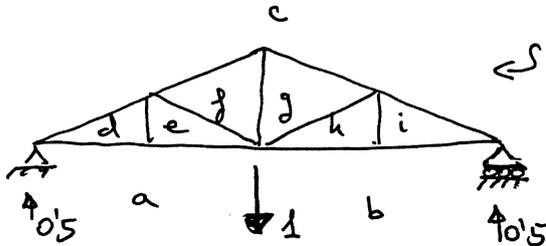
Para estos cálculos
 $R = 4'2 kN$



deyes de esfuerzos en las pilas

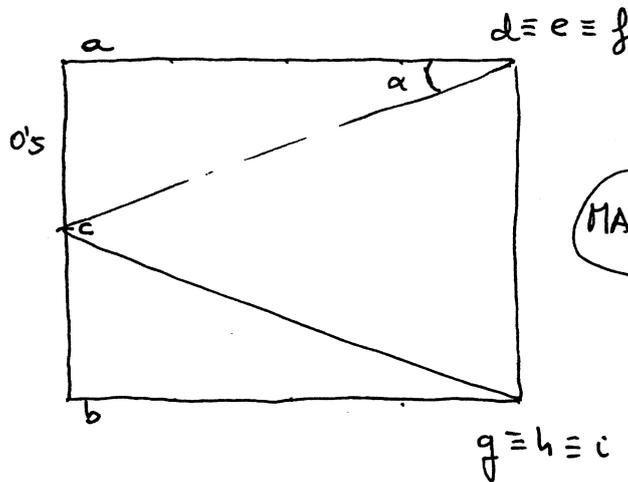


o) CALCULO DE LA FLECHA EN EL NUDO 5*



ESTADO O PARA RESOLVER LA HIPERESTÁTICA COMO EN EL CASO ANTERIOR.

BARRA	LETRAS	N
1-2	d-c	1'424 C.
1-3	a-d	1'338 T
2-3	d-e	0
2-4	f-c	1'424 C
2-5	e-f	0
3-5	a-e	1'338 T
4-5	f-g	1 T
4-6	g-c	1'424 C
5-6	h-g	0
5-7	b-h	1'338 T
6-7	h-i	0
6-8	i-c	1'424 C
7-8	b-i	1'338 T



* Se determina desde el nudo frontal en sentido anti-horario.

* Se determina aplicando al teor. de los trabajos virtuales entre la situa. ción real y una ficticia en la que, sobre la estructura, solo actúa una carga unidad, vertical y hacia abajo, en el nudo 5. El primer paso es resolver el estado ficticio (que también es hiperestático) con acabamos de hacer con el real.



El estado [1], para aplicar el teor. de los trabajos virtuales a la resolución de la hiperestática es el del caso anterior. Recordemos

$$u_3 = \sum \frac{N_i^1 N_i^0}{k_i} + \lambda \sum \frac{N_i^1 N_i^1}{k_i}$$

a axil 1

y que en el estado [1] sólo trabajan las barras 1-3, 3-5, 5-7 y 7-8. Así pues

$$\sum \frac{N_i^1 N_i^0}{k_i} = 4 \times \frac{1 \times 1'333}{k_i} = 4 \times 1'333 \times 1'587 \times 10^{-5} = 8'4656 \times 10^{-5}$$

$$\sum \frac{N_i^1 N_i^1}{k_i} = 6'3492 \times 10^{-5} \quad (\text{igual que en el cálculo anterior})$$

$$u_{3'} - u_{3''} = -2 \times 5'0548 \times 10^{-3} \lambda \quad \text{como antes.}$$

$$u_{3'} - u_{3''} = u_3 \Rightarrow -2 \times 5'0548 \times 10^{-3} \lambda = 8'4656 \times 10^{-5} + 6'3492 \times 10^{-5} \lambda$$

$$\lambda = -\frac{8'4656 \times 10^{-5}}{0'010173} = -0'008321$$

Los axiles en cada una de las barras resultan

Barras	N°	N ¹	N ^{FINAL}
1-2	-1'424	0	-1'424
2-4	-1'424	0	-1'424
4-6	-1'424	0	-1'424
6-8	-1'424	0	-1'424
1-3	1'333	1	1'325
3-5	1'333	1	1'325
5-7	1'333	1	1'325
7-8	1'333	1	1'325
2-3	0	0	0
4-5	1	0	1
6-7	0	0	0
2-5	0	0	0
5-6	0	0	0



Finalmente, calculemos el desplazamiento vertical en 5 por el teor. de los trabajos virtuales

$$(-\delta) V_5^{\text{REAL}} = \sum N_i^V e_i^R = \sum \frac{N_i^V N_i^R}{k_i}$$

BARRA	$1/k_i$	N^R	N^V	$N^V N^R / k_i$
1-2	$8'8406 \times 10^{-6}$	-25'63	-1'424	$3'227 \times 10^{-4}$
2-4	$8'8406 \times 10^{-6}$	-17'09	-1'424	$2'151 \times 10^{-4}$
4-6	$8'8406 \times 10^{-6}$	-17'09	-1'424	$2'151 \times 10^{-4}$
6-8	$8'8406 \times 10^{-6}$	-25'63	-1'424	$3'227 \times 10^{-4}$
1-3	$1'5873 \times 10^{-6}$	23'85	1'325	$5'016 \times 10^{-4}$
3-5	$1'5873 \times 10^{-6}$	23'85	1'325	$5'016 \times 10^{-4}$
5-7	$1'5873 \times 10^{-6}$	23'85	1'325	$5'016 \times 10^{-4}$
7-8	$1'5873 \times 10^{-6}$	23'85	1'325	$5'016 \times 10^{-4}$
2-3	$6'1470 \times 10^{-6}$	0	0	0
4-5	$1'2294 \times 10^{-6}$	6	1	$7'376 \times 10^{-5}$
6-7	$6'1470 \times 10^{-6}$	0	0	0
2-5			0	0
5-6			0	0

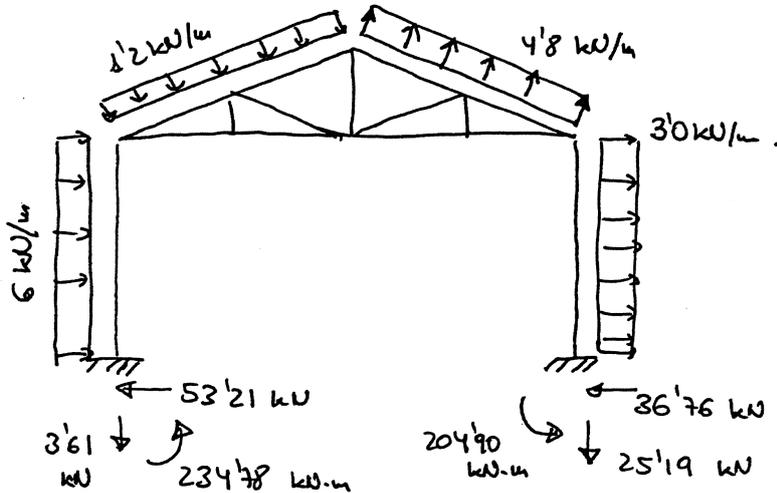
$$\Sigma = 3'156 \times 10^{-3} \text{ m.}$$

$$V_5 = -3'16 R \text{ mm}$$

R en kN.

Hay que considerar $R \equiv R_k = 2'85 \text{ kN}$.

e) Esquema de cargas y resultados para la hipótesis de carga de viento.



Fuerzas exteriores
y reacciones.

Axiles producidos por las cargas aplicadas en los nudos:

BARRA	AXIL (kW)
1-2	15'83
2-4	23'83
4-6	20'06
6-8	45'68
1-3	-10'34
3-5	-10'34
5-7	-52'13
7-8	-52'13
2-3	0
4-5	-8'21
6-7	0
2-5	-10'62
5-6	34'00

Desplazamientos del nudo 5.

$$u_5 = 0'118 \text{ m}$$

$$v_5 = 0'004 \text{ m}$$

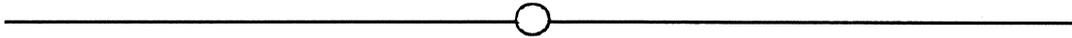
La estructura es demasiado deformable. Un desplazamiento de casi 12 cm por el empuje horizontal del viento, en el extremo de un pilar de 8'0 m, es inaceptable.

El método de rigidez



EJERCICIO N° 84

Determinar la matriz de rigidez de la barra de pórtico plano con desconexión frontal del flector.



1) Matriz de rigidez de la barra de pórtico plano, sin desconexión alguna

$$\begin{Bmatrix} F_{x1} \\ F_{y1} \\ M_{z1} \\ \hline F_{x2} \\ F_{y2} \\ M_{z2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & | & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_z}{L^3} & \frac{6EI_z}{L^2} & | & 0 & -\frac{12EI_z}{L^3} & \frac{6EI_z}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & \frac{4EI_z}{L} & | & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & \frac{2EI_z}{L} \\ \hline -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & | & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI_z}{L^3} & -\frac{6EI_z}{L^2} & | & 0 & \frac{12EI_z}{L^3} & -\frac{6EI_z}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & \frac{2EI_z}{L} & | & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & \frac{4EI_z}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_{z1} \\ \hline u_2 \\ v_2 \\ \theta_{z2} \end{Bmatrix}$$

2) Reordenamos filas y columnas para escribir la ecuación anterior en la forma,

$$\begin{Bmatrix} F^\bullet \\ F^\dagger \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [K^{\bullet\bullet}] & [K^{\bullet\dagger}] \\ [K^{\dagger\bullet}] & [K^{\dagger\dagger}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d^\bullet \\ d^\dagger \end{Bmatrix}$$

donde las cruces como superíndice identifican los esfuerzos y desplazamientos afectados por la desconexión, y los puntos al resto. En este caso concreto, no hace falta modificar el orden de filas y columnas; la descomposición de la matriz y los vectores es la siguiente:

$$\begin{Bmatrix} F_{x1} \\ F_{y1} \\ M_{z1} \\ \hline F_{x2} \\ F_{y2} \\ \hline M_{z2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & | & 0 \\ 0 & \frac{12EI_z}{L^3} & \frac{6EI_z}{L^2} & 0 & -\frac{12EI_z}{L^3} & | & \frac{6EI_z}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & \frac{4EI_z}{L} & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & | & \frac{2EI_z}{L} \\ \hline -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & | & 0 \\ 0 & -\frac{12EI_z}{L^3} & -\frac{6EI_z}{L^2} & 0 & \frac{12EI_z}{L^3} & | & -\frac{6EI_z}{L^2} \\ \hline 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & \frac{2EI_z}{L} & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & | & \frac{4EI_z}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_{z1} \\ \hline u_2 \\ v_2 \\ \hline \theta_{z2} \end{Bmatrix}$$



3) Despejando de la segunda de las ecuaciones matriciales anteriores

$$\{d^{\bullet}\} = [K^{**}]^{-1}(\{F^{\bullet}\} - [K^{*}] \{d^{\bullet}\})$$

es decir, en nuestro caso

$$\theta_{z2} = \frac{L}{4EI_z} \left(M_{2z} - \left[0 \quad \frac{6EI_z}{L^2} \quad \frac{2EI_z}{L} \quad 0 \quad -\frac{6EI_z}{L^2} \right] \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_{z1} \\ u_2 \\ v_2 \end{Bmatrix} \right)$$

4) Sustituimos este resultado en la primera ecuación matricial del punto 2

$$\{F^{\bullet}\} = [[K^{**}] \quad [K^{*}]] \begin{Bmatrix} d^{\bullet} \\ d^{\bullet} \end{Bmatrix}$$

obteniendo

$$\begin{Bmatrix} F_{x1} \\ F_{y1} \\ M_{z1} \\ F_{x2} \\ F_{y2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 \\ 0 & \frac{12EI_z}{L^3} & \frac{6EI_z}{L^2} & 0 & -\frac{12EI_z}{L^3} \\ 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & \frac{4EI_z}{L} & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 \\ 0 & -\frac{12EI_z}{L^3} & -\frac{6EI_z}{L^2} & 0 & \frac{12EI_z}{L^3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_{z1} \\ u_2 \\ v_2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{6EI_z}{L^2} \\ \frac{2EI_z}{L} \\ 0 \\ -\frac{6EI_z}{L^2} \end{Bmatrix} \frac{L}{4EI_z} \left(M_{2z} - \left[0 \quad \frac{6EI_z}{L^2} \quad \frac{2EI_z}{L} \quad 0 \quad -\frac{6EI_z}{L^2} \right] \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_{z1} \\ u_2 \\ v_2 \end{Bmatrix} \right)$$

5) Reordenando esta expresión llegamos

$$\begin{Bmatrix} F_{x1} \\ F_{y1} \\ M_{z1} \\ F_{x2} \\ F_{y2} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{6EI_z}{L^2} \\ \frac{2EI_z}{L} \\ 0 \\ -\frac{6EI_z}{L^2} \end{Bmatrix} \frac{L}{4EI_z} M_{2z} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 \\ 0 & \frac{12EI_z}{L^3} & \frac{6EI_z}{L^2} & 0 & -\frac{12EI_z}{L^3} \\ 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & \frac{4EI_z}{L} & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 \\ 0 & -\frac{12EI_z}{L^3} & -\frac{6EI_z}{L^2} & 0 & \frac{12EI_z}{L^3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_{z1} \\ u_2 \\ v_2 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{6EI_z}{L^2} \\ \frac{2EI_z}{L} \\ 0 \\ -\frac{6EI_z}{L^2} \end{Bmatrix} \frac{L}{4EI_z} \left[0 \quad \frac{6EI_z}{L^2} \quad \frac{2EI_z}{L} \quad 0 \quad -\frac{6EI_z}{L^2} \right] \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_{z1} \\ u_2 \\ v_2 \end{Bmatrix}$$

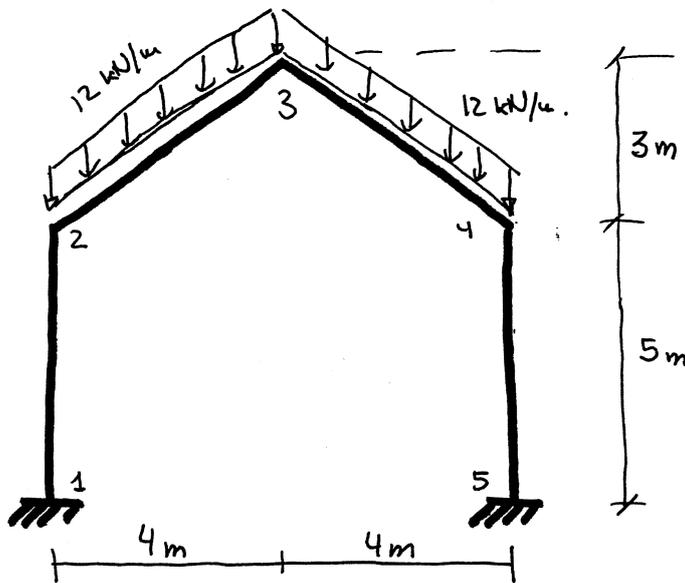


6) Finalmente, haciendo las operaciones indicadas llegamos a

$$\begin{Bmatrix} F_{x1} \\ F_{y1} - \frac{3M_{z2}}{2L} \\ M_{z1} - \frac{M_{z2}}{2} \\ F_{x2} \\ F_{y2} + \frac{3M_{z2}}{2L} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 \\ 0 & \frac{3EI_z}{L^3} & \frac{3EI_z}{L^2} & 0 & -\frac{3EI_z}{L^3} \\ 0 & \frac{3EI_z}{L^2} & \frac{3EI_z}{L} & 0 & -\frac{3EI_z}{L^2} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 \\ 0 & -\frac{3EI_z}{L^3} & -\frac{3EI_z}{L^2} & 0 & \frac{3EI_z}{L^3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_{z1} \\ u_2 \\ v_2 \end{Bmatrix}$$



EJERCICIO Nº 85



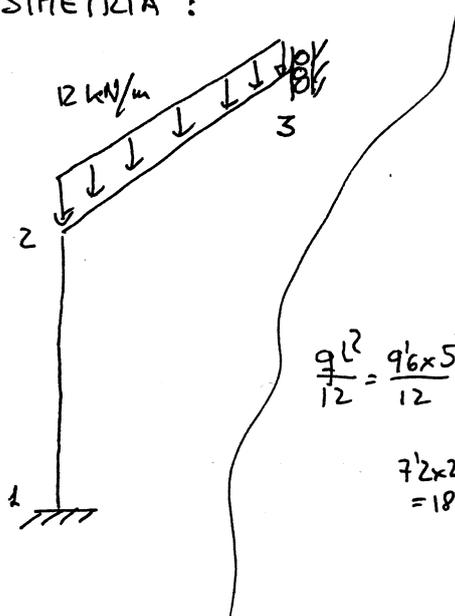
BARRAS 1-2 Y 4-5
 $EI = 62.500 \text{ kN}\cdot\text{m}^2$
 $EA = 2.000.000 \text{ kN}$

BARRAS 2-3 Y 3-4
 $EI = 12.500 \text{ kN}\cdot\text{m}^2$
 $EA = 1.000.000 \text{ kN}$

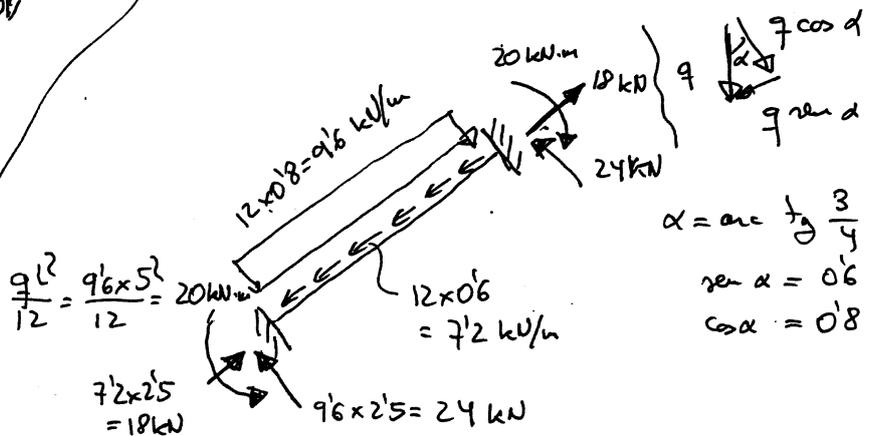
SE PIDE:

- DESPLAZAMIENTOS Y GIROS EN TODOS LOS NUDOS.
- FUERZAS EN EXTREMO DE BARRA Y LEYES DE ESFUERZOS EN TODAS LAS BARRAS.
- DIBUJAR LA DEFORMADA A ESTIMA.

SIMETRÍA:



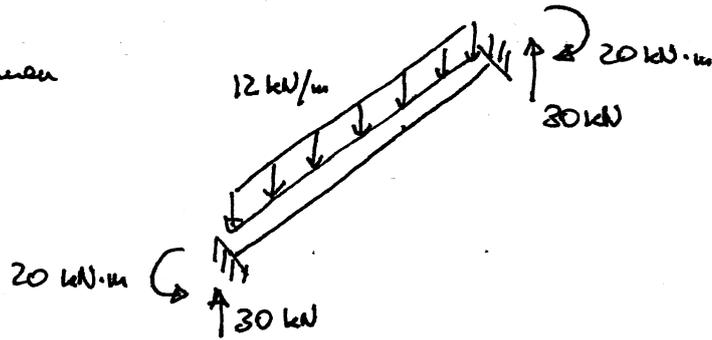
FUERZAS DE EMPOTRAMIENTO PERFECTO EN LA BARRA 2-3. ($L = 5'0\text{m.}$)



$$\Sigma F_H = 24 \sin \alpha - 18 \cos \alpha = 24 \times 0'6 - 18 \times 0'8 = 0$$

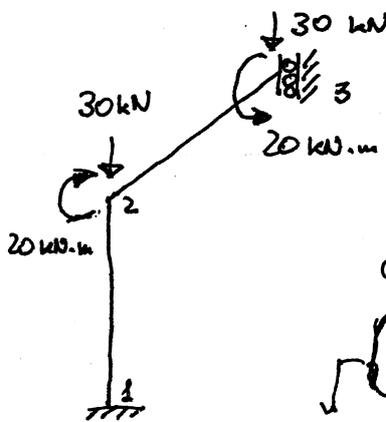
$$R = 24 \cos \alpha + 18 \sin \alpha = 30 \text{ kN.}$$

Después, en resumen



(2)

- ESQUEMA DEL CÁLCULO DE LA ESTRUCTURA, CON CARGAS EN LOS NUDOS.



NOTACIÓN:

$$\{d_i\} = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ \theta_i \end{Bmatrix} \quad \{f_i\} = \begin{Bmatrix} f_{xi} \\ f_{yi} \\ m_i \end{Bmatrix}$$

Cond. de contorno $\Rightarrow u_1 = v_1 = \theta_1 = u_3 = \theta_3 = 0$

Columnas que resultan multiplicados por 0. No hace falta determinarlos

f_{x1}						u_1
f_{y1}	K_{11}^{1-2}		K_{1j}^{1-2}			v_1
m_1						θ_1
f_{x2}						u_2
f_{y2}	K_{ij}^{1-2}		$K_{jj}^{1-2} + K_{ii}^{2-3}$		K_{ij}^{1-2-3}	v_2
m_2						θ_2
f_{x3}						u_3
f_{y3}			K_{ij}^{2-3}		K_{jj}^{2-3}	v_3
m_3						θ_3

Filas que sólo hacen falta para calcular reacciones. Se puede prescindir de ellas y volver las reacciones al final, por equilibrio de nudos.



No hace falta que determinemos las columnas de la matriz de rigidez que luego, por las condiciones de contorno, van a resultar multiplicados por cero. Se comprueba que las filas cuyo número de orden coincide con el de estas columnas sólo hacen falta para determinar las reacciones; puesto que no son necesarias para calcular los desplazamientos de los nudos libres, se puede prescindir de ellas y obtener las reacciones, al final, por condiciones de equilibrio de nudo. En este ejercicio veremos como. Así pues, para resolver el problema, basta que determinemos las siguientes submatrices de la matriz de rigidez:

- En la base 1-2 $\rightarrow k'_{JJ}$
- En la base 2-3 $\rightarrow k'_{II}$, la columna 2 de k'_{ij} , que coincide con la fila 2 de k'_{ij} , y el elemento 2-2 de k'_{ij} .

En los cambios de base que deberemos realizar siempre aparece un producto de la forma $[T^T][K][T]^t$, donde las matrices $[T^T]$ y $[K]$ tienen la misma estructura en todos los casos. Por ello realizaremos el producto una sola vez, considerando matrices genéricas, y luego aplicaremos directamente los resultados.

$$\begin{bmatrix} c & -s & 0 \\ s & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & D \\ 0 & E & F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c & -s & 0 \\ s & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} c^2A + s^2B & cs(A-B) & -sD \\ cs(A-B) & s^2A + c^2B & cD \\ -Es & Ec & F \end{bmatrix}$$

En esta fórmula, c representa $\cos\alpha$; s , $\sin\alpha$; y A, B, D, E, F los distintos elementos no nulos de $[K_{II}]$, $[K_{JJ}]$, $[K_{iJ}]$ ó $[K_{jI}]$.



• BARRA 1-2

$$[K_{JJ}^{1-2}] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 400.000 & 0 & 0 \\ 0 & 6000 & -15.000 \\ 0 & -15.000 & 50.000 \end{bmatrix}$$

Ejes
locales

$\alpha = 90^\circ \Rightarrow c = 0, s = 1; A = 400, B = 6000, D = -15.000, E = -15000, F = 50000$

$$[K'_{JJ}^{(1-2)}] = \begin{bmatrix} 6000 & 0 & 15.000 \\ 0 & 400.000 & 0 \\ 15.000 & 0 & 50.000 \end{bmatrix}$$

← EJES GENERALES.

• BARRA 2-3

$$[K_{II}^{2-3}] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 200.000 & 0 & 0 \\ 0 & 1200 & 3000 \\ 0 & 3000 & 10.000 \end{bmatrix}$$

← LOCALES

$\alpha = \arctan \frac{3}{4} \quad s = 0'6 \quad c = 0'8$

$A = 200.000, B = 1200, D = 3.000, E = 3.000, F = 10.000$

$$[K'_{II}^{2-3}] = \begin{bmatrix} 128.432 & 95424 & -1800 \\ 95424 & 72.768 & 2400 \\ -1800 & 2400 & 10.000 \end{bmatrix}$$

← EJES GENERALES

Para calcular la columna 2 de k'_{ij} necesitamos los elementos de esta matriz que ocupan las posiciones A, B y E según la notación de la fórmula de cambio de base, es decir, los elementos (1,1), (2,2) y (3,2).

$$A = [K_{ij}^{2-3}]_{(1,1)} = -\frac{EA}{L} = -200.000$$

$$B = [K_{ij}^{2-3}]_{(2,2)} = -\frac{12EI}{L^3} = -1200$$

$$E = [K_{ij}^{2-3}]_{(3,2)} = -\frac{6EI}{L^2} = -3000$$



Recordando a la citada fórmula de cambio tenemos:

$$[K'_{IJ}]_{(i,j)} = \begin{cases} c \cdot s (A-B) \\ s^2 A + c^2 B \\ E_c \end{cases} = \begin{cases} -95424 \\ -72.768 \\ -2400 \end{cases}$$

Finalmente, el elemento (2,2) de k'_{JJ} , usando la misma fórmula, resulta

$$[K'_{JJ}]_{(2,2)} = s^2 A + c^2 B = s^2 \frac{EA}{L} + c^2 \frac{12EI}{L^3} \\ = 0.6^2 \times 200.000 + 0.8^2 \times 1200 = 72.768$$

• SISTEMA DE ECUACIONES EN RIGIDEZ. Habíamos establecido que era

$$\begin{Bmatrix} f'_{x2} \\ f'_{y2} \\ \eta'_2 \\ f'_{y3} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [K'_{JJ}]_{(1,1)} + [K'_{IJ}]_{(1,2)} & [K'_{IJ}]_{(i,j)} \\ \dots & \dots \\ [K'_{IJ}]_{(i,j)}^t & [K'_{JJ}]_{(2,2)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u'_2 \\ v'_2 \\ \phi'_2 \\ v'_3 \end{Bmatrix}$$

es decir, substituyendo valores

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ -30 \\ -20 \\ -30 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 6000 + 128432 & 0 + 95424 & 15000 - 1800 & -95424 \\ 0 + 95424 & 400.000 + 72768 & 0 + 2400 & -72.768 \\ 15000 - 1800 & 0 + 2400 & 50.000 + 10.000 & -2.400 \\ -95.424 & -72.768 & -2.400 & 72.768 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u'_2 \\ v'_2 \\ \phi'_2 \\ v'_3 \end{Bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} 134.432 & 95.424 & 13200 & -95.424 \\ 95.424 & 472.768 & 2400 & -72.768 \\ 13200 & 2400 & 60.000 & -2400 \\ -95.424 & -72.768 & -2400 & 72.768 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u'_2 \\ v'_2 \\ \phi'_2 \\ v'_3 \end{Bmatrix}$$

cuya solución resulta

$$u'_2 = -4.7058 \times 10^{-3} \text{ m} \quad v'_2 = -1.5 \times 10^{-4} \text{ m}$$

$$\phi'_2 = 4.3920 \times 10^{-4} \text{ rad} \quad v'_3 = -6.7188 \times 10^{-3} \text{ m}$$



• ESFUERZOS EN LA BARRA 1-2 (Y REACCIONES EN 1)

- Desplazamientos en sus extremos:

$$u'_1 = v'_1 = \vartheta'_1 = 0 \quad u'_2 = -4'7058 \times 10^{-3} \quad v'_2 = -1'5 \times 10^{-4} \quad \vartheta'_2 = 4'3920 \times 10^{-4}$$

y en ejes locales

$$u_1 = v_1 = \vartheta_1 = 0 \quad u_2 = -1'5 \times 10^{-4} \quad v_2 = 4'7058 \times 10^{-3} \quad \vartheta_2 = 4'3920 \times 10^{-4}$$

- Fuerzas en extremo de barra

$$\begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11}^{1-2} & 1 & K_{12}^{1-2} \\ & & \\ K_{21}^{1-2} & 1 & K_{22}^{1-2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{Bmatrix} \quad \text{siendo } f_i = \begin{Bmatrix} f_{xi} \\ f_{yi} \\ M_i \end{Bmatrix} \quad \text{y } d_i = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ \vartheta_i \end{Bmatrix}$$

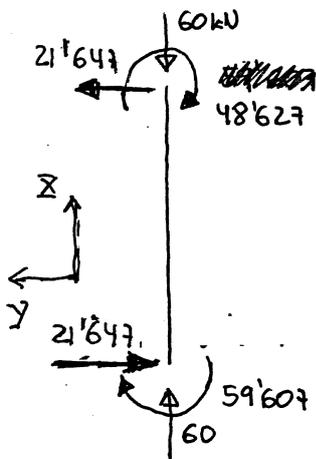
↳ Columnas que resultan multiplicadas por 0.

$$\begin{Bmatrix} f_{x1} \\ f_{y1} \\ M_1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ \vartheta_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -400.000 & 0 & 0 \\ 0 & -6000 & 15.000 \\ 0 & -15.000 & 25.000 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -1'5 \times 10^{-4} \\ 4'7058 \times 10^{-3} \\ 4'3920 \times 10^{-4} \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow f_{x1} = 60 \text{ kN} \quad f_{y1} = -21'647 \text{ kN} \quad M_1 = -59'607 \text{ kN.m}$$

$$\begin{Bmatrix} f_{x2} \\ f_{y2} \\ M_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ \vartheta_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 400.000 & 0 & 0 \\ 0 & 6000 & -15.000 \\ 0 & -15.000 & 50.000 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -1'5 \times 10^{-4} \\ 4'7058 \times 10^{-3} \\ 4'3920 \times 10^{-4} \end{Bmatrix}$$

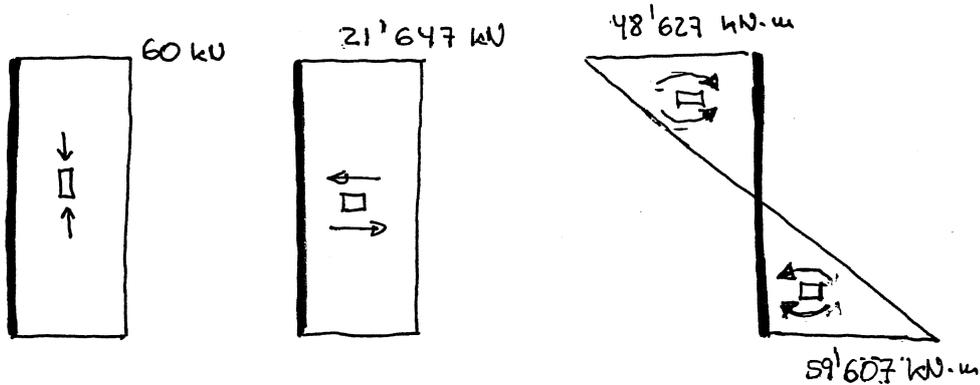
$$f_{x2} = -60 \text{ kN} \quad f_{y2} = 21'647 \text{ kN} \quad M_2 = -48'627 \text{ kN.m}$$



Como en 1 no actúa ninguna fuerza, es evidente que $R_{x1} = 21'647 \text{ kN}$, $R_{y1} = 60 \text{ kN}$, $M_{R1} = -59'607 \text{ kN.m}$ ¡YA TENEMOS LAS REACCIONES!, SIN NECESIDAD DE DETERMINAR LAS FILAS DE LA MATRIZ DE RIGIDEZ DE LAS QUE HABÍAMOS PRESCINDIDO EN LA PÁGINA 2 DEL PROBLEMA.



- Leyes de esfuerzos



• BARRA 2-3

- Desplazamientos en los extremos

$$u_2' = -4'7058 \times 10^{-3} \quad v_2' = -1'5 \times 10^{-4} \quad \theta_2' = 4'3920 \times 10^{-4}$$

$$u_3' = 0 \quad v_3' = -6'7188 \times 10^{-3} \quad \theta_3' = 0$$

Cambio de ejes ($s = 0'6$, $c = 0'8$) $\{d_{2j}'\} = [T_{ij}]^t \{d_i'\} \dots$

$$\begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c & -s & 0 \\ s & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^t \begin{Bmatrix} u_2' \\ v_2' \\ \theta_2' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0'8 & 0'6 & 0 \\ -0'6 & 0'8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -4'7058 \times 10^{-3} \\ -1'5 \times 10^{-4} \\ 4'3920 \times 10^{-4} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -3'855 \times 10^{-3} \\ 2'703 \times 10^{-3} \\ 4'392 \times 10^{-4} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} u_3 \\ v_3 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0'8 & 0'6 & 0 \\ -0'6 & 0'8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ -6'7188 \times 10^{-3} \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -4'031 \times 10^{-3} \\ -5'375 \times 10^{-3} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

- Fuerzas en extremos de barra $f_2 = [K_{II}^{2-3}] \cdot d_2 + [K_{Ij}^{2-3}] d_3$

$$\begin{Bmatrix} f_{x2} \\ f_{y2} \\ M_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L} & \frac{6EI}{L} \\ 0 & -\frac{6EI}{L} & \frac{2EI}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_3 \\ v_3 \\ \theta_3 \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 \times 10^5 & 0 & 0 \\ 0 & 1200 & 3000 \\ 0 & 3000 & 10.000 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -3'855 \times 10^{-3} \\ 2'703 \times 10^{-3} \\ 4'392 \times 10^{-4} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 \times 10^5 & 0 & 0 \\ 0 & -1200 & 3000 \\ 0 & -3000 & 5000 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -4'031 \times 10^{-3} \\ -5'375 \times 10^{-3} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow f_{x2} = 35'328 \text{ kN} \quad f_{y2} = 11'012 \text{ kN} \quad M_2 = 28'628 \text{ kN}\cdot\text{m}$$



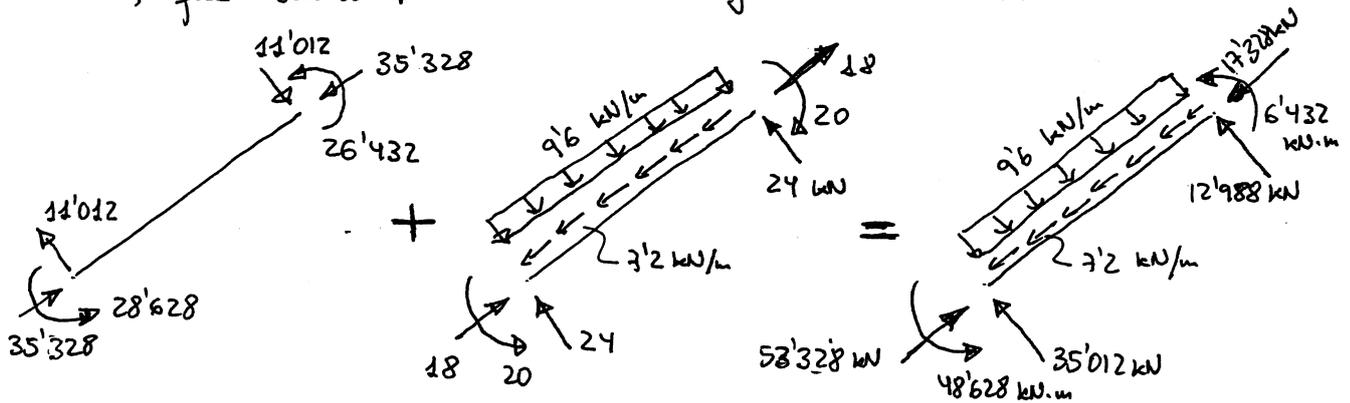
$$\begin{Bmatrix} f_{x3} \\ f_{y3} \\ M_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_3 \\ v_3 \\ \theta_3 \end{Bmatrix}$$

$\leftarrow \mathbf{F}_3 = \mathbf{K}_{ij}^{2-2} \mathbf{d}_2 + \mathbf{K}_{ij}^{2-3} \mathbf{d}_3$

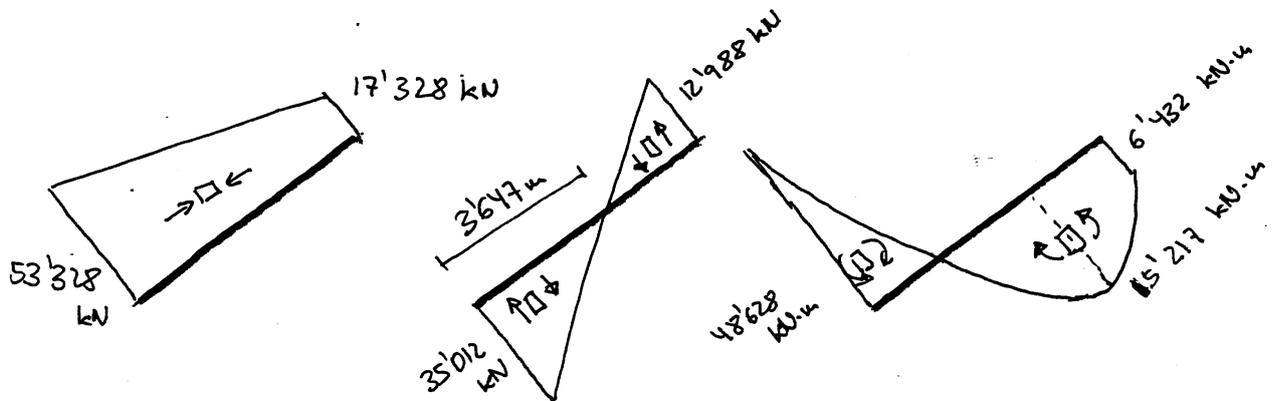
$$= \begin{bmatrix} -2 \times 10^5 & 0 & 0 \\ 0 & -1200 & -3000 \\ 0 & 3000 & 5000 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -3'855 \times 10^{-3} \\ 2'703 \times 10^{-3} \\ 4'392 \times 10^{-4} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \times 10^5 & 0 & 0 \\ 0 & 1200 & -3000 \\ 0 & -3000 & 10000 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -4'031 \times 10^{-3} \\ -5'375 \times 10^{-2} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow f_{x3} = -35'328 \text{ kN} \quad f_{y3} = -11'012 \text{ kN} \quad M_3 = 26'432 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

- Para dibujar las leyes de esfuerzos hemos de superponer el estado que acabamos de determinar - correspondiente a la estructura con cargas en los nudos - al correspondiente a la viga biempotrada sometida a la solicitación exterior, que usamos para llevar los cargas a los nudos. Así, tendremos



LEYES





Para verificar la conexión de nuestros resultados podemos comprobar el equilibrio de algunos nudos, a partir de las fuerzas exteriores -reales- directamente aplicadas en ellos y las fuerzas en extremo de barra recién calculadas. En nuestro problema, es interesante verificar que la reacción en la desliza de la 3 es horizontal. Para ello pasaremos las fuerzas a el extremo con pendiente de la barra a los ejes generales

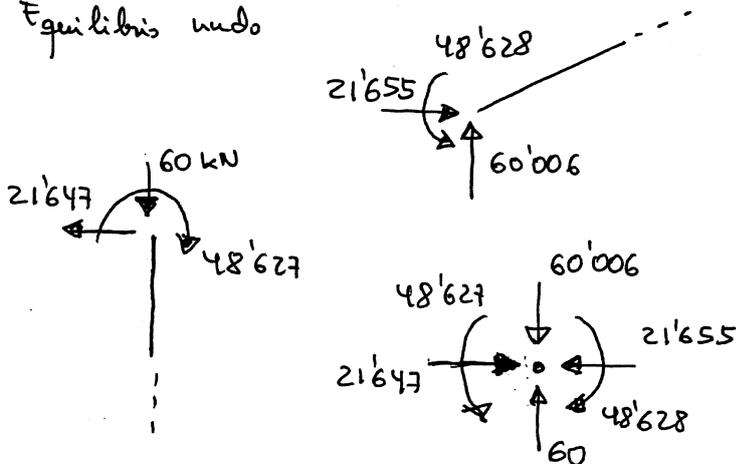
$$\begin{Bmatrix} f'_{x3} \\ f'_{y3} \\ \pi_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c & -s & 0 \\ s & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f_{x3} \\ f_{y3} \\ \pi_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0'8 & -0'6 & 0 \\ 0'6 & 0'8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -17'328 \\ 12'988 \\ 6'432 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -21'655 \\ -6'4 \times 10^{-3} \\ 6'432 \end{Bmatrix}$$

$-6'4 \times 10^{-3}$ es el error en la reacción horizontal, del orden de la última cifra significativa que se está manejando. Es, pues, admisible y la comprobación puede darse por válida.

Aunque en nuestro caso no había falta, verificaremos, a título de ejemplo, el equilibrio del nudo 2. Hallemos las fuerzas en el extremo 2 de la barra 2-3, en ejes generales

$$\begin{Bmatrix} f'_{x2} \\ f'_{y2} \\ \pi_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0'8 & -0'6 & 0 \\ 0'6 & 0'8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 53'328 \\ 35'012 \\ 48'628 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 21'655 \\ 60'006 \\ 48'628 \end{Bmatrix}$$

Equilibrio nudo



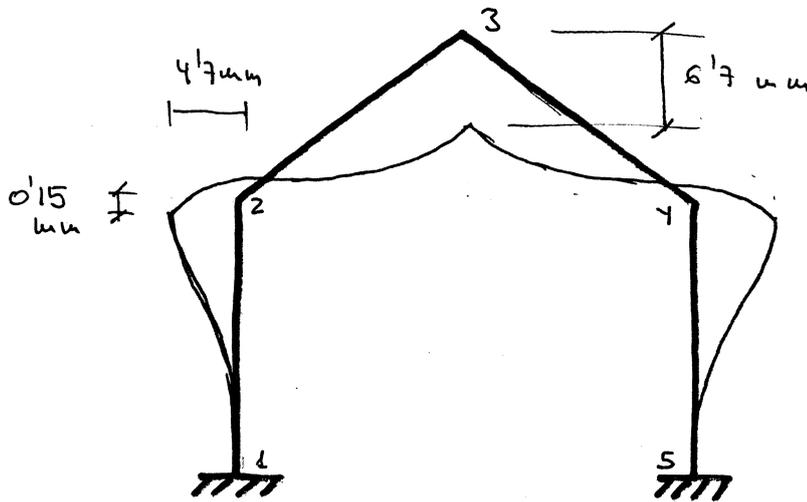
$$\sum F_x = 21'647 - 21'655 = -0'008$$

$$\sum F_y = 60 - 60'006 = -0'006$$

$$\sum \pi = 48'627 - 48'628 = -0'001$$

Los errores son admisibles en todos los casos.

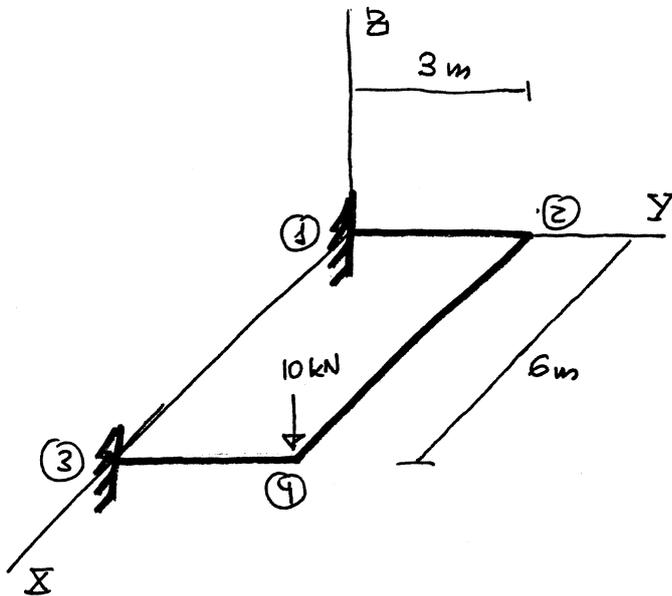
o DEFORMADA A ESTIMA



Nótese que, a diferencia de como se suele proceder en los cálculos en flexibilidad, en este NO HEMOS DESPRECIADO LAS DEFORMACIONES POR AXIL. Como consecuencia de ello, los puntos 2 y 4 tienen desplazamiento vertical.



EJERCICIO Nº 86



TODAS LAS BARRAS:
 $EI = 18.000 \text{ kN}\cdot\text{m}^2$
 $GJ = 12.000 \text{ kN}\cdot\text{m}^2$

EMPARRILLADO

ESQUEMA DEL SISTEMA DE ECUACIONES DE RIGIDEZ

$$\begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{Bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} K_{11}^{1-2} & K_{1j}^{1-2} & \dots & \dots \\ K_{j1}^{1-2} & K_{jj}^{1-2} + K_{II}^{1-2} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{Bmatrix}$$

Columnas que resultan multiplicadas por 0 como consecuencia de las condiciones de contorno.

Filas que sólo intervienen en el cálculo de reacciones, y que, como este se aborda por equilibrio de nudos, no hace falta montar.



- BARRA 1-2. Sólo necesitamos la submatriz $[K]_{JJ}^{\prime}$

$$[K]_{JJ}^{1-2} = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{L^3} & 0 & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{GJ}{L} & 0 \\ \frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8000 & 0 & 12000 \\ 0 & 4000 & 0 \\ 12000 & 0 & 24000 \end{bmatrix}$$

Cambio de sistema de referencia $[K] = T [K'] T^t$

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & -s \\ 0 & s & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$c = \cos \alpha, \quad s = \sin \alpha. \quad \text{Como } \alpha = 90^\circ, \quad c = 0, \quad s = 1$$

$$[K]_{JJ}^{\#1-2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8000 & 0 & 12000 \\ 0 & 4000 & 0 \\ 12000 & 0 & 24000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8000 & -12000 & 0 \\ -12000 & 24000 & 0 \\ 0 & 0 & 4000 \end{bmatrix}$$

- BARRA 3-4. Es idéntica a la 1-2. También necesitamos sólo la submatriz $[K]_{JJ}^{\prime}$, que coincide con la de la barra 1-2.
- BARRA 2-4. Necesitamos la matriz de rigidez completa. Los ejes locales coinciden con los generales, por lo que no es necesario ningún cambio de ejes.

$$[K]_{IJ}^{2-4} = [K]_{II}^{\prime 2-4} = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{L^3} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{GJ}{L} & 0 \\ -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1000 & 0 & -3000 \\ 0 & 2000 & 0 \\ -3000 & 0 & 12000 \end{bmatrix}$$

$$[K]_{IJ}^{2-4} = [K]_{JJ}^{\prime 2-4} = \begin{bmatrix} -\frac{12EI}{L^3} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & -\frac{GJ}{L} & 0 \\ \frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{2EI}{L} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1000 & 0 & -3000 \\ 0 & -2000 & 0 \\ 3000 & 0 & 6000 \end{bmatrix}$$



$$[K_{JJ}^{2-4}] = [K_{JJ}^{1-2-4}] = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{L^3} & 0 & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & 0 \\ \frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1000 & 0 & 3000 \\ 0 & 2000 & 0 \\ 3000 & 0 & 12.000 \end{bmatrix}$$

• SISTEMA DE ECUACIONES DE RIGIDEZ.

$$f_i = \begin{Bmatrix} f_{zi} \\ M_{xi} \\ P_{yi} \end{Bmatrix} \quad d_i = \begin{Bmatrix} w_i \\ \theta_{xi} \\ \theta_{yi} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} f_2 \\ f_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{JJ}^{1-2} + K_{JJ}^{1-2-4} & K_{JJ}^{1-2-4} \\ K_{JJ}^{1-2-4} & K_{JJ}^{1-3-4} + K_{JJ}^{1-2-4} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_2 \\ d_4 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -10 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 8000 + 1000 & -12000 + 0 & 0 - 3000 & -1000 & 0 & -3000 \\ -12000 + 0 & 24.000 + 2.000 & 0 + 0 & 0 & -2000 & 0 \\ 0 - 3000 & 0 + 0 & 4000 + 12.000 & 3000 & 0 & 6.000 \\ -1000 & 0 & 3000 & 8000 + 1.000 & -12.000 & 0 + 3000 \\ 0 & -2000 & 0 & -12.000 & 24.000 & 0 + 0 \\ -3000 & 0 & 6.000 & 0 + 3000 & 0 + 0 & 4000 + 12.000 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_2 \\ \theta_{x2} \\ \theta_{y2} \\ w_3 \\ \theta_{x3} \\ \theta_{y3} \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 9.000 & -12.000 & -3000 & -1.000 & 0 & -3.000 \\ -12.000 & 26.000 & 0 & 0 & -2.000 & 0 \\ -3.000 & 0 & 16.000 & 3.000 & 0 & 6.000 \\ -1.000 & 0 & 3.000 & 9.000 & -12.000 & 3.000 \\ 0 & -2.000 & 0 & -12.000 & 26.000 & 0 \\ -3.000 & 0 & 6.000 & 3.000 & 0 & 16.000 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_2 \\ \theta_{x2} \\ \theta_{y2} \\ w_3 \\ \theta_{x3} \\ \theta_{y3} \end{Bmatrix}$$

Su solución es

$$w_2 = -9'476 \times 10^{-4}$$

$$w_3 = -4'052 \times 10^{-3}$$

$$\theta_{x2} = -5'847 \times 10^{-4}$$

$$\theta_{x4} = -1'915 \times 10^{-3}$$

$$\theta_{y2} = 4'234 \times 10^{-4}$$

$$\theta_{y4} = 4'234 \times 10^{-4}$$



• FUERZAS EN EXTREMO DE BARRA Y ESFUERZOS EN LA BARRA 1-2. REACCIONES EN 1.

- Desplazamientos en ejes generales

$$w_1' = 0 \quad \theta_{x1}' = 0 \quad \theta_{y1}' = 0$$

$$w_2' = -9'476 \times 10^{-4} \quad \theta_{x2}' = -5'847 \times 10^{-4} \quad \theta_{y2}' = 4'234 \times 10^{-4}$$

- Desplazamientos en ejes locales

$$d_1' = T d \Rightarrow d = T^t d_1'$$

$$\begin{Bmatrix} w \\ \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_1' \\ \theta_x' \\ \theta_y' \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} w_1' \\ \theta_y' \\ -\theta_x' \end{Bmatrix}$$

$$w_2 = \theta_{x2}' = \theta_{y1}' = 0$$

$$w_2 = -9'476 \times 10^{-4}$$

$$\theta_{x2} = 4'234 \times 10^{-4}$$

$$\theta_{y2} = 5'847 \times 10^{-4}$$

- Fuerzas en extremo de barra

$$f_3 = K_{II}^{-1} d_1 + K_{IJ}^{-1} d_2 \quad // \quad d_1 = 0$$

$$\begin{Bmatrix} f_{z1} \\ \pi_{x1} \\ \pi_{y1} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-12EI}{L^3} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & -\frac{6J}{L} & 0 \\ \frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{2EI}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_2 \\ \theta_{x2} \\ \theta_{y2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 8000 & 0 & -12.000 \\ 0 & -4000 & 0 \\ 12.000 & 0 & 12.000 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -9'476 \times 10^{-4} \\ 4'234 \times 10^{-4} \\ 5'847 \times 10^{-4} \end{Bmatrix}$$

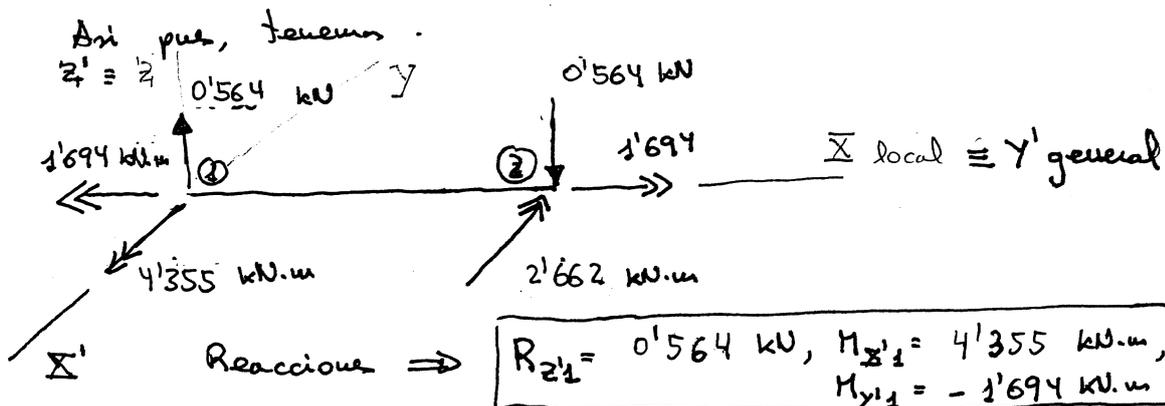
$$f_{z1} = 0'564 \text{ kN}$$

$$\pi_{x1} = -1'694 \text{ kN.m}$$

$$\pi_{y1} = -4'355 \text{ kN.m}$$

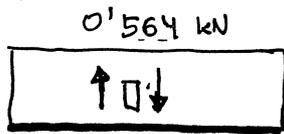
$$f_2 = K_{ij}^{-1} d_1 + K_{jj}^{-1} d_2 \quad // \quad d_1 = 0$$

$$\begin{Bmatrix} f_{z2} \\ \pi_{x2} \\ \pi_{y2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 8000 & 0 & 12000 \\ 0 & 4000 & 0 \\ 12.000 & 0 & 24.000 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -9'476 \times 10^{-4} \\ 4'234 \times 10^{-4} \\ 5'847 \times 10^{-4} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0'564 \text{ kN} \\ 1'694 \text{ kN.m} \\ 2'662 \text{ kN.m} \end{Bmatrix}$$

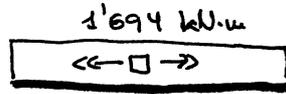




- Leyes de esfuerzos

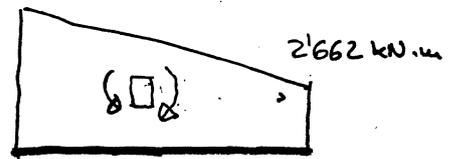


CORTANTES



TORSORES

4'355 kN.m



FLECTORES

• FUERZAS EN EXTREMO DE BARRA Y LEYES DE ESFUERTOS EN LA BARRA 2-4.

- Desplazamientos (coinciden ejes locales y globales).

$$w_2 = -9'476 \times 10^{-4} \quad \theta_{x2} = -5'847 \times 10^{-4} \quad \theta_{y2} = 4'234 \times 10^{-4}$$

$$w_4 = -4'052 \times 10^{-3} \quad \theta_{x4} = -1'915 \times 10^{-3} \quad \theta_{y4} = 4'234 \times 10^{-4}$$

- Fuerzas en extremo de barra $f_2 = [K_{ix}] d_2 + [K_{ij}] d_4$

Hallamos los submatrices en las hojas 2 y 3.

$$\begin{Bmatrix} f_{z2} \\ \pi_{x2} \\ \pi_{y2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1000 & 0 & -3000 \\ 0 & 2000 & 0 \\ -3000 & 0 & 12000 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -9'476 \times 10^{-4} \\ -5'847 \times 10^{-4} \\ 4'234 \times 10^{-4} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} -1000 & 0 & -3000 \\ 0 & -2000 & 0 \\ 3000 & 0 & 6000 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -4'052 \times 10^{-3} \\ -1'915 \times 10^{-3} \\ 4'234 \times 10^{-4} \end{Bmatrix}$$

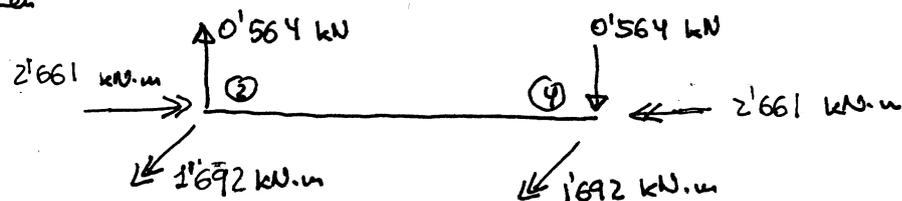
$$f_{z2} = 0'564 \text{ kN} \quad \pi_{x2} = 2'661 \text{ kN.m} \quad \pi_{y2} = -1'692 \text{ kN.m}$$

$$\begin{Bmatrix} f_{z4} \\ \pi_{x4} \\ \pi_{y4} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -1000 & 0 & 3000 \\ 0 & -2000 & 0 \\ -3000 & 0 & 6000 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -9'476 \times 10^{-4} \\ -5'847 \times 10^{-4} \\ 4'234 \times 10^{-4} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1000 & 0 & 3000 \\ 0 & 2000 & 0 \\ 3000 & 0 & 12000 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -4'052 \times 10^{-3} \\ -1'915 \times 10^{-3} \\ 4'234 \times 10^{-4} \end{Bmatrix}$$

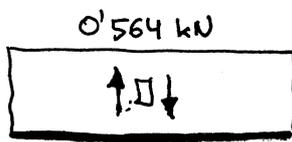
$$f_4 = [K_{ij}] d_2 + [K_{jj}] d_4$$

$$f_{z4} = -0'564 \text{ kN} \quad \pi_{x4} = -2'661 \text{ kN.m} \quad \pi_{y4} = -1'692 \text{ kN.m}$$

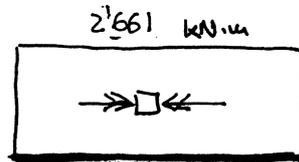
En resumen



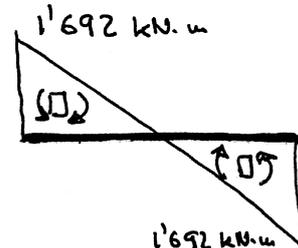
- Diagramas de esfuerzos



CORTANTES



TORSORES



FLECTORES

• FUERZAS EN EXTREMO DE BARRA Y ESFUERZOS EN LA BARRA 3-4.

- Desplazamientos en ejes generales

$$w'_3 = \vartheta'_{x3} = \vartheta'_{y3} = 0$$

$$w'_4 = -4.052 \times 10^{-3} \quad \vartheta'_{x4} = -2.1915 \times 10^{-3} \quad \vartheta'_{y4} = 4.234 \times 10^{-4}$$

- Desplazamientos en ejes locales

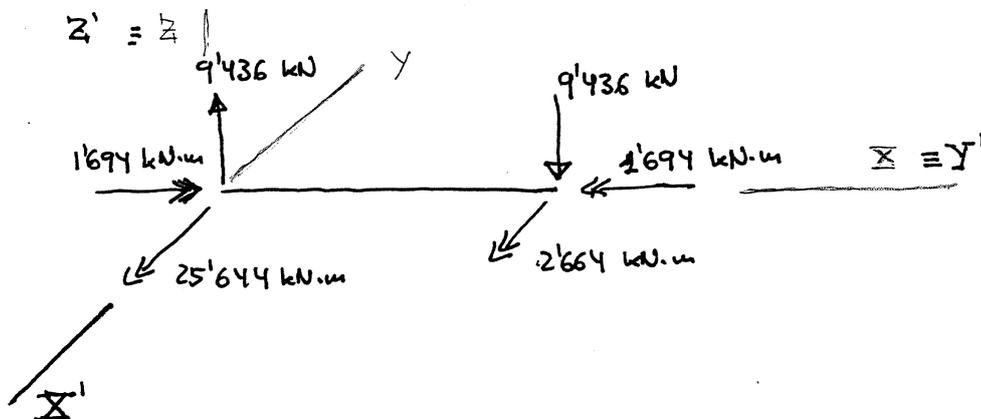
$$w_3 = \vartheta_{x3} = \vartheta_{y3} = 0$$

$$w_4 = -4.052 \times 10^{-3} \quad \vartheta_{xy} = 4.234 \times 10^{-4} \quad \vartheta_{yy} = 1.915 \times 10^{-3}$$

- Fuerzas en extremo de barra $\mathbf{f}_3 = [K_{33}] \mathbf{d}_3 + [K_{3j}] \mathbf{d}_j$

$$\begin{Bmatrix} f_{z3} \\ M_{x3} \\ M_{y3} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 8000 & 0 & -12000 \\ 0 & -4000 & 0 \\ 12000 & 0 & 2000 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -4.052 \times 10^{-3} \\ 4.234 \times 10^{-4} \\ 1.915 \times 10^{-3} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 9.436 \text{ kN} \\ -1.694 \text{ kN.m} \\ -25.644 \text{ kN.m} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} f_{z4} \\ \pi_{xy} \\ \pi_{yy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 8000 & 0 & 12000 \\ 0 & 4000 & 0 \\ 12000 & 0 & 24000 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -4.052 \times 10^{-3} \\ 4.234 \times 10^{-4} \\ 1.915 \times 10^{-3} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -9.436 \text{ kN} \\ 1.694 \text{ kN.m} \\ -2.664 \text{ kN.m} \end{Bmatrix}$$

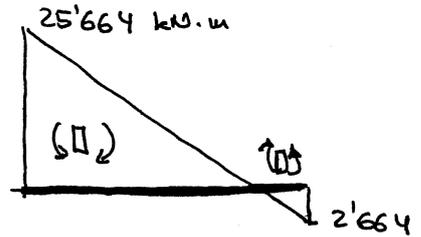
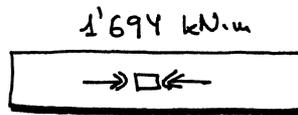
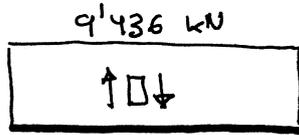




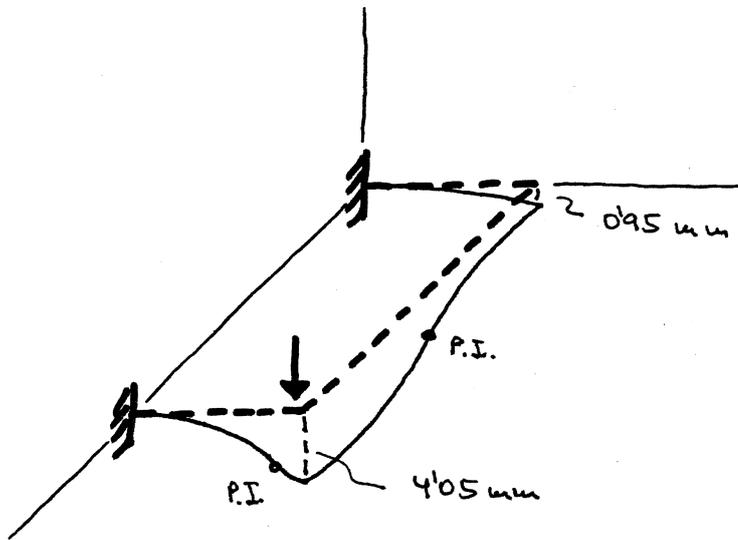
CÁLCULO DE ESTRUCTURAS I.
PROBLEMAS.

Hoja 7 de 7.

- datos de esfuerzos

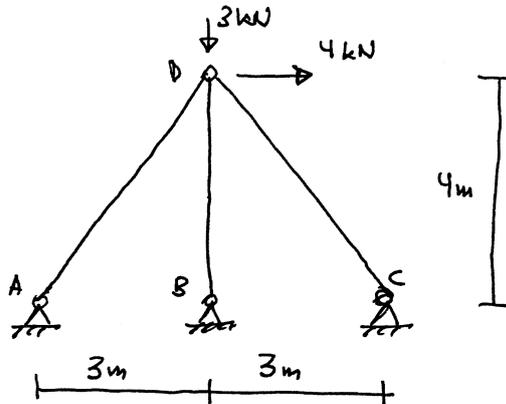


• DEFORMADA.





EJERCICIO Nº 87



Secciones:

- Bares AD y CD, 5 cm^2
- Bares BD, 4 cm^2

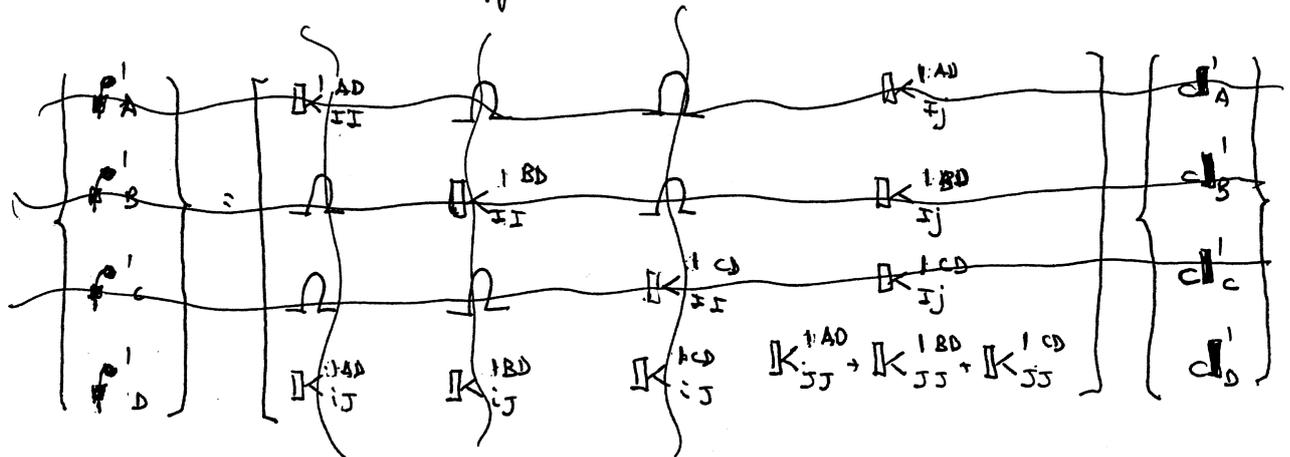
Módulo de elasticidad

$E = 200.000 \text{ MPa}$.

Se pide: 1) Desplazamientos del nodo D, 2) Reacciones y 3) leyes de esfuerzos.

- o) La estructura es ARTICULADA PLANA. La resolveremos en rigidez.
- o) Esquema del resto de ecuaciones.

$$d_i' = \begin{Bmatrix} u_i' \\ v_i' \end{Bmatrix} \quad f_i' = \begin{Bmatrix} f_{xi}' \\ f_{yi}' \end{Bmatrix} \quad \leftarrow \text{Notación.}$$



Después de simplificar las condiciones de contorno queda

$$\{f_D'\} = \left[K_{JJ}^{1AD} + K_{JJ}^{1BD} + K_{JJ}^{1CD} \right] \{d_D'\}$$

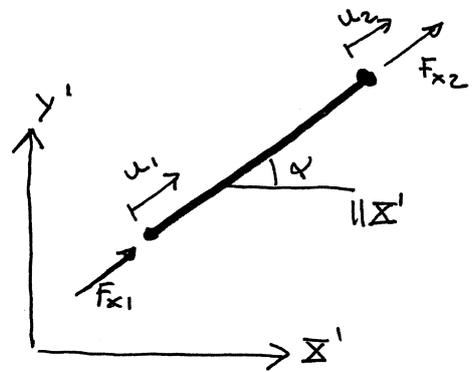
- Las matrices de rigidez de una barra de celosía plana, tanto en ejes locales como generales, son las siguientes

$$\begin{Bmatrix} F_{x1} \\ F_{x2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & -\frac{EA}{L} \\ -\frac{EA}{L} & \frac{EA}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}$$

$$[K'] = [T] \cdot [K] \cdot [T]^t \quad \text{,,} \quad [T] = \begin{Bmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{Bmatrix}$$

$$[K'] = \begin{bmatrix} [K'_{JJ}] & [K'_{Jj}] \\ ([K'_{jJ})^t & [K'_{jJ}] \end{bmatrix}$$

$$[K'_{jJ}] = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} \cos^2 \alpha & \cos \alpha \sin \alpha \\ \cos \alpha \sin \alpha & \sin^2 \alpha \end{bmatrix} = [K_{jJ}] \quad \left\{ \begin{array}{l} [K'_{JJ}] = - [K'_{jJ}] \\ [K'_{jJ}] = - [K'_{JJ}] \end{array} \right.$$



- De momento, solo necesitamos las matrices $[K'_{jJ}]$ de cada barra

BARRA AD

$$E = 200.000 \text{ MPa} \quad L = 5 \text{ m} \quad A = 5 \times 10^{-4} \text{ m}^2 \quad \alpha = \arctg \frac{4}{3} \Rightarrow \begin{cases} \sin \alpha = 0,8 \\ \cos \alpha = 0,6 \end{cases}$$

$$\frac{EA}{L} = 20 \text{ MN/m}$$

$$[K'_{jJ}]^{AD} = 20 \begin{bmatrix} 0,6^2 & 0,6 \times 0,8 \\ 0,6 \times 0,8 & 0,8^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7,2 & 9,6 \\ 9,6 & 12,8 \end{bmatrix} \text{ MN/m}$$

BARRA BD

$$E = 200.000 \text{ MPa} \quad L = 4 \text{ m} \quad A = 4 \times 10^{-4} \text{ m}^2 \quad \alpha = 90^\circ \quad \frac{EA}{L} = 20 \text{ MN/m}$$

$$[K'_{jJ}]^{BD} = 20 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 20 \end{bmatrix} \text{ MN/m}$$

BARRA CD

$$E = 200.000 \text{ MPa} \quad L = 5 \text{ m} \quad A = 5 \times 10^{-4} \text{ m}^2 \Rightarrow \frac{EA}{L} = 20 \text{ MN/m}, \quad \alpha = \arctg \left(-\frac{4}{3} \right) \Rightarrow \begin{cases} \sin \alpha = 0,8 \\ \cos \alpha = -0,6 \end{cases}$$

$$[K'_{jJ}]^{CD} = 20 \begin{bmatrix} (-0,6)^2 & -0,6 \times 0,8 \\ -0,6 \times 0,8 & 0,8^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7,2 & -9,6 \\ -9,6 & 12,8 \end{bmatrix} \text{ MN/m}$$

- Sistema de ecuaciones en rigides

$$\begin{Bmatrix} F'_D \\ V'_D \end{Bmatrix} = \left[\begin{matrix} K'_{JJ} & & \\ & K'_{JJ} & \\ & & K'_{JJ} \end{matrix} \right] \begin{Bmatrix} u'_D \\ v'_D \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} 4 \times 10^{-3} \\ -3 \times 10^{-3} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 14'4 & 0 \\ 0 & 45'6 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u'_D \\ v'_D \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} u'_D = 2'778 \times 10^{-4} \\ v'_D = -6'579 \times 10^{-4} \end{matrix}$$

Nótese que las fuerzas exteriores deben considerarse en meganewtons, ya que las rigideces estaban en MN/m.

- Determinación de esfuerzos en las barras.

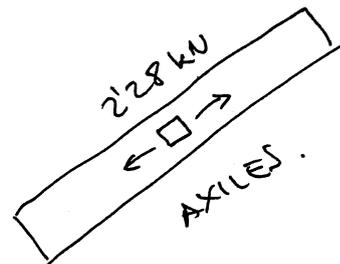
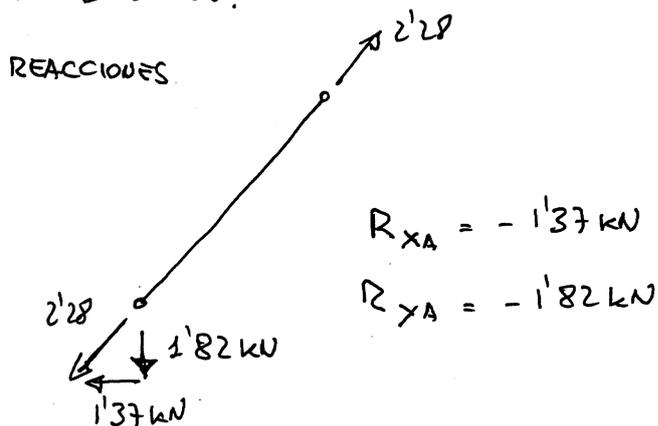
BARRA AD $\{c\} = [T]^t \{d\} \Rightarrow u = \{c\}_a, \text{vina} \left\{ \begin{matrix} u' \\ v' \end{matrix} \right\} = u' \cos \alpha + v' \sin \alpha$

$$u_D = 0'6 \times 2'778 \times 10^{-4} + 0'8 \times (-6'579 \times 10^{-4}) = 1'140 \times 10^{-4}$$

$$u_A = 0 \quad EA/L = 20 \text{ MN/m}$$

$$\begin{Bmatrix} F_{xA} \\ F_{xB} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} EA/L & -EA/L \\ -EA/L & EA/L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_A \\ u_D \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 & -20 \\ -20 & 20 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 1'140 \times 10^{-4} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -2'28 \times 10^{-3} \\ 2'28 \times 10^{-3} \end{Bmatrix} \text{ MN.}$$

$$N = 2'28 \text{ kN.}$$



BARRA BD $u_B = 0 \quad u_D = v'_D = -6'579 \times 10^{-4} \quad \frac{EA}{L} = 20 \text{ MN/m.}$

$$\begin{Bmatrix} F_{xB} \\ F_{xD} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 & -20 \\ -20 & 20 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ -6'579 \times 10^{-4} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1'32 \times 10^{-3} \\ -1'32 \times 10^{-3} \end{Bmatrix} \text{ MN}$$

$$N = -1'32 \text{ kN}$$



BARRA CD

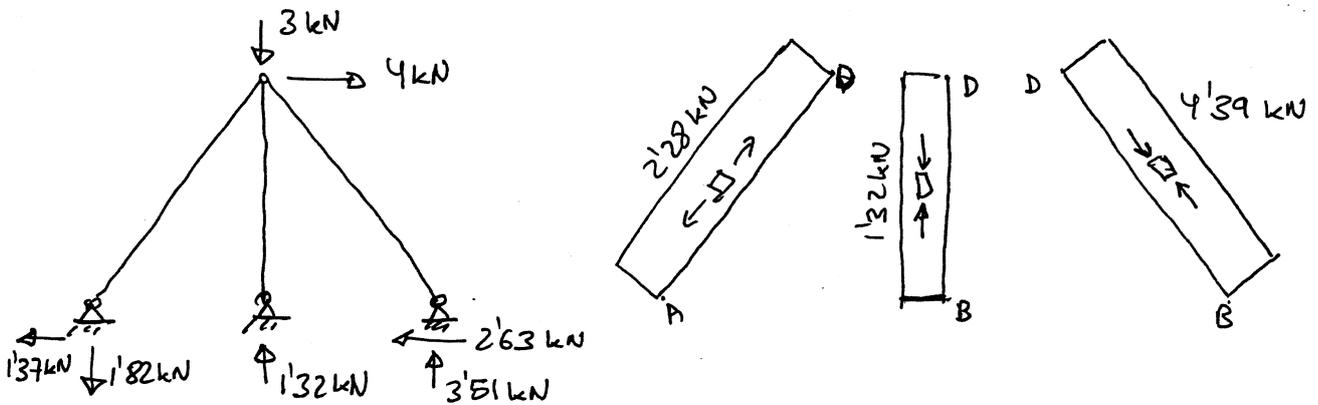
$$u_c = 0 \quad u_D = -0.6 u'_D + 0.8 v'_D = -2.193 \times 10^{-4}$$

$$\frac{q_A}{L} = 20 \text{ MN/m}$$

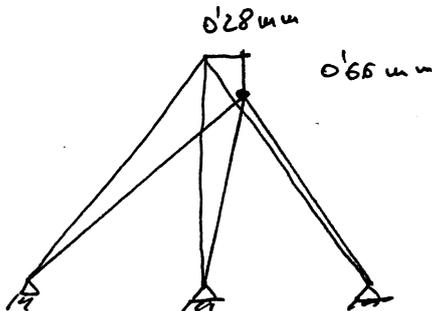
$$\begin{Bmatrix} F_{xc} \\ F_{xD} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 & -20 \\ -20 & 20 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ -2.193 \times 10^{-4} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 4.39 \times 10^{-3} \\ -4.39 \times 10^{-3} \end{Bmatrix} \text{ MN}$$

$$N = -4.39 \text{ kN.}$$

• REACCIONES Y LEYES DE ESFUERTOS.

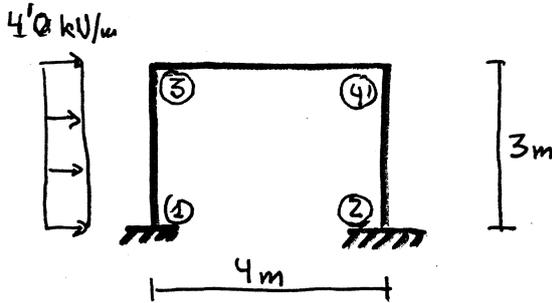


• DEFORMADA A ESTIMA.





EJERCICIO Nº 88



BARRAS 1-3 Y 2-4

$$EI = 12600 \text{ kN}\cdot\text{m}^2$$

$$EA = 1.500.000 \text{ kN}$$

BARRA 3-4

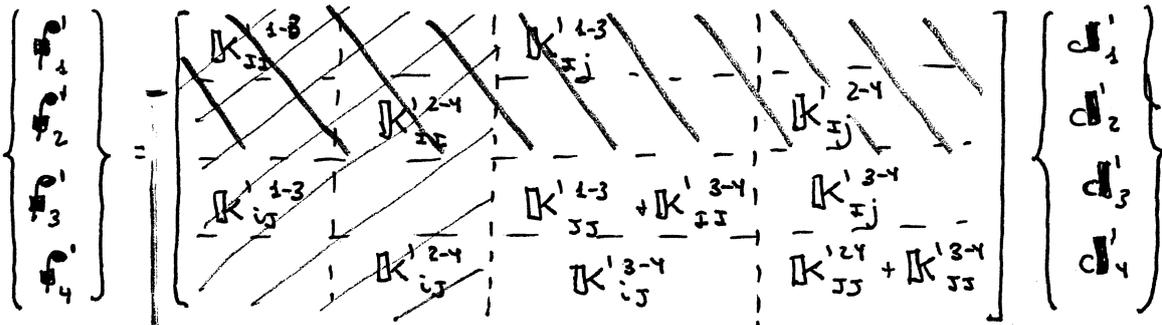
$$EI = 8.000 \text{ kN}\cdot\text{m}^2$$

$$EA = 800.000 \text{ kN}$$

RESOLVER EN RIGIDEZ

• ESQUEMA DE LAS ECUACIONES A PLANTEAR

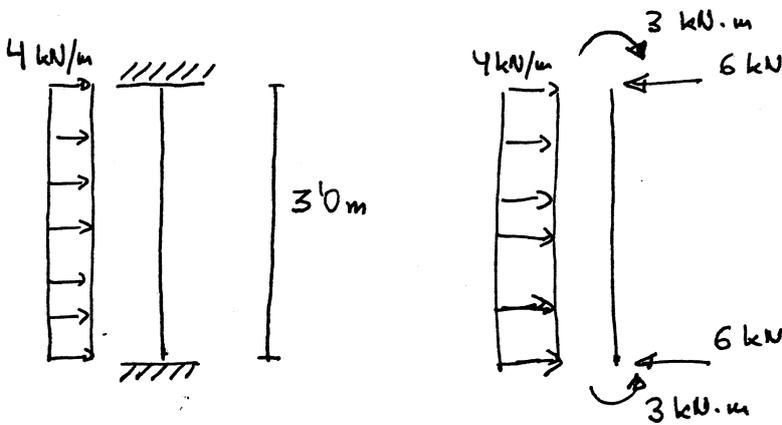
$$F_i = \begin{Bmatrix} f_{xi} \\ f_{yi} \\ m_i \end{Bmatrix} \quad d_i = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ \phi_i \end{Bmatrix}$$



MULTIPLICADAS POR $d_1 = 0$ o $d_2 = 0$.

→ SOLO HACEN FALTA PARA CALCULAR REACCIONES.
POR AHORA, PODEMOS PRESCINDIR DE ELLAS.

• FUERZAS DE EMPOTRAMIENTO PERFECTO



$$M = \frac{qL^2}{12} = \frac{4 \times 3^2}{12} = 3$$



• BARRAS 1-3 Y 2-4.

$$K_{JJ}^{1-3} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 500.000 & 0 & 0 \\ 0 & 5600 & -8400 \\ 0 & -8400 & 16.800 \end{bmatrix}$$

$$T_{1-3} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \leftarrow \begin{bmatrix} c & -s & 0 \\ s & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \alpha = 90 \Rightarrow c = 0 \quad s = 1$$

CAMBIO DE BASE

$$\begin{bmatrix} c & -s & 0 \\ s & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & D \\ 0 & E & F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c & s & 0 \\ -s & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c^2A + s^2B & cs(A-B) & -sD \\ c \cdot s \cdot (A-B) & s^2A + c^2B & cD \\ -sE & cE & F \end{bmatrix}$$

$$K'_{JJ}^{1-3} = K'_{JJ}^{2-4} = \begin{bmatrix} 5.600 & 0 & 8.400 \\ 0 & 500.000 & 0 \\ 8.400 & 0 & 16.800 \end{bmatrix}$$

• BARRA 3-4 ($\alpha = 0^\circ$)

$$K'_{IJ}^{1-2-4} = K'_{IJ}^{3-4} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 200.000 & 0 & 0 \\ 0 & 1.500 & 3.000 \\ 0 & 3.000 & 8.000 \end{bmatrix}$$

$$K'_{IJ}^{1-3-4} = K'_{IJ}^{2-4} = \begin{bmatrix} -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -200.000 & 0 & 0 \\ 0 & -1.500 & 3.000 \\ 0 & -3.000 & 4.000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K'_{ij}^{2-4} \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} K'_{ij}^{3-4} \end{bmatrix}^t$$

$$K'_{JJ}^{1-3-4} = K'_{JJ}^{2-4} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 200.000 & 0 & 0 \\ 0 & 1.500 & -3.000 \\ 0 & -3.000 & 8.000 \end{bmatrix}$$



• SISTEMA DE ECUACIONES DE RIGIDEZ DE LA ESTRUCTURA

$$\begin{Bmatrix} +6 \\ 0 \\ +3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 205.600 & 0 & 8.400 & -200.000 & 0 & 0 \\ 0 & 501.500 & 3.000 & 0 & -1.500 & 3.000 \\ 8.400 & 3.000 & 24.800 & 0 & -3.000 & 4.000 \\ -200.000 & 0 & 0 & 205.600 & 0 & 8.400 \\ 0 & -1.500 & -3.000 & 0 & 501.500 & -3.000 \\ 0 & 3.000 & 4.000 & 8.400 & -3.000 & 24.800 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_3' \\ v_3' \\ \theta_3' \\ u_4' \\ v_4' \\ \theta_4' \end{Bmatrix}$$

SOLUCIÓN:

$$\begin{aligned} u_3' &= 8'207 \times 10^{-4} & v_3' &= 2'219 \times 10^{-6} & \theta_3' &= -1'163 \times 10^{-4} \\ u_4' &= 8'088 \times 10^{-4} & v_4' &= -2'219 \times 10^{-6} & \theta_4' &= -2'557 \times 10^{-4} \end{aligned}$$

• ESFUERZOS EN LA BARRA 1-3

$$u_1 = v_1 = \theta_1 = 0$$

$$u_3 = v_3' = 2'219 \times 10^{-6} \quad v_3 = -u_3' = -8'207 \times 10^{-4} \quad \theta_3 = \theta_3' = -1'163 \times 10^{-4}$$

$$f_1 = \cancel{K_{11}^{1-3}} d_1 + K_{1j}^{1-3} d_j$$

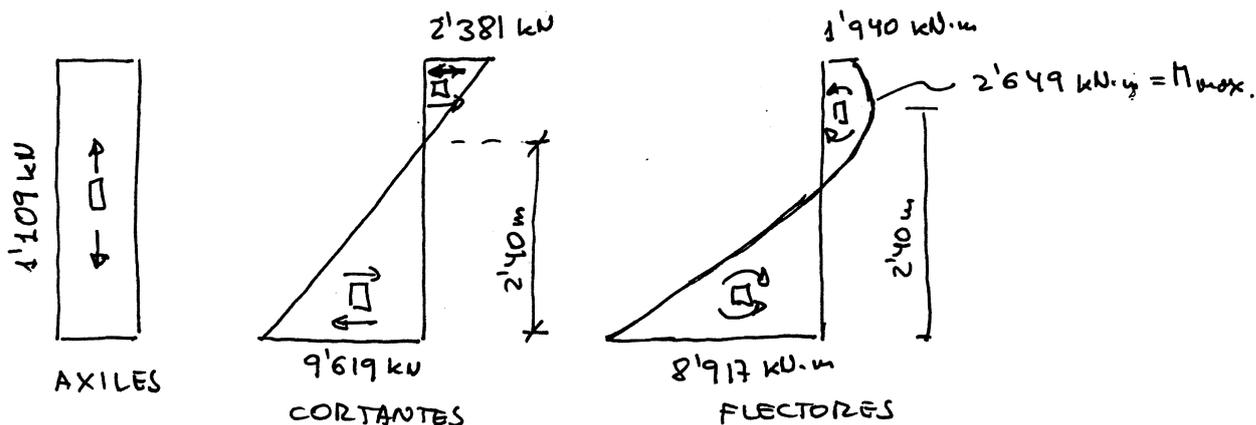
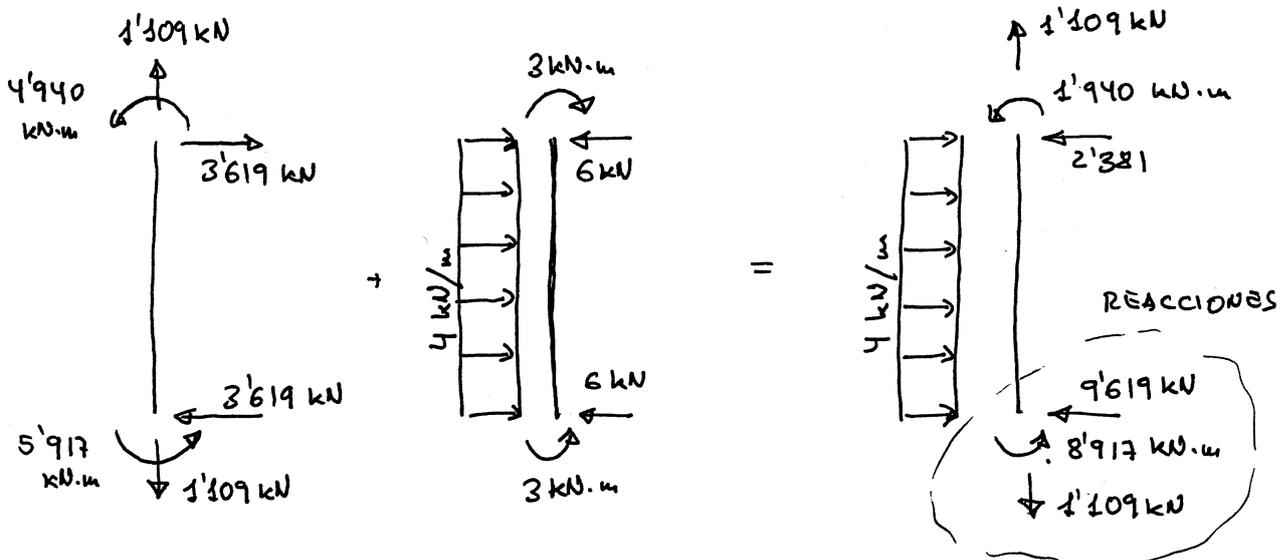
$$f_2 = \cancel{K_{2j}^{1-3}} d_j + K_{2j}^{1-3} d_2$$

$$\begin{Bmatrix} f_{x1} \\ f_{y1} \\ m_1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_3 \\ v_3 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -500.000 & 0 & 0 \\ 0 & -5.600 & 8400 \\ 0 & -8400 & 8400 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 2'219 \times 10^{-6} \\ -8'207 \times 10^{-4} \\ -1'163 \times 10^{-4} \end{Bmatrix}$$

$$f_{x1} = -1'109 \text{ kN} \quad f_{y1} = 3'619 \text{ kN} \quad m_1 = 5'913 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$\begin{Bmatrix} f_{x3} \\ f_{y3} \\ m_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_3 \\ v_3 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 500.000 & 0 & 0 \\ 0 & 5.600 & -8400 \\ 0 & -8400 & 16.800 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 2'219 \times 10^{-6} \\ -8'207 \times 10^{-4} \\ -1'163 \times 10^{-4} \end{Bmatrix}$$

$$f_{x3} = 1'109 \text{ kN} \quad f_{y3} = -3'619 \text{ kN} \quad m_3 = 4'940 \text{ kN}\cdot\text{m}$$



• ESFUERZOS EN LA BARRA 2-4

$$u_2 = v_2 = \theta_2 = 0$$

$$u_4 = v_4 = -2'219 \times 10^{-6}$$

$$u_4 = -u_4 = -8'088 \times 10^{-4}$$

$$\theta_4 = \theta_4 = -2'557 \times 10^{-4}$$

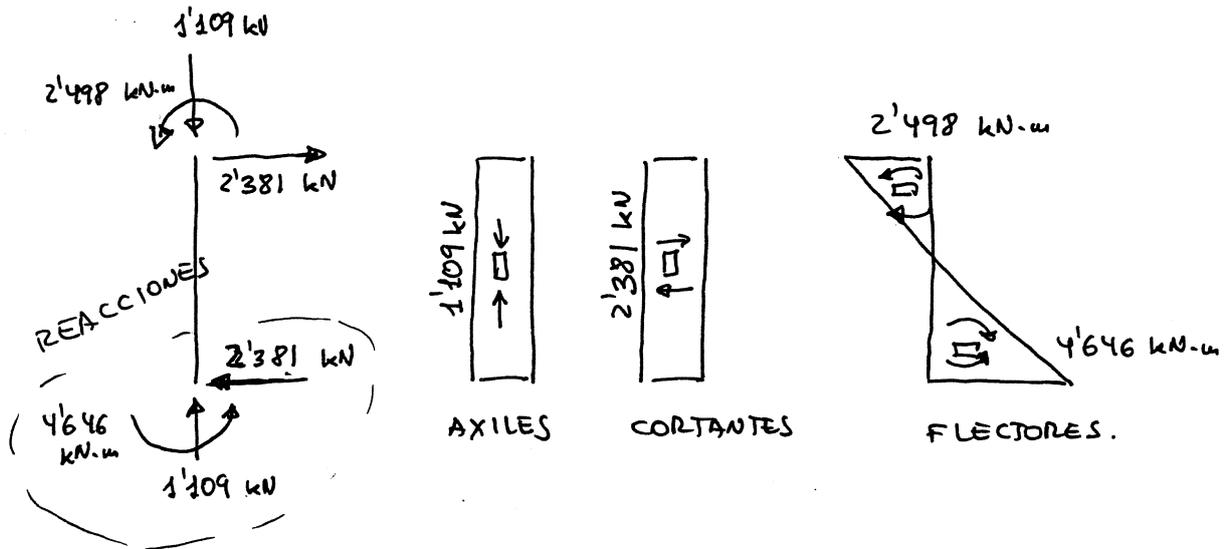
$$f_2 = \begin{bmatrix} \frac{2-4}{25} \\ \frac{2-4}{25} \end{bmatrix} d_2 + \begin{bmatrix} \frac{2-4}{25} \\ \frac{2-4}{25} \end{bmatrix} d_4$$

$$f_4 = \begin{bmatrix} \frac{2-4}{25} \\ \frac{2-4}{25} \end{bmatrix} d_2 + \begin{bmatrix} \frac{2-4}{25} \\ \frac{2-4}{25} \end{bmatrix} d_4$$

$$\begin{Bmatrix} f_{x2} \\ f_{y2} \\ M_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -500.000 & 0 & 0 \\ 0 & -5.600 & 8400 \\ 0 & -8.400 & 8400 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -2'219 \times 10^{-6} \\ -8'088 \times 10^{-4} \\ -2'557 \times 10^{-4} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1'109 \text{ kN} \\ 2'381 \text{ kN} \\ 4'646 \text{ kN.m} \end{Bmatrix}$$



$$\begin{Bmatrix} f_{x4} \\ f_{y4} \\ M_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 500.000 & 0 & 0 \\ 0 & 5.600 & -8.400 \\ 0 & -8.400 & 16.800 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -2'219 \times 10^{-6} \\ -8'088 \times 10^{-4} \\ -2'557 \times 10^{-4} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -1'109 \text{ kN} \\ -2'381 \text{ kN} \\ 2'498 \text{ kN}\cdot\text{m} \end{Bmatrix}$$



• ESFUERZOS EN LA BARRA 3-4

$$\begin{aligned} u_3 = u'_3 &= 8'207 \times 10^{-4} & v_3 = v'_3 &= 2'219 \times 10^{-6} & \theta_3 = \theta'_3 &= -1'163 \times 10^{-4} \\ u_4 = u'_4 &= 8'088 \times 10^{-4} & u_4 = v'_4 &= -2'219 \times 10^{-6} & \theta_4 = \theta'_4 &= -2'557 \times 10^{-4} \end{aligned}$$

$$\mathbf{f}_3 = \mathbb{K}_{II}^{3-4} \mathbf{d}_3 + \mathbb{K}_{Ij}^{3-4} \mathbf{d}_3 \quad \mathbf{f}_4 = \mathbb{K}_{ij}^{3-4} \mathbf{d}_3 + \mathbb{K}_{JJ}^{3-4} \mathbf{d}_4$$

$$\begin{Bmatrix} f_{x3} \\ f_{y3} \\ M_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 200.000 & 0 & 0 \\ 0 & 1.500 & 3.000 \\ 0 & 3.000 & 8.000 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 8'207 \times 10^{-4} \\ 2'219 \times 10^{-6} \\ -1'163 \times 10^{-4} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} -200.000 & 0 & 0 \\ 0 & -1.500 & 3.000 \\ 0 & -3.000 & 4.000 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 8'088 \times 10^{-4} \\ -2'219 \times 10^{-6} \\ -2'557 \times 10^{-4} \end{Bmatrix}$$

$$f_{x3} = 2'380 \text{ kN} \quad f_{y3} = -1'109 \text{ kN} \quad M_3 = -1'940 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

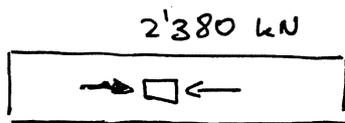
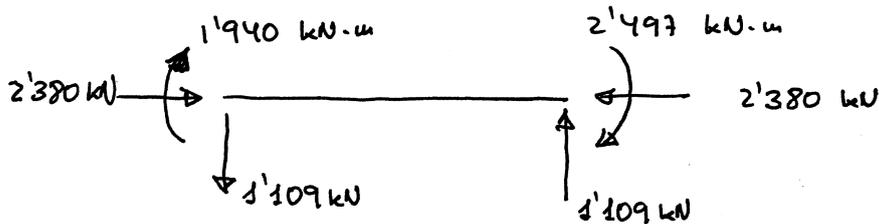


$$\begin{Bmatrix} f_{xy} \\ f_{yy} \\ M_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -200.000 & 0 & 0 \\ 0 & -1.500 & -3.000 \\ 0 & +3.000 & 4000 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 8'207 \times 10^4 \\ 2'219 \times 10^6 \\ -1'163 \times 10^4 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 200.000 & 0 & 0 \\ 0 & 1.500 & -3.000 \\ 0 & -3.000 & 8.000 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 8'088 \times 10^4 \\ -2'219 \times 10^6 \\ -2'557 \times 10^4 \end{Bmatrix}$$

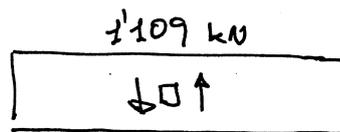
$$f_{xy} = -2'380 \text{ kN}$$

$$f_{yy} = 1'109 \text{ kN}$$

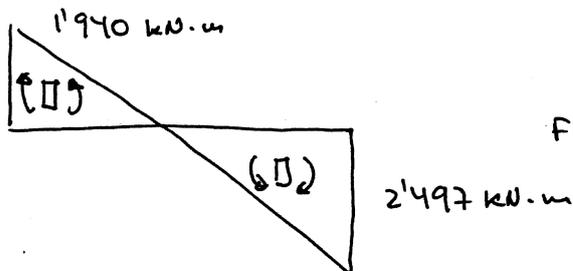
$$M_y = -2'497 \text{ kN}\cdot\text{m}$$



AXILES

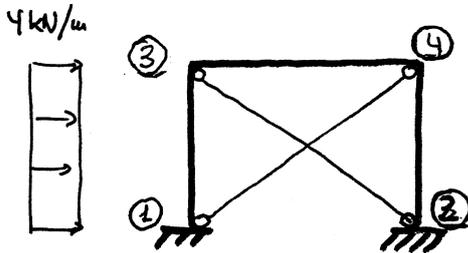


CORTANTES



FLECTORES

EJERCICIO nº 89



$$1-3 \text{ y } 2-4 \left\{ \begin{array}{l} EI = 12.600 \text{ kN}\cdot\text{m}^2 \\ EA = 4.500.000 \text{ kN} \end{array} \right.$$

$$3-4 \left\{ \begin{array}{l} EI = 8.000 \text{ kN}\cdot\text{m}^2 \\ EA = 800.000 \text{ kN} \end{array} \right.$$

$$1-4 \text{ y } 2-3 \rightarrow EA = 200.000 \text{ kN}$$

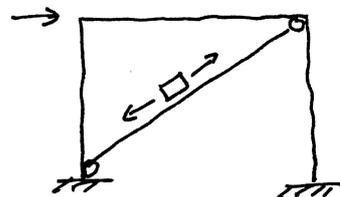
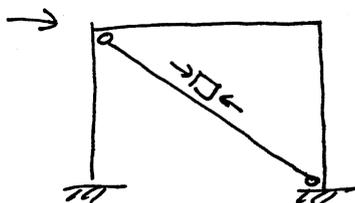
LAS BARRAS 1-4 y 2-3 SON CABLES
→ NO RESISTEN COMPRESIONES

MATRIZ DE RIGIDEZ DE LA BARRA DESCONECTADA A FLEXIÓN EN AMBOS EXTREMOS ES

$$\left\{ \begin{array}{l} f_{xI} \\ f_{xJ} \end{array} \right\} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & -\frac{EA}{L} \\ -\frac{EA}{L} & \frac{EA}{L} \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{l} u_I \\ u_J \end{array} \right\} \quad \text{EN EJES LOCALES.}$$

RESOLVER EN RIGIDEZ.

SE TRATA DE LA MISMA ESTRUCTURA DEL EJERCICIO ANTERIOR, A LA QUE SE HA AÑADIDO LOS TIRANTES 1-4 y 2-3. BASTARÁ AÑADIR SUS MATRICES DE RIGIDEZ A LA DE LA ESTRUCTURA CALCULADA EN DICHO EJERCICIO.



ES OBVIO QUE LA BARRA QUE NO TRABAJA ES LA 2-3. BASTARÁ, PUES, AÑADIR LA SUBMATRIZ $[K'_{IJ}]$ DE LA BARRA 1-4 EN LA POSICIÓN ADECUADA DE LA MATRIZ YA CONOCIDA.



$$\begin{Bmatrix} P_1' \\ P_2' \\ P_3' \\ P_4' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_1' \\ d_2' \\ d_3' \\ d_4' \end{Bmatrix}$$

$\underbrace{\quad\quad\quad}_{\text{YA OBTENIDO}} \quad \underbrace{\quad\quad\quad}_{\text{A AÑADIR}}$

• BARRA 1-4

$$\underbrace{[K_{JJ}^{1-4}]} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 40.000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

COMPLETAMOS CON DOS FILAS Y DOS COLUMNAS DE CEROS HASTA CONVERTIRLA EN UNA SUBMATRIZ DE 3x3. LA POSICIÓN SE DETERMINA SABRIENDO QUE TENÍAMOS $f_{xij} = \frac{EA}{L} u_{ij}$ Y BUSCAMOS

$$\begin{Bmatrix} f_{xij} \\ f_{yij} \\ n_{ij} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{ij} \\ v_{ij} \\ \phi_{ij} \end{Bmatrix}$$

CAMBIO DE EJES $c = 0.8$ $s = 0.6$

$$[K_{JJ}^{1-4}] = \begin{bmatrix} 25.600 & 19.200 & 0 \\ 19.200 & 14.400 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



• SISTEMA DE ECUACIONES EN RIGIDEZ DE LA NUEVA ESTRUCTURA

$$\begin{Bmatrix} 6 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 205.600 & 0 & 8.400 & -200.000 & 0 & 0 \\ 0 & 504.500 & 3.000 & 0 & -1.500 & 3.000 \\ 8.400 & 3.000 & 24.800 & 0 & -3.000 & 4.000 \\ -200.000 & 0 & 0 & 231.200 & 19.200 & 8.400 \\ 0 & -1.500 & -3.000 & 19.200 & 515.900 & -3000 \\ 0 & 3.000 & 4.000 & 8.400 & -3.000 & 24.800 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u'_3 \\ v'_3 \\ \theta'_3 \\ u'_4 \\ v'_4 \\ \theta'_4 \end{Bmatrix}$$

SOLUCIÓN: $u'_3 = 1'884 \times 10^{-4}$ $v'_3 = -2'85 \times 10^{-8}$ $\theta'_3 = 6'856 \times 10^{-5}$
 $u'_4 = 1'625 \times 10^{-4}$ $v'_4 = -6'036 \times 10^{-6}$ $\theta'_4 = -6'681 \times 10^{-5}$

• ESFUERZOS EN LA BARRA 1-3

$$u_1 = v_1 = \theta_1 = 0$$

$$u_3 = v'_3 = -2'850 \times 10^{-8} \quad v_3 = -u'_3 = -1'884 \times 10^{-4} \quad \theta'_3 = \theta_3 = 6'856 \times 10^{-5}$$

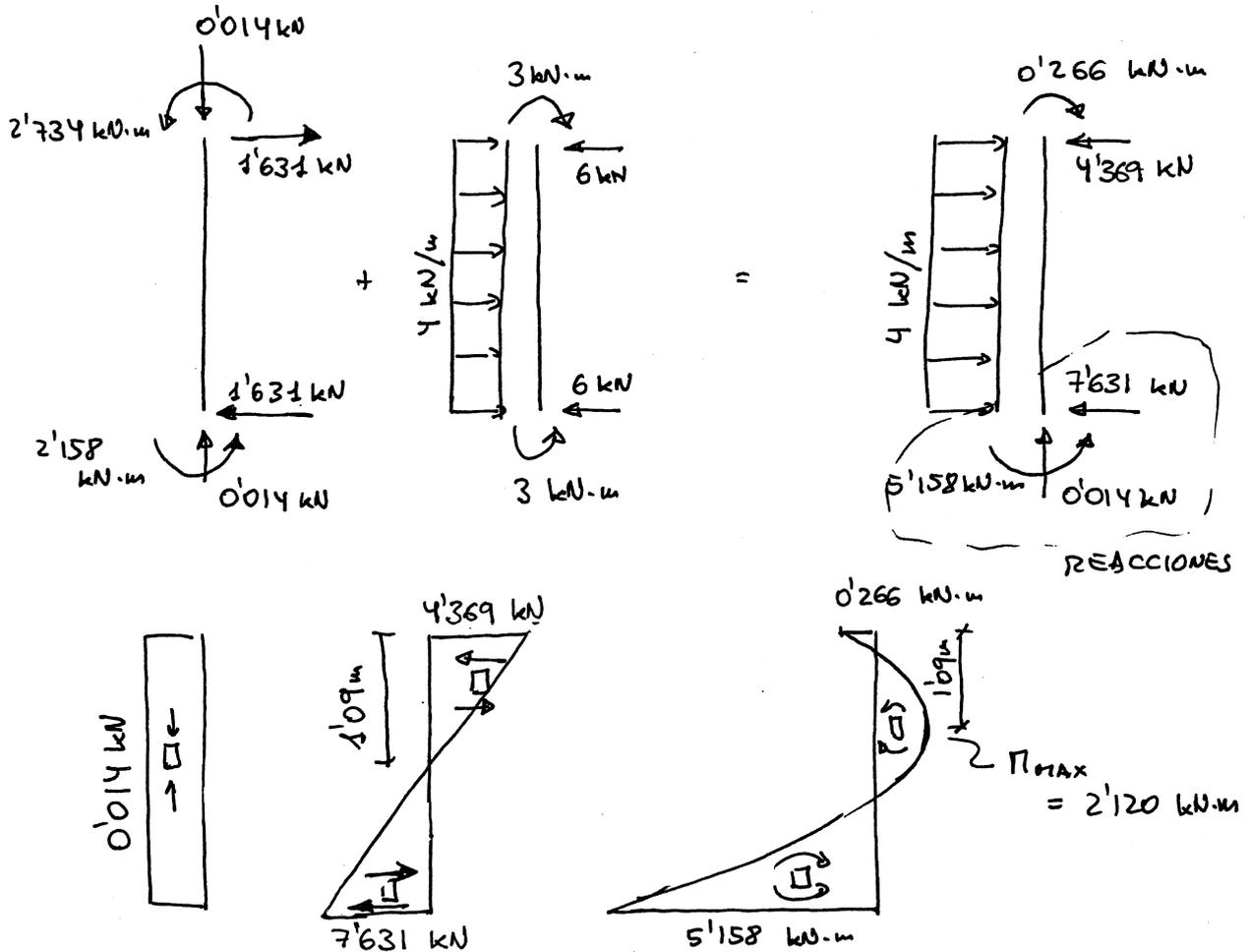
$$f_3 = \cancel{K_{ij}^{1-3}} d_1 + K_{ij}^{1-3} d_3$$

$$f_3 = \cancel{K_{ij}^{1-3}} d_1 + K_{ij}^{1-3} d_3$$

Númericos calculados en el ejercicio anterior

$$\begin{Bmatrix} f_{x1} \\ f_{y1} \\ M_1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -500.000 & 0 & 0 \\ 0 & -5.600 & 8.400 \\ 0 & -8.400 & 8.400 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -2'850 \times 10^{-8} \\ -1'884 \times 10^{-4} \\ 6'856 \times 10^{-5} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0'014 \text{ kN} \\ 1'631 \text{ kN} \\ 2'158 \text{ kN}\cdot\text{m} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} f_{x3} \\ f_{y3} \\ M_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 500.000 & 0 & 0 \\ 0 & 5.600 & -8.400 \\ 0 & -8.400 & 16.800 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -2'850 \times 10^{-8} \\ -1'884 \times 10^{-4} \\ 6'856 \times 10^{-5} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0'014 \\ -1'631 \\ 2'734 \end{Bmatrix}$$



• ESFUERZOS EN LA BARRA 2-4.

$$u_2 = v_2 = \theta_2 = 0$$

$$u_4 = v_4 = -6'036 \times 10^{-6}$$

$$v_4 = -u_4 = -1'625 \times 10^{-4}$$

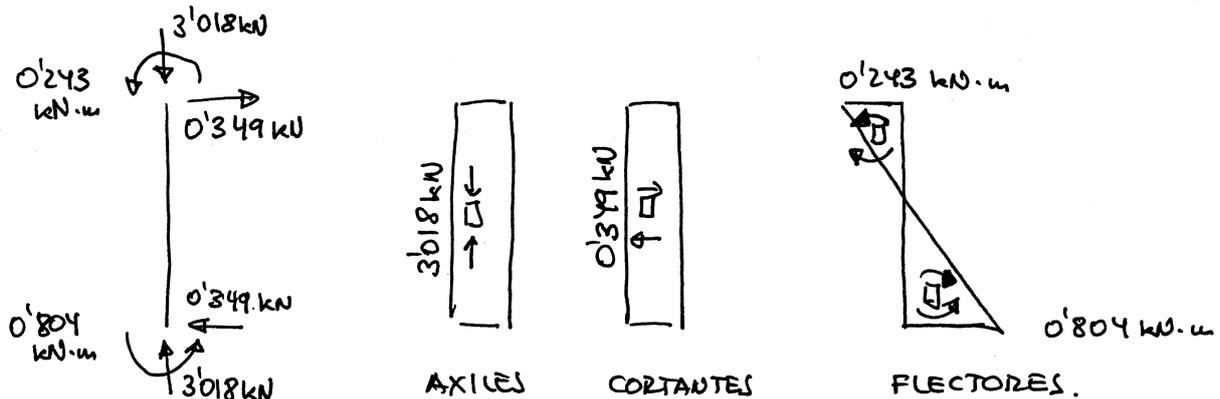
$$\theta_4 = \theta_4' = -6'681 \times 10^{-5}$$

$$f_2 = \cancel{\mathbb{K}_{\pm\pm}^{2-4}} d_2 + \mathbb{K}_{\pm j}^{2-4} d_4$$

$$f_4 = \cancel{\mathbb{K}_{j\pm}^{2-4}} d_2 + \mathbb{K}_{j j}^{2-4} d_4$$

$$\begin{Bmatrix} f_{x2} \\ f_{y2} \\ \pi_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -500.000 & 0 & 0 \\ 0 & -5.600 & 8.400 \\ 0 & -8.400 & 8.400 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -6'036 \times 10^{-6} \\ -1'625 \times 10^{-4} \\ -6'681 \times 10^{-5} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 3'018 \text{ kN} \\ 0'349 \text{ kN} \\ 0'804 \text{ kN}\cdot\text{m} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} f_{x4} \\ f_{y4} \\ \Gamma_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 500.000 & 0 & 0 \\ 0 & 5.600 & -8.400 \\ 0 & -8.400 & 16.800 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -6'036 \times 10^{-6} \\ -1'625 \times 10^{-4} \\ -6'681 \times 10^{-5} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -3'018 \text{ kN} \\ -0'349 \text{ kN} \\ 0'243 \text{ kN}\cdot\text{m} \end{Bmatrix}$$



• ESFUERZOS EN LA BARRA 3-4

$$\begin{aligned} u_2 = u'_2 = 1'884 \times 10^{-4} & & v_2 = v'_2 = -2'850 \times 10^{-8} & & \theta_2 = \theta'_2 = 6'856 \times 10^{-5} \\ u_4 = u'_4 = 1'625 \times 10^{-4} & & v_4 = v'_4 = -6'036 \times 10^{-6} & & \theta_4 = \theta'_4 = -6'681 \times 10^{-5} \end{aligned}$$

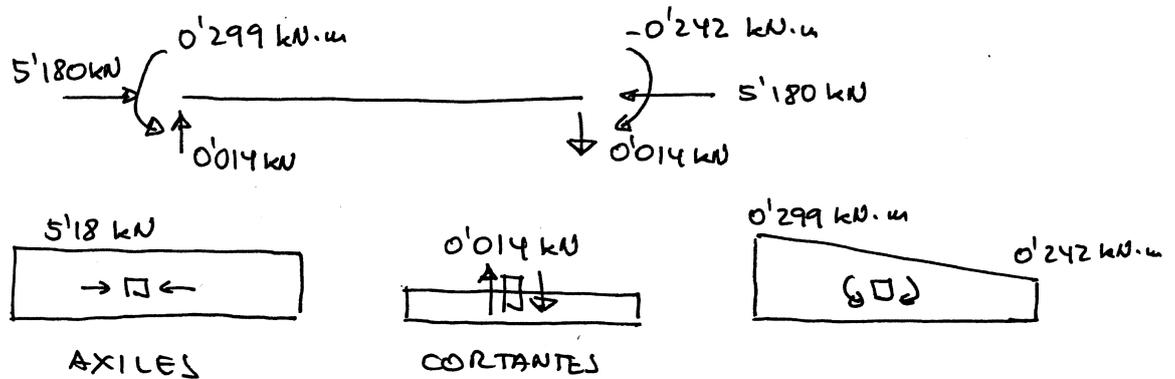
$$F_3 = [K_{II}^{3-4}] d_3 + [K_{IJ}^{3-4}] d_4 \quad F_4 = [K_{IJ}^{3-4}] d_3 + [K_{JJ}^{3-4}] d_4$$

$$\begin{Bmatrix} f_{x3} \\ f_{y3} \\ \Gamma_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 200.000 & 0 & 0 \\ 0 & 1.500 & 3.000 \\ 0 & 3.000 & 8.000 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1'884 \times 10^{-4} \\ -2'850 \times 10^{-8} \\ 6'856 \times 10^{-5} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} -200.000 & 0 & 0 \\ 0 & -1.500 & 3.000 \\ 0 & -3.000 & 4.000 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1'625 \times 10^{-4} \\ -6'036 \times 10^{-6} \\ -6'681 \times 10^{-5} \end{Bmatrix}$$

$$f_{x3} = 5'180 \text{ kN} \quad f_{y3} = 0'014 \text{ kN} \quad \Gamma_3 = 0'299 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$\begin{Bmatrix} f_{x4} \\ f_{y4} \\ \Gamma_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 200.000 & 0 & 0 \\ 0 & -1.500 & -3.000 \\ 0 & 3.000 & 4.000 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1'884 \times 10^{-4} \\ -2'850 \times 10^{-8} \\ 6'856 \times 10^{-5} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} -200.000 & 0 & 0 \\ 0 & 1.500 & -3.000 \\ 0 & -3.000 & 8.000 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1'625 \times 10^{-4} \\ -6'036 \times 10^{-6} \\ -6'681 \times 10^{-5} \end{Bmatrix}$$

$$f_{x4} = -5'180 \text{ kN} \quad f_{y4} = -0'014 \text{ kN} \quad \Gamma_4 = -0'242 \text{ kN}\cdot\text{m}$$



• ESFUERZOS EN LA BARRA 1-4.

$$u_1 = v_1 = 0$$

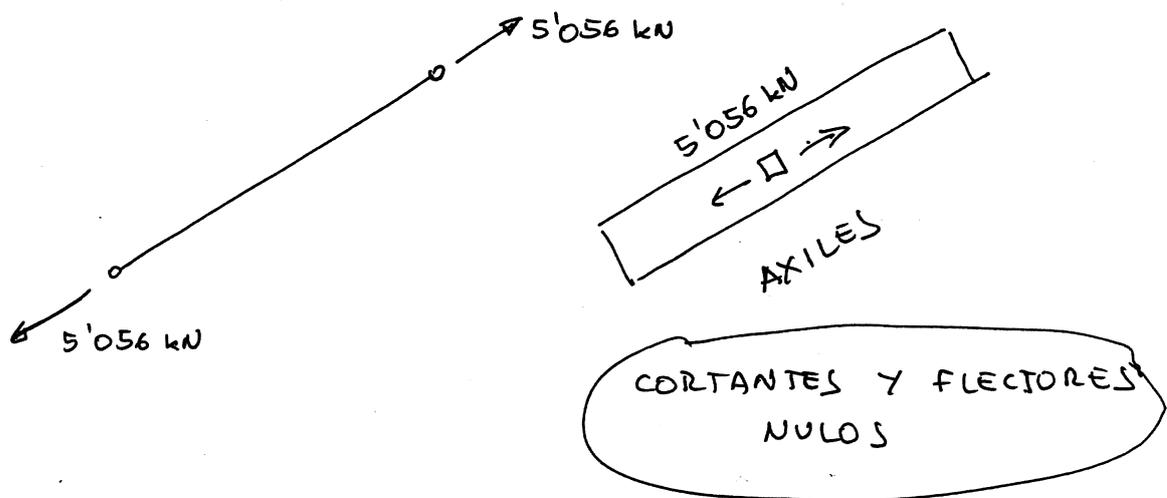
$$u'_4 = 1.625 \times 10^{-4} \quad v'_4 = -6.036 \times 10^{-6}$$

Cambio de ejes $c=0.8 \quad s=0.6$

$$u_4 = c \cdot u'_4 + s \cdot v'_4 = 1.264 \times 10^{-4}$$

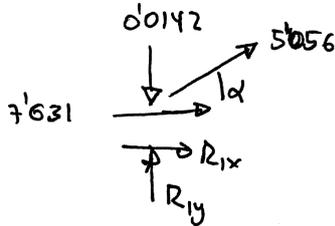
$$f_{x2} = \frac{EA}{L} u_1 - \frac{EA}{L} u_4 = -40.000 \times 1.264 \times 10^{-4} = -5.056 \text{ kN}$$

$$f_{x4} = -\frac{EA}{L} u_1 + \frac{EA}{L} u_4 = 40.000 \times 1.264 \times 10^{-4} = 5.056 \text{ kN}$$





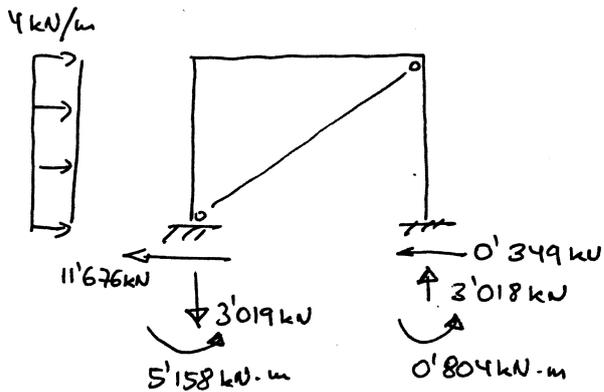
EQUILIBRIO NUDO 2



$$R_{1x} = -7'631 - 5'056 \cos \alpha = -11'676 \text{ kN}$$

$$R_{1y} = 0'0142 - 5'056 \sin \alpha = -3'019 \text{ kN}$$

RESUMEN REACCIONES.





BARRA 1-3 Momentos de eje z, giro alrededor de z. No hay cambio de ejes.

$$[k_{ij}] = \frac{2EI}{L} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16800 & 8400 \\ 8400 & 16800 \end{bmatrix}$$

BARRA 2-4 → Igual.

BARRA 3-4

$$[k_{ij}] = \frac{2EI}{L} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8000 & 4000 \\ 4000 & 8000 \end{bmatrix}$$

SISTEMA DE ECUACIONES DE RIGIDEZ.

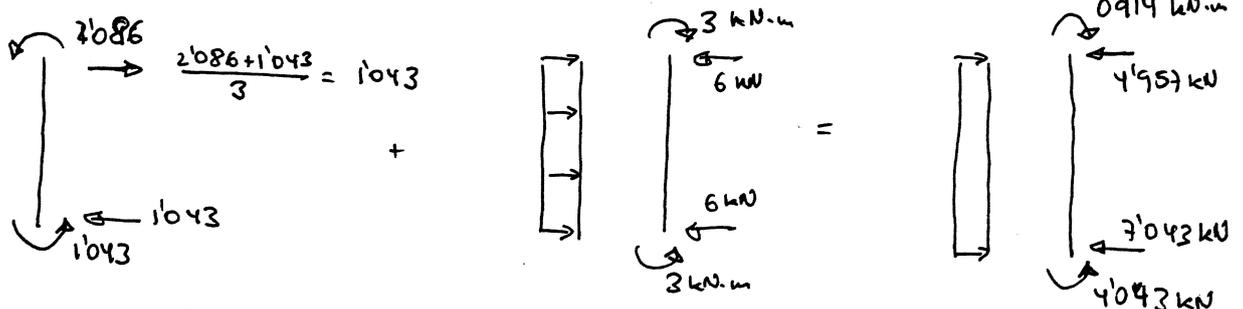
$$\begin{Bmatrix} M_3 \\ M_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 3 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 24800 & 4000 \\ 4000 & 24800 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_3 \\ \theta_4 \end{Bmatrix}$$

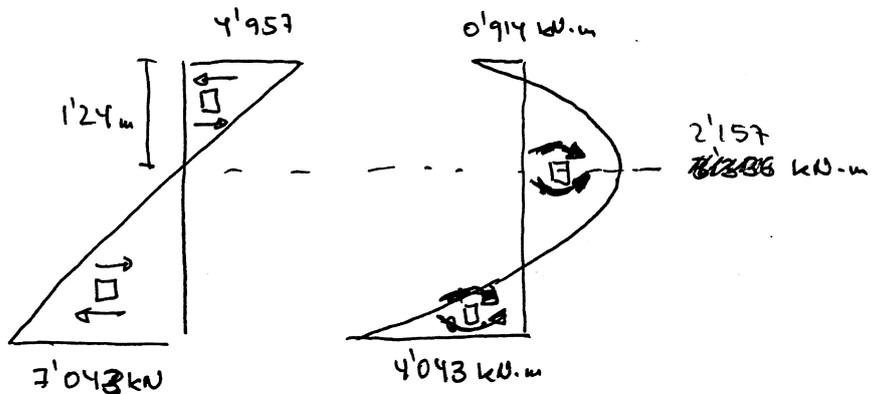
$$\theta_3 = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 4000 \\ 0 & 24800 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 24800 & 4000 \\ 4000 & 24800 \end{vmatrix}} = \frac{74.400}{5'9904 \times 10^8} = 1'242 \times 10^{-4}$$

$$\theta_4 = \frac{\begin{vmatrix} 24800 & 3 \\ 4000 & 0 \end{vmatrix}}{5'9904 \times 10^8} = -2'003 \times 10^{-5}$$

BARRA 1-3

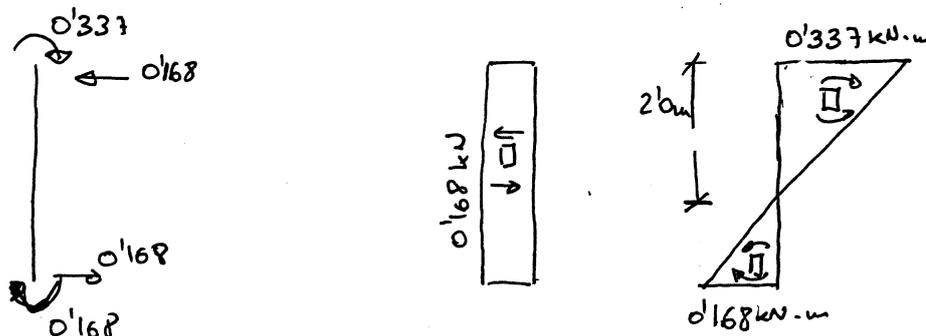
$$\begin{Bmatrix} M_1 \\ M_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 16800 & 8400 \\ 8400 & 16800 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 1'242 \times 10^{-4} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1'043 \text{ kN}\cdot\text{m} \\ 2'086 \text{ kN}\cdot\text{m} \end{Bmatrix}$$





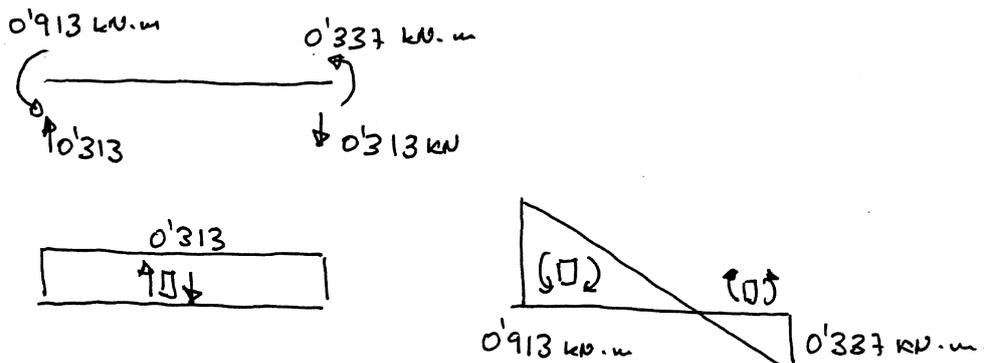
• BARRA 2-4

$$\begin{Bmatrix} M_2 \\ M_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 16800 & 8400 \\ 8400 & 16800 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ -2.003 \times 10^{-5} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0.168 \text{ kN}\cdot\text{m} \\ -0.337 \text{ kN}\cdot\text{m} \end{Bmatrix}$$



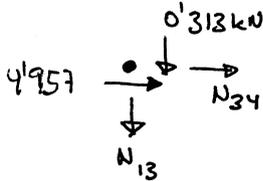
• BARRA 3-4

$$\begin{Bmatrix} M_3 \\ M_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 8000 & 4000 \\ 4000 & 8000 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1.242 \times 10^{-4} \\ -2.003 \times 10^{-5} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.913 \\ 0.337 \end{Bmatrix}$$



• DETERMINACIÓN DE LOS AXILES. EQUILIBRIO DE NUDO.

NUDO 3.

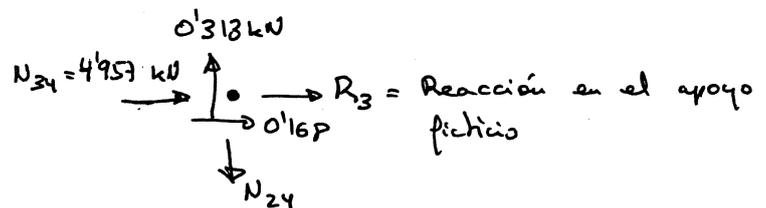
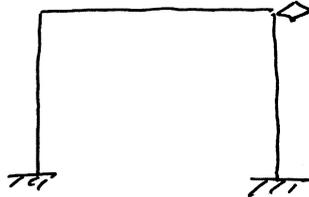


$$N_{13} = -0.313 \text{ kN}$$

$$N_{34} = -4.957 \text{ kN}$$

NUDO 4

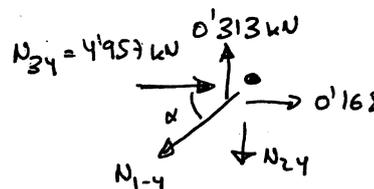
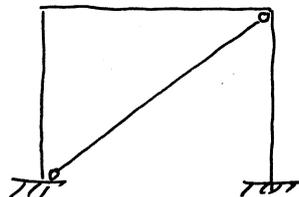
Para



$$N_{24} = 0.313 \text{ kN}$$

$$R_3 = -4.957 - 0.168 = -5.125 \text{ kN}$$

Para



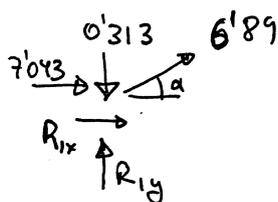
$$\sum F_H = 0 \quad 4.957 + 0.168 - N_{1-4} \cos \alpha = 0$$

$$N_{1-4} = 6.406 \text{ kN}$$

$$\sum F_V = 0 \quad N_{24} + N_{1-4} \sin \alpha - 0.313 = 0$$

$$N_{24} = -3.531 \text{ kN}$$

Nudo 1 (estructura real - con tirante)



$$R_{1x} = -6.406 \cos \alpha - 7.043 = -12.168 \text{ kN}$$

$$R_{1y} = 0.313 - 6.406 \sin \alpha = -3.531 \text{ kN}$$



AXILES (Resumen)

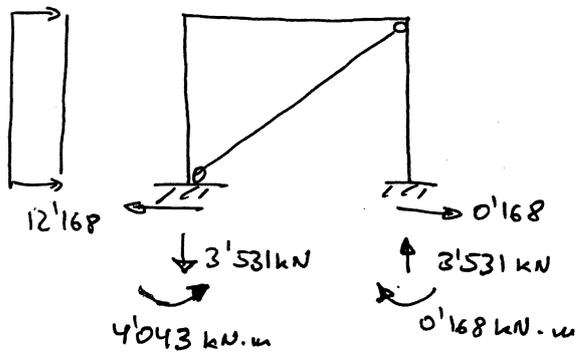
$$N_{13} = -0'313 \text{ kN}$$

$$N_{24} = -3'531 \text{ kN}$$

$$N_{34} = -4'957 \text{ kN}$$

$$N_{1-4} = 6'406 \text{ kN}$$

REACCIONES





EJERCICIO N° 91

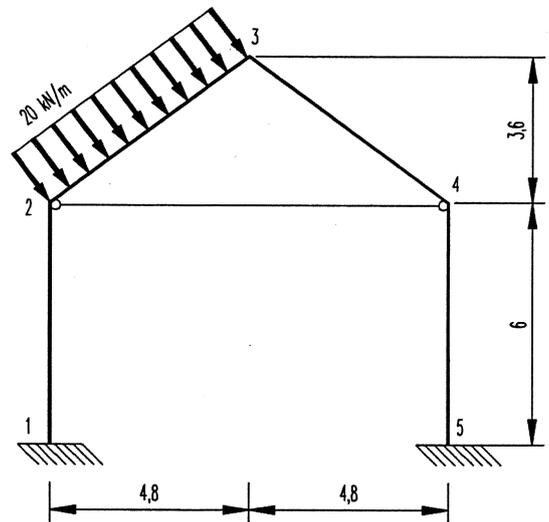
CÁLCULO DE ESTRUCTURAS I.
2º curso Plan Integral de Estudios de Ingeniería Civil.

SEGUNDO EXAMEN PARCIAL.
10 de Junio de 1999.

Problema nº 3.

La figura adjunta representa un pórtico plano y las fuerzas que lo solicitan. Las características mecánicas de las barras que lo forman son las siguientes:

- Elementos 1-2 y 4-5
 $EI = 72.000 \text{ kN}\cdot\text{m}^2$
 $EA = 12.000.000 \text{ kN}$
- Elementos 2-3 y 3-4
 $EI = 36.000 \text{ kN}\cdot\text{m}^2$
 $EA = 6.012.000 \text{ kN}$
- Elemento 2-4
 $EI = 600 \text{ kN}\cdot\text{m}^2$
 $EA = 19.200 \text{ kN}$



Se pide:

- 1) Detallar el esquema del sistema de ecuaciones en rigidez, indicando las submatrices correspondientes a cada posición y las filas y columnas afectadas por las condiciones de contorno.
- 2) Llevar las cargas a los nudos y representar el resultado sobre un esquema de la estructura.
- 3) Escribir las filas de la matriz de rigidez y los elementos del vector de cargas que definen las ecuaciones de equilibrio del nudo 2.
- 4) Sabiendo que los desplazamientos obtenidos al resolver dicho sistema son

NUDO	u	v	θ
2	0'023344	-0'000024	-0'005496
3	0'024341	-0'001371	0'003796
4	0'025268	-0'000024	-0'004708

calcular las fuerzas en el extremo dorsal de la barra 2-3. —Deben determinarse a partir de los desplazamientos indicados; usando los datos que se proporcionan más adelante para abreviar los cálculos pueden obtenerse por un camino más corto, pero esta forma de hallarlos no se valorará.—

- 5) Determinar las leyes de esfuerzos en las barras 2-3 y 2-4 de la estructura.

Tiempo: 1 hora.



Para reducir el volumen de operaciones a realizar se proporcionan los siguientes resultados intermedios:

Matriz de rigidez de la barra 2-3, en ejes locales

$$[K^{2-3}] = \begin{bmatrix} 1.002.000 & 0 & 0 & -1.002.000 & 0 & 0 \\ 0 & 2.000 & 6.000 & 0 & -2.000 & 6.000 \\ 0 & 6.000 & 24.000 & 0 & -6.000 & 12.000 \\ -1.002.000 & 0 & 0 & 1.002.000 & 0 & 0 \\ 0 & -2.000 & -6.000 & 0 & 2.000 & -6.000 \\ 0 & 6.000 & 12.000 & 0 & -6.000 & 24.000 \end{bmatrix}$$

Matriz de rigidez de la barra 2-3 en ejes generales

$$[K^{12-3}] = \begin{bmatrix} 642.000 & 480.000 & -3.600 & -642.000 & -480.000 & -3.600 \\ 480.000 & 362.000 & 4.800 & -480.000 & -362.000 & 4.800 \\ -3.600 & 4.800 & 24.000 & 3.600 & -4.800 & 12.000 \\ -642.000 & -480.000 & 3.600 & 642.000 & 480.000 & 3.600 \\ -480.000 & -362.000 & -4.800 & 480.000 & 362.000 & -4.800 \\ -3.600 & 4.800 & 12.000 & 3.600 & -4.800 & 24.000 \end{bmatrix}$$

Fuerzas en el extremo frontal de la barra 2-3, calculadas considerando la estructura sometida a las fuerzas en los nudos que se piden en el apartado 2 del problema, expresadas en el sistema local de la barra

$$\begin{aligned} f_{x3} &= -10'62 \text{ kN} \\ f_{y3} &= 6'85 \text{ kN} \\ M_3 &= 35'21 \text{ kN}\cdot\text{m} \end{aligned}$$



PROBLEMA 3.

11/18

1º) Esquema sistema de ecuaciones en rigidez.

$$\{F_i\} = \begin{Bmatrix} f_{xi} \\ f_{yi} \\ f_{\theta i} \end{Bmatrix} \quad \{d_i\} = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ \theta_i \end{Bmatrix}$$

f_1	K_{II}^{1-2}	K_{IJ}^{1-2}	Ω	Ω	Ω	d_1
f_2	K_{IJ}^{1-2}	$K_{JJ}^{1-2} + K_{II}^{1-2} + K_{II}^{1-2}$	K_{IJ}^{1-2-3}	K_{JJ}^{1-2-3}	K_{IJ}^{1-2-4}	d_2
f_3	Ω	K_{IJ}^{1-2-3}	$K_{JJ}^{1-2-3} + K_{II}^{1-3-4}$	K_{IJ}^{1-3-4}	Ω	d_3
f_4	Ω	K_{IJ}^{1-2-4}	K_{JJ}^{1-2-4}	γ	K_{IJ}^{1-4-5}	d_4
f_5	Ω	Ω	Ω	K_{IJ}^{1-4-5}	K_{JJ}^{1-4-5}	d_5

$$\gamma = K_{JJ}^{1-2-4} + K_{JJ}^{1-3-4} + K_{II}^{1-4-5}$$

TACHADO
= SUPRIMIDO POR CONDI
CIONES DE CONTORNO.

11/20

2º) Filas de la matriz que representan el eq. del nodo 2

$$f_2 = (K_{JJ}^{1-2-2} + K_{II}^{1-2-3} + K_{II}^{1-2-4}) d_2 + K_{IJ}^{1-2-3} d_3 + K_{IJ}^{1-2-4} d_4$$

Repòsital PAPEL 100% RECICLADO

Nº

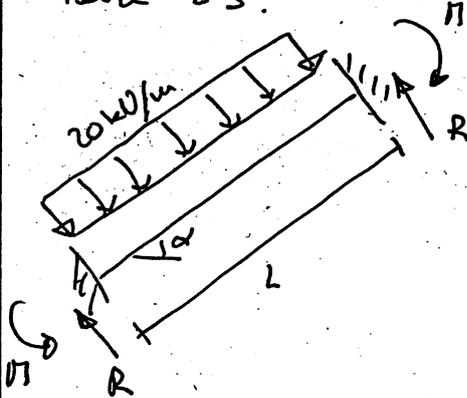
Apellidos y nombre / Cognoms i nom

Firma / Signatura

Fecha / Data



Vector de cargas. Hay que llevar a los nudos la carga repartida sobre 2-3.



$$L = \sqrt{4.8^2 + 3.6^2} = 6 \text{ m.}$$

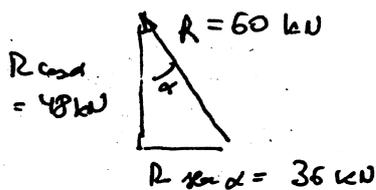
$$R = \frac{qL}{2} = 60 \text{ kN}$$

$$M = \frac{qL^2}{12} = 60 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

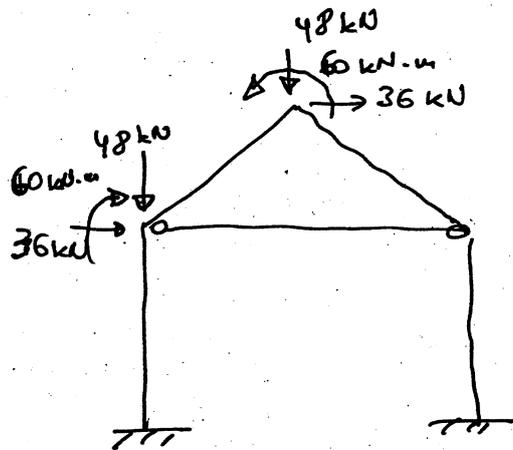
$$\alpha = \arctan \frac{3.6}{4.8} = 36.8699^\circ$$

$$\sin \alpha = \frac{3.6}{6} = 0.6$$

$$\cos \alpha = \frac{4.8}{6} = 0.8$$



Cargas en los nudos



$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 36 \\ -48 \\ -60 \end{Bmatrix}$$



Utilizaremos las fórmulas que definen la barra de pórtico plano en ejes generales.

BARRA 1-2

$$[K'_{JJ}] = \begin{bmatrix} c^2 \frac{EA}{L} + s^2 \frac{12EI}{L^3} & c \cdot s \left(\frac{EA}{L} - \frac{12EI}{L^3} \right) & s \frac{6EI}{L^2} \\ s^2 \frac{EA}{L} + c^2 \frac{12EI}{L^3} & s^2 \frac{EA}{L} + c^2 \frac{12EI}{L^3} & -c \frac{6EI}{L^2} \\ \text{Sim.} & & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix}$$

$$\frac{EA}{L} = \frac{12 \times 10^6}{6} = 2 \times 10^6$$

$$\frac{12EI}{L^3} = \frac{12 \times 72.000}{6^3} = 4000$$

$$\frac{6EI}{L^2} = 12.000$$

$$\frac{4EI}{L} = 48.000$$

$$\alpha = 90^\circ$$

$$c = 0$$

$$s = 1$$

$$[K'_{55}] = \begin{bmatrix} 4000 & 0 & 12.000 \\ 0 & 2.000.000 & 0 \\ 12.000 & 0 & 48.000 \end{bmatrix}$$

BARRA 2-3

$$\alpha = 36,8699^\circ$$

$$s = 0,6$$

$$c = 0,8$$

$$[K'_{55}] = \begin{bmatrix} c^2 \frac{EA}{L} + s^2 \frac{12EI}{L^3} & c \cdot s \left(\frac{EA}{L} - \frac{12EI}{L^3} \right) & -s \frac{6EI}{L} \\ s^2 \frac{EA}{L} + c^2 \frac{12EI}{L^3} & s^2 \frac{EA}{L} + c^2 \frac{12EI}{L^3} & c \frac{6EI}{L} \\ \text{Sim.} & & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix}$$

Nº

Apellidos y nombre / Cognoms i nom

Firma / Signatura

Fecha / Data

395



$$\frac{EA}{L} = \frac{6.002.000}{6} = 1.002.000$$

$$\frac{12EI}{L^3} = \frac{12 \times 36.000}{6^3} = 2000$$

$$\frac{6EI}{L^2} = 6000$$

$$\frac{4EI}{L} = 24.000$$

$$s=0,6$$

$$c=0,8$$

$$[K'_{II}^{1,2-3}] = \begin{bmatrix} 642.000 & 480.000 & -3600 \\ 480.000 & 362.000 & 4800 \\ -3600 & 4800 & 24.000 \end{bmatrix}$$

$$[K'_{II}^{1,2-3}] = \begin{bmatrix} -c^2 \frac{EA}{L} - s^2 \frac{12EI}{L^3} & cs \left(\frac{12EI}{L^3} - \frac{EA}{L} \right) & -s \frac{6EI}{L} \\ cs \left(\frac{12EI}{L^3} - \frac{EA}{L} \right) & -s^2 \frac{EA}{L} - c^2 \frac{12EI}{L^3} & c \frac{6EI}{L} \\ s \frac{6EI}{L} & -c \frac{6EI}{L} & \frac{2EI}{L} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -642.000 & -480.000 & -3600 \\ -480.000 & -362.000 & 4800 \\ 3600 & -4800 & 12.000 \end{bmatrix}$$

BARRA 2-4

$$\alpha = 0 \quad c = 1 \quad s = 0$$

$$\frac{EA}{L} = \frac{19.200}{96} = 2000$$

$$K'_{II}^{1,2-4} = \begin{bmatrix} c^2 & cs & 0 \\ cs & s^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{EA}{L} = \begin{bmatrix} 2000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$K_{II}^{1,2-4} = -K'_{II}^{1,2-4} = \begin{bmatrix} -2000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Nº

Apellidos y nombre / Cognoms i nom

Firma / Signatura

Fecha / Data

396



Fila de la matriz de rigidez y el vector de cargas correspondientes al nodo 2.

$$\begin{Bmatrix} 36 \\ -48 \\ -60 \\ \vdots \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 648.000 & 480.000 & 8400 & -642.000 & -480.000 & -3600 & -2000 & 0 & 0 \\ 480.000 & 2.362.000 & 4800 & -480.000 & -362.000 & 4800 & 0 & 0 & 0 \\ 8400 & 4800 & 72.000 & 3600 & -4800 & 12.000 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ \phi_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ \phi_3 \\ u_4 \\ v_4 \\ \phi_4 \end{Bmatrix}$$

1155

Esfuerzos en la barra 2-3.

$$\begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ \phi_2 \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} c & s & 0 \\ -s & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{[T]^T} \begin{Bmatrix} u_2' \\ v_2' \\ \phi_2' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0'8 & 0'6 & 0 \\ -0'6 & 0'8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0'023344 \\ -0'000024 \\ -0'005496 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0'018661 \\ -0'014026 \\ -0'005496 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} u_3 \\ v_3 \\ \phi_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0'8 & 0'6 & 0 \\ -0'6 & 0'8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0'024341 \\ -0'001371 \\ +0'003796 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0'018650 \\ -0'015701 \\ 0'003796 \end{Bmatrix}$$

$$f_2 = [K_{22}] d_2 + [K_{2j}] d_3$$

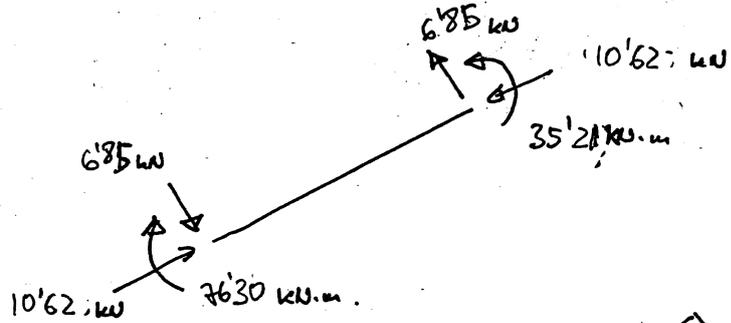
$$\begin{Bmatrix} f_{2x} \\ f_{2y} \\ f_{2z} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.002.000 & 0 & 0 \\ 0 & 2000 & 6000 \\ 0 & 6000 & 24.000 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0'018661 \\ -0'014026 \\ -0'005496 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} -1.002.000 & 0 & 0 \\ 0 & -2000 & 6000 \\ 0 & -6000 & 12.000 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0'018650 \\ -0'015701 \\ 0'003796 \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} 10'62 \text{ kN} \\ -6'85 \text{ kN} \\ -76'30 \text{ kN.m} \end{Bmatrix}$$



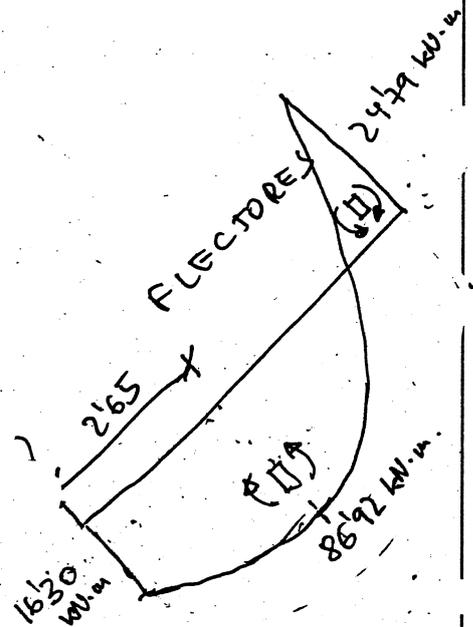
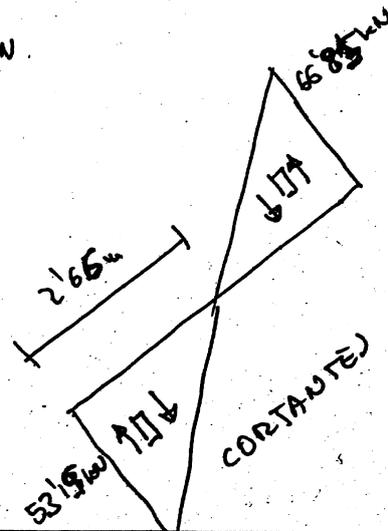
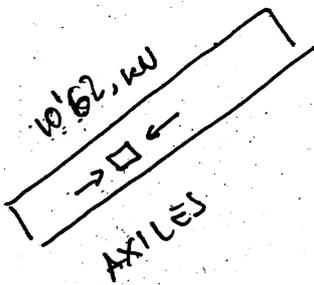
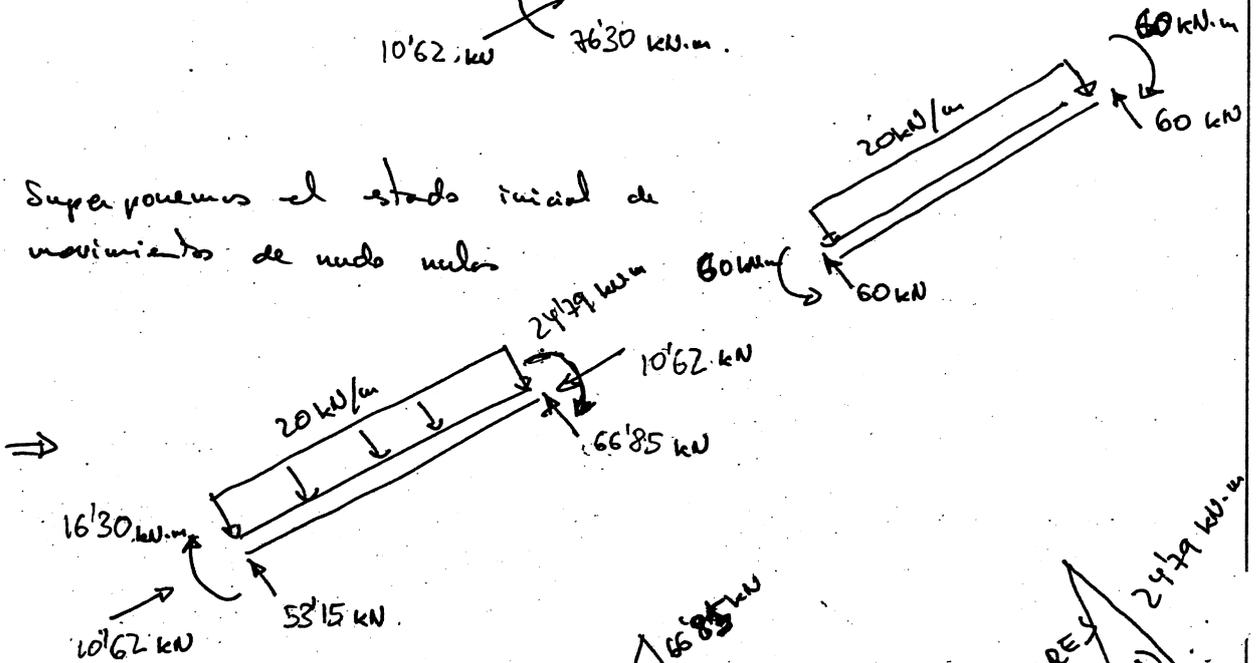
$$\begin{Bmatrix} F_{x3} \\ F_{y3} \\ M_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.002.000 & 0 & 0 \\ 0 & -2000 & -6000 \\ 0 & 6000 & 12.000 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0'018661 \\ -0'014026 \\ -0'005496 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.002.000 & 0 & 0 \\ 0 & 2000 & -6000 \\ 0 & -6000 & 24.000 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0'018650 \\ -0'01570 \\ 0'003796 \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} -10'62 \text{ kW.} \\ 6'85 \text{ kW} \\ 35'21 \text{ kW}\cdot\text{m} \end{Bmatrix}$$



12/11

Superponemos el estado inicial de movimiento de nudo nulo



17/11
REPROGRAFADO PAPEL 100% RECICLADO

Nº	Apellidos y nombre / Cognoms i nom	Firma / Signatura	Fecha / Data 3 9 8
----	------------------------------------	-------------------	-----------------------



Esfuerzos en la barra 2-4

Es. barra descometada a flexión dorsal y frontal.

$$f_{x2} = \frac{EA}{L} (u_2 - u_4)$$

$$u_2 = u'_2 = 0'023344 \text{ m}$$

$$f_{x4} = \frac{EA}{L} (u_2 + u_4)$$

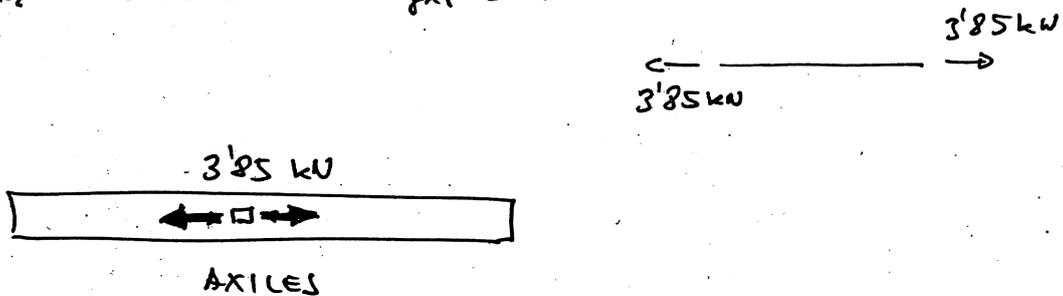
$$u_4 = u'_4 = 0'025268 \text{ m}$$

$$u_2 - u_4 = -0'001924 \text{ m.}$$

$$\frac{EA}{L} = 2000 \text{ kN/m}$$

$$f_{x2} = -3'85 \text{ kN}$$

$$f_{x4} = 3'85 \text{ kN}$$



CORTANTES Y FLECTORES IDÉNTICAMENTE NULOS.

12'25

