

UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE VALENCIA

Departamento de Ingeniería Mecánica y de Materiales



TESIS DOCTORAL

---

Contribución al modelado acústico  
de la línea de escape en motores de combustión.  
Aplicación a silenciadores y catalizadores.

---

*Presentada por:* D. Antoine Antebas

*Dirigida por:* Dr. D. Francisco David Denia Guzmán  
Dr. D. F. Javier Fuenmayor Fernández

Valencia, Junio de 2010



TESIS DOCTORAL

---

**Contribución al modelado acústico  
de la línea de escape en motores de combustión.  
Aplicación a silenciadores y catalizadores.**

---

que para la obtención

del grado de

**Doctor Ingeniero Industrial**

presenta

**D. Antoine Antebas**

en el

Departamento de Ingeniería Mecánica y de Materiales

de la Universidad Politécnica de Valencia

Dirigida por

**Dr. D. Francisco David Denia Guzmán**

**Dr. D. F. Javier Fuenmayor Fernández**

Valencia, Junio de 2010



TESIS DOCTORAL

**Contribución al modelado acústico  
de la línea de escape en motores de combustión.  
Aplicación a silenciadores y catalizadores.**

*Presentada por:* D. Antoine Antebas

*Dirigida por:* Dr. D. Francisco David Denia Guzmán  
Dr. D. F. Javier Fuenmayor Fernández

TRIBUNAL CALIFICADOR

PRESIDENTE: Dr. D. Vicente Mata Amela

VOCALES: Dr. D. Ramon Capdevila Pagès  
Dr. D. Antonio Pérez González  
Dr. D. Fernando Viadero Rueda

SECRETARIO: Dr. D. Luis Baeza González

En Valencia, a 4 de Junio de 2010.



Esta Tesis Doctoral ha sido posible gracias al apoyo del Ministerio de Ciencia e Innovación y la cofinanciación de FEDER (proyecto DPI2007-62635).







# Resumen

Esta Tesis se centra en el desarrollo e implementación de métodos eficaces para el diseño y modelado acústico de la línea de escape de motores de combustión, y en concreto, de dos de sus componentes más relevantes desde el punto de vista de control de emisiones sonoras, como son los silenciadores y los catalizadores.

Por ello, se realiza una revisión bibliográfica de los modelos unidimensionales y la representación matricial asociada. También se lleva a cabo una revisión de la literatura existente en cuanto a la caracterización de elementos perforados, materiales absorbentes y monolitos. Las limitaciones y deficiencias encontradas en los modelos de onda plana evidencian la necesidad de disponer de herramientas de modelado multidimensional, válidas a altas frecuencias y para geometrías de silenciadores y catalizadores sin dimensiones predominantes.

Se aplica el método de elementos finitos a la resolución de la ecuación de ondas convectiva, mediante la formulación en presión, en el interior de silenciadores con material absorbente. Se estudia detalladamente el acoplamiento entre subdominios conectados mediante elementos perforados en el interior del silenciador. También se analiza el efecto del flujo medio en la impedancia acústica, prestando especial atención a las diferentes condiciones a satisfacer por el campo acústico. Por ello, se aplican las condiciones de continuidad de velocidad y desplazamiento y se comparan los resultados proporcionados por ambas con medidas experimentales.

La capacidad que posee el método de elementos finitos para abordar geometrías arbitrarias es el motivo por el que también se aplica dicho método en el modelado acústico de catalizadores comerciales de automoción. Para el modelado acústico del catalizador se recurre a dos metodologías: (1) el modelo 3D conductos/3D monolito, utilizado en la bibliografía, en el que la aplicación del método de elementos finitos implica el cálculo del campo acústico tridimensional en el catalizador completo, y (2) el modelo 3D conductos/1D monolito, propuesto en la Tesis, en el que se sustituye el monolito por una matriz de transferencia que asume una propagación unidimensional en su interior. Se comparan los resultados obtenidos mediante ambas metodologías con medidas experimentales, mostrando que la técnica propuesta da lugar a predicciones más ajustadas a la experimentación. Posteriormente, se extiende el modelo 3D conductos/1D monolito para incluir catalizadores con presencia de flujo medio en los

capilares.

En respuesta al alto coste computacional asociado al método de elementos finitos se desarrollan herramientas analíticas tridimensionales de modelado mediante el método de ajuste modal. El desarrollo de dichas herramientas se basa en el tratamiento analítico modal de la ecuación de ondas en conductos rectangulares, circulares y cónicos. Se aplica el método de ajuste modal al modelado acústico tridimensional de silenciadores diversos, reactivos y disipativos, con vistas a estudiar su comportamiento acústico. Se analiza detalladamente el efecto de algunos parámetros significativos, tales como la posición de los conductos, la resistividad del material absorbente y la porosidad de los elementos perforados en la atenuación acústica.

El método de ajuste modal se extiende al caso de catalizadores con geometrías relevantes pero que no han sido estudiadas en la bibliografía desde un punto de vista analítico tridimensional, como es el caso de catalizadores circulares y con conductos cónicos. Para el modelado de ambas geometrías se aplican las técnicas 3D conductos/3D monolito y 3D conductos/1D monolito. Se estudia en detalle el efecto de la resistividad del monolito y su porosidad en la atenuación acústica.

**Palabras clave:** *silenciadores, catalizadores, material absorbente, elementos perforados, monolito, elementos finitos, técnica de ajuste modal, medida experimental.*

# Resum

Esta Tesi se centra en el desenvolupament i implementació de mètodes eficaços per al disseny i modelatge acústic de la línia d'escapament de motors de combustió, i en concret, de dos dels seus components més rellevants des del punt de vista de control d'emissions sonores, com són els silenciadors i els catalitzadors.

Per això, es realitza una revisió bibliogràfica dels models unidimensionals i la representació matricial associada. També es du a terme una revisió de la literatura existent referent a la caracterització d'elements perforats, materials absorbents i monòlits. Les limitacions i deficiències trobades en els models d'onda plana evidencien la necessitat de disposar de ferramentes de modelatge multidimensional, vàlides a altes freqüències i per a geometries de silenciadors i catalitzadors sense dimensions predominants.

S'aplica el mètode d'elements finits a la resolució de l'equació d'ones convectiva, per mitjà de la formulació en pressió, en l'interior de silenciadors amb material absorbent. S'estudia detalladament l'acoplament entre subdominis connectats per mitjà d'elements perforats a l'interior del silenciador. També s'analitza l'efecte del flux mig en la impedància acústica, prestant especial atenció a les diferents condicions a satisfer pel camp acústic. Per això, s'apliquen les condicions de continuïtat de velocitat i desplaçament i es comparen els resultats proporcionats per ambdós amb mesures experimentals.

La capacitat que posseïx el mètode d'elements finits per a abordar geometries arbitràries és el motiu pel qual també s'aplica aquest mètode al modelatge acústic de catalitzadors comercials d'automoció. Per al modelatge acústic del catalitzador es fa ús de dues metodologies: (1) el model 3D conductes/3D monòlit, utilitzat en la bibliografia, en el que el mètode d'elements finits implica el càlcul del camp acústic tridimensional al catalitzador complet, i (2) el model 3D conductes/1D monòlit, proposat en la Tesi, en el que se substitueix el monòlit per una matriu de transferència que assumeix una propagació unidimensional al seu interior. Es comparen els resultats obtinguts pels dos models amb mesures experimentals, i es mostra que la tècnica proposada dóna lloc a prediccions més ajustades a l'experimentació. Posteriorment, s'estén el model 3D conductes/1D monòlit per a incloure catalitzadors amb presència de flux mig en els capil·lars.

En resposta a l'alt cost computacional associat al mètode d'elements finits es desenvolupen ferramentes analítiques tridimensionals de modelatge mitjançant el mètode d'ajust modal. El desenvolupament de ferramentes es basa en el tractament analític modal de l'equació d'ones en conductes rectangulars, circulars i cònics. S'aplica el mètode d'ajust modal al modelatge acústic tridimensional de silenciadors diversos, reactius i dissipatius, per tal d'estudiar el seu comportament acústic. S'analitza detalladament l'efecte d'alguns paràmetres significatius, com ara la posició dels conductes, la resistivitat del material absorbent i la porositat dels elements perforats en l'atenuació acústica.

El mètode d'ajust modal s'estén al cas de catalitzadors amb geometries rellevants però que no han sigut estudiades en la bibliografia des d'un punt de vista analític tridimensional, com és el cas de catalitzadors circulars i amb conductes cònics. Per al modelatge d'ambdós geometries s'apliquen les tècniques 3D conductes/3D monòlit i 3D conductes/1D monòlit. S'estudia en detall l'efecte de la resistivitat del monòlit i la seua porositat en l'atenuació acústica.

**Paraules clau:** *silenciadors, catalitzadors, material absorbent, elements perforats, monòlit, elements finits, tècnica d'ajust modal, mesura experimental.*

# Abstract

This thesis is focused on the development and implementation of effective methods for the acoustic design and modelling of the exhaust line of internal combustion engines, and specifically for two relevant components, from the standpoint of noise control, such as mufflers and catalytic converters.

Therefore, a literature review of the one-dimensional models and their associated matrix approach has been performed. Also a review of the existing literature regarding the characterization of perforated elements, absorbent materials and monoliths has been carried out. The limitations and deficiencies of the plane wave models show the need of multidimensional modelling tools, which are valid for high frequencies and more general muffler and catalytic converter geometries.

The finite element method is applied to solve the convective wave equation in dissipative silencers using the pressure formulation. The coupling between connected subdomains by means of perforated elements inside the muffler is studied in detail. In addition, the effect of the mean flow on the acoustic impedance is analyzed, paying particular attention to different perforate boundary conditions. The continuity conditions of velocity and displacement are applied, and the obtained results are compared with experimental results.

The finite element method has the capacity to deal with arbitrary geometries, and for this reason it has been applied to the acoustic modelling of automotive catalysts. Two different modelling techniques are considered: (1) First, the procedure described in previous works, 3D ducts/3D monolith, in which the finite element method leads to the calculation of the three-dimensional acoustic field inside the complete catalytic converter; (2) On the other hand, the proposed technique in the Thesis, 3D ducts/1D monolith, in which the monolith is replaced by a plane wave transfer matrix, that is, only one-dimensional acoustic behaviour is allowed within the capillary ducts. The results provided by both approaches are compared with experimental measurements, showing that the latter technique exhibits a better agreement. The proposed model, 3D ducts/1D monolith, is extended to include the presence of mean flow in the capillaries.

In response to the high computational effort associated with the finite element met-

hod, three-dimensional analytical tools have been developed using the mode-matching method. The development of such analytical techniques takes into account the modal solution of the wave equation in ducts with rectangular, circular and conical geometry. The mode-matching method has been applied to the multidimensional acoustic modelling of diverse silencers (reactive and dissipative configurations), to study their acoustic behaviour. The effect of some significant parameters, such as the relative position of the ducts, the resistivity of the absorbent material and the porosity of the perforated elements on the acoustic attenuation has been studied in detail.

The mode-matching method has been extended to include the case of catalysts with relevant geometries, that have not been studied in the literature from a three-dimensional analytical point of view, such as the case of circular catalysts and catalysts with conical ducts. For the modelling of both geometries, 3D ducts/3D monolith and 3D ducts/1D monolith techniques have been applied. In addition, the effect of several parameters on the acoustic behaviour of the catalyst is investigated.

**Keywords:** *mufflers, catalytic converters, absorbent material, perforated elements, monolith, finite elements, mode-matching method, experimental measurement.*

*A mis padres y hermanas*

*A Pura*





# Agradecimientos

En primer lugar quiero expresar mi especial agradecimiento a mis directores, Paco Denia y Javier Fuenmayor, por su orientación y ayuda a lo largo de la realización de esta Tesis. De ellos he aprendido que para llegar lejos en la investigación hay que trabajar de manera incansable. Gracias, sin vosotros no hubiera sido posible llevar a cabo esta Tesis.

También aprovecho esta oportunidad para agradecer al grupo de Acústica, a Pepe Albelda por las charlas y las discusiones que hemos mantenido, a Manolo, amigo y compañero en el mundo de los conductos de escape.

Quiero agradecer a mis amigos y compañeros del CITV y en especial a Fares, Octavio, Rami, José, Rafa, Fede, Rovira, Enrique y Justo por los momentos muy agradables que hemos tenido y por las conversaciones tomando el café de cada mañana. También doy las gracias a mis amigos del ITM Inma, Vicky, Elkin, Oscar, Rut y Xavi. Me habéis hecho sentir como si estuviera en casa, me habéis dado la fuerza cuando la necesitaba. Los almuerzos, comidas y cenas que hemos compartido han sido momentos inolvidables.

En este instante no puedo olvidarme de mis amigos y paisanos repartidos en todo el mundo y agradecerles el estar conmigo en cada instante apoyando y empujándome en los momentos difíciles.

Las palabras no me alcanzan para agradecerle a mi amigo y hermano Mohamad por su ayuda y apoyo incondicional y por hacer realidad este sueño que empezó hace unos cuantos años. Moja, sin ti no se hubiera cumplido este sueño.

Hoy y siempre les doy las gracias a mis padres, que a pesar de la distancia que nos separa, han estado conmigo en cada respiro apoyando y aconsejándome. Os quiero mucho. Doy gracias a mis hermanas, las dos flores de mi vida, por confiar en mí y por llenar mi vida de alegría. Os echo mucho de menos y espero veros muy pronto. También quiero agradecer a toda mi familia, tíos, primos y sobrinos todo el apoyo que me han ofrecido. Por último, quiero expresar mi agradecimiento a mi novia Pura, no sólo por su amor, sino también por la paciencia que ha tenido en el último tramo de la Tesis. Te quiero.



# Índice general

Resumen	I
Resum	III
Abstract	v
Agradecimientos	IX
Índice general	XI
Nomenclatura	XV
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Motivación . . . . .	3
1.2. Objetivos . . . . .	5
1.3. Organización y desarrollo de la Tesis . . . . .	6
<b>2. Modelos de onda plana y caracterización de materiales</b>	<b>9</b>
2.1. Introducción . . . . .	11
2.1.1. Modelos aplicables al cálculo acústico . . . . .	11
I. Modelo dinámico . . . . .	11
II. Modelo acústico lineal . . . . .	14
2.2. Ecuación de ondas . . . . .	14
2.2.1. Medio móvil . . . . .	15
2.2.2. Medio en reposo . . . . .	18
2.3. Acústica unidimensional de conductos . . . . .	19
2.3.1. Medio en reposo . . . . .	19
2.3.2. Medio móvil . . . . .	21
2.4. Modelos de onda plana. Representación matricial . . . . .	23
2.4.1. Generalidades . . . . .	23
2.4.2. Matriz de transferencia de un conducto . . . . .	25
2.4.3. Matriz de transferencia de un conducto cónico . . . . .	28
2.4.4. Matriz de transferencia en expansiones y contracciones . . . . .	29
2.4.5. Matriz de transferencia de conductos extendidos . . . . .	31
2.5. Placas y tubos perforados . . . . .	32

2.5.1.	Impedancia acústica . . . . .	33
2.6.	Materiales absorbentes . . . . .	38
2.6.1.	Introducción . . . . .	39
2.6.2.	Caracterización del material . . . . .	43
2.6.3.	Consideraciones adicionales . . . . .	44
I.	Efecto en la impedancia de conductos perforados . . . . .	44
II.	Medio móvil . . . . .	46
2.7.	Silenciadores . . . . .	47
2.7.1.	Configuraciones sin disipación . . . . .	47
2.7.2.	Configuraciones con disipación . . . . .	48
2.8.	Catalizadores . . . . .	49
2.8.1.	Introducción . . . . .	49
2.8.2.	Modelado acústico del monolito . . . . .	50
I.	Medio en reposo . . . . .	50
II.	Medio móvil . . . . .	53
2.9.	Atenuación sonora en silenciadores y catalizadores . . . . .	63
2.9.1.	Consideraciones energéticas . . . . .	63
2.9.2.	Índices de atenuación sonora en silenciadores y catalizadores . . . . .	64
2.10.	Aplicaciones . . . . .	65
2.10.1.	$TL$ de una cámara de expansión simple . . . . .	66
2.10.2.	$TL$ de una cámara reversa . . . . .	67
2.10.3.	$TL$ de una cámara con doble salida opuesta . . . . .	68
2.10.4.	$TL$ de una cámara reversa con material absorbente y placa perforada . . . . .	70
2.10.5.	$TL$ de un resonador concéntrico . . . . .	73
2.10.6.	$TL$ de un resonador concéntrico con material absorbente . . . . .	81
2.10.7.	$TL$ de un catalizador bicónico . . . . .	83
2.10.8.	Limitaciones . . . . .	86
2.11.	Conclusiones . . . . .	87
<b>3.</b>	<b>Modelado acústico multidimensional de silenciadores con material absorbente mediante elementos finitos</b> . . . . .	<b>89</b>
3.1.	Introducción . . . . .	91
3.2.	Aplicación del MEF a la ecuación de ondas convectiva . . . . .	92
3.2.1.	Formulación en presión . . . . .	92
I.	Vector de carga . . . . .	95
II.	Imposición de la condición de impedancia . . . . .	96
III.	Obtención de la atenuación . . . . .	97
3.3.	Subdominios acoplados. Placas y tubos perforados . . . . .	97
3.3.1.	Medio en reposo . . . . .	98
3.3.2.	Medio móvil . . . . .	100
I.	Continuidad de velocidad . . . . .	101
II.	Continuidad de desplazamiento . . . . .	102
3.4.	Modelado de la propagación en materiales absorbentes . . . . .	103
3.4.1.	Medio en reposo . . . . .	105

3.4.2.	Medio móvil . . . . .	107
I.	Continuidad de velocidad . . . . .	109
II.	Continuidad de desplazamiento . . . . .	109
3.5.	Aplicaciones . . . . .	110
3.5.1.	Cámara de expansión simple . . . . .	110
3.5.2.	Cámara reversa . . . . .	111
3.5.3.	Cámara con doble salida opuesta . . . . .	112
3.5.4.	Cámara reversa con material absorbente y placa perforada . . . . .	114
3.5.5.	Resonador concéntrico con material absorbente . . . . .	117
3.6.	Conclusiones . . . . .	120
<b>4.</b>	<b>Modelado acústico multidimensional de catalizadores mediante elementos finitos</b>	<b>123</b>
4.1.	Introducción . . . . .	125
4.2.	Modelado acústico de catalizadores sin flujo medio . . . . .	126
4.2.1.	Modelo 3D conductos/3D monolito . . . . .	126
4.2.2.	Modelo 3D conductos/1D monolito . . . . .	129
4.2.3.	Comparación de resultados . . . . .	134
4.3.	Modelado acústico de catalizadores con flujo medio . . . . .	137
4.3.1.	Modelo 3D conductos/1D monolito . . . . .	139
4.3.2.	Aplicaciones . . . . .	139
4.4.	Conclusiones . . . . .	140
<b>5.</b>	<b>Modelado acústico de silenciadores mediante técnicas analíticas modales multidimensionales</b>	<b>143</b>
5.1.	Introducción . . . . .	145
5.2.	Acústica tridimensional de conductos . . . . .	147
5.2.1.	Conductos rectangulares . . . . .	147
5.2.2.	Conductos circulares . . . . .	150
5.2.3.	Conductos cónicos . . . . .	154
5.3.	Método de ajuste modal . . . . .	162
5.3.1.	Fundamentos del método . . . . .	162
5.3.2.	Condiciones de contorno . . . . .	165
5.3.3.	Aplicaciones . . . . .	168
I.	Cámara de expansión simple . . . . .	169
II.	Cámara reversa . . . . .	175
III.	Cámara con doble salida opuesta . . . . .	187
IV.	Cámara reversa con material absorbente y placa perforada . . . . .	204
5.4.	Conclusiones . . . . .	213
<b>6.</b>	<b>Modelado acústico de catalizadores mediante técnicas analíticas modales multidimensionales</b>	<b>215</b>
6.1.	Introducción . . . . .	217
6.2.	Geometría circular . . . . .	217

6.2.1. Modelo 3D conductos/3D monolito . . . . .	217
6.2.2. Modelo 3D conductos/1D monolito . . . . .	223
6.2.3. Comparación de modelos 3D/3D y 3D/1D . . . . .	228
6.3. Geometría con conductos cónicos . . . . .	229
6.3.1. Modelo 3D conductos/3D monolito . . . . .	229
6.3.2. Modelo 3D conductos/1D monolito . . . . .	238
6.3.3. Comparación de modelos 3D/3D y 3D/1D . . . . .	244
6.4. Comentarios sobre la consideración de flujo medio . . . . .	244
6.5. Conclusiones . . . . .	245
<b>7. Conclusiones y desarrollos futuros</b>	<b>247</b>
7.1. Conclusiones . . . . .	249
7.2. Desarrollos futuros . . . . .	250
<b>Bibliografía</b>	<b>253</b>

# Nomenclatura

En cada uno de los capítulos se explica el significado de las variables utilizadas. No obstante, para facilitar la comprensión del texto se presenta a continuación una descripción de las convenciones utilizadas en el desarrollo de esta Tesis.

Los símbolos matemáticos se expresan en letra itálica para diferenciarlos claramente del resto del texto. Como excepción, se tienen las funciones matemáticas, algunos símbolos especiales y los números. Las matrices se denotan con corchetes y los vectores por medio de llaves.





# Capítulo 1

## Introducción

### Resumen del capítulo:

*En este capítulo se presenta la problemática asociada al ruido emitido por el funcionamiento de los motores de combustión interna alternativos. Se justifica el desarrollo de herramientas eficaces que permitan el modelado y cálculo de la atenuación acústica de silenciadores y catalizadores. Se expone el ámbito y alcance de la Tesis, así como la estructura utilizada para la consecución de los objetivos de ésta.*



## 1.1. Motivación y antecedentes

La generación de ruido en el escape es una característica no deseada, pero inevitable de los motores de combustión interna alternativos. Durante mucho tiempo, el único requisito impuesto a los sistemas de escape ha sido que fueran capaces de mantener los niveles de ruido emitido por debajo de ciertos límites. De hecho, éste es el criterio de homologación actualmente vigente. Más recientemente, se ha comenzado a tener en cuenta, por parte de los fabricantes, no solamente estos niveles límite, sino también el concepto de calidad sonora, esto es, la valoración más subjetiva que hace un usuario y que le permite identificar el carácter que se le ha querido dar al vehículo (deportivo, de representación, familiar, etc.), o a su fabricante.

Esta nueva vertiente está condicionando un cambio en la estrategia de reducción del ruido de escape. El nivel y las características en frecuencia del ruido emitido a la atmósfera en la salida del sistema de escape dependen en gran medida del comportamiento acústico integral de la línea de escape, dentro de la cual dos componentes de especial relevancia son los silenciadores y los catalizadores.

El punto de partida del modelado y análisis acústico de la línea de escape debe iniciarse en el estudio del comportamiento individual de sus componentes. Sin duda, los elementos más importantes desde el punto de vista de atenuación acústica en la línea de escape son los silenciadores y su comportamiento ha recibido mucha atención [30, 85, 94, 102, 128]. Como mejora notable respecto a los modelos unidimensionales de silenciador iniciales [94], en los últimos años se ha dedicado una intensa labor investigadora a su caracterización acústica tridimensional [30, 128]. Las metodologías asociadas se basan en el establecimiento de las ecuaciones multidimensionales de comportamiento acústico del aire y de otros materiales existentes en sus correspondientes dominios y en la compatibilización de la solución en el contorno de la interfase. Las condiciones de contorno necesarias para conectar ambas soluciones dependen de la existencia o no de elemento perforado en la interfase y de la presencia de flujo medio [96]. Estas metodologías pueden dividirse en dos grandes grupos: las basadas en métodos numéricos de tipo convencional, tales como el método de elementos de contorno [144] y el de elementos finitos [30, 102, 112], y las de tipo analítico. El método de elementos de contorno presenta algunas ventajas computacionales pero es difícil incorporar el efecto convectivo debido al flujo medio. El método de elementos finitos es más versátil cuando existe flujo medio, además es un método que tiene la capacidad de modelar silenciadores con geometrías complejas y por ello está más extendida su utilización en el ámbito del estudio de silenciadores desde sus inicios [30, 112]. El efecto convectivo producido por el flujo medio, supuesto éste potencial, fue estudiado por Peat [99]. Utilizando el método de elementos finitos se pudo incorporar el efecto local de placas perforadas, introducido mediante una impedancia, en presencia de flujo normal [3]. Simultáneamente, Kagawa *et al.* [74] y Craggs [30] utilizaron un modelo localmente reactivo, es decir, una impedancia equivalente en el contorno, junto con la superficie exterior. Más tarde algunos autores como Astley y Cummings [8], utilizaron el modelo de material absorbente volumétrico de Delany y Bazley [39], imponiendo la

continuidad de presiones y desplazamientos normales en la interfase. Posteriormente, Peat y Rathi [102] utilizaron el modelo volumétrico para el material absorbente junto con el método de los elementos finitos para describir el comportamiento acústico de un resonador concéntrico en presencia de flujo medio.

El uso de metodologías basadas en expansiones modales multidimensionales en el diseño de silenciadores ha alcanzado un amplio nivel de aplicación en las últimas décadas. De las múltiples posibilidades existentes [42], el método más empleado en silenciadores es el método de ajuste modal. Este método consiste básicamente en aplicar a las expansiones modales de presión y velocidad una metodología de residuos ponderados en cada una de las discontinuidades de sección con funciones de peso iguales a los propios modos. Uno de los pioneros en el uso de este método aplicado al análisis acústico de silenciadores fue Karal [75] que lo utilizó para estudiar una discontinuidad de sección. De los autores que más extensivamente han hecho uso de este método puede destacarse al profesor Selamat, que ha estudiado en las últimas décadas diversas geometrías de complejidad creciente [117–120, 124, 127–129].

La existencia del catalizador implica una influencia no despreciable en el comportamiento acústico de la línea de escape completa. En los últimos años, diversos investigadores han llevado a cabo el modelado acústico de catalizadores de automoción. En primer lugar, dicho modelado requiere el conocimiento de los fenómenos de propagación de ondas en los capilares que constituyen el monolito. Kirchhoff [86] investigó la propagación de ondas en los capilares teniendo en cuenta el papel que juega la viscosidad y la transferencia de calor. A partir de dicho modelo, Zwicker y Kosten [150] obtuvieron soluciones exactas para conductos de sección transversal circular. En la práctica los capilares de sección transversal cuadrada y rectangular presentan mayor interés, y se consideran en el trabajo de Stinson [131] y de Roh *et al.* [110]. Con la presencia de flujo medio en los capilares, el modelado acústico del monolito es considerablemente más complicado. Dokumaci [52] desarrolló una solución analítica simplificada para la propagación de ondas en capilares circulares en presencia de flujo medio. En otro trabajo, el mismo autor extendió la solución previa para incluir el caso de capilares de sección transversal rectangular [53]. En segundo lugar es necesaria la obtención de modelos de acoplamiento entre el monolito y los conductos de entrada y salida del catalizador. Si bien una posibilidad es utilizar los modelos de onda plana para dichos conductos [52, 53], se puede conseguir una mayor precisión mediante la aplicación de modelos multidimensionales [123]. Debe tenerse en cuenta que en geometrías de catalizadores comerciales y para frecuencias suficientemente altas, el campo acústico real en las regiones de entrada y salida es tridimensional, con lo cual las predicciones obtenidas mediante los modelos de onda plana pueden presentar un error considerable. Otro aspecto muy importante está relacionado con el hecho de que la solución del campo acústico en el interior del monolito es básicamente unidimensional, algo que contradice la consideración de la propagación de modos de alto orden en los capilares que integran el monolito [123].

## 1.2. Objetivos

El objetivo último de la Tesis es la elaboración de métodos eficaces para el diseño y modelado acústico de dos de los componentes más relevantes de la línea de escape de los motores de combustión interna alternativos como son los silenciadores y los catalizadores. Para conseguir este objetivo final se plantea la obtención de los siguientes objetivos parciales:

- Desarrollo e implementación de modelos de elementos finitos que permitan la simulación tridimensional del comportamiento acústico de silenciadores en condiciones generales (presencia de flujo medio, superficies perforadas, material absorbente, etc).
- Estudio detallado del efecto del flujo medio en la impedancia acústica de superficies perforadas, prestando especial atención a las diferentes condiciones a satisfacer por el campo acústico. Actualmente no existe consenso respecto a la condición cinemática más adecuada (continuidad de velocidad/desplazamiento).
- Desarrollo e implementación de modelos de elementos finitos para el modelado tridimensional del comportamiento acústico de catalizadores. Un objetivo fundamental consiste en reproducir de manera fiable la propagación acústica en el monolito, para lo cual se plantearán dos alternativas: en la primera se sustituirá el monolito por material absorbente equivalente desde un punto de vista acústico, mientras que en la segunda se asumirá propagación unidimensional en los capilares. Los resultados proporcionados por ambos modelos se compararán con resultados experimentales para una configuración de catalizador comercial.
- Desarrollo de modelos analíticos de comportamiento acústico de silenciadores basados en el método de ajuste modal, de gran precisión y bajo coste computacional. Estos modelos serán validados mediante resultados de elementos finitos para silenciadores de diversas geometrías en presencia de materiales absorbentes y elementos perforados. Estas herramientas se aplicarán al estudio del efecto que producen las variaciones geométricas y la presencia de componentes perforados y material absorbente en el comportamiento de los diferentes tipos de silenciadores.
- Desarrollo e implementación de modelos acústicos analíticos de catalizadores de automoción para geometrías relevantes (pero que apenas han sido estudiadas en la literatura) como el caso de los catalizadores circulares y con conductos cónicos. Estas herramientas analíticas de simulación se validarán mediante cálculos de elementos finitos, y se aplicarán al estudio paramétrico del efecto que tiene la porosidad del monolito y su resistividad en el comportamiento acústico de los catalizadores.

### 1.3. Organización y desarrollo de la Tesis

La memoria de la Tesis está organizada en torno a tres núcleos principales: (1) modelos de onda plana y caracterización de materiales; (2) modelos numéricos de elementos finitos y (3) técnicas analíticas basadas en el método de ajuste modal. La estructuración se lleva a cabo mediante siete capítulos.

En el capítulo 1 se describen los objetivos planteados y la organización de la Tesis.

En el capítulo 2 se presentan los fundamentos de la teoría acústica aplicada a conductos, capilares, silenciadores y catalizadores, haciendo especial énfasis en los modelos tradicionales de onda plana y la representación matricial asociada. En este capítulo se define gran parte de la nomenclatura utilizada a lo largo de la Tesis. Se describen las características geométricas básicas de las tipologías de silenciador más comunes en la práctica como son las expansiones y contracciones, los conductos extendidos y las superficies perforadas. También se introducen las ecuaciones básicas que caracterizan la propagación de ondas en medios diferentes del aire. Además se aborda la cuantificación de la atenuación sonora mediante el índice de pérdidas por transmisión  $TL$ . Se detallan las fórmulas asociadas a los procesos de transferencia de ondas en las zonas de interfase entre el monolito y los conductos de entrada y salida en presencia de flujo medio. Finalmente se aplican los modelos expuestos a casos concretos de silenciadores y catalizadores.

En el capítulo 3 se lleva a cabo la aplicación del método de los elementos finitos a la ecuación de ondas convectiva, que incluye la presencia de flujo medio. Se justifica la necesidad de disponer de modelos multidimensionales de comportamiento debido a las limitaciones que presentan los modelos tradicionales de onda plana a medida que se analizan frecuencias más altas y geometrías sin dimensiones predominantes. Se presta especial atención al tratamiento de subdominios acoplados mediante elementos perforados, estudiando detalladamente el efecto que tiene el flujo medio en la impedancia acústica de superficies perforadas. Se consideran dos condiciones a satisfacer por el campo acústico, continuidad de velocidad y continuidad de desplazamiento, y se comparan los resultados obtenidos mediante la aplicación de ambas condiciones con resultados experimentales. Finalmente el método de elementos finitos se aplica a la predicción de la atenuación acústica en silenciadores concretos con el fin de demostrar las importantes discrepancias en comparación con los modelos unidimensionales, así como para disponer de una herramienta para validar los modelos analíticos desarrollados en el capítulo 5.

El capítulo 4 está dedicado al modelado del comportamiento acústico de catalizadores de automoción mediante el método de los elementos finitos. La razón por la que se ha optado por utilizar el modelado mediante dicho método es su capacidad de abordar geometrías complejas, como los catalizadores comerciales. Para modelar el monolito se utilizan dos metodologías: (1) la técnica utilizada comúnmente en la bi-

biografía, en la que el monolito se comporta como un material absorbente equivalente de tipo fibroso y que se denotará aquí como 3D conductos/3D monolito. En este caso el modelo de elementos finitos implica el cálculo del campo acústico tridimensional en todo el dominio del catalizador; (2) la técnica propuesta en la Tesis, en la que se sustituye el monolito por una matriz de transferencia, denominada aquí como 3D conductos/1D monolito. De esta manera, la solución del campo acústico solamente puede ser tridimensional en los conductos de entrada y salida pero se fuerza su unidimensionalidad en el monolito. Los resultados obtenidos mediante ambas técnicas se comparan con resultados experimentales. Finalmente se extiende el modelo basado en elementos finitos para el modelado de catalizadores en presencia de flujo medio.

En el capítulo 5 se presenta el tratamiento analítico modal de la ecuación de ondas en conductos. Se consideran geometrías con sección transversal de tipo rectangular y circular, y además se considera el caso de conductos cónicos. Posteriormente se presenta la aplicación del método de ajuste modal al modelado analítico tridimensional del comportamiento acústico de silenciadores reactivos y disipativos. Se presta especial atención a configuraciones novedosas, útiles comercialmente, pero no tratadas en la literatura, como la cámara con doble salida opuesta y la cámara reversa con material absorbente y placa perforada, silenciador que combina aspectos reactivos asociados a resonancias y posicionado de conductos con fenómenos disipativos asociados a la presencia del material absorbente.

El capítulo 6 está dedicado al modelado acústico tridimensional de catalizadores mediante el método de ajuste modal. Se presenta la aplicación de dicha técnica a catalizadores de geometrías relevantes pero no analizadas en la literatura, como los catalizadores circulares y con conductos cónicos. Se consideran, para cada geometría, las dos técnicas de modelado presentadas en el capítulo 4, 3D conductos/3D monolito y 3D conductos/1D monolito. Así, se dispone de una herramienta de modelado de gran precisión cuyo coste computacional es inferior al asociado a métodos numéricos como elementos finitos. Finalmente se estudia la influencia de dos parámetros importantes como son la porosidad y resistividad del monolito en la atenuación acústica.

En el capítulo 7 se recogen las conclusiones del trabajo realizado y se indican las posibles líneas de investigación futuras.





## Capítulo 2

# Modelos de onda plana y caracterización de materiales

### Resumen del capítulo:

*En este capítulo se presentan las ecuaciones que gobiernan la propagación del sonido y los aspectos fundamentales de la teoría acústica aplicada a conductos, silenciadores y catalizadores, haciendo especial énfasis en los modelos tradicionales de onda plana y la representación matricial asociada, que se concreta para ciertos elementos relevantes como tubos de sección uniforme y variable, expansiones, contracciones y conductos extendidos. Se lleva a cabo una revisión de la literatura existente en cuanto a la caracterización de elementos perforados, materiales absorbentes y monolitos comúnmente utilizados en aplicaciones prácticas. Se hace una descripción de las tipologías de silenciadores más habituales en los sistemas de escape y se indican sus características básicas. Asimismo se presenta la definición de los índices de atenuación sonora utilizados para evaluar su comportamiento acústico. Posteriormente se aborda la cuantificación de la atenuación de ruido en configuraciones de interés, tanto en casos de silenciadores puramente reactivos y resonantes como en geometrías disipativas y catalizadores. El capítulo concluye con la exposición de una serie de limitaciones inherentes a los modelos de onda plana, que justifica el desarrollo de técnicas de modelado más precisas.*



## 2.1. Introducción

Los fenómenos físicos asociados a la propagación de ondas sonoras pueden ser descritos mediante las oportunas ecuaciones matemáticas [31, 93, 108]. Dichas ecuaciones son más o menos complejas en función del número de hipótesis simplificadoras tenidas en cuenta cuando se realiza su deducción. Las hipótesis simplificadoras deben estar siempre justificadas mediante las comprobaciones y verificaciones experimentales adecuadas y su función básica es reducir la complejidad de dichas ecuaciones con el fin de facilitar la obtención de la solución. En esta sección se muestra cuáles son las expresiones matemáticas de tales ecuaciones, que en definitiva no son más que relaciones que definen el comportamiento en el tiempo (o la frecuencia) y en el espacio de la presión, la velocidad, la densidad o cualquier otra variable del problema acústico que se quiera considerar.

Una vez definidas las ecuaciones de interés, como por ejemplo la ecuación de ondas, su solución puede llevarse a cabo bien de forma analítica [94], bien de forma numérica [144]. La desventaja básica de las soluciones analíticas radica en el hecho de que sólo se pueden obtener en ciertos casos, fundamentalmente con geometrías relativamente simples de tipo rectangular, circular y cónico (que por otro lado son muy utilizadas en la práctica), lo cual limita su generalización. Por el contrario, tienen la ventaja de admitir un tratamiento matemático relativamente sencillo, de necesitar un tiempo de cálculo mucho menor y de permitir extraer conclusiones útiles en el diseño de silenciadores y catalizadores. Además, mediante modelos sencillos en los que la solución analítica es válida, es posible definir estrategias de mejora de otras técnicas más generales, tales como el método de los elementos finitos.

A continuación se muestran algunos modelos físicos aplicables al cálculo acústico de silenciadores. En primer lugar se consideran las ecuaciones generales de comportamiento, para pasar posteriormente a realizar las simplificaciones oportunas en la sección 2.2.

### 2.1.1. Modelos aplicables al cálculo acústico

Se pueden considerar distintos modelos para el estudio de la atenuación acústica en silenciadores [21, 94]. El primero que se presenta aquí es el modelo fluidodinámico no lineal, de carácter general, y el segundo el modelo acústico lineal, que es el que se considera a lo largo de esta Tesis. El modelo fluidodinámico no se utiliza en este trabajo y aquí sólo se comentarán algunas de sus características más importantes. La elección entre uno y otro se comprende fácilmente a partir de las características de ambos, que se exponen a continuación.

#### 1. Modelo dinámico

La resolución de un problema fluidodinámico general requiere la consideración simultánea de tres ecuaciones:

- Ecuación de continuidad.
- Ecuación de equilibrio dinámico.
- Ecuación de la energía.

Además, es necesaria la inclusión de una ecuación de estado, una ecuación de energía interna y una ecuación de viscosidad. Finalmente se dispone de las relaciones adecuadas entre velocidad del fluido, presión, temperatura, densidad, energía interna y viscosidad.

Para la ecuación de continuidad, resulta [65]

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w) = 0 \quad (2.1)$$

o bien de forma vectorial:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla^T(\rho \vec{u}) = 0 \quad (2.2)$$

siendo  $u$ ,  $v$  y  $w$  las componentes de la velocidad  $\vec{u}$  en  $x$ ,  $y$  y  $z$ , respectivamente,  $\rho$  la densidad,  $t$  el tiempo y  $\nabla^T = \{\vec{i} \partial/\partial x \ \vec{j} \partial/\partial y \ \vec{k} \partial/\partial z\}$ . La ecuación (2.1) se cumple para cualquier fluido que satisfice la hipótesis del continuo.

Para la ecuación de equilibrio dinámico, en un fluido Newtoniano se tiene [65],

$$\begin{aligned} \rho a_x = \rho B_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left( 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} + \left( \zeta - \frac{2}{3}\mu \right) \nabla^T \vec{u} \right) \\ + \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right) \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned} \rho a_y = \rho B_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \left( 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} + \left( \zeta - \frac{2}{3}\mu \right) \nabla^T \vec{u} \right) \\ + \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \mu \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right) \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned} \rho a_z = \rho B_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z} \left( 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} + \left( \zeta - \frac{2}{3}\mu \right) \nabla^T \vec{u} \right) \\ + \frac{\partial}{\partial x} \left( \mu \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \right) \end{aligned} \quad (2.5)$$

donde  $\rho B_x$ ,  $\rho B_y$  y  $\rho B_z$  son fuerzas volumétricas,  $\mu$  corresponde a la viscosidad dinámica y  $\zeta$  es el segundo coeficiente de viscosidad, de valor cero para gases monoatómicos. Las aceleraciones en los ejes  $x$ ,  $y$  y  $z$  son, respectivamente  $a_x = Du/Dt$ ,  $a_y = Dv/Dt$  y  $a_z = Dw/Dt$ , siendo  $D/Dt$  la derivada total o material, definida como

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z} \quad (2.6)$$

En el caso de flujos no isotermos en los que la viscosidad depende de la temperatura, las ecuaciones de continuidad y equilibrio dinámico están acopladas con la ecuación de la energía, y todas las ecuaciones deben ser resueltas simultáneamente. De forma general, la ecuación de la energía puede escribirse como

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left( \kappa \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \kappa \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \kappa \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \frac{\partial Q}{\partial t} + \Phi_d - \nabla^T \vec{q}_r \\ = \frac{\partial}{\partial x} (pu) + \frac{\partial}{\partial y} (pv) + \frac{\partial}{\partial z} (pw) + \frac{\rho}{2} \frac{D}{Dt} (u^2 + v^2 + w^2) + \rho \frac{DE}{Dt} \end{aligned} \quad (2.7)$$

y expresa el equilibrio existente entre energía entrante, energía saliente y energía acumulada. En la ecuación (2.7)  $\kappa$  representa la conductividad térmica,  $T$  la temperatura,  $Q$  el calor generado en el fluido por unidad de volumen,  $E$  la energía interna,  $\vec{q}_r$  el vector flujo de radiación de calor y  $\Phi_d$  la función de disipación, dada por

$$\begin{aligned} \Phi_d = \lambda \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 + 2\mu \left( \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right) \\ + \mu \left( \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right) \end{aligned} \quad (2.8)$$

donde  $\lambda = \zeta - 2/3\mu$ . Como puede verse,  $\Phi_d$  vale cero para fluidos no viscosos.

Para especificar por completo el problema de flujo, es necesario incluir tres ecuaciones adicionales. Éstas son la ecuación de estado, la de energía interna y la de viscosidad, que pueden ser escritas de forma general como

$$\rho = \rho(p, T) \quad (2.9)$$

$$E = E(p, T) \quad (2.10)$$

$$\mu = \mu(p, T) \quad (2.11)$$

En la obtención de la solución de un problema general de flujo se plantea la búsqueda de los campos de velocidades  $u$ ,  $v$  y  $w$ , de presión  $p$ , de temperatura  $T$ , de densidad  $\rho$ , de energía interna  $E$  y de viscosidad  $\mu$  partiendo de un dominio dado, de las propiedades del fluido, de las ecuaciones (2.1), (2.3)-(2.5) y (2.7)-(2.11), y de un conjunto adecuado de condiciones de contorno y condiciones iniciales. Por tanto, la solución requiere resolver ocho ecuaciones con ocho incógnitas, situación compleja

cuya dificultad aumenta debido a que las fuerzas actuantes o la temperatura pueden deformar el contorno del dominio. La solución de este tipo es compleja y está fuera del alcance de la Tesis.

## II. Modelo acústico lineal

El modelo acústico lineal debe su nombre a las hipótesis que se realizan para la obtención de la ecuación de ondas, o en el caso de comportamiento armónico, ecuación de Helmholtz [94], que resulta de linealizar y combinar las ecuaciones de continuidad, equilibrio dinámico y constitutivas del fluido. Esta linealización toma como hipótesis de partida que el incremento de presión y densidad (y velocidad, en el caso de medio en movimiento) de las partículas es pequeño respecto a su valor medio o de equilibrio. Resulta evidente que esto limita el rango de aplicación de la ecuación de ondas, de modo que sólo es válida en el estudio de fenómenos acústicos de baja amplitud. En el caso de silenciadores y catalizadores es útil ya que los sistemas de excitación no suelen superar los 140 dB [40].

### 2.2. Ecuación de ondas

Dada la importancia que posee en la Tesis la ecuación de ondas linealizada, en este apartado se realiza su deducción. De esta forma, mediante su resolución, se tiene caracterizado el comportamiento de las variables acústicas fundamentales. Con el fin de simplificar la nomenclatura en este capítulo y en otros posteriores, se denotan aquí con subíndice  $T$  las variables totales, con subíndice  $0$  los valores medios y sin subíndice las variables de perturbación acústica utilizadas para llevar a cabo el proceso de linealización.

Para comenzar, se exponen las hipótesis de partida que se tienen en cuenta para la obtención de la ecuación de ondas [94]:

- Se supone que el fluido en el que se propaga la onda es ideal (no viscoso), y en concreto gas perfecto.
- El proceso de propagación de ondas se considera adiabático. Dado que hay un intercambio muy pequeño de energía térmica entre las partículas de un fluido su entropía permanece casi invariable. Por tanto, en una perturbación acústica las partículas no intercambian energía. En efecto, durante el proceso de compresión de un fluido se genera una elevación de su temperatura e inversamente, en la expansión, una disminución de la misma. En cierto instante de tiempo el avance de una onda longitudinal produciría la conducción de calor desde una condensación a un enrarecimiento próximo, situado a media longitud de onda  $\lambda/2$ . De la conductividad térmica del fluido dependerá la cantidad de calor que se transmite. En el intervalo de frecuencias audibles (20-20000 Hz) la mayoría de las perturbaciones acústicas tienen una longitud de onda  $\lambda$  demasiado grande y una conductividad térmica lo suficientemente pequeña para producir transmisión de calor de forma apreciable y por tanto la propagación de ondas se considera un

proceso adiabático. Esta hipótesis, junto con la idealización anterior, conducen al hecho de que el proceso es isoentrópico, verificándose la relación

$$p_T = Cte \rho_T^\gamma \quad (2.12)$$

siendo  $\gamma$  el cociente de calores específicos a presión y volumen constantes.

- Se asumen pequeñas variaciones de las funciones presión, densidad y velocidad de la partícula, que permiten linealizar el problema. A la presión, densidad y velocidad media se superpone una amplitud acústica pequeña, es decir

$$\rho_T = \rho_0 + \rho \quad (2.13)$$

$$p_T = p_0 + p \quad (2.14)$$

$$\vec{u}_T = \vec{u}_0 + \vec{u} \quad (2.15)$$

donde  $\rho$ ,  $p$  y  $\vec{u}$  se consideran pequeñas frente al valor medio.

De forma general el fluido tiene una velocidad media no nula dando lugar a la conocida ecuación de ondas convectiva. Para el caso de medio en reposo, las partículas sólo tienen un movimiento vibratorio alrededor de su posición de equilibrio que provoca la propagación de la perturbación acústica sin un movimiento neto del fluido.

### 2.2.1. Medio móvil

La hipótesis de fluido ideal implica que no se consideran los efectos de la viscosidad, y en virtud de ello, las ecuaciones de Navier-Stokes (2.3)-(2.5) se expresan como

$$\rho_T \frac{Du_T}{Dt} = \rho_T B_x - \frac{\partial p_T}{\partial x} \quad (2.16)$$

$$\rho_T \frac{Dv_T}{Dt} = \rho_T B_y - \frac{\partial p_T}{\partial y} \quad (2.17)$$

$$\rho_T \frac{Dw_T}{Dt} = \rho_T B_z - \frac{\partial p_T}{\partial z} \quad (2.18)$$

conocidas como ecuaciones de Euler [105]. Escritas en forma vectorial resulta

$$\rho_T \frac{D\vec{u}_T}{Dt} = \rho_T \vec{B} - \nabla p_T \quad (2.19)$$

En fluidos con elevados coeficientes de conductividad térmica, la temperatura del fluido permanecerá casi invariable al paso de una onda acústica. Teniendo en cuenta que el coeficiente de conductividad isotérmico  $\kappa_T$  es

$$\kappa_T = \frac{1}{\rho_T} \left( \frac{\partial \rho_T}{\partial p_T} \right)_T \quad (2.20)$$

para gases con entropía constante se cumple

$$\left(\frac{\partial \rho_T}{\partial p_T}\right)_s = \rho \kappa_s \quad (2.21)$$

La velocidad de una onda a través de un fluido está dada por

$$c_0 = \frac{1}{\sqrt{\kappa_s \rho_T}} \quad (2.22)$$

A partir de ciertas consideraciones termodinámicas [31], puede deducirse que

$$\frac{D p_T}{D t} = c_0^2 \frac{D \rho_T}{D t} \quad (2.23)$$

donde  $c_0$  es la velocidad de propagación del sonido en aire y viene dada por

$$c_0^2 = \left(\frac{\partial p_T}{\partial \rho_T}\right)_s \quad (2.24)$$

siendo  $s$  la entropía y realizando la derivada para entropía constante. Para un gas perfecto la ecuación (2.24) queda, teniendo en cuenta la expresión dada en (2.12), como

$$c_0^2 = \left(\frac{\partial p_T}{\partial \rho_T}\right)_s = \frac{\gamma(p_0 + p)}{\rho_0 + \rho} \approx \frac{\gamma p_0}{\rho_0} \quad (2.25)$$

En base a la definición de derivada total dada por la ecuación (2.6), la ecuación de continuidad (2.1) puede escribirse en forma alternativa como

$$\frac{D \rho_T}{D t} + \rho_T \nabla^T \vec{u}_T = 0 \quad (2.26)$$

Combinando las ecuaciones (2.23) y (2.26), resulta

$$\frac{D p_T}{D t} + \rho_T c_0^2 \nabla^T \vec{u}_T = 0 \quad (2.27)$$

La ecuación de Euler (2.19), despreciando términos gravitatorios, queda como

$$\rho_T \frac{D \vec{u}_T}{D t} = -\nabla p_T \quad (2.28)$$

Derivando respecto al tiempo la expresión (2.27), se obtiene

$$\frac{D^2 p_T}{D t^2} + \frac{D}{D t} (\rho_T c_0^2 \nabla^T \vec{u}_T) = 0 \quad (2.29)$$

Las ecuaciones lineales que gobiernan las perturbaciones acústicas se determinan a partir de los términos de primer orden en las expresiones de las ecuaciones no lineales de partida. Los términos de orden cero se cancelan dado que las variables ambientales del medio corresponden por sí mismas a un estado válido de éste. Por ejemplo, dado que las ecuaciones de orden cero se deben satisfacer en ausencia de perturbación, para la ecuación de Euler (2.28) resulta



$$\begin{aligned}
\rho_0 \left( u_0 \frac{\partial u_0}{\partial x} + v_0 \frac{\partial u_0}{\partial y} + w_0 \frac{\partial u_0}{\partial z} \right) + \frac{\partial p_0}{\partial x} &= 0 \\
\rho_0 \left( u_0 \frac{\partial v_0}{\partial x} + v_0 \frac{\partial v_0}{\partial y} + w_0 \frac{\partial v_0}{\partial z} \right) + \frac{\partial p_0}{\partial y} &= 0 \\
\rho_0 \left( u_0 \frac{\partial w_0}{\partial x} + v_0 \frac{\partial w_0}{\partial y} + w_0 \frac{\partial w_0}{\partial z} \right) + \frac{\partial p_0}{\partial z} &= 0
\end{aligned} \tag{2.30}$$

cuya integración proporciona la ecuación de Bernoulli para flujo estacionario [105].

En aquellas situaciones en que  $\rho_0$  y  $c_0$  se suponen constantes, y considerando que el campo de flujo es estacionario (y de forma general función de las coordenadas  $x$ ,  $y$  y  $z$ ), puede combinarse la ecuación (2.29) con la ecuación (2.28), resultando la ecuación de ondas convectiva

$$\begin{aligned}
\nabla^2 p - \frac{1}{c_0^2} \frac{D^2 p}{Dt^2} + 2\rho_0 \left( \frac{\partial u_0}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial z} \right. \\
\left. + \frac{\partial u_0}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial u_0}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial z} \right) = 0
\end{aligned} \tag{2.31}$$

en la que aparecen como variables la velocidad acústica  $\vec{u}$  y la presión acústica  $p$  (supuesto conocido el campo de flujo medio), y donde  $\nabla^2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2$  es el operador laplaciano. En forma más compacta queda

$$\nabla^2 p - \frac{1}{c_0^2} \frac{D^2 p}{Dt^2} + 2\rho_0 \sum_{ij} \frac{\partial u_{0j}}{\partial x_i} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = 0 \tag{2.32}$$

con  $i, j = 1, 2, 3$ , y siendo  $u_{01} = u_0$ ,  $u_{02} = v_0$ ,  $u_{03} = w_0$ ,  $u_1 = u$ ,  $u_2 = v$  y  $u_3 = w$ . Para el caso de flujo medio uniforme, sin variación espacial, se recupera la ecuación convectiva clásica [94]

$$\nabla^2 p - \frac{1}{c_0^2} \frac{D^2 p}{Dt^2} = 0 \tag{2.33}$$

en la que la variable es la perturbación acústica de presión  $p$ , supuesto conocido el campo de velocidades de flujo medio. La derivada total en las ecuaciones (2.32) y (2.33) viene dada por

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u_0 \frac{\partial}{\partial x} + v_0 \frac{\partial}{\partial y} + w_0 \frac{\partial}{\partial z} \tag{2.34}$$

La ecuación (2.33) tiene una gran importancia por su consideración a lo largo de la Tesis.

Los inconvenientes derivados de la ecuación (2.32) para flujo medio no uniforme, debidos a la presencia de los términos de velocidad, pueden ser evitados mediante una

formulación en potencial de velocidad acústica [26, 103]. Con las hipótesis utilizadas anteriormente, se cumple que

$$\vec{u} = \nabla\phi \quad (2.35)$$

donde  $\phi$  es una función potencial. De esta manera, resulta la ecuación

$$\nabla^2\phi - \frac{1}{c_0^2} \frac{D^2\phi}{Dt^2} = 0 \quad (2.36)$$

en la que la única variable es el potencial de velocidad acústica  $\phi$ . La relación entre la presión acústica y el potencial viene dada por [94]

$$p = -\rho_0 \frac{D\phi}{Dt} \quad (2.37)$$

El campo de velocidades de flujo medio puede obtenerse a partir del potencial de velocidad de flujo medio  $\phi_0$ , que satisface la ecuación de Laplace

$$\nabla^2\phi_0 = 0 \quad (2.38)$$

mediante una expresión similar a la dada en la ecuación (2.35)

$$\vec{u}_0 = \nabla\phi_0 \quad (2.39)$$

pese a que esta aproximación puede diferir considerablemente del campo de flujo real [3].

### 2.2.2. Medio en reposo

En este caso, la velocidad del medio es nula y puede considerarse que  $\vec{u}_T = \vec{u}$ . Dado que en esta situación, según la expresión (2.30) se tiene que  $\nabla p_0 = 0$ , la linealización de la ecuación (2.27) proporciona

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \rho_0 c_0^2 \nabla^T \vec{u} = 0 \quad (2.40)$$

y para la ecuación de Euler (2.28) resulta

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = -\nabla p \quad (2.41)$$

Combinando las expresiones (2.40) y (2.41), tras eliminar  $\vec{u}$ , se obtiene la ecuación de ondas sin flujo

$$\nabla^2 p - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0 \quad (2.42)$$

en la que el campo acústico de interés es la perturbación acústica de presión  $p$ . A partir de la ecuación de ondas convectiva, considerando  $\vec{u}_0 = 0$  se llega a este mismo resultado. Admitiendo comportamiento armónico la presión se expresa como  $p =$

$Pe^{j\omega t}$ , y sustituyendo en la ecuación de ondas se obtiene la ecuación de Helmholtz [94]

$$\nabla^2 P + k_0^2 P = 0 \quad (2.43)$$

en la que  $k_0 = \omega/c_0$  es el número de onda,  $P$  la amplitud de presión acústica compleja (función de las coordenadas),  $\omega = 2\pi f$  la frecuencia angular y  $j$  la unidad imaginaria.

En ausencia de flujo medio, la formulación en potencial de velocidad acústica proporciona una expresión similar a la dada en (2.42)

$$\nabla^2 \phi - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0 \quad (2.44)$$

## 2.3. Acústica unidimensional de conductos

La primera y más sencilla obtención de la solución de la ecuación de ondas implica la suposición de propagación unidimensional, que da lugar a los modelos tradicionales de onda plana. Éstos se han utilizado con profusión en la literatura acústica [15, 36, 54, 98], de manera que en esta sección sólo se presenta la información necesaria para el modelado del comportamiento acústico de silenciadores y catalizadores. Fuentes de información relevante en este tema son los trabajos de Munjal [94] y Allard [4].

### 2.3.1. Medio en reposo

En primer lugar se considera el caso en el que el medio de propagación está en reposo, con el fin de facilitar el desarrollo. Los resultados presentados se amplían en la siguiente sección a la consideración de medio en movimiento. Partiendo de la ecuación (2.42), y asumiendo una solución de tipo armónico  $p = Pe^{j\omega t}$ , se llega a la ecuación de Helmholtz (2.43). Suponiendo un conducto de pared rígida con su eje paralelo a la dirección  $z$ , y asumiendo que la propagación sólo depende de esta coordenada, esta última ecuación se escribe como

$$\frac{\partial^2 P}{\partial z^2} + k_0^2 P = 0 \quad (2.45)$$

cuya solución es del tipo

$$P(z) = P^+ e^{-jk_0 z} + P^- e^{jk_0 z} \quad (2.46)$$

siendo  $P^+$  y  $P^-$  amplitudes complejas asociadas a la onda progresiva y regresiva, respectivamente. La propagación se describe por tanto en base a la suma de dos componentes: una que avanza en el sentido positivo de  $z$  y otra en sentido contrario. A partir de la ecuación de Euler (2.41) puede escribirse para la velocidad acústica

$$U = \frac{-1}{j\rho_0\omega} \frac{\partial P}{\partial z} \quad (2.47)$$

de manera que ésta tiene la forma

$$U(z) = \frac{1}{\rho_0 c_0} (P^+ e^{-jk_0 z} - P^- e^{jk_0 z}) = \frac{1}{Z_0} (P^+ e^{-jk_0 z} - P^- e^{jk_0 z}) \quad (2.48)$$

donde  $Z_0$  se conoce como impedancia característica del medio. En ocasiones es conveniente utilizar como segunda variable acústica el flujo másico  $V$  en lugar de la velocidad. Para un conducto de sección transversal  $S$ , la relación entre ambas variables viene dada por

$$V = \rho_0 S U \quad (2.49)$$

que por tanto puede escribirse como

$$V(z) = \frac{S}{c_0} (P^+ e^{-jk_0 z} - P^- e^{jk_0 z}) = \frac{1}{Y_0} (P^+ e^{-jk_0 z} - P^- e^{jk_0 z}) \quad (2.50)$$

siendo  $Y_0 = c_0/S$  la impedancia característica del conducto. Los coeficientes de propagación  $P^+$  y  $P^-$  se determinan a partir de las condiciones de contorno aplicadas en el conducto. Este aspecto se detallará en la sección 2.4.

La ecuación de Helmholtz unidimensional (2.45) se ha deducido asumiendo que el fluido es ideal. La consideración de modelos de onda plana permite la introducción de los efectos viscosos sin perder la sencillez de la solución asociada. De esta manera, en el caso de un medio de propagación con viscosidad, el número de onda se convierte en un número complejo, así como la impedancia característica del conducto. El número de onda  $k_0$  utilizado en las ecuaciones (2.46), (2.48) y (2.50) es ahora [36, 94]

$$\beta = (k_0 + \alpha_0) - j\alpha_0 = k - j\alpha_0 \quad (2.51)$$

donde  $\alpha_0$  es el coeficiente de atenuación viscotérmico, cuya definición depende de que se considere o no la conducción de calor en la pared del conducto. Para un conducto circular de radio  $R$  puede expresarse como [36]

$$\alpha_0 = \frac{1}{Rc_0} \sqrt{\frac{\mu\omega}{2\rho_0}} \left( 1 + \frac{\gamma - 1}{\sqrt{\gamma Pr}} \right) \quad (2.52)$$

siendo  $Pr$  el número de Prandtl que se define como  $\mu C_p / \kappa$ , donde  $\mu$  es la viscosidad dinámica,  $C_p$  el calor específico a presión constante y  $\kappa$  la conductividad térmica. Si no se considera la conducción térmica en las paredes del conducto de propagación, la ecuación anterior se reduce a

$$\alpha_0 = \frac{1}{Rc_0} \sqrt{\frac{\mu\omega}{2\rho_0}} \quad (2.53)$$

Finalmente, la presión y el flujo másico pueden escribirse como

$$P(z) = P^+ e^{-\alpha_0 z - jkz} + P^- e^{\alpha_0 z + jkz} \quad (2.54)$$

$$V(z) = \frac{1}{Y} (P^+ e^{-\alpha_0 z - jkz} - P^- e^{\alpha_0 z + jkz}) \quad (2.55)$$

donde [94]

$$Y = Y_0 \left( 1 - \frac{\alpha_0}{k_0} + j \frac{\alpha_0}{k_0} \right) \quad (2.56)$$

La relación  $\alpha_0/k_0$  es en general pequeña, particularmente a frecuencias altas, de manera que salvo en conductos de gran longitud, el efecto de la atenuación viscotérmica puede despreciarse.

### 2.3.2. Medio móvil

Considérese ahora que el medio en el que se propaga la onda acústica se encuentra en movimiento. Para el tratamiento unidimensional del problema, puede suponerse un conducto de pared rígida alineado con el eje  $z$  y la presencia de flujo medio uniforme en la misma dirección, definido por la velocidad  $U_{fm}$ . La velocidad relativa de propagación de la onda respecto al medio sigue siendo  $c_0$ , mientras que en un sistema de referencia en reposo, la onda progresiva avanza a velocidad  $U_{fm} + c_0$ , y para la regresiva se tiene  $U_{fm} - c_0$ . En este caso se dice que las ondas son arrastradas aguas abajo por el fluido en movimiento, lo que se conoce como efecto convectivo. La ecuación convectiva clásica (2.33) puede escribirse como

$$\frac{\partial^2 p}{\partial z^2} - \frac{1}{c_0^2} \frac{D^2 p}{Dt^2} = 0 \quad (2.57)$$

y la derivada total (2.34) es ahora

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + U_{fm} \frac{\partial}{\partial z} \quad (2.58)$$

de manera que combinando las expresiones previas, se obtiene

$$(1 - M^2) \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} - 2 \frac{M}{c_0} \frac{\partial^2 p}{\partial z \partial t} - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0 \quad (2.59)$$

donde  $M = U_{fm}/c_0$  es el número de Mach. La versión armónica de la ecuación (2.59) es [31]

$$(1 - M^2) \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} - 2jk_0 M \frac{\partial P}{\partial z} + k_0^2 P = 0 \quad (2.60)$$

La solución buscada de la ecuación (2.60) tiene la forma

$$P(z) = P^+ e^{-j \frac{k_0}{1+M} z} + P^- e^{j \frac{k_0}{1-M} z} \quad (2.61)$$

Utilizando ahora la ecuación de Euler (2.28), la velocidad acústica axial está relacionada con la presión por medio de

$$\rho_0 \left( j\omega U + U_{fm} \frac{\partial U}{\partial z} \right) = - \frac{\partial P}{\partial z} \quad (2.62)$$

de manera que ésta se puede expresar como

$$U(z) = \frac{1}{Z_0} \left( P^+ e^{-j \frac{k_0}{1+M} z} - P^- e^{j \frac{k_0}{1-M} z} \right) \quad (2.63)$$

y el flujo másico es

$$V(z) = \frac{1}{Y_0} \left( P^+ e^{-j \frac{k_0}{1+M} z} - P^- e^{j \frac{k_0}{1-M} z} \right) \quad (2.64)$$

Las impedancias características del medio y del conducto,  $Z_0$  e  $Y_0$ , se definen igual que para el caso de propagación de ondas en un medio en reposo.

De forma similar al estudio realizado para medio en reposo, pueden incluirse ahora los efectos viscotérmicos del fluido, con el fin de tener en cuenta tanto las pérdidas aeroacústicas adicionales debidas a la fricción turbulenta del fluido como los efectos convectivos del flujo medio. El número de onda viene dado en este caso por [94]

$$\beta^\pm \approx \mp \left( \frac{\alpha_0 + \xi M + jk}{1 \pm M} \right) \quad (2.65)$$

refiriéndose los símbolos  $+$  y  $-$  a las componentes progresivas y regresivas de la propagación, respectivamente. En esta expresión,  $\xi = F/(2d)$ , donde  $F$  es el factor de fricción de Froude y  $d$  el diámetro del conducto. Munjal [94] propone para sistemas de escape el valor dado por la fórmula de Lee

$$F = 0.0072 + \frac{0.612}{Re^{0.35}} \quad Re < 4 \cdot 10^5 \quad (2.66)$$

donde  $Re = U_{fm} d \rho_0 / \mu$  es el número de Reynolds.

La presión acústica puede escribirse como

$$P(z) = P^+ e^{-\frac{\alpha_0 + \xi M + jk}{1+M} z} + P^- e^{\frac{\alpha_0 + \xi M + jk}{1-M} z} \quad (2.67)$$

Puede observarse en esta solución que la atenuación aeroacústica total en un medio en movimiento es función del número de Mach, y además es suma de las contribuciones de los efectos viscotérmicos y la fricción del flujo turbulento. Asimismo, los factores  $1 \pm M$  que representan el efecto convectivo del flujo medio influyen tanto en el coeficiente de atenuación como en el número de onda. Puede introducirse la notación

$$\alpha^\pm = \frac{\alpha_0 + \xi M}{1 \pm M} = \frac{\alpha(M)}{1 \pm M} \quad (2.68)$$

$$k^\pm = \frac{k}{1 \pm M} \quad (2.69)$$

con  $k = k_0 + \alpha_0$ . El valor de  $\alpha(M)$ , igual para las perturbaciones en ambos sentidos del flujo, puede ser considerado como el coeficiente real de la atenuación aeroacústica para un medio en movimiento.

Con la notación anterior, el flujo másico se expresa como

$$V(z) = \frac{1}{Y} \left( P^+ e^{-\alpha^+ z - jk^+ z} - P^- e^{\alpha^- z + jk^- z} \right) \quad (2.70)$$

donde la impedancia característica del conducto es [94]

$$Y = Y_0 \left( 1 - \frac{\alpha_0 + \xi M}{k_0} + j \frac{\alpha_0 + \xi M}{k_0} \right) \quad (2.71)$$

Respecto al desarrollo previo, es importante resaltar que en su deducción hay implícitas muchas simplificaciones con el propósito de evaluar el coeficiente de atenuación aeroacústico. Las ecuaciones (2.67) y (2.71) deben ser tomadas por tanto como una aproximación de la propagación de ondas en un medio viscoso en movimiento. Sin embargo, estas ecuaciones son muy útiles en ingeniería debido a su similitud con las ecuaciones correspondientes a los casos de flujo viscoso en reposo y flujo no viscoso en movimiento, desarrolladas previamente.

## 2.4. Modelos de onda plana. Representación matricial

Una vez obtenida la solución de la ecuación de ondas, se procede, en virtud de la teoría unidimensional, al desarrollo de métodos matriciales que permitan obtener el comportamiento acústico de los elementos que forman parte de la línea de escape. La respuesta acústica global de un sistema de escape depende de las condiciones de funcionamiento, de manera que para su evaluación debe incluirse la fuente de generación de ruido, la influencia de las condiciones externas y los elementos que se dispongan en el sistema de evacuación de gases de escape. Por tanto, con el fin de obtener una caracterización que sólo dependa del comportamiento del elemento bajo estudio, es decir, que proporcione una cuantificación de sus características intrínsecas, se recurre a la utilización de métodos matriciales que permiten obtener la definición de cada elemento por separado, en base a lo que se denomina matriz de cuatro polos [40, 94]. Así, un sistema acústico complejo, puede descomponerse en diversos subcomponentes, cada uno de los cuales tiene asociada su correspondiente matriz de comportamiento. La respuesta global del sistema se obtiene en base a la combinación de todas las matrices involucradas. Esta filosofía es aplicable tanto a los silenciadores como a los catalizadores, que pueden ser modelados como una serie de discontinuidades geométricas conectadas por conductos. Se supone que, aunque el campo acústico sea multidimensional en el interior de los distintos subcomponentes, en la zona de unión entre éstos la onda es plana.

### 2.4.1. Generalidades

La figura 2.1 muestra un esquema simplificado de un sistema acústico, en el que se muestra la fuente de ruido (el motor), un silenciador, un catalizador y los elementos conectados aguas abajo (terminación).

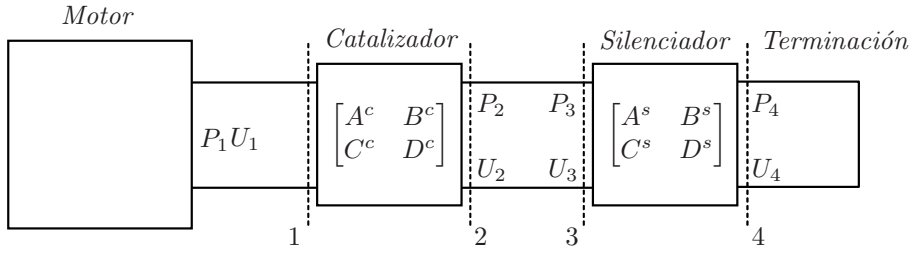


FIGURA 2.1: Esquema de un sistema de escape.

La definición matricial de un dispositivo cualquiera, como por ejemplo el catalizador, implica la elección de las variables de interés en su entrada (plano 1) y en su salida (plano 2). Una formulación muy utilizada en la práctica, consiste en considerar las variables presión y velocidad en los planos 1 y 2, es decir

$$\begin{Bmatrix} P_1 \\ U_1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A^c & B^c \\ C^c & D^c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_2 \\ U_2 \end{Bmatrix} = [T] \begin{Bmatrix} P_2 \\ U_2 \end{Bmatrix} \quad (2.72)$$

que constituye la base del formalismo de las matrices de transferencia: la perturbación acústica en un punto de un conducto, definida por el vector de estado  $\{P_1 \ U_1\}^T$ , está relacionada con la perturbación en otro punto, aguas abajo del primero, definida por el vector de estado  $\{P_2 \ U_2\}^T$ , mediante una matriz  $[T]$  denominada matriz de transferencia del dispositivo comprendido entre los planos 1 y 2. En general se admite que para un sistema cualquiera, siempre que en los planos 1 y 2 la onda sea plana, puede encontrarse una matriz de transferencia como la definida en la ecuación (2.72). Una propiedad inmediata que se explotará en adelante consiste en que es posible obtener la matriz de transferencia de un sistema completo a partir de las matrices de cada subsistema, sin más que llevar a cabo la multiplicación ordenada de éstas, ya que relacionan dos vectores de estado asociados a puntos concretos. Esta propiedad es fundamental, y en ella se basa la versatilidad del método en la representación de sistemas complejos.

La obtención de los cuatro polos de la matriz de transferencia se lleva a cabo mediante el cálculo del sistema acústico estudiado con condiciones de contorno adecuadas. Dichas condiciones provienen del significado físico de cada uno de los polos de la matriz, que es formalmente simple como se deduce de las expresiones presentadas a continuación, obtenidas a partir de la ecuación (2.72)

$$A^c = \left. \frac{P_1}{P_2} \right|_{U_2=0} \quad (2.73)$$

$$B^c = \left. \frac{P_1}{U_2} \right|_{P_2=0} \quad (2.74)$$

$$C^c = \left. \frac{U_1}{P_2} \right|_{U_2=0} \quad (2.75)$$



$$D^c = \frac{U_1}{U_2} \Big|_{P_2=0} \quad (2.76)$$

La condición  $P_2 = 0$  equivale a considerar que en el plano 2 hay un extremo abierto<sup>1</sup> y la condición  $U_2 = 0$  equivale a un extremo cerrado ideal. Ambas condiciones pueden ser utilizadas sin dificultad en el cálculo de un problema acústico, sin importar el nivel de complejidad del mismo. Además indican la posibilidad de estimar experimentalmente los valores de los cuatro polos.

A continuación se procede a evaluar las matrices de transferencia de diversos elementos relevantes que comúnmente forman parte de silenciadores y catalizadores.

### 2.4.2. Matriz de transferencia de un conducto

Considérese un conducto de longitud  $L$  y sección transversal uniforme  $S$  como el mostrado en la figura 2.2. Se pretende obtener la matriz de transferencia que relaciona las variables acústicas en la entrada y la salida del conducto. La presión y la velocidad acústica vienen dadas por las expresiones (2.46) y (2.48),

$$P(z) = P^+ e^{-jk_0 z} + P^- e^{jk_0 z}$$

$$U(z) = \frac{1}{Z_0} (P^+ e^{-jk_0 z} - P^- e^{jk_0 z})$$

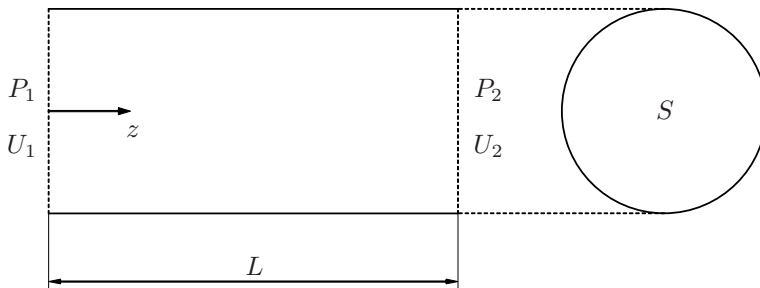


FIGURA 2.2: Conducto de sección uniforme.

En base a las ecuaciones (2.73)-(2.76), deben realizarse dos análisis con las condiciones de contorno asociadas. Puede comenzarse con  $U_2 = 0$ , que combinada con una excitación arbitraria  $P_e$  (por conveniencia de valor unidad), da lugar a

$$P(z=0) = P_1 = P_e = P^+ + P^- = 1 \quad (2.77)$$

<sup>1</sup>Esta equivalencia es aproximada, dado que un extremo abierto tiene asociada una impedancia de radiación impuesta por la atmósfera, cuyo valor depende entre otras cosas de las dimensiones del conducto, de la frecuencia y de la velocidad de flujo medio [94].

$$U(z = L) = U_2 = \frac{1}{Z_0} (P^+ e^{-jk_0 L} - P^- e^{jk_0 L}) = 0 \quad (2.78)$$

cuya solución es

$$P^+ = \frac{1}{2} \frac{\cos(k_0 L) + j \operatorname{sen}(k_0 L)}{\cos(k_0 L)} \quad (2.79)$$

$$P^- = \frac{1}{2} \frac{\cos(k_0 L) - j \operatorname{sen}(k_0 L)}{\cos(k_0 L)} \quad (2.80)$$

que define por completo la presión  $P(z)$  y la velocidad  $U(z)$  en el conducto. Los términos  $A$  y  $C$  de la matriz de transferencia son por tanto

$$A = \left. \frac{P_1}{P_2} \right|_{U_2=0} = \cos(k_0 L) \quad (2.81)$$

$$C = \left. \frac{U_1}{P_2} \right|_{U_2=0} = \frac{j}{Z_0} \operatorname{sen}(k_0 L) \quad (2.82)$$

El cálculo de  $B$  y  $D$  implica la consideración de  $P_2 = 0$ , lo cual lleva a

$$P(z = 0) = P_1 = P_e = P^+ + P^- = 1 \quad (2.83)$$

$$P(z = L) = P_2 = P^+ e^{-jk_0 L} + P^- e^{jk_0 L} = 0 \quad (2.84)$$

de manera que

$$P^+ = \frac{-j \cos(k_0 L) + j \operatorname{sen}(k_0 L)}{2 \operatorname{sen}(k_0 L)} \quad (2.85)$$

$$P^- = \frac{1 \operatorname{sen}(k_0 L) + j \cos(k_0 L)}{2 \operatorname{sen}(k_0 L)} \quad (2.86)$$

y por tanto

$$B = \left. \frac{P_1}{U_2} \right|_{P_2=0} = j Z_0 \operatorname{sen}(k_0 L) \quad (2.87)$$

$$D = \left. \frac{U_1}{U_2} \right|_{P_2=0} = \cos(k_0 L) \quad (2.88)$$

Para un conducto se tiene por tanto

$$\begin{Bmatrix} P_1 \\ U_1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(k_0 L) & j Z_0 \operatorname{sen}(k_0 L) \\ \frac{j}{Z_0} \operatorname{sen}(k_0 L) & \cos(k_0 L) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_2 \\ U_2 \end{Bmatrix} \quad (2.89)$$

Un desarrollo similar utilizando como variables la presión y el flujo másico da lugar a

$$\begin{Bmatrix} P_1 \\ V_1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(k_0 L) & jY_0 \operatorname{sen}(k_0 L) \\ \frac{j}{Y_0} \operatorname{sen}(k_0 L) & \cos(k_0 L) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_2 \\ V_2 \end{Bmatrix} \quad (2.90)$$

Si hay flujo medio presente puede aplicarse el mismo procedimiento partiendo de las ecuaciones (2.61) y (2.63) para la presión y la velocidad, lo cual que permite obtener tras ciertas manipulaciones [94]

$$\begin{Bmatrix} P_1 \\ U_1 \end{Bmatrix} = e^{-jM \frac{k_0}{1-M^2} L} \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{k_0}{1-M^2} L\right) & jZ_0 \operatorname{sen}\left(\frac{k_0}{1-M^2} L\right) \\ \frac{j}{Z_0} \operatorname{sen}\left(\frac{k_0}{1-M^2} L\right) & \cos\left(\frac{k_0}{1-M^2} L\right) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_2 \\ U_2 \end{Bmatrix} \quad (2.91)$$

Con el fin de mostrar las características de los cuatro polos de un conducto, la figura 2.3 muestra sus valores en función de la frecuencia para una longitud  $L = 0.4$  m y las velocidades de flujo medio dadas por  $M = 0$ ,  $M = 0.1$  y  $M = 0.2$ .

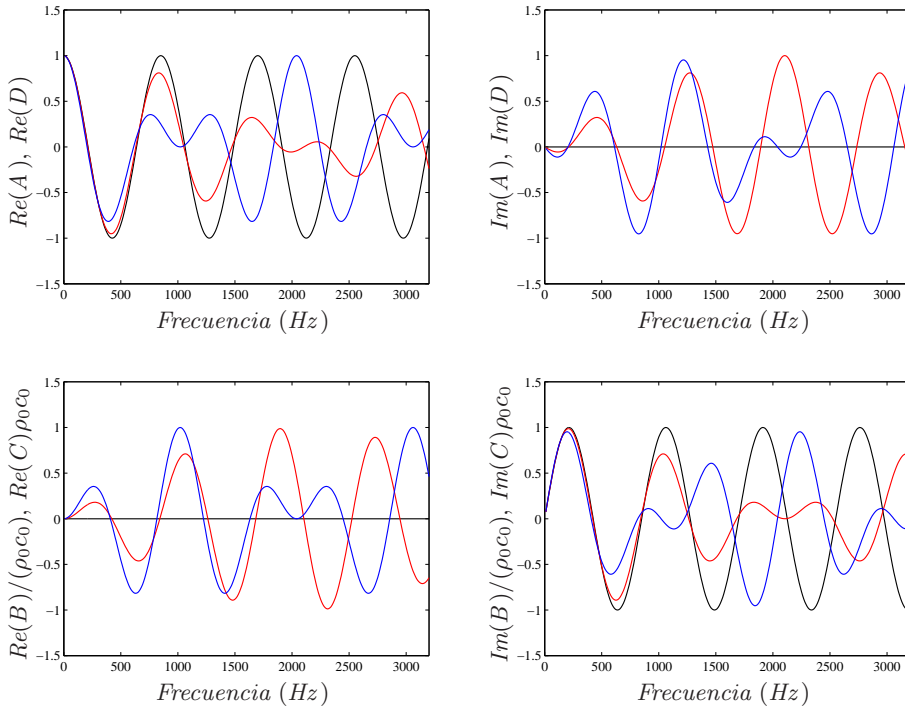


FIGURA 2.3: Partes reales e imaginarias de los cuatro polos de un conducto de longitud  $L = 0.4$  m: —,  $M = 0$ ; —,  $M = 0.1$ ; —,  $M = 0.2$ .

Debe notarse que en un conducto  $A$  y  $D$  coinciden, y lo mismo ocurre con  $B/(\rho_0 c_0)$  y  $\rho_0 c_0 C$ . En ausencia de flujo, la parte imaginaria de  $A$  y  $D$  es nula, y lo mismo sucede con la parte real de  $B$  y  $C$ . La presencia de flujo medio origina desfases en las ondas que hacen que las partes mencionadas sean ahora distintas de cero. Además, el flujo modifica las partes inicialmente no nulas, efecto que es más pronunciado a medida que aumenta la frecuencia.

### 2.4.3. Matriz de transferencia de un conducto cónico

Los conductos cónicos son de gran interés por su utilización práctica en elementos de transición geométrica, como en el caso de los conductos de entrada y salida de los catalizadores. La figura 2.4 muestra un conducto cónico divergente de longitud  $L$ , radio menor  $R_1$ , radio mayor  $R_2$ , semiángulo de apertura  $\theta_0$  y sección transversal variable  $S$ . Se pretende obtener la matriz de transferencia que relaciona las perturbaciones acústicas en la entrada y la salida del conducto. La presión y la velocidad acústica en un conducto cónico se pueden expresar como [104, 122, 142]

$$P(z) = S^{-1/2} (P^+ e^{-jk_0 z} + P^- e^{jk_0 z}) \quad (2.92)$$

$$U(z, r) = \frac{S^{-1/2}}{Z_0 k_0} \left( P^+ \left( \frac{1}{r} \frac{dr}{dz} + jk_0 \right) e^{-jk_0 z} + P^- \left( \frac{1}{r} \frac{dr}{dz} - jk_0 \right) e^{jk_0 z} \right) \quad (2.93)$$

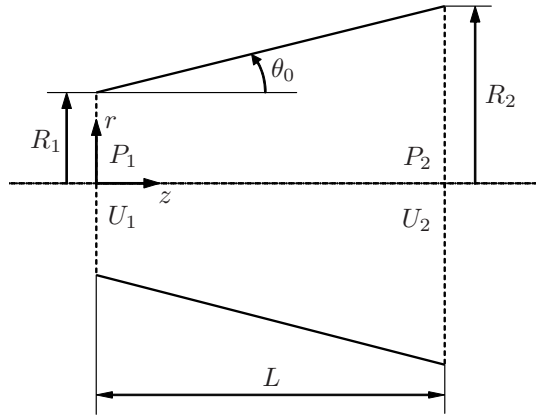


FIGURA 2.4: Conducto cónico de sección transversal variable.

donde  $z$  y  $r$  son las coordenadas axial y radial, respectivamente. La matriz de transferencia de un tubo cónico divergente de longitud  $L$  se puede escribir en función de  $\Re = R_1/\tan \theta_0$ , como

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} P_1 \\ U_1 \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_2 \\ U_2 \end{Bmatrix} \\ &= [T_{div}] \begin{Bmatrix} P_2 \\ U_2 \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (2.94)$$

donde

$$T_{11} = \left( \frac{R_2}{R_1} \right) \cos(k_0 L) - \left( \frac{1}{k_0 \Re} \right) \sin(k_0 L) \quad (2.95)$$

$$T_{12} = j \left( \frac{R_2}{R_1} \right) \rho_0 c_0 \sin(k_0 L) \quad (2.96)$$

$$T_{21} = \frac{j}{\rho_0 c_0} \left( \left( \frac{R_2}{R_1} + \frac{1}{k_0^2 \Re^2} \right) \sin(k_0 L) - \frac{L}{\Re} \left( \frac{L}{k_0 \Re} \right) \cos(k_0 L) \right) \quad (2.97)$$

$$T_{22} = \left( \frac{R_2}{R_1} \right) \left( \cos(k_0 L) + \left( \frac{L}{k_0 \Re} \right) \sin(k_0 L) \right) \quad (2.98)$$

Se puede observar que con  $R_2/R_1 \rightarrow 1$ ,  $\tan \theta \rightarrow 0$ , y  $\Re \rightarrow \infty$ , las ecuaciones que definen los cuatro polos de la matriz de transferencia de un conducto cónico (2.95-2.98), son las que corresponden a las de un conducto de sección transversal uniforme (2.89).

Cabe indicar que la matriz de transferencia de un conducto cónico convergente, se obtiene sin más que calcular la matriz inversa de  $[T_{div}]$  cambiando los signos de los términos no diagonales para tener en cuenta el sentido de velocidad [14]

$$[T_{conv}] = \frac{1}{|T_{11}T_{22} - T_{12}T_{21}|} \begin{bmatrix} T_{22} & T_{12} \\ T_{21} & T_{11} \end{bmatrix} \quad (2.99)$$

#### 2.4.4. Matriz de transferencia en expansiones y contracciones

Este caso es especialmente interesante porque constituye el elemento fundamental del mecanismo de atenuación en silenciadores reactivos [13, 94]. La figura 2.5 muestra la unión formada por dos conductos de diferente sección transversal, formando una expansión ( $S_1 < S_2$ ) y una contracción ( $S_1 > S_2$ ).

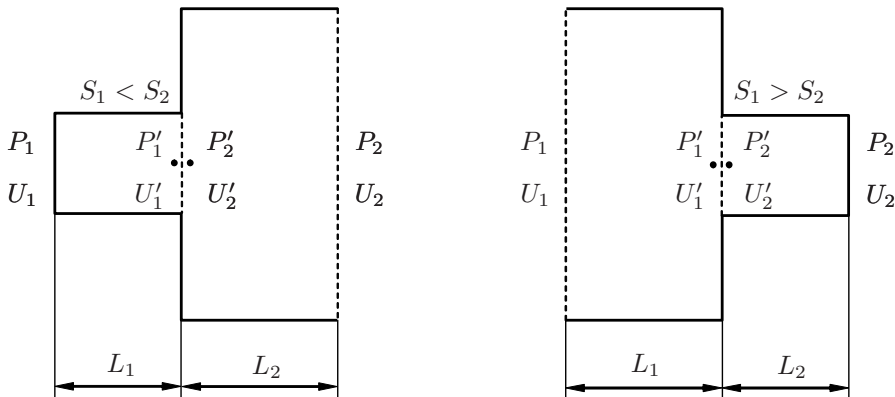


FIGURA 2.5: Cambios de sección entre conductos.

En ausencia de flujo, la relación entre las variables acústicas a ambos lados de la discontinuidad geométrica se escribe

$$P'_1 = P'_2 \quad (2.100)$$

$$\rho_0 S_1 U'_1 = \rho_0 S_2 U'_2 \quad (2.101)$$

es decir, la presión y el flujo másico no cambian en la discontinuidad geométrica. Expresando estas relaciones matricialmente se tiene

$$\begin{Bmatrix} P'_1 \\ U'_1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & S_2/S_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P'_2 \\ U'_2 \end{Bmatrix} \quad (2.102)$$

$$\begin{Bmatrix} P'_1 \\ V'_1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P'_2 \\ V'_2 \end{Bmatrix} \quad (2.103)$$

Esta representación tan sencilla del cambio de sección es muy útil a la hora de modelar matricialmente un silenciador, dado que éste suele estar formado por diversas discontinuidades geométricas. Debe indicarse, no obstante, que la representación dada en las expresiones (2.102) y (2.103) es aproximada, ya que en todo cambio de sección el campo acústico de presiones y velocidades ha de ser necesariamente continuo, lo cual lleva a la generación de fenómenos multidimensionales [56, 75, 114]. Dichos fenómenos cobran especial importancia a medida que aumenta la frecuencia, de manera que las matrices previas son válidas únicamente en el rango de baja frecuencia.

La consideración de los efectos tridimensionales es uno de los elementos fundamentales del trabajo realizado en la Tesis, y se analiza en profundidad en los capítulos 3, 4, 5 y 6. Sin embargo, los modelos de onda plana permiten la consideración aproximada, válida a baja frecuencia, de tales efectos, en base a lo que se conoce como *corrección de longitud* [75, 100, 114, 126]. Así, la expresión (2.103)

$$\begin{Bmatrix} P'_1 \\ V'_1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P'_2 \\ V'_2 \end{Bmatrix}$$

puede modificarse para incluir la corrección de longitud  $\delta$ , quedando como

$$\begin{Bmatrix} P'_1 \\ V'_1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & j\omega\delta \\ 0 & S_1 \\ & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P'_2 \\ V'_2 \end{Bmatrix} \quad (2.104)$$

Los valores de  $\delta$  dependen de la frecuencia y de las geometrías que forman parte de la discontinuidad [94, 100, 114].

Conocida la forma de la matriz asociada al cambio de sección, es posible obtener la relación entre las variables acústicas en el plano 1 en función del valor de dichas variables en el plano 2 (véase la figura 2.5), sin más que multiplicar ordenadamente las matrices correspondientes a cada elemento, es decir

$$\begin{Bmatrix} P_1 \\ U_1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(k_0 L_1) & jZ_0 \sin(k_0 L_1) \\ \frac{j}{Z_0} \sin(k_0 L_1) & \cos(k_0 L_1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{S_2}{S_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(k_0 L_2) & jZ_0 \sin(k_0 L_2) \\ \frac{j}{Z_0} \sin(k_0 L_2) & \cos(k_0 L_2) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_2 \\ U_2 \end{Bmatrix} \quad (2.105)$$

### 2.4.5. Matriz de transferencia de conductos extendidos

Un elemento acústico utilizado frecuentemente es lo que se conoce como conducto extendido [20, 119], que se muestra en la figura 2.6. La región 2, que no es más que un conducto con un extremo cerrado, actúa como un resonador a ciertas frecuencias que dependen de la longitud  $L_2$ . Cuando se produce una resonancia, gran parte de la energía acústica que entra al sistema se invierte en el movimiento de las partículas contenidas en el interior de la zona extendida. Con el fin de simplificar la obtención de la matriz de transferencia asociada a este sistema, se utiliza el flujo másico en lugar de la velocidad acústica. Supuesto que se satisface la condición de onda plana, la presión es la misma en todos los puntos de la zona de transición, de manera que puede escribirse

$$P'_1 = P_2 = P'_3 \quad (2.106)$$

La continuidad de flujo másico implica que

$$V'_1 = V_2 + V'_3 \quad (2.107)$$

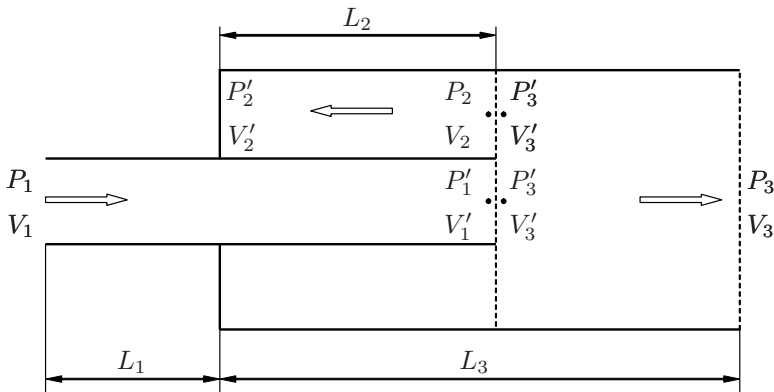


FIGURA 2.6: Configuración con conducto extendido.

El comportamiento de la región 2 puede representarse por medio de una impedancia equivalente en la zona de transición sin más que tener en cuenta que se trata de un conducto cerrado en un extremo, y por tanto la velocidad acústica es cero en éste. Se introduce la impedancia de dicha región como

$$Z_2 = \frac{P_2}{V_2} \quad (2.108)$$

Considerando ahora la matriz de transferencia de un conducto, definida mediante la ecuación (2.90), se tiene

$$\begin{Bmatrix} P_2 \\ V_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(k_0 L_2) & jY_2 \operatorname{sen}(k_0 L_2) \\ \frac{j}{Y_2} \operatorname{sen}(k_0 L_2) & \cos(k_0 L_2) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P'_2 \\ V'_2 \end{Bmatrix} \quad (2.109)$$

donde  $Y_2 = c_0/S_2 = c_0/(S_3 - S_1)$ . Dado que  $V'_2 = 0$ , resulta

$$Z_2 = \frac{P_2}{V_2} = \frac{\cos(k_0 L_2) P'_2}{\frac{j}{Y_2} \operatorname{sen}(k_0 L_2) P'_2} = -jY_2 \cot(k_0 L_2) \quad (2.110)$$

Conocida la impedancia de la región 2, puede obtenerse la matriz de transferencia del sistema completo, que resulta ser

$$\begin{Bmatrix} P_1 \\ V_1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(k_0 L_1) & jY_1 \operatorname{sen}(k_0 L_1) \\ \frac{j}{Y_1} \operatorname{sen}(k_0 L_1) & \cos(k_0 L_1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{Z_2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(k_0 L_3) & jY_3 \operatorname{sen}(k_0 L_3) \\ \frac{j}{Y_3} \operatorname{sen}(k_0 L_3) & \cos(k_0 L_3) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_3 \\ V_3 \end{Bmatrix} \quad (2.111)$$

siendo  $Y_1 = c_0/S_1$  e  $Y_3 = c_0/S_3$ .

La condición de resonancia del conducto extendido se produce para aquellas frecuencias que hacen que la impedancia sea nula, es decir,  $\cot(k_0 L_2) = 0$ , lo cual ocurre cuando

$$k_0 L_2 = \frac{(2n+1)\pi}{2} \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.112)$$

o de manera equivalente

$$L_2 = (2n+1) \frac{\lambda}{4} \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.113)$$

La resonancia tiene lugar cuando la frecuencia de excitación es tal que en la longitud del extendido cabe un cuarto de onda, tres cuartos, etc. Por ello esta disposición se conoce como resonador de cuarto de onda.

## 2.5. Placas y tubos perforados

Los elementos perforados forman parte de los silenciadores en gran número de ocasiones [88, 94, 132], y se presentan con disposiciones diversas, como pueden ser conductos completa o parcialmente perforados y placas.

La caracterización habitual de los elementos perforados se basa en la utilización de



una relación presión-velocidad denominada impedancia, que puede, en general, describirse en base al diámetro de los orificios  $d_h$ , el espesor  $t_p$  y la porosidad  $\sigma$ , que no es más que la relación entre el área perforada y el área total. Los fenómenos de atenuación acústica involucran efectos diversos asociados al cambio de sección por el que circula el fluido al pasar de un lado al otro de las perforaciones, que implica reflexiones de las ondas y también disipación de energía como consecuencia de la fricción. El campo acústico en las inmediaciones del elemento perforado puede ser relativamente complejo [90], sobre todo en presencia de flujo medio [111, 136], de manera que el tratamiento que se le da en la bibliografía es siempre simplificado, en base al concepto de impedancia que se presenta a continuación.

### 2.5.1. Impedancia acústica

La impedancia de un elemento perforado es la relación que existe entre la presión acústica a ambos lados de éste y la velocidad con que es atravesado,

$$Z_p = \frac{P_e - P_s}{\bar{U}} = R_0 + jX_0 \quad (2.114)$$

donde  $P_e$  es la presión acústica a la entrada de un orificio,  $P_s$  la presión acústica a la salida del mismo y  $\bar{U}$  es la velocidad acústica promediada para toda la superficie. La impedancia acústica es expresada en términos de resistencia  $R_0$  y reactancia  $X_0$ , parte real e imaginaria de la impedancia.

En régimen lineal, para aplicaciones donde los niveles de presión acústica son considerados bajos, la impedancia acústica se relaciona linealmente con la diferencia de presión entre ambos lados de la superficie perforada. Un aumento de la presión acústica implica un incremento de la amplitud de la velocidad y variación del desfase a través de los orificios resultando una aproximación al comportamiento no lineal. Medidas experimentales realizadas en orificios demuestran un comportamiento cuadrático [71]. En estos casos la impedancia acústica depende de la velocidad a través de los orificios [50, 71].

La revisión de la bibliografía existente al respecto demuestra que existe gran cantidad de modelos de impedancia disponibles, cuyos resultados presentan en ocasiones discrepancias importantes [88]. En esta sección se hace una exposición de los modelos comúnmente utilizados, que en general han sido validados experimentalmente. El primer caso, que es el más simple, corresponde a la situación de un elemento perforado en el seno de un medio de propagación en reposo. En las referencias [133, 135] puede encontrarse la expresión

$$Z_p = \rho_0 c_0 \frac{6 \cdot 10^{-3} + jk_0 (t_p + 0.75d_h)}{\sigma} \quad (2.115)$$

En régimen lineal la parte real o resistiva, asociada a las pérdidas, evidencia pocos cambios permaneciendo invariable. La parte imaginaria o reactiva, dependiente de la frecuencia y de las características geométricas de la superficie perforada, se determina por medio de la relación

$$X_0 = \rho_0 \omega \frac{(t_p + 0.75d_h)}{\sigma} \quad (2.116)$$

La porosidad tiene una considerable influencia sobre la impedancia acústica, dado que la expresión (2.115) indica que la impedancia evoluciona de forma inversamente a ésta. Para evitar la sobreestimación de la impedancia asociada a este modelo en referencias recientes [46, 49, 85] se utiliza un factor de corrección  $F(\sigma)$  que tiene en cuenta la interacción entre orificios. Dicha interacción se traduce en una reducción de la parte reactiva de la impedancia

$$Z_p = \rho_0 c_0 \frac{6 \cdot 10^{-3} + jk_0 (t_p + 0.75d_h F(\sigma))}{\sigma} \quad (2.117)$$

Se logran mejores resultados sustituyendo  $0.75d_h$  por  $0.85d_h F(\sigma)$  con lo cual la expresión (2.115) se escribe [46, 49, 85]

$$Z_p = \rho_0 c_0 \frac{6 \cdot 10^{-3} + jk_0 (t_p + 0.85d_h F(\sigma))}{\sigma} \quad (2.118)$$

La expresión anterior es la que se utiliza a lo largo de esta Tesis para caracterizar el elemento perforado en ausencia de flujo medio.

El factor de corrección  $F(\sigma)$  se calcula mediante fórmulas como la de Ingard [68]

$$F_I(\sigma) = 1 - 0.7\sqrt{\sigma} \quad (2.119)$$

o la de Fok [15]

$$F_F(\sigma) = 1 - 1.41\sqrt{\sigma} + 0.34(\sqrt{\sigma})^3 + 0.07(\sqrt{\sigma})^5 \quad (2.120)$$

En esta Tesis el factor de corrección  $F(\sigma)$  se calcula promediando los valores calculados en las expresiones (2.119) y (2.120) [15]

$$F(\sigma) = 0.5(F_I(\sigma) + F_F(\sigma)) \quad (2.121)$$

La figura 2.7 muestra la comparación entre los modelos anteriores considerando una placa perforada caracterizada por  $t_p = 0.001$  m,  $d_h = 0.0035$  m y  $\sigma = 15\%$ .

En régimen no lineal [71, 135] el incremento de la presión acústica a valores superiores a 120 dB (la amplitud de la presión en los motores de combustión interna puede superar los 140 dB [50]) involucra un aumento no lineal de la resistencia mientras que la reactancia tiende a disminuir, también de forma no lineal, pero en bastante menor grado comparado con la resistencia.

La consideración de flujo medio dificulta la obtención de la impedancia asociada a los elementos perforados. Por ello, en ocasiones, se recurre a la realización de medidas experimentales que permitan obtener modelos empíricos del comportamiento del campo acústico en las proximidades de los orificios. En las superficies perforadas expuestas a flujo medio tangente, definido por el número de Mach  $M$ , se generan turbulencias que

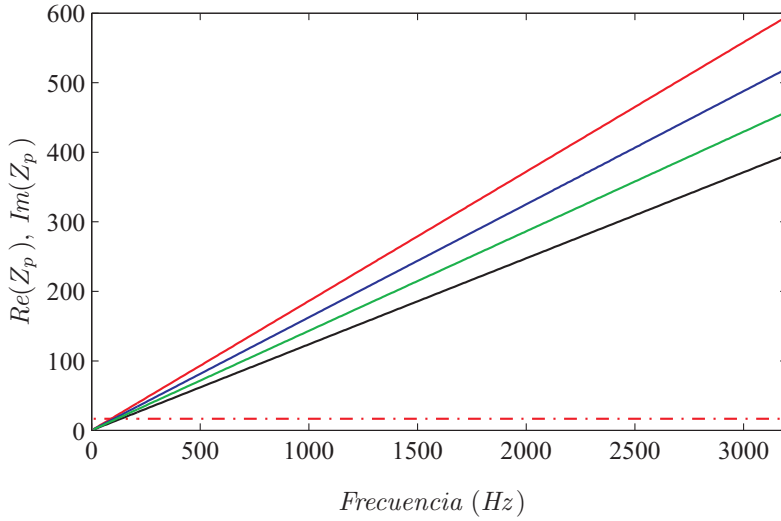


FIGURA 2.7: Comparación de modelos de impedancia de elementos perforados: - - -, parte real. Parte imaginaria: —, sin interacción de orificios; —, Ingard; —, Fok; —, promedio de Ingard y Fok.

modifican notablemente la impedancia local [88] alterando el patrón de distribución de la energía acústica a través de los orificios a causa de los efectos convectivos. La resistencia de los orificios tiende a aumentar a medida que aumenta el flujo medio, mientras que la reactancia tiende a disminuir ligeramente [88, 106].

Basándose en un modelo empírico, Garrison [59] obtuvo la siguiente expresión

$$Z_p = (1 + 1.9M) R_0 + j(1 - 1.65M) X_0 \quad (2.122)$$

Rao y Munjal [106] realizaron ensayos para evaluar los efectos del flujo medio en algunas tipologías de conductos perforados aplicando condiciones de velocidad de flujo tangente similares a las existentes en los silenciadores de automóviles. La expresión empírica que determina la impedancia acústica bajo estas condiciones es

$$Z_p = \rho_0 c_0 \frac{7.337 \cdot 10^{-3} (1 + 72.23M) + j2.2245 \cdot 10^{-5} (1 + 51t_p) (1 + 204d_h) f}{\sigma} \quad (2.123)$$

en la que el flujo medio afecta la parte resistiva del modelo. Los rangos definidos para la validez de esta expresión son  $0.05 \leq M \leq 0.2$  para la velocidad del flujo tangente,  $3\% \leq \sigma \leq 10\%$  para la porosidad,  $1 \leq t_p \leq 3$  mm para el espesor de la superficie perforada y  $1.75 \leq d_h \leq 7$  mm para el diámetro de los orificios.

Sullivan [133], basándose en el modelo empírico de Garrison, modificó su modelo de impedancia sin flujo (2.115) para incluir el efecto de la velocidad normal en la

componente resistiva. Este efecto es similar al de un conducto perforado cerrado en un extremo donde el flujo es forzado a salir a través de los orificios y la velocidad presenta dos componentes: una componente tangente a la superficie, de valor máximo a la entrada y nula a la salida, y una componente normal o transversal  $\bar{U}_0$  considerada uniforme [40, 133]

$$Z_p = \rho_0 c_0 \frac{2.57 \frac{\bar{U}_0}{c_0} + j k_0 (t + 0.75 d_h)}{\sigma} \quad (2.124)$$

Una expresión empírica desarrollada por Bauer [12] relaciona adicionalmente los efectos viscosos del medio y del número de Mach  $M$  en la modificación de la parte resistiva de la impedancia acústica

$$Z_p = \rho_0 c_0 \frac{\frac{\sqrt{8\mu\rho_0\omega}}{\rho_0 c_0} \left(1 + \frac{t_p}{d_h}\right) + 0.3M + 1.15 \frac{\bar{U}_0}{c_0} + j k_0 (t_p + 0.25 d_h)}{\sigma} \quad (2.125)$$

Jayaraman y Yam [72] modifican el modelo de impedancia de Sullivan (2.115) al considerar el flujo medio tangente como parte influyente en la variación de la parte resistiva de la impedancia acústica

$$Z_p = \frac{\rho_0 c_0}{\sigma} \left( \frac{0.514 d M}{\sigma} + j 4.8 \cdot 10^{-5} f \right) \quad (2.126)$$

donde  $d$  es el diámetro del conducto y  $l$  su longitud. De esta expresión cabe destacar la magnitud  $M/l$ , el gradiente axial del número de Mach, que disminuye desde un valor máximo a la entrada del conducto perforado a un valor mínimo a la salida [63].

Otro grupo de expresiones que tienen en cuenta la variación de la parte resistiva de la impedancia acústica en función de la resistencia al flujo  $R_f$  y del factor de corrección de longitud  $\delta/\delta_0$  son las propuestas por Kooi y Sarin [87], Cummings [33] y Kirby y Cummings [84]. Kooi y Sarin plantean

$$\frac{R_f c_0}{f d_h} = \frac{1}{4} \left( 5 - \frac{t_p}{d_h} \right) \left( 9.9 \frac{u^*}{f d_h} - 3.2 \right) \quad (2.127)$$

donde  $R_f$  corresponde a la resistencia promedio al flujo en el área del orificio y  $u^*$  es la velocidad de fricción. El factor de corrección de longitud lo obtienen por medio de

$$\frac{\delta}{\delta_0} = \begin{cases} 0.92 - 0.75 \frac{u^*}{f t_p} + 0.11 \left( \frac{u^*}{f t_p} \right)^2, & 0.2 \leq \frac{u^*}{f t_p} \leq 3.5 \\ -0.04, & \frac{u^*}{f t_p} > 3.5 \end{cases} \quad (2.128)$$

en la que  $\delta$  representa la corrección de longitud en presencia de flujo medio y  $\delta_0$  la corrección de longitud en ausencia de flujo medio. Cummings [33] expresa  $R_f$  como

$$\frac{R_f c_0}{f d_h} = \left( 12.52 \left( \frac{t_p}{d_h} \right)^{-0.32} - 2.44 \right) \frac{u^*}{f d_h} - 3.2 \quad (2.129)$$

y el factor de corrección de longitud como

$$\frac{\delta}{\delta_0} = \begin{cases} 1, & \frac{u^*}{f t_p} \leq 0.12 \frac{d_h}{t_p} \\ \left( 1 + 0.6 \frac{t_p}{d_h} \right) e^{\left( - \left( \frac{u^*}{f t_p} - 0.12 \frac{d_h}{t_p} \right) / \left( 0.25 + \frac{t_p}{d_h} \right) \right)} - 0.6 \frac{t_p}{d_h}, & \frac{u^*}{f t_p} > 0.12 \frac{d_h}{t_p} \end{cases} \quad (2.130)$$

Kirby y Cummings, al modificar la parte resistiva, obtienen

$$\frac{R_f c_0}{f d_h} = \left( 26.16 \left( \frac{t_p}{d_h} \right)^{-0.169} - 20 \right) \frac{u^*}{f d_h} - 4.055 \quad (2.131)$$

y transformando el factor de corrección de longitud se llega a

$$\frac{\delta}{\delta_0} = \begin{cases} 1, & \frac{u^*}{f t_p} \leq 0.18 \frac{d_h}{t_p} \\ \left( 1 + 0.6 \frac{t_p}{d_h} \right) e^{\left( - \left( \frac{u^*}{f t_p} - 0.18 \frac{d_h}{t_p} \right) / \left( 1.8 + \frac{t_p}{d_h} \right) \right)} - 0.6 \frac{t_p}{d_h}, & \frac{u^*}{f t_p} > 0.18 \frac{d_h}{t_p} \end{cases} \quad (2.132)$$

Para estos tres últimos casos la parte resistiva de la impedancia acústica adimensional  $R_0$  es la suma de la resistencia al flujo  $R_f$  y de las pérdidas viscosas  $R_\nu$  debidas al flujo turbulento. Por tanto

$$R_0 = R_f + R_\nu \quad (2.133)$$

donde

$$R_\nu = \frac{\sqrt{8\nu\omega}}{c_0} \frac{t_p}{d_h} \quad (2.134)$$

y  $\nu$  representa la viscosidad cinemática. La parte reactiva de la impedancia acústica adimensional  $X_0$  es dependiente del factor de corrección de longitud  $\delta/\delta_0$

$$X_0 = k_0 \left( t_p + \frac{\delta}{\delta_0} (0.85 d_h) \right) \quad (2.135)$$

Debido a la diferencia de parámetros tenidos en cuenta entre los dos grupos de impedancias, Lee e Ih [88] los integran en una sola expresión empírica cuya parte resistiva, normalizada, es

$$R_0 = \rho_0 c_0 \frac{a_0 (1 + a_1 |f - f_0|) (1 + a_2 M) (1 + a_3 d_h) (1 + a_4 t_p)}{\sigma} \quad (2.136)$$

donde  $a_0 = 3.94 \cdot 10^{-4}$ ,  $a_1 = 7.84 \cdot 10^{-3}$ ,  $a_2 = 14.9$ ,  $a_3 = 296$  y  $a_4 = -127$ . De esta parte resistiva, la frecuencia crítica  $f_0$  es función de la velocidad del flujo medio  $M$  y del diámetro del orificio  $d_h$  según la expresión

$$f_0 = \phi_1 \frac{1 + \phi_2 M}{1 + \phi_3 d_h} \quad (2.137)$$

en la que los coeficientes vienen dados por  $\phi_1 = 412$ ,  $\phi_2 = 104$  y  $\phi_3 = 274$ . Estos valores son obtenidos en base a un análisis de regresión no lineal de resultados de ensayos experimentales que consideran  $f_0$ ,  $M$  y  $d_h$ . La resistencia va disminuyendo con la frecuencia hasta un valor mínimo, que se alcanza en la frecuencia crítica, a partir de la cual comienza a crecer. La parte reactiva está influenciada principalmente por la velocidad de flujo medio y la frecuencia

$$X_0 = \rho_0 c_0 \frac{b_0 (1 + b_1 d_h) (1 + b_2 t_p) (1 + b_3 M) (1 + b_4 f)}{\sigma} \quad (2.138)$$

donde  $b_0 = -6 \cdot 10^{-3}$ ,  $b_1 = 194$ ,  $b_2 = 432$ ,  $b_3 = -1.72$  y  $b_4 = -6.62 \cdot 10^{-3}$ . Por lo general la parte reactiva aumenta cuando lo hace la frecuencia y disminuye cuando se incrementa la velocidad del flujo  $M$ . El rango de valores válidos para cada uno de estos parámetros es, para la frecuencia  $60 \leq f \leq 4000$  Hz, para la velocidad de flujo,  $0 \leq M \leq 0.2$ , para el diámetro de orificios,  $2 \leq d_h \leq 9$  mm, para el espesor del conducto,  $1 \leq t_p \leq 5$  mm y para la porosidad  $2.79\% \leq \sigma \leq 22.3\%$ .

## 2.6. Materiales absorbentes

Los materiales absorbentes son ampliamente utilizados en una gran variedad de aplicaciones para mejorar la atenuación sonora. La principal función de los materiales absorbentes es la reducción de las amplitudes de los campos acústicos asociados al fenómeno de la propagación de ondas, esto es, la disipación de parte de la energía acústica del sonido [17]. Los materiales comúnmente empleados son las fibras naturales, artificiales y espumas poliméricas. Los silenciadores que contienen material absorbente en su interior suelen denominarse disipativos.

En un silenciador, el material absorbente que envuelve uno o varios conductos perforados puede caracterizarse en muchas ocasiones como una estructura isótropa. En dicha estructura existen internamente cavidades o poros interconectados, distribuidos aleatoriamente, en los que el aire puede moverse [113]. El paso del aire a través de una estructura porosa, bajo condiciones de flujo medio, generalmente se define mediante una trayectoria tortuosa. Si el flujo no es turbulento el volumen de aire que atraviesa el material es directamente proporcional a la diferencia de presión que origina el flujo.

La atenuación acústica se produce en parte por la reflexión de la onda acústica, y por otra debido a las pérdidas viscosas en los intersticios. Dependiendo del método utilizado en la fabricación de los silenciadores disipativos la variación de la densidad del material absorbente puede generar heterogeneidad, anisotropía en las fibras y variación de sus propiedades acústicas [17].

La incorporación de materiales absorbentes en sistemas de escape de vehículos ha presentado tradicionalmente problemas de degradación de sus propiedades con el tiempo debido sobre todo a las altas temperaturas que deben soportar y a la contaminación con partículas procedentes de los gases de escape. También cabe considerar problemas de pérdida de material a causa del arrastre sufrido por el flujo de gas, por lo que no se habían utilizado masivamente en los silenciadores hasta hace relativamente poco tiempo. Sin embargo, las mejoras de las propiedades de los materiales y el interés creciente no sólo por reducir los niveles de ruido por debajo de los límites legales sino también por la calidad sonora ha fomentado la utilización de materiales absorbentes como parte de los silenciadores.

### 2.6.1. Introducción

Las propiedades más importantes de los materiales absorbentes pueden resumirse principalmente en la resistividad, densidad del material, porosidad, elasticidad y orientación de las fibras, entre otras. La resistividad es una de las magnitudes más significativas en la caracterización acústica de materiales absorbentes. Se define como la relación de la presión a ambos lados de una muestra de material absorbente y el producto de la velocidad a través de la muestra por el espesor de la misma, es decir

$$R = \frac{\Delta P}{u \Delta l} \quad (2.139)$$

donde  $\Delta P$  es la diferencia de presión a ambos lados de la muestra porosa,  $\Delta l$  corresponde al espesor y  $u$  es la velocidad a través de la muestra. Este último parámetro se obtiene por medio de la relación entre el flujo volumétrico  $V$  y el área de la sección transversal de fibra que atraviesa  $S$

$$u = \frac{V}{S} \quad (2.140)$$

La resistividad depende del tamaño de las fibras del material, de su forma y orientación, de la porosidad y de la uniformidad de su distribución.

La porosidad de un material absorbente es el cociente entre el volumen de los espacios libres de la muestra porosa y el volumen total

$$\Omega = \frac{V_a}{V_m} \quad (2.141)$$

donde  $V_a$  corresponde al volumen del aire o fluido que ocupa los espacios libres y  $V_m$  es el volumen total de la muestra de material poroso.

Debido a que los espacios entre fibras son pequeños, a bajas frecuencias se observa un comportamiento isotérmico ya que durante la fase de compresión del gas se intercambia calor entre el aire y las fibras. En cambio, a altas frecuencias el intercambio de calor se reduce ya que el tiempo de la compresión es menor, generándose entonces un comportamiento adiabático que conlleva una variación del volumen del aire producida por un cambio en la presión acústica [17]

$$\Delta P = -\kappa_p \frac{\Delta V}{V} \quad (2.142)$$

donde  $\Delta V$  es el incremento del volumen del aire producido por el incremento de la presión acústica  $\Delta P$  del total del volumen de aire considerado y  $\kappa_p$  corresponde al módulo de compresibilidad volumétrico del aire en los poros, que varía desde 1.0 a 1.4 veces el valor de la presión atmosférica, dependiendo de si la compresión del aire dentro del material es isotérmica o adiabática [16]. Otra propiedad de los materiales absorbentes corresponde a la densidad efectiva del aire, u otro fluido,  $\rho_p$  que se refiere a la variación de densidad del conjunto aire-estructura (fluido) del material absorbente en función de la frecuencia. En determinados casos a baja frecuencia las fibras del material oscilan junto al aire, actuando como parte del mismo, y a alta frecuencia las fibras permanecen estáticas. Una particularidad de los medios porosos se relaciona con la resistencia dinámica, dependiente también de la velocidad, cuyo valor para velocidad cero es la resistividad.

El material poroso modifica el flujo del gas y su compresibilidad. La velocidad del fluido a través de los poros no es uniforme y su dirección depende de la tortuosidad del medio poroso. En el límite de la interfase material poroso-conducto principal la componente normal de la velocidad media de fluido  $u$  es continua [93]. La ecuación de continuidad para  $u$  sigue siendo válida si se considera que para un volumen determinado de material poroso se promedia el tamaño de los poros, y la densidad del fluido que ocupa una fracción  $\Omega$  del material poroso es  $(\rho_0 + \rho)$ . Teniendo en cuenta estos aspectos la ecuación de continuidad de primer orden es

$$\Omega \frac{\partial \rho}{\partial t} - \rho_0 \nabla \vec{u} = 0 \quad (2.143)$$

La relación entre el cambio de densidad  $\rho$  y presión acústica está dada por la expresión  $\rho = -\kappa_p \rho_0 p$ . Al sustituir en la ecuación anterior se obtiene

$$\kappa_p \Omega \left( \frac{\partial p}{\partial t} \right) = -\nabla \vec{u} \quad (2.144)$$

El módulo de compresibilidad volumétrico  $\kappa_p$  a altas frecuencias es 1.4 veces la presión atmosférica y equivale al coeficiente de compresibilidad adiabático  $\kappa_s$ . A bajas frecuencias,  $\kappa_p$  es cercano a la presión atmosférica y se relaciona con el coeficiente de compresibilidad isoterma  $\kappa_T$ . En algunos casos,  $\kappa_T$  varía en función de la frecuencia  $f$ . Expresando la presión acústica en función de ondas armónicas simples  $p = P e^{j\omega t}$  la ecuación anterior se escribe como

$$j\omega \kappa_p \Omega P = -\nabla \vec{u} \quad (2.145)$$



La porosidad del medio modifica la velocidad de la onda. Reemplazando  $\rho_T$  por  $\rho_p\Omega$  en la ecuación (2.22) la velocidad acústica en los poros es [93]

$$c_p = \sqrt{\frac{1}{\kappa_p \rho_p \Omega}} \quad (2.146)$$

La velocidad acústica en los poros  $c_p$  es mayor que la velocidad de propagación en el aire  $c_0$  si la porosidad del material absorbente  $\Omega$  es pequeña. En cambio si el término  $\rho_p\Omega$  es mayor que  $\rho_0$ , la velocidad acústica en los poros será menor a la de propagación en el aire.

Reescribiendo la expresión (2.144) en función de (2.146) y de  $p = P e^{j\omega t}$  se obtiene

$$\left( \frac{j\omega}{\rho_p c_p^2} \right) P = \nabla \vec{u} \quad (2.147)$$

La ecuación del movimiento debe tener en cuenta las consecuencias de la aceleración del fluido a través de los poros. En efecto, la presencia de materiales porosos genera cambios en las propiedades inerciales del fluido y variación de la fricción. Por tanto, la representación de las propiedades inerciales del fluido en los poros se define en función de la densidad efectiva del fluido  $\rho_p$  dependiente de la frecuencia  $\omega$ , de la densidad del material poroso  $\rho_m$ , de la densidad del fluido externo al medio poroso  $\rho_0$ , del factor estructural  $\kappa$ , de la porosidad del material  $\Omega$  y de la resistividad  $R$ . Matemáticamente [16]

$$\rho_p = \frac{\rho_0 \kappa}{1 + \frac{R^2}{\left( \rho_m \omega \left( 1 + \rho_0 \frac{(\kappa - 1)}{\rho_m} \right) \right)^2}} \left( \frac{R^2}{\left( \rho_m \omega \left( 1 + \rho_0 \frac{(\kappa - 1)}{\rho_m} \right) \right)^2} \left( \Omega + \frac{\rho_m}{\kappa \rho_0} \right) + \left( \frac{1}{\left( 1 + \rho_0 \frac{(\kappa - 1)}{\rho_m} \right)} \right) \right) \quad (2.148)$$

A baja frecuencia el valor de la densidad efectiva tiende a  $(\rho_m + \rho_0 \kappa \Omega)$ , indicando que la interacción entre fluido y material poroso es equivalente a un solo elemento. A alta frecuencia  $\rho_p$  es aproximadamente igual a  $\rho_0 \kappa$ . Para los materiales comúnmente utilizados, la densidad efectiva varía de 5.5 veces a 1 respecto a la densidad del aire.

El cambio de la fricción del flujo a través de los poros se expresa por medio de la resistividad  $R$  definida anteriormente por la expresión (2.139). La ecuación de movimiento inicial

$$\rho_0 \left( \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \right) = -\nabla p \quad (2.149)$$

que al ser escrita en términos de una onda armónica simple

$$j\omega\rho_0\vec{u} = \nabla p \quad (2.150)$$

se transforma, al ser añadidos los términos inerciales y resistivos [93], en

$$\rho_p \left( \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \right) + R\vec{u} + \nabla p = 0 \quad (2.151)$$

Esta expresión en forma de ondas armónicas simples es

$$j\omega\rho_p \left( 1 + j \frac{R}{\rho_p\omega} \right) \vec{u} - \nabla p = 0 \quad (2.152)$$

Teniendo en cuenta que el potencial de velocidad acústica es definido por  $\vec{u} = -\nabla\phi$ , sustituyendo en la ecuación (2.149) la presión se expresaría como

$$p = \rho_p \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) + R\phi \quad (2.153)$$

y derivando

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \rho_p \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \right) + R \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) \quad (2.154)$$

Al reemplazar esta última expresión en (2.144) resulta

$$\nabla^2 \phi = \kappa_p \Omega \left( \rho_p \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \right) + R \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) \right) \quad (2.155)$$

en la que el último término de la relación representa las pérdidas por fricción.

Al introducir el término de densidad efectiva compleja del fluido en los poros  $\tilde{\rho}$

$$\tilde{\rho} = \rho_p \left( 1 + j \frac{R}{\rho_p\omega} \right) \quad (2.156)$$

y el término coeficiente de compresibilidad efectiva del fluido en los poros  $\tilde{\kappa} = \kappa_p \Omega$ , la sustitución en la expresión (2.146) proporciona la velocidad acústica efectiva

$$\tilde{c} = \frac{1}{\sqrt{\tilde{\rho}\tilde{\kappa}}} = c_p \left( 1 + j \frac{R}{\rho_p\omega} \right)^{-1/2} \quad (2.157)$$

Nuevamente utilizando el potencial de velocidad acústica y las expresiones (2.147), (2.150)

$$\frac{j\omega}{\tilde{\rho}\tilde{c}^2} p = \nabla \vec{u} \quad (2.158)$$

$$p = j\omega\tilde{\rho}\phi \quad (2.159)$$

se puede escribir la ecuación de ondas para ondas armónicas simples como

$$\nabla^2 \Phi + \left(\frac{\omega}{\tilde{c}}\right)^2 \Phi = 0 \quad (2.160)$$

La densidad y velocidad efectivas son cantidades complejas debido al término de fricción  $R$ . A altas frecuencias la parte imaginaria de ambas es menor a la unidad y la parte real es ligeramente mayor que la densidad y velocidad del fluido. Dada una onda plana de frecuencia  $\omega / (2\pi)$ , viajando en la dirección positiva de  $x$  representada por la expresión

$$\phi = A e^{j\omega \left(\frac{x}{\tilde{c}} - t\right)} = A e^{j(\tilde{k}x - \omega t)} \quad (2.161)$$

donde  $\tilde{k}$  es el número de onda en el material absorbente que puede determinarse por medio de la expresión

$$\tilde{k} = \omega \sqrt{\rho_p \kappa_p \Omega} \left(1 + j \frac{R}{\rho_p \omega}\right)^{1/2} \quad (2.162)$$

que a altas frecuencias tiende a  $\omega \sqrt{\rho_p \kappa_p \Omega}$  y a bajas frecuencias a  $\sqrt{\omega \kappa_p \Omega R}$ . Para otros tipos de ondas es posible su utilización mediante el empleo de la transformada de Fourier.

## 2.6.2. Caracterización del material

La caracterización acústica de materiales absorbentes suele realizarse mediante el uso de dos modelos: el modelo macroscópico de comportamiento y el modelo poroelástico. El primero de ellos, conocido también como modelo de dos parámetros, considera que el material absorbente puede caracterizarse, desde un punto de vista acústico como un fluido equivalente, por medio del número de onda complejo  $\tilde{k}$  y de la impedancia acústica compleja  $\tilde{Z}$  [4, 39, 138]. Se aplica al análisis de materiales cuya fase sólida es rígida de manera que el movimiento de la estructura no afecta al movimiento de las partículas de fluido en contacto con ella. Básicamente los materiales utilizados por la industria en la fabricación de silenciadores son de este modelo. El segundo modelo, el poroelástico, está basado en las teorías de Biot [18] y adaptado por Allard *et al.* [5] al problema acústico. En este modelo se considera la elasticidad de la fase sólida, que tiene una significativa interacción con los espacios ocupados por el aire u otro gas. Delany y Bazley [39] realizaron estudios experimentales abarcando una extensa gama de materiales absorbentes de los que obtuvieron expresiones analíticas que permiten definir la impedancia  $\tilde{Z}$  y el número de onda  $\tilde{k}$  en función de la frecuencia y de la resistividad. Posteriormente varios autores [46, 102, 127], en base a este planteamiento, llevaron a cabo numerosos estudios del comportamiento acústico de silenciadores con materiales absorbentes. Las expresiones de Delany y Bazley [39] pueden escribirse como

$$\tilde{Z} = Z_0 \left( \left(1 + a_5 \left(\frac{f \rho_0}{R}\right)^{a_6}\right) + j \left(a_7 \left(\frac{f \rho_0}{R}\right)^{a_8}\right) \right) \quad (2.163)$$

$$\tilde{k} = k_0 \left( \left( 1 + a_3 \left( \frac{f\rho_0}{R} \right)^{a_4} \right) + j \left( a_1 \left( \frac{f\rho_0}{R} \right)^{a_2} \right) \right) \quad (2.164)$$

donde  $Z_0 = \rho_0 c_0$  representa la impedancia característica del medio,  $k_0 = 2\pi f/c_0$  es el número de onda en el aire,  $f$  la frecuencia y  $R$  la resistividad del material. Los coeficientes  $a_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, 8$ , dependen del material considerado y se obtienen mediante ajuste a medidas experimentales [83, 127]. Adicionalmente otras propiedades, dependientes de las expresiones anteriores, que complementan la caracterización del material absorbente son la velocidad acústica compleja y la densidad compleja, definidas por

$$\tilde{c} = \frac{\omega}{\tilde{k}} \quad (2.165)$$

$$\tilde{\rho} = \frac{\tilde{Z}}{\tilde{c}} = \frac{\tilde{Z}\tilde{k}}{\omega} \quad (2.166)$$

### 2.6.3. Consideraciones adicionales

#### 1. Efecto en la impedancia de conductos perforados

Las superficies perforadas proporcionan, desde un punto de vista estructural, rigidez al silenciador, dan soporte al material absorbente y evitan el desprendimiento de éste. Desde el punto de vista acústico el efecto más significativo del material es aumentar la reactancia, o parte imaginaria, de la impedancia acústica de la superficie perforada [22, 70].

Los estudios realizados para determinar la impedancia acústica de elementos perforados en contacto con materiales porosos tanto en ausencia como con flujo medio pueden resumirse en tres grandes categorías: trabajos analíticos, experimentales y semiempíricos. El principal objetivo de los trabajos analíticos es determinar el efecto que ejercen los materiales absorbentes en la impedancia de los elementos perforados. Inicialmente Bolt [19] centró su investigación en la variación del valor de la reactancia de elementos perforados en contacto con material absorbente. Indicó que el aumento del número de orificios en contacto con el material absorbente tendía a mejorar el coeficiente de absorción a bajas frecuencias; en cambio, a altas frecuencias observó una tendencia inversa. Ingard y Bolt [70] mostraron que la combinación de material absorbente y elementos perforados es equivalente a un resonador de Helmholtz. Dejando un espacio libre entre la superficie perforada y el material absorbente Callaway y Ramer [22] e Ingard [69] lograron incrementar el valor de la parte resistiva de la impedancia.

Los trabajos empíricos combinan las propiedades acústicas de las superficies perforadas y de los materiales absorbentes para la obtención del coeficiente de absorción de los materiales absorbentes. En el trabajo de Davern [35] se consideró el efecto que ejercía la porosidad, el espesor de la placa perforada, la densidad del material absorbente, el espacio libre y el contacto entre el material absorbente y superficies perforadas sobre el coeficiente de absorción del material absorbente.

Los estudios semiempíricos se orientan a establecer las características de la interacción superficie perforada-material absorbente, destacando el cálculo de la impedancia de las superficies perforadas. En este sentido Kirby y Cummings [84] desarrollan para el cálculo de la impedancia de elementos perforados en contacto con material absorbente una formulación semiempírica a bajas frecuencias que tiene en cuenta la presencia de flujo medio tangente y descarta la interacción entre orificios. Este modelo combina la formulación empírica de caracterización de materiales absorbentes propuesta por Delany y Bazley [39] con el modelo teórico microestructural [5] a bajas frecuencias. De este modo, las expresiones que determinan la constante de propagación  $\tilde{\Gamma}$  (siendo  $\tilde{\Gamma} = -jk$ ) e impedancia característica  $\tilde{Z}$  vienen dadas por

$$\tilde{\Gamma} = j\sqrt{\gamma_0 q^2(\omega)} \left( \frac{(\ln(1-\Omega) + 1 + 2\Omega)\Omega \ln(1-\Omega) + \Omega^2 + 3\Omega^3/2 + \Omega^4/3}{(\ln(1-\Omega) + \Omega + \Omega^2/2)^2} - \left( \frac{\gamma_0 - 1}{\gamma_0} \right) Pr - j \frac{\Omega}{2\pi\xi_f q_0^2 s^2(\omega)} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.167)$$

$$\frac{\tilde{Z}}{\rho_0 c_0} = \sqrt{\frac{q^2(\omega)}{\gamma_0 \Omega^2}} \left( \frac{(\ln(1-\Omega) + 1 + 2\Omega)\Omega \ln(1-\Omega) + \Omega^2 + 3\Omega^3/2 + \Omega^4/3}{(\ln(1-\Omega) + \Omega + \Omega^2/2)^2} - \left( \frac{\gamma_0 - 1}{\gamma_0} \right) Pr - j \frac{\Omega}{2\pi\xi_f q_0^2 s^2(\omega)} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.168)$$

en las que los factores de tortuosidad  $q^2(\omega)$  y de forma  $s^2(\omega)$  son, respectivamente

$$q^2(\omega) = \frac{\left( (1 + a_3 \xi_f^{a_4}) (1 + a_5 \xi_f^{a_6}) - a_1 a_7 \xi_f^{(a_2 + a_8)} \right) (\ln(1-\Omega) + \Omega + \Omega^2/2)^2}{(\ln(1-\Omega) + 1 + 2\Omega) \ln(1-\Omega) + \Omega + 3\Omega^2/2 + \Omega^3/3} \quad (2.169)$$

$$s^2(\omega) = \frac{q^2(\omega)}{2\pi\xi_f q_0^2 \left( a_1 \xi_f^{a_2} (1 + a_5 \xi_f^{a_6}) + a_7 \xi_f^{a_8} (1 + a_3 \xi_f^{a_4}) \right)} \quad (2.170)$$

donde  $a_i$  son los coeficientes de Delany y Bazley obtenidos experimentalmente. La impedancia acústica adimensional de la superficie perforada se calcula por la expresión

$$\tilde{\xi}_p = \frac{1}{\sigma} \left( \xi'_p - j0.425k_0 d_h + \frac{0.425d_h \tilde{Z} \tilde{\Gamma}}{\rho_0 c_0} \right) \quad (2.171)$$

siendo  $\xi'_p$  la impedancia adimensional de un orificio en ausencia de material absorbente.

En los trabajos de Selamet *et al.* [125, 129] se adapta la metodología de Kirby y Cummings en la modificación de la expresión de impedancia desarrollada por Sullivan y Crocker [135] (2.115) en el caso de contacto con material absorbente. La siguiente formulación es empleada en el rango de frecuencias utilizado en esta Tesis en ausencia de flujo medio [46]

$$\tilde{Z}_p = \rho_0 c_0 \frac{\left( 6 \cdot 10^{-3} + j k_0 \left( t_p + 0.425 \left( 1 + \frac{\tilde{Z}}{Z_0} \frac{\tilde{k}}{k_0} \right) d_h F(\sigma) \right) \right)}{\sigma} \quad (2.172)$$

donde  $F(\sigma)$  es el factor de corrección debido a la interacción entre orificios calculado mediante la expresión (2.121).

## II. Medio móvil

La presencia de flujo medio en la entrada del silenciador induce un campo de flujo dentro del material absorbente de pequeña magnitud pero en ocasiones puede modificar el comportamiento acústico del mismo. Considerando que el material absorbente es homogéneo y tiene propiedades isotrópicas, el flujo medio puede generar anisotropía y heterogeneidades [102].

Si bien el conocimiento del comportamiento acústico de las superficies perforadas en presencia de flujo tangente se sigue ampliando, está establecido que la existencia de flujo medio, tangente o normal, incrementa la resistencia y disminuye la reactancia de la impedancia en comparación al caso sin flujo. En el trabajo de Kirby y Cummings [84] se desarrollan las expresiones ya estudiadas adaptadas al caso con flujo medio, (2.131) y (2.132). Para el caso en el que exista material absorbente, la impedancia acústica adimensional se calcula mediante la expresión (2.171) con las modificaciones de Denia *et al.* [46] para incluir la interacción de los orificios, llegando a la expresión [85]

$$\tilde{Z}_p = \rho_0 c_0 \frac{\left( \xi'_p + j 0.425 k_0 d_h \left( \frac{\tilde{\rho}}{\rho_0} - 1 \right) F(\sigma) \right)}{\sigma} \quad (2.173)$$

siendo  $\xi'_p$  la impedancia adimensional de un orificio en ausencia de material absorbente, cuyas partes resistiva y reactiva vienen dadas por las expresiones (2.133) y (2.135).

Como se ha indicado anteriormente, otra formulación relevante de la impedancia en presencia de flujo medio es la de Lee e Ih [88] cuyas partes resistiva  $R_0$  y reactiva  $X_0$  se calculan mediante las expresiones (2.136) y (2.138), respectivamente. Dicha formulación se modifica para incluir la presencia de material absorbente, de manera que la impedancia con flujo medio y material absorbente viene dada por

$$\tilde{Z}_p = R_0 + j X_0 + \rho_0 c_0 \frac{\left( j 0.425 k_0 d_h \left( \frac{\tilde{\rho}}{\rho_0} - 1 \right) F(\sigma) \right)}{\sigma} \quad (2.174)$$

Para caracterizar el elemento perforado en presencia de flujo medio y material absorbente, se hace uso de las ecuaciones (2.173) y (2.174) a lo largo de la Tesis.

## 2.7. Silenciadores

Un silenciador es un elemento generalmente pasivo, conectado a una fuente de ruido, cuyo cometido es atenuar el nivel sonoro de éste hasta valores aceptables. La respuesta acústica de los silenciadores depende de los fenómenos que producen la atenuación sonora [13]. Los silenciadores se agrupan en dos grandes grupos:

### 2.7.1. Configuraciones sin disipación

Son los silenciadores llamados reactivos, puesto que la atenuación es producida principalmente por fenómenos de tipo reactivo en los que parte de la energía incidente retorna a la fuente debido a la reflexión que se produce como consecuencia de cambios de sección y otras particularidades geométricas. Un ejemplo típico es una cámara de expansión simple, formada por un tubo de entrada, una cámara de expansión central, y un tubo de salida, tal como se observa en la figura 2.8, en la que se muestran algunos ejemplos adicionales. La energía disipada en este caso es muy pequeña.

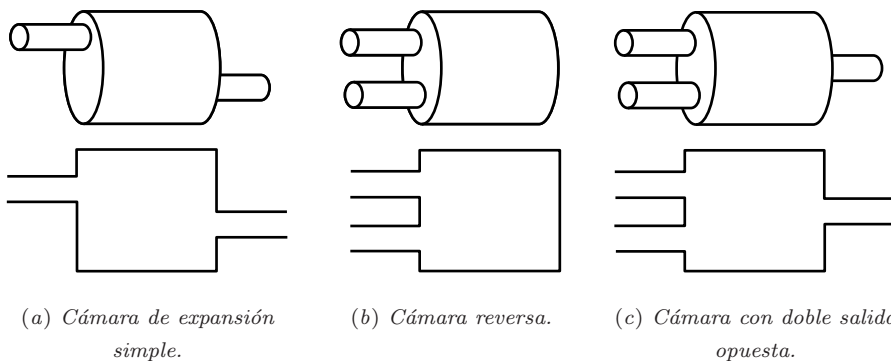


FIGURA 2.8: *Silenciadores reactivos.*

Otro caso interesante de este tipo de silenciadores son los llamados resonadores. Su funcionamiento se basa en la presencia de cavidades y zonas de discontinuidad geométrica donde el flujo puede entrar en resonancia, absorbiendo gran parte de la energía e impidiendo que ésta se propague. Estos silenciadores presentan frecuencias propias donde la atenuación es elevada, aunque para otras frecuencias de excitación este mecanismo no entra en funcionamiento y se debe recurrir a otros medios. Un ejemplo claro lo constituye el resonador de Helmholtz y el silenciador con tubos extendidos, en los que los conductos de entrada y salida penetran parcialmente en el

interior de la cámara central. La figura 2.9 muestra las geometrías asociadas.

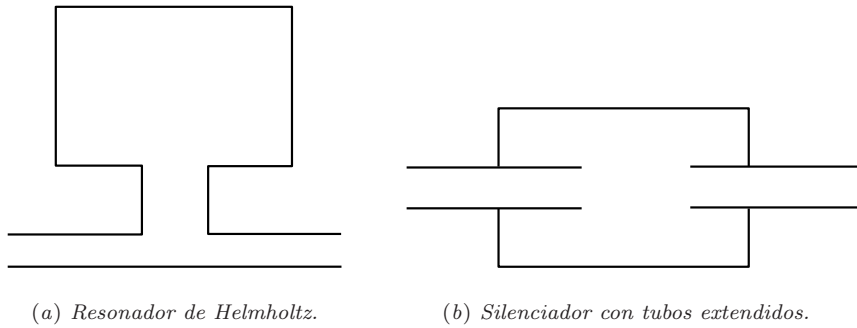


FIGURA 2.9: Silenciadores resonantes.

### 2.7.2. Configuraciones con disipación

En los silenciadores disipativos, los fenómenos de atenuación, además de los debidos a las discontinuidades geométricas, son producidos por la utilización de materiales absorbentes de gran superficie específica (en forma de fibra, especialmente). También pueden conseguirse características disipativas (aunque en menor grado) mediante la introducción de placas y tubos perforados que favorecen la disipación de energía durante la propagación de la onda acústica. La figura 2.10 muestra dos silenciadores disipativos.

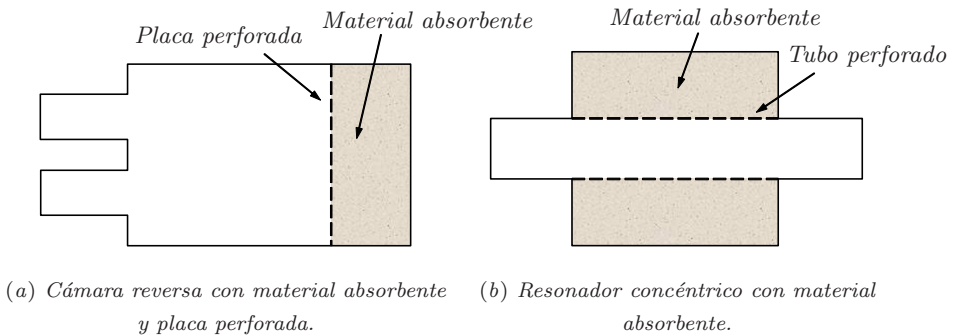


FIGURA 2.10: Silenciadores disipativos.

Realmente todos los silenciadores reactivos producen algo de disipación como consecuencia de las pérdidas asociadas a todo fluido real cuando éste circula por conductos, cambios de sección, etc. Igualmente, los silenciadores disipativos tienen asociados efecto reactivos debido a la presencia de expansiones y contracciones. En la literatura es frecuente encontrar los silenciadores con elementos perforados en la categoría



de reactivos. De cualquier manera, la disipación introducida por éstos puede no ser despreciable en ciertas configuraciones.

## 2.8. Catalizadores

### 2.8.1. Introducción

Las limitaciones actuales relativas a la emisión de contaminantes en motores de combustión alternativos han llevado a la utilización generalizada de convertidores catalíticos en la línea de escape de los vehículos. Si bien el diseño del catalizador se centra fundamentalmente en aspectos relacionados con la reducción de gases nocivos, la influencia de éste en la atenuación de ruido es considerable, actuando de forma análoga a la de un silenciador. Un catalizador consiste habitualmente en una expansión de entrada, un monolito y una contracción de salida. La estructura del monolito es de múltiples celdillas (capilares), con una densidad de  $5 \cdot 10^5$  hasta  $10^6$  capilares por metro cuadrado [123]. La figura 2.11 muestra un catalizador en el que el tubo de entrada y el de la salida están conectados con el monolito a través de dos conductos cónicos. La figura 2.12 ilustra un catalizador comercial y el monolito asociado.

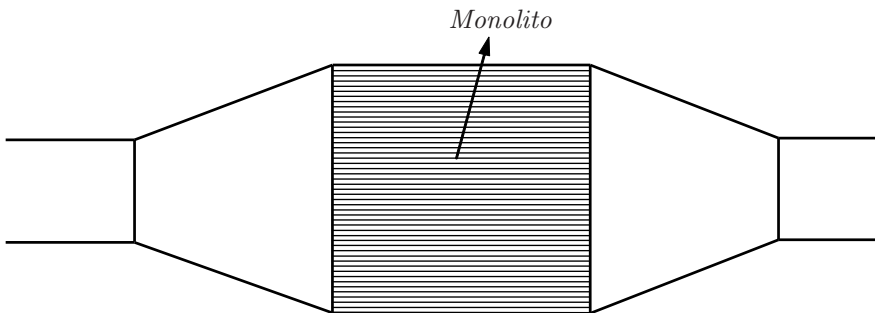


FIGURA 2.11: *Convertidor catalítico.*

El modelado acústico del catalizador requiere el análisis de los fenómenos de propagación en los capilares del monolito, en los que debe tenerse en cuenta el papel que juega la viscosidad y la transferencia de calor. Kirchhoff [86] presentó un modelo detallado válido para medio de propagación en reposo. A partir de dicho modelo, Zwicker y Kosten [150] obtuvieron una solución aproximada haciendo algunas simplificaciones en el modelo para conductos de sección transversal circular. Desde un punto de vista práctico, la geometría de sección cuadrada y rectangular presenta mayor interés, y se considera en el trabajo de Stinson [131] y de Roh *et al.* [110]. Selamet *et al.* [123] utilizaron una técnica basada en elementos finitos asumiendo que el monolito se comporta como un material absorbente de tipo fibroso, de manera que sus propiedades acústicas son las de un fluido equivalente con impedancia y número de onda complejos

(a) *Catalizador comercial.*(b) *Monolito.*FIGURA 2.12: *Catalizador comercial y monolito.*

y dependientes de la frecuencia. Con la presencia de flujo medio la situación se hace más complicada y no existe hasta el momento ninguna teoría completa. Dokumaci [52] encontró una solución analítica utilizando el procedimiento de Zwikker y Kosten para capilares de sección transversal circular. En otro trabajo, el mismo autor [53] extendió su modelo para el caso de capilares rectangulares en base a la utilización de series de Fourier.

### 2.8.2. Modelado acústico del monolito

Se procede en esta sección a llevar a cabo el modelado acústico del monolito. Para ello, se recurre a los resultados presentados por Allard [4] en ausencia de flujo medio. En éstos, se utiliza la resistividad como propiedad relevante de la caracterización. Este modelo ha sido utilizado de manera satisfactoria por Selamet *et al.* [123]. En presencia de flujo medio se va a recurrir a los modelos desarrollados por Dokumaci [52, 53].

#### i. Medio en reposo

En ausencia de flujo medio, un conjunto de conductos capilares puede caracterizarse desde un punto de vista acústico como un fluido [4], por medio de una densidad y velocidad del sonido equivalentes. Ambos parámetros son complejos, dependientes de la frecuencia y pueden expresarse en función de la resistividad  $R$  [4]. Estas propiedades se derivan a partir de la ecuación de continuidad (2.175), de equilibrio dinámico (2.176) y de la energía (2.177), considerando los efectos viscosos y de transferencia de calor en los capilares [104]

$$\frac{\partial \rho_m}{\partial t} + \rho_0 \nabla \vec{u}_m = 0 \quad (2.175)$$

$$\nabla p_m + \rho_0 \frac{\partial u_m}{\partial t} - \mu \left( \nabla^2 u_m + \frac{1}{3} \nabla (\nabla \vec{u}_m) \right) = 0 \quad (2.176)$$

$$\frac{\partial T_m}{\partial t} - \frac{1}{\rho_0 C_p} \frac{\partial p_m}{\partial t} = \frac{\kappa}{\rho_0 C_p} \nabla^2 T_m \quad (2.177)$$

siendo  $\rho_0$  la densidad del aire,  $\rho_m$  la densidad equivalente,  $\kappa$  la conductividad térmica,  $C_p$  el calor específico a presión constante,  $\mu$  la viscosidad,  $p_m$  la presión acústica y  $u_m$  la velocidad acústica. El subíndice  $m$  se refiere a las variables acústicas en el monolito.

Teniendo en cuenta que las dimensiones transversales de los capilares son pequeñas en comparación con la longitud de onda y la dimensión longitudinal de dicho capilar, la condición que existe es la de un flujo laminar completamente desarrollado [9]. Con esta condición la ecuación de equilibrio dinámico (2.176) puede escribirse como

$$\nabla p_m + \rho_0 \frac{\partial \bar{u}_m}{\partial t} + \mathcal{R} \bar{u}_m = 0 \quad (2.178)$$

Asumiendo una solución de tipo armónico,  $\bar{u}_m = \bar{U}_m e^{j\omega t}$ , se llega a la ecuación

$$\nabla p_m + \rho_m \frac{\partial \bar{u}_m}{\partial t} = 0 \quad (2.179)$$

en la que la densidad equivalente  $\rho_m$  se escribe en función de  $\rho_0$  y  $\mathcal{R}$

$$\rho_m = \rho_0 + \frac{\mathcal{R}}{j\omega} \quad (2.180)$$

donde  $\mathcal{R}$  es dependiente de la frecuencia y de la geometría de la sección transversal del capilar y se puede calcular mediante la expresión [4]

$$\mathcal{R} = R\phi G_c(s) \quad (2.181)$$

En la ecuación (2.181)  $R$  y  $\phi$  son, respectivamente, la resistividad estacionaria y la porosidad del monolito. La función  $G_c(s)$  se define como

$$G_c(s) = \frac{-\frac{s}{4} \sqrt{-j} \frac{J_1(s\sqrt{-j})}{J_0(s\sqrt{-j})}}{1 - \frac{2}{s\sqrt{-j}} \frac{J_1(s\sqrt{-j})}{J_0(s\sqrt{-j})}} \quad (2.182)$$

donde  $J_0$  y  $J_1$  son las funciones de Bessel de primera especie y orden cero y uno, respectivamente, y  $s$  es el número de onda tangencial, que se puede expresar como

$$s = \alpha \sqrt{\frac{8\omega\rho_0}{R\phi}} \quad (2.183)$$

En la ecuación (2.183),  $\alpha$  depende de la geometría de la sección transversal del capilar [4]. La Tabla 2.1 muestra el valor de  $\alpha$  para distintas geometrías de la sección transversal del capilar.

La velocidad del sonido equivalente  $c_m$  se puede obtener a partir de la densidad equivalente  $\rho_m$  y el módulo volumétrico  $K_m$ , definido como [4]

<i>Sección transversal</i>	$\alpha$
Circular	1.00
Cuadrada	1.07
Triángulo equilátero	1.14
Rectangular	0.78

TABLA 2.1: Valores de  $\alpha$  para distintas geometrías de la sección transversal del capilar.

$$K_m = \frac{\gamma P_0}{\gamma - (\gamma - 1) F} \quad (2.184)$$

siendo  $\gamma$  la relación de calores específicos,  $P_0$  la presión ambiental media y  $F$  viene dado por la siguiente expresión

$$F = \frac{1}{1 + \frac{R\phi}{jPr\omega\rho_0} G_c (\sqrt{Pr} s)} \quad (2.185)$$

En la ecuación (2.185)  $Pr$  es el número de Prandtl, definido como  $Pr = \mu C_p / \kappa$ . Finalmente la velocidad del sonido equivalente puede expresarse como

$$c_m = \sqrt{\frac{K_m}{\rho_m}} = \frac{c_0}{\sqrt{\left(1 + \frac{R\phi}{j\omega\rho_0} G_c(s)\right) (\gamma - (\gamma - 1) F)}} \quad (2.186)$$

donde se ha tenido en cuenta la relación  $c_0 = \sqrt{\gamma P_0 / \rho_0}$ .

Una vez conocida la densidad y velocidad del sonido equivalentes, se puede proceder a modelar el monolito. Una opción es recurrir a los modelos de onda plana, caracterizando el monolito por su matriz de transferencia. La otra alternativa es abordar el problema mediante modelos multidimensionales, como el método de elementos finitos. En esta sección se va a calcular la matriz de cuatro polos del monolito, en ausencia de flujo medio. Utilizando un procedimiento idéntico al planteado en el estudio de un conducto circular se consigue una matriz de cuatro polos de características similares a la expresada en la ecuación (2.89). Por lo tanto, la matriz de cuatro polos de un monolito de longitud  $L_m$  puede escribirse como

$$\begin{Bmatrix} P_1 \\ U_1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(k_m L_m) & j Z_m \operatorname{sen}(k_m L_m) \\ \frac{j}{Z_m} \operatorname{sen}(k_m L_m) & \cos(k_m L_m) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_2 \\ U_2 \end{Bmatrix} \quad (2.187)$$

donde  $k_m = \omega / c_m$  es el número de onda equivalente y  $Z_m = \rho_m c_m$  la impedancia equivalente. Cabe indicar que debido a que los resultados presentados por Allard [4] para el modelado del monolito no consideran la presencia de flujo medio en los capilares, se va a recurrir en la siguiente sección a los modelos de Dokumaci [52, 53].

## II. Medio móvil

Como se ha indicado anteriormente, en presencia de flujo medio se recurre a los modelos de Dokumaci [52, 53] para el modelado del monolito. Éstos no tienen en cuenta la resistividad como una propiedad de caracterización. Las ecuaciones que gobiernan la propagación de ondas en los capilares son la ecuación de continuidad (2.175), de equilibrio dinámico (2.176) y de la energía (2.177). Con la consideración de flujo medio axial definido por la velocidad  $U_{fm}$  en los capilares, aparecen los términos convectivos y las ecuaciones anteriores se modifican. Asumiendo un comportamiento armónico de las perturbaciones acústicas de tipo  $e^{-j\omega t}$ , las ecuaciones convectivas se pueden escribir, introduciendo las simplificaciones de Zwikker y Kosten [150], de la siguiente manera [52, 53]

$$\left(-j\omega\rho + U_{fm}\frac{\partial\rho}{\partial z}\right) + \rho_0\nabla\vec{u} = 0 \quad (2.188)$$

$$\rho_0\left(-j\omega w + U_{fm}\frac{\partial w}{\partial z}\right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu\nabla_S^2 w, \quad p = p(z) \quad (2.189)$$

$$\rho_0 C_p\left(-j\omega T + U_{fm}\frac{\partial T}{\partial z}\right) = \left(-j\omega p + U_{fm}\frac{\partial p}{\partial z}\right) + \kappa\nabla_S^2 T \quad (2.190)$$

donde  $p$ ,  $\rho$  y  $T$  son las perturbaciones acústicas,  $\vec{u}$  el vector de la velocidad acústica,  $w$  la componente axial de la velocidad acústica,  $\rho_0$  la densidad del medio,  $\kappa$  la conductividad térmica,  $\mu$  la viscosidad y  $C_p$  el calor específico a presión constante. Los operadores  $\nabla$  y  $\nabla_S^2$  son, respectivamente, el operador nabla y el operador laplaciano en la sección transversal del capilar.

### Capilares circulares

Para el caso de capilares de sección transversal circular,  $\nabla_S^2$  y  $\nabla\vec{u}$  se escriben como

$$\nabla_S^2 = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} \quad (2.191)$$

$$\nabla\vec{u} = \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} \quad (2.192)$$

siendo  $u_r$  la componente radial de la velocidad acústica respecto a la coordenada  $r$ . Sustituyendo la expresión (2.192) en la expresión (2.188), y la expresión (2.191) en las ecuaciones (2.189) y (2.190), para la ecuación de continuidad, resulta

$$\left(-j\omega\rho + U_{fm}\frac{\partial\rho}{\partial z}\right) + \rho_0\left(\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r}\right) = 0 \quad (2.193)$$

Para la ecuación de equilibrio dinámico, se tiene

$$\rho_0\left(-j\omega w + U_{fm}\frac{\partial w}{\partial z}\right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r}\right), \quad p = p(z) \quad (2.194)$$

En la ecuación anterior cabe indicar que la variable acústica  $p$  depende sólo de la coordenada axial  $z$ .

La ecuación de la energía puede expresarse como

$$\rho_0 C_p \left( -j\omega T + U_{fm} \frac{\partial T}{\partial z} \right) = \left( -j\omega p + U_{fm} \frac{\partial p}{\partial z} \right) + \kappa \left( \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \right) \quad (2.195)$$

Para resolver el problema planteado, es necesario incluir la ecuación de estado y las condiciones de contorno. Por una parte la ecuación de estado, para un gas perfecto, se escribe como

$$\frac{p}{p_0} = \frac{\rho}{\rho_0} + \frac{T}{T_0} \quad (2.196)$$

donde  $T_0$  y  $p_0$  son la temperatura y la presión ambiental, respectivamente. Por otra parte, si se asume que la pared del capilar es rígida, las condiciones de contorno a considerar en el centro del capilar implican que  $\vec{u}$  y  $T$  tienen un valor finito, mientras que su valor es nulo en la pared rígida (recuérdese que son perturbaciones).

Asumiendo que la dependencia de las variables acústicas respecto a  $z$  es de la forma  $e^{jk_0\Gamma z}$ , se puede escribir

$$p(z) = P^+ e^{jk_0\Gamma^+ z} + P^- e^{jk_0\Gamma^- z} \quad (2.197)$$

$$w(z, r) = H(r) p(z) \quad (2.198)$$

$$T(z, r) = F(r) p(z) \quad (2.199)$$

siendo  $P^+$  y  $P^-$  amplitudes complejas asociadas a la onda progresiva y regresiva, respectivamente,  $k_0$  el número de onda,  $\Gamma$  la constante de propagación, y  $H$  y  $F$  funciones de la coordenada radial  $r$ .

Sustituyendo las ecuaciones (2.197)-(2.199) en las ecuaciones (2.194) y (2.195), se obtiene

$$\frac{d^2 H}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dH}{dr} + \beta^2 H = \frac{j\Gamma k_0}{\mu} \quad (2.200)$$

$$\frac{d^2 F}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dF}{dr} + \beta^2 \sigma^2 F = \frac{j(1 - \Gamma M)\omega}{\kappa} \quad (2.201)$$

donde

$$\beta^2 a^2 = j(1 - \Gamma M) s^2 \quad (2.202)$$

En las ecuaciones anteriores,  $M = U_{fm}/c_0$  es el número de Mach,  $\sigma^2 = \mu C_p/\kappa$  es el número de Prandtl,  $Re$  es el número de Reynolds, definido como,  $Re = \rho_0 a c_0/\mu$  siendo  $a$  el radio de la sección transversal del capilar. El número de onda tangencial  $s$  viene dado por la siguiente expresión

$$s = \sqrt{Rek_0 a} = a \sqrt{\left(\frac{\rho_0 \omega}{\mu}\right)} \quad (2.203)$$

Las soluciones de las ecuaciones diferenciales (2.200) y (2.201) se pueden expresar en términos de las funciones de Bessel de orden cero. Escribiendo las soluciones generales y aplicando las condiciones de contorno, las funciones  $H$  y  $F$  se escriben

$$H(r) = \frac{\Gamma}{\rho_0 c_0 (1 - \Gamma M)} \left(1 - \frac{J_0(\beta r)}{J_0(\beta a)}\right) \quad (2.204)$$

$$F(r) = \frac{j\omega (1 - \Gamma M)}{\beta^2 \sigma^2 \kappa} \left(1 - \frac{J_0(\sigma \beta r)}{J_0(\sigma \beta a)}\right) \quad (2.205)$$

Una vez halladas la funciones  $H$  y  $F$  el resto de la solución se deduce de manera sencilla. En primer lugar se expresa la ecuación de continuidad (2.193) en función de  $H$  y  $F$ , y luego se integra la ecuación resultante respecto a la coordenada  $r$ . Tras aplicar las condiciones de contorno, se obtiene la ecuación característica

$$\gamma + (\gamma - 1) I(\sigma \beta a) + \left(\frac{\Gamma}{1 - \Gamma M}\right)^2 I(\beta a) = 0 \quad (2.206)$$

donde

$$I(\xi) = \frac{J_2(\xi)}{J_0(\xi)} \quad (2.207)$$

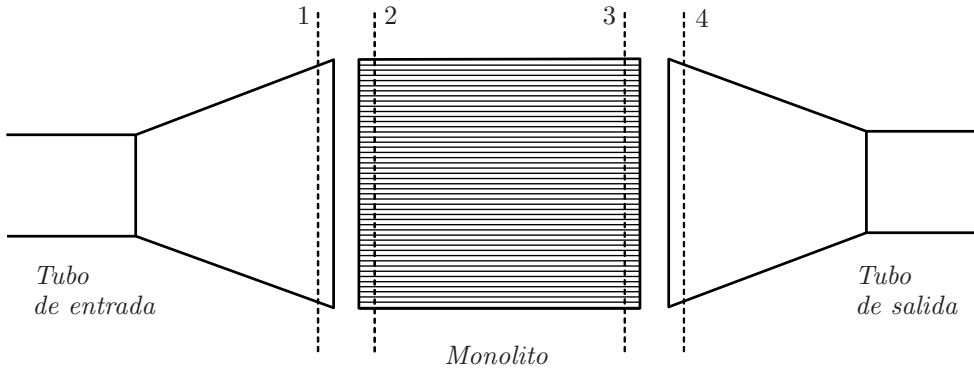
Las raíces de la ecuación característica (2.206),  $\Gamma^+$  y  $\Gamma^-$ , se pueden hallar utilizando un método iterativo como el método de la secante o Newton-Raphson.

El modelado acústico de un convertidor catalítico completo requiere el conocimiento de los procesos de transferencia de ondas en las zonas de interfase entre el monolito y los tubos de entrada y salida. Dada la complejidad del problema, el tratamiento ha de ser necesariamente aproximado si se desea obtener una formulación con un coste computacional razonable. Por ello se considera en esta sección un planteamiento de onda plana. La figura 2.13 muestra un convertidor catalítico, que está formado por el monolito, los tubos de entrada y salida, y los elementos de transición troncocónicos. La presión acústica en una sección  $z$  del capilar sólo depende de la coordenada  $z$  (2.194), y se puede expresar como la suma de dos componentes: una que avanza en el sentido positivo de  $z$  y otra en sentido contrario,

$$p(z) = P^+(z) + P^-(z) \quad (2.208)$$

Combinando las ecuaciones (2.197) y (2.208), se puede escribir

$$P^+(z) = P^+ e^{jk_0 \Gamma^+ z}, \quad P^-(z) = P^- e^{jk_0 \Gamma^- z} \quad (2.209)$$

FIGURA 2.13: *Convertidor catalítico.*

La relación entre las componentes progresivas y regresivas de la presión en la sección  $z$  y en la entrada del capilar, se puede escribir

$$\begin{Bmatrix} P^+ \\ P^- \end{Bmatrix}_z = \begin{bmatrix} e^{jk_0\Gamma^+z} & 0 \\ 0 & e^{jk_0\Gamma^-z} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P^+ \\ P^- \end{Bmatrix}_{z=0} \quad (2.210)$$

Por un lado, y asumiendo que los capilares del monolito son idénticos, la transferencia de ondas en el monolito se puede determinar aplicando la ecuación (2.210) a un capilar. Por otro, la transferencia de ondas en las zonas de interfase monolito-tubos de entrada y salida, se puede describir con la aplicación de la ecuación de conservación de masa y de energía [36, 53].

En primer lugar se considera la discontinuidad geométrica en la entrada del monolito. Asumiendo condiciones cuasi-estáticas, las ecuaciones de conservación de masa y de energía se escriben, respectivamente [36, 53]

$$\int_{S_1} (\rho_0 w_1 + \rho_1 U_{fm_1}) dS_1 = \int_{S_2} (\rho_0 w_2 + \rho_2 U_{fm_2}) dS_2 \quad (2.211)$$

$$\int_{S_1} \left( \frac{p_1}{\rho_0} + U_{fm_1} w_1 \right) (\rho_0 U_{fm_1}) dS_1 = \int_{S_2} \left( T_0 s_2 + \frac{p_2}{\rho_0} + U_{fm_2} w_2 \right) (\rho_0 U_{fm_2}) dS_2 \quad (2.212)$$

siendo  $s$  la entropía,  $U_{fm_1}$  y  $U_{fm_2}$  la velocidad de flujo en el tubo de entrada y en el monolito, respectivamente. Los subíndices 1 y 2 se refieren a las zonas aguas arriba y aguas abajo de la discontinuidad en la entrada del monolito (véase la figura 2.13). El área transversal  $S_2$  es la suma de las áreas transversales de todos los capilares que forman el monolito de manera que  $S_2 = n\pi a^2$ , donde  $n$  es el número de los capilares y  $a$  es su radio.

Se asumen condiciones isoentrópicas en la zona aguas arriba [52, 53]. Para la zona aguas abajo es necesario hallar las perturbaciones acústicas  $w_2$ ,  $s_2$  y  $\rho_2$ . La compo-



nente axial de la velocidad acústica  $w_2$  se puede expresar combinando las expresiones (2.198) y (2.204), como

$$\rho_0 c_0 w_2(z, r) = h^+(r) P_2^+(z) + h^-(r) P_2^-(z) \quad (2.213)$$

donde la función  $h^\pm(r)$  se escribe [53]

$$h^\pm(r) = \frac{\Gamma^\pm}{(1 - \Gamma^\pm M_2)} \left( 1 - \frac{J_0(\beta^\pm r)}{J_0(\beta^\pm a)} \right) \quad (2.214)$$

siendo  $\beta^\pm$  los valores de  $\beta$ , calculados mediante la ecuación (2.202), para  $\Gamma^+$  y  $\Gamma^-$ , respectivamente, y  $M_2 = U_{f_{m_2}}/c_0$  es el número de Mach en los capilares.

Considerando ahora las ecuaciones de estado para un gas perfecto, la densidad y la entropía se pueden expresar

$$c_0^2 \rho_2(z, r) = g^+(r) P_2^+(z) + g^-(r) P_2^-(z) \quad (2.215)$$

$$\rho_0 T_0 s_2(z, r) = e^+(r) P_2^+(z) + e^-(r) P_2^-(z) \quad (2.216)$$

donde las funciones  $g^\pm(r)$ ,  $e^\pm(r)$  se escriben como [53]

$$g^\pm(r) = 1 + (\gamma - 1) \frac{J_0(\sigma\beta^\pm r)}{J_0(\sigma\beta^\pm a)} \quad (2.217)$$

$$e^\pm(r) = \frac{J_0(\sigma\beta^\pm r)}{J_0(\sigma\beta^\pm a)} \quad (2.218)$$

Sustituyendo las ecuaciones (2.213), (2.215) y (2.216) en las expresiones (2.211) y (2.212), e integrando sobre la sección transversal aguas arriba y aguas abajo de la discontinuidad geométrica, la relación entre las componentes de la presión acústica, queda

$$S_1 \left( (1 + M_1) P_1^+ - (1 - M_1) P_1^- \right) = S_2 \left( (h_m^+ + M_2 g_m^+) P_2^+ + (h_m^- + M_2 g_m^-) P_2^- \right) \quad (2.219)$$

$$(1 + M_1) P_1^+ + (1 - M_1) P_1^- = (1 + e_m^+ + M_2 h_m^+) P_2^+ + (1 + e_m^- + M_2 h_m^-) P_2^- \quad (2.220)$$

siendo  $M_1$ ,  $M_2$  el número de Mach en la zona aguas arriba y aguas abajo, respectivamente. Las funciones promediadas  $h_m^\pm$ ,  $e_m^\pm$  y  $g_m^\pm$  se pueden calcular integrando las funciones  $h^\pm$ ,  $e^\pm$  y  $g^\pm$  sobre el área transversal del capilar, dando lugar a

$$h_m^\pm = \frac{\Gamma^\pm}{(1 - \Gamma^\pm M_2)} \frac{1}{\pi a^2} \int_0^a \left( 1 - \frac{J_0(\beta^\pm r)}{J_0(\beta^\pm a)} \right) 2\pi r dr = \frac{-\Gamma^\pm}{(1 - \Gamma^\pm M_2)} \frac{J_2(\beta^\pm a)}{J_0(\beta^\pm a)} \quad (2.221)$$

$$g_m^\pm = \frac{1}{\pi a^2} \int_0^a \left( 1 + (\gamma - 1) \frac{J_0(\sigma\beta^\pm r)}{J_0(\sigma\beta^\pm a)} \right) 2\pi r dr = -\frac{J_2(\sigma\beta^\pm a)}{J_0(\sigma\beta^\pm a)} + \frac{2\gamma}{\sigma\beta^\pm a} \frac{J_1(\sigma\beta^\pm a)}{J_0(\sigma\beta^\pm a)} \quad (2.222)$$

$$e_m^\pm = \frac{1}{\pi a^2} \int_0^a \left( \frac{J_0(\sigma\beta^\pm r)}{J_0(\sigma\beta^\pm a)} \right) 2\pi r dr = \frac{2}{\sigma\beta^\pm a} \frac{J_1(\sigma\beta^\pm a)}{J_0(\sigma\beta^\pm a)} \quad (2.223)$$

Las ecuaciones (2.219) y (2.220) se pueden escribir matricialmente de la siguiente manera

$$\begin{bmatrix} S_1(1+M_1) & -S_1(1-M_1) \\ 1+M_1 & 1-M_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_1^+ \\ P_1^- \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_2(h_m^+ + M_2 g_m^+) & S_2(h_m^- + M_2 g_m^-) \\ 1+e_m^+ + M_2 h_m^+ & 1+e_m^- + M_2 h_m^- \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_2^+ \\ P_2^- \end{Bmatrix} \quad (2.224)$$

Introduciendo la notación

$$T_1 = \begin{bmatrix} S_1(1+M_1) & -S_1(1-M_1) \\ 1+M_1 & 1-M_1 \end{bmatrix} \quad (2.225)$$

$$T_2 = \begin{bmatrix} S_2(h_m^+ + M_2 g_m^+) & S_2(h_m^- + M_2 g_m^-) \\ 1+e_m^+ + M_2 h_m^+ & 1+e_m^- + M_2 h_m^- \end{bmatrix} \quad (2.226)$$

la expresión (2.224) puede escribirse como

$$[T_1] \begin{Bmatrix} P_1^+ \\ P_1^- \end{Bmatrix} = [T_2] \begin{Bmatrix} P_2^+ \\ P_2^- \end{Bmatrix} \quad (2.227)$$

La expresión anterior describe la relación entre las componentes de presión progresivas y regresivas en los planos 1 y 2. Para la expresión que relaciona las variables de presión y velocidad acústicas en los mismos planos se puede utilizar la matriz de cuatro polos de la discontinuidad

$$\begin{Bmatrix} p_1 \\ w_1 \end{Bmatrix} = [T_{con}] \begin{Bmatrix} p_2 \\ w_2 \end{Bmatrix} \quad (2.228)$$

Considerando las ecuaciones (2.208), (2.213) y (2.224), y aplicando un procedimiento similar al utilizado en la sección 2.4.2, la matriz de transferencia  $[T_{con}]$  se escribe como [48]

$$[T_{con}] = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\rho_0 c_0}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{\rho_0 c_0}{2} \end{bmatrix}^{-1} [T_1]^{-1} [T_2] \begin{bmatrix} \frac{-h_m^-}{(h_m^+ - h_m^-)} & \frac{\rho_0 c_0}{(h_m^+ - h_m^-)} \\ \frac{h_m^+}{(h_m^+ - h_m^-)} & \frac{-\rho_0 c_0}{(h_m^+ - h_m^-)} \end{bmatrix} \quad (2.229)$$

Ahora, para la zona de discontinuidad en la salida del monolito, se aplica un procedimiento idéntico al utilizado anteriormente partiendo de la ecuación de conservación de masa y de energía. Se llega a una expresión similar a la ecuación (2.224), que relaciona las componentes de presión progresivas y regresivas en los planos 3 y 4 (véase la figura 2.13)

$$\begin{bmatrix} S_3(h_m^+ + M_3 g_m^+) & S_3(h_m^- + M_3 g_m^-) \\ 1+e_m^+ + M_3 h_m^+ & 1+e_m^- + M_3 h_m^- \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_3^+ \\ P_3^- \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_4(1+M_4) & -S_4(1-M_4) \\ 1+M_4 & 1-M_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_4^+ \\ P_4^- \end{Bmatrix} \quad (2.230)$$

Si se introduce la siguiente notación

$$T_3 = \begin{bmatrix} S_3 (h_m^+ + M_3 g_m^+) & S_3 (h_m^- + M_3 g_m^-) \\ 1 + e_m^+ + M_3 h_m^+ & 1 + e_m^- + M_3 h_m^- \end{bmatrix} \quad (2.231)$$

$$T_4 = \begin{bmatrix} S_4 (1 + M_4) & -S_4 (1 - M_4) \\ 1 + M_4 & 1 - M_4 \end{bmatrix} \quad (2.232)$$

la expresión (2.230) puede escribirse como

$$[T_3] \begin{Bmatrix} P_3^+ \\ P_3^- \end{Bmatrix} = [T_4] \begin{Bmatrix} P_4^+ \\ P_4^- \end{Bmatrix} \quad (2.233)$$

Para la expresión que relaciona las variables de presión y velocidad acústica en los planos 3 y 4 se puede utilizar la matriz de cuatro polos de la discontinuidad

$$\begin{Bmatrix} p_3 \\ w_3 \end{Bmatrix} = [T_{exp}] \begin{Bmatrix} p_4 \\ w_4 \end{Bmatrix} \quad (2.234)$$

Combinando las ecuaciones (2.208), (2.213) y (2.230), y aplicando un procedimiento similar al utilizado en la sección 2.4.2, la matriz de transferencia  $[T_{exp}]$  se puede expresar como [48]

$$[T_{exp}] = \begin{bmatrix} \frac{-h_m^-}{(h_m^+ - h_m^-)} & \frac{\rho_0 c_0}{(h_m^+ - h_m^-)} \\ \frac{h_m^+}{(h_m^+ - h_m^-)} & \frac{-\rho_0 c_0}{(h_m^+ - h_m^-)} \end{bmatrix}^{-1} [T_3]^{-1} [T_4] \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\rho_0 c_0}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{\rho_0 c_0}{2} \end{bmatrix} \quad (2.235)$$

La matriz de transferencia completa del monolito se obtiene multiplicando las matrices asociadas a la transferencia de ondas en la entrada (cono divergente-capilares) y la salida del mismo (capilares-cono convergente), dadas por las expresiones (2.229) y (2.235) respectivamente, por la matriz de transferencia  $[T_{mon}]$ , de manera que resulta

$$[T^m] = [T_{con}] [T_{mon}] [T_{exp}] \quad (2.236)$$

siendo  $[T_{mon}]$  la matriz de transferencia que relaciona las variables de presión y velocidad acústica en los planos 2 y 3. Dicha matriz se puede calcular combinando las ecuaciones (2.208) y (2.213), y aplicando la teoría de los modelos de onda plana [36]. Finalmente, la matriz  $[T_{mon}]$  se escribe [48]

$$[T_{mon}] = \begin{bmatrix} \frac{-h_m^+ e^{j\Gamma^+ k_0 L_m} + h_m^- e^{j\Gamma^- k_0 L_m}}{e^{j\Gamma^+ k_0 L_m} e^{j\Gamma^- k_0 L_m} (h_m^- - h_m^+)} & \frac{\rho_0 c_0 (e^{j\Gamma^+ k_0 L_m} - e^{j\Gamma^- k_0 L_m})}{e^{j\Gamma^+ k_0 L_m} e^{j\Gamma^- k_0 L_m} (h_m^- - h_m^+)} \\ \frac{h_m^+ h_m^- (e^{j\Gamma^- k_0 L_m} - e^{j\Gamma^+ k_0 L_m})}{\rho_0 c_0 e^{j\Gamma^+ k_0 L_m} e^{j\Gamma^- k_0 L_m} (h_m^- - h_m^+)} & \frac{h_m^- e^{j\Gamma^+ k_0 L_m} - h_m^+ e^{j\Gamma^- k_0 L_m}}{e^{j\Gamma^+ k_0 L_m} e^{j\Gamma^- k_0 L_m} (h_m^- - h_m^+)} \end{bmatrix} \quad (2.237)$$

### Capilares rectangulares

Se considera ahora un caso de mayor interés práctico en el que los capilares que forman el monolito son de sección transversal rectangular. La figura 2.14 muestra un capilar con dicha sección y el sistema de coordenadas cartesiano asociado. El origen de las coordenadas está en el centro de la sección transversal. La coordenada axial es  $z$ , mientras que  $x$  e  $y$  son las coordenadas transversales.

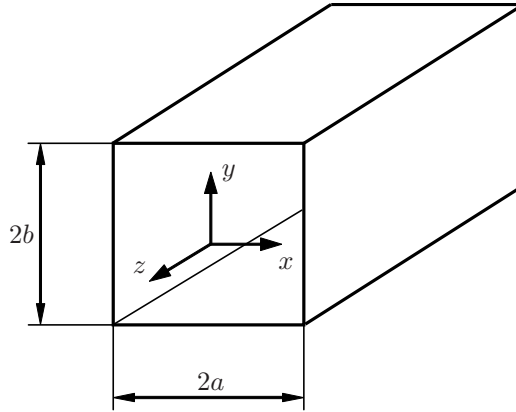


FIGURA 2.14: Capilar con sección transversal rectangular.

En coordenadas cartesianas  $\nabla_S^2$  y  $\nabla \vec{u}$  se escriben

$$\nabla_S^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad (2.238)$$

$$\nabla \vec{u} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \quad (2.239)$$

siendo  $u$ ,  $v$  y  $w$  las componentes de la velocidad acústica  $\vec{u}$  en  $x$ ,  $y$  y  $z$ , respectivamente.

Al sustituir las expresiones (2.238) y (2.239) en las ecuaciones (2.188)-(2.190), para la ecuación de continuidad, se obtiene

$$\left(-j\omega\rho + U_{fm} \frac{\partial \rho}{\partial z}\right) + \rho_0 \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) = 0 \quad (2.240)$$

Para la ecuación de equilibrio dinámico, resulta

$$\rho_0 \left(-j\omega w + U_{fm} \frac{\partial w}{\partial z}\right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right), \quad p = p(z) \quad (2.241)$$

La ecuación de la energía se puede expresar como

$$\rho_0 C_p \left( -j\omega T + U_{fm} \frac{\partial T}{\partial z} \right) = \left( -j\omega p + U_{fm} \frac{\partial p}{\partial z} \right) + \kappa \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \quad (2.242)$$

Se asume que la dependencia de las variables acústicas respecto a  $z$  es de la forma  $e^{jk_0\Gamma z}$ , y por tanto puede escribirse

$$p(z) = P^+ e^{jk_0\Gamma^+ z} + P^- e^{jk_0\Gamma^- z} \quad (2.243)$$

$$w(x, y, z) = H(x, y) p(z) \quad (2.244)$$

$$T(x, y, z) = F(x, y) p(z) \quad (2.245)$$

donde  $H$  y  $F$  son funciones de las coordenadas transversales  $x$  e  $y$ .

Sustituyendo las ecuaciones (2.243)-(2.245) en las ecuaciones (2.240)-(2.242), y haciendo uso de la ecuación de estado (2.196), se obtiene

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} + \beta^2 H = \frac{j\Gamma k_0}{\mu} \quad (2.246)$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \beta^2 \sigma^2 = \frac{j(1 - \Gamma M)\omega}{\kappa} \quad (2.247)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = \left( j\omega \left( \frac{1}{\rho_0} - \frac{F}{T_0} \right) (1 - \Gamma M) - j\Gamma k_0 H \right) p \quad (2.248)$$

donde  $\beta$  está definido en la expresión (2.202),

$$\beta^2 a^2 = j(1 - \Gamma M) s^2 \quad (2.249)$$

siendo  $a$  en este caso el lado de la sección transversal del capilar respecto al cual se define el número de onda tangencial  $s$ .

La solución de la ecuación diferencial (2.246) se puede expresar en forma de doble serie de Fourier [53, 110]

$$H(x, y) = \sum_m \sum_n a_{mn} \operatorname{sen} \left( \frac{m\pi x}{2a} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi y}{2b} \right), \quad m, n = 1, 3, 5, \dots, \quad (2.250)$$

donde los coeficientes  $a_{mn}$  se pueden determinar sustituyendo la ecuación (2.250) en la ecuación (2.246), y promediando la ecuación resultante sobre la sección transversal del capilar. Procediendo de esta manera se obtiene

$$a_{mn} = \frac{16jk_0\Gamma}{\pi^2\mu} \frac{1}{mn\beta^2\alpha_{mn}(\beta a)} \quad (2.251)$$

donde la función  $\alpha_{mn}(\xi)$  se define como

$$\alpha_{mn}(\xi) = 1 - \frac{\pi^2 \left( m^2 + n^2 \frac{a^2}{b^2} \right)}{4\xi^2} \quad (2.252)$$

De manera similar, la solución de la ecuación diferencial (2.247) se escribe

$$F(x, y) = \sum_m \sum_n b_{mn} \operatorname{sen} \left( \frac{m\pi x}{2a} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi y}{2b} \right), \quad m, n = 1, 3, 5, \dots, \quad (2.253)$$

con

$$b_{mn} = \frac{16j\omega(1 - \Gamma M)}{\pi^2 \kappa} \frac{1}{mn\sigma^2 \beta^2 \alpha_{mn}(\sigma\beta a)} \quad (2.254)$$

La ecuación característica que permite la obtención de las constantes de propagación  $\Gamma^+$  y  $\Gamma^-$  se puede derivar sustituyendo las ecuaciones (2.250) y (2.253) en la ecuación (2.248) y aplicando las condiciones de contorno. De esta manera, resulta

$$\gamma + (\gamma - 1) \operatorname{I}(\sigma\beta a) + \left( \frac{\Gamma}{1 - \Gamma M} \right)^2 \operatorname{I}(\beta a) = 0 \quad (2.255)$$

donde

$$\operatorname{I}(\xi) = \frac{-64}{\pi^4} \sum_m \sum_n \frac{1}{m^2 n^2 \alpha_{mn}(\xi)}, \quad m, n = 1, 3, 5, \dots, \quad (2.256)$$

Las raíces de la ecuación característica (2.255) se pueden hallar con un método iterativo.

Como en el caso previo, en el que la sección transversal de los capilares es circular, las expresiones (2.224) y (2.230) son las que describen la transferencia de ondas entre los planos 1 y 2 en la entrada del monolito y 3 y 4 en la salida del mismo. La única diferencia consiste en que las funciones  $h_m^\pm$ ,  $e_m^\pm$  y  $g_m^\pm$  se expresan ahora de la siguiente manera

$$h_m^\pm = \frac{-\Gamma^\pm \operatorname{I}(\beta^\pm a)}{1 - M_2 \Gamma^\pm} \quad (2.257)$$

$$e_m^\pm = -1 - \operatorname{I}(\sigma\beta^\pm a) \quad (2.258)$$

$$g_m^\pm = -1 - (\gamma - 1) e_m^\pm \quad (2.259)$$

Una vez obtenidas las funciones  $h_m^\pm$ ,  $e_m^\pm$  y  $g_m^\pm$ , se sigue un procedimiento idéntico al planteado en el caso de capilares de sección transversal circular llegando a la matriz de transferencia completa del monolito  $[T^m]$ , expresada por la ecuación (2.236).

## 2.9. Atenuación sonora en silenciadores y catalizadores

La cuantificación de la atenuación de ruido en silenciadores y catalizadores requiere en primer lugar la introducción de algunos conceptos básicos relacionados con la energía asociada a una onda acústica, junto con la definición posterior de los indicadores adecuados del nivel de reducción de ruido. La deducción de las expresiones de la energía implica la consideración de ciertas relaciones termodinámicas [94], que permiten obtener finalmente ecuaciones útiles en términos de los campos acústicos aquí considerados. Dado que la presencia de flujo es relevante, dichas ecuaciones deben incluir su efecto.

### 2.9.1. Consideraciones energéticas

Considérese un conducto en el que se propaga una onda acústica en presencia de flujo medio con velocidad  $U_{fm}$ . Dado que en general se asume comportamiento armónico, los valores de interés se obtienen a partir del promediado temporal a lo largo de un periodo de los campos acústicos instantáneos. La intensidad acústica  $I$  asociada a la onda, definida como la energía que atraviesa la sección transversal del conducto por unidad de tiempo y superficie viene dada por [94]

$$I = \langle pu \rangle + \frac{U_{fm}}{\rho_0} \langle p\rho \rangle + U_{fm}\rho_0 \langle u^2 \rangle + U_{fm}^2 \langle u\rho \rangle \quad (2.260)$$

donde  $\langle \rangle$  indica el promediado temporal. Utilizando la expresión (2.24), puede eliminarse la perturbación de densidad en la ecuación anterior, resultando [31]

$$I = \langle pu \rangle + \frac{M}{\rho_0 c_0} \langle p^2 \rangle + M\rho_0 c_0 \langle u^2 \rangle + M^2 \langle pu \rangle \quad (2.261)$$

La potencia acústica  $W$  se obtiene sin más que integrar la intensidad en la sección transversal,

$$W = \int_S I dS = \int_S \left( \langle pu \rangle + \frac{M}{\rho_0 c_0} \langle p^2 \rangle + M\rho_0 c_0 \langle u^2 \rangle + M^2 \langle pu \rangle \right) dS \quad (2.262)$$

En condiciones de comportamiento armónico puede escribirse

$$P e^{j\omega t} = (P^+ + P^-) e^{j\omega t} = (|P^+| e^{j\alpha_p} + |P^-| e^{j\alpha_r}) e^{j\omega t} \quad (2.263)$$

$$U e^{j\omega t} = \frac{1}{\rho_0 c_0} (P^+ - P^-) e^{j\omega t} = \frac{1}{\rho_0 c_0} (|P^+| e^{j\alpha_p} - |P^-| e^{j\alpha_r}) e^{j\omega t} \quad (2.264)$$

de manera que si se lleva a cabo la integración temporal a lo largo de un periodo  $T = 2\pi/\omega$ , la expresión (2.262) permite obtener

$$W = W(M) = \frac{S}{2\rho_0 c_0} \left( |P^+|^2 (1+M)^2 - |P^-|^2 (1-M)^2 \right) \quad (2.265)$$

En esta última expresión se observa claramente la distinción entre la potencia asociada a la onda progresiva y la regresiva. En ausencia de flujo medio, basta con considerar que  $M = 0$ .

### 2.9.2. Índices de atenuación sonora en silenciadores y catalizadores

Uno de los objetivos básicos del modelado acústico es obtener la atenuación de ruido producida por un dispositivo de la línea de escape. Como índices básicos de atenuación sonora cabe destacar los tres siguientes:

- Índice de pérdidas de inserción ( $IL$ ): este indicador proporciona información sobre el comportamiento acústico de un dispositivo (silenciador o catalizador) cuando éste se encuentra acoplado a una fuente acústica y a una terminación. Por tanto su valor estará determinado por las características de todo el sistema. Se define como la diferencia en decibelios<sup>2</sup> entre los niveles de potencia sonora medidos en un punto antes y después de que el dispositivo sea insertado entre el punto de medida y la fuente de ruido. Así, si  $W_1$  es la potencia acústica sin dispositivo y  $W_2$  corresponde al caso con dispositivo, se tiene

$$IL = 10 \log \left( \frac{W_1}{W_2} \right) \quad (2.266)$$

- Índice de pérdidas de transmisión ( $TL$ ): proporciona información del comportamiento acústico del dispositivo con independencia de la fuente de ruido, por lo que resulta de gran utilidad. Se define como la relación entre la potencia acústica que incide en el dispositivo respecto a la que es transmitida por éste, considerando terminación anecoica. Por tanto, es interesante que el  $TL$  tenga un valor elevado si se toma como objetivo mejorar la atenuación de ruido. Si  $P_1^+$  es la presión incidente y  $P_2^+$  la transmitida, en ausencia de flujo resulta

$$TL = 10 \log \left( \frac{S_1 |P_1^+|^2}{S_2 |P_2^+|^2} \right) = 20 \log \left( \left( \frac{S_1}{S_2} \right)^{\frac{1}{2}} \left| \frac{P_1^+}{P_2^+} \right| \right) \quad (2.267)$$

- Diferencia de Nivel ( $LD$ ): es la diferencia de niveles de presión sonora aguas arriba y aguas abajo del dispositivo. Este índice, al igual que la pérdida de inserción, depende de la fuente y la terminación empleadas. Si se denota mediante  $P_1$  la presión aguas arriba y  $P_2$  el correspondiente valor aguas abajo, se obtiene

<sup>2</sup>El decibelio es la décima parte del Belio, y su valor se obtiene como diez veces el logaritmo en base diez de la relación de dos cantidades de energía.



$$LD = 20 \log \left( \left| \frac{P_1}{P_2} \right| \right) \quad (2.268)$$

En la Tesis se hace uso del  $TL$  como índice de caracterización acústica de los silenciadores y catalizadores habida cuenta de que proporciona información intrínseca de éstos.

## 2.10. Aplicaciones

En esta sección se procede a ilustrar la obtención del índice de pérdidas de transmisión de diversas tipologías de silenciadores y catalizadores, con el fin de mostrar sus características básicas. Algunas de ellas han sido ampliamente tratadas en la literatura. Otras, como las consideradas en las secciones 2.10.3, 2.10.4 y 2.10.7, se han propuesto y tratado con detalle en la Tesis, sobre todo desde el punto de vista multidimensional, en capítulos posteriores. Dado que la descripción del comportamiento se realiza en base al método de las matrices de transferencia, se procede inicialmente a la evaluación del  $TL$  a partir de los cuatro polos de un dispositivo acústico genérico. Para ello, supóngase que se dispone de la matriz que relaciona las variables en la entrada y en la salida de éste, denotadas con subíndices 1 y 2, respectivamente,

$$\begin{Bmatrix} P_1 \\ U_1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_2 \\ U_2 \end{Bmatrix} \quad (2.269)$$

En base a las ecuaciones (2.46) y (2.48), puede escribirse

$$P_1 = P_1^+ + P_1^- \quad (2.270)$$

$$U_1 = U_1^+ + U_1^- = \frac{1}{\rho_0 c_0} (P_1^+ - P_1^-) \quad (2.271)$$

y por tanto

$$P_1^+ = \frac{P_1 + \rho_0 c_0 U_1}{2} \quad (2.272)$$

Dado que la salida es anecoica

$$P_2 = P_2^+ = \rho_0 c_0 U_2 \quad (2.273)$$

Utilizando la definición del  $TL$  dada por la expresión (2.267), se obtiene

$$TL = 20 \log \left( \left( \frac{S_1}{S_2} \right)^{\frac{1}{2}} \left| \frac{P_1 + \rho_0 c_0 U_1}{2P_2} \right| \right) = 20 \log \left( \left( \frac{S_1}{S_2} \right)^{\frac{1}{2}} \left| \frac{P_1 + \rho_0 c_0 U_1}{2\rho_0 c_0 U_2} \right| \right) \quad (2.274)$$

de manera que considerando ahora la fórmula (2.269), se llega a

$$TL = 20 \log \left( \left( \frac{S_1}{S_2} \right)^{\frac{1}{2}} \left| \frac{A + \frac{B}{\rho_0 c_0} + \rho_0 c_0 C + D}{2} \right| \right) \quad (2.275)$$

que es la expresión buscada. Un desarrollo similar puede llevarse a cabo en función de los cuatro polos que relacionan presión y flujo másico, obteniéndose

$$TL = 20 \log \left( \left( \frac{S_1}{S_2} \right)^{\frac{1}{2}} \left| \frac{A + \frac{S_2 B}{c_0} + \frac{c_0 C}{S_1} + \frac{S_2 D}{S_1}}{2} \right| \right) \quad (2.276)$$

### 2.10.1. $TL$ de una cámara de expansión simple

Se considera un silenciador similar al mostrado en la figura 2.8(a), formado por un conducto de entrada, una cámara central y un conducto de salida, con longitudes y secciones transversales  $L_1$ ,  $L_2$ ,  $L_3$ ,  $S_1$ ,  $S_2$  y  $S_3$ , respectivamente. La matriz de transferencia global del silenciador considerando presiones y velocidades se obtiene multiplicando las matrices de los conductos y cambios de sección, dadas por las expresiones (2.89) y (2.102) respectivamente, de manera que

$$\begin{Bmatrix} P_1 \\ U_1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{S_2}{S_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_2 & B_2 \\ C_2 & D_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{S_3}{S_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_3 & B_3 \\ C_3 & D_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_3 \\ U_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_3 \\ U_3 \end{Bmatrix} \quad (2.277)$$

Operando y aplicando la definición del  $TL$  dada por la ecuación (2.275), se llega a

$$TL = 10 \log \left( \frac{m_2}{4m_1} \left( 1 + \frac{m_1}{m_2} \right)^2 + \frac{m_2}{4m_1} (m_1^2 - 1) \left( 1 - \frac{1}{m_2^2} \right) \sin^2(k_0 L_2) \right) \quad (2.278)$$

con  $m_1 = S_2/S_1$  y  $m_2 = S_2/S_3$ . Obviamente, para  $m_1 = m_2 = 1$  la atenuación es nula.

Con el fin de tener una idea del comportamiento de este tipo de silenciador, se consideran a modo de ejemplo las configuraciones cuyas dimensiones más importantes se detallan en la tabla 2.2. Se asume que están formadas por conductos circulares, con lo que su sección transversal se obtiene a partir del radio. La figura 2.15 muestra los resultados obtenidos, los cuales indican que el  $TL$  es una sucesión de cúpulas de atenuación de anchura constante y bandas de paso. Los valores máximos de atenuación de dichas cúpulas aparecen a frecuencias  $f = (2n+1)c_0/(4L_2)$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$  debido a la existencia de  $2n+1$  cuartos de onda en la cámara. Las bandas de paso tienen una frecuencia asociada de valor  $f = nc_0/(2L_2)$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ , lo cual implica que en el interior de la cámara hay  $n$  semilongitudes de onda. Cuanto mayor es la longitud, mayor es el número de cúpulas presentes en el intervalo de frecuencias considerado. En cuanto a la amplitud máxima de atenuación, ésta es proporcional a la relación de

secciones cámara-tubo, de manera que menores cambios de sección implican valores de atenuación sonora más pequeños.

Geometría	$R_1$ (m)	$R_2$ (m)	$R_3$ (m)	$L_2$ (m)
1	0.02	0.091875	0.02	0.3
2	0.02	0.091875	0.02	0.15
3	0.02	0.045	0.02	0.15

TABLA 2.2: Dimensiones relevantes de silenciadores de cámara de expansión simple.

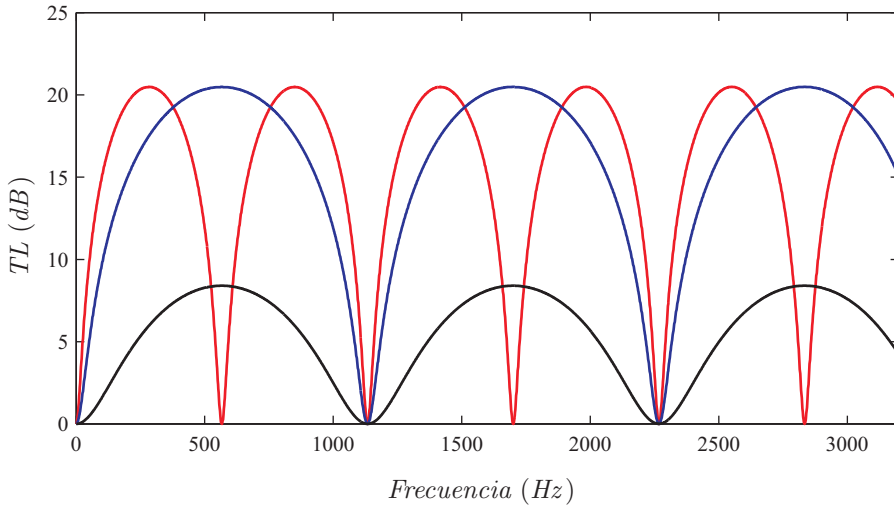


FIGURA 2.15:  $TL$  de silenciadores de cámara de expansión simple: —, geometría 1; —, geometría 2; —, geometría 3.

### 2.10.2. $TL$ de una cámara reversa

Se analiza ahora un silenciador de cámara reversa, cuya diferencia respecto al caso anterior radica en que los conductos de entrada y salida se encuentran en el mismo lado. Las ecuaciones de continuidad de presión y flujo másico son idénticas a las planteadas en el estudio de los conductos extendidos [94], y por consiguiente la expresión (2.111) es aplicable ahora. Así, resulta

$$\begin{Bmatrix} P_1 \\ V_1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ -j \frac{c_0}{S_2} \cot(k_0 L_2) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_3 & B_3 \\ C_3 & D_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_3 \\ V_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_3 \\ V_3 \end{Bmatrix} \quad (2.279)$$

de manera que aplicando la fórmula (2.276) se puede calcular el  $TL$ . Si  $S_1 = S_3$  se obtiene

$$TL = 10 \log \left( 1 + \frac{1}{4} \left( \frac{S_2}{S_1} \right)^2 \tan^2(k_0 L_2) \right) \quad (2.280)$$

La figura 2.16 presenta los resultados asociados a tres geometrías de dimensiones iguales a las cámaras de expansión simple tratadas previamente. Puede observarse de nuevo un comportamiento repetitivo, en este caso de resonancias de atenuación (con un valor máximo muy elevado) y bandas de paso, que se producen a las mismas frecuencias que en el caso anterior. El efecto de la longitud y el cambio de sección sigue las pautas comentadas para la cámara de expansión simple.

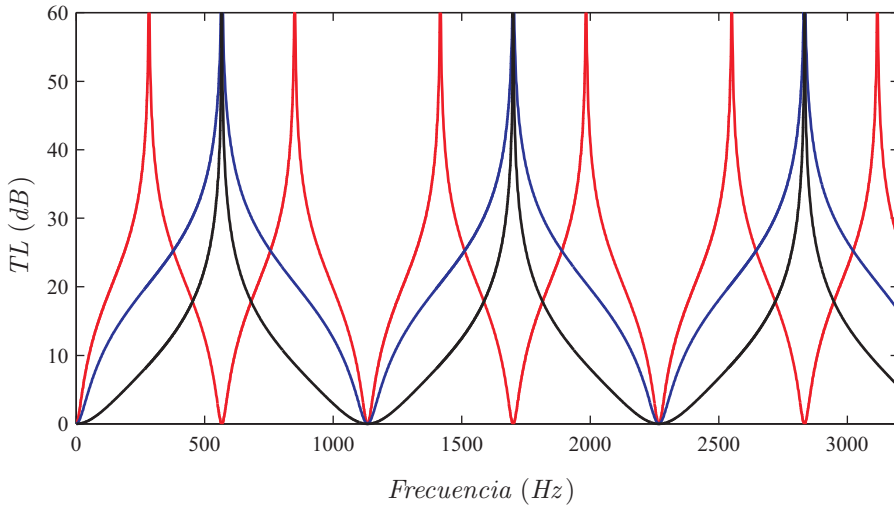


FIGURA 2.16:  $TL$  de silenciadores de cámara reversa: —, geometría 1; —, geometría 2; —, geometría 3.

### 2.10.3. $TL$ de una cámara con doble salida opuesta

La figura 2.17 muestra un silenciador con doble salida opuesta. La región 1 representa el tubo de entrada, la 2 representa la cámara central, mientras que las regiones 3 y 4 están asociadas a los dos tubos de salida.

Debido a que esta geometría tiene dos tubos de salida, el  $TL$  del silenciador con doble salida se expresa de la siguiente manera

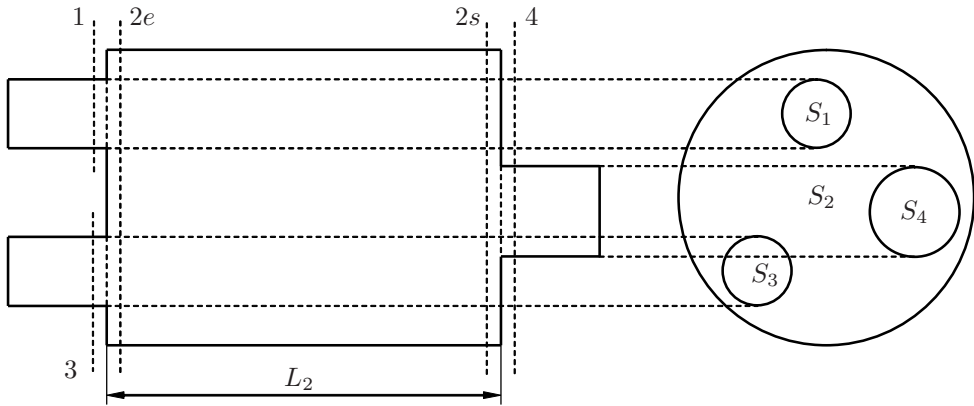


FIGURA 2.17: Silenciador con doble salida opuesta.

$$TL = 10 \log \left( \frac{S_1 \frac{|P_1 + \rho_0 c_0 U_1|^2}{4}}{S_3 |P_3|^2 + S_4 |P_4|^2} \right) \quad (2.281)$$

siendo  $S_1$ ,  $S_3$  y  $S_4$  las secciones transversales del tubo de entrada, de la primera y de la segunda salida, respectivamente. Puede observarse que para calcular el  $TL$  es necesario hallar los valores  $P_1$ ,  $P_3$ ,  $P_4$  y  $U_1$ , algo que se consigue aplicando las condiciones de continuidad en las zonas de cambio de sección y las condiciones de contorno oportunas.

Se consideran en primer lugar las condiciones que afectan al campo acústico en la zona de la izquierda (expansión de la entrada y contracción de la salida en el mismo lado), obteniéndose

$$P_1 = P_{2e} \quad (2.282)$$

$$P_{2e} = P_3 \quad (2.283)$$

$$\rho_0 S_1 U_1 = \rho_0 S_2 U_{2e} + \rho_0 S_3 U_3 \quad (2.284)$$

En la segunda salida, las variables acústicas a ambos lados de la discontinuidad geométrica mantienen la relación

$$P_{2s} = P_4 \quad (2.285)$$

$$\rho_0 S_2 U_2 = \rho_0 S_4 U_4 \quad (2.286)$$

Considerando ahora la matriz de transferencia de la cámara central, definida mediante la ecuación (2.89), se tiene

$$\begin{Bmatrix} P_{2e} \\ U_{2e} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(k_0 L_2) & j Z_0 \operatorname{sen}(k_0 L_2) \\ \frac{j}{Z_0} \operatorname{sen}(k_0 L_2) & \cos(k_0 L_2) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_{2s} \\ U_{2s} \end{Bmatrix} \quad (2.287)$$

Para el análisis se asume una excitación arbitraria  $P_1$  (por conveniencia de valor unidad), y también se consideran impuestas salidas anecoicas lo que implica

$$P_1 = 1 \quad (2.288)$$

$$P_3 = \rho_0 c_0 U_3 \quad (2.289)$$

$$P_4 = \rho_0 c_0 U_4 \quad (2.290)$$

Resolviendo las ecuaciones (2.282)-(2.290) se puede hallar la presión y la velocidad acústica en los planos 1,  $2e$ ,  $2s$ , 3 y 4, y por tanto se puede calcular el  $TL$  mediante la expresión (2.281).

La tabla 2.3 contiene la información referente a las dimensiones de los silenciadores tomados por ejemplo. La figura 2.18 muestra los resultados obtenidos, que indican que el  $TL$  del silenciador con doble salida opuesta es una sucesión de cúpulas de atenuación de anchura constante y bandas de paso (como en el caso de la cámara de expansión simple). También se puede observar que el silenciador con doble salida opuesta proporciona los mismos niveles de atenuación que la cámara de expansión simple, pero a su vez permite una menor pérdida de carga y menor ruido de flujo [6]. Debido a que en este tipo de geometrías la sección transversal de los tubos de salida no coincide en general con la del conducto de entrada, la atenuación acústica a frecuencia cero no es necesariamente nula. Esta geometría se tratará con mayor detalle en los capítulos 3 y 5 desde un punto de vista multidimensional.

<i>Geometría</i>	$R_1$ (m)	$R_2$ (m)	$R_3$ (m)	$R_4$ (m)	$L_2$ (m)
1	0.02	0.091875	0.02	0.02	0.3
2	0.02	0.091875	0.02	0.02	0.15
3	0.02	0.045	0.02	0.02	0.15

TABLA 2.3: *Dimensiones relevantes de silenciadores con doble salida opuesta.*

#### 2.10.4. $TL$ de una cámara reversa con material absorbente y placa perforada

La figura 2.19 presenta un silenciador de cámara reversa con material absorbente y placa perforada. La cámara central está dividida en dos cámaras por una placa perforada, caracterizada por los valores  $\sigma$ ,  $d_h$  y  $t_p$ . El lado izquierdo tiene una longitud  $L_2$  y el derecho, con material absorbente, tiene una longitud  $L_m$ . En base a lo visto en la sección 2.5, la matriz de transferencia que relaciona las variables de presión y velocidad acústica aguas arriba y aguas abajo de la placa viene dada por

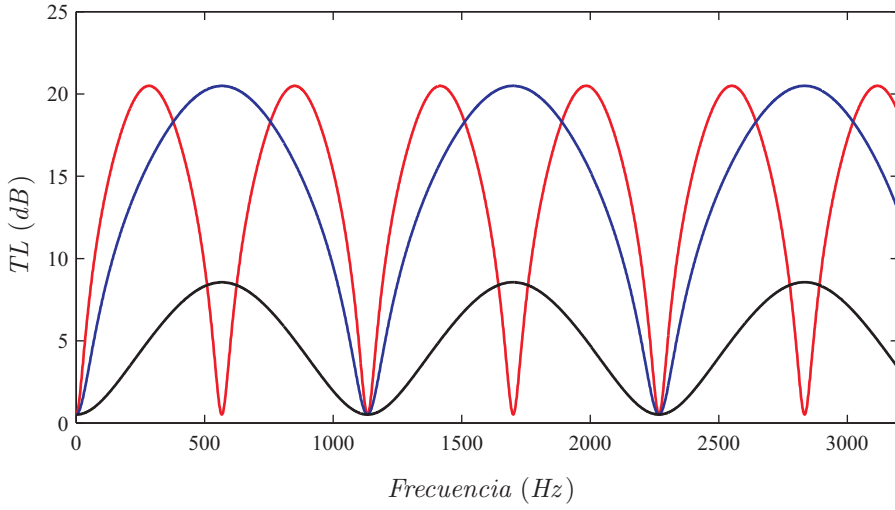


FIGURA 2.18: TL de silenciadores con doble salida opuesta: —, geometría 1; —, geometría 2; —, geometría 3.

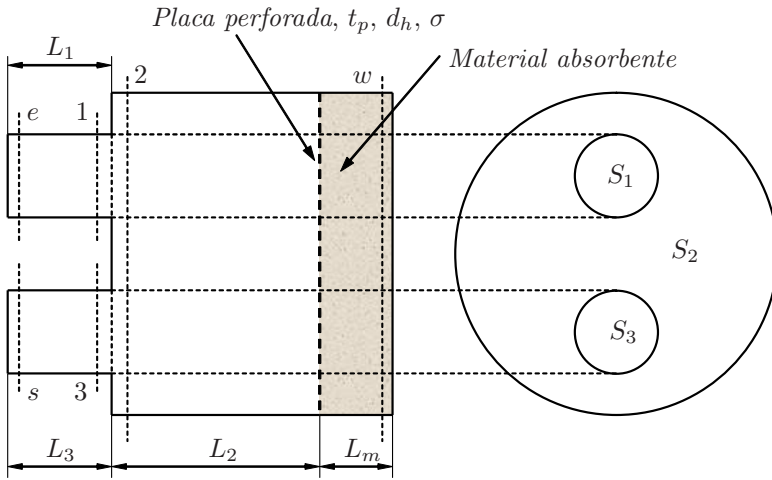


FIGURA 2.19: Cámara reversa con material absorbente y placa perforada.

$$\begin{bmatrix} 1 & \tilde{Z}_p \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.291}$$

y por tanto la matriz de la cámara central es

$$\begin{Bmatrix} P_2 \\ U_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_2 & B_2 \\ C_2 & D_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \tilde{Z}_p \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_m & B_m \\ C_m & D_m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_w \\ U_w \end{Bmatrix} \tag{2.292}$$

Debido a que la velocidad acústica en el extremo derecho de la cámara central es nula (condición de pared rígida), el comportamiento de dicha cámara se puede presentar por medio de una impedancia equivalente. Se introduce la impedancia equivalente como

$$Z_c = \frac{P_2}{U_2} \quad (2.293)$$

Dado que  $U_w = 0$  y tras operar la expresión (2.292), se obtiene

$$Z_c = \frac{P_2}{U_2} = \frac{A_2 A_m + C_m A_2 \tilde{Z}_p + C_m B_2}{C_2 A_m + C_m C_2 \tilde{Z}_p + C_m D_2} \quad (2.294)$$

Supuesto que se satisface la condición de onda plana, la presión es la misma en todos los puntos de la zona de transición, de manera que se puede escribir

$$P_1 = P_2 \quad (2.295)$$

$$P_2 = P_3 \quad (2.296)$$

La continuidad de flujo másico implica

$$\rho_0 S_1 U_1 = \rho_0 S_2 U_2 + \rho_0 S_3 U_3 \quad (2.297)$$

Combinando las ecuaciones (2.294)-(2.297) y operando, se llega a la expresión

$$U_1 = \frac{\frac{1}{Z_c} P_3 S_2 + U_3 S_3}{S_1} \quad (2.298)$$

y por tanto, se puede escribir

$$\begin{Bmatrix} P_1 \\ U_1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{S_2}{Z_c S_1} & \frac{S_3}{S_1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_3 \\ U_3 \end{Bmatrix} \quad (2.299)$$

Teniendo en cuenta que  $P_1 = P_2$ , la matriz de transferencia global es

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} P_e \\ U_e \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{S_2}{Z_c S_1} & \frac{S_3}{S_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_3 & B_3 \\ C_3 & D_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_s \\ U_s \end{Bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_s \\ U_s \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (2.300)$$

EL  $TL$  se obtiene sin más que aplicar la expresión (2.275). La figura 2.20 muestra los resultados obtenidos para una cámara reversa con material absorbente que se caracteriza por tener las dimensiones  $R_1 = R_3 = 0.02$  m,  $R_2 = 0.091875$  m,  $L_1 = L_3 = 0.1$  m,  $L_2 = 0.25$  m y  $L_m = 0.05$  m. La placa perforada está caracterizada por los valores  $\sigma = 15\%$ ,  $d_h = 0.0035$  m y  $t_p = 0.001$  m. La impedancia de la placa se calcula mediante la expresión (2.172). En lo referente al material absorbente, se utiliza



la fibra de vidrio texturizada de Owens Corning que se caracteriza por el número de onda  $\tilde{k}$  y la impedancia compleja  $\tilde{Z}$  cuyas expresiones son [39, 46]

$$\tilde{Z} = Z_0 \left( \left( 1 + 0.09534 \left( \frac{f\rho_0}{R} \right)^{-0.754} \right) + j \left( -0.08504 \left( \frac{f\rho_0}{R} \right)^{-0.732} \right) \right) \quad (2.301)$$

$$\tilde{k} = k_0 \left( \left( 1 + 0.16 \left( \frac{f\rho_0}{R} \right)^{-0.577} \right) + j \left( -0.18897 \left( \frac{f\rho_0}{R} \right)^{-0.595} \right) \right) \quad (2.302)$$

Como parámetro a variar se considera la resistividad que toma tres valores:  $R = 1000$  rayl/m,  $R = 2000$  rayl/m y  $R = 4000$  rayl/m. Se puede observar que a mayor resistividad se obtiene menor atenuación en los picos de resonancia, mientras que se consigue mayor atenuación en las bandas de paso. El primer pico de resonancia es menos sensible al cambio de resistividad y la atenuación se hace más uniforme con el aumento de resistividad. Esta geometría se estudiará con más detalle en los capítulos 3 y 5, considerando los efectos tridimensionales del campo acústico en todo el dominio del silenciador. Además cabe indicar que se han presentado dos trabajos [7, 49] durante la realización de esta Tesis sobre el modelado acústico tridimensional de este tipo de geometrías.

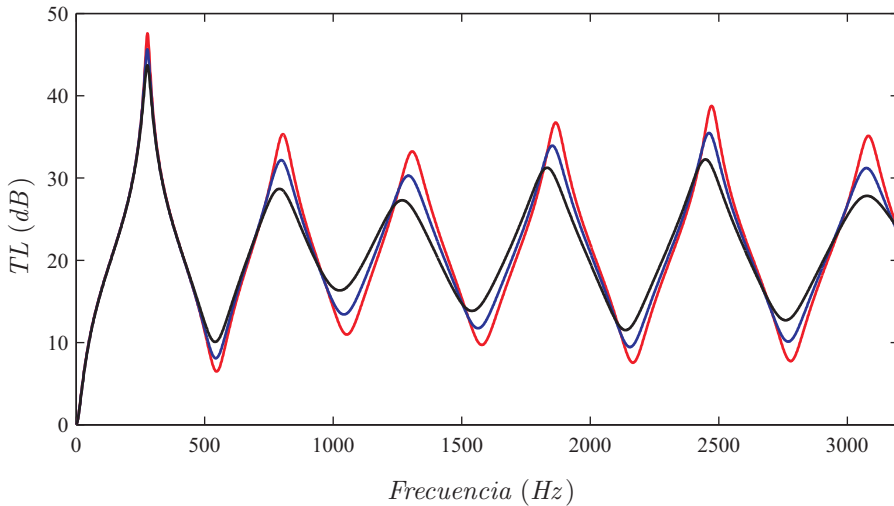


FIGURA 2.20:  $TL$  de cámara reversa con material absorbente y placa perforada: —,  $R = 1000$  rayl/m; —,  $R = 2000$  rayl/m; —,  $R = 4000$  rayl/m.

### 2.10.5. $TL$ de un resonador concéntrico

Considérese ahora el silenciador mostrado en la figura 2.21, que se caracteriza por el conducto perforado central cuya impedancia se denota mediante  $Z_p$ . En este caso

tenemos un carácter distribuido de las perforaciones a lo largo de la dirección de propagación lo que hace su análisis diferente de los anteriores. Se incluye la presencia de flujo medio para analizar el efecto de éste, que modifica la impedancia del tubo perforado e introduce el efecto convectivo correspondiente. Por simplicidad se asume que los conductos son circulares.

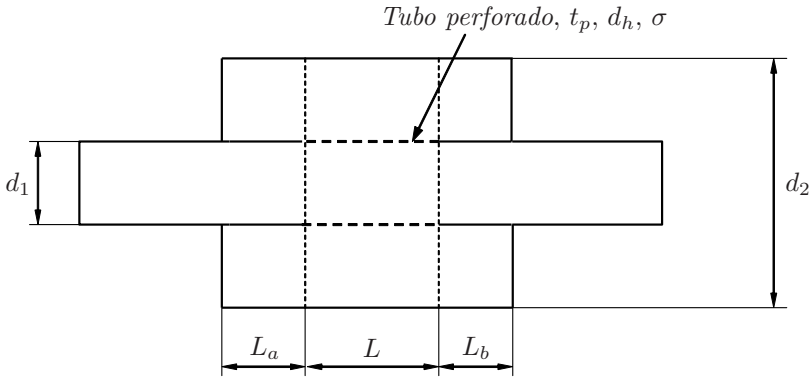


FIGURA 2.21: Silenciador con tubo perforado y flujo medio.

De los distintos métodos de modelado existentes, el mostrado aquí es el presentado por Munjal [94], con algunas correcciones. En el desarrollo se utiliza el subíndice 1 para denotar las variables asociadas al conducto y 2 para hacer referencia a la cámara. En una sección cualquiera en la que el conducto y la cámara están comunicados por medio del elemento perforado, las ecuaciones (2.26) y (2.28) de continuidad y equilibrio dinámico se pueden expresar como [135]

$$U_{fm1} \frac{\partial \rho_1}{\partial z} + \rho_0 \frac{\partial U_1}{\partial z} + \frac{4\rho_0}{d_1} U = -j\omega \rho_1 \quad (2.303)$$

$$\rho_0 \left( j\omega U_1 + U_{fm1} \frac{\partial U_1}{\partial z} \right) = -\frac{\partial P_1}{\partial z} \quad (2.304)$$

para el conducto y

$$U_{fm2} \frac{\partial \rho_2}{\partial z} + \rho_0 \frac{\partial U_2}{\partial z} - \frac{4d_1\rho_0}{d_2^2 - d_1^2} U = -j\omega \rho_2 \quad (2.305)$$

$$\rho_0 \left( j\omega U_2 + U_{fm2} \frac{\partial U_2}{\partial z} \right) = -\frac{\partial P_2}{\partial z} \quad (2.306)$$

para la cámara. En las ecuaciones previas  $d_1$  y  $d_2$  denotan los diámetros de conducto y cámara respectivamente,  $\rho_0$ ,  $U_{fm1}$  y  $U_{fm2}$  son valores promedio de densidad y velocidad de flujo medio,  $U_1$ ,  $U_2$ ,  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $\rho_1$  y  $\rho_2$  son las perturbaciones acústicas y  $U$  es la velocidad acústica radial en la superficie del conducto perforado. Debe notarse que con el modelo utilizado se está asumiendo la condición de continuidad de velocidad

radial. Más adelante se discutirá el efecto de dicha condición y algunas alternativas posibles. En base a la sección 2.5, puede escribirse

$$U(z) = \frac{P_1(z) - P_2(z)}{Z_p} \quad (2.307)$$

La condición de isentropía utilizada en la deducción de la ecuación de ondas es útil ahora, y permite eliminar las densidades  $\rho_1$  y  $\rho_2$ . Igualmente, pueden eliminarse las velocidades  $U_1$ ,  $U_2$  y  $U$ , resultando finalmente [94]

$$\begin{bmatrix} D^2 + \alpha_1 D + \alpha_2 & \alpha_3 D + \alpha_4 \\ \alpha_5 D + \alpha_6 & D^2 + \alpha_7 D + \alpha_8 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_1(z) \\ P_2(z) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.308)$$

donde  $D = \partial/\partial z$  y se ha introducido la siguiente notación:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= -\frac{jM_1}{1 - M_1^2} \left( \frac{k_a^2 + k_0^2}{k_0} \right) & \alpha_2 &= \frac{k_a^2}{1 - M_1^2} \\ \alpha_3 &= \frac{jM_1}{1 - M_1^2} \left( \frac{k_a^2 - k_0^2}{k_0} \right) & \alpha_4 &= -\left( \frac{k_a^2 - k_0^2}{1 - M_1^2} \right) \\ \alpha_5 &= \frac{jM_2}{1 - M_2^2} \left( \frac{k_b^2 - k_0^2}{k_0} \right) & \alpha_6 &= -\left( \frac{k_b^2 - k_0^2}{1 - M_2^2} \right) \\ \alpha_7 &= -\frac{jM_2}{1 - M_2^2} \left( \frac{k_b^2 + k_0^2}{k_0} \right) & \alpha_8 &= \frac{k_b^2}{1 - M_2^2} \\ k_a^2 &= k_0^2 - \frac{j4k_0\rho_0c_0}{d_1Z_p} & k_b^2 &= k_0^2 - \frac{j4k_0d_1\rho_0c_0}{(d_2^2 - d_1^2)Z_p} \end{aligned}$$

Para llevar a cabo la resolución de la expresión (2.308), se debe desacoplar el sistema de ecuaciones asociado, lo cual es posible al ser éste lineal, mediante la evaluación de los valores y vectores propios. Si se separa la matriz del sistema anterior en dos matrices, de modo que una de ellas multiplique a las derivadas de primer y segundo orden, y la otra multiplique a las derivadas de orden cero y primer orden, se comprueba fácilmente que el sistema inicial es equivalente a

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \alpha_1 & \alpha_3 \\ 0 & 1 & \alpha_5 & \alpha_7 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} D^2 P_1 \\ D^2 P_2 \\ DP_1 \\ DP_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_2 & \alpha_4 \\ 0 & 0 & \alpha_6 & \alpha_8 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} DP_1 \\ DP_2 \\ P_1 \\ P_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.309)$$

Este sistema de ecuaciones es del tipo  $[A]\{P'\} + [B]\{P\} = 0$ , de manera que asumiendo soluciones exponenciales, se convierte en un problema de valores y vectores propios donde la matriz correspondiente es  $-[A]^{-1}[B]$ . La transformación matricial que relaciona la solución buscada  $\{P\}$  con la solución en variables propias  $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$  y  $\Gamma_4$  es

$$\{P\} = [\psi]\{\Gamma\} \quad (2.310)$$

donde  $[\psi]$  es la matriz que contiene los vectores propios. Dado que  $\Gamma_i = C_i e^{\beta_i z}$ , puede escribirse

$$\frac{\partial P_1}{\partial z} = \sum_{i=1}^4 \psi_{1,i} C_i e^{\beta_i z} = \sum_{i=1}^4 C_i e^{\beta_i z} \quad (2.311)$$

$$\frac{\partial P_2}{\partial z} = \sum_{i=1}^4 \psi_{2,i} C_i e^{\beta_i z} \quad (2.312)$$

$$P_1 = \sum_{i=1}^4 \psi_{3,i} C_i e^{\beta_i z} \quad (2.313)$$

$$P_2 = \sum_{i=1}^4 \psi_{4,i} C_i e^{\beta_i z} \quad (2.314)$$

donde los vectores propios se han normalizado a primera componente unidad.

Para hallar  $U_1$  y  $U_2$  en función de la solución en presiones, se recurre a las ecuaciones de Euler (2.304) y (2.306), que establecen la relación entre ambos campos acústicos. Es conocida la forma de la derivada de  $P_1$ , y por tanto es inmediato el cálculo de  $U_1$ , ya que esta última también es de tipo exponencial. Escribiendo

$$U_1 = \sum_{i=1}^4 K_i e^{\beta_i z} \quad (2.315)$$

se observa que sólo se deben evaluar los coeficientes  $K_i$ . Realizando la sustitución de las ecuaciones (2.315) y (2.311) en la ecuación de equilibrio dinámico (2.304) se obtiene

$$K_i = -\frac{C_i}{j\rho_0\omega + \rho_0 U_{fm1}\beta_i} \quad (2.316)$$

y por tanto la velocidad en el conducto viene dada por

$$U_1 = \sum_{i=1}^4 -\frac{C_i}{j\rho_0\omega + \rho_0 U_{fm1}\beta_i} e^{\beta_i z} \quad (2.317)$$

La aplicación del desarrollo anterior se repite de igual forma para calcular la velocidad en la cámara exterior, sin más que tener en cuenta que las componentes de la segunda columna de la matriz de vectores propios ya no son la unidad. Finalmente resulta

$$U_2 = \sum_{i=1}^4 -\frac{\psi_{2,i} C_i}{j\rho_0\omega + \rho_0 U_{fm2}\beta_i} e^{\beta_i z} \quad (2.318)$$

Por conveniencia en los cálculos posteriores, se multiplican las velocidades por la impedancia característica del medio

$$\rho_0 c_0 U_1 = \sum_{i=1}^4 -\frac{C_i}{jk_0 + M_1 \beta_i} e^{\beta_i z} \quad (2.319)$$

$$\rho_0 c_0 U_2 = \sum_{i=1}^4 -\frac{\psi_{2,i} C_i}{jk_0 + M_2 \beta_i} e^{\beta_i z} \quad (2.320)$$

El conocimiento de la evolución espacial de las variables acústicas en la dirección longitudinal del silenciador implica la imposición de las condiciones de contorno oportunas. Sin embargo, el primer objetivo es obtener la matriz de transferencia del conducto perforado entre su sección inicial y final, para lo cual sólo es necesario conocer la relación entre dichas variables en los dos extremos del conducto. Puede expresarse la dependencia en  $z$  en función de las constantes  $C_i$

$$\begin{Bmatrix} P_1(z) \\ P_2(z) \\ \rho_0 c_0 U_1(z) \\ \rho_0 c_0 U_2(z) \end{Bmatrix} = [A(z)] \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{Bmatrix} \quad (2.321)$$

donde, en virtud de las expresiones (2.313), (2.314), (2.319) y (2.320), la matriz  $[A(z)]$  es conocida. La fórmula (2.321) puede ser evaluada en la sección inicial ( $z = 0$ ) y final ( $z = L$ ) del conducto perforado,

$$\begin{Bmatrix} P_1(0) \\ P_2(0) \\ \rho_0 c_0 U_1(0) \\ \rho_0 c_0 U_2(0) \end{Bmatrix} = [A(0)] \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{Bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} P_1(L) \\ P_2(L) \\ \rho_0 c_0 U_1(L) \\ \rho_0 c_0 U_2(L) \end{Bmatrix} = [A(L)] \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{Bmatrix} \quad (2.322)$$

de donde se deduce la igualdad

$$[A(0)]^{-1} \begin{Bmatrix} P_1(0) \\ P_2(0) \\ \rho_0 c_0 U_1(0) \\ \rho_0 c_0 U_2(0) \end{Bmatrix} = [A(L)]^{-1} \begin{Bmatrix} P_1(L) \\ P_2(L) \\ \rho_0 c_0 U_1(L) \\ \rho_0 c_0 U_2(L) \end{Bmatrix} \quad (2.323)$$

Por tanto, finalmente se llega a

$$\begin{Bmatrix} P_1(0) \\ P_2(0) \\ \rho_0 c_0 U_1(0) \\ \rho_0 c_0 U_2(0) \end{Bmatrix} = [A(0)][A(L)]^{-1} \begin{Bmatrix} P_1(L) \\ P_2(L) \\ \rho_0 c_0 U_1(L) \\ \rho_0 c_0 U_2(L) \end{Bmatrix} = [T] \begin{Bmatrix} P_1(L) \\ P_2(L) \\ \rho_0 c_0 U_1(L) \\ \rho_0 c_0 U_2(L) \end{Bmatrix} \quad (2.324)$$

El objetivo final es obtener la matriz de transferencia entre las variables acústicas en la entrada y la salida del silenciador, es decir, la relación entre las variables  $\{P_1(0) U_1(0)\}^T$  y  $\{P_1(L) U_1(L)\}^T$ . Para ello se deben imponer las condiciones adecuadas que permitan la eliminación de todos los campos acústicos pertenecientes a

la cámara en la expresión (2.324). Utilizando la información de la sección 2.4.5 para conductos extendidos, estas condiciones son

$$Z_2(0) = \frac{P_2(0)}{-U_2(0)} = j\rho_0 c_0 \cot(k_0 L_a) \quad (2.325)$$

$$Z_2(L) = \frac{P_2(L)}{U_2(L)} = -j\rho_0 c_0 \cot(k_0 L_b) \quad (2.326)$$

en las que se ha tenido en cuenta el sentido utilizado para la velocidad. La relación buscada es

$$\begin{Bmatrix} P_1(0) \\ U_1(0) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} T_a & \rho_0 c_0 T_b \\ T_c & T_d \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_1(L) \\ U_1(L) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_1(L) \\ U_1(L) \end{Bmatrix} \quad (2.327)$$

donde cada término de la matriz de transferencia se obtiene mediante las igualdades que siguen

$$\begin{aligned} T_a &= T_{11} + A_1 A_2 & T_b &= T_{13} + B_1 A_2 \\ T_c &= T_{31} + A_1 B_2 & T_d &= T_{33} + B_1 B_2 \\ A_1 &= \frac{X_1 T_{21} - T_{41}}{F_1} & B_1 &= \frac{X_1 T_{23} - T_{43}}{F_1} \\ A_2 &= T_{12} + X_2 T_{14} & B_2 &= T_{32} + X_2 T_{34} \end{aligned}$$

$$F_1 = T_{42} + X_2 T_{44} - X_1 (T_{22} + X_2 T_{24})$$

$$X_1 = -j \tan(k_0 L_a) \quad X_2 = j \tan(k_0 L_b)$$

siendo  $T_{ij}$ ,  $i, j = 1, \dots, 4$ , los términos de la matriz  $[T]$  definida en la expresión (2.324). A partir de la matriz de transferencia dada en la ecuación (2.327) se obtiene el  $TL$  de forma inmediata considerando la fórmula (2.275).

La condición impuesta en el modelo implica la continuidad de la velocidad radial  $U$  en el conducto perforado. Hay cierta tendencia generalizada a considerar la continuidad de desplazamiento [32, 34, 82, 85]. Si se desea plantear el modelo previo asumiendo continuidad del desplazamiento radial  $\xi$ , basta con tener en cuenta que [31]

$$U_{r1} = \frac{D\xi}{Dt} = j\omega\xi + U_{fm1} \frac{\partial\xi}{\partial z} \quad (2.328)$$

$$U_{r2} = \frac{D\xi}{Dt} = j\omega\xi + U_{fm2} \frac{\partial\xi}{\partial z} \quad (2.329)$$

donde  $U_{r1}$  y  $U_{r2}$  representan las velocidades radiales en el conducto y en la cámara, respectivamente, que son en general diferentes salvo en el caso en que no hay flujo medio. Así, puede modificarse el desarrollo previo para considerar la condición de continuidad de desplazamiento, que hace que la expresión (2.309) sea ahora

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} D^2 P_1 \\ D^2 P_2 \\ DP_1 \\ DP_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_5 & \alpha_6 \\ 0 & 0 & \alpha_7 & \alpha_8 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} DP_1 \\ DP_2 \\ P_1 \\ P_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.330)$$

donde se ha supuesto la circunstancia frecuente en que se desprecia el flujo medio en la cámara ( $M_2 = 0$ ). Los valores de  $\alpha$  están dados por

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 1 - M_1^2 - \frac{4M_1^2 \rho_0 c_0}{jk_0 d_1 Z_p} & \alpha_2 &= \frac{4M_1^2 \rho_0 c_0}{jk_0 d_1 Z_p} \\ \alpha_3 &= -\frac{8M_1 \rho_0 c_0}{d_1 Z_p} - j2M_1 k_0 & \alpha_4 &= \frac{8M_1 \rho_0 c_0}{d_1 Z_p} \\ \alpha_5 &= k_0^2 - \frac{j4k_0 \rho_0 c_0}{d_1 Z_p} & \alpha_6 &= \frac{j4k_0 \rho_0 c_0}{d_1 Z_p} \\ \alpha_7 &= \frac{j4k_0 d_1 \rho_0 c_0}{(d_2^2 - d_1^2) Z_p} & \alpha_8 &= k_0^2 - \frac{j4k_0 d_1 \rho_0 c_0}{(d_2^2 - d_1^2) Z_p} \end{aligned}$$

A partir de la expresión (2.330) se procede como en el caso anterior, es decir, se resuelve el problema de valores y vectores propios, se aplican las condiciones de contorno y se evalúa la matriz de cuatro polos del silenciador. Con ésta, el cálculo de la atenuación acústica es inmediato.

A continuación se muestran algunos resultados obtenidos con el modelo previo, asumiendo que en todos los casos no hay flujo en la cámara, es decir,  $M_2 = 0$ . Se considera una geometría de tipo circular definida por los valores  $d_1 = 0.049$  m,  $d_2 = 0.1644$  m,  $L = 0.2$  m y  $L_a = L_b = 0$  m. El tubo perforado tiene un espesor  $t_p = 0.001$  m, el diámetro de los orificios es  $d_h = 0.0035$  m y la porosidad es  $\sigma = 6\%$ . Para caracterizar el tubo perforado se utilizan las fórmulas (2.136) y (2.138). La figura 2.22 muestra el efecto del flujo medio en la atenuación acústica considerando la condición de continuidad de velocidad en la superficie del tubo. Se comprueba que el aumento de la velocidad de flujo medio produce una reducción de la atenuación a baja frecuencia. El aumento del valor mínimo de las bandas de paso es debido a la disipación asociada al conducto perforado.

La figura 2.23 muestra el efecto de la condición de contorno para  $M_1 = 0.1$  y  $M_1 = 0.15$ . Se consideran los dos casos indicados previamente, esto es, continuidad de velocidad y continuidad de desplazamiento. Se observa que los cálculos con la condición de velocidad, para las dos velocidades de flujo, proporcionan el mayor nivel de atenuación en prácticamente todo el rango de frecuencias. Puede comprobarse que

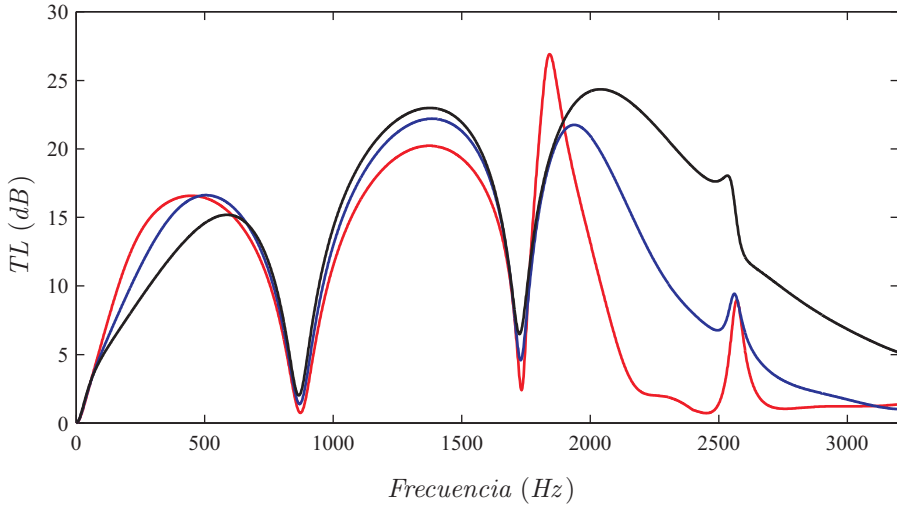


FIGURA 2.22:  $TL$  de resonador concéntrico: —,  $M = 0.1$ ; —,  $M = 0.15$ ; —,  $M = 0.2$ .

la condición de desplazamiento presenta ciertas deficiencias en determinados casos, prediciendo valores de atenuación negativos. Estos aspectos se discutirán con mayor detalle en el capítulo 3.

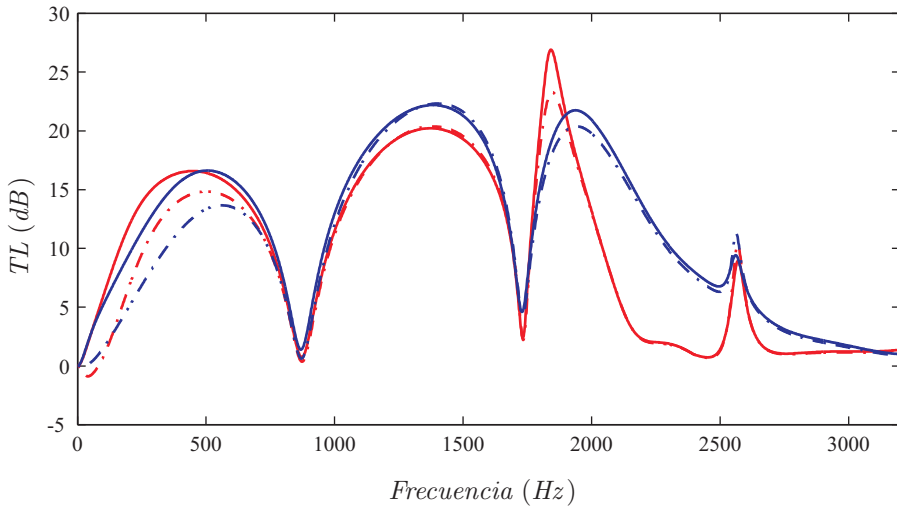


FIGURA 2.23: Efecto de la condición de continuidad en la superficie perforada: —,  $M = 0.1$ , velocidad; - - -, ídem, desplazamiento; —,  $M = 0.15$ , velocidad; - - -, ídem, desplazamiento.



### 2.10.6. $TL$ de un resonador concéntrico con material absorbente

La figura 2.24 muestra un resonador concéntrico con material absorbente en la cámara. Para esta configuración disipativa se seguirá un procedimiento similar al caso del resonador concéntrico, pues se tiene igualmente el carácter distribuido del material a lo largo de la dirección de propagación. Se asume que no existe flujo medio en la cámara con material absorbente [83, 94, 134].

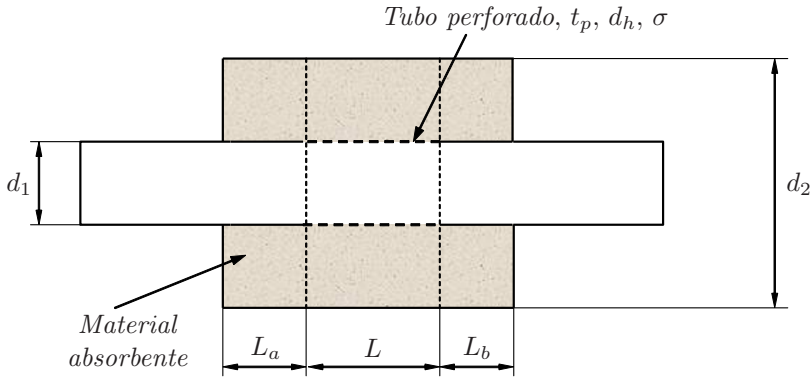


FIGURA 2.24: Silenciador con material absorbente, tubo perforado y flujo medio.

En una sección cualquiera, las ecuaciones (2.26) y (2.28) de continuidad y equilibrio dinámico se pueden expresar para el conducto como

$$U_{fm1} \frac{\partial \rho_1}{\partial z} + \rho_0 \frac{\partial U_1}{\partial z} + \frac{4\rho_0}{d_1} U = -j\omega \rho_1 \quad (2.331)$$

$$\rho_0 \left( j\omega U_1 + U_{fm1} \frac{\partial U_1}{\partial z} \right) = -\frac{\partial P_1}{\partial z} \quad (2.332)$$

y para la cámara como [141]

$$\tilde{\rho} \frac{\partial U_2}{\partial z} - \frac{4d_1 \tilde{\rho}}{d_2^2 - d_1^2} U = -j\omega \tilde{\rho} \quad (2.333)$$

$$j\omega \tilde{\rho} U_2 = -\frac{\partial P_2}{\partial z} \quad (2.334)$$

donde  $d_1$  y  $d_2$  son los diámetros de conducto y cámara respectivamente,  $\rho_0$  y  $\tilde{\rho}$  son valores promedio de densidad en el aire y en el material absorbente respectivamente,  $U_{fm1}$  es la velocidad de flujo medio, y  $U_1$ ,  $U_2$ ,  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $\rho_1$  y  $\tilde{\rho}_2$  son las perturbaciones acústicas. Se asume la condición de continuidad de velocidad radial, teniendo la misma condición en el perforado para el caso anterior

$$U(z) = \frac{P_1(z) - P_2(z)}{\tilde{Z}_p} \quad (2.335)$$

donde la impedancia  $\tilde{Z}_p$  debe adaptarse a la presencia de material absorbente. Siguiendo un procedimiento análogo al realizado con el resonador concéntrico se plantea el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{bmatrix} D^2 + \alpha_1 D + \alpha_2 & \alpha_3 D + \alpha_4 \\ \alpha_5 & D^2 + \alpha_6 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_1(z) \\ P_2(z) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.336)$$

donde  $D = \partial/\partial z$  y se ha introducido la siguiente notación:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= -\frac{1}{1 - M_1^2} \left( j2k_0 M_1 + \frac{4M_1 \rho_0 c_0}{d_1 \tilde{Z}_p} \right) & \alpha_2 &= \frac{1}{1 - M_1^2} \left( \tilde{k}^2 - \frac{4jk_0 \rho_0 c_0}{d_1 \tilde{Z}_p} \right) \\ \alpha_3 &= -\frac{1}{1 - M_1^2} \left( \frac{4M_1 \rho_0 c_0}{d_1 \tilde{Z}_p} \right) & \alpha_4 &= \frac{1}{1 - M_1^2} \left( \frac{4jk_0 \rho_0 c_0}{d_1 \tilde{Z}_p} \right) \\ \alpha_5 &= \frac{4d_1}{d_2^2 - d_1^2} \left( \frac{j\tilde{\rho} k_0 c_0}{\tilde{Z}_p} \right) & \alpha_6 &= \tilde{k}^2 - \frac{4d_1}{d_2^2 - d_1^2} \left( \frac{j\tilde{\rho} k_0 c_0}{\tilde{Z}_p} \right) \end{aligned}$$

siendo  $k_0 = \omega/c_0$  y  $\tilde{k} = \omega/\tilde{c}$  los números de onda en el aire y en el material absorbente respectivamente.

El sistema equivalente es

$$\begin{Bmatrix} D^2 P_1 \\ D^2 P_2 \\ DP_1 \\ DP_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\alpha_1 & -\alpha_3 & -\alpha_2 & -\alpha_4 \\ 0 & 0 & -\alpha_5 & -\alpha_6 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} DP_1 \\ DP_2 \\ P_1 \\ P_2 \end{Bmatrix} \quad (2.337)$$

que es un sistema de ecuaciones de tipo  $\{P'\} = [A]\{P\}$ . A partir de la ecuación (2.337) se procede de manera idéntica al caso anterior, evaluando la matriz de cuatro polos del silenciador. Con ésta, la atenuación acústica se calcula de manera inmediata.

A continuación se muestran algunos resultados obtenidos mediante la aplicación del modelo previo. Se considera de nuevo la geometría estudiada en la sección 2.10.5, definida por los valores  $d_1 = 0.049$  m,  $d_2 = 0.1644$  m,  $L = 0.2$  m y  $L_a = L_b = 0$  m. Se consideran además los valores  $t_p = 0.001$  m,  $d_h = 0.0035$  m,  $\sigma = 6\%$  y  $R = 4896$  rayl/m. La impedancia del tubo perforado se calcula en este caso, utilizando la expresión (2.174). En lo referente al material absorbente, se caracteriza mediante las expresiones (2.301) y (2.302). La figura 2.25 muestra el efecto que tiene el flujo medio en el  $TL$  para los valores  $M_1 = 0.1$ ,  $M_1 = 0.15$  y  $M_1 = 0.2$ . Se puede observar que a frecuencias bajas, mayores velocidades de flujo dan lugar a una atenuación menor, si bien este comportamiento se invierte a frecuencias altas. La introducción del material en la cámara elimina las bandas de paso que aparecen en el caso de resonador concéntrico sin material absorbente.

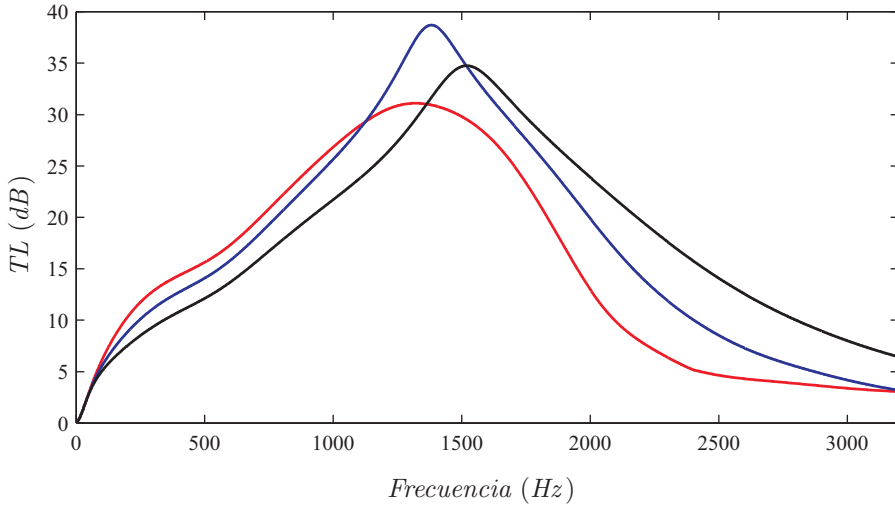


FIGURA 2.25: *TL de resonador concéntrico con material absorbente: —,  $M = 0.1$ ; —,  $M = 0.15$ ; —,  $M = 0.2$ .*

### 2.10.7. TL de un catalizador bicónico

La figura 2.26 muestra un catalizador bicónico formado por los tubos de entrada y salida, el monolito y dos conductos troncocónicos de transición geométrica (divergente y convergente). En base a lo visto en la sección 2.8.2, la matriz de transferencia del monolito en ausencia de flujo medio viene dada por

$$\begin{bmatrix} \cos(k_m L_m) & j Z_m \operatorname{sen}(k_m L_m) \\ \frac{j}{Z_m} \operatorname{sen}(k_m L_m) & \cos(k_m L_m) \end{bmatrix} \quad (2.338)$$

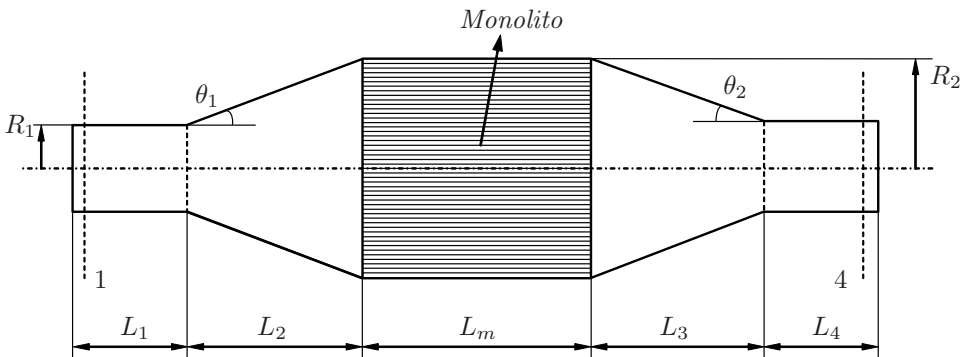


FIGURA 2.26: *Catalizador bicónico.*

Las zonas de transición en la entrada y salida del monolito reciben el mismo trata-

miento que el caso de cambio de sección, y por tanto la matriz de transferencia que relaciona las variables acústicas aguas arriba y aguas abajo de la entrada del monolito se escribe como

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \phi \end{bmatrix} \quad (2.339)$$

De la misma manera, para la salida del monolito se obtiene

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\phi} \end{bmatrix} \quad (2.340)$$

siendo  $\phi$  la porosidad del monolito.

La matriz de transferencia global del catalizador se obtiene sin más que multiplicar ordenadamente las matrices correspondientes a cada elemento, de manera que se puede escribir

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} P_1 \\ U_1 \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{bmatrix} [T_{div}] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(k_m L_m) & j Z_m \sin(k_m L_m) \\ \frac{j}{Z_m} \sin(k_m L_m) & \cos(k_m L_m) \end{bmatrix} \\ &\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\phi} \end{bmatrix} [T_{conv}] \begin{bmatrix} A_4 & B_4 \\ C_4 & D_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_4 \\ U_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_4 \\ U_4 \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (2.341)$$

donde  $[T_{div}]$  y  $[T_{conv}]$  son las matrices de transferencia de los conductos cónicos (divergente y convergente), dadas por las expresiones (2.94) y (2.99). El  $TL$  asociado se obtiene de nuevo a partir de la expresión (2.275).

La figura 2.27 muestra los resultados obtenidos para un catalizador caracterizado por las siguientes dimensiones:  $L_1 = L_4 = 0.05$  m,  $L_2 = L_3 = 0.03$  m,  $L_m = 0.135$  m,  $R_1 = 0.0268$  m,  $R_2 = 0.0886$  m y  $\theta_1 = \theta_2 = 64.106^\circ$ . Los valores del medio son los siguientes:  $\mu = 1.802 \cdot 10^{-5}$  Pa s,  $C_p = 1007$  J/(kg K) y  $\kappa = 0.02476$  W/(m K). Los conductos capilares son de sección transversal cuadrada, de modo que se toma  $\alpha = 1.07$ . El parámetro a variar es la resistividad, para la que se consideran los valores  $R = 500$  rayl/m,  $R = 750$  rayl/m y  $R = 1000$  rayl/m. Se supone que se mantiene el mismo valor de porosidad, dado por  $\phi = 0.8$ . Se puede comprobar que a baja frecuencia se obtiene la misma atenuación. Para frecuencias medias y altas, la atenuación aumenta como consecuencia del aumento de la resistividad.

En el caso en el que exista flujo medio en los capilares, en la expresión (2.341) se sustituye el producto matricial

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(k_m L_m) & j Z_m \sin(k_m L_m) \\ \frac{j}{Z_m} \sin(k_m L_m) & \cos(k_m L_m) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\phi} \end{bmatrix} \quad (2.342)$$

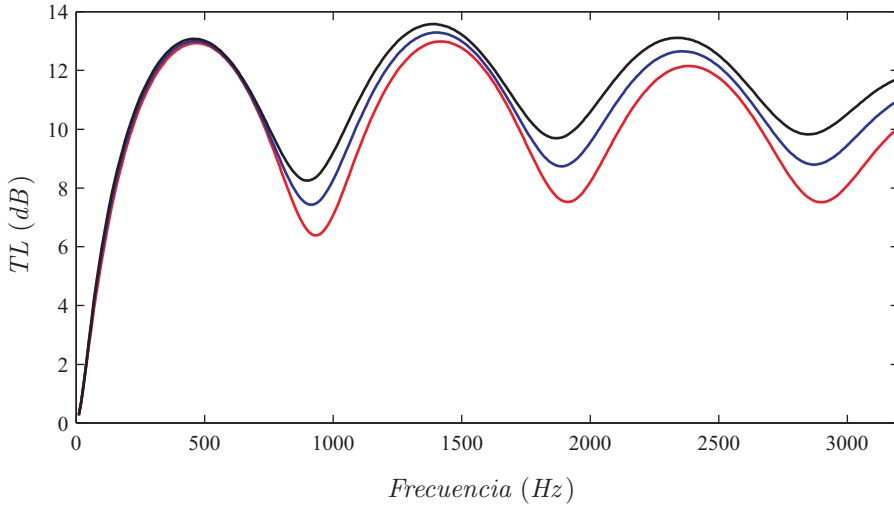


FIGURA 2.27:  $TL$  de catalizador bicónico sin flujo medio, capilares cuadrados:  
—,  $R = 500$  rayl/m; —,  $R = 750$  rayl/m;  
—,  $R = 1000$  rayl/m.

por la matriz  $[T^m]$  dada por la expresión (2.236), de manera que la matriz de transferencia global del catalizador con flujo medio en los capilares se expresa de la siguiente manera

$$\begin{Bmatrix} P_1 \\ U_1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{bmatrix} [T_{div}] [T^m] [T_{conv}] \begin{bmatrix} A_4 & B_4 \\ C_4 & D_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_4 \\ U_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_4 \\ U_4 \end{Bmatrix} \quad (2.343)$$

La figura 2.28 muestra el efecto que tiene el flujo medio en el  $TL$ . Para ello se considera la geometría estudiada en el caso anterior. El monolito está construido con capilares circulares y el valor del área transversal de cada uno es de  $10^{-6}$  m<sup>2</sup>. Para el flujo medio en los conductos de entrada y salida se consideran los valores  $M = 0.1$ ,  $M = 0.15$  y  $M = 0.2$ , con un valor constante de porosidad  $\phi = 0.8$ . Se comprueba que el aumento de la velocidad de flujo medio produce una reducción de la atenuación en la mayor parte del intervalo de frecuencias considerado. Se puede observar que con mayores valores de flujo medio, las cúpulas de atenuación se desplazan hacia frecuencias más bajas. Cabe indicar que la aparición de valores negativos de atenuación a bajas frecuencias es debida al modelo utilizado para los capilares, que admite posibles mejoras.

La figura 2.29 muestra el efecto que tiene la velocidad de flujo medio en el índice de pérdidas de transmisión cuando se utilizan capilares de sección transversal cuadrada cuyo lado es de  $10^{-3}$  m. Se analiza la misma geometría estudiada en los dos casos anteriores manteniéndose los mismos valores de  $\mu$ ,  $C_p$ ,  $\kappa$  y  $\phi$ . Para el flujo medio se consideran de nuevo los valores  $M = 0.1$ ,  $M = 0.15$  y  $M = 0.2$ . Puede observarse que

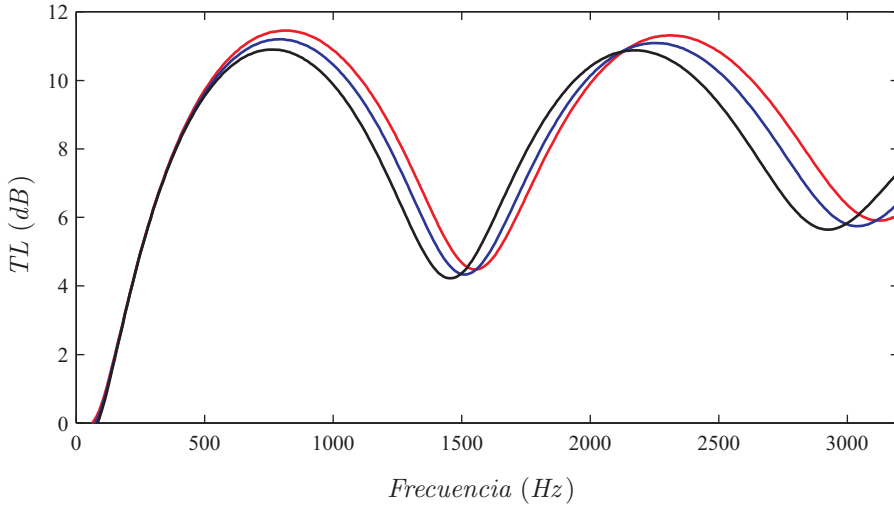


FIGURA 2.28:  $TL$  de catalizador bicónico con flujo medio, capilares circulares: —,  $M = 0.1$ ; —,  $M = 0.15$ ; —,  $M = 0.2$ .

los comentarios anteriores son aplicables en el sentido de que a mayor velocidad de flujo medio se obtienen menores valores de atenuación acústica en la mayor parte del intervalo. Se comprueba de nuevo que las cúpulas de atenuación se desplazan hacia frecuencias más bajas al introducir el efecto convectivo del flujo medio. Al igual que en el caso anterior, las inexactitudes en la atenuación acústica a bajas frecuencias son debidas al modelo utilizado para la caracterización del monolito.

### 2.10.8. Limitaciones

Como se ha comentado anteriormente, el campo acústico no puede ser unidimensional en ciertas tipologías de cambio de sección transversal, con lo cual la solución del modelo de onda plana es siempre aproximada. Además, el modelo de onda plana proporciona los mismos resultados con independencia de la geometría concreta de la sección transversal, siempre que ésta sea uniforme en dirección axial, y no se tiene en consideración tampoco la posición transversal de los diferentes conductos (por ejemplo, el descentrado de un tubo). Esto supone una limitación importante de los modelos de onda plana, sobre todo al aumentar la frecuencia, puesto que las imprecisiones se acentúan.

Para ilustrar lo anterior se considera como ejemplo el catalizador bicónico estudiado en la sección 2.10.7 cuyas dimensiones son:  $L_1 = L_4 = 0.05$  m,  $L_2 = L_3 = 0.03$  m,  $L_m = 0.135$  m,  $R_1 = 0.0268$  m,  $R_2 = 0.0886$  m y  $\theta_1 = \theta_2 = 64.106^\circ$ . Los valores del medio son los siguientes:  $\mu = 1.802 \cdot 10^{-5}$  Pa s,  $C_p = 1007$  J/(kg K) y  $\kappa = 0.02476$  W/(m K). Los conductos capilares son de sección transversal cuadrada, de modo que

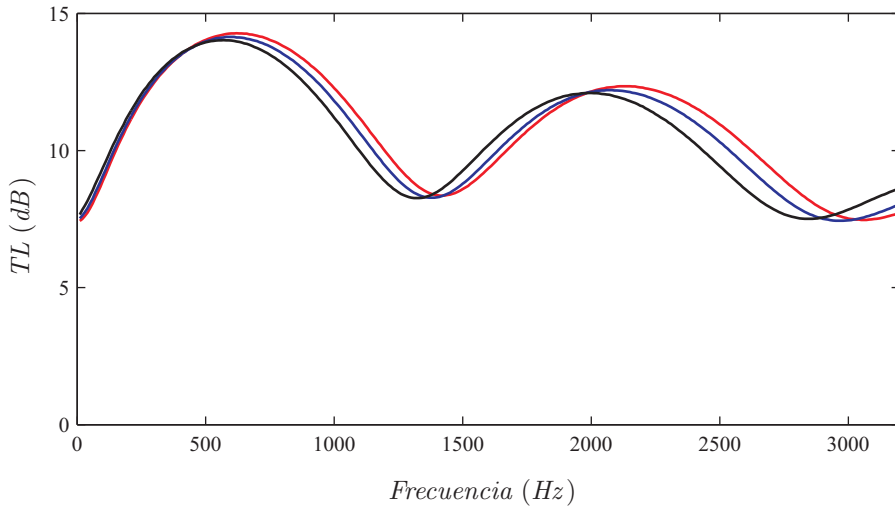


FIGURA 2.29: *TL de catalizador bicónico con flujo medio, capilares cuadrados:*  
 —,  $M = 0.1$ ; —,  $M = 0.15$ ; —,  $M = 0.2$ .

se toma  $\alpha = 1.07$ . Para la resistividad se toma el valor  $R = 500$  rayl/m y la porosidad viene dada por  $\phi = 0.8$ . Los resultados obtenidos mediante el modelo de onda plana y el cálculo de elementos finitos se muestran en la figura 2.30. Se puede observar una notable discrepancia a partir de un valor de frecuencia bajo, en torno a 930 Hz. El modelado mediante elementos finitos se considera en los capítulos 3 y 4. Cabe indicar que para los cálculos de elementos finitos se ha aplicado la técnica 3D conductos/3D monolito que se presentará en la sección 4.2.1.

## 2.11. Conclusiones

En este capítulo se han introducido las ecuaciones fundamentales del comportamiento acústico de un fluido y los modelos lineales asociados, resultantes de aplicar ciertas hipótesis que permiten simplificar considerablemente el desarrollo matemático. Además se han presentado diferentes representaciones matriciales existentes en la literatura, que han sido adaptadas y aplicadas a ciertos elementos de los silenciadores (tubos, cambio de sección, etc.) y de los catalizadores (monolito) para cuantificar su comportamiento acústico. Se ha realizado igualmente una revisión bibliográfica de los modelos existentes para la caracterización de elementos perforados y la presencia de material absorbente, detallando los que se utilizarán a lo largo de esta Tesis.

Se han presentado algunas configuraciones de dos componentes de la línea de escape (silenciadores y catalizadores), los fenómenos que originan la atenuación y los índices que se suelen considerar para la cuantificación de ésta. En base a la presen-

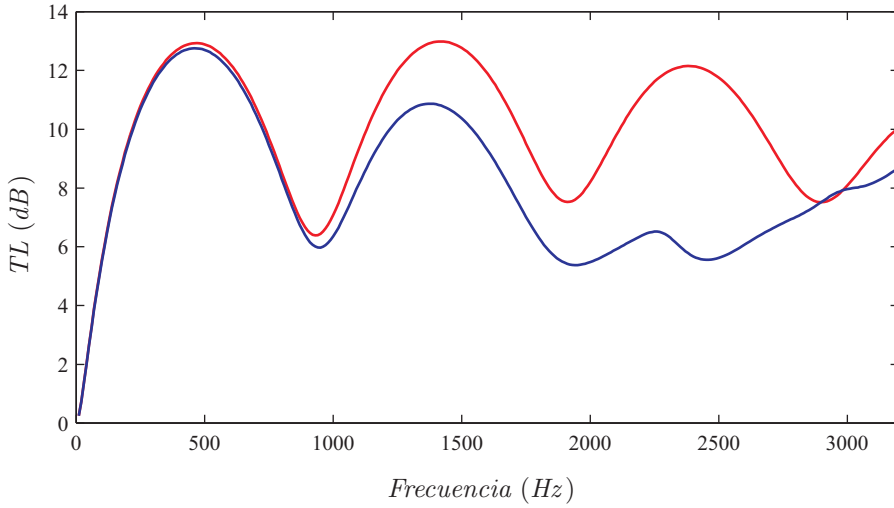


FIGURA 2.30: Comparación de TL obtenido mediante onda plana y elementos finitos: —, onda plana; —, MEF.

tación matricial se ha evaluado la reducción de ruido correspondiente a geometrías concretas, entre las que se encuentran silenciadores reactivos, y silenciadores con superficies perforadas y material absorbente.

Se han estudiado, mediante los modelos de onda plana, silenciadores de geometrías novedosas como es el caso del silenciador con doble salida opuesta y la cámara reversa con material absorbente y placa perforada. Ambos silenciadores se modelarán tridimensionalmente en los capítulos posteriores. Adicionalmente se ha presentado el modelado unidimensional de catalizadores con conductos troncocónicos en ausencia de flujo medio y también en presencia de éste.

Por último, se han mostrado las deficiencias asociadas a la hipótesis de onda plana. Entre otras, cabe destacar que este tipo de modelado no es sensible a la geometría de la sección transversal, y por tanto predice los mismos resultados, por ejemplo, para silenciadores y catalizadores circulares y elípticos, lo cual no es cierto. Tampoco es posible considerar con estos modelos el efecto de la variación de la posición transversal de los distintos conductos. En definitiva, se ha justificado la necesidad de desarrollar modelos más precisos y versátiles, tarea que se lleva a cabo en los siguientes capítulos.



## Capítulo 3

# Modelado acústico multidimensional de silenciadores con material absorbente mediante elementos finitos

### Resumen del capítulo:

*En este capítulo se aplica el método de elementos finitos al modelado acústico de silenciadores con material absorbente considerando la formulación en presiones. Se detallan los pasos más relevantes de la aplicación del método, desde el planteamiento del residuo ponderado hasta la formulación matricial de la forma integral asociada a dicho residuo. Se incluye el modelado de la propagación de ondas en el seno de materiales absorbentes. Además, se considera el acoplamiento de diversos subcomponentes del silenciador mediante placas y tubos perforados cuando existe flujo medio, y se estudia la influencia de las condiciones de contorno asociadas a la superficie perforada en el TL. Para ello, se comparan los resultados obtenidos mediante elementos finitos (con continuidad de velocidad y continuidad de desplazamiento) con medidas experimentales. Finalmente se aplica el método a distintas configuraciones de interés. Con las herramientas desarrolladas en este capítulo se pretende subsanar y completar las deficiencias y lagunas encontradas en los programas comerciales disponibles.*



## 3.1. Introducción

El método de los elementos finitos (MEF) es una herramienta numérica capaz de abordar problemas de ingeniería diversos [149], sin las limitaciones habituales que presentan las técnicas analíticas cuando se trata de geometrías arbitrarias, propiedades no uniformes y condiciones de contorno complejas. Su elevado coste computacional es un inconveniente a considerar, que puede reducir en algunos casos su aplicabilidad.

Debido a las limitaciones que presenta el método de onda plana, indicadas en el capítulo anterior, se lleva a cabo ahora la aplicación del método de elementos finitos al estudio acústico de silenciadores. En esta Tesis, se utiliza el método de elementos finitos con dos fines fundamentales: como técnica de cálculo de silenciadores de geometrías complejas y como herramienta de validación de otras metodologías.

El método de elementos finitos se empezó a utilizar para el cálculo de estructuras [149], y fue extendido a aplicaciones acústicas por Gladwell *et al.* [60–62] y Craggs [27, 28]. Los trabajos iniciales con elementos finitos se limitaban a la resolución de la ecuación de ondas de Helmholtz en un medio en reposo y sin fenómenos disipativos presentes. Young y Crocker [146, 147] aplican el método de elementos finitos al estudio de silenciadores, en las condiciones más simples, sin flujo medio ni conductos perforados. Posteriormente Craggs [29] considera la inclusión de disipación en los modelos en base a un planteamiento variacional, y lleva a cabo la resolución mediante la formulación de elementos finitos. El mismo autor estudia la presencia de material absorbente imponiendo su impedancia acústica en las condiciones de contorno sin considerar la propagación en su interior [30], planteamiento válido para espesores delgados.

El efecto convectivo producido por el flujo medio, supuesto éste potencial, fue estudiado por diversos autores. Sigman *et al.* [130] y Abrahamson [1] incluyen flujo medio en los modelos, considerando como variable el potencial de velocidad. La ventaja de esta formulación radica en el hecho de que la inclusión de los gradientes del campo de flujo medio es muy sencilla, cosa que no ocurre con una formulación en presión. Astley y Eversman [10] llevan a cabo el análisis de conductos no uniformes con flujo medio utilizando una formulación en presión y velocidad y un campo de flujo medio simplificado. Ross [112] presenta la aplicación del método de elementos finitos al estudio de silenciadores con regiones perforadas, pero sólo incluye el efecto del flujo medio en la impedancia de éstas, de manera que el efecto convectivo no es tenido en cuenta. Peat [99] aplica el método a la ecuación de ondas convectiva formulado en potencial de velocidad y obtiene los cuatro polos de un conducto.

Actualmente hay dos campos de trabajo activos: los modelos completos que consideren flujo medio, material absorbente y superficie perforada, y la determinación de la condición de contorno más adecuada en la superficie perforada. Ambas problemáticas se estudiarán en este capítulo.

### 3.2. Aplicación del MEF a la ecuación de ondas convectiva. Configuración sin material absorbente

Se aplica en esta sección la formulación del método de elementos finitos a la ecuación de ondas convectiva, resaltando los aspectos más relevantes. En el caso sin flujo medio, los resultados son válidos sin más que eliminar los términos asociados a la velocidad del medio de propagación. Por su generalidad, se elige el método de residuos ponderados en combinación con la formulación de Galerkin [64, 149]. Se considera inicialmente un dominio sin material absorbente. Éste se incluye posteriormente en la sección 3.4.

#### 3.2.1. Formulación en presión

La figura 3.1 muestra un silenciador genérico en cuyo interior se pretende resolver la ecuación de ondas (2.33). Se denota mediante  $\Omega$  y  $\Gamma$  el dominio y el contorno asociado, respectivamente.

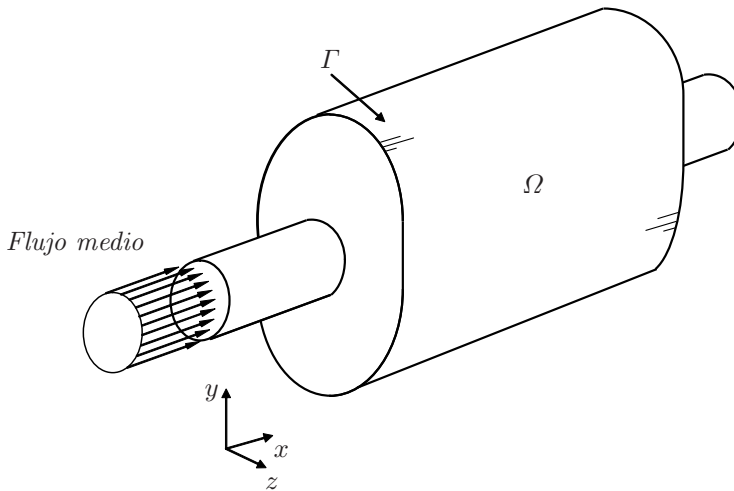


FIGURA 3.1: *Silenciador genérico.*

La propagación del sonido en el interior del silenciador está gobernada, en presencia de flujo medio uniforme, por la ecuación

$$\nabla^2 p - \frac{1}{c_0^2} \frac{D^2 p}{Dt^2} = 0 \quad (3.1)$$

Considerando comportamiento armónico, se tiene  $p = Pe^{j\omega t}$  y por tanto

$$\begin{aligned}
& \left(1 - \frac{U_{fm}^2}{c_0^2}\right) \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \left(1 - \frac{V_{fm}^2}{c_0^2}\right) \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + \left(1 - \frac{W_{fm}^2}{c_0^2}\right) \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} \\
& - 2 \frac{U_{fm} V_{fm}}{c_0^2} \frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y} - 2 \frac{U_{fm} W_{fm}}{c_0^2} \frac{\partial^2 P}{\partial x \partial z} - 2 \frac{V_{fm} W_{fm}}{c_0^2} \frac{\partial^2 P}{\partial y \partial z} \\
& - 2j\omega \frac{U_{fm}}{c_0^2} \frac{\partial P}{\partial x} - 2j\omega \frac{V_{fm}}{c_0^2} \frac{\partial P}{\partial y} - 2j\omega \frac{W_{fm}}{c_0^2} \frac{\partial P}{\partial z} + k_0^2 P = 0
\end{aligned} \tag{3.2}$$

El campo de velocidades de flujo medio  $\vec{U}_{fm} = U_{fm}\vec{i} + V_{fm}\vec{j} + W_{fm}\vec{k}$  se supone conocido y es uniforme. La ecuación (3.2) se multiplica por una función de ponderación  $\Psi$  y se integra en el dominio del problema  $\Omega$  [149]. Como es habitual en este tipo de problemas, se aplica el teorema de Green [149] reduciendo el grado de derivación existente en la función incógnita, obteniéndose

$$\int_{\Omega} \nabla^T \Psi [D] \nabla P d\Omega + \frac{2j\omega}{c_0^2} \int_{\Omega} \Psi \vec{U}_{fm}^T \nabla P d\Omega - k_0^2 \int_{\Omega} \Psi P d\Omega - \int_{\Gamma} \Psi \frac{\partial P}{\partial n} \vec{n}^T [D] \vec{n} d\Gamma = 0 \tag{3.3}$$

donde la matriz  $[D]$  se expresa por

$$[D] = \begin{bmatrix} 1 - \frac{U_{fm}^2}{c_0^2} & -\frac{U_{fm} V_{fm}}{c_0^2} & -\frac{U_{fm} W_{fm}}{c_0^2} \\ -\frac{V_{fm} U_{fm}}{c_0^2} & 1 - \frac{V_{fm}^2}{c_0^2} & -\frac{V_{fm} W_{fm}}{c_0^2} \\ -\frac{W_{fm} U_{fm}}{c_0^2} & -\frac{W_{fm} V_{fm}}{c_0^2} & 1 - \frac{W_{fm}^2}{c_0^2} \end{bmatrix} \tag{3.4}$$

y  $\vec{n}$  es el vector unitario normal al contorno en sentido saliente. Si se discretiza el dominio en  $N_e$  elementos de volumen  $\Omega^e$  (considerando que tanto  $P$  como  $\Psi$  presentan continuidad  $C^0$ ), la ecuación (3.3) se escribe como

$$\begin{aligned}
& \sum_{e=1}^{N_e} \int_{\Omega^e} \nabla^T \Psi^{(e)} [D] \nabla P^{(e)} d\Omega + \frac{2j\omega}{c_0^2} \sum_{e=1}^{N_e} \int_{\Omega^e} \Psi^{(e)} \vec{U}_{fm}^T \nabla P^{(e)} d\Omega \\
& - k_0^2 \sum_{e=1}^{N_e} \int_{\Omega^e} \Psi^{(e)} P^{(e)} d\Omega - \sum_{e=1}^{N_e} \int_{\Gamma \cap \Gamma^e} \Psi^{(e)} \frac{\partial P^{(e)}}{\partial n} \vec{n}^T [D] \vec{n} d\Gamma = 0
\end{aligned} \tag{3.5}$$

La interpolación nodal de elementos finitos permite escribir para un elemento  $e$

$$P^{(e)} = [N] \{P^{(e)}\} \tag{3.6}$$

donde  $[N]$  es el vector de funciones de forma<sup>1</sup> y  $\{P^{(e)}\}$  es el vector que contiene los valores nodales de la función incógnita, que en el presente caso es la presión. Por

<sup>1</sup>A lo largo de la Tesis, las matrices se denotan mediante el símbolo  $[\ ]$  y los vectores con la notación  $\{ \}$ . En general,  $[N]$  puede ser una matriz, excepto en aquellos casos en que sólo hay un grado de libertad por nodo, tal como ocurre en el problema acústico considerado aquí. Además, por defecto los vectores se consideran en columna, salvo  $[N]$  que es un vector fila.

otro lado, la utilización de la formulación de Galerkin [107] expresa la función de ponderación como

$$\Psi^{(e)} = [N]\{\Psi^{(e)}\} \quad (3.7)$$

Aplicando las expresiones (3.6) y (3.7) al desarrollo de la ecuación (3.5) se tiene

$$\begin{aligned} & \sum_{e=1}^{N_e} \{\Psi^{(e)}\}^T \int_{\Omega^e} [B]^T [D] [B] d\Omega \{P^{(e)}\} + \sum_{e=1}^{N_e} \{\Psi^{(e)}\}^T \int_{\Omega^e} \frac{2j\omega}{c_0^2} [N]^T \vec{U}_{fm}^T [B] d\Omega \{P^{(e)}\} \\ & - \sum_{e=1}^{N_e} \{\Psi^{(e)}\}^T \int_{\Omega^e} k_0^2 [N]^T [N] d\Omega \{P^{(e)}\} - \sum_{e=1}^{N_e} \{\Psi^{(e)}\}^T \int_{\Gamma \cap \Gamma^e} [N]^T \frac{\partial P^{(e)}}{\partial n} \vec{n}^T [D] \vec{n} d\Gamma = 0 \end{aligned} \quad (3.8)$$

en la que  $[B]$  es la matriz de derivadas de las funciones de forma, dada por

$$[B] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \cdots & \frac{\partial N_{N_{pe}}}{\partial x} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \cdots & \frac{\partial N_{N_{pe}}}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial z} & \frac{\partial N_2}{\partial z} & \cdots & \frac{\partial N_{N_{pe}}}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

siendo  $N_{pe}$  el número de nodos por elemento.

La expresión (3.8) puede escribirse de manera más compacta

$$\begin{aligned} & \sum_{e=1}^{N_e} \{\Psi^{(e)}\}^T [k^{(e)}] \{P^{(e)}\} + j\omega \sum_{e=1}^{N_e} \{\Psi^{(e)}\}^T [c^{(e)}] \{P^{(e)}\} \\ & - \omega^2 \sum_{e=1}^{N_e} \{\Psi^{(e)}\}^T [m^{(e)}] \{P^{(e)}\} - \sum_{e=1}^{N_e} \{\Psi^{(e)}\}^T \{f^{(e)}\} = 0 \end{aligned} \quad (3.10)$$

se introduce ahora la siguiente nomenclatura para las matrices de elemento

$$[k^{(e)}] = \int_{\Omega^e} [B]^T [D] [B] d\Omega \quad (3.11)$$

$$[c^{(e)}] = \frac{2}{c_0^2} \int_{\Omega^e} [N]^T \vec{U}_{fm}^T [B] d\Omega \quad (3.12)$$

$$[m^{(e)}] = \frac{1}{c_0^2} \int_{\Omega^e} [N]^T [N] d\Omega \quad (3.13)$$

$$\{f^{(e)}\} = \int_{\Gamma \cap \Gamma^e} [N]^T \frac{\partial P^{(e)}}{\partial n} \vec{n}^T [D] \vec{n} d\Gamma \quad (3.14)$$

El ensamblado de las matrices de elemento da lugar a las matrices globales del problema, obteniéndose

$$\{\Psi\}^T (([K] + j\omega[C] - \omega^2[M]) \{P\} - \{F\}) = \{0\} \quad (3.15)$$

como la ecuación anterior debe ser válida para cualquier función de ponderación, se obtiene finalmente

$$([K] + j\omega[C] - \omega^2[M]) \{P\} = \{F\} \quad (3.16)$$

En este momento, es necesario considerar las condiciones de contorno de Dirichlet (valor de la presión conocido en una parte del contorno  $\Gamma$  del problema). Estas condiciones se imponen fácilmente en la ecuación (3.16), considerando el valor conocido de  $P = \tilde{P}$  en los nodos correspondientes del contorno.

Los valores nodales de la presión se obtienen resolviendo el sistema de ecuaciones (3.16) junto con las condiciones de Dirichlet. La velocidad acústica en un elemento cualquiera  $e$  se puede calcular utilizando las ecuaciones de Euler (2.28). En el caso en el que no hay flujo medio, se tiene

$$\vec{U}^{(e)} = -\frac{1}{j\rho_0\omega} [B] \{P^{(e)}\} \quad (3.17)$$

En presencia de flujo, el procedimiento es más laborioso. Por ejemplo, para obtener los valores nodales de la velocidad en  $x$ , esto es,  $\{U^{(e)}\}$ , puede escribirse

$$-\frac{1}{\rho_0} [\partial N_1 / \partial x \quad \partial N_2 / \partial x \quad \dots \quad \partial N_{N_{pe}} / \partial x] \{P^{(e)}\} = (j\omega[N] + \vec{U}_{fm}^T [B]) \{U^{(e)}\} \quad (3.18)$$

de manera que evaluando esta expresión en  $N_{pe}$  puntos, resulta un sistema de  $N_{pe}$  ecuaciones e incógnitas que permite calcular  $\{U^{(e)}\}$ . En general el procedimiento es más sencillo, debido a que sólo interesa el conocimiento de la velocidad en las secciones de entrada y salida, bien para calcular el  $TL$ , bien para obtener la matriz de transferencia del silenciador. Usualmente en los conductos que contienen dichas secciones puede considerarse onda plana a una distancia suficiente de las discontinuidades geométricas asociadas a las expansiones y contracciones. Por tanto, basta con conocer la presión en dos puntos de un conducto para hallar la velocidad, sin más que utilizar las expresiones (2.61) y (2.63) del capítulo previo.

### 1. Vector de carga

La existencia de un gradiente de presión, condición de Neumann, en la superficie de una parte del contorno  $\Gamma$  genera un vector de carga  $\{F\}$ . Por tanto, la condición de contorno natural que resulta de no considerar  $\{F\}$  corresponde a la velocidad normal nula, es decir, una pared rígida. Aunque no es usual en la formulación en presión (en presencia de flujo medio), puede imponerse en las secciones de entrada y salida del silenciador una velocidad normal de valor  $\tilde{U}$ . La implementación de esta condición se simplifica considerablemente en los problemas tratados aquí, ya que un silenciador

suele tener secciones de entrada y salida planas y perpendiculares a algún eje del sistema de referencia. En general puede considerarse también que los conductos de entrada y salida son suficientemente largos y su sección transversal es axialmente uniforme, lo cual implica que la velocidad de flujo medio es paralela al conducto. En el caso concreto en el que el conducto es paralelo al eje  $x$ , la condición de velocidad en su sección transversal da lugar a

$$\begin{aligned}
 \{f^{(e)}\} &= \int_{\Gamma \cap \Gamma^e} [N]^T \frac{\partial P^{(e)}}{\partial n} \vec{n}^T [D] \vec{n} d\Gamma \\
 &= \int_{\Gamma \cap \Gamma^e} [N]^T \frac{\partial P^{(e)}}{\partial n} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 - U_{fm}^2/c_0^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} d\Gamma \\
 &= -\rho_0 (1 - M^2) \int_{\Gamma \cap \Gamma^e} [N]^T \left( j\omega \tilde{U}^{(e)} + U_{fm} \frac{\partial [N]}{\partial x} \{ \tilde{U}^{(e)} \} \right) d\Gamma
 \end{aligned} \tag{3.19}$$

Para llevar a cabo la integración anterior, debe evaluarse la distribución nodal de  $\tilde{U}^{(e)}$ . Como se ha indicado, esta condición de contorno no suele considerarse.

## II. Imposición de la condición de impedancia

Si parte del contorno del silenciador presenta una impedancia acústica  $Z$ , como el caso de un conducto perforado, entonces

$$Z = \frac{P}{U} \tag{3.20}$$

donde  $U$  es la velocidad normal al contorno considerado. Supóngase, como en el caso anterior, una sección perpendicular al eje  $x$ . La derivada normal de la presión y la velocidad se pueden relacionar mediante la expresión

$$\frac{\partial P}{\partial n} = \frac{\partial P}{\partial x} = -\rho_0 \left( j\omega U + U_{fm} \frac{\partial U}{\partial x} \right) \tag{3.21}$$

y en virtud de la ecuación (3.20)

$$\frac{\partial P}{\partial n} = -\rho_0 \left( j\omega \frac{P}{Z} + \frac{U_{fm}}{Z} \frac{\partial P}{\partial n} \right) \tag{3.22}$$

Despejando la derivada normal de la presión, se tiene

$$\frac{\partial P}{\partial n} = -\frac{\rho_0 j\omega P}{Z + \rho_0 U_{fm}} \tag{3.23}$$

y el vector de carga se escribe

$$\{f^{(e)}\} = \int_{\Gamma \cap \Gamma^e} [N]^T \frac{\partial P^{(e)}}{\partial n} \vec{n}^T [D] \vec{n} d\Gamma = (1 - M^2) \int_{\Gamma \cap \Gamma^e} [N]^T \left( -\frac{\rho_0 j\omega P^{(e)}}{Z + \rho_0 U_{fm}} \right) d\Gamma \tag{3.24}$$



Introduciendo la nomenclatura

$$[c_Z^{(e)}] = \rho_0 \frac{1 - M^2}{Z + \rho_0 U_{fm}} \int_{\Gamma \cap \Gamma^e} [N]^T [N] d\Gamma \quad (3.25)$$

se tiene que

$$\{f^{(e)}\} = -j\omega [c_Z^{(e)}] \{P^{(e)}\} \quad (3.26)$$

Por tanto, el sistema de ecuaciones (3.16), se escribe ahora como

$$([K] + j\omega ([C] + [C_Z]) - \omega^2 [M]) \{P\} = \{F\} \quad (3.27)$$

En el caso de tener una salida anecoica, la impedancia viene dada por  $Z = \rho_0 c_0$ , y la matriz  $[c_Z^{(e)}]$  se expresa como

$$[c_Z^{(e)}] = \frac{1 - M}{c_0} \int_{\Gamma \cap \Gamma^e} [N]^T [N] d\Gamma \quad (3.28)$$

Puede darse la situación en que la superficie cuya impedancia se desea imponer sea paralela al flujo medio, caso que se tratará en la sección 3.3, dedicada al estudio de elementos perforados.

### III. Obtención de la atenuación

Una vez resuelto el sistema de ecuaciones (3.16), para el rango de frecuencias de interés, el comportamiento acústico del silenciador se evalúa inmediatamente. Para el cálculo del  $TL$ , puede llevarse a cabo un análisis con terminación anecoica, y utilizar la ecuación (2.274) para su evaluación. Puede ocurrir que las secciones de entrada y salida sean distintas, lo cual implica números de Mach diferentes, y por tanto deben realizarse las modificaciones oportunas según indica la ecuación (2.265).

La evaluación de los polos de la matriz de transferencia conlleva la realización de dos análisis, como se ha visto en el capítulo 2. En este caso, deben utilizarse las expresiones (2.73)-(2.76)

$$A = \left. \frac{P_1}{P_2} \right|_{U_2=0} \quad B = \left. \frac{P_1}{U_2} \right|_{P_2=0} \quad C = \left. \frac{U_1}{P_2} \right|_{U_2=0} \quad D = \left. \frac{U_1}{U_2} \right|_{P_2=0}$$

## 3.3. Subdominios acoplados. Placas y tubos perforados

Los elementos perforados, que conectan diversos subdominios del silenciador, son utilizados de manera frecuente en la práctica [82, 94, 112, 132, 133]. Se pretende ahora llevar a cabo el modelado mediante elementos finitos de este tipo de configuraciones, considerando diversas posibilidades referentes a la influencia del campo de flujo medio y las condiciones de contorno en las perforaciones. La región perforada se caracteriza

mediante su impedancia acústica  $Z_p$ . Se descarta la alternativa del mallado completo y el posterior modelado de dicha región, debido a su elevado coste computacional.

### 3.3.1. Medio en reposo

La figura 3.2 muestra la conexión de dos subdominios mediante una superficie perforada. Se denotan mediante  $\Omega_1$ ,  $\Omega_2$ ,  $\Gamma_1$  y  $\Gamma_2$  los volúmenes y contornos asociados a cada subdominio, y  $\Gamma_p$  es la región perforada común. Se asume la ausencia de flujo medio en los dos subdominios.

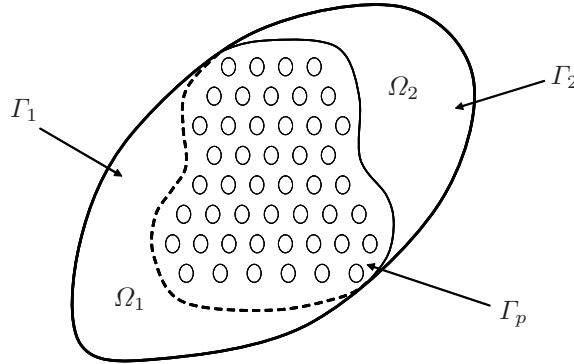


FIGURA 3.2: Dos subdominios conectados mediante una superficie perforada.

Los desarrollos previos son aplicables a cada subdominio por separado. Por tanto, el sistema de ecuaciones (3.16) se puede escribir para ambos, resultando

$$([K_1] + j\omega[C_1] - \omega^2[M_1]) \{P_1\} = \{F_1\} \quad (3.29)$$

$$([K_2] + j\omega[C_2] - \omega^2[M_2]) \{P_2\} = \{F_2\}$$

El vector de carga a nivel de elemento puede escribirse, según la ecuación (3.14), como

$$\{f^{(e)}\} = \int_{\Gamma \cap \Gamma^e} [N]^T \frac{\partial P^{(e)}}{\partial n} \vec{n}^T [D] \vec{n} d\Gamma \quad (3.30)$$

En ausencia de flujo medio se puede expresar como

$$\{f^{(e)}\} = \int_{\Gamma \cap \Gamma^e} [N]^T \frac{\partial P^{(e)}}{\partial n} d\Gamma \quad (3.31)$$

Se puede tener en cuenta la definición de la impedancia acústica de una superficie dada por la expresión

$$Z_p = \frac{P_1 - P_2}{U} \quad (3.32)$$

siendo  $P_1$  y  $P_2$  las presiones acústicas a ambos lados de la superficie perforada y  $U$  la velocidad acústica normal, que se supone continua en ausencia de flujo medio. En cada lado de la superficie la presión y la velocidad normal pueden relacionarse mediante la ecuación de Euler (2.47),

$$U_1 = \frac{-1}{j\rho_0\omega} \frac{\partial P_1}{\partial n} \quad U_2 = \frac{-1}{j\rho_0\omega} \frac{\partial P_2}{\partial n} \quad (3.33)$$

al considerar que en ambos subdominios el sentido de la velocidad normal es saliente, entonces  $U_1 = -U_2$ . Combinando las expresiones (3.33) con la ecuación (3.32), resulta

$$U = U_1 = \frac{-1}{j\rho_0\omega} \frac{\partial P_1}{\partial n} = \frac{P_1 - P_2}{Z_p} \quad U = -U_2 = \frac{1}{j\rho_0\omega} \frac{\partial P_2}{\partial n} = \frac{P_1 - P_2}{Z_p} \quad (3.34)$$

la evaluación de los vectores de carga en la superficie  $\Gamma_p$  puede llevarse a cabo calculando las siguientes integrales

$$\{f_1^{(e)}\} = \int_{\Gamma_p \cap \Gamma^e} [N]^T \left( -j\rho_0\omega \frac{P_1^{(e)} - P_2^{(e)}}{Z_p} \right) d\Gamma \quad (3.35)$$

$$\{f_2^{(e)}\} = \int_{\Gamma_p \cap \Gamma^e} [N]^T \left( j\rho_0\omega \frac{P_1^{(e)} - P_2^{(e)}}{Z_p} \right) d\Gamma \quad (3.36)$$

Teniendo en cuenta ahora la interpolación nodal de elementos finitos, se obtiene

$$\begin{aligned} \{f_1^{(e)}\} &= \frac{-j\rho_0\omega}{Z_p} \int_{\Gamma_p \cap \Gamma^e} [N]^T \left( [N]\{P_1^{(e)}\} - [N]\{P_2^{(e)}\} \right) d\Gamma \\ &= -j\omega [c_{Z_p}^{(e)11}]\{P_1^{(e)}\} + j\omega [c_{Z_p}^{(e)12}]\{P_2^{(e)}\} \end{aligned} \quad (3.37)$$

$$\begin{aligned} \{f_2^{(e)}\} &= \frac{j\rho_0\omega}{Z_p} \int_{\Gamma_p \cap \Gamma^e} [N]^T \left( [N]\{P_1^{(e)}\} - [N]\{P_2^{(e)}\} \right) d\Gamma \\ &= j\omega [c_{Z_p}^{(e)21}]\{P_1^{(e)}\} - j\omega [c_{Z_p}^{(e)22}]\{P_2^{(e)}\} \end{aligned} \quad (3.38)$$

La presencia de la superficie perforada conduce a la aparición de matrices de elementos finitos que multiplican los grados de libertad. Ensamblando las matrices obtenidas a nivel de elemento, e incorporando los vectores de carga al sistema (3.29), se obtiene

$$\left( \begin{bmatrix} [K_1] & [0] \\ [0] & [K_2] \end{bmatrix} + j\omega \begin{bmatrix} [C_1] + [C_{Z_p}^{11}] & -[C_{Z_p}^{12}] \\ -[C_{Z_p}^{21}] & [C_2] + [C_{Z_p}^{22}] \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} [M_1] & [0] \\ [0] & [M_2] \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \{P_1\} \\ \{P_2\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{F_1\} \\ \{F_2\} \end{Bmatrix} \quad (3.39)$$

Se puede observar claramente el acoplamiento existente entre subdominios como consecuencia de su conexión por medio de la superficie perforada. La expresión anterior puede escribirse de manera compacta

$$([K] + j\omega ([C] + [C_{Z_p}]) - \omega^2 [M]) \{P\} = \{F\} \quad (3.40)$$

### 3.3.2. Medio móvil

La figura 3.3 muestra un caso muy utilizado en la práctica. Se trata de un silenciador en el que el conducto interior tiene su superficie parcialmente perforada. En dicho conducto existe flujo medio uniforme definido por el número de Mach  $M = U_{fm}/c_0$  y paralelo a la superficie perforada. Se asume que el flujo que penetra en la cámara es pequeño, con lo cual se desprecia el efecto convectivo en ésta [94, 134]. En la cuantificación de la impedancia  $Z_p$ , debe tenerse en cuenta la influencia del flujo medio [88, 106].

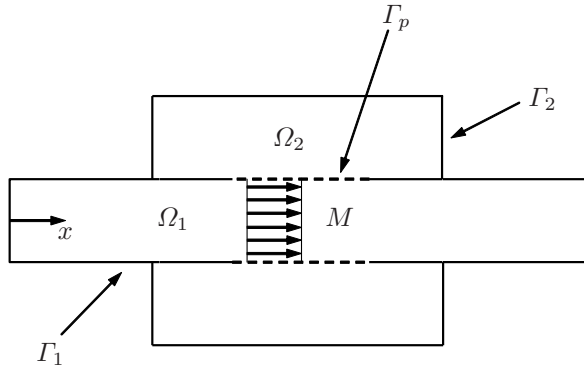


FIGURA 3.3: Silenciador con tubo perforado y flujo medio.

Para ambas regiones (tubo y cámara), la aplicación del método de elementos finitos da lugar a

$$([K_1] + j\omega[C_1] - \omega^2[M_1]) \{P_1\} = \{F_1\} \quad (3.41)$$

$$([K_2] + j\omega[C_2] - \omega^2[M_2]) \{P_2\} = \{F_2\}$$

En la situación habitual en la que se desprecia el flujo medio en la cámara, y en ausencia de condiciones de contorno asociadas a impedancia en la pared exterior de ésta, se tiene que la matriz  $[C_2] = [0]$ . El acoplamiento entre ambas regiones se realiza utilizando los vectores de carga  $\{F_1\}$  y  $\{F_2\}$ . A nivel de elemento y considerando la zona perforada, puede escribirse

$$\{f_1^{(e)}\} = \int_{\Gamma_p \cap \Gamma^e} [N]^T \frac{\partial P_1^{(e)}}{\partial n} \bar{n}^T [D] \bar{n} d\Gamma = \int_{\Gamma_p \cap \Gamma^e} [N]^T \frac{\partial P_1^{(e)}}{\partial n} d\Gamma \quad (3.42)$$

$$\{f_2^{(e)}\} = \int_{\Gamma_p \cap \Gamma^e} [N]^T \frac{\partial P_2^{(e)}}{\partial n} d\Gamma \quad (3.43)$$

donde  $\{f_1^{(e)}\}$  no presenta dependencia explícita de  $M$  dado que el flujo es paralelo al conducto. A la hora de aplicar la condición asociada a la superficie perforada, aparece

el problema ya mostrado anteriormente en el capítulo 2, y que se refiere al campo acústico que se considera continuo. Por un lado puede asumirse continuidad de la velocidad normal [15, 73, 94], es decir,  $U_1 = -U_2$ . Éstas están relacionadas con la presión acústica mediante la ecuación de Euler (2.62)

$$\rho_0 \left( j\omega U_1 + U_{fm} \frac{\partial U_1}{\partial x} \right) = -\frac{\partial P_1}{\partial n} \quad (3.44)$$

$$j\rho_0\omega U_2 = -\frac{\partial P_2}{\partial n} \quad (3.45)$$

Otra alternativa es la consideración de la continuidad de desplazamiento normal a la superficie perforada [31, 82], es decir,  $\xi_1 = -\xi_2$ . La relación entre desplazamiento y presión acústica viene dada por

$$\rho_0 \left( -\omega^2 \xi_1 + 2j\omega U_{fm} \frac{\partial \xi_1}{\partial x} + U_{fm}^2 \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial x^2} \right) = -\frac{\partial P_1}{\partial n} \quad (3.46)$$

$$-\rho_0\omega^2 \xi_2 = -\frac{\partial P_2}{\partial n} \quad (3.47)$$

La tercera posibilidad a considerar, consiste en asumir continuidad en la componente transversal del gradiente de presión, es decir,  $\partial P_1/\partial n = -\partial P_2/\partial n$ . Éste es precisamente el término que aparece en el vector de carga. Esta posibilidad no se tendrá en cuenta dado que las predicciones asociadas subestiman el efecto del flujo medio [40].

### i. Continuidad de velocidad

Bajo la hipótesis de continuidad de velocidad, las expresiones de los vectores de carga se pueden obtener combinando la relación de la impedancia (3.32) con las expresiones (3.44) y (3.45), dichos vectores de carga son

$$\{f_1^{(e)}\} = \int_{\Gamma_p \cap \Gamma^e} [N]^T \left( -j\rho_0\omega \frac{P_1^{(e)} - P_2^{(e)}}{Z_p} - \rho_0 \frac{U_{fm}}{Z_p} \frac{\partial (P_1^{(e)} - P_2^{(e)})}{\partial x} \right) d\Gamma \quad (3.48)$$

$$\{f_2^{(e)}\} = \int_{\Gamma_p \cap \Gamma^e} [N]^T \left( j\rho_0\omega \frac{P_1^{(e)} - P_2^{(e)}}{Z_p} \right) d\Gamma \quad (3.49)$$

Considerando ahora la interpolación nodal de elementos finitos, se tiene

$$\begin{aligned} \{f_1^{(e)}\} &= \frac{-j\rho_0\omega}{Z_p} \int_{\Gamma_p \cap \Gamma^e} [N]^T \left( [N]\{P_1^{(e)}\} - [N]\{P_2^{(e)}\} \right) d\Gamma \\ &\quad - \frac{\rho_0 U_{fm}}{Z_p} \int_{\Gamma_p \cap \Gamma^e} [N]^T \left( \frac{\partial [N]}{\partial x} \{P_1^{(e)}\} - \frac{\partial [N]}{\partial x} \{P_2^{(e)}\} \right) d\Gamma \\ &= -j\omega [c_{Z_p}^{(e)11}] \{P_1^{(e)}\} + j\omega [c_{Z_p}^{(e)12}] \{P_2^{(e)}\} - [k_{Z_p}^{(e)11}] \{P_1^{(e)}\} + [k_{Z_p}^{(e)12}] \{P_2^{(e)}\} \end{aligned} \quad (3.50)$$

$$\begin{aligned} \{f_2^{(e)}\} &= \frac{j\rho_0\omega}{Z_p} \int_{\Gamma_p \cap \Gamma^e} [N]^T \left( [N]\{P_1^{(e)}\} - [N]\{P_2^{(e)}\} \right) d\Gamma \\ &= j\omega [c_{Z_p}^{(e)21}]\{P_1^{(e)}\} - j\omega [c_{Z_p}^{(e)22}]\{P_2^{(e)}\} \end{aligned} \quad (3.51)$$

y el sistema de ecuaciones (3.41) queda de la forma

$$\begin{aligned} \left( \begin{bmatrix} [K_1] + [K_{Z_p}^{11}] & -[K_{Z_p}^{12}] \\ [0] & [K_2] \end{bmatrix} + j\omega \begin{bmatrix} [C_1] + [C_{Z_p}^{11}] & -[C_{Z_p}^{12}] \\ -[C_{Z_p}^{21}] & [C_2] + [C_{Z_p}^{22}] \end{bmatrix} \right. \\ \left. - \omega^2 \begin{bmatrix} [M_1] & [0] \\ [0] & [M_2] \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \{P_1\} \\ \{P_2\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{F_1\} \\ \{F_2\} \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (3.52)$$

De la expresión anterior, se puede observar la aparición de nuevas submatrices en presencia de flujo, comparándola con la expresión (3.39).

## II. Continuidad de desplazamiento

Se considera ahora la condición de continuidad de desplazamiento normal en la superficie perforada, es decir,  $\xi_1 = -\xi_2$ . Para ello, se hace uso de las expresiones (3.46) y (3.47), en combinación con la impedancia expresada en función del desplazamiento [82]

$$Z_p = \frac{P_1 - P_2}{j\omega\xi} \quad (3.53)$$

Por tanto, los vectores de carga se escriben

$$\begin{aligned} \{f_1^{(e)}\} &= \int_{\Gamma_p \cap \Gamma^e} [N]^T \left( -j\rho_0\omega \frac{P_1^{(e)} - P_2^{(e)}}{Z_p} \right. \\ &\quad \left. - 2\rho_0 \frac{U_{fm}}{Z_p} \frac{\partial (P_1^{(e)} - P_2^{(e)})}{\partial x} - \rho_0 \frac{U_{fm}^2}{j\omega Z_p} \frac{\partial^2 (P_1^{(e)} - P_2^{(e)})}{\partial x^2} \right) d\Gamma \end{aligned} \quad (3.54)$$

$$\{f_2^{(e)}\} = \int_{\Gamma_p \cap \Gamma^e} [N]^T \left( j\rho_0\omega \frac{P_1^{(e)} - P_2^{(e)}}{Z_p} \right) d\Gamma \quad (3.55)$$

Escribiendo las presiones en base a sus valores nodales y las funciones de forma, resulta

$$\begin{aligned}
\{f_1^{(e)}\} &= \frac{-j\rho_0\omega}{Z_p} \int_{\Gamma_p \cap \Gamma^e} [N]^T \left( [N]\{P_1^{(e)}\} - [N]\{P_2^{(e)}\} \right) d\Gamma \\
&\quad - \frac{2\rho_0 U_{fm}}{Z_p} \int_{\Gamma_p \cap \Gamma^e} [N]^T \left( \frac{\partial [N]}{\partial x} \{P_1^{(e)}\} - \frac{\partial [N]}{\partial x} \{P_2^{(e)}\} \right) d\Gamma \\
&\quad - \frac{\rho_0 U_{fm}^2}{j\omega Z_p} \int_{\Gamma_p \cap \Gamma^e} [N]^T \left( \frac{\partial^2 [N]}{\partial x^2} \{P_1^{(e)}\} - \frac{\partial^2 [N]}{\partial x^2} \{P_2^{(e)}\} \right) d\Gamma \\
&= -j\omega [c_{Z_p}^{(e)11}] \{P_1^{(e)}\} + j\omega [c_{Z_p}^{(e)12}] \{P_2^{(e)}\} - [k_{Z_p}^{(e)11}] \{P_1^{(e)}\} + [k_{Z_p}^{(e)12}] \{P_2^{(e)}\} \\
&\quad - \frac{1}{j\omega} [d_{Z_p}^{(e)11}] \{P_1^{(e)}\} + \frac{1}{j\omega} [d_{Z_p}^{(e)12}] \{P_2^{(e)}\}
\end{aligned} \tag{3.56}$$

$$\begin{aligned}
\{f_2^{(e)}\} &= \frac{j\rho_0\omega}{Z_p} \int_{\Gamma_p \cap \Gamma^e} [N]^T \left( [N]\{P_1^{(e)}\} - [N]\{P_2^{(e)}\} \right) d\Gamma \\
&= j\omega [c_{Z_p}^{(e)21}] \{P_1^{(e)}\} - j\omega [c_{Z_p}^{(e)22}] \{P_2^{(e)}\}
\end{aligned} \tag{3.57}$$

El sistema de ecuaciones con continuidad de desplazamiento es por tanto

$$\begin{aligned}
&\left( \begin{bmatrix} [K_1] + [K_{Z_p}^{11}] & -[K_{Z_p}^{12}] \\ [0] & [K_2] \end{bmatrix} + j\omega \begin{bmatrix} [C_1] + [C_{Z_p}^{11}] & -[C_{Z_p}^{12}] \\ -[C_{Z_p}^{21}] & [C_2] + [C_{Z_p}^{22}] \end{bmatrix} \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{j\omega} \begin{bmatrix} [D_{Z_p}^{11}] & -[D_{Z_p}^{12}] \\ [0] & [0] \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} [M_1] & [0] \\ [0] & [M_2] \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \{P_1\} \\ \{P_2\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{F_1\} \\ \{F_2\} \end{Bmatrix}
\end{aligned} \tag{3.58}$$

que incluye más términos de acoplamiento entre subdominios que el caso anterior.

### 3.4. Modelado de la propagación en materiales absorbentes mediante el MEF

El modelado de los fenómenos de propagación de ondas sonoras en el seno de materiales absorbentes en ausencia de flujo medio puede abordarse sin dificultad teniendo en cuenta las propiedades acústicas equivalentes de dicho material. En este caso, pueden reemplazarse los valores  $c_0$  y  $\rho_0$  por  $\tilde{c}$  y  $\tilde{\rho}$ , y proceder de forma similar a la mostrada en la sección anterior.

Si existe flujo medio en el interior del material, el problema se complica en gran medida [102]. En primer lugar, ha de determinarse el campo de flujo medio. Éste será en general no uniforme, y debido a su influencia en las propiedades acústicas equivalentes del material absorbente, dichas propiedades pasan a ser anisótropas e incluso heterogéneas. Por tanto, pierde su validez la ecuación de ondas convectiva (2.33) y de hecho no existe una ecuación de ondas simple que permita abordar el problema [103]. Sin embargo, en configuraciones de cierto interés práctico, la utilización

de superficies perforadas (con vistas a proteger y dar soporte al material absorbente) también garantiza que el flujo medio va a estar localizado fundamentalmente en las regiones sin material. A esto también contribuye la mayor resistividad del material en comparación con el aire. Este hecho permite considerar de forma relativamente sencilla (y aproximada) el modelado de la propagación de ondas en silenciadores disipativos mediante el método de elementos finitos, siempre que el flujo medio en el seno de los materiales absorbentes implicados sea uniforme y lo suficientemente bajo como para garantizar una variación espacial y direccional de propiedades despreciable frente al efecto convectivo. En este caso, y como primera aproximación, la propagación de ondas puede suponerse gobernada por la ecuación

$$\nabla^2 p - \frac{1}{\tilde{c}^2} \frac{D^2 p}{Dt^2} = 0 \quad (3.59)$$

donde  $\tilde{c}$  representa la velocidad equivalente del sonido en el material absorbente [46]. Dicha velocidad, como se ha visto en la sección 2.6.2, viene dada por la expresión

$$\tilde{c} = \frac{\omega}{\tilde{k}} \quad (3.60)$$

Considerando comportamiento armónico, se puede escribir

$$\begin{aligned} & \left(1 - \frac{U_{fm}^2}{\tilde{c}^2}\right) \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \left(1 - \frac{V_{fm}^2}{\tilde{c}^2}\right) \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + \left(1 - \frac{W_{fm}^2}{\tilde{c}^2}\right) \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} \\ & - 2 \frac{U_{fm} V_{fm}}{\tilde{c}^2} \frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y} - 2 \frac{U_{fm} W_{fm}}{\tilde{c}^2} \frac{\partial^2 P}{\partial x \partial z} - 2 \frac{V_{fm} W_{fm}}{\tilde{c}^2} \frac{\partial^2 P}{\partial y \partial z} \\ & - 2j\omega \frac{U_{fm}}{\tilde{c}^2} \frac{\partial P}{\partial x} - 2j\omega \frac{V_{fm}}{\tilde{c}^2} \frac{\partial P}{\partial y} - 2j\omega \frac{W_{fm}}{\tilde{c}^2} \frac{\partial P}{\partial z} + \tilde{k}^2 P = 0 \end{aligned} \quad (3.61)$$

siendo  $\tilde{k} = \omega/\tilde{c}$  el número de onda equivalente del material absorbente [46], que es complejo al igual que  $\tilde{c}$ .

Desarrollando la ecuación (3.61) de manera análoga al caso estudiado en la sección 3.2.1, esto es, un silenciador genérico reactivo sin material absorbente, se puede llegar a la expresión compacta del residuo ponderado

$$\begin{aligned} & \sum_{e=1}^{N_e} \{\Psi^{(e)}\}^T [k_{abs}^{(e)}] \{P^{(e)}\} + j\omega \sum_{e=1}^{N_e} \{\Psi^{(e)}\}^T [c_{abs}^{(e)}] \{P^{(e)}\} \\ & - \omega^2 \sum_{e=1}^{N_e} \{\Psi^{(e)}\}^T [m_{abs}^{(e)}] \{P^{(e)}\} - \sum_{e=1}^{N_e} \{\Psi^{(e)}\}^T \{f_{abs}^{(e)}\} = 0 \end{aligned} \quad (3.62)$$

con la introducción de la nomenclatura

$$[k_{abs}^{(e)}] = \int_{\Omega^e} [B]^T [D_{abs}] [B] d\Omega \quad (3.63)$$



$$[c_{abs}^{(e)}] = \frac{2}{\tilde{c}^2} \int_{\Omega^e} [N]^T \vec{U}_{fm}^T [B] d\Omega \quad (3.64)$$

$$[m_{abs}^{(e)}] = \frac{1}{\tilde{c}^2} \int_{\Omega^e} [N]^T [N] d\Omega \quad (3.65)$$

$$\{f_{abs}^{(e)}\} = \int_{\Gamma \cap \Gamma^e} [N]^T \frac{\partial P^{(e)}}{\partial n} \vec{n}^T [D_{abs}] \vec{n} d\Gamma \quad (3.66)$$

donde la matriz  $[D_{abs}]$  viene dada por la siguiente expresión

$$[D_{abs}] = \begin{bmatrix} 1 - \frac{U_{fm}^2}{\tilde{c}^2} & -\frac{U_{fm}V_{fm}}{\tilde{c}^2} & -\frac{U_{fm}W_{fm}}{\tilde{c}^2} \\ -\frac{V_{fm}U_{fm}}{\tilde{c}^2} & 1 - \frac{V_{fm}^2}{\tilde{c}^2} & -\frac{V_{fm}W_{fm}}{\tilde{c}^2} \\ -\frac{W_{fm}U_{fm}}{\tilde{c}^2} & -\frac{W_{fm}V_{fm}}{\tilde{c}^2} & 1 - \frac{W_{fm}^2}{\tilde{c}^2} \end{bmatrix} \quad (3.67)$$

siendo  $U_{fm}$ ,  $V_{fm}$  y  $W_{fm}$  las componentes de la velocidad de flujo uniforme  $\vec{U}_{fm}$  en el material absorbente en  $x$ ,  $y$  y  $z$ , respectivamente.

Ensamblando, se obtiene el sistema de ecuaciones

$$([K_{abs}] + j\omega[C_{abs}] - \omega^2[M_{abs}]) \{P\} = \{F_{abs}\} \quad (3.68)$$

### 3.4.1. Medio en reposo

La figura 3.4 muestra un silenciador formado por un conducto parcialmente perforado y una cámara que contiene material absorbente. Los volúmenes y contornos asociados a cada uno de ellos son  $\Omega_1$ ,  $\Omega_2$ ,  $\Gamma_1$  y  $\Gamma_2$ , y la región perforada se denota mediante  $\Gamma_p$ . Se asume que no existe flujo medio en ninguno de los dos subdominios.

En el tubo central se satisface la ecuación de ondas (3.1), en la que la derivada total temporal se reemplaza por una derivada parcial al ser  $\vec{U}_{fm} = \vec{0}$  mientras que la ecuación que gobierna la propagación de ondas en el material absorbente es la ecuación (3.59) de nuevo con  $D/Dt = \partial/\partial t$ . De esta forma, los sistemas algebraicos de ecuaciones para el tubo (3.16) y la cámara con material absorbente (3.68), se pueden escribir como

$$([K] + j\omega[C] - \omega^2[M]) \{P\} = \{F\} \quad (3.69)$$

$$([K_{abs}] + j\omega[C_{abs}] - \omega^2[M_{abs}]) \{P\} = \{F_{abs}\}$$

Cuando no existe flujo medio la matriz  $[C]$  puede aparecer, por ejemplo, debido a una condición anecoica. Sin embargo  $[C_{abs}] = [0]$  en la región con material por la consideración de la condición de pared rígida. Los dos dominios se acoplan utilizando

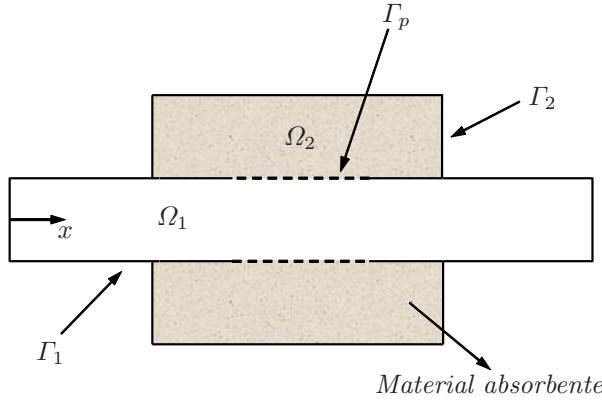


FIGURA 3.4: Silenciador con tubo perforado y material absorbente.

los vectores de carga  $\{F\}$  y  $\{F_{abs}\}$ . Considerando la zona perforada, se puede escribir a nivel de elemento

$$\{f^{(e)}\} = \int_{\Gamma_p \cap \Gamma^e} [N]^T \frac{\partial P_1^{(e)}}{\partial n} d\Gamma \quad (3.70)$$

$$\{f_{abs}^{(e)}\} = \int_{\Gamma_p \cap \Gamma^e} [N]^T \frac{\partial P_2^{(e)}}{\partial n} d\Gamma \quad (3.71)$$

La presión y la velocidad normal a ambos lados de la superficie perforada se pueden relacionar mediante la ecuación de Euler (2.47),

$$U_1 = \frac{-1}{j\rho_0\omega} \frac{\partial P_1}{\partial n} \quad U_2 = \frac{-1}{j\tilde{\rho}\omega} \frac{\partial P_2}{\partial n} \quad (3.72)$$

donde  $\tilde{\rho}$  es la densidad equivalente del material absorbente.

Se sigue un procedimiento análogo al planteado en la sección 3.3.1, aplicando la condición de continuidad de la velocidad acústica normal, de manera que los vectores de carga en la superficie perforada se pueden evaluar realizando las integrales

$$\{f^{(e)}\} = \int_{\Gamma_p \cap \Gamma^e} [N]^T \left( -j\rho_0\omega \frac{P_1^{(e)} - P_2^{(e)}}{\tilde{Z}_p} \right) d\Gamma \quad (3.73)$$

$$\{f_{abs}^{(e)}\} = \int_{\Gamma_p \cap \Gamma^e} [N]^T \left( j\tilde{\rho}\omega \frac{P_1^{(e)} - P_2^{(e)}}{\tilde{Z}_p} \right) d\Gamma \quad (3.74)$$

Con la consideración de la interpolación nodal de elementos finitos, se obtiene

$$\begin{aligned} \{f^{(e)}\} &= \frac{-j\rho_0\omega}{\tilde{Z}_p} \int_{\Gamma_p \cap \Gamma^e} [N]^T \left( [N]\{P_1^{(e)}\} - [N]\{P_2^{(e)}\} \right) d\Gamma \\ &= -j\omega [c_{Z_p}^{(e)11}]\{P_1^{(e)}\} + j\omega [c_{Z_p}^{(e)12}]\{P_2^{(e)}\} \end{aligned} \quad (3.75)$$

$$\begin{aligned} \{f_{abs}^{(e)}\} &= \frac{j\tilde{\rho}\omega}{\tilde{Z}_p} \int_{\Gamma_p \cap \Gamma^e} [N]^T \left( [N]\{P_1^{(e)}\} - [N]\{P_2^{(e)}\} \right) d\Gamma \\ &= j\omega [c_{Z_p}^{(e)21}]\{P_1^{(e)}\} - j\omega [c_{Z_p}^{(e)22}]\{P_2^{(e)}\} \end{aligned} \quad (3.76)$$

Ensamblando a nivel global del problema, el sistema (3.69) se escribe

$$\begin{aligned} \left( \begin{bmatrix} [K] & [0] \\ [0] & [K_{abs}] \end{bmatrix} + j\omega \begin{bmatrix} [C] + [C_{Z_p}^{11}] & -[C_{Z_p}^{12}] \\ -[C_{Z_p}^{21}] & [C_{abs}] + [C_{Z_p}^{22}] \end{bmatrix} \right. \\ \left. - \omega^2 \begin{bmatrix} [M] & [0] \\ [0] & [M_{abs}] \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \{P_1\} \\ \{P_2\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{F\} \\ \{F_{abs}\} \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (3.77)$$

o de manera compacta

$$([K] + j\omega ([C] + [C_{Z_p}]) - \omega^2 [M]) \{P\} = \{F\} \quad (3.78)$$

### 3.4.2. Medio móvil

Se considera un silenciador similar al estudiado en la sección previa. La única diferencia consiste en la presencia de un campo de flujo medio uniforme en el conducto perforado, definido por el número de Mach  $M = U_{fm}/c_0$  y paralelo a la superficie perforada, como ilustra la figura 3.5. Se asume la ausencia de flujo en la cámara con material absorbente, de manera que los efectos convectivos son despreciables en ésta [83, 94, 134].

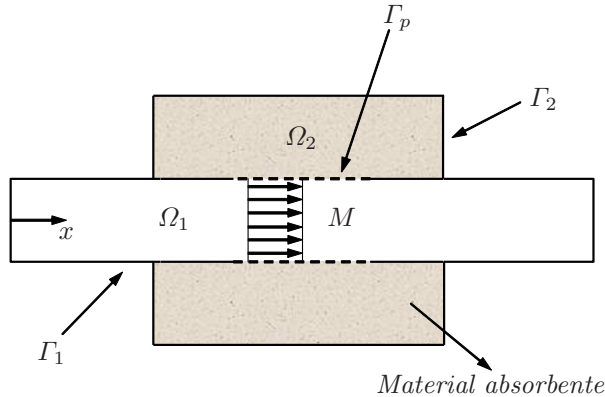


FIGURA 3.5: Silenciador con tubo perforado y material absorbente en presencia de flujo medio.

La aplicación del método de elementos finitos, para ambas regiones (tubo y cámara), da lugar a

$$([K] + j\omega[C] - \omega^2[M]) \{P\} = \{F\} \quad (3.79)$$

$$([K_{abs}] + j\omega[C_{abs}] - \omega^2[M_{abs}]) \{P\} = \{F_{abs}\}$$

En la situación habitual en la que se desprecia el flujo medio en la cámara, y en ausencia de condiciones de contorno asociadas a impedancia en la pared exterior de ésta, se tiene que  $[C_{abs}] = [0]$ . Se acoplan ambas regiones mediante la utilización de los vectores de carga  $\{F\}$  y  $\{F_{abs}\}$ . Para la zona perforada y a nivel de elemento, se puede escribir

$$\{f^{(e)}\} = \int_{\Gamma_p \cap \Gamma^e} [N]^T \frac{\partial P_1^{(e)}}{\partial n} \vec{n}^T [D] \vec{n} d\Gamma = \int_{\Gamma_p \cap \Gamma^e} [N]^T \frac{\partial P_1^{(e)}}{\partial n} d\Gamma \quad (3.80)$$

$$\{f_{abs}^{(e)}\} = \int_{\Gamma_p \cap \Gamma^e} [N]^T \frac{\partial P_2^{(e)}}{\partial n} d\Gamma \quad (3.81)$$

en la ecuación (3.80),  $\{f^{(e)}\}$  no presenta dependencia explícita de  $M$  debido a que el flujo es paralelo al conducto.

Como en el caso estudiado en la sección 3.3.2, pueden considerarse dos alternativas a la hora de aplicar la condición asociada a la superficie perforada. Por un lado puede asumirse continuidad de la velocidad acústica normal, es decir,  $U_1 = -U_2$ . Estas velocidades están relacionadas con la presión acústica mediante la ecuación de Euler (2.62)

$$\rho_0 \left( j\omega U_1 + U_{fm} \frac{\partial U_1}{\partial x} \right) = -\frac{\partial P_1}{\partial n} \quad (3.82)$$

$$j\tilde{\rho}\omega U_2 = -\frac{\partial P_2}{\partial n} \quad (3.83)$$

La otra alternativa es la consideración de la continuidad de desplazamiento normal a la superficie perforada, es decir,  $\xi_1 = -\xi_2$ . La relación entre desplazamiento y presión acústica viene dada por

$$\rho_0 \left( -\omega^2 \xi_1 + 2j\omega U_{fm} \frac{\partial \xi_1}{\partial x} + U_{fm}^2 \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial x^2} \right) = -\frac{\partial P_1}{\partial n} \quad (3.84)$$

$$-\tilde{\rho}\omega^2 \xi_2 = -\frac{\partial P_2}{\partial n} \quad (3.85)$$

Las ecuaciones asociadas a cada tipo de condición de continuidad se detallan a continuación

### I. Continuidad de velocidad

Utilizando un planteamiento análogo al aplicado en la sección 3.3.2, los vectores de carga se pueden escribir

$$\begin{aligned} \{f^{(e)}\} &= \frac{-j\rho_0\omega}{\tilde{Z}_p} \int_{\Gamma_p \cap \Gamma^e} [N]^T \left( [N]\{P_1^{(e)}\} - [N]\{P_2^{(e)}\} \right) d\Gamma \\ &\quad - \frac{\rho_0 U_{fm}}{\tilde{Z}_p} \int_{\Gamma_p \cap \Gamma^e} [N]^T \left( \frac{\partial[N]}{\partial x} \{P_1^{(e)}\} - \frac{\partial[N]}{\partial x} \{P_2^{(e)}\} \right) d\Gamma \end{aligned} \quad (3.86)$$

$$= -j\omega [c_{Z_p}^{(e)11}] \{P_1^{(e)}\} + j\omega [c_{Z_p}^{(e)12}] \{P_2^{(e)}\} - [k_{Z_p}^{(e)11}] \{P_1^{(e)}\} + [k_{Z_p}^{(e)12}] \{P_2^{(e)}\}$$

$$\begin{aligned} \{f_{abs}^{(e)}\} &= \frac{j\tilde{\rho}\omega}{\tilde{Z}_p} \int_{\Gamma_p \cap \Gamma^e} [N]^T \left( [N]\{P_1^{(e)}\} - [N]\{P_2^{(e)}\} \right) d\Gamma \\ &= j\omega [c_{Z_p}^{(e)21}] \{P_1^{(e)}\} - j\omega [c_{Z_p}^{(e)22}] \{P_2^{(e)}\} \end{aligned} \quad (3.87)$$

Por tanto, el sistema de ecuaciones (3.79) puede expresarse finalmente como

$$\begin{aligned} \left( \begin{bmatrix} [K] + [K_{Z_p}^{11}] & -[K_{Z_p}^{12}] \\ [0] & [K_{abs}] \end{bmatrix} + j\omega \begin{bmatrix} [C] + [C_{Z_p}^{11}] & -[C_{Z_p}^{12}] \\ -[C_{Z_p}^{21}] & [C_{abs}] + [C_{Z_p}^{22}] \end{bmatrix} \right. \\ \left. - \omega^2 \begin{bmatrix} [M] & [0] \\ [0] & [M_{abs}] \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \{P_1\} \\ \{P_2\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{F\} \\ \{F_{abs}\} \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (3.88)$$

### II. Continuidad de desplazamiento

Como en la sección 3.3.2, y para la aplicación de la condición de continuidad de desplazamiento normal en la superficie perforada, los vectores de carga se escriben

$$\begin{aligned} \{f^{(e)}\} &= \frac{-j\rho_0\omega}{\tilde{Z}_p} \int_{\Gamma_p \cap \Gamma^e} [N]^T \left( [N]\{P_1^{(e)}\} - [N]\{P_2^{(e)}\} \right) d\Gamma \\ &\quad - \frac{2\rho_0 U_{fm}}{\tilde{Z}_p} \int_{\Gamma_p \cap \Gamma^e} [N]^T \left( \frac{\partial[N]}{\partial x} \{P_1^{(e)}\} - \frac{\partial[N]}{\partial x} \{P_2^{(e)}\} \right) d\Gamma \\ &\quad - \frac{\rho_0 U_{fm}^2}{j\omega \tilde{Z}_p} \int_{\Gamma_p \cap \Gamma^e} [N]^T \left( \frac{\partial^2[N]}{\partial x^2} \{P_1^{(e)}\} - \frac{\partial^2[N]}{\partial x^2} \{P_2^{(e)}\} \right) d\Gamma \end{aligned} \quad (3.89)$$

$$= -j\omega [c_{Z_p}^{(e)11}] \{P_1^{(e)}\} + j\omega [c_{Z_p}^{(e)12}] \{P_2^{(e)}\} - [k_{Z_p}^{(e)11}] \{P_1^{(e)}\} + [k_{Z_p}^{(e)12}] \{P_2^{(e)}\} \\ - \frac{1}{j\omega} [d_{Z_p}^{(e)11}] \{P_1^{(e)}\} + \frac{1}{j\omega} [d_{Z_p}^{(e)12}] \{P_2^{(e)}\}$$

$$\begin{aligned} \{f_{abs}^{(e)}\} &= \frac{j\tilde{\rho}\omega}{\tilde{Z}_p} \int_{\Gamma_p \cap \Gamma^e} [N]^T \left( [N]\{P_1^{(e)}\} - [N]\{P_2^{(e)}\} \right) d\Gamma \\ &= j\omega [c_{Z_p}^{(e)21}] \{P_1^{(e)}\} - j\omega [c_{Z_p}^{(e)22}] \{P_2^{(e)}\} \end{aligned} \quad (3.90)$$

El sistema de ecuaciones con continuidad de desplazamiento es por tanto

$$\left( \begin{aligned} & \left[ \begin{array}{cc} [K] + [K_{Z_p}^{11}] & -[K_{Z_p}^{12}] \\ [0] & [K_{abs}] \end{array} \right] + j\omega \left[ \begin{array}{cc} [C] + [C_{Z_p}^{11}] & -[C_{Z_p}^{12}] \\ -[C_{Z_p}^{21}] & [C_{abs}] + [C_{Z_p}^{22}] \end{array} \right] \\ & + \frac{1}{j\omega} \left[ \begin{array}{cc} [D_{Z_p}^{11}] & -[D_{Z_p}^{12}] \\ [0] & [0] \end{array} \right] - \omega^2 \left[ \begin{array}{cc} [M] & [0] \\ [0] & [M_{abs}] \end{array} \right] \end{aligned} \right) \left\{ \begin{array}{l} \{P_1\} \\ \{P_2\} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \{F\} \\ \{F_{abs}\} \end{array} \right\} \quad (3.91)$$

que incluye más términos de acoplamiento entre subdominios que en el caso anterior.

### 3.5. Aplicaciones

En esta sección se lleva a cabo la aplicación del método de elementos finitos a distintas tipologías de silenciadores de escape, que han sido estudiadas en el capítulo anterior mediante los modelos de onda plana. Entre ellas se encuentran dos geometrías novedosas como son la cámara con doble salida opuesta y la cámara reversa con material absorbente y placa perforada, que se consideran en las secciones 3.5.3 y 3.5.4, respectivamente. Se estudian también algunos fenómenos relevantes como la presencia simultánea de flujo medio, material absorbente y elementos perforados, y la influencia de las condiciones de contorno asociadas a las superficies perforadas en la atenuación acústica.

#### 3.5.1. Cámara de expansión simple

La figura 3.6 muestra las mallas de cuatro cámaras de expansión simple, similares a la mostrada en la figura 2.8(a). En el mallado se han utilizado elementos tetraédricos cuadráticos. El tamaño de los elementos de la cámara es de 0.015 m, mientras que los elementos de los tubos de entrada y salida tienen un tamaño de 0.01 m. Con este tamaño se garantiza una precisión suficiente en el rango de frecuencias de interés.

Las dimensiones de los silenciadores son: longitud  $L_2 = 0.3$  m, radios de los conductos de entrada y salida  $R_1 = R_3 = 0.02$  m y radio de la cámara  $R_2 = 0.091875$  m, idénticas a las de la geometría 1 de la sección 2.10.1. En todos los casos se aprovechan las posibles simetrías para reducir el coste computacional asociado al método de elementos finitos. La primera geometría es axisimétrica, y sólo se malla una cuarta parte del dominio. La utilización de una malla tridimensional para el caso axisimétrico tiene como objetivo validar el código tridimensional de elementos finitos implementado durante la realización de esta Tesis. Las tres restantes tienen al menos uno de sus conductos descentrado, de manera que se debe utilizar la mitad del dominio. En concreto, la geometría 2 tiene entrada centrada y salida descentrada con una distancia  $x_3 = 0.045$  m, la geometría 3 tiene ambos conductos descentrados, con  $x_1 = -x_3 = 0.045$  m y para la geometría 4 se tiene  $x_1 = x_3 = 0.045$  m.

La figura 3.7 presenta los resultados obtenidos. Es obvio que la posición de los conductos de entrada y salida tiene un efecto notable en la atenuación acústica [117].

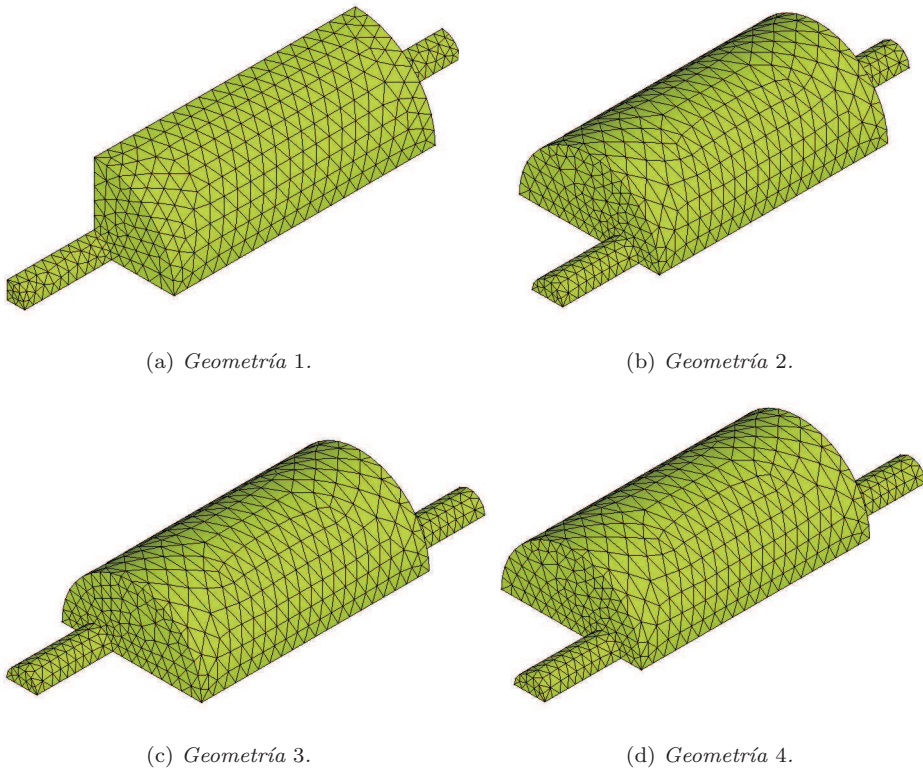


FIGURA 3.6: *Mallas de elementos finitos utilizadas.*

Lógicamente, el modelo de onda plana no detecta dicha característica, ya que el  $TL$  que evalúa para una cámara de expansión simple sólo depende, según la expresión (2.278), de la longitud de la cámara y de la relación de área cámara-tubo. Se puede observar que las geometrías 1 y 2 presentan una buena concordancia entre ellas (y con el modelo de onda plana) hasta una frecuencia de 1100 Hz, a partir de la cual se deteriora el comportamiento repetitivo de cúpulas de atenuación debido a la propagación multidimensional. Este efecto es todavía más notable en las geometrías 3 y 4. En el capítulo 5 se analizan las causas de dicho comportamiento y el efecto de la posición de los conductos de entrada y salida detalladamente.

### 3.5.2. Cámara reversa

Se consideran cuatro silenciadores de cámara reversa, similares al mostrado en la figura 2.8(b). Las dimensiones utilizadas son  $R_1 = R_3 = 0.02$  m para los tubos de entrada y salida,  $R_2 = 0.091875$  m y  $L_2 = 0.3$  m para la cámara, iguales a las de la geometría 1 de la sección 2.10.2. La figura 3.8 muestra las cuatro mallas de los silenciadores estudiados. La primera geometría tiene los tubos de entrada y salida

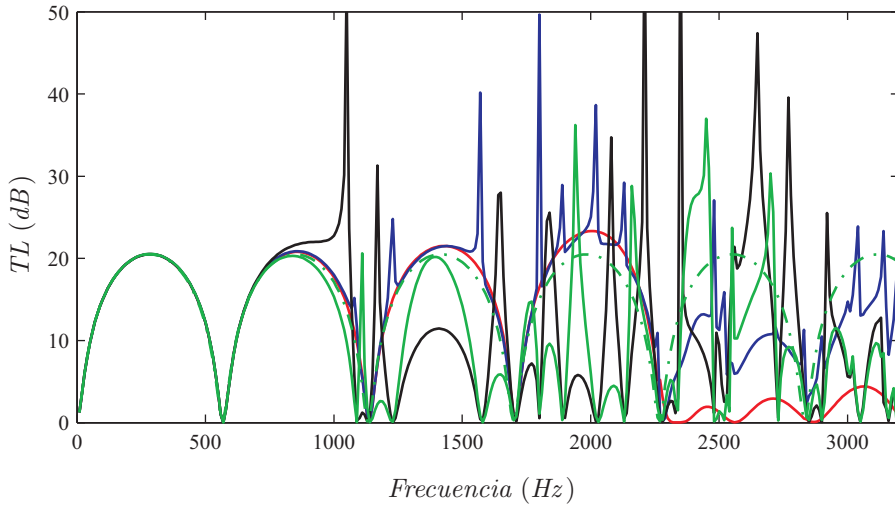


FIGURA 3.7: *TL de cámara de expansión simple: —, geometría 1; —, geometría 2; —, geometría 3; —, geometría 4; - - -, onda plana.*

descentrados a 180 grados con una distancia  $x_1 = -x_3 = -0.045$  m, en la geometría 2 los conductos están descentrados a 90 grados con  $x_1 = y_3 = 0.045$  m, la geometría 3 tiene el tubo de entrada centrado y el de la salida descentrado a 180 grados con  $x_3 = 0.045$  m y para la geometría 4 se tiene  $x_3 = 0.057661$  m con el tubo de entrada centrado.

La figura 3.9 muestra los resultados obtenidos mediante la aplicación del método de elementos finitos. Se muestra de nuevo el efecto que tiene la posición de los tubos de entrada y salida en la atenuación acústica [118]. Como en el caso anterior, el modelo de onda plana no detecta dicha influencia debido a que el  $TL$  asociado a una cámara reversa sólo depende, según la expresión (2.280), de la longitud de la cámara y de la relación área cámara-tubo. La geometría 1 presenta una buena concordancia con el modelo de onda plana hasta una frecuencia de 1084 Hz, a partir de la cual desaparece el comportamiento típico de cámaras reversas largas, con resonancia de cuarto de onda, debido a la propagación multidimensional. En las geometrías 2 y 3 la irregularidad del  $TL$  aparece a 1796 Hz y 2256 Hz, respectivamente. En el capítulo 5 se estudiará en detalle el efecto de la posición de los conductos y las causas que originan la irregularidad del  $TL$ .

### 3.5.3. Cámara con doble salida opuesta

La figura 3.10 presenta las mallas de tres silenciadores con doble salida opuesta, como el mostrado en la figura 2.17. Como se ha indicado en el capítulo anterior, el estudio de esta geometría se ha propuesto en la Tesis, y algunos resultados relevantes se han



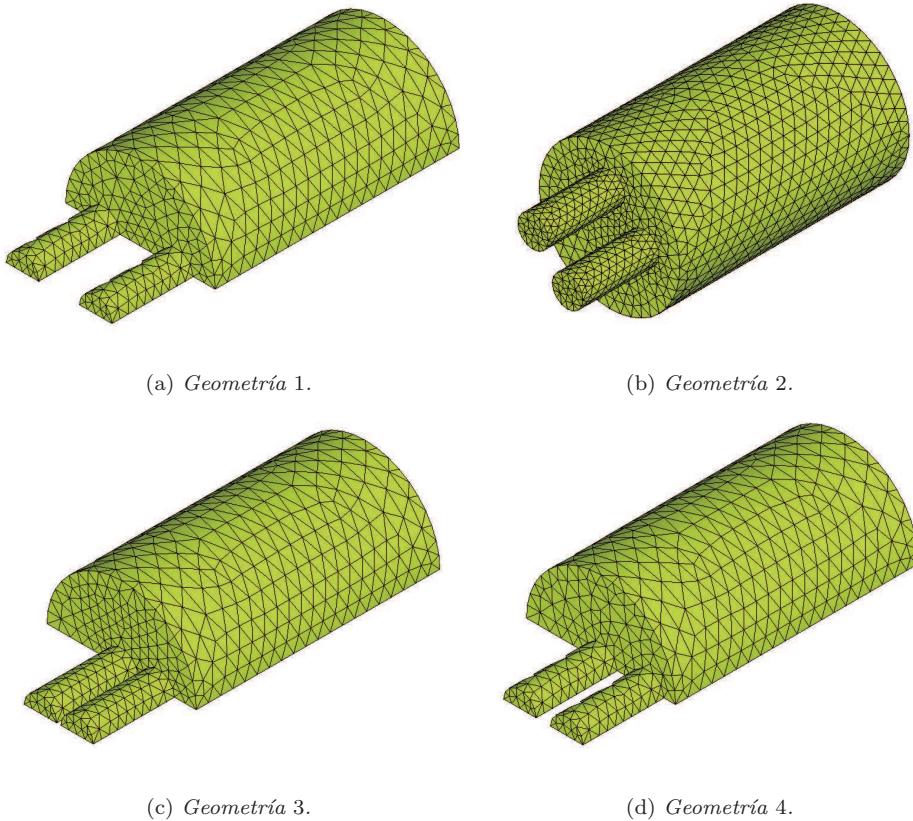


FIGURA 3.8: *Mallas de elementos finitos utilizadas.*

presentado en el trabajo [6]. Las dimensiones consideradas son  $L_2 = 0.3$  m para la (longitud de la cámara),  $R_1 = R_3 = R_4 = 0.02$  m para el tubo de entrada y los dos tubos de salida y  $R_2 = 0.091875$  m para la cámara, idénticas a las de la geometría 1 de la sección 2.10.3. En las tres configuraciones la distancia del descentrado es la misma para los tres conductos, con un valor de 0.045 m, y sólo varía el ángulo relativo de éstos.

Como ilustra la figura 3.10, el tubo de entrada de la geometría 1 está descentrado a 180 grados respecto a la salida ubicada en el mismo lado, mientras que las entradas en las geometrías 2 y 3 están descentradas a 90 grados. La única diferencia entre las geometrías 2 y 3 es el valor del ángulo relativo de la segunda salida, que es igual a 0 grados para la geometría 2 y 180 grados para la geometría 3.

La figura 3.11 muestra los resultados obtenidos mediante elementos finitos y el modelo de onda plana. Se puede comprobar, como en los casos anteriores, el efecto que tiene la posición de los conductos en la atenuación acústica, dado que las diferencias

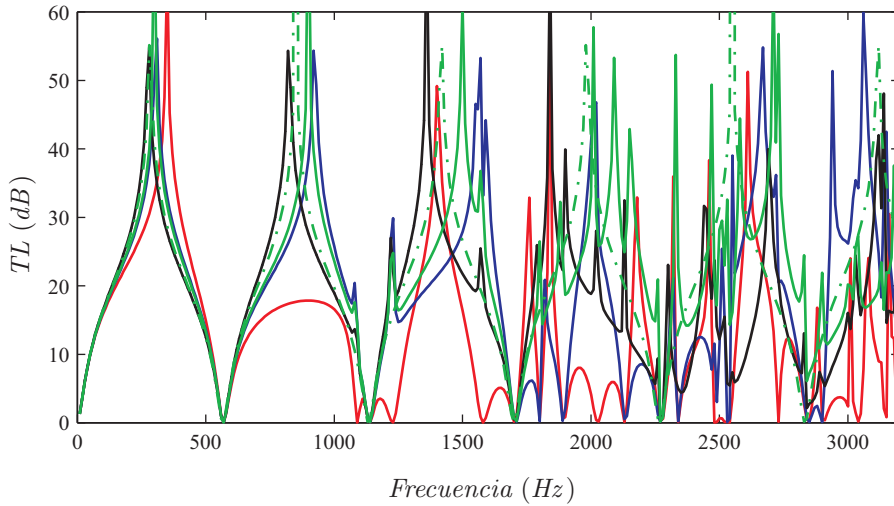


FIGURA 3.9:  $TL$  de silenciador con cámara reversa: —, geometría 1; —, geometría 2; —, geometría 3; —, geometría 4; - - -, onda plana.

entre las simulaciones de elementos finitos son considerables. Las geometrías 1, 2 y 3 presentan una buena concordancia entre ellas (y con el modelo de onda plana) hasta una frecuencia de 1084 Hz aproximadamente. A partir de dicha frecuencia se deteriora el comportamiento repetitivo de cúpulas de atenuación de la geometría 1 debido a la propagación multidimensional. En las geometrías 2 y 3 la irregularidad del  $TL$  se retrasa hasta 1796 Hz.

### 3.5.4. Cámara reversa con material absorbente y placa perforada

Se considera una cámara reversa con material absorbente y placa perforada, como la mostrada en la figura 2.19. Como se ha señalado en el capítulo anterior, el estudio de esta geometría novedosa se ha planteado en la Tesis, y algunos resultados han sido publicados en los trabajos [7, 49]. Las dimensiones utilizadas son  $L_2 = 0.25$  m para la cámara con aire,  $L_m = 0.05$  m para el material absorbente,  $R_1 = R_3 = 0.02$  m para los tubos de entrada y salida y  $R_2 = 0.091875$  m para la cámara central, idénticas a las de las geometrías de la sección 2.10.4. Los tubos de entrada y salida están descentrados a 180 grados con  $x_1 = -x_3 = -0.045$  m. La figura 3.12 muestra los resultados obtenidos mediante elementos finitos y el modelo de onda plana para las resistividades  $R = 1000$  rayl/m,  $R = 2000$  rayl/m y  $R = 4000$  rayl/m, con valores fijos de  $\sigma = 15\%$ ,  $d_h = 0.0035$  m y  $t_p = 0.001$  m. Los comentarios del capítulo 2 siguen siendo válidos, ya que se observa que con mayor resistividad se obtiene menor atenuación en los picos de resonancia y mayor atenuación en las bandas de paso. Se puede observar que el primer pico de resonancia es menos sensible al aumento de resistividad en comparación

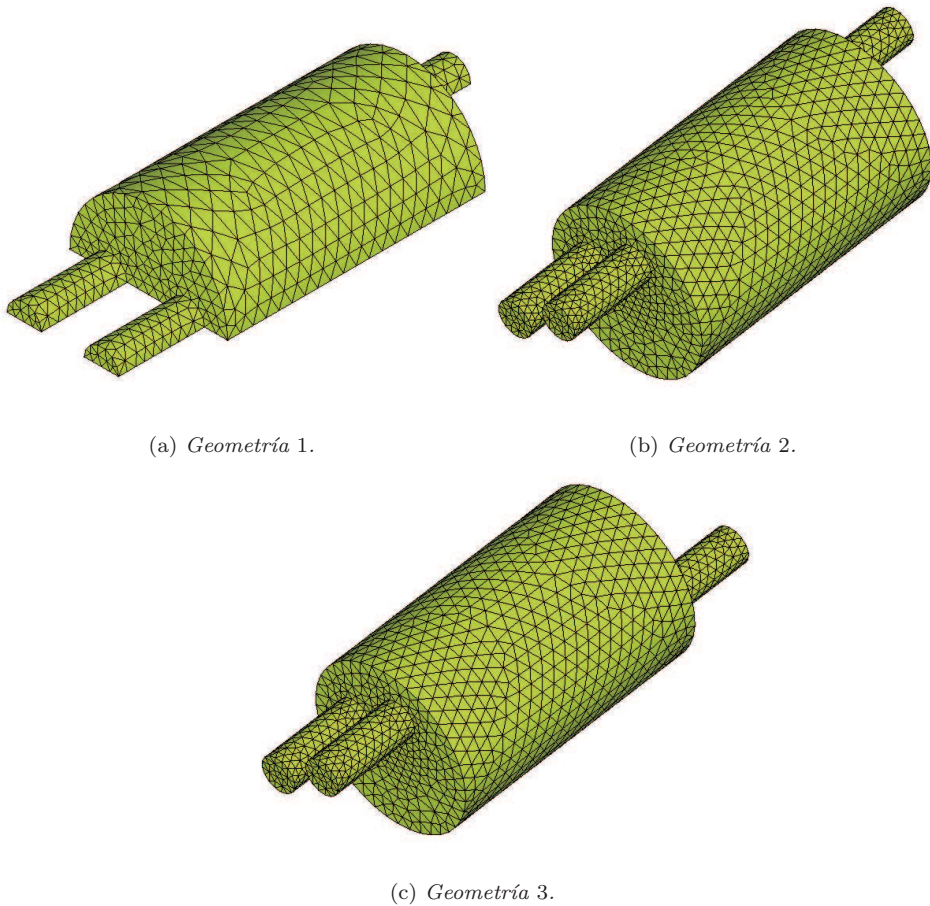


FIGURA 3.10: *Mallas de elementos finitos utilizadas.*

con los siguientes. El comportamiento repetitivo en el modelo de onda plana deja de serlo en los resultados de elementos finitos a partir de 1800 Hz, como consecuencia de la multidimensionalidad del campo acústico, que produce importantes diferencias respecto al modelo unidimensional. En cualquier caso, las discrepancias entre ambos modelos empiezan a ser relevantes a partir de 600 Hz. Cabe indicar que el material absorbente, como se indicó en la sección 2.10.4, se caracteriza mediante las expresiones (2.301) y (2.302). Para la caracterización de la placa perforada se utiliza de nuevo la fórmula (2.172).

La figura 3.13 muestra el efecto de la variación de la porosidad de la placa perforada, que toma los valores  $\sigma = 5\%$ ,  $\sigma = 10\%$  y  $\sigma = 15\%$ , para un diámetro de los orificios de valor  $d_h = 0.0035$  m y un espesor  $t_p = 0.001$  m. El material absorbente utilizado para el cálculo mediante el método de elementos finitos y el modelo de onda plana tiene una resistividad de valor  $R = 1000$  rayl/m. Se puede observar, en los resultados

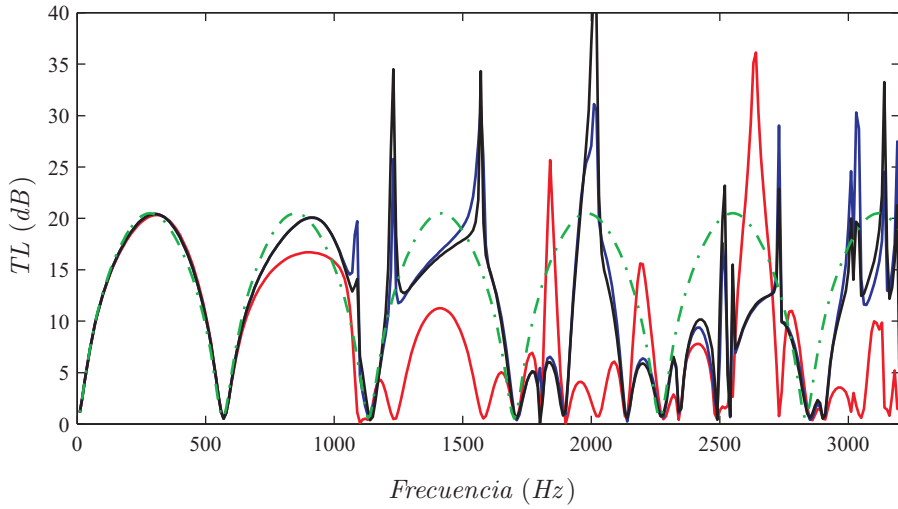


FIGURA 3.11:  $TL$  de silenciador con doble salida opuesta: —, geometría 1; —, geometría 2; —, geometría 3; - - -, onda plana.

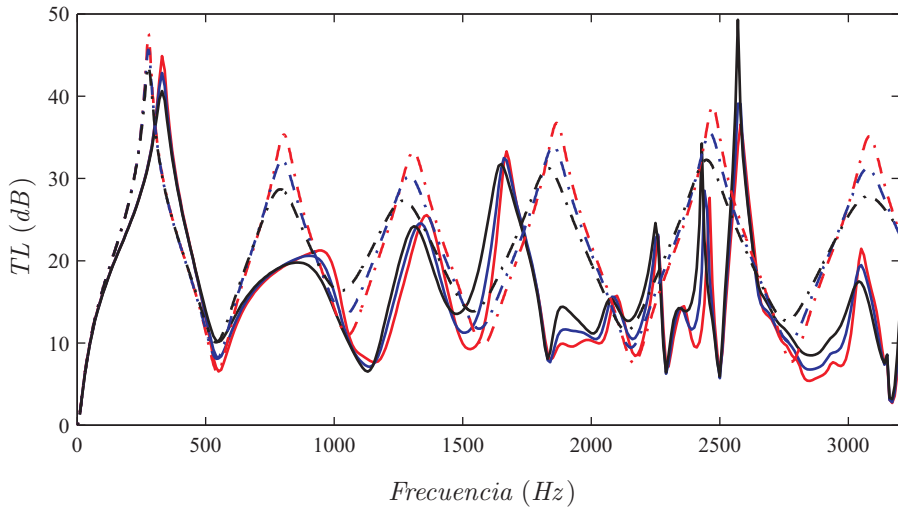


FIGURA 3.12:  $TL$  de cámara reversa con material absorbente y placa perforada: —,  $R = 1000$  rayl/m, MEF; - - -, ídem, onda plana; —,  $R = 2000$  rayl/m, MEF; - - -, ídem, onda plana; —,  $R = 4000$  rayl/m, MEF; - - -, ídem, onda plana.

obtenidos con elementos finitos, que el primer pico de resonancia no sufre ningún cambio con el aumento de la porosidad, mientras que los siguientes picos se desplazan hacia valores más altos de frecuencia y su amplitud se ve en general reducida en comparación con el primero. De nuevo, las limitaciones del modelo de onda plana se ponen de manifiesto a medida que aumenta la frecuencia.

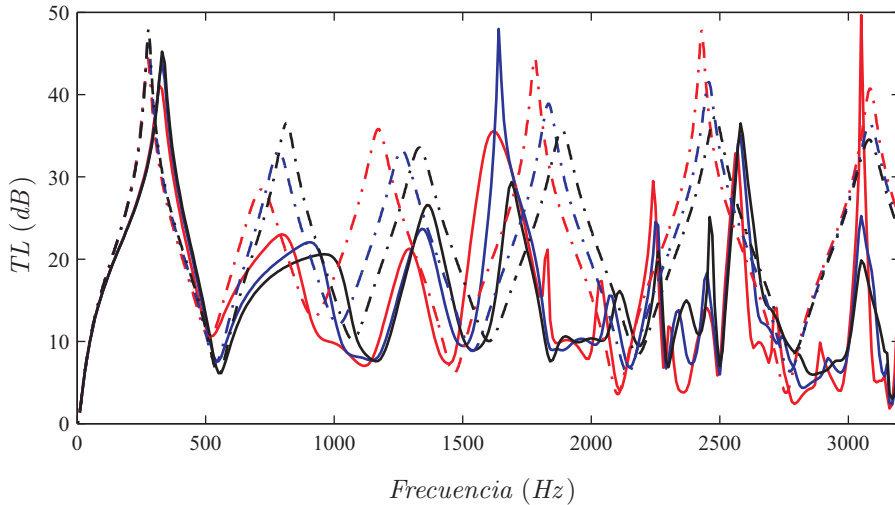


FIGURA 3.13:  $TL$  de cámara reversa con material absorbente y placa perforada: —,  $\sigma = 5\%$ , MEF; - - -, ídem, onda plana; —,  $\sigma = 10\%$ , MEF; - - -, ídem, onda plana; —,  $\sigma = 20\%$ , MEF; - - -, ídem, onda plana.

### 3.5.5. Resonador concéntrico con material absorbente

Se considera el resonador concéntrico con material absorbente cuyo modelado se ha tratado en detalle en las secciones 3.4.1 (sin flujo medio en el tubo perforado) y 3.4.2 (con flujo medio en el tubo perforado). Con el fin de demostrar cuál es la condición de continuidad más adecuada cuando existe flujo en el tubo perforado, se aplica la condición de continuidad de velocidad y la asociada a desplazamiento y se comparan los resultados obtenidos mediante ambas con medidas experimentales. La tabla 3.1 muestra las dimensiones de los dos resonadores concéntricos utilizados en los cálculos.

Geometría	$R_1$ (m)	$R_2$ (m)	$L_2$ (m)
1	0.037	0.0762	0.315
2	0.037	0.1016	0.330

TABLA 3.1: Dimensiones relevantes de dos resonadores concéntricos con material absorbente.

La figura 3.14 ilustra un ejemplo de malla del resonador concéntrico con material absorbente, que está formada por elementos hexaédricos cuadráticos. En el contorno asociado al conducto perforado se superponen los nodos de ambos subdominios, esto es, el conducto perforado y la cámara exterior con material absorbente, y se acoplan

mediante la impedancia acústica. Cabe indicar que se ha utilizado una malla tridimensional para esta geometría axisimétrica con el fin de validar el código tridimensional de elementos finitos implementado durante la realización de la Tesis.

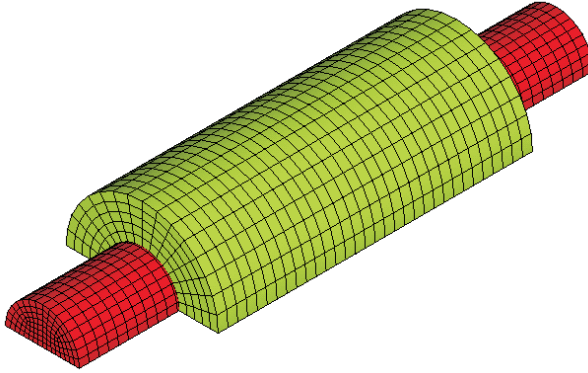


FIGURA 3.14: *Malla de elementos finitos de un resonador concéntrico con material absorbente.*

En lo referente a la impedancia acústica del tubo perforado, se ha considerado la expresión (2.173) indicada en el capítulo 2 [85],

$$\tilde{Z}_p = \rho_0 c_0 \frac{\left( \xi'_p + j0.425k_0 d_h \left( \frac{\tilde{\rho}}{\rho_0} - 1 \right) F(\sigma) \right)}{\sigma} \quad (3.92)$$

siendo  $\xi'_p$  la impedancia acústica adimensional de un orificio en ausencia de material absorbente, cuyas partes resistiva y reactiva se calculan mediante las expresiones (2.133) y (2.135), y  $F(\sigma)$  el factor de corrección que viene dado por la expresión (2.121).

El material absorbente utilizado en los cálculos es la fibra de vidrio de tipo E, que se caracteriza mediante las siguientes expresiones [82, 83, 85]

$$\tilde{Z} = Z_0 \left( \left( 1 + 0.0954 \left( \frac{f\rho_0}{R} \right)^{-0.6687} \right) + j \left( 0.1689 \left( \frac{f\rho_0}{R} \right)^{-0.5707} \right) \right) \quad (3.93)$$

$$\tilde{k} = k_0 \left( \left( 1 + 0.2010 \left( \frac{f\rho_0}{R} \right)^{-0.5829} \right) + j \left( 0.2202 \left( \frac{f\rho_0}{R} \right)^{-0.5850} \right) \right) \quad (3.94)$$

Las medidas experimentales se han realizado mediante el método del impulso [34] y puede encontrarse información detallada en el trabajo de Kirby [82]. La figura 3.15 muestra los resultados obtenidos mediante la aplicación de la continuidad de velocidad, la continuidad de desplazamiento y la medida experimental. La configuración

considerada es la geometría 1 (véase la tabla 3.1). El conducto perforado tiene un espesor  $t_p = 0.001$  m, el diámetro de los orificios es  $d_h = 0.0035$  m y la porosidad es  $\sigma = 26.3\%$ . El flujo medio viene definido por el número de Mach  $M = 0.15$  y el material absorbente tiene una resistividad de  $R = 30716$  rayl/m. Se puede observar que hay una concordancia más que aceptable entre los resultados experimentales y los obtenidos mediante la aplicación de la condición de continuidad de desplazamiento, algo que no ocurre con la condición de continuidad de velocidad. Los errores experimentales a bajas frecuencias son comunes y aparecen en parte debido a las posibles reflexiones de ondas en la salida del sistema experimental [82].

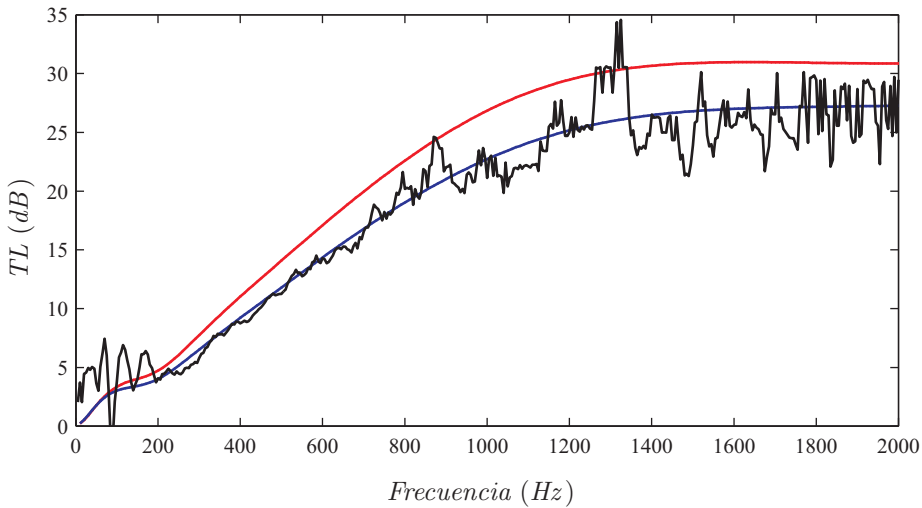


FIGURA 3.15: *TL de resonador concéntrico con material absorbente, geometría 1:*  
 —, continuidad de velocidad; —, continuidad de desplazamiento;  
 —, medida experimental.

En la figura 3.16 se muestra de nuevo el efecto de la condición asociada al conducto perforado. Se considera ahora la geometría 2, manteniendo los mismos valores de  $\sigma$ ,  $d_h$ ,  $t_p$ ,  $R$  y  $M$ . Otra vez se puede comprobar la buena concordancia entre la medida experimental y los resultados de elementos finitos con condición de continuidad de desplazamiento. A bajas frecuencias hay poca diferencia entre la condición de velocidad y la de desplazamiento, si bien esta diferencia va aumentando a medida que se consideran frecuencias más altas. Como se ha indicado en el párrafo anterior la medida experimental presenta a bajas frecuencias algunas fluctuaciones debido a las reflexiones de ondas en la salida del sistema experimental.

En la figura 3.17 se estudia el efecto de la variación de la porosidad, que toma los valores  $\sigma = 10\%$ ,  $\sigma = 15\%$  y  $\sigma = 26.3\%$ . El resto de parámetros tienen los valores:  $M = 0.15$ ,  $d_h = 0.0035$  m,  $t_p = 0.001$  m y  $R = 30716$  rayl/m. La geometría considerada es la geometría 1 y se aplica para los cálculos la condición de continuidad de

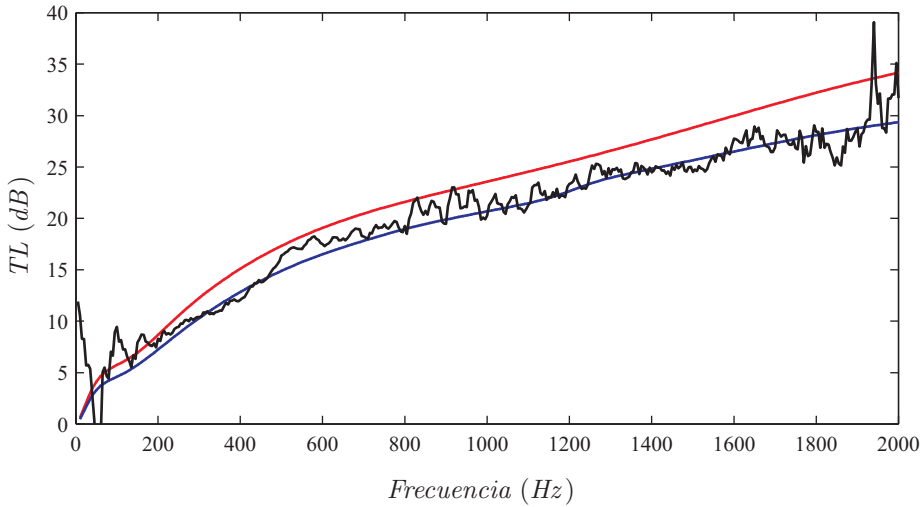


FIGURA 3.16:  $TL$  de resonador concéntrico con material absorbente, geometría 2: —, continuidad de velocidad; —, continuidad de desplazamiento; —, medida experimental.

velocidad así como la de desplazamiento. Se puede observar que a bajas frecuencias la porosidad casi no afecta a la atenuación, mientras que a medias y altas frecuencias con mayores porosidades se obtienen mayores niveles de atenuación. La aplicación de la condición de velocidad produce predicciones de atenuación con niveles mayores en todo el rango de frecuencias de interés.

Se pretende ilustrar ahora el efecto del flujo en la atenuación. Por ello se consideran los valores  $M = 0.1$ ,  $M = 0.15$  y  $M = 0.2$ . La figura 3.18 muestra el efecto del flujo medio, con los valores  $\sigma = 26.3\%$ ,  $d_h = 0.0035$  m,  $t_p = 0.001$  m y  $R = 30716$  rayl/m. Puede comprobarse que a mayor flujo se obtienen menores niveles de atenuación en todo el rango de frecuencias de interés, tanto para la condición de continuidad de velocidad como para la asociada a desplazamiento.

### 3.6. Conclusiones

En este capítulo se ha llevado a cabo la aplicación del método de elementos finitos al estudio del comportamiento acústico de silenciadores con material absorbente. Esto se justifica, por un lado, debido a la falta de precisión de los modelos de onda plana presentados en el capítulo anterior y también por la capacidad que posee esta herramienta cuando se consideran geometrías arbitrarias, propiedades no uniformes, condiciones de contorno complejas, etc. Por otro, como consecuencia de las deficiencias y carencias encontradas en los programas comerciales en lo referente a la presencia simultánea de flujo medio, material absorbente y superficies perforadas.



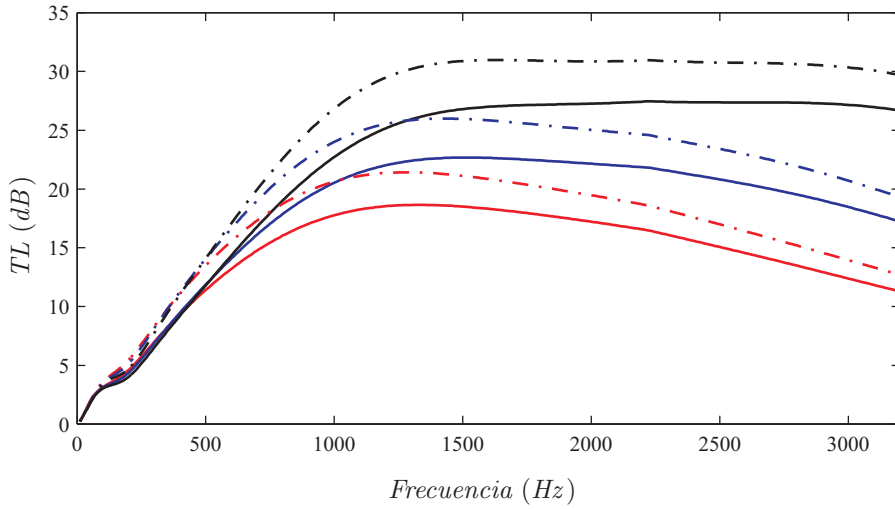


FIGURA 3.17: *TL de resonador concéntrico con material absorbente, geometría 1,  $M = 0.15$ : —,  $\sigma = 10\%$ , desplazamiento; - - -, ídem, velocidad; —,  $\sigma = 15\%$ , desplazamiento; - - -, ídem, velocidad; —,  $\sigma = 26.3\%$ , desplazamiento; - - -, ídem, velocidad.*

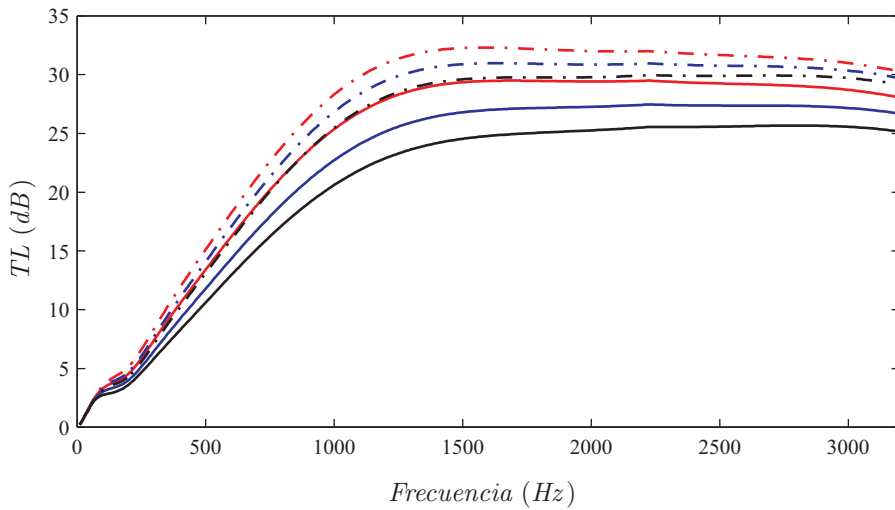


FIGURA 3.18: *TL de resonador concéntrico con material absorbente, geometría 1,  $\sigma = 26.3\%$ : —,  $M = 0.10$ , desplazamiento; - - -, ídem, velocidad; —,  $M = 0.15$ , desplazamiento; - - -, ídem, velocidad; —,  $M = 0.20$ , desplazamiento; - - -, ídem, velocidad.*

En primer lugar se ha considerado la ecuación de ondas convectiva, a la que se ha

aplicado el método de residuos ponderados y la formulación de Galerkin, considerando la formulación en presión. Se ha llevado a cabo el acoplamiento de subcomponentes conectados mediante superficies perforadas y se ha analizado la imposición de las condiciones de contorno en presencia de flujo medio y dichas superficies. Se han comparado los resultados obtenidos mediante la aplicación de la condición de velocidad y la de desplazamiento con resultados experimentales, mostrando que la condición de desplazamiento proporciona mayor concordancia con las medidas experimentales.

Se ha estudiado el comportamiento acústico de diversas geometrías concretas de silenciadores mediante elementos finitos para demostrar sus características más importantes y las limitaciones de los modelos de onda plana. Entre éstas se encuentran configuraciones puramente reactivas (cámara de expansión simple, cámara reversa y cámara con doble salida opuesta) y otras con elementos perforados y material absorbente.

## Capítulo 4

# Modelado acústico multidimensional de catalizadores mediante elementos finitos

### Resumen del capítulo:

*En este capítulo se lleva a cabo la aplicación del método de elementos finitos al modelado acústico de catalizadores de automoción. Para el modelado del catalizador se consideran dos procedimientos. Por un lado la técnica 3D conductos/3D monolito, utilizada habitualmente en la bibliografía, en la que el modelo de elementos finitos implica el cálculo del campo acústico tridimensional en el catalizador completo (conductos y monolito). Por otro lado la técnica propuesta en esta Tesis, denominada 3D conductos/1D monolito, en la que la solución del campo acústico puede ser tridimensional en los conductos de entrada y salida, pero no se permite la propagación de modos de alto orden en el monolito con el fin de reproducir mejor los fenómenos acústicos que tienen lugar en el interior de los conductos capilares que lo integran. Los resultados proporcionados por ambas técnicas se comparan con resultados experimentales obtenidos con una configuración comercial de catalizador. Posteriormente se aplica el modelo 3D conductos/1D monolito a catalizadores en presencia de flujo medio. Adicionalmente, se realiza un estudio paramétrico para analizar el efecto de la porosidad del monolito, su resistividad y la velocidad de flujo medio en la atenuación acústica.*



## 4.1. Introducción

Los catalizadores tienen como misión disminuir los elementos contaminantes contenidos en los gases de escape de un vehículo. En los últimos años diversos investigadores han abordado el modelado acústico de catalizadores debido a que su existencia implica una influencia no despreciable en el comportamiento acústico de la línea de escape de los motores de combustión interna alternativos.

En primer lugar, el modelado acústico del catalizador requiere el análisis de la propagación de ondas en los capilares del monolito. Kirchhoff [86] presentó un modelo válido teniendo en cuenta el papel que juega la viscosidad y la transferencia de calor en los conductos capilares. A partir de dicho modelo, Zwicker y Kosten [150] encontraron una solución aproximada haciendo algunas simplificaciones para capilares de sección transversal circular. Selamet *et al.* [123] utilizaron una técnica, basada en los resultados de Allard [4], en la que se asume que el comportamiento del monolito es como el de un fluido equivalente con impedancia y número de onda complejos. La inclusión del flujo medio en los capilares hace que el problema sea más complejo y hasta el momento no existe una teoría completa. Dokumaci [52] encontró una solución analítica utilizando el procedimiento de Zwicker y Kosten para capilares de sección transversal circular en presencia de flujo medio. El mismo autor extendió su modelo para el caso de capilares rectangulares considerando una solución desarrollada en base a una serie de Fourier doble [53]. En segundo lugar, es necesario disponer de modelos de acoplamiento entre el monolito y los conductos de entrada y salida. Si bien una posibilidad es recurrir a los modelos de onda plana en los conductos de entrada y salida, se puede lograr una mayor precisión recurriendo a modelos basados en métodos numéricos, tales como el método de elementos finitos [123] y el de elementos de contorno [145]. Debe tenerse en cuenta que para geometrías comerciales y para frecuencias suficientemente altas, el campo acústico real es tridimensional, con lo que las predicciones basadas en modelos de onda plana pueden presentar un error considerable.

En este sentido, Selamet *et al.* [123] llevaron a cabo la aplicación del método de elementos finitos a catalizadores en ausencia de flujo medio utilizando el modelo que en el contexto de esta Tesis se denomina 3D conductos/3D monolito, en el que el campo acústico puede ser tridimensional en todos los conductos del catalizador incluyendo el monolito. Este modelo es mejorable, teniendo en cuenta las características fundamentales unidimensionales de los conductos capilares. En la Tesis se ha propuesto el denominado modelo 3D conductos/1D monolito, que consiste en la sustitución del monolito por una matriz de transferencia que asume un comportamiento unidimensional en su interior. Los resultados más relevantes han sido publicados en las referencias [47, 48].

## 4.2. Modelado acústico de catalizadores sin flujo medio

### 4.2.1. Modelo 3D conductos/3D monolito

Se utiliza en esta sección una técnica en la que el campo acústico puede ser tridimensional en todos los conductos del catalizador, incluyendo el monolito. La figura 4.1 muestra un esquema del modelo completamente multidimensional (3D conductos/3D monolito). El medio de propagación en los tubos de entrada y salida es aire con densidad  $\rho_0$  y velocidad del sonido  $c_0$ , mientras que el monolito se caracteriza por los valores equivalentes  $\rho_m$  y  $c_m$  [4], que han sido descritos con detalle en el capítulo 2. Se denota mediante  $\Omega_a$  y  $\Omega_m$  el dominio con aire y el dominio del monolito, respectivamente, mientras que  $\Gamma_{bc}$  y  $\Gamma_{int}$  representan los contornos donde se aplican las condiciones de frontera y las de acoplamiento, respectivamente.

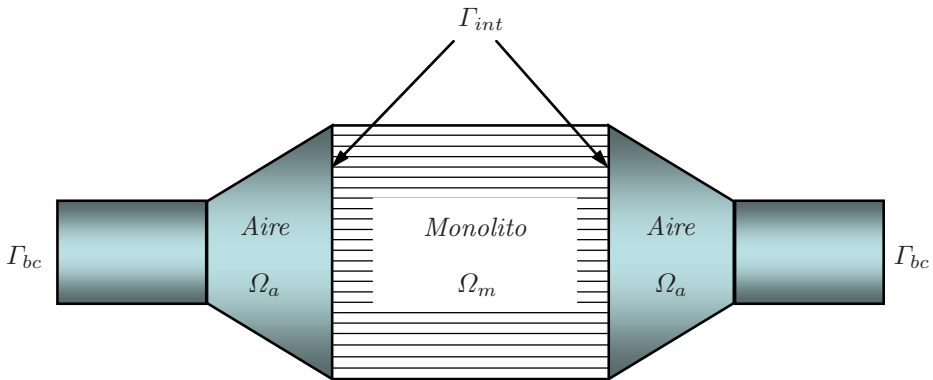


FIGURA 4.1: Esquema de catalizador asociado al modelo 3D conductos/3D monolito.

La propagación del sonido en el interior del catalizador en ausencia de flujo medio está gobernada por la ecuación de ondas (2.42). Considerando comportamiento armónico, la ecuación de Helmholtz, en las regiones de entrada y salida puede escribirse como

$$\frac{\partial^2 P_a}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P_a}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 P_a}{\partial z^2} + \left(\frac{\omega}{c_0}\right)^2 P_a = \nabla^2 P_a + k_0^2 P_a = 0 \quad (4.1)$$

donde  $P_a$  es la amplitud compleja de presión en el aire y  $k_0$  es el número de onda. En el caso del monolito, modelado como un fluido equivalente, se tiene de forma similar

$$\frac{\partial^2 P_m}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P_m}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 P_m}{\partial z^2} + \left(\frac{\omega}{c_m}\right)^2 P_m = \nabla^2 P_m + k_m^2 P_m = 0 \quad (4.2)$$

donde el número de onda equivalente  $k_m$ , definido por  $k_m = \omega/c_m$ , es complejo y dependiente de la frecuencia. La velocidad del sonido equivalente se define por la expresión (2.186).

Las condiciones de acoplamiento del campo acústico entre los tubos de entrada y salida y el monolito están asociadas a la continuidad de presión y de velocidad normal a la interfase  $\Gamma_{int}$ , y pueden expresarse como

$$P_a = P_m \quad (4.3)$$

$$\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P_a}{\partial n} = -\frac{\phi}{\rho_m} \frac{\partial P_m}{\partial n} \quad (4.4)$$

siendo  $\phi$  la porosidad del monolito.

El método de residuos ponderados implica la multiplicación de las ecuaciones (4.1) y (4.2) por una función de ponderación  $\Psi$  y la integración en el dominio del problema. A continuación, se aplica el teorema de Green al residuo ponderado, obteniendo para el aire

$$\int_{\Omega_a} \nabla^T \Psi \nabla P_a d\Omega - k_0^2 \int_{\Omega_a} \Psi P_a d\Omega = \int_{\Gamma_a \cap \Gamma_{bc}} \Psi \frac{\partial P_a}{\partial n} d\Gamma + \int_{\Gamma_a \cap \Gamma_{int}} \Psi \frac{\partial P_a}{\partial n} d\Gamma \quad (4.5)$$

y para el monolito

$$\int_{\Omega_m} \nabla^T \Psi \nabla P_m d\Omega - k_m^2 \int_{\Omega_m} \Psi P_m d\Omega = \int_{\Gamma_m \cap \Gamma_{int}} \Psi \frac{\partial P_m}{\partial n} d\Gamma \quad (4.6)$$

El dominio de las regiones de entrada y salida se discretiza en  $N_e^a$  elementos de volumen  $\Omega_e^a$ , mientras que el dominio correspondiente al monolito se discretiza en  $N_e^m$  elementos de volumen  $\Omega_e^m$ , y las ecuaciones (4.5) y (4.6) pasan a expresarse como

$$\begin{aligned} \sum_{e=1}^{N_e^a} \int_{\Omega_e^a} \nabla^T \Psi^{(e)} \nabla P_a^{(e)} d\Omega - k_0^2 \sum_{e=1}^{N_e^a} \int_{\Omega_e^a} \Psi^{(e)} P_a^{(e)} d\Omega &= \sum_{e=1}^{N_e^a} \int_{\Gamma_e^a \cap \Gamma_{int}} \Psi^{(e)} \frac{\partial P_a^{(e)}}{\partial n} d\Gamma \\ &+ \sum_{e=1}^{N_e^a} \int_{\Gamma_e^a \cap \Gamma_{bc}} \Psi^{(e)} \frac{\partial P_a^{(e)}}{\partial n} d\Gamma \end{aligned} \quad (4.7)$$

$$\sum_{e=1}^{N_e^m} \int_{\Omega_e^m} \nabla^T \Psi^{(e)} \nabla P_m^{(e)} d\Omega - k_m^2 \sum_{e=1}^{N_e^m} \int_{\Omega_e^m} \Psi^{(e)} P_m^{(e)} d\Omega = \sum_{e=1}^{N_e^m} \int_{\Gamma_e^m \cap \Gamma_{int}} \Psi^{(e)} \frac{\partial P_m^{(e)}}{\partial n} d\Gamma \quad (4.8)$$

La interpolación nodal de elementos finitos dentro de un elemento  $e$  proporciona, para el aire,

$$P_a^{(e)} = [N]\{P_a^{(e)}\} \quad (4.9)$$

siendo  $[N]$  el vector de funciones de forma y  $\{P_a^{(e)}\}$  los valores nodales. De manera similar, para el monolito se tiene

$$P_m^{(e)} = [N]\{P_m^{(e)}\} \quad (4.10)$$

Por otro lado, la utilización de la formulación de Galerkin [107] aproxima la función de ponderación como

$$\Psi^{(e)} = [N]\{\Psi^{(e)}\} \quad (4.11)$$

con lo cual el residuo ponderado (4.7) asociado al aire se escribe como

$$\begin{aligned} & \sum_{e=1}^{N_e^a} \{\Psi^{(e)}\}^T \left( \int_{\Omega_a^e} \nabla^T [N] \nabla [N] d\Omega - k_0^2 \int_{\Omega_a^e} [N]^T [N] d\Omega \right) \{P_a^{(e)}\} \\ & - \sum_{e=1}^{N_e^a} \{\Psi^{(e)}\}^T \int_{\Gamma_a^e \cap \Gamma_{int}} [N]^T \frac{\partial P_a^{(e)}}{\partial n} d\Gamma - \sum_{e=1}^{N_e^a} \{\Psi^{(e)}\}^T \int_{\Gamma_a^e \cap \Gamma_{bc}} [N]^T \frac{\partial P_a^{(e)}}{\partial n} d\Gamma = 0 \end{aligned} \quad (4.12)$$

mientras que el residuo (4.8), para el monolito, proporciona

$$\begin{aligned} & \sum_{e=1}^{N_e^m} \{\Psi^{(e)}\}^T \left( \int_{\Omega_m^e} \nabla^T [N] \nabla [N] d\Omega - k_m^2 \int_{\Omega_m^e} [N]^T [N] d\Omega \right) \{P_m^{(e)}\} \\ & - \sum_{e=1}^{N_e^m} \{\Psi^{(e)}\}^T \int_{\Gamma_m^e \cap \Gamma_{int}} [N]^T \frac{\partial P_m^{(e)}}{\partial n} d\Gamma = 0 \end{aligned} \quad (4.13)$$

Si se multiplica la ecuación (4.13) por  $\phi\rho_0/\rho_m$  y se añade a la ecuación (4.12) queda

$$\begin{aligned} & \sum_{e=1}^{N_e^a} \{\Psi^{(e)}\}^T \left( \int_{\Omega_a^e} \nabla^T [N] \nabla [N] d\Omega - k_0^2 \int_{\Omega_a^e} [N]^T [N] d\Omega \right) \{P_a^{(e)}\} \\ & + \frac{\phi\rho_0}{\rho_m} \sum_{e=1}^{N_e^m} \{\Psi^{(e)}\}^T \left( \int_{\Omega_m^e} \nabla^T [N] \nabla [N] d\Omega - k_m^2 \int_{\Omega_m^e} [N]^T [N] d\Omega \right) \{P_m^{(e)}\} \\ & - \sum_{e=1}^{N_e^a} \{\Psi^{(e)}\}^T \int_{\Gamma_a^e \cap \Gamma_{bc}} [N]^T \frac{\partial P_a^{(e)}}{\partial n} d\Gamma = 0 \end{aligned} \quad (4.14)$$

Debe tenerse en cuenta que el término

$$\sum_{e=1}^{N_e^a} \{\Psi^{(e)}\}^T \int_{\Gamma_a^e \cap \Gamma_{int}} [N]^T \frac{\partial P_a^{(e)}}{\partial n} d\Gamma + \frac{\phi\rho_0}{\rho_m} \sum_{e=1}^{N_e^m} \{\Psi^{(e)}\}^T \int_{\Gamma_m^e \cap \Gamma_{int}} [N]^T \frac{\partial P_m^{(e)}}{\partial n} d\Gamma \quad (4.15)$$



se cancela debido a la condición expresada en la ecuación (4.4), motivo por el cual no aparece en la ecuación (4.14). Tras eliminar los valores nodales de las funciones de ponderación, ampliar y ensamblar matrices de elemento [149], la ecuación (4.14) puede escribirse como

$$([K] - \omega^2 [M]) \{P\} = \{F\} \quad (4.16)$$

con la introducción de las definiciones

$$[K] = \sum_{e=1}^{N_e^a} \int_{\Omega_e^a} \nabla^T [N] \nabla [N] d\Omega + \frac{\phi \rho_0}{\rho_m} \sum_{e=1}^{N_e^m} \int_{\Omega_e^m} \nabla^T [N] \nabla [N] d\Omega \quad (4.17)$$

$$[M] = \frac{1}{c_0^2} \sum_{e=1}^{N_e^a} \int_{\Omega_e^a} [N]^T [N] d\Omega + \frac{\phi \rho_0}{\rho_m} \frac{1}{c_m^2} \sum_{e=1}^{N_e^m} \int_{\Omega_e^m} [N]^T [N] d\Omega \quad (4.18)$$

$$\{F\} = \sum_{e=1}^{N_e^a} \int_{\Gamma_a^e \cap \Gamma_{bc}} [N]^T \frac{\partial P_a^{(e)}}{\partial n} d\Gamma \quad (4.19)$$

Como solución del problema planteado se obtiene la presión en cada nodo (y cualquier punto mediante la interpolación) para cada frecuencia de excitación. Para obtener la velocidad acústica en un punto dado para cualquier frecuencia es necesario utilizar la ecuación de Euler (2.47) que permite escribir dentro de cada elemento

$$\vec{U}^{(e)} = \begin{cases} -\frac{1}{j\rho_0\omega} \nabla [N] \{P_a^{(e)}\}, & \text{en } \Omega_a \\ -\frac{1}{j\rho_m\omega} \nabla [N] \{P_m^{(e)}\}, & \text{en } \Omega_m \end{cases} \quad (4.20)$$

### 4.2.2. Modelo 3D conductos/1D monolito

El procedimiento mostrado en la sección anterior ha sido utilizado por Selamet *et al.* [123] para el modelado acústico de catalizadores de dimensiones transversales reducidas en el rango de bajas frecuencias. En estas condiciones, la propagación es básicamente unidimensional y los diferentes modelos (elementos finitos y onda plana) tienden a proporcionar resultados similares. Para frecuencias mayores y/o catalizadores de grandes dimensiones, las medidas experimentales realizadas durante el desarrollo de esta Tesis han puesto de manifiesto que los resultados del modelo 3D/3D son mejorables. Esto parece ser debido, según se sugiere en esta Tesis, a que los fenómenos de propagación de ondas pueden ser efectivamente tridimensionales en los conductos de entrada y salida, así como en las transiciones troncocónicas. Sin embargo, la geometría longitudinal de los conductos capilares que forman el monolito solamente permite una propagación de tipo unidimensional (o de onda plana) en su interior. De esta forma, se justifica la necesidad de desarrollar una metodología basada en el método de elementos finitos que permita acoplar *soluciones tridimensionales* de la ecuación de ondas en los conductos con *soluciones unidimensionales*

de dicha ecuación en el interior del monolito. La figura 4.2 muestra un esquema del catalizador asociado al modelo 3D conductos/1D monolito. Este modelo consiste en la sustitución del monolito por una matriz de transferencia que asume comportamiento acústico unidimensional en su interior [47, 48]. De esta forma, la solución del campo acústico puede ser tridimensional en los conductos de entrada y salida, pero no se permite la existencia de modos de alto orden en el monolito, lo cual es consistente con las características fundamentalmente unidimensionales de los conductos capilares que lo integran [52, 53, 110, 131].

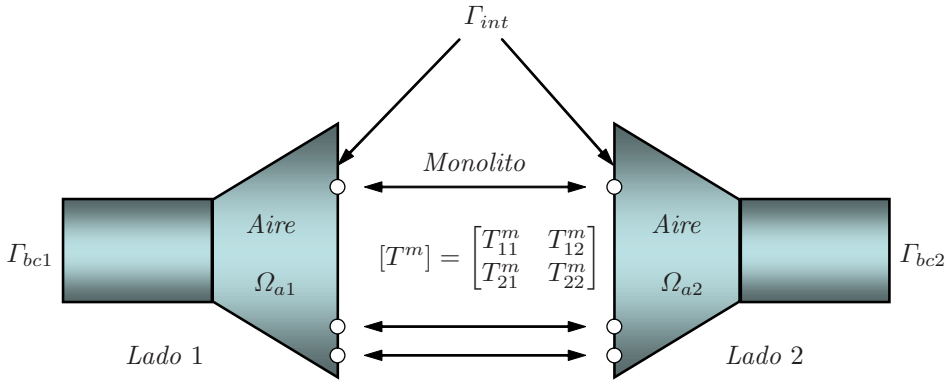


FIGURA 4.2: Esquema de catalizador asociado al modelo 3D conductos/1D monolito.

En la técnica propuesta, se aplica el método de residuos ponderados junto con la formulación de Galerkin a cada una de las regiones de aire separadas por el monolito. Para el lado 1 se tiene

$$\begin{aligned} \sum_{e=1}^{N_e^{a1}} \{\Psi^{(e)}\}^T \left( \int_{\Omega_{a1}^e} \nabla^T [N] \nabla [N] d\Omega - k_0^2 \int_{\Omega_{a1}^e} [N]^T [N] d\Omega \right) \{P_{a1}^{(e)}\} \\ - \sum_{e=1}^{N_e^{a1}} \{\Psi^{(e)}\}^T \int_{\Gamma_{a1}^e \cap \Gamma_{bc1}} [N]^T \frac{\partial P_{a1}^{(e)}}{\partial n} d\Gamma - \sum_{e=1}^{N_e^{a1}} \{\Psi^{(e)}\}^T \int_{\Gamma_{a1}^e \cap \Gamma_{int}} [N]^T \frac{\partial P_{a1}^{(e)}}{\partial n} d\Gamma = 0 \end{aligned} \quad (4.21)$$

Para el lado 2 resulta

$$\begin{aligned} \sum_{e=1}^{N_e^{a2}} \{\Psi^{(e)}\}^T \left( \int_{\Omega_{a2}^e} \nabla^T [N] \nabla [N] d\Omega - k_0^2 \int_{\Omega_{a2}^e} [N]^T [N] d\Omega \right) \{P_{a2}^{(e)}\} \\ - \sum_{e=1}^{N_e^{a2}} \{\Psi^{(e)}\}^T \int_{\Gamma_{a2}^e \cap \Gamma_{bc2}} [N]^T \frac{\partial P_{a2}^{(e)}}{\partial n} d\Gamma - \sum_{e=1}^{N_e^{a2}} \{\Psi^{(e)}\}^T \int_{\Gamma_{a2}^e \cap \Gamma_{int}} [N]^T \frac{\partial P_{a2}^{(e)}}{\partial n} d\Gamma = 0 \end{aligned} \quad (4.22)$$

El monolito se sustituye por una matriz de transferencia que relaciona las variables acústicas a ambos lados de éste. La relación entre los campos acústicos de presión y velocidad a ambos lados del monolito se expresa como

$$\begin{Bmatrix} P_{a1} \\ U_{a1} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11}^m & T_{12}^m \\ T_{21}^m & T_{22}^m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_{a2} \\ U_{a2} \end{Bmatrix} = [T^m] \begin{Bmatrix} P_{a2} \\ U_{a2} \end{Bmatrix} \quad (4.23)$$

donde la matriz de transferencia del monolito, en ausencia de flujo medio, viene dada por las expresiones (2.187), (2.339) y (2.340)

$$[T^m] = \begin{bmatrix} T_{11}^m & T_{12}^m \\ T_{21}^m & T_{22}^m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(k_m L_m) & \frac{jZ_m \sin(k_m L_m)}{\phi} \\ \frac{j\phi \sin(k_m L_m)}{Z_m} & \cos(k_m L_m) \end{bmatrix} \quad (4.24)$$

De la expresión (4.23) se puede escribir

$$P_{a1} = T_{11}^m P_{a2} + T_{12}^m U_{a2} \quad (4.25)$$

$$U_{a1} = T_{21}^m P_{a2} + T_{22}^m U_{a2} \quad (4.26)$$

En cada lado del monolito puede relacionarse la presión y la velocidad acústica a partir de la ecuación de Euler (2.47),

$$U_{a1} = \left( \frac{-1}{j\rho_0\omega} \frac{\partial P_{a1}}{\partial n} \right) \quad U_{a2} = - \left( \frac{-1}{j\rho_0\omega} \frac{\partial P_{a2}}{\partial n} \right) \quad (4.27)$$

Sustituyendo las expresiones (4.27) en las ecuaciones (4.25) y (4.26), resulta

$$P_{a1} = T_{11}^m P_{a2} - T_{12}^m \left( \frac{-1}{j\omega\rho_0} \frac{\partial P_{a2}}{\partial n} \right) \quad (4.28)$$

$$\frac{-1}{j\omega\rho_0} \frac{\partial P_{a1}}{\partial n} = T_{21}^m P_{a2} - T_{22}^m \left( \frac{-1}{j\omega\rho_0} \frac{\partial P_{a2}}{\partial n} \right) \quad (4.29)$$

Teniendo en cuenta la ecuación (4.28),

$$\frac{\partial P_{a2}}{\partial n} = \frac{j\omega\rho_0}{T_{12}^m} P_{a1} - \frac{j\omega\rho_0 T_{11}^m}{T_{12}^m} P_{a2} \quad (4.30)$$

Combinando ahora las ecuaciones (4.29) y (4.30)

$$\frac{\partial P_{a1}}{\partial n} = -\frac{j\omega\rho_0 T_{22}^m}{T_{12}^m} P_{a1} + j\omega\rho_0 \left( \frac{T_{11}^m T_{22}^m}{T_{12}^m} - T_{21}^m \right) P_{a2} \quad (4.31)$$

Con la introducción de las siguientes definiciones

$$\Pi_{11} = \rho_0 \left( \frac{T_{22}^m}{T_{12}^m} \right) \quad (4.32)$$

$$\Pi_{12} = \rho_0 \left( \frac{T_{11}^m T_{22}^m}{T_{12}^m} - T_{21}^m \right) \quad (4.33)$$

$$\Pi_{21} = \rho_0 \left( \frac{1}{T_{12}^m} \right) \quad (4.34)$$

$$\Pi_{22} = \rho_0 \left( \frac{T_{11}^m}{T_{12}^m} \right) \quad (4.35)$$

las ecuaciones (4.30) y (4.31) quedan ahora como

$$\frac{\partial P_{a2}}{\partial n} = j\omega\Pi_{21}P_{a1} - j\omega\Pi_{22}P_{a2} \quad (4.36)$$

$$\frac{\partial P_{a1}}{\partial n} = -j\omega\Pi_{11}P_{a1} + j\omega\Pi_{12}P_{a2} \quad (4.37)$$

Si se sustituye la ecuación (4.37) en el lado derecho de la expresión del residuo ponderado (4.21), se tiene

$$\begin{aligned} & \sum_{e=1}^{N_e^{a1}} \{\Psi^{(e)}\}^T \left( \int_{\Omega_{a1}^e} \nabla^T [N] \nabla [N] d\Omega - k_0^2 \int_{\Omega_{a1}^e} [N]^T [N] d\Omega \right) \{P_{a1}^{(e)}\} \\ & - \sum_{e=1}^{N_e^{a1}} \{\Psi^{(e)}\}^T \int_{\Gamma_{a1}^e \cap \Gamma_{bc1}} [N]^T \frac{\partial P_{a1}^{(e)}}{\partial n} d\Gamma \\ & - \sum_{e=1}^{N_e^{a1}} \{\Psi^{(e)}\}^T \int_{\Gamma_{a1}^e \cap \Gamma_{int}} [N]^T \left( -j\omega\Pi_{11}P_{a1}^{(e)} + j\omega\Pi_{12}P_{a2}^{(e)} \right) d\Gamma = 0 \end{aligned} \quad (4.38)$$

Tras aplicar la interpolación nodal, y manipular la ecuación anterior, resulta

$$\begin{aligned} & \sum_{e=1}^{N_e^{a1}} \{\Psi^{(e)}\}^T \left( \int_{\Omega_{a1}^e} \nabla^T [N] \nabla [N] d\Omega - k_0^2 \int_{\Omega_{a1}^e} [N]^T [N] d\Omega \right) \{P_{a1}^{(e)}\} \\ & + j\omega\Pi_{11} \sum_{e=1}^{N_e^{a1}} \{\Psi^{(e)}\}^T \int_{\Gamma_{a1}^e \cap \Gamma_{int}} [N]^T [N] d\Gamma \{P_{a1}^{(e)}\} \\ & - j\omega\Pi_{12} \sum_{e=1}^{N_e^{a1}} \{\Psi^{(e)}\}^T \int_{\Gamma_{a1}^e \cap \Gamma_{int}} [N]^T [N] d\Gamma \{P_{a2}^{(e)}\} \\ & - \sum_{e=1}^{N_e^{a1}} \{\Psi^{(e)}\}^T \int_{\Gamma_{a1}^e \cap \Gamma_{bc1}} [N]^T \frac{\partial P_{a1}^{(e)}}{\partial n} d\Gamma = 0 \end{aligned} \quad (4.39)$$

Con la introducción de la nomenclatura

$$[K_{a1}] = \sum_{e=1}^{N_e^{a1}} \int_{\Omega_{a1}^e} \nabla^T [N] \nabla [N] d\Omega \quad (4.40)$$

$$[C_{a1}] = \Pi_{11} \sum_{e=1}^{N_e^{a1}} \int_{\Gamma_{a1}^e \cap \Gamma_{int}} [N]^T [N] d\Gamma \quad (4.41)$$

$$[M_{a1}] = \frac{1}{c_0^2} \sum_{e=1}^{N_e^{a1}} \int_{\Omega_{a1}^e} [N]^T [N] d\Omega \quad (4.42)$$

$$[C_{a1a2}] = \Pi_{12} \sum_{e=1}^{N_e^{a1}} \int_{\Gamma_{a1}^e \cap \Gamma_{int}} [N]^T [N] d\Gamma \quad (4.43)$$

$$\{F_{a1}\} = \sum_{e=1}^{N_e^{a1}} \int_{\Gamma_{a1}^e \cap \Gamma_{bc1}} [N]^T \frac{\partial P_{a1}^{(e)}}{\partial n} d\Gamma \quad (4.44)$$

en la que en este caso, los símbolos de sumatorio indican ensamblados, la ecuación (4.39) se puede escribir en forma compacta de la siguiente manera

$$([K_{a1}] + j\omega [C_{a1}] - \omega^2 [M_{a1}]) \{P_{a1}\} - j\omega [C_{a1a2}] \{P_{a2}\} = \{F_{a1}\} \quad (4.45)$$

Por otro lado si se sustituye la ecuación (4.36) en el lado derecho de la ecuación (4.22), se obtiene

$$\begin{aligned} & \sum_{e=1}^{N_e^{a2}} \{\Psi^{(e)}\}^T \left( \int_{\Omega_{a2}^e} \nabla^T [N] \nabla [N] d\Omega - k_0^2 \int_{\Omega_{a2}^e} [N]^T [N] d\Omega \right) \{P_{a2}^{(e)}\} \\ & - \sum_{e=1}^{N_e^{a2}} \{\Psi^{(e)}\}^T \int_{\Gamma_{a2}^e \cap \Gamma_{bc2}} [N]^T \frac{\partial P_{a2}^{(e)}}{\partial n} d\Gamma \\ & - \sum_{e=1}^{N_e^{a2}} \{\Psi^{(e)}\}^T \int_{\Gamma_{a2}^e \cap \Gamma_{int}} [N]^T \left( j\omega \Pi_{21} P_{a1}^{(e)} - j\omega \Pi_{22} P_{a2}^{(e)} \right) d\Gamma = 0 \end{aligned} \quad (4.46)$$

Utilizando la interpolación nodal y manipulando la ecuación anterior, queda

$$\begin{aligned} & \sum_{e=1}^{N_e^{a2}} \{\Psi^{(e)}\}^T \left( \int_{\Omega_{a2}^e} \nabla^T [N] \nabla [N] d\Omega - k_0^2 \int_{\Omega_{a2}^e} [N]^T [N] d\Omega \right) \{P_{a2}^{(e)}\} \\ & + j\omega \Pi_{22} \sum_{e=1}^{N_e^{a2}} \{\Psi^{(e)}\}^T \int_{\Gamma_{a2}^e \cap \Gamma_{int}} [N]^T [N] d\Gamma \{P_{a2}^{(e)}\} \\ & - j\omega \Pi_{21} \sum_{e=1}^{N_e^{a2}} \{\Psi^{(e)}\}^T \int_{\Gamma_{a2}^e \cap \Gamma_{int}} [N]^T [N] d\Gamma \{P_{a1}^{(e)}\} \\ & - \sum_{e=1}^{N_e^{a2}} \{\Psi^{(e)}\}^T \int_{\Gamma_{a2}^e \cap \Gamma_{bc2}} [N]^T \frac{\partial P_{a2}^{(e)}}{\partial n} d\Gamma = 0 \end{aligned} \quad (4.47)$$

Si se introduce ahora la siguiente nomenclatura (considerando el ensamblado de matrices de elemento)

$$[K_{a2}] = \sum_{e=1}^{N_e^{a2}} \int_{\Omega_{a2}^e} \nabla^T [N] \nabla [N] d\Omega \quad (4.48)$$

$$[C_{a2}] = \Pi_{22} \sum_{e=1}^{N_e^{a2}} \int_{\Gamma_{a2}^e \cap \Gamma_{int}} [N]^T [N] d\Gamma \quad (4.49)$$

$$[M_{a2}] = \frac{1}{c_0^2} \sum_{e=1}^{N_e^{a2}} \int_{\Omega_{a2}^e} [N]^T [N] d\Omega \quad (4.50)$$

$$[C_{a2a1}] = \Pi_{21} \sum_{e=1}^{N_e^{a2}} \int_{\Gamma_{a2}^e \cap \Gamma_{int}} [N]^T [N] d\Gamma \quad (4.51)$$

$$\{F_{a2}\} = \sum_{e=1}^{N_e^{a2}} \int_{\Gamma_{a2}^e \cap \Gamma_{bc2}} [N]^T \frac{\partial P_{a2}^{(e)}}{\partial n} d\Gamma \quad (4.52)$$

la ecuación (4.47) ahora queda

$$([K_{a2}] + j\omega [C_{a2}] - \omega^2 [M_{a2}]) \{P_{a2}\} - j\omega [C_{a2a1}] \{P_{a1}\} = \{F_{a2}\} \quad (4.53)$$

A partir de las ecuaciones (4.45) y (4.53), se puede escribir el sistema de ecuaciones final como

$$\left( \begin{bmatrix} [K_{a1}] & [0] \\ [0] & [K_{a2}] \end{bmatrix} + j\omega \begin{bmatrix} [C_{a1}] & -[C_{a1a2}] \\ -[C_{a2a1}] & [C_{a2}] \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} [M_{a1}] & [0] \\ [0] & [M_{a2}] \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \{P_{a1}\} \\ \{P_{a2}\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{F_{a1}\} \\ \{F_{a2}\} \end{Bmatrix} \quad (4.54)$$

que de manera compacta es

$$([K_a] + j\omega [C_a] - \omega^2 [M_a]) \{P_a\} = \{F_a\} \quad (4.55)$$

### 4.2.3. Comparación de resultados

Se procede ahora a la aplicación de los modelos previos, con el fin de llevar a cabo una comparación entre los resultados obtenidos mediante éstos, así como con las predicciones obtenidas mediante la hipótesis de onda plana (en todo el conjunto del catalizador) y las medidas experimentales. La figura 4.3 ilustra la configuración del catalizador estudiado. Se muestra asimismo el montaje de dicho catalizador en un banco de ensayo acústico, que permite la obtención experimental de la matriz de cuatro polos y el índice de pérdidas de transmisión en base al método de la función de transferencia [23, 24]. La medida experimental se realiza a temperatura ambiente y en ausencia de flujo medio. Las simulaciones de elementos finitos considerando

los modelos 3D conductos/3D monolito y 3D conductos/1D monolito se llevan a cabo con los siguientes valores:  $R = 500 \text{ rayl/m}$ ,  $\phi = 0.8$ ,  $\mu = 1.802 \cdot 10^{-5} \text{ Pa s}$ ,  $C_p = 1007 \text{ J/(kg K)}$  y  $\kappa = 0.02476 \text{ W/(m K)}$ . Los conductos capilares son de sección transversal cuadrada de manera que se toma  $\alpha = 1.07$  para evaluar el número de onda tangencial  $s$  mediante la ecuación (2.183). La figura 4.4 muestra las mallas de elementos finitos consideradas para los modelos 3D/3D y 3D/1D. Dichas mallas están formadas por elementos tetraédricos cuadráticos, con un tamaño de elemento que varía entre 0.0075 m (regiones próximas a la expansión y contracción) y 0.015 m (zona central del volumen de monolito). En la figura se muestra la geometría completa, si bien los cálculos se han realizado con un cuarto del modelo, habida cuenta de la existencia de dos planos de simetría.

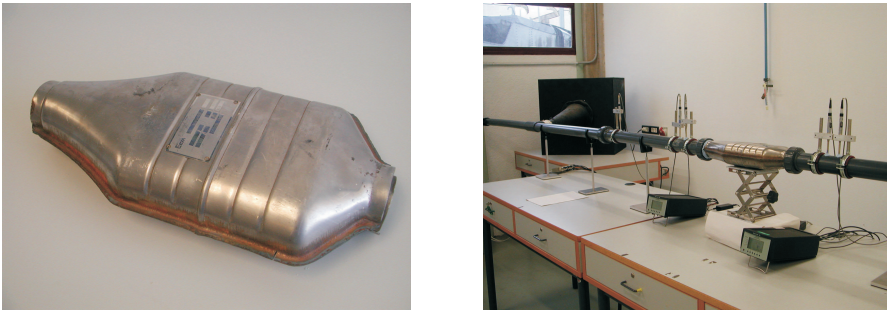
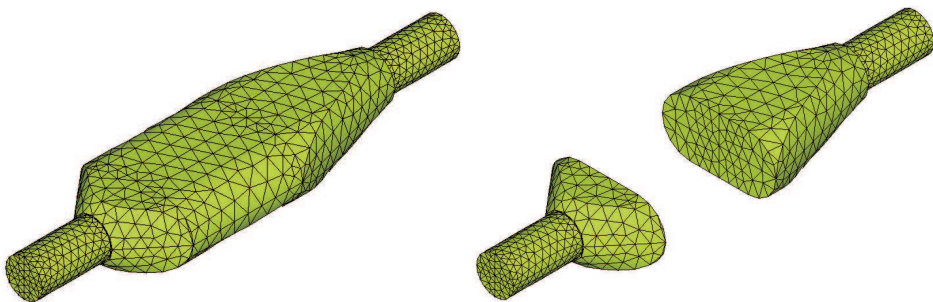


FIGURA 4.3: *Catalizador utilizado en las medidas experimentales y montaje en el banco acústico.*



(a) *Modelo 3D conductos/3D monolito.*

(b) *Modelo 3D conductos/1D monolito.*

FIGURA 4.4: *Mallas de elementos finitos utilizadas.*

En la figura 4.5 se presenta la comparación de resultados obtenidos mediante el modelo de onda plana, las simulaciones de elementos finitos 3D conductos/3D monolito y 3D conductos/1D monolito y la medida experimental. Puede comprobarse que existe

una concordancia razonable de todas las curvas de atenuación en el rango de bajas frecuencias, de manera que los dos modelos de elementos finitos pueden considerarse válidos en dicho rango para predecir el comportamiento acústico del catalizador. A medida que la frecuencia aumenta, sin embargo, los modelos 3D/3D y 3D/1D presentan mayores discrepancias entre sí, y también respecto a la medida experimental. A partir de 2000 Hz, la atenuación asociada al modelo 3D/3D es más uniforme y no exhibe las cúpulas de atenuación observadas tanto en la medida experimental como en los resultados proporcionados por el modelo 3D/1D propuesto. Este último se comporta de manera más realista ya que su predicción se asemeja en mayor medida a la curva de atenuación experimental, reproduciendo las cúpulas de atenuación, cuya presencia se asocia a resonancias longitudinales de los conductos capilares. De esta manera, el modelo 3D/1D propuesto presenta mayor concordancia con las medidas, si bien las diferencias ahora son mayores en comparación con lo observado a frecuencias bajas. Los motivos de estas desviaciones del modelo 3D/1D respecto a la experimentación se pueden justificar, al menos parcialmente, en base a las imprecisiones geométricas de las mallas de elementos finitos utilizadas así como por el modelo de monolito descrito y los valores utilizados en la simulación (fundamentalmente la resistividad  $R$ ). La comparación entre el  $TL$  obtenido mediante el modelo 3D/3D sin monolito y el resto de otros cálculos demuestra que las primeras dos cúpulas de atenuación aparecen debido al efecto reactivo causado por los cambios de sección en la geometría, mientras que a medias y altas frecuencias domina el efecto disipativo del monolito.

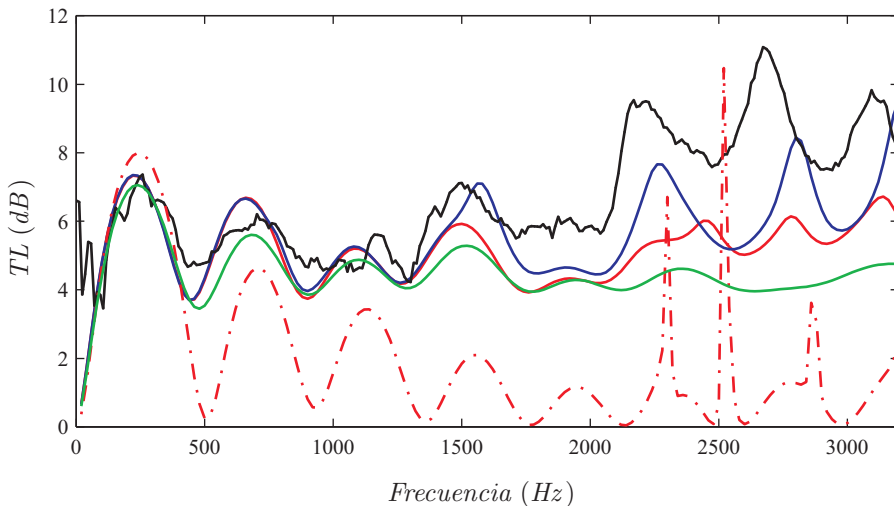


FIGURA 4.5:  $TL$  de catalizador: —, modelo 3D/3D; - - -, modelo 3D/3D sin monolito; —, modelo 3D/1D; —, medida experimental; —, onda plana.

La figura 4.6 presenta la influencia de la porosidad del monolito, donde se muestran resultados de atenuación para los valores  $\phi = 0.7, 0.8$  y  $0.9$ . El resto de valores son los indicados en los resultados anteriores (en concreto, se tiene  $R = 500$  rayl/m). En



los cálculos se han utilizado de nuevo los modelos 3D/3D y 3D/1D implementados mediante elementos finitos. Se puede observar que valores bajos de porosidad implican una menor atenuación a bajas frecuencias (primera cúpula de atenuación). Este resultado es consistente con las predicciones de Selamet *et al.* [123], que se basan en que con una reducción de la porosidad se expone menor cantidad de fluido al contacto con la superficie del capilar, y por tanto se produce menos atenuación de tipo viscoso. Sin embargo estos resultados parecen seguir la tendencia opuesta a los mostrados por Dokumaci [52]. Esta aparente contradicción se debe a que en [123] se supone que la variación de la porosidad  $\phi$  no produce cambios en la resistividad  $R$ , lo cual es sólo posible si además de la porosidad se modifica otra característica del monolito. Un análisis más detallado del comportamiento del monolito muestra que existe una dependencia de  $R$  en función de  $\phi$  según la expresión [11, 110]

$$R = \frac{8\mu q^2 s_f}{l_p \phi} \quad (4.56)$$

donde  $q$ ,  $s_f$  y  $l_p$  son características del conducto capilar y hacen referencia, respectivamente, a la tortuosidad, el factor de forma y el semilado de la sección transversal. De esta manera, en los cálculos anteriores se ha asumido que se varía  $\phi$  mientras se mantiene  $R$  constante, lo cual implica la modificación de otra característica del monolito (por ejemplo, el tamaño de los conductos capilares  $l_p$ ). A partir de la primera cúpula de atenuación, los modelos predicen una influencia más irregular de la porosidad. Por ejemplo, una menor porosidad tiende a producir los mayores valores máximos de atenuación en todas las cúpulas, salvo la primera y la tercera. Para frecuencias alejadas de los máximos relativos, el efecto de la porosidad es el contrario, con mayor atenuación al aumentar  $\phi$ . La influencia de la porosidad tiende a ser menor en el rango de altas frecuencias. En lo que se refiere a la comparación de los modelos 3D/3D y 3D/1D, se observan diferencias importantes en las predicciones a alta frecuencia.

Para estudiar el efecto de la resistividad se consideran los valores  $R = 500$  rayl/m,  $R = 750$  rayl/m y  $R = 1000$  rayl/m, para un valor constante de porosidad dado por  $\phi = 0.8$ . Los resultados de los modelos 3D/3D y 3D/1D se muestran en la figura 4.7. Se puede comprobar que existe una tendencia clara en el índice de pérdidas de transmisión del catalizador. El aumento de la resistividad da lugar a una mayor atenuación en todo el rango de frecuencias, tanto para el modelo 3D/1D como para el modelo 3D/3D. A frecuencias bajas la influencia de la resistividad es menor y, tal como se espera, ambos modelos producen resultados similares.

### 4.3. Modelado acústico de catalizadores con flujo medio

En base a los resultados en ausencia de flujo medio obtenidos en la sección anterior, se ha concluido que el modelo cuyas predicciones presentan mayor concordancia en

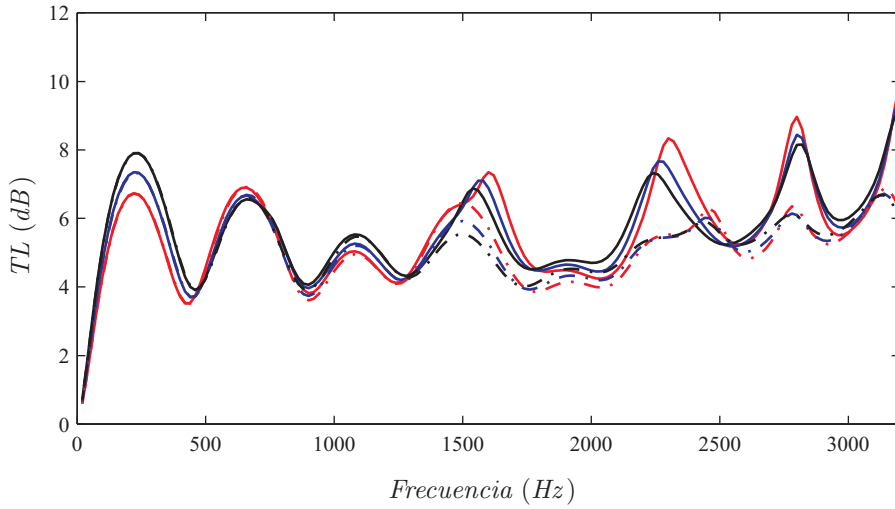


FIGURA 4.6: TL de catalizador para diferentes valores de porosidad del monolito: —,  $\phi = 0.7$ , modelo 3D/1D; - - -, ídem, modelo 3D/3D; —,  $\phi = 0.8$ , modelo 3D/1D; - - -, ídem, modelo 3D/3D; —,  $\phi = 0.9$ , modelo 3D/1D; - - -, ídem, modelo 3D/3D.

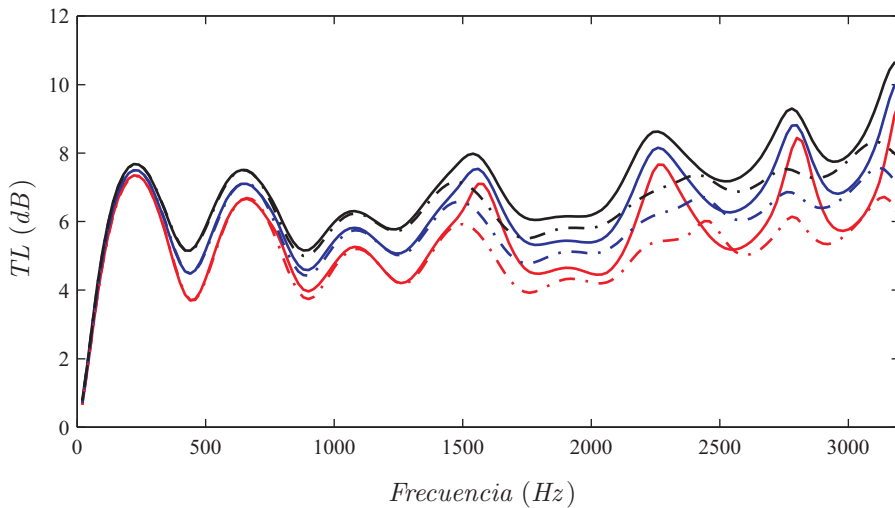


FIGURA 4.7: TL de catalizador para diferentes valores de resistividad del monolito: —,  $R = 500$  rayl/m, modelo 3D/1D; - - -, ídem, modelo 3D/3D; —,  $R = 750$  rayl/m, modelo 3D/1D; - - -, ídem, modelo 3D/3D; —,  $R = 1000$  rayl/m, modelo 3D/1D; - - -, ídem, modelo 3D/3D.

comparación con los resultados experimentales es el propuesto en esta Tesis, denominado 3D conductos/1D monolito. Se plantea ahora el problema asociado al desarrollo

e implementación de un modelo basado en elementos finitos que permita la consideración de flujo medio. En este caso, no se han encontrado referencias que proporcionen propiedades equivalentes para el monolito, tales como  $c_m$  y  $\rho_m$ , cuando existe flujo medio. Por este motivo, es difícil llevar a cabo la implementación de un modelo 3D conductos/3D monolito, lo cual, por otro lado, no es especialmente preocupante habida cuenta de la poca precisión de este tipo de modelado en el rango de medias y altas frecuencias. Afortunadamente, existen diversos trabajos [52, 53] en los que se ha llevado a cabo la deducción de la matriz de transferencia para conjuntos de conductos capilares con flujo medio en su interior. Parte de dichos trabajos se han mostrado en la sección 2.8.2. Por tanto, se dispone de información matricial adecuada para su inclusión en un modelo del tipo 3D/1D que permita considerar la influencia del flujo. Este tipo de aproximación al problema tiene gran potencial, si se tienen en cuenta los resultados mostrados en la sección 4.2.3.

### 4.3.1. Modelo 3D conductos/1D monolito

Tal como se ha indicado, en presencia de flujo medio se aplica un procedimiento idéntico al utilizado en la sección 4.2.2. Para el modelado acústico del monolito se utiliza el modelo de Dokumaci [52, 53], y por tanto la ecuación (4.24) se sustituye ahora por la ecuación (2.236)

$$[T^m] = [T_{con}] [T_{mon}] [T_{exp}] \quad (4.57)$$

donde  $[T_{con}]$  es la matriz de transferencia entre la interfase del lado 1 y la entrada del monolito (contracción),  $[T_{mon}]$  es la matriz de transferencia del monolito y  $[T_{exp}]$  es la matriz de transferencia que relaciona las variables acústicas entre la interfase del lado 2 y la salida del monolito (expansión). Cabe indicar que las matrices  $[T_{con}]$ ,  $[T_{exp}]$  y  $[T_{mon}]$ , como se ha visto en la sección 2.8.2, vienen dadas por las expresiones (2.229), (2.235) y (2.237), respectivamente.

### 4.3.2. Aplicaciones

En esta sección se aplica el modelo 3D conductos/1D monolito a un catalizador bicónico tridimensional en presencia de flujo medio. Las dimensiones utilizadas son  $L_1 = L_4 = 0.05$  m,  $L_2 = L_3 = 0.03$  m,  $L_m = 0.135$  m,  $R_1 = 0.0268$  m y  $R_2 = 0.0886$  m, idénticas a las de la geometría de la sección 2.10.7, cuyo  $TL$  se obtuvo en base al modelo de onda plana tanto para capilares de sección transversal circular como para capilares de sección transversal cuadrada, ambos casos en presencia de flujo medio. La figura 4.8 muestra la malla tridimensional de elementos finitos utilizada en los cálculos, que está formada por hexaedros cuadráticos. Las herramientas basadas en el método de elementos finitos que se han desarrollado en esta Tesis permiten la consideración de configuraciones tridimensionales y también axisimétricas, con vistas a reducir el coste computacional. Si bien la geometría mostrada en la figura 4.8 presenta simetría de revolución, se ha optado en este caso por mostrar la malla y los resultados asociados a una simulación tridimensional completa (que lógicamente concuerdan con los resultados del modelo axisimétrico). Dada la existencia de infinitos planos de

simetría de la configuración de catalizador considerada, se ha optado por modelar un cuarto del dominio, como solución de compromiso entre el coste computacional y los aspectos puramente estéticos asociados a la figura 4.8.

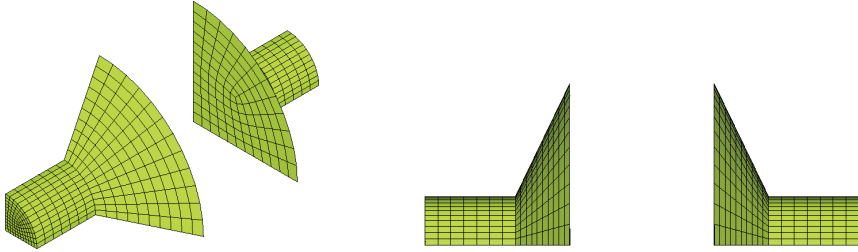


FIGURA 4.8: *Malla tridimensional de elementos hexaédricos cuadráticos de un catalizador bicónico, modelo 3D/1D.*

La figura 4.9 presenta la evaluación del  $TL$  mediante el modelo 3D conductos/1D monolito. Se incluyen además los cálculos realizados en base al modelo de onda plana presentado en la sección 2.10.7. El valor del flujo medio en los conductos de entrada y salida, utilizado para las simulaciones, tiene los números de Mach  $M = 0.1$ ,  $M = 0.15$  y  $M = 0.2$ , y la porosidad viene dada por el valor  $\phi = 0.8$ . Los capilares son de sección transversal circular y el valor del área transversal de cada uno es de  $10^{-6} \text{ m}^2$ . Se puede observar que los resultados obtenidos mediante el modelo 3D/1D tienen las mismas tendencias que los proporcionados por el modelo de onda plana, es decir, con el aumento del flujo medio se produce un desplazamiento de las curvas de atenuación hacia frecuencias más bajas. Si bien este efecto convectivo es captado por ambos modelos, cuantitativamente las predicciones de éstos son muy dispares, observándose una subestimación de la atenuación por parte del modelo de onda plana.

En la figura 4.10 se muestra el efecto de la velocidad de flujo medio en la atenuación acústica para la geometría estudiada en el caso anterior utilizando los mismos valores de  $M$  y  $\phi$ . La única diferencia consiste en que ahora el monolito está construido con capilares de sección transversal cuadrada, cuyo lado es de  $10^{-3} \text{ m}$ . Se puede observar que los comentarios anteriores, para el caso del catalizador con capilares circulares, son aplicables en el sentido de que el efecto convectivo del flujo desplaza las curvas de atenuación.

## 4.4. Conclusiones

Se ha llevado a cabo el desarrollo y implementación de dos técnicas basadas en el método de elementos finitos para la simulación del comportamiento acústico de catalizadores de automoción. Por un lado el denominado modelo 3D conductos/3D

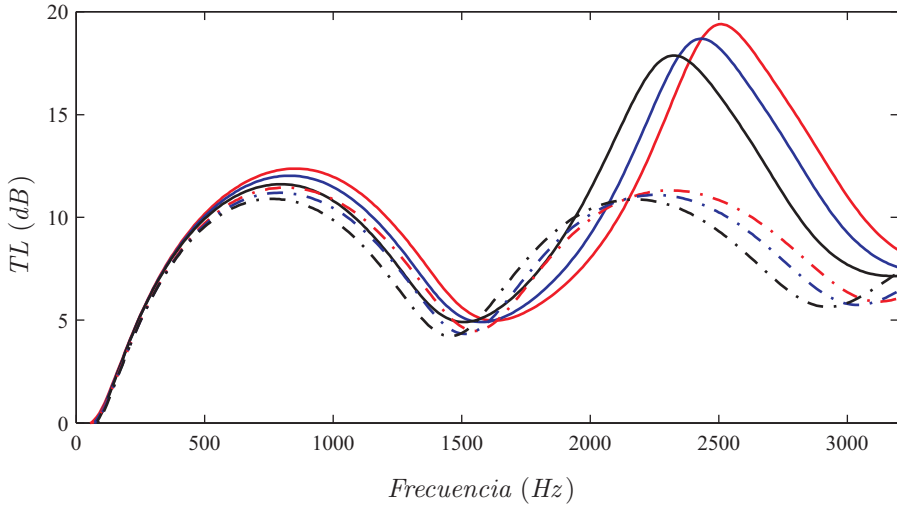


FIGURA 4.9: *TL de catalizador bicónico para diferentes valores de flujo medio, capilares circulares: —,  $M = 0.1$ , modelo 3D/1D; - - -, ídem, onda plana; —,  $M = 0.15$ , modelo 3D/1D; - - -, ídem, onda plana; —,  $M = 0.2$ , modelo 3D/1D; - - -, ídem, onda plana.*

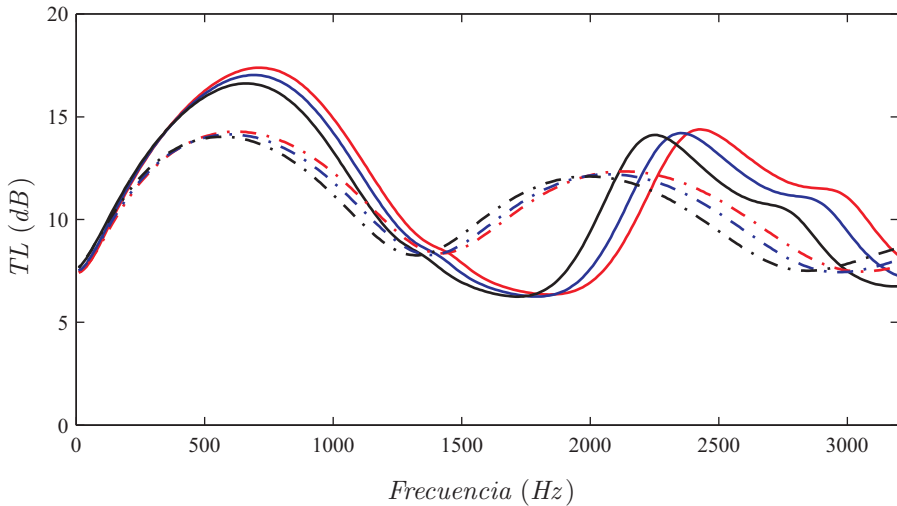


FIGURA 4.10: *TL de catalizador bicónico para diferentes valores de flujo medio, capilares cuadrados: —,  $M = 0.1$ , modelo 3D/1D; - - -, ídem, onda plana; —,  $M = 0.15$ , modelo 3D/1D; - - -, ídem, onda plana; —,  $M = 0.2$ , modelo 3D/1D; - - -, ídem, onda plana.*

monolito, habitual en la bibliografía, en el que se supone propagación tridimensional en todo el volumen del catalizador (conductos y monolito), y por otro el modelo

propuesto en la Tesis, 3D conductos/1D monolito, que considera propagación unidimensional en los capilares del monolito.

Se han aplicado los dos modelos a una configuración comercial de catalizador, comparando los resultados proporcionados por ambos con resultados experimentales obtenidos en un banco de ensayos acústicos, mostrando que la metodología propuesta presenta una mayor concordancia. Además, se ha analizado el efecto de la porosidad del monolito y su resistividad en la atenuación acústica.

Posteriormente, y aprovechando las prestaciones del modelado 3D/1D, se ha implementado una herramienta para la simulación del comportamiento acústico de catalizadores en presencia de flujo medio. Finalmente se ha aplicado dicha herramienta a un catalizador de geometría bicónica, mostrando el efecto que tiene la velocidad de flujo medio en la atenuación acústica.

Parte de los resultados presentados en este capítulo han sido publicados en las referencias [47, 48].

## Capítulo 5

# Modelado acústico de silenciadores mediante técnicas analíticas modales multidimensionales

### Resumen del capítulo:

*En este capítulo se presenta el tratamiento analítico modal multidimensional de la ecuación de ondas en conductos. Se consideran geometrías rectangulares, circulares y cónicas. Posteriormente se presentan los fundamentos del método de ajuste modal, detallando la formulación matemática asociada y las características más importantes de las integrales vinculadas a dicho método. Se detalla el modelado de configuraciones clásicas como el silenciador de cámara de expansión simple y el de cámara reversa. Como contribución de la Tesis, se desarrollan las ecuaciones de ajuste modal en el modelado tridimensional de silenciadores reactivos (cámara con doble salida opuesta) y disipativos (cámara reversa con material absorbente y placa perforada), analizando el efecto en la atenuación acústica de los parámetros más relevantes como la posición relativa de los conductos, la porosidad de las superficies perforadas y la resistividad del material absorbente. Los resultados obtenidos mediante ajuste modal se validan mediante cálculos realizados con el método de elementos finitos.*





## 5.1. Introducción

La problemática actual del diseño de silenciadores de escape precisa de soluciones que incorporen herramientas de cálculo rápidas y fiables, con resultados aceptables hasta frecuencias relativamente elevadas y que tengan en cuenta, siquiera aproximadamente, los efectos tridimensionales del campo acústico en el interior del silenciador. Estos requisitos no pueden cumplirse de forma suficientemente satisfactoria mediante los modelos de onda plana, tratados en el capítulo 2. El requisito en términos de frecuencia implica el uso de modelos numéricos multidimensionales que no siempre son aplicables a problemas prácticos de diseño por su coste computacional. En respuesta a estos condicionantes, en las últimas dos décadas se ha trabajado de forma intensa en el desarrollo de métodos modales analíticos que, por una parte, incorporen suficiente información sobre el comportamiento frecuencial del silenciador sin precisar de un cálculo numérico multidimensional y, por otra, permitan extender técnicas previamente desarrolladas para la introducción de términos disipativos.

Uno de los aspectos más importantes en los silenciadores de motores de combustión interna alternativos es la utilización de cambios de sección, a menudo abruptos [94]. En la proximidad de los cambios de sección, el campo acústico es necesariamente tridimensional, incluso a baja frecuencia, dado que tiene lugar la generación de modos evanescentes [75–77, 114]. El campo de presiones y velocidades acústicas ha de ser continuo, pero un modelo de onda plana es incapaz de satisfacer esta continuidad. Un caso especialmente interesante es el de la cámara doble [126], en el que la generación de modos evanescentes es tan importante que los modelos de onda plana sin corrección son incapaces de predecir el comportamiento acústico de forma adecuada incluso a frecuencias muy bajas. La aplicación de los modelos de onda plana se ha generalizado durante décadas por su bajo coste computacional, pero los resultados sólo son válidos por debajo de la primera frecuencia de corte e incluso, a menudo, un valor menor debido a la presencia de modos evanescentes. Por tanto, se plantea ahora la obtención de mejores resultados en un rango de frecuencias mayor, en base a modelos multidimensionales de tipo analítico.

Tres son las posibilidades que se encuentran habitualmente en la bibliografía: el método de excitación puntual [42, 78, 79], el método del pistón [66, 67, 80, 81] y el método de ajuste modal [20, 41, 55, 121]. El primero de ellos es el más simple, y por este motivo tiene menor precisión. En éste, los tubos de entrada y salida del silenciador no son considerados en el análisis como tales, sino que son sustituidos por fuentes puntuales de excitación. Esta simplificación parte de la hipótesis de que estos conductos son pequeños en comparación con las dimensiones globales del silenciador y con la longitud de onda más pequeña considerada en el análisis (asociada a la máxima frecuencia de interés). El método del pistón tiene en cuenta las discontinuidades asociadas a la expansión y la contracción mediante la sustitución de los conductos de entrada y salida por pistones de dimensión finita cuyo movimiento excita el sistema. En este procedimiento se trabaja con presiones promediadas en las secciones de los pistones y por tanto, a priori, cabe esperar una precisión mayor que en el caso de exci-

tación puntual. La técnica de ajuste modal presenta un planteamiento más completo, dado que considera el dominio completo formado por todos los conductos y cámaras que forman el silenciador. Tiene su punto de partida en las características modales de propagación de cada elemento por separado y lleva a cabo el acoplamiento en las discontinuidades geométricas considerando las condiciones de continuidad del campo acústico en éstas, de manera que puede considerarse como una técnica de subestructuración modal. La consideración de todos los componentes del silenciador da lugar a resultados más precisos, que sin embargo implican un ligero incremento del coste computacional.

Por su mayor precisión, la técnica de ajuste modal ha recibido mayor atención, aplicada a silenciadores circulares. Cabe destacar trabajos como el de Sharkawy y Nayfeh [55], relacionado con la cámara de expansión simple, y el de Åbom [20], aplicado a cámaras con conductos extendidos. Un grupo de investigación relevante que trabaja de forma intensa en la aplicación de la técnica de ajuste modal a silenciadores circulares es el del profesor Selamet. Selamet y Radavich [121] estudian de forma detallada el comportamiento de cámaras de expansión concéntricas en función de su longitud, incluyendo validaciones numéricas mediante elementos de contorno y medidas experimentales. Este trabajo se generaliza a cámaras de expansión con tubos descentrados en las publicaciones posteriores de Selamet y Ji [117], Selamet *et al.* [124], con las oportunas validaciones numéricas y experimentales. El silenciador con tubos extendidos es estudiado por Selamet y Ji [119], en cuyo trabajo se proponen criterios de diseño en base a la longitud de los conductos para optimizar la atenuación. Selamet y Ji [120] analizan en detalle el silenciador circular con salida doble que, en comparación con la cámara de expansión simple, presenta un mejor comportamiento en lo referente a ruido de flujo y pérdida de carga, con una ligera reducción de la atenuación. El silenciador con doble salida opuesta se ha estudiado durante el desarrollo de la Tesis y los resultados más relevantes se han publicado en el trabajo [6]. Dicha configuración presenta un comportamiento que puede variar desde el asociado a una cámara de expansión simple hasta el de una cámara reversa. La utilización de doble salida aporta una potencial reducción en la pérdida de carga y el ruido del flujo [120].

Selamet y Ji [118] estudian la cámara reversa, caracterizada por tener los conductos de entrada y salida en el mismo lado del silenciador, realizando una comparación con el método del pistón. La concordancia entre el método de ajuste modal y el de elementos de contorno es excelente, pero los autores detectan diferencias en comparación con el método del pistón. La cámara reversa con material absorbente y placa perforada se ha estudiado en la referencia [7], publicada durante la realización de esta Tesis, mostrando el efecto favorable de la introducción de la fibra en la cámara reversa.

## 5.2. Acústica tridimensional de conductos

En general los silenciadores pueden considerarse formados por diferentes conductos, y por tanto es importante la caracterización de su comportamiento acústico mediante la resolución de la ecuación de ondas en su interior. Existen varios trabajos en los que se lleva a cabo la obtención de esta solución de forma analítica para el caso de conductos de sección transversal rectangular [31, 94] y circular [2, 93, 109]. Cabe indicar que el grado de dificultad del problema crece a medida que se incluyen fenómenos como la presencia de flujo medio y materiales absorbentes. En este capítulo se va a proceder a la resolución de la ecuación de ondas (2.42) para el caso de conductos de sección transversal uniforme de tipo rectangular y circular, así como para conductos de sección no uniforme con geometría troncocónica. Para secciones transversales arbitrarias no es posible disponer de la solución analítica, por lo que se recurre al método de elementos finitos. En todo el estudio llevado a cabo, se consideran conductos con paredes externas rígidas.

### 5.2.1. Conductos rectangulares

Considérese el conducto rectangular mostrado en la figura 5.1, con su sistema cartesiano de coordenadas asociado.

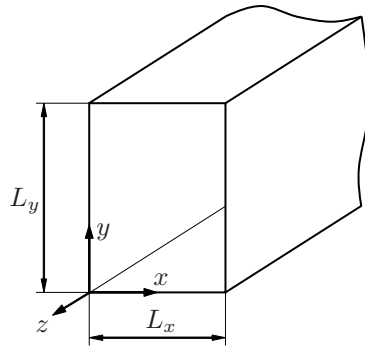


FIGURA 5.1: Conducto con sección transversal rectangular.

La ecuación de ondas (2.42), en su versión armónica (2.43), puede ser expresada como

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} + k_0^2 P = 0 \quad (5.1)$$

En base al método de separación de variables [137], es posible escribir

$$P(x, y, z) = X(x) Y(y) Z(z) \quad (5.2)$$

y combinando (5.2) con (5.1), resulta

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} + \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} + \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} + k_0^2 = 0 \quad (5.3)$$

donde el primer término es solamente función de  $x$ , el segundo de  $y$  y el tercero de  $z$ . De esta manera, cada uno de ellos ha de ser constante, cumpliéndose que

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = -k_x^2 \quad (5.4)$$

$$\frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} = -k_y^2 \quad (5.5)$$

$$\frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = -k_z^2 \quad (5.6)$$

siendo  $k_x$ ,  $k_y$  y  $k_z$  los números de onda en las direcciones  $x$ ,  $y$  y  $z$ . A partir de la ecuación (5.3), es obvio que debe satisfacerse la relación

$$k_0^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 \quad (5.7)$$

Las soluciones de las ecuaciones diferenciales ordinarias (5.4)-(5.6) son, respectivamente

$$X(x) = B_1 \cos(k_x x) + B_2 \sin(k_x x) \quad (5.8)$$

$$Y(y) = C_1 \cos(k_y y) + C_2 \sin(k_y y) \quad (5.9)$$

$$Z(z) = A^+ e^{-jk_z z} + A^- e^{jk_z z} \quad (5.10)$$

Estas tres últimas soluciones son equivalentes, pero las ecuaciones (5.8) y (5.9) son más adecuadas a la hora de considerar las condiciones de contorno. Para el caso de conducto rígido, éstas se derivan del hecho de que la velocidad acústica normal al contorno es nula, de modo que considerando la ecuación de Euler (2.28), se obtiene

$$\left. \frac{\partial P}{\partial x} \right|_{x=0} = 0 \quad \left. \frac{\partial P}{\partial x} \right|_{x=L_x} = 0 \quad (5.11)$$

$$\left. \frac{\partial P}{\partial y} \right|_{y=0} = 0 \quad \left. \frac{\partial P}{\partial y} \right|_{y=L_y} = 0 \quad (5.12)$$

Se deduce por tanto que  $B_2 = C_2 = 0$ , y los números de onda vienen dados por  $k_x = m\pi/L_x$  y  $k_y = n\pi/L_y$  con  $m, n = 0, 1, 2, \dots$ . Los valores de  $m$  y  $n$  indican el número de veces que se anula la distribución de presión (nodos de presión) en la sección transversal del conducto según las direcciones  $x$  y  $y$ , respectivamente. De esta forma, en base al desarrollo previo puede escribirse

$$\begin{aligned} X(x) Y(y) Z(z) &= A_{m,n}^+ \cos\left(\frac{m\pi x}{L_x}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{L_y}\right) e^{-jk_z, m, n z} \\ &+ A_{m,n}^- \cos\left(\frac{m\pi x}{L_x}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{L_y}\right) e^{jk_z, m, n z} \end{aligned} \quad (5.13)$$

siendo el número de onda axial  $k_{z,m,n}$

$$k_{z,m,n} = \sqrt{k_0^2 - \left(\frac{m\pi}{L_x}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{L_y}\right)^2} \quad (5.14)$$

La solución general de la ecuación de Helmholtz (5.1) viene dada por

$$P(x, y, z) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \left( A_{m,n}^+ \cos\left(\frac{m\pi x}{L_x}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{L_y}\right) e^{-jk_{z,m,n}z} \right. \\ \left. + A_{m,n}^- \cos\left(\frac{m\pi x}{L_x}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{L_y}\right) e^{jk_{z,m,n}z} \right) \quad (5.15)$$

Puede comprobarse que para  $m = n = 0$ , la distribución de presión es constante, correspondiendo este modo de propagación a una onda plana. En cualquier otro caso, se utiliza la denominación de modo de alto orden [94].

### Condiciones de propagación

Pese a que inicialmente cualquier modo es posible, la propagación de un modo concreto  $(m, n)$  tiene lugar cuando su número de onda  $k_{z,m,n}$  es real. En caso contrario, y a la vista de la ecuación (5.13), el modo sufre una atenuación exponencial, y recibe el nombre de modo evanescente [101]. Para una frecuencia angular dada  $\omega$ , es posible averiguar qué modos presentarán propagación y cuales serán de tipo evanescente. Dado que el número de onda ha de ser real para que ocurra la primera situación, según la ecuación (5.14) deberá satisfacerse que

$$k_{z,m,n}^2 = k_0^2 - \left(\frac{m\pi}{L_x}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{L_y}\right)^2 > 0 \quad (5.16)$$

de donde se comprueba que el modo de onda plana siempre se propaga, y la propagación de los modos de alto orden depende de la frecuencia y las dimensiones del conducto. Para un conducto de dimensiones dadas, la frecuencia a la que un modo empieza a propagarse se denomina frecuencia de corte  $f_c$ . De la ecuación anterior se deduce que

$$k_0 = \frac{\omega}{c_0} = \frac{2\pi f}{c_0} > \sqrt{\left(\frac{m\pi}{L_x}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{L_y}\right)^2} \quad (5.17)$$

y la frecuencia de corte se obtiene reemplazando la desigualdad por una relación de igualdad. Como ejemplo, considérese que  $L_x > L_y$ . El primer modo de alto orden que inicia su propagación es el correspondiente a  $(m, n) = (1, 0)$ , y su frecuencia de corte vendrá dada por

$$f_{c,1,0} = \frac{c_0}{2L_x} \quad (5.18)$$

La figura 5.2 muestra los primeros modos de presión transversales definidos por la combinación de las soluciones (5.8) y (5.9) para un conducto rectangular de paredes

rígidas con dimensiones  $L_x = 0.1$  m y  $L_y = 0.16$  m. También se incluyen las frecuencias de corte asociadas (con  $c_0 = 340$  m/s), obtenidas a partir de la ecuación (5.17).

### 5.2.2. Conductos circulares

Los conductos de sección circular son ampliamente utilizados en los silenciadores de escape, por lo que es importante conocer su comportamiento acústico. La figura 5.3 muestra una sección transversal circular, con el sistema de coordenadas cilíndrico asociado.

Con el fin de facilitar la solución de la ecuación de Helmholtz, es conveniente que las condiciones de contorno asociadas a la pared del conducto puedan imponerse de manera sencilla. En coordenadas cilíndricas, la ecuación de Helmholtz (2.43) viene dada por

$$\frac{\partial^2 P}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 P}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} + k_0^2 P = 0 \quad (5.19)$$

La aplicación del método de separación de variables proporciona en este caso

$$P(r, \theta, z) = R(r) \Theta(\theta) Z(z) \quad (5.20)$$

Introduciendo la expresión (5.20) en (5.19), resulta

$$\frac{1}{R} \left( \frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} \right) + \frac{1}{r^2 \Theta} \frac{d^2 \Theta}{d\theta^2} + \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} + k_0^2 = 0 \quad (5.21)$$

Se procede ahora como en el caso del conducto rectangular, de manera que para la componente axial resulta  $(1/Z)(d^2 Z/dz^2) = -k_z^2$ , cuya solución viene dada por la ecuación (5.10). Para el campo circunferencial  $\Theta$  se obtiene [31]

$$\Theta = e^{\pm jm\theta} \quad (5.22)$$

siendo  $m$  el número modal circunferencial, que indica el número de líneas nodales diametrales. Los signos  $+$  y  $-$  de la ecuación anterior corresponden a la rotación definida por  $\theta$  en sentido negativo y positivo, respectivamente. Introduciendo en la ecuación (5.21) las soluciones axial y circunferencial, se obtiene la expresión a satisfacer por  $R(r)$ ,

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} + \left( k_0^2 - k_z^2 - \left( \frac{m}{r} \right)^2 \right) R = 0 \quad (5.23)$$

en la que, definiendo el número de onda radial  $k_r^2 = k_0^2 - k_z^2$ , se obtiene

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} + \left( k_r^2 - \left( \frac{m}{r} \right)^2 \right) R = 0 \quad (5.24)$$

Realizando el cambio de variable  $r \rightarrow k_r r$ , resulta la ecuación de Bessel de orden  $m$  en su forma estándar [109], cuya solución puede expresarse como

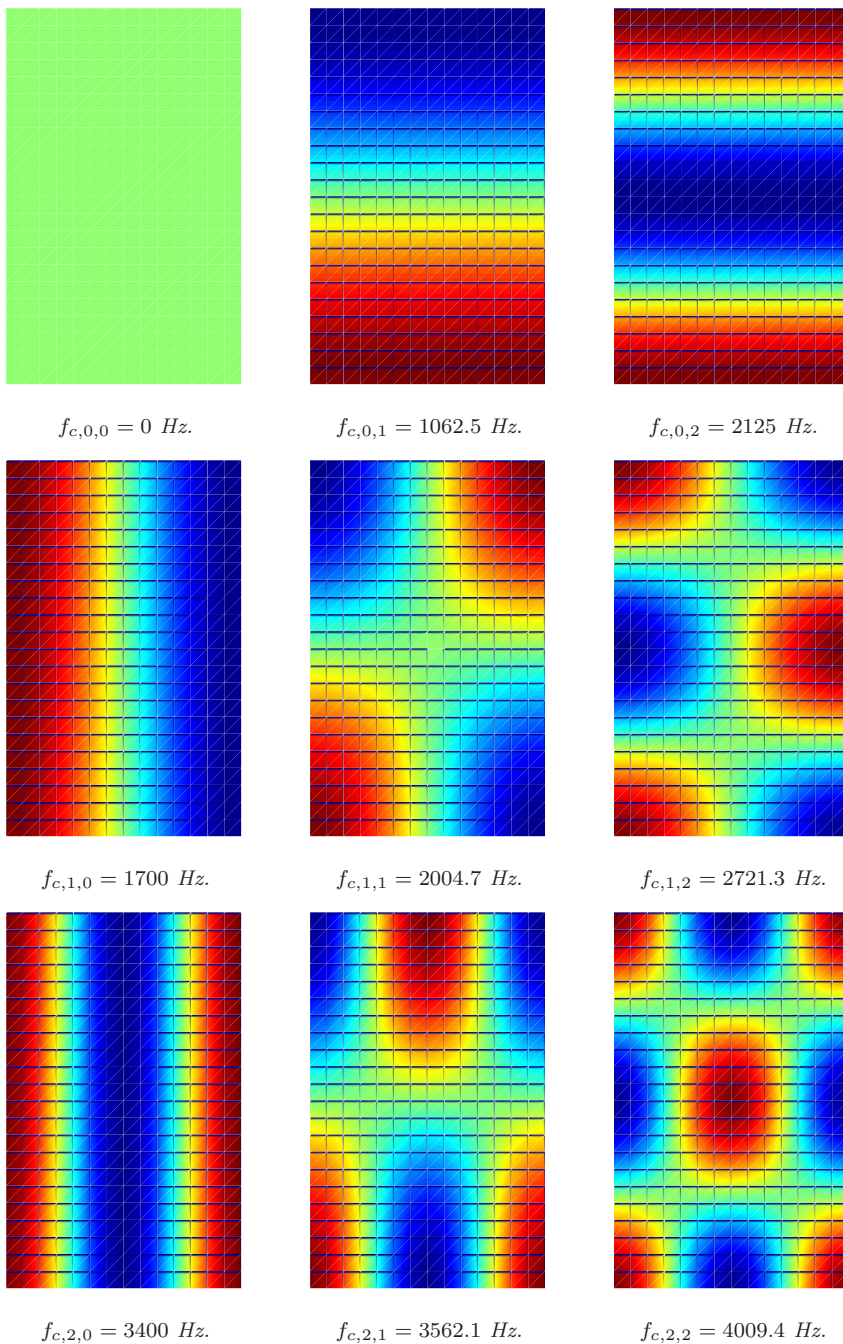
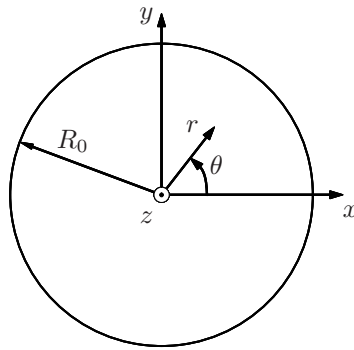


FIGURA 5.2: *Primeros modos transversales de presión y frecuencias asociadas de un conducto rectangular.*

FIGURA 5.3: *Sección transversal circular.*

$$R(r) = C_1 J_m(k_r r) + C_2 Y_m(k_r r) \quad (5.25)$$

donde  $J_m$  e  $Y_m$  son las funciones de Bessel de orden  $m$  de primera y segunda especie, respectivamente. La función  $Y_m$  tiende a infinito cuando su argumento es nulo, por lo que no se incluye en la ecuación (5.25) para secciones circulares que contienen el origen de coordenadas. En el caso de conductos anulares, es necesaria su consideración. La evaluación de  $k_r$  se lleva a cabo considerando la condición de pared rígida (velocidad acústica radial nula en  $r = R_0$ ), de manera que a partir de la ecuación de Euler (2.28), queda

$$\left. \frac{\partial J_m(k_r r)}{\partial r} \right|_{r=R_0} = 0 \quad (5.26)$$

cuyas raíces proporcionan los números de onda radiales  $k_{r,m,n}$ , para  $m, n = 0, 1, 2, \dots$ . El entero  $n$  denota el número modal radial, que indica el número de circunferencias nodales. Introduciendo la notación

$$\alpha_{m,n} = k_{r,m,n} R_0 \quad (5.27)$$

el cálculo de raíces (o autovalores) se lleva a cabo ahora mediante la expresión

$$\left. \frac{\partial J_m((\alpha_{m,n}/R_0) r)}{\partial r} \right|_{r=R_0} = 0 \quad (5.28)$$

de manera que los valores  $\alpha_{m,n}$ , para  $m, n = 0, 1, 2, \dots$ , son constantes independientes de  $R_0$ . Para el caso en que  $m = n = 0$ , se tiene que  $\alpha_{m,n} = 0$ , la función de Bessel  $J_0(0) = 1$  y por tanto la distribución de presión es constante, obteniendo en consecuencia propagación en forma de onda plana. Los primeros valores de las raíces  $\alpha_{m,n}$  se muestran en la tabla 5.1.

En base a los resultados anteriores, la solución general de la ecuación de Helmholtz (5.19) viene dada por



$n$	$J_m$					
	$J_0$	$J_1$	$J_2$	$J_3$	$J_4$	$J_5$
0	0	1.84	3.05	4.20	5.32	6.42
1	3.83	5.33	6.71	8.02	9.29	10.52
2	7.01	8.54	9.97	11.35	12.68	13.99
3	10.17	11.71	13.17	14.59	15.96	17.31
4	13.32	14.86	16.35	17.79	19.20	20.58
5	16.47	18.01	19.51	20.97	22.40	23.80
6	19.62	21.16	22.67	24.14	25.59	27.01
7	22.76	24.31	25.82	27.31	28.77	30.20

TABLA 5.1: Autovalores  $\alpha_{m,n}$  de una sección circular.

$$P(r, \theta, z) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} J_m \left( \frac{\alpha_{m,n}}{R_0} r \right) \left( (A_{m,n}^+ e^{-jm\theta} + A_{m,n}^- e^{jm\theta}) e^{-jk_{z,m,n}z} + (B_{m,n}^+ e^{-jm\theta} + B_{m,n}^- e^{jm\theta}) e^{jk_{z,m,n}z} \right) \quad (5.29)$$

Esta expresión admite diversas reordenaciones que conducen a soluciones equivalentes [117, 120].

### Condiciones de propagación

La determinación de las condiciones a satisfacer para que se produzca la propagación de un modo  $(m, n)$  se realiza de forma similar al caso rectangular. El número de onda axial  $k_{z,m,n}$  debe ser real, y por tanto ha de verificarse la relación

$$k_{z,m,n}^2 = k_0^2 - k_{r,m,n}^2 > 0 \quad (5.30)$$

De manera análoga al caso rectangular, la ecuación anterior es equivalente a

$$k_0 = \frac{2\pi f}{c_0} > k_{r,m,n} = \frac{\alpha_{m,n}}{R_0} \quad (5.31)$$

Cabe considerar en este caso dos posibilidades:

- El conducto, por la excitación a la que se ve sometido y/o por su conexión a otros elementos, no presenta simetría de revolución. En este caso, en vista de la tabla 5.1, el primer modo de alto orden que se propaga es el modo  $(m, n) = (1, 0)$ , para el que  $\alpha_{1,0} = 1.84$ .
- Existe axisimetría, y por tanto la propagación de los modos con  $m \neq 0$  no es posible. En este caso, el primer modo de alto orden que se propaga viene dado por  $(m, n) = (0, 1)$ , y su frecuencia de corte se obtiene con  $\alpha_{0,1} = 3.83$ .

En estas condiciones, a partir de la ecuación (5.31) resultan las frecuencias de corte

$$f_{c,1,0} = \frac{1.84c_0}{\pi 2R_0} \quad \text{Modos asimétricos}$$

$$f_{c,0,1} = \frac{3.83c_0}{\pi 2R_0} \quad \text{Modos axisimétricos}$$
(5.32)

A modo de ejemplo, un conducto con  $R_0 = 0.09$  m tiene las frecuencias de corte  $f_{c,1,0} = 1107.1$  Hz y  $f_{c,0,1} = 2304.3$  Hz. La figura 5.4 muestra los primeros modos de presión transversales indicados en la expresión (5.29) para dicho conducto. También se incluyen las frecuencias de corte asociadas, obtenidas a partir de la ecuación (5.31).

### 5.2.3. Conductos cónicos

Hasta ahora se han considerado exclusivamente conductos en los que la sección transversal permanece constante a lo largo de la dirección axial de éstos. Sin embargo, es usual encontrar elementos del sistema de escape en los que aparecen conductos de sección variable, también conocidos como no uniformes [116, 139, 140]. Las geometrías no uniformes pueden ser de diversos tipos, tales como cónicas, exponenciales, hiperbólicas, etc., de manera que se puede definir una relación entre la sección transversal y la coordenada axial. Los conductos cónicos son de interés por su utilización práctica en elementos de transición geométrica, fundamentalmente en catalizadores pero también en silenciadores y por ello son tratados en esta Tesis. Dichos conductos permiten una adaptación suave del flujo, reduciendo el impacto de fenómenos de separación y pérdida de carga. Además, tienen un efecto notable en las características del campo acústico. En lo referente a la caracterización numérica de conductos de sección no uniforme, que en este caso es especialmente útil por la dificultad matemática asociada, hay ciertas referencias especialmente interesantes, como el trabajo de Eversman y Astley [57] y Eversman *et al.* [58], donde se considera el método de residuos ponderados para analizar el comportamiento acústico de conductos de sección variable con flujo medio. De igual manera, Astley y Eversman [10] estudian el mismo tipo de problema mediante el método de elementos finitos. El modelado numérico se ha llevado a cabo en el capítulo 3, de manera que aquí se pretende definir una estrategia de trabajo basada en soluciones analíticas, por su menor coste computacional y por proporcionar información relevante sobre las características modales del sistema acústico estudiado. Cabe indicar que los trabajos encontrados en la literatura suelen tratar el problema de forma aproximada cuando se pretende encontrar soluciones analíticas. Por ejemplo, en el artículo de Easwaran y Munjal [54] se realiza un estudio exhaustivo del comportamiento acústico de conductos cónicos y exponenciales, y silenciadores que incluyen este tipo de conductos, pero el planteamiento es de tipo unidimensional, de manera que no se tiene en cuenta la presencia de modos de alto orden. El mismo tipo de planteamiento se encuentra en el libro de Munjal [94], así como en los trabajos de Selamet *et al.* [122, 123], relacionados con el análisis de la propagación de ondas

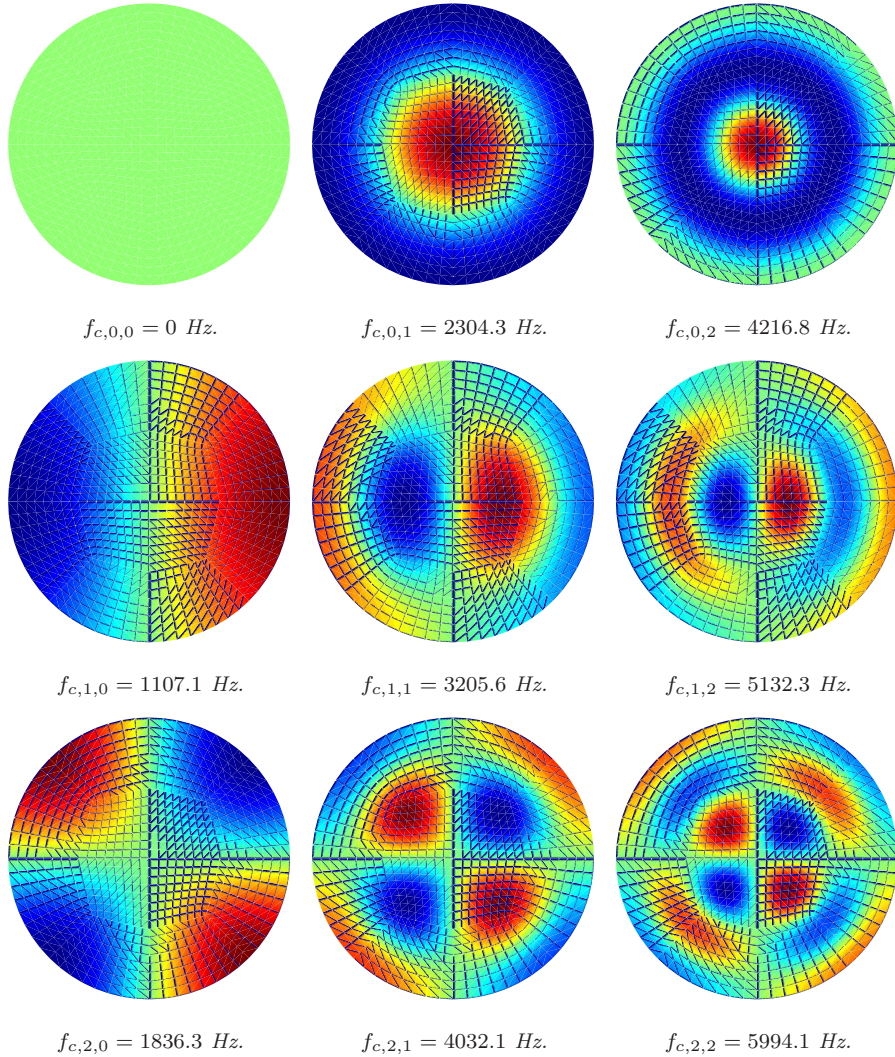


FIGURA 5.4: *Primeros modos transversales de presión y frecuencias asociadas de un conducto circular.*

sonoras en catalizadores de sistemas de escape y tubos de Venturi. Algunos trabajos [37, 38, 51] mejoran la solución analítica basada en onda plana mediante la consideración de modelos de propagación esférica sin dependencia acimutal, incluyendo además la presencia de flujo medio. Sin embargo, la consideración de la tridimensionalidad del campo acústico es importante dado que los modelos previos no son precisos en todo el rango de frecuencias de interés ni para ciertas configuraciones geométricas en las que los modos transversales ganan importancia. Tal tipo de enfoque puede encontrarse en algunas referencias de propagación de ondas electromagnéticas [115], y más recién-

temente en problemas acústicos. En el artículo de Pagneux *et al.* [97] se analiza la propagación acústica en conductos de sección variable mediante superposición modal, Utsumi [139, 140] aplica el mismo tipo de formulación para acoplar conductos de sección constante con conductos de sección variable, y en el trabajo de Willatzen [143] se incluye la presencia de flujo medio. Denia *et al.* [43, 45] estudian el comportamiento acústico tridimensional de silenciadores de tipo cónico mediante la técnica de ajuste modal. Como punto de partida se toma la solución modal de la ecuación de ondas que se muestra a continuación. Esta información se utilizará en el próximo capítulo, dedicado al modelado analítico multidimensional de catalizadores.

La figura 5.5 muestra un conducto de geometría troncocónica, de radio menor  $R_{B1}$ , radio mayor  $R_{B2}$  y semiángulo de apertura  $\theta_0$ . En este caso, es útil considerar un sistema de referencia de tipo esférico, definido por la coordenada radial  $r$ , la coordenada cenital  $\theta$  y la coordenada acimutal  $\phi$ , cuyo origen se encuentra en el vértice del cono.

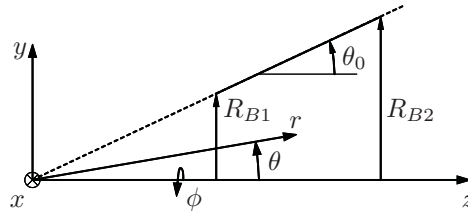


FIGURA 5.5: Conducto troncocónico.

En este caso, la ecuación de Helmholtz (2.43) puede expresarse como [139, 143]

$$\frac{\partial^2 P}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 P}{\partial \theta^2} + \frac{\cot \theta}{r^2} \frac{\partial P}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 P}{\partial \phi^2} + k_0^2 P = 0 \quad (5.33)$$

Aplicando el método de separación de variables, puede plantearse para el campo de presión

$$P(r, \theta, \phi) = R(r) \Theta(\theta) \Phi(\phi) \quad (5.34)$$

La solución acimutal permite considerar variaciones de presión de tipo no axisimétrico, como en el caso considerado en conductos circulares. De esta forma, en base a la ecuación (5.22), puede escribirse  $\Phi(\phi) = e^{\pm jm\phi}$ . Combinando esta expresión con las ecuaciones (5.33) y (5.34), resultan dos ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\frac{\partial^2 \Theta}{\partial \theta^2} + \cot \theta \frac{\partial \Theta}{\partial \theta} + \left( \kappa_1 - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right) \Theta = 0 \quad (5.35)$$

$$\frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial R}{\partial r} + \left( k_0^2 - \frac{\kappa_1}{r^2} \right) R = 0 \quad (5.36)$$

siendo  $\kappa_1$  una constante de separación. Realizando el cambio  $\kappa_1 = \nu(\nu + 1)$  y  $z = \cos \theta$  [143], la ecuación (5.35) resulta

$$(1 - z^2) \frac{\partial^2 \Theta}{\partial z^2} - 2z \frac{\partial \Theta}{\partial z} + \left( \nu(\nu + 1) - \frac{m^2}{1 - z^2} \right) \Theta = 0 \quad (5.37)$$

que es la ecuación asociada de Legendre [148], donde  $m$  es un número entero y  $\nu$  una constante. Las soluciones de esta ecuación son las funciones asociadas de Legendre de primera y segunda especie,  $P_\nu^m(z)$  y  $Q_\nu^m(z)$ , de grado  $\nu$  y orden  $m$ . Dado que la solución debe permanecer acotada, la solución de segunda especie se excluye en este caso pues tiende a infinito cuando  $\theta \rightarrow 0$ . Además, se centra el estudio para condiciones de axisimetría ( $m = 0$ ), lo que implica que la ecuación (5.37) queda como

$$(1 - z^2) \frac{\partial^2 \Theta}{\partial z^2} - 2z \frac{\partial \Theta}{\partial z} + \nu(\nu + 1) \Theta = 0 \quad (5.38)$$

que es la ecuación de Legendre ordinaria, cuya solución viene dada por la función de Legendre de primera especie y grado  $\nu$ ,  $P_\nu(z)$ . Cuando  $\nu$  es un número entero (cosa que no ocurre en el tipo de dominio considerado),  $P_\nu(z)$  puede expresarse como una serie finita, dando lugar a los polinomios de Legendre. Por otro lado, la ecuación (5.36) puede expresarse como

$$r^2 \frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + 2r \frac{\partial R}{\partial r} + (k_0^2 r^2 - \nu(\nu + 1)) R = 0 \quad (5.39)$$

tratándose en este caso de la ecuación de Bessel esférica [92], cuyas soluciones son las funciones de Hankel esféricas de primera y segunda especie  $h_\nu^{(1)}$  y  $h_\nu^{(2)}$ . La condición de velocidad nula normal al contorno implica ahora la pared del conducto definida por  $\theta = \theta_0$ , de forma que los valores característicos o propios a evaluar están asociados a la ecuación cenital (5.38). A partir de la ecuación de Euler (2.28), la condición de pared rígida permite obtener

$$\left. \frac{\partial \Theta}{\partial z} \right|_{z=\cos \theta_0} = 0 \quad (5.40)$$

de manera que, dado un semiángulo de cono  $\theta_0$  pueden obtenerse las raíces o valores propios de la ecuación (5.40), que se denotan mediante  $\nu_n$ , para  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Por tanto, la contribución cenital a los modos de presión transversales (5.34) es

$$\Theta(z) = \Theta(\cos \theta) = P_{\nu_n}(\cos \theta) = P_{\nu_n}(z) \quad (5.41)$$

Los códigos matemáticos comerciales, tales como Mathcad y MATHEMATICA incorporan los polinomios de Legendre, válidos para grado entero. En el caso considerado de dominio troncocónico, debe considerarse que  $\nu_n$  no cumple esta condición. Las funciones de Legendre de primera especie pueden evaluarse mediante los códigos proporcionados en el libro de Zhang y Jin [148], así como utilizando la librería Mathlib. Una alternativa posible es la utilización de la relación [143]

$$P_\nu(z) = {}_2F_1 \left( -\nu; \nu + 1; 1; \frac{1 - z}{2} \right) \quad (5.42)$$

siendo  ${}_2F_1$  la función hipergeométrica, definida mediante

$${}_2F_1(a; b; c; z) = 1 + \frac{ab}{c} \frac{z}{1!} + \frac{a(a+1)b(b+1)}{c(c+1)} \frac{z^2}{2!} + \dots \quad (5.43)$$

de manera que para  $\theta = 0$  se verifica  $P_\nu = 1$ . En base a ésta, se han calculado los valores propios  $\nu_n$  de conductos cónicos con diversos semiángulos de apertura. Los resultados obtenidos se muestran en la tabla 5.2.

$\theta_0$	Número modal $n$					
	0	1	2	3	4	5
5	0	43.411	79.894	116.080	152.179	188.240
10	0	21.460	39.699	57.792	75.841	93.871
15	0	14.145	26.302	38.363	50.395	62.415
20	0	10.489	19.604	28.649	37.673	46.687
25	0	8.296	15.586	22.821	30.040	37.251
30	0	6.835	12.908	18.936	24.951	30.961
35	0	5.793	10.996	16.162	21.317	26.467
40	0	5.012	9.562	14.081	18.592	23.097
45	0	4.406	8.447	12.463	16.472	20.478
50	0	3.921	7.556	11.169	14.776	18.381
55	0	3.525	6.827	10.111	13.389	16.666
60	0	3.196	6.220	9.229	12.234	15.237

TABLA 5.2: Valores propios  $\nu_n$  de un conducto cónico para diversos semiángulos de cono.

Puede comprobarse que las raíces aumentan a medida que el semiángulo de cono tiende a cero, de manera que  $\nu_n \rightarrow \infty$  ( $n > 0$ ) cuando  $\theta_0 \rightarrow 0$ . En esta situación se recupera el caso cilíndrico, de manera que  $r \rightarrow \infty$ , y la relación  $\nu_n/r$  permanece acotada (y está relacionada con la frecuencia de corte, como se verá más adelante). A medida que  $\theta_0$  aumenta, los valores propios se reducen. Si se consideran ángulos cercanos a 90 grados, se observa que  $\nu_1 \rightarrow 2$ ,  $\nu_2 \rightarrow 4$ , ..., de tal forma que las soluciones (funciones de Legendre) tienden a los polinomios de Legendre.

A partir de los valores propios anteriores, puede resolverse la ecuación radial (5.39), cuyas soluciones son las funciones de Hankel esféricas de primera y segunda especie,  $h_{\nu_n}^{(1)}$  y  $h_{\nu_n}^{(2)}$ . La solución radial puede escribirse como

$$R(r) = B_n^{(1)} h_{\nu_n}^{(1)} \left( \frac{\omega}{c_0} r \right) + B_n^{(2)} h_{\nu_n}^{(2)} \left( \frac{\omega}{c_0} r \right) \quad (5.44)$$

de forma que la solución general de la ecuación de Helmholtz (5.33) para el caso de un conducto axisimétrico de geometría cónica se expresa como

$$P(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \left( B_n^{(1)} h_{\nu_n}^{(1)} \left( \frac{\omega}{c_0} r \right) + B_n^{(2)} h_{\nu_n}^{(2)} \left( \frac{\omega}{c_0} r \right) \right) P_{\nu_n}(\cos \theta) \quad (5.45)$$

A diferencia de todos los casos considerados anteriormente, en los que la sección transversal era uniforme, ahora el modo asociado al primer autovalor (que siempre es  $\nu = 0$ ) ya no define una onda plana, sino que se trata de una onda esférica. En la siguiente sección se establece como llevar a cabo la evaluación de las frecuencias de corte asociadas a conductos de tipo cónico.

### Condiciones de propagación

No resulta tan sencilla en este caso la interpretación de la propagación en comparación con los casos anteriores. En las geometrías precedentes, el modo transversal está asociado a una sección uniforme y se combina con un término exponencial que define la propagación axial del modo, de manera que en función del valor del número de onda axial (que depende de la frecuencia de excitación) existe propagación o se da un modo de tipo evanescente. Para frecuencias de excitación superiores a la de corte se produce la propagación, y no la hay en caso contrario. En conductos cónicos, sin embargo, la sección transversal no es uniforme, de forma que para un semiángulo de cono constante la frecuencia de corte varía a medida que cambia la posición definida por la variable radial  $r$ , según se deduce de la ecuación (5.36), en la que el término entre paréntesis depende de  $r$ , a diferencia de lo que ocurre en la ecuación de propagación axial en conductos de sección constante, ecuación (5.6), donde  $k_z$  no es función de  $z$ . Esto implica que para una frecuencia de excitación dada, en una posición definida por  $r = r_1$  un modo puede no aparecer, pero para otra ubicación  $r = r_2$  (con  $r_2 > r_1$ ) puede hacerlo.

En virtud de lo anterior, se plantea la necesidad de estudiar con mayor detalle las características de la solución (5.45). Para un semiángulo de cono  $\theta_0$ , ésta está formada por los modos de tipo cenital  $P_{\nu_n}(\cos \theta)$  y los de tipo radial  $h_{\nu_n}^{(1)}(\omega r/c_0)$  y  $h_{\nu_n}^{(2)}(\omega r/c_0)$ . Las soluciones radiales pueden escribirse como [148]

$$h_{\nu_n}^{(1)}\left(\frac{\omega}{c_0}r\right) = j_{\nu_n}\left(\frac{\omega}{c_0}r\right) + jy_{\nu_n}\left(\frac{\omega}{c_0}r\right) \quad (5.46)$$

$$h_{\nu_n}^{(2)}\left(\frac{\omega}{c_0}r\right) = j_{\nu_n}\left(\frac{\omega}{c_0}r\right) - jy_{\nu_n}\left(\frac{\omega}{c_0}r\right) \quad (5.47)$$

siendo  $j_{\nu_n}$  e  $y_{\nu_n}$  las funciones de Bessel esféricas de primera y segunda especie. Considérense los resultados mostrados en la tabla 5.2, en la que se detallan los autovalores para diversos semiángulos de cono. Para una frecuencia de excitación dada, la evolución de  $j_{\nu_n}$  e  $y_{\nu_n}$  en función del radio pueden proporcionar información acerca de la propagación de modos. La figura 5.6 describe, para  $\theta_0 = 10$  grados y  $\theta_0 = 20$  grados, cómo varían estas funciones para una frecuencia  $f = \omega/(2\pi) = 1000$  Hz y considerando en ambos casos el primer autovalor no nulo  $\nu_1$ .

Se observa que para radios pequeños, la función  $j_{\nu_1}$  tiene un valor prácticamente nulo hasta cierto valor de  $r$ , a partir del cual comienza a oscilar. Dicha oscilación está acompañada de una atenuación en amplitud al aumentar  $r$ . En cuanto a la función de segunda especie,  $y_{\nu_1}$ , tiende a  $-\infty$  para  $r$  decreciente (pese a que no se muestra, esta función se desplaza hacia la derecha a medida que aumenta el orden de  $\nu_n$ ), y

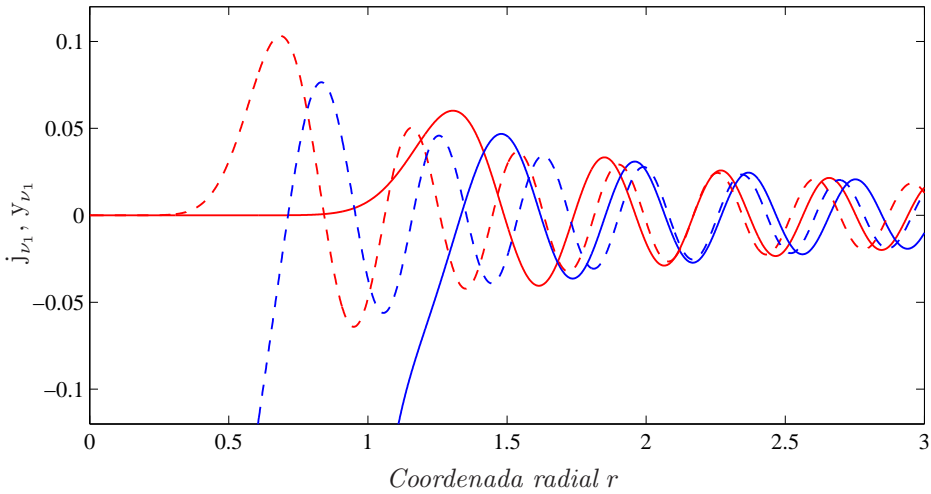


FIGURA 5.6: *Funciones de Bessel esféricas de primera y segunda clase: —,  $j_{\nu_1}$ ,  $\theta_0 = 10$  grados; —,  $y_{\nu_1}$ ,  $\theta_0 = 10$  grados; - - -,  $j_{\nu_1}$ ,  $\theta_0 = 20$  grados; - - -,  $y_{\nu_1}$ ,  $\theta_0 = 20$  grados.*

a partir de cierto valor de  $r$  similar al anterior muestra el mismo comportamiento oscilatorio comentado para  $j_{\nu_1}$ . Por encima del punto en que ambas funciones toman el mismo valor en módulo, resulta evidente la variación oscilatoria atenuada de éstas, de forma similar a un modo que se propaga en un conducto de sección uniforme. En este último caso, el término axial de la solución de la ecuación de ondas es  $e^{-jk_z z}$ , que puede escribirse como  $e^{-jk_z z} = \cos(k_z z) - j \operatorname{sen}(k_z z)$ , lo cual muestra gran similitud con  $h_{\nu_n}^{(1)} = j_{\nu_n} + jy_{\nu_n}$  y  $h_{\nu_n}^{(2)} = j_{\nu_n} - jy_{\nu_n}$  una vez iniciado el comportamiento de tipo oscilatorio.

Para el cálculo de las frecuencias de corte, puede considerarse el término entre paréntesis de la ecuación (5.36) igualado a cero,

$$k_0^2 - \frac{\nu_n(\nu_n + 1)}{r^2} = 0 \quad (5.48)$$

de donde resulta

$$k_0 = \frac{2\pi f}{c_0} = \frac{\sqrt{\nu_n(\nu_n + 1)}}{r} \quad (5.49)$$

y por tanto la  $n$ -ésima frecuencia de corte, dependiente de la coordenada radial, viene dada por

$$f_{c,n} = \frac{c_0}{2\pi} \frac{\sqrt{\nu_n(\nu_n + 1)}}{r} \quad (5.50)$$

que muestra que, a medida que aumenta  $r$ , la frecuencia  $f_{c,n}$  es menor y por tanto el modo asociado aparece para una frecuencia de excitación más baja. De igual manera,



para una frecuencia de excitación dada  $f$ , el valor de  $r$  para el que aparece un modo es

$$r_{ini} = \frac{c_0}{2\pi} \frac{\sqrt{\nu_n(\nu_n + 1)}}{f} \quad (5.51)$$

Considerando el caso previo de  $f = 1000$  Hz y  $\theta_0 = 10$  grados, para el valor  $\nu_1 = 21.460$  se obtiene de la ecuación (5.51) la coordenada radial  $r_{ini} = 1.188$  m, próxima al punto en que  $j_{\nu_1}$  e  $y_{\nu_1}$  toman el mismo valor en módulo,  $r = 1.233$  m, e inician su comportamiento oscilatorio (ver figura 5.6). Para la misma frecuencia de excitación y  $\theta_0 = 20$  grados, resulta  $r_{ini} = 0.594$  m y de la gráfica anterior se obtiene  $r = 0.630$  m. De un cálculo adicional para  $\theta_0 = 30$  grados, se obtienen los valores  $r_{ini} = 0.396$  m y  $r = 0.428$  m.

La tabla 5.3 muestra las frecuencias de corte asociadas a los primeros modos considerados en la tabla 5.2, para las coordenadas radiales  $r = 0.2$  m y  $r = 0.5$  m.

$\theta_0$	$r = 0.2$ m			$r = 0.5$ m		
	$f_{c,1}$	$f_{c,2}$	$f_{c,3}$	$f_{c,1}$	$f_{c,2}$	$f_{c,3}$
5	11879.92	21751.32	31542.11	4751.97	8700.53	12616.84
10	5939.97	10875.67	15771.05	2375.99	4350.27	6308.42
15	3959.99	7250.45	10514.04	1583.99	2900.18	4205.62
20	2970.01	5437.85	7885.54	1188.00	2175.14	3154.21
25	2376.01	4350.29	6308.44	950.41	1740.12	2523.38
30	1980.07	3625.26	5257.05	792.03	1450.11	2102.82
35	1697.32	3107.40	4506.06	678.93	1242.96	1802.42
40	1485.20	2719.02	3942.83	594.08	1087.61	1577.13
45	1320.39	2416.97	3504.77	528.15	966.79	1401.91
50	1188.41	2175.36	3154.34	475.36	870.14	1261.74
55	1080.55	1977.71	2867.63	432.22	791.09	1147.05
60	990.73	1813.06	2628.72	396.29	725.22	1051.49

TABLA 5.3: Frecuencias de corte  $f_{c,n}$  (en Hz) de un conducto cónico para diversos semiángulos de cono y posiciones radiales.

En base a la tabla 5.3 puede comprobarse que las frecuencias de corte se reducen a medida que el semiángulo de cono aumenta (para  $r =$  constante), como es de esperar, dado que las dimensiones de la sección aumentan y facilitan el establecimiento de los modos. Para un semiángulo de cono dado, al aumentar  $r$  las frecuencias de corte bajan por el mismo motivo. La figura 5.7 muestra los dos primeros modos asociados a una distancia radial  $r = 0.2$  m y un semiángulo de cono  $\theta_0 = 30$  grados.

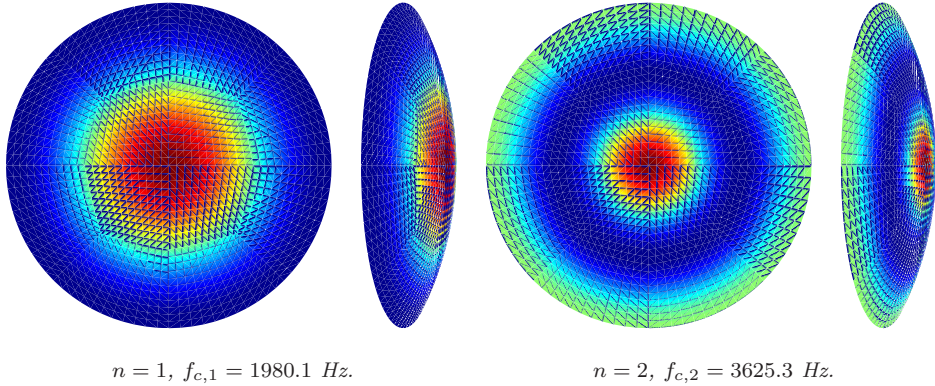


FIGURA 5.7: Modos de presión de un conducto cónico:  $r = 0.2 \text{ m}$  y  $\theta_0 = 30 \text{ grados}$ .

## 5.3. Método de ajuste modal

### 5.3.1. Fundamentos del método

Considérese el sistema acústico ilustrado en la figura 5.8, formado por tres regiones acopladas por medio de cambios de sección. Sin pérdida de generalidad, se asume un sistema de coordenadas cartesiano con el eje  $z$  en la dirección longitudinal del sistema, y discontinuidades entre regiones planas, perpendiculares a dicho eje. Las longitudes de las tres regiones son  $L_1$ ,  $L_2$  y  $L_3$ , y las secciones transversales se denotan mediante  $S_1$ ,  $S_2$  y  $S_3$ . Dichas secciones se refieren al lugar de ubicación de la discontinuidad geométrica en el caso de que se consideren conductos de sección no uniforme, como se verá en el siguiente capítulo dedicado a catalizadores.

Los modos transversales de presión en cada región  $\psi_{i,n}(x_i, y_i)$ ,  $i = 1, 2, 3$ , y sus números de onda transversales  $k_{t,i,n}$ , son conocidos y se obtienen con la condición transversal adecuada, que en el caso de conductos rígidos implica velocidad transversal nula en el contorno exterior de las regiones.

La presión en cada región viene dada por [94]

$$P_1(x_1, y_1, z_1) = \sum_{n=0}^{\infty} (A_n^+ e^{-jk_{1,n}z_1} + A_n^- e^{jk_{1,n}z_1}) \psi_{1,n}(x_1, y_1) \quad (5.52)$$

$$P_2(x_2, y_2, z_2) = \sum_{n=0}^{\infty} (B_n^+ e^{-jk_{2,n}z_2} + B_n^- e^{jk_{2,n}z_2}) \psi_{2,n}(x_2, y_2) \quad (5.53)$$

$$P_3(x_3, y_3, z_3) = \sum_{n=0}^{\infty} (C_n^+ e^{-jk_{3,n}z_3} + C_n^- e^{jk_{3,n}z_3}) \psi_{3,n}(x_3, y_3) \quad (5.54)$$

donde los números de onda longitudinales se obtienen mediante

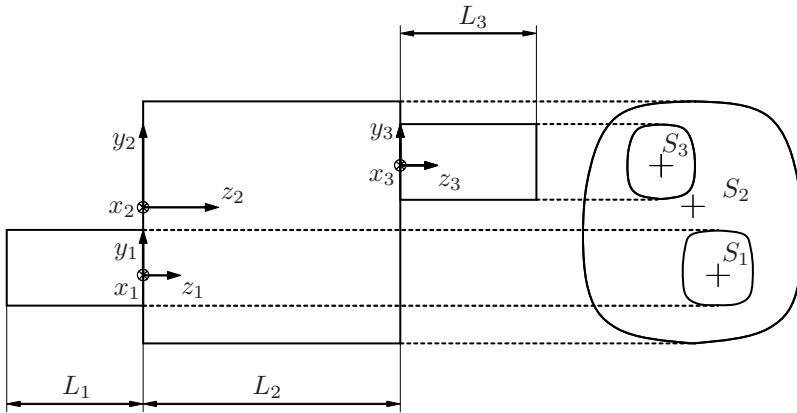


FIGURA 5.8: Dominio considerado para la aplicación del método de ajuste modal.

$$k_{i,n} = \sqrt{k_0^2 - k_{t,i,n}^2} \quad i = 1, 2, 3 \quad (5.55)$$

El conocimiento de la presión implica la determinación de los coeficientes de propagación  $A_n^+$ ,  $A_n^-$ ,  $B_n^+$ ,  $B_n^-$ ,  $C_n^+$  y  $C_n^-$ .

Es necesario, para plantear de forma adecuada las condiciones de acoplamiento entre regiones, utilizar otro campo acústico además de la presión. En ausencia de flujo medio puede utilizarse el campo de velocidades axiales [20, 121], obtenido en base a la ecuación de Euler (2.47),

$$U_1(x_1, y_1, z_1) = -\frac{1}{j\rho_0\omega} \frac{\partial P_1}{\partial z_1} = \frac{1}{\rho_0\omega} \sum_{n=0}^{\infty} k_{1,n} (A_n^+ e^{-jk_{1,n}z_1} - A_n^- e^{jk_{1,n}z_1}) \psi_{1,n}(x_1, y_1) \quad (5.56)$$

$$U_2(x_2, y_2, z_2) = -\frac{1}{j\rho_0\omega} \frac{\partial P_2}{\partial z_2} = \frac{1}{\rho_0\omega} \sum_{n=0}^{\infty} k_{2,n} (B_n^+ e^{-jk_{2,n}z_2} - B_n^- e^{jk_{2,n}z_2}) \psi_{2,n}(x_2, y_2) \quad (5.57)$$

$$U_3(x_3, y_3, z_3) = -\frac{1}{j\rho_0\omega} \frac{\partial P_3}{\partial z_3} = \frac{1}{\rho_0\omega} \sum_{n=0}^{\infty} k_{3,n} (C_n^+ e^{-jk_{3,n}z_3} - C_n^- e^{jk_{3,n}z_3}) \psi_{3,n}(x_3, y_3) \quad (5.58)$$

El acoplamiento entre regiones se consigue aplicando las condiciones adecuadas. Éstas implican la continuidad de los campos de presión y velocidad acústica axial en las discontinuidades geométricas [20], en la interfase entre las regiones 1 y 2 (expansión), y las regiones 2 y 3 (contracción). Para la primera puede escribirse la continuidad de presión como

$$P_1(x_1, y_1, z_1)|_{z_1=0} = P_2(x_2, y_2, z_2)|_{z_2=0} \quad \text{en } S_1 \quad (5.59)$$

De forma similar, la continuidad de velocidad acústica axial es

$$U_1(x_1, y_1, z_1)|_{z_1=0} = U_2(x_2, y_2, z_2)|_{z_2=0} \quad \text{en } S_1 \quad (5.60)$$

y en el resto de la sección  $S_2$  la velocidad acústica axial satisface la condición de pared rígida

$$U_2(x_2, y_2, z_2)|_{z_2=0} = 0 \quad \text{en } S_2 - S_1 \quad (5.61)$$

Para la interfase entre las regiones 2 y 3 resulta

$$P_3(x_3, y_3, z_3)|_{z_3=0} = P_2(x_2, y_2, z_2)|_{z_2=L_2} \quad \text{en } S_3 \quad (5.62)$$

$$U_3(x_3, y_3, z_3)|_{z_3=0} = U_2(x_2, y_2, z_2)|_{z_2=L_2} \quad \text{en } S_3 \quad (5.63)$$

$$U_2(x_2, y_2, z_2)|_{z_2=L_2} = 0 \quad \text{en } S_2 - S_3 \quad (5.64)$$

El conjunto de ecuaciones (5.59)-(5.64) puede ser utilizado para generar un sistema algebraico de ecuaciones (de dimensión inicialmente infinita) mediante la utilización de un procedimiento de integración ponderada, en el que los modos de presión transversales se utilizan como funciones de ponderación. Comenzando por la condición (5.59) de continuidad de presión en la primera interfase, multiplíquese ésta por el modo de presión transversal de la región 1,  $\psi_{1,s}(x_1, y_1)$ , con  $s = 0, 1, 2, 3, \dots, \infty$ , y llévase a cabo la integración en  $S_1$ . Resulta el conjunto infinito de ecuaciones

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} (A_n^+ + A_n^-) \langle \psi_{1,n}(x_1, y_1) \psi_{1,s}(x_1, y_1) \rangle_{S_1} \\ = \sum_{n=0}^{\infty} (B_n^+ + B_n^-) \langle \psi_{2,n}(x_2, y_2) \psi_{1,s}(x_1, y_1) \rangle_{S_1} \end{aligned} \quad (5.65)$$

donde  $\langle \rangle_S$  denota, como es habitual, la integración en la sección  $S$ . La evaluación de dicha integral requiere el conocimiento de la relación entre las coordenadas de cada sistema de referencia, cuya mayor o menor complejidad depende del tipo de conductos considerados. Además, deben considerarse las propiedades de los modos de presión. La ortogonalidad de éstos en muchos casos [78], como por ejemplo en conductos rígidos sin material absorbente [34], permite una simplificación considerable del lado izquierdo de la ecuación (5.65), cuyo único término no nulo es el correspondiente al caso  $n = s$ . Por otro lado, la posibilidad de expresar los modos de forma analítica permite frecuentemente la evaluación analítica [25, 89] de las integrales asociadas, reduciendo por tanto el coste computacional asociado.

Si se consideran ahora las condiciones que afectan a la velocidad acústica axial, ecuaciones (5.60) y (5.61), puede repetirse el procedimiento anterior, multiplicando cada una de ellas por el modo de presión en la región 2,  $\psi_{2,s}(x_2, y_2)$ , con  $s = 0, 1, 2, 3, \dots, \infty$ . La primera ecuación se integra en la sección  $S_1$  y la segunda en la sección  $S_2 - S_1$ . Ambas integrales se suman, de manera que el resultado final puede expresarse como

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} k_{1,n} (A_n^+ - A_n^-) \langle \psi_{1,n}(x_1, y_1) \psi_{2,s}(x_2, y_2) \rangle_{S_1} \\
= \sum_{n=0}^{\infty} k_{2,n} (B_n^+ - B_n^-) \langle \psi_{2,n}(x_2, y_2) \psi_{2,s}(x_2, y_2) \rangle_{S_2}
\end{aligned} \tag{5.66}$$

Un argumento similar al caso anterior implica que en el lado derecho de la ecuación (5.66) sólo será no nulo, supuesta la condición de ortogonalidad, el término para el que  $n = s$ .

La aplicación del mismo procedimiento al caso de la interfase entre las regiones 2 y 3 utilizando los modos de presión adecuados permite obtener las ecuaciones asociadas. De la continuidad de presión expresada en la ecuación (5.62) se obtiene

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} (C_n^+ + C_n^-) \langle \psi_{3,n}(x_3, y_3) \psi_{3,s}(x_3, y_3) \rangle_{S_3} \\
= \sum_{n=0}^{\infty} (B_n^+ e^{-jk_{2,n}L_2} + B_n^- e^{jk_{2,n}L_2}) \langle \psi_{2,n}(x_2, y_2) \psi_{3,s}(x_3, y_3) \rangle_{S_3}
\end{aligned} \tag{5.67}$$

mientras que las expresiones de velocidad (5.63) y (5.64) dan lugar a

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} k_{3,n} (C_n^+ - C_n^-) \langle \psi_{3,n}(x_3, y_3) \psi_{2,s}(x_2, y_2) \rangle_{S_3} \\
= \sum_{n=0}^{\infty} k_{2,n} (B_n^+ e^{-jk_{2,n}L_2} - B_n^- e^{jk_{2,n}L_2}) \langle \psi_{2,n}(x_2, y_2) \psi_{2,s}(x_2, y_2) \rangle_{S_2}
\end{aligned} \tag{5.68}$$

Se dispone finalmente del sistema algebraico de ecuaciones (5.65)-(5.68) cuyas incógnitas, los coeficientes de propagación  $A_n^+$ ,  $A_n^-$ ,  $B_n^+$ ,  $B_n^-$ ,  $C_n^+$  y  $C_n^-$ , deben ser evaluadas para definir el campo acústico completo en las regiones consideradas. Como ya se ha indicado, la representación de todas las regiones es completa, sin simplificación alguna de sus características. En este sentido, cabe indicar que el método del pistón puede entenderse como un caso particular del método de ajuste modal en el que los desarrollos modales asociados a los conductos de entrada y salida se limitan al modo de onda plana. Es evidente que la metodología de ajuste modal es aplicable a otras configuraciones, sin más que considerar la descripción modal adecuada de cada subdominio y las condiciones de acoplamiento oportunas.

### 5.3.2. Condiciones de contorno

En base al tipo de caracterización buscada para el silenciador, se aplican las condiciones de contorno oportunas, tal como se ha visto previamente en el modelado de silenciadores mediante onda plana y mediante elementos finitos (capítulos 2 y 3). Por

un lado, cabe considerar la posibilidad de obtener los cuatro polos del silenciador con vista a utilizar éstos en un modelo más completo de la línea de escape o bien a cuantificar a partir de ellos la atenuación acústica. En este caso, deben considerarse dos análisis diferentes con condiciones de contorno independientes. Una posibilidad consiste en aplicar una excitación en presión  $P_{exc}$  de valor arbitrario en la sección de entrada y presión nula en la salida (primer análisis), y presión arbitraria en la sección de entrada y velocidad nula en la salida (segundo análisis). Las ecuaciones resultantes se añaden a las ecuaciones (5.59)-(5.64) obtenidas previamente. Para el primer análisis, puede escribirse

$$P_1(x_1, y_1, z_1)|_{z_1=-L_1} = P_{exc} \quad \text{en } S_1 \quad (5.69)$$

$$P_3(x_3, y_3, z_3)|_{z_3=L_3} = 0 \quad \text{en } S_3 \quad (5.70)$$

y para el segundo, se tiene

$$P_1(x_1, y_1, z_1)|_{z_1=-L_1} = P_{exc} \quad \text{en } S_1 \quad (5.71)$$

$$U_3(x_3, y_3, z_3)|_{z_3=L_3} = 0 \quad \text{en } S_3 \quad (5.72)$$

Las ecuaciones algebraicas asociadas a las condiciones previas se obtienen multiplicando por el modo de la región correspondiente e integrando en la sección asociada. Para el primer análisis a realizar, de la condición (5.69) se obtiene, para  $s = 0, 1, 2, 3, \dots, \infty$ ,

$$\sum_{n=0}^{\infty} (A_n^+ e^{jk_{1,n}L_1} + A_n^- e^{-jk_{1,n}L_1}) \langle \psi_{1,n}(x_1, y_1) \psi_{1,s}(x_1, y_1) \rangle_{S_1} = P_{exc} \langle \psi_{1,s}(x_1, y_1) \rangle_{S_1} \quad (5.73)$$

De la condición (5.70) en la sección de salida, se tiene, para  $s = 0, 1, 2, 3, \dots, \infty$ ,

$$\sum_{n=0}^{\infty} (C_n^+ e^{-jk_{3,n}L_3} + C_n^- e^{jk_{3,n}L_3}) \langle \psi_{3,n}(x_3, y_3) \psi_{3,s}(x_3, y_3) \rangle_{S_3} = 0 \quad (5.74)$$

El segundo análisis es básicamente similar, de manera que la condición (5.71) da lugar a la ecuación (5.73) y la condición (5.72) permite obtener, para  $s = 0, 1, 2, 3, \dots, \infty$ ,

$$\sum_{n=0}^{\infty} k_{3,n} (C_n^+ e^{-jk_{3,n}L_3} - C_n^- e^{jk_{3,n}L_3}) \langle \psi_{3,n}(x_3, y_3) \psi_{3,s}(x_3, y_3) \rangle_{S_3} = 0 \quad (5.75)$$

Dado que este procedimiento se aplica usualmente en los conductos de entrada y salida, en general es posible asumir directamente el cumplimiento de las propiedades de ortogonalidad, de manera que en las ecuaciones anteriores solamente es necesario incluir el término para el que  $n = s$ , con la simplificación que esto supone. Además, en conductos de sección uniforme el primer modo corresponde a una onda plana, con la que en la ecuación (5.73) el término de la derecha es no nulo para  $s = 0$  y nulo en

cualquier otro caso.

La resolución del sistema algebraico de ecuaciones (5.65)-(5.68) y (5.73)-(5.75) implica resolver dos veces un sistema que debe ser truncado previamente. Para un valor finito  $s_{max}$  se dispone de  $6(s_{max} + 1)$  ecuaciones, y para un valor finito  $n_{max}$  se tienen  $6(n_{max} + 1)$  incógnitas, asociadas a los coeficientes de propagación  $A_n^+$ ,  $A_n^-$ ,  $B_n^+$ ,  $B_n^-$ ,  $C_n^+$  y  $C_n^-$ . Por tanto, es obvio que para conseguir el mismo número de ecuaciones que de incógnitas basta con hacer  $s_{max} = n_{max} = q$ , logrando un sistema de ecuaciones algebraico resoluble. El truncado se justifica puesto que los modos de alto orden tienen un efecto cada vez menor en la solución del campo acústico para una frecuencia máxima de análisis dada [117]. Evidentemente, el valor de  $q$  para obtener una solución precisa está relacionado con esta frecuencia y la geometría concreta analizada. Hay estudios sobre la convergencia, como por ejemplo el trabajo de Mittra y Lee [91], en el que se analiza este problema y se determina el número de modos a utilizar en cada parte de una discontinuidad para el caso de una guía de ondas electromagnéticas. Para conseguir una solución adecuada, se ha de imponer lo que se conoce como *condición de límite*, que implica que la energía en un volumen pequeño alrededor de una zona de tipo vértice debe permanecer acotada. Esto lleva a obtener expresiones que indican que la relación de modos en una discontinuidad geométrica es directamente proporcional a la relación de dimensiones. Åbom [20] aplica este criterio, en principio válido para ondas electromagnéticas sin paredes en la dirección axial, al caso de silenciadores circulares concéntricos con tubos extendidos, y obtiene resultados satisfactorios. En general, la experiencia que se posee en lo referente a la técnica de ajuste modal en silenciadores implica que, con las dimensiones usuales utilizadas en esta Tesis, se consiguen soluciones precisas considerando el mismo número de modos en ambos lados de la discontinuidad y sin necesidad de que dicho número sea excesivo [41, 117, 118]. Debe tenerse en cuenta que las configuraciones geométricas así como las ecuaciones consideradas aquí no se ajustan al problema tratado en [91]. Se ha comprobado, como muestran los resultados obtenidos en secciones posteriores, que con un número de modos reducido se consiguen soluciones satisfactorias para los silenciadores estudiados.

Finalmente, una vez resueltos los sistemas de ecuaciones correspondientes, pueden obtenerse los cuatro polos del silenciador. Lógicamente, dado que se asume propagación tridimensional, éstos pueden depender inicialmente de los puntos considerados en las secciones de entrada y salida. Dado que la definición estricta de los cuatro polos exige que la onda sea plana, puede considerarse que las regiones de entrada y salida son suficientemente largas para asegurar propagación de onda plana en dichas secciones, de manera que finalmente resulta [94]

$$A = \frac{P_1(z_1 = -L_1)}{P_3(z_3 = L_3)} \Big|_{U_3(z_3=L_3)=0} = \frac{P_{exc}}{C_0^+ e^{-jk_0 L_3} + C_0^- e^{jk_0 L_3}} \quad (5.76)$$

$$B = \frac{P_1(z_1 = -L_1)}{U_3(z_3 = L_3)} \Big|_{P_3(z_3=L_3)=0} = \frac{P_{exc}}{\frac{1}{\rho_0 c_0} (C_0^+ e^{-jk_0 L_3} - C_0^- e^{jk_0 L_3})} \quad (5.77)$$

$$C = \frac{U_1(z_1 = -L_1)}{P_3(z_3 = L_3)} \Big|_{U_3(z_3=L_3)=0} = \frac{1}{\rho_0 c_0} \frac{(A_0^+ e^{-jk_0(-L_1)} - A_0^- e^{jk_0(-L_1)})}{C_0^+ e^{-jk_0 L_3} + C_0^- e^{jk_0 L_3}} \quad (5.78)$$

$$D = \frac{U_1(z_1 = -L_1)}{U_3(z_3 = L_3)} \Big|_{P_3(z_3=L_3)=0} = \frac{A_0^+ e^{-jk_0(-L_1)} - A_0^- e^{jk_0(-L_1)}}{C_0^+ e^{-jk_0 L_3} - C_0^- e^{jk_0 L_3}} \quad (5.79)$$

Obtenidos los cuatro polos, el  $TL$  viene dado por la expresión (2.275).

La determinación del índice de pérdidas de transmisión puede llevarse a cabo también mediante la utilización de un único análisis. Para ello, se asume que sobre el silenciador actúa una excitación dada por una onda plana incidente  $A_0^+$  de valor arbitrario, que por comodidad puede tener amplitud unidad. En la salida se supone que la terminación es anecoica, lo cual implica que no se produce reflexión alguna y por tanto  $C_n^- = 0$  para todo valor de  $n$ . De las infinitas ecuaciones presentes en el sistema (5.65)-(5.68), se reduce la dimensión del problema mediante el truncado realizado anteriormente a un valor máximo de  $s$  igual a  $s_{max}$ , dando lugar a  $4(s_{max} + 1)$  ecuaciones, y un valor máximo de  $n$  igual a  $n_{max}$ , con las  $4(n_{max} + 1)$  incógnitas correspondientes, asociadas a los coeficientes de propagación  $A_n^-$ ,  $B_n^+$ ,  $B_n^-$  y  $C_n^+$ . El sistema algebraico resoluble se obtiene, como en el caso de los cuatro polos, haciendo  $s_{max} = n_{max} = q$ . A partir de la solución obtenida para  $A_n^-$ ,  $B_n^+$ ,  $B_n^-$  y  $C_n^+$  puede evaluarse el  $TL$  mediante la expresión

$$TL = -10 \log \left( \frac{S_3}{S_1} \left| \sum_{n=0}^q C_n^+ e^{-jk_{3,n} L_3} \psi_{3,n}(x_3, y_3) \right|^2 \right) \quad (5.80)$$

Para frecuencias de excitación por debajo de la primera frecuencia de corte de la región 3, los modos de alto orden son de tipo evanescente y se atenúan rápidamente a medida que la onda se aleja de la interfase asociada a la contracción. Por tanto, con un valor de  $L_3$  suficientemente grande, se obtiene

$$TL = -10 \log \left( \frac{S_3}{S_1} |C_0^+|^2 \right) \quad (5.81)$$

### 5.3.3. Aplicaciones

En esta sección se aplica el método de ajuste modal a varias geometrías de sección transversal circular. En primer lugar se consideran dos configuraciones clásicas de silenciadores (cámara de expansión y reversa), para pasar a presentar posteriormente dos geometrías novedosas desde el punto de vista de modelado. Éstas son la cámara con doble salida opuesta y el silenciador de cámara reversa con material absorbente y placa perforada.



### 1. Cámara de expansión simple

Se considera una cámara de expansión simple tal como muestra la figura 5.9. El desarrollo seguido aquí puede encontrarse en las referencias de Selamet y Ji [117, 120], y pone de manifiesto las ventajas computacionales que implica el modelado de tipo analítico y la ortogonalidad de los modos de presión.

Se consideran tres regiones denotadas mediante 1, 2 y 3, con radios  $R_1$ ,  $R_2$  y  $R_3$ , longitudes  $L_1$ ,  $L_2$  y  $L_3$  y secciones transversales  $S_1$ ,  $S_2$  y  $S_3$ . En el conducto de entrada se tienen las ondas progresivas y regresivas  $A$  y  $B$ , en la cámara son  $C$  y  $D$  y en el conducto de salida  $E$  y  $F$ . La presión en la cámara puede expresarse, según la ecuación (5.29), como

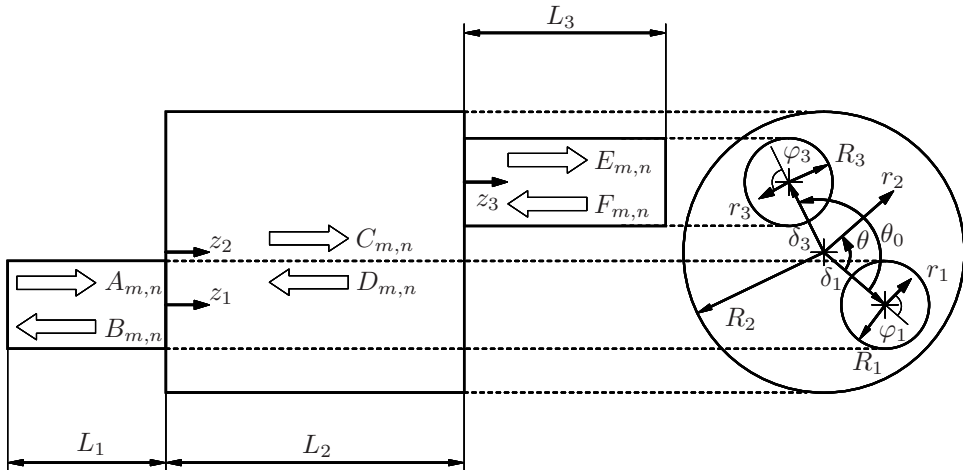


FIGURA 5.9: Cámara de expansión simple circular. Geometría analizada mediante el método de ajuste modal.

$$\begin{aligned}
 P_2(r_2, \theta, z_2) = & \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} J_m \left( \frac{\alpha_{m,n}}{R_2} r_2 \right) (C_{m,n}^+ e^{-jk_{2,m,n}z_2} + D_{m,n}^+ e^{jk_{2,m,n}z_2}) e^{-jm\theta} \\
 & + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} J_m \left( \frac{\alpha_{m,n}}{R_2} r_2 \right) (C_{m,n}^- e^{-jk_{2,m,n}z_2} + D_{m,n}^- e^{jk_{2,m,n}z_2}) e^{jm\theta}
 \end{aligned} \tag{5.82}$$

donde debe notarse que el modo de onda plana y los modos axisimétricos sólo se han incluido en el primer sumatorio [120]. El número de onda  $k_{2,m,n}$  viene dado por

$$k_{2,m,n} = \begin{cases} \sqrt{k_0^2 - \left(\frac{\alpha_{m,n}}{R_2}\right)^2}, & k_0 > \frac{\alpha_{m,n}}{R_2} \\ -\sqrt{k_0^2 - \left(\frac{\alpha_{m,n}}{R_2}\right)^2}, & k_0 < \frac{\alpha_{m,n}}{R_2} \end{cases} \quad (5.83)$$

con el cambio de signo que garantiza la atenuación exponencial de los modos evanescentes generados en las discontinuidades al alejarse la onda de éstas [117]. En las tres geometrías consideradas posteriormente a lo largo de este capítulo se presentará una formulación alternativa ligeramente distinta, con objeto de mostrar las diferentes variantes del método.

Utilizando la ecuación de Euler (2.47), la velocidad acústica axial puede obtenerse como

$$U_2 = -\frac{1}{j\rho_0\omega} \frac{\partial P_2}{\partial z_2} \quad (5.84)$$

y por tanto la velocidad en la cámara es

$$U_2(r_2, \theta, z_2) = \frac{1}{\rho_0\omega} \left( \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} k_{2,m,n} J_m \left( \frac{\alpha_{m,n}}{R_2} r_2 \right) \left( C_{m,n}^+ e^{-jk_{2,m,n}z_2} - D_{m,n}^+ e^{jk_{2,m,n}z_2} \right) e^{-jm\theta} \right. \\ \left. + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} k_{2,m,n} J_m \left( \frac{\alpha_{m,n}}{R_2} r_2 \right) \left( C_{m,n}^- e^{-jk_{2,m,n}z_2} - D_{m,n}^- e^{jk_{2,m,n}z_2} \right) e^{jm\theta} \right) \quad (5.85)$$

Para los conductos de entrada y salida, los campos de presiones y velocidades se obtienen de forma idéntica con las sustituciones adecuadas. Las condiciones de contorno en la expansión se escriben como sigue

$$P_1(r_1, \varphi_1, z_1)|_{z_1=0} = P_2(r_2, \theta, z_2)|_{z_2=0} \quad \text{en } S_1 \quad (5.86)$$

$$U_1(r_1, \varphi_1, z_1)|_{z_1=0} = U_2(r_2, \theta, z_2)|_{z_2=0} \quad \text{en } S_1 \quad (5.87)$$

$$U_2(r_2, \theta, z_2)|_{z_2=0} = 0 \quad \text{en } S_2 - S_1 \quad (5.88)$$

De igual forma, en la contracción resulta

$$P_3(r_3, \varphi_3, z_3)|_{z_3=0} = P_2(r_2, \theta, z_2)|_{z_2=L_2} \quad \text{en } S_3 \quad (5.89)$$

$$U_3(r_3, \varphi_3, z_3)|_{z_3=0} = U_2(r_2, \theta, z_2)|_{z_2=L_2} \quad \text{en } S_3 \quad (5.90)$$

$$U_2(r_2, \theta, z_2)|_{z_2=L_2} = 0 \quad \text{en } S_2 - S_3 \quad (5.91)$$

Se procede ahora a aplicar el método de ajuste modal, comenzando con la condición de continuidad de presión en la expansión expresada en la ecuación (5.86). Se multiplica

ésta por el modo de presión del conducto de entrada  $J_t(\alpha_{t,s}r_1/R_1)e^{-jt\varphi_1}$ , con  $t = 0, 1, 2, 3, \dots, \infty$  y  $s = 0, 1, 2, 3, \dots, \infty$ , y se lleva a cabo la integración en  $S_1$ , resultando

$$\begin{aligned} (A_{t,s}^+ + B_{t,s}^+) \frac{R_1^2}{2} \left(1 - \frac{t^2}{\alpha_{t,s}^2}\right) J_t(\alpha_{t,s}) &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (C_{m,n}^+ + D_{m,n}^+) J_{m+t} \left(\frac{\alpha_{m,n}}{R_2} \delta_1\right) \mathfrak{R}_1 \\ &+ \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (C_{m,n}^- + D_{m,n}^-) (-1)^t J_{m-t} \left(\frac{\alpha_{m,n}}{R_2} \delta_1\right) \mathfrak{R}_1 \end{aligned} \quad (5.92)$$

Repetiendo el procedimiento con el modo  $J_t(\alpha_{t,s}r_1/R_1)e^{jt\varphi_1}$ , con  $t = 1, 2, 3, \dots, \infty$  y  $s = 0, 1, 2, 3, \dots, \infty$ , se obtiene

$$\begin{aligned} (A_{t,s}^- + B_{t,s}^-) \frac{R_1^2}{2} \left(1 - \frac{t^2}{\alpha_{t,s}^2}\right) J_t(\alpha_{t,s}) &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (C_{m,n}^+ + D_{m,n}^+) (-1)^t J_{m-t} \left(\frac{\alpha_{m,n}}{R_2} \delta_1\right) \mathfrak{R}_1 \\ &+ \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (C_{m,n}^- + D_{m,n}^-) J_{m+t} \left(\frac{\alpha_{m,n}}{R_2} \delta_1\right) \mathfrak{R}_1 \end{aligned} \quad (5.93)$$

donde [109]

$$\mathfrak{R}_1 = \begin{cases} \frac{\alpha_{m,n} \frac{R_1}{R_2} J_t' \left(\frac{\alpha_{m,n}}{R_2} R_1\right)}{\left(\frac{\alpha_{t,s}}{R_1}\right)^2 - \left(\frac{\alpha_{m,n}}{R_2}\right)^2} & \frac{\alpha_{m,n}}{R_2} \neq \frac{\alpha_{t,s}}{R_1} \\ \frac{R_1^2}{2} \left(1 - \frac{t^2}{\alpha_{t,s}^2}\right) J_t(\alpha_{t,s}) & \frac{\alpha_{m,n}}{R_2} = \frac{\alpha_{t,s}}{R_1} \end{cases} \quad (5.94)$$

Para las condiciones asociadas al campo de velocidad en la expansión, las ecuaciones (5.87) y (5.88) se multiplican por el modo de presión de la cámara  $J_t(\alpha_{t,s}r_2/R_2)e^{-jt\theta}$ , con  $t = 0, 1, 2, 3, \dots, \infty$  y  $s = 0, 1, 2, 3, \dots, \infty$ , y se integran en  $S_1$  y  $S_2 - S_1$ , respectivamente. Sumando dichas integrales se obtiene

$$\begin{aligned} &\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} k_{1,m,n} (A_{m,n}^+ - B_{m,n}^+) J_{m+t} \left(\frac{\alpha_{t,s}}{R_2} \delta_1\right) \mathfrak{R}_2 \\ &+ \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} k_{1,m,n} (A_{m,n}^- - B_{m,n}^-) (-1)^t J_{m-t} \left(\frac{\alpha_{t,s}}{R_2} \delta_1\right) \mathfrak{R}_2 \end{aligned} \quad (5.95)$$

$$= k_{2,t,s} (C_{t,s}^+ - D_{t,s}^+) \frac{R_2^2}{2} \left(1 - \frac{t^2}{\alpha_{t,s}^2}\right) J_t^2(\alpha_{t,s})$$

Multiplicando por  $J_t(\alpha_{t,s}r_2/R_2)e^{jt\theta}$ , se llega, para  $t = 1, 2, 3, \dots, \infty$  y  $s = 0, 1, 2, 3, \dots, \infty$ , a

$$\begin{aligned}
& \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} k_{1,m,n} (A_{m,n}^+ - B_{m,n}^+) (-1)^t J_{m-t} \left( \frac{\alpha_{t,s}}{R_2} \delta_1 \right) \mathfrak{R}_2 \\
& + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} k_{1,m,n} (A_{m,n}^- - B_{m,n}^-) J_{m+t} \left( \frac{\alpha_{t,s}}{R_2} \delta_1 \right) \mathfrak{R}_2 \\
& = k_{2,t,s} (C_{t,s}^- - D_{t,s}^-) \frac{R_2^2}{2} \left( 1 - \frac{t^2}{\alpha_{t,s}^2} \right) J_t^2(\alpha_{t,s})
\end{aligned} \tag{5.96}$$

siendo en este caso

$$\mathfrak{R}_2 = \begin{cases} \frac{\alpha_{t,s} \frac{R_1}{R_2} J_m(\alpha_{m,n}) J'_m \left( \frac{\alpha_{t,s}}{R_2} R_1 \right)}{\left( \frac{\alpha_{m,n}}{R_1} \right)^2 - \left( \frac{\alpha_{t,s}}{R_2} \right)^2} & \frac{\alpha_{m,n}}{R_1} \neq \frac{\alpha_{t,s}}{R_2} \\ \frac{R_1^2}{2} \left( 1 - \frac{m^2}{\alpha_{m,n}^2} \right) J_m^2(\alpha_{m,n}) & \frac{\alpha_{m,n}}{R_1} = \frac{\alpha_{t,s}}{R_2} \end{cases} \tag{5.97}$$

El tratamiento a aplicar en la contracción es básicamente similar al caso de la expansión. La ecuación (5.89) de continuidad de presión en la contracción se multiplica por el modo de presión del conducto de salida  $J_t(\alpha_{t,s}r_3/R_3)e^{-jt\varphi_3}$ , con  $t = 0, 1, 2, 3, \dots$ ,  $\infty$  y  $s = 0, 1, 2, 3, \dots, \infty$  y se integra en  $S_3$ , proporcionando

$$\begin{aligned}
& (E_{t,s}^+ + F_{t,s}^+) \frac{R_3^2}{2} \left( 1 - \frac{t^2}{\alpha_{t,s}^2} \right) J_t(\alpha_{t,s}) \\
& = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (C_{m,n}^+ e^{-jk_{2,m,n}L_2} + D_{m,n}^+ e^{jk_{2,m,n}L_2}) J_{m+t} \left( \frac{\alpha_{m,n}}{R_2} \delta_3 \right) e^{-jm\theta_0} \mathfrak{R}_3 \\
& + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (C_{m,n}^- e^{-jk_{2,m,n}L_2} + D_{m,n}^- e^{jk_{2,m,n}L_2}) (-1)^t J_{m-t} \left( \frac{\alpha_{m,n}}{R_2} \delta_3 \right) e^{jm\theta_0} \mathfrak{R}_3
\end{aligned} \tag{5.98}$$

Utilizando ahora  $J_t(\alpha_{t,s}r_3/R_3)e^{jt\varphi_3}$ , con  $t = 1, 2, 3, \dots, \infty$  y  $s = 0, 1, 2, 3, \dots, \infty$ , se obtiene

$$\begin{aligned}
& (E_{t,s}^- + F_{t,s}^-) \frac{R_3^2}{2} \left( 1 - \frac{t^2}{\alpha_{t,s}^2} \right) J_t(\alpha_{t,s}) \\
& = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (C_{m,n}^+ e^{-jk_{2,m,n}L_2} + D_{m,n}^+ e^{jk_{2,m,n}L_2}) (-1)^t J_{m-t} \left( \frac{\alpha_{m,n}}{R_2} \delta_3 \right) e^{-jm\theta_0} \mathfrak{R}_3 \\
& + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (C_{m,n}^- e^{-jk_{2,m,n}L_2} + D_{m,n}^- e^{jk_{2,m,n}L_2}) J_{m+t} \left( \frac{\alpha_{m,n}}{R_2} \delta_3 \right) e^{jm\theta_0} \mathfrak{R}_3
\end{aligned} \tag{5.99}$$

donde, de forma similar al caso de la expansión,

$$\mathfrak{R}_3 = \begin{cases} \frac{\alpha_{m,n} \frac{R_3}{R_2} J'_t \left( \frac{\alpha_{m,n}}{R_2} R_3 \right)}{\left( \frac{\alpha_{t,s}}{R_3} \right)^2 - \left( \frac{\alpha_{m,n}}{R_2} \right)^2} & \frac{\alpha_{m,n}}{R_2} \neq \frac{\alpha_{t,s}}{R_3} \\ \frac{R_3^2}{2} \left( 1 - \frac{t^2}{\alpha_{t,s}^2} \right) J_t(\alpha_{t,s}) & \frac{\alpha_{m,n}}{R_2} = \frac{\alpha_{t,s}}{R_3} \end{cases} \quad (5.100)$$

Considerando ahora el campo de velocidades axiales en la contracción, las ecuaciones (5.90) y (5.91) se multiplican por  $J_t(\alpha_{t,s}r_2/R_2)e^{-jt\theta}$ , con  $t = 0, 1, 2, 3, \dots, \infty$  y  $s = 0, 1, 2, 3, \dots, \infty$ , se integran en  $S_3$  y  $S_2 - S_3$  respectivamente y se suman, dando lugar a

$$\begin{aligned} & \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} k_{3,m,n} (E_{m,n}^+ - F_{m,n}^+) J_{m+t} \left( \frac{\alpha_{t,s}}{R_2} \delta_3 \right) \mathfrak{R}_4 e^{jt\theta_0} \\ & + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} k_{3,m,n} (E_{m,n}^- - F_{m,n}^-) (-1)^t J_{m-t} \left( \frac{\alpha_{t,s}}{R_2} \delta_3 \right) \mathfrak{R}_4 e^{jt\theta_0} \\ & = k_{2,t,s} (C_{t,s}^+ e^{-jk_{2,t,s}L_2} - D_{t,s}^+ e^{jk_{2,t,s}L_2}) \frac{R_2^2}{2} \left( 1 - \frac{t^2}{\alpha_{t,s}^2} \right) J_t^2(\alpha_{t,s}) \end{aligned} \quad (5.101)$$

y utilizando finalmente el modo  $J_t(\alpha_{t,s}r_2/R_2)e^{jt\theta}$  para  $t = 1, 2, 3, \dots, \infty$  y  $s = 0, 1, 2, 3, \dots, \infty$

$$\begin{aligned} & \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} k_{3,m,n} (E_{m,n}^+ - F_{m,n}^+) (-1)^t J_{m-t} \left( \frac{\alpha_{t,s}}{R_2} \delta_3 \right) \mathfrak{R}_4 e^{-jt\theta_0} \\ & + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} k_{3,m,n} (E_{m,n}^- - F_{m,n}^-) J_{m+t} \left( \frac{\alpha_{t,s}}{R_2} \delta_3 \right) \mathfrak{R}_4 e^{-jt\theta_0} \\ & = k_{2,t,s} (C_{t,s}^- e^{-jk_{2,t,s}L_2} - D_{t,s}^- e^{jk_{2,t,s}L_2}) \frac{R_2^2}{2} \left( 1 - \frac{t^2}{\alpha_{t,s}^2} \right) J_t^2(\alpha_{t,s}) \end{aligned} \quad (5.102)$$

con

$$\mathfrak{R}_4 = \begin{cases} \frac{\alpha_{t,s} \frac{R_3}{R_2} J_m(\alpha_{m,n}) J'_m \left( \frac{\alpha_{t,s}}{R_2} R_3 \right)}{\left( \frac{\alpha_{m,n}}{R_3} \right)^2 - \left( \frac{\alpha_{t,s}}{R_2} \right)^2} & \frac{\alpha_{m,n}}{R_3} \neq \frac{\alpha_{t,s}}{R_2} \\ \frac{R_3^2}{2} \left( 1 - \frac{m^2}{\alpha_{m,n}^2} \right) J_m^2(\alpha_{m,n}) & \frac{\alpha_{m,n}}{R_3} = \frac{\alpha_{t,s}}{R_2} \end{cases} \quad (5.103)$$

La resolución del sistema de ecuaciones (5.92), (5.93), (5.95), (5.96), (5.98), (5.99), (5.101) y (5.102) se consigue mediante truncado, de manera que debe llegarse a un

sistema de ecuaciones algebraico en el que el número de ecuaciones y de incógnitas coincide. En la sección 5.3.2 se han dado los detalles al respecto. Para el cálculo del  $TL$  se asume que sobre el silenciador incide una onda plana, y por tanto se tiene  $A_{0,0}^+ = 1$  y el resto de coeficientes  $A_{m,n}$  son nulos. En el conducto de salida se impone una condición anecoica, lo cual implica que  $F_{m,n} = 0$  para todo valor de  $m$  y  $n$ . De esta manera se tienen  $4(2t_{max} + 1)(s_{max} + 1)$  ecuaciones y  $4(2m_{max} + 1)(n_{max} + 1)$  incógnitas para definir el campo acústico. El truncado de  $t_{max}$  y  $m_{max}$  a un valor  $p$  y  $s_{max}$  y  $n_{max}$  a un valor  $q$  permite obtener la solución buscada. A partir de ésta, puede calcularse el índice de pérdidas de transmisión [117]

$$TL = -20 \log \left( \frac{R_3}{R_1} \left| \sum_{n=0}^q E_{0,n}^+ e^{-jk_{3,0,n}L_3} \right| \right) \quad (5.104)$$

En base a la referencia [114], basta con utilizar  $L_3 > 3R_3$  para garantizar un decaimiento adecuado de los modos de alto orden asociados a la contracción, de manera que éstos tengan un efecto despreciable en la atenuación.

Para llevar a cabo la validación del planteamiento previo y estudiar el efecto de la posición relativa de los conductos de entrada y salida, se han considerado las geometrías mostradas en la tabla 5.4.

<i>Geometría</i>	$R_1$ (m)	$R_2$ (m)	$R_3$ (m)	$L_2$ (m)	$\delta_1$ (m)	$\delta_3$ (m)	$\theta_0$
1	0.02	0.091875	0.02	0.3	0.045	0.045	$\pi$
2	0.02	0.091875	0.02	0.3	0.045	0.045	$\pi/2$
3	0.02	0.091875	0.02	0.3	0.0	0.0	0.0
4	0.02	0.091875	0.02	0.3	0.0	0.057661	0.0

TABLA 5.4: *Dimensiones básicas de silenciadores de cámara de expansión simple.*

El índice de pérdidas de transmisión de la geometría 1, obtenido mediante ajuste modal y elementos finitos, se muestra en la figura 5.10. Se comprueba que ambas técnicas de modelado dan lugar a una atenuación acústica prácticamente idéntica en todo el rango de frecuencias de interés. Cabe indicar que para la solución obtenida mediante elementos finitos se ha utilizado un mallado de elementos tetraédricos cuadráticos con un tamaño de 0.0075 m en los tubos de entrada y salida y de 0.015 m en la cámara. Para la solución analítica se han tomado los valores  $p = q = 5$ .

La figura 5.11 muestra el efecto de la posición de los conductos de entrada y salida en la atenuación acústica. Se puede observar que la peor atenuación corresponde a la geometría 1, con los tubos de entrada y salida descentrados a 180 grados, debido a la propagación del modo asimétrico (1,0) a 1084 Hz. Esta situación se corrige ubicando el tubo de salida a 90 grados del tubo de entrada, de manera que ahora el conducto de salida cae sobre la línea nodal del modo (1,0), y por tanto la atenuación mejora hasta que se inicia la propagación del modo (2,0) a 1796 Hz. Para obtener una atenuación

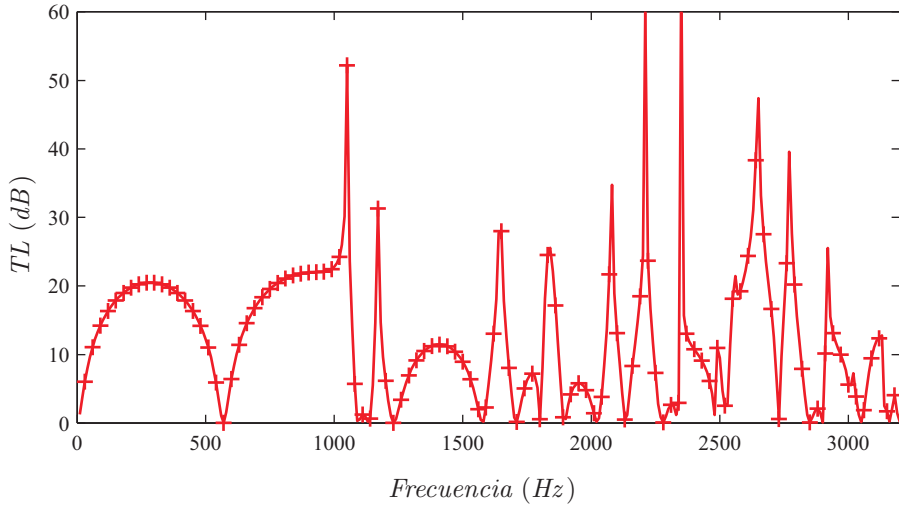


FIGURA 5.10:  $TL$  de cámara de expansión simple, geometría 1:  
 —, AM; +, MEF.

más favorable puede optarse por centrar los tubos de entrada y salida, caso que corresponde a la geometría 3. Así, el primer modo de alto orden que se propaga es el modo axisimétrico  $(0,1)$ , cuya frecuencia de corte es igual a 2256 Hz. Manteniendo el tubo de entrada centrado y el de salida descentrado con la distancia óptima, esto es, la línea nodal del modo  $(0,1)$ , a una distancia del centro dada por  $0.6276R_2$ , se puede observar cómo mejora la atenuación acústica [124].

## II. Cámara reversa

Se procede en esta sección a presentar el modelado mediante la técnica de ajuste modal de silenciadores de cámara reversa, en los que los conductos de entrada y salida están ubicados en el mismo lado del silenciador. Esta configuración se ha considerado mediante el modelo de onda plana en la sección 2.10.2, así como en la sección 3.5.2 dedicada al método de elementos finitos.

La figura 5.12 muestra una cámara reversa de sección transversal circular. A efectos de modelado se comprueba que los elementos fundamentales son similares a los considerados en el caso de la cámara de expansión simple con la salvedad de que el conducto de salida se encuentra en el mismo lado que el de entrada.

La presión acústica puede expresarse, para una onda progresiva cualquiera  $C$  que viaja en la dirección positiva de  $z$  en la cámara central, a partir de la ecuación (5.29), como

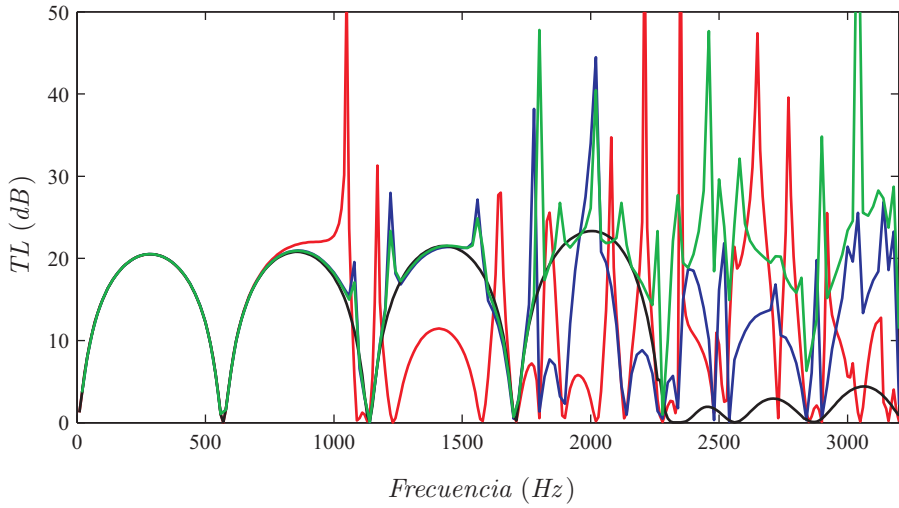


FIGURA 5.11:  $TL$  de cámaras de expansión simple: —, geometría 1; —, geometría 2; —, geometría 3; —, geometría 4.

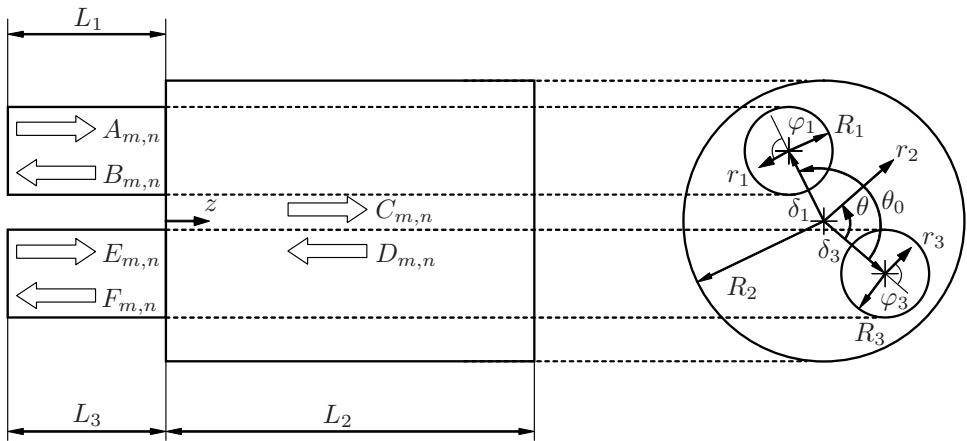


FIGURA 5.12: Silenciador de cámara reversa.

$$\begin{aligned}
 P_C(r_2, \theta, z) = & C_{0,0} e^{-jk_0 z} + \sum_{n=1}^{\infty} C_{0,n} J_0 \left( \frac{\alpha_{0,n}}{R_2} r_2 \right) e^{jk_{2,0,n} z} \\
 & + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (C_{m,n}^+ e^{-jm\theta} + C_{m,n}^- e^{jm\theta}) J_m \left( \frac{\alpha_{m,n}}{R_2} r_2 \right) e^{jk_{2,m,n} z}
 \end{aligned} \quad (5.105)$$

y para una onda  $D$  que viaja en la dirección negativa de  $z$  como



$$\begin{aligned}
P_D(r_2, \theta, z) = & D_{0,0} e^{jk_0 z} + \sum_{n=1}^{\infty} D_{0,n} J_0 \left( \frac{\alpha_{0,n}}{R_2} r_2 \right) e^{-jk_{2,0,n} z} \\
& + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (D_{m,n}^+ e^{-jm\theta} + D_{m,n}^- e^{jm\theta}) J_m \left( \frac{\alpha_{m,n}}{R_2} r_2 \right) e^{-jk_{2,m,n} z}
\end{aligned} \tag{5.106}$$

Se han separado las ondas planas de los modos de alto orden, y éstos a su vez se separan en modos axisimétricos y asimétricos. El motivo es mostrar las diferentes variantes del método y detallar al máximo las ecuaciones que se van a obtener mediante la técnica de ajuste modal. Además, los modos de alto orden aparecen con el signo cambiado en su número de onda axial con el fin de que la expresión

$$k_{z,m,n} = \sqrt{k_0^2 - \left( \frac{\alpha_{m,n}}{R_2} \right)^2} \tag{5.107}$$

garantice la atenuación exponencial de los modos evanescentes al aumentar  $z$  sin necesidad de utilizar la definición doble del número de onda mostrada en la expresión (5.83). Si se utiliza la doble definición, la formulación es más compacta pero las ecuaciones obtenidas no proporcionan tanta información.

La velocidad acústica axial  $U$  para las ondas  $C$  y  $D$  se obtiene de la ecuación de Euler (2.47), como

$$\begin{aligned}
U_C(r_2, \theta, z) = & \frac{1}{\rho_0 \omega} \left( k_0 C_{0,0} e^{-jk_0 z} - \sum_{n=1}^{\infty} k_{2,0,n} C_{0,n} J_0 \left( \frac{\alpha_{0,n}}{R_2} r_2 \right) e^{jk_{2,0,n} z} \right. \\
& \left. - \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} k_{2,m,n} (C_{m,n}^+ e^{-jm\theta} + C_{m,n}^- e^{jm\theta}) J_m \left( \frac{\alpha_{m,n}}{R_2} r_2 \right) e^{jk_{2,m,n} z} \right)
\end{aligned} \tag{5.108}$$

y

$$\begin{aligned}
U_D(r_2, \theta, z) = & \frac{-1}{\rho_0 \omega} \left( k_0 D_{0,0} e^{jk_0 z} - \sum_{n=1}^{\infty} k_{2,0,n} D_{0,n} J_0 \left( \frac{\alpha_{0,n}}{R_2} r_2 \right) e^{-jk_{2,0,n} z} \right. \\
& \left. - \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} k_{2,m,n} (D_{m,n}^+ e^{-jm\theta} + D_{m,n}^- e^{jm\theta}) J_m \left( \frac{\alpha_{m,n}}{R_2} r_2 \right) e^{-jk_{2,m,n} z} \right)
\end{aligned} \tag{5.109}$$

Para la aplicación de la técnica de ajuste modal, es necesario plantear inicialmente las condiciones de contorno a satisfacer por el campo acústico. En este caso, dado que no hay conducto alguno en la sección de la derecha, la condición de pared rígida implica que la velocidad acústica normal ha de ser nula, esto es

$$(U_C(r_2, \theta, z) + U_D(r_2, \theta, z))|_{z=L_2} = 0 \quad \text{en } S_2 \quad (5.110)$$

En el lado izquierdo de la cámara deben satisfacerse las condiciones de continuidad de presión

$$(P_A(r_1, \varphi_1, z) + P_B(r_1, \varphi_1, z))|_{z=0} = (P_C(r_2, \theta, z) + P_D(r_2, \theta, z))|_{z=0} \quad \text{en } S_1 \quad (5.111)$$

$$(P_E(r_3, \varphi_3, z) + P_F(r_3, \varphi_3, z))|_{z=0} = (P_C(r_2, \theta, z) + P_D(r_2, \theta, z))|_{z=0} \quad \text{en } S_3 \quad (5.112)$$

De igual forma, para la velocidad se tiene

$$(U_A(r_1, \varphi_1, z) + U_B(r_1, \varphi_1, z))|_{z=0} = (U_C(r_2, \theta, z) + U_D(r_2, \theta, z))|_{z=0} \quad \text{en } S_1 \quad (5.113)$$

$$(U_E(r_3, \varphi_3, z) + U_F(r_3, \varphi_3, z))|_{z=0} = (U_C(r_2, \theta, z) + U_D(r_2, \theta, z))|_{z=0} \quad \text{en } S_3 \quad (5.114)$$

$$(U_C(r_2, \theta, z) + U_D(r_2, \theta, z))|_{z=0} = 0 \quad \text{en } S_2 - S_1 - S_3 \quad (5.115)$$

donde  $S_1$ ,  $S_2$  y  $S_3$  son las áreas de la sección transversal en el tubo de entrada, la cámara y el tubo de salida respectivamente.

Teniendo en cuenta la propiedad de ortogonalidad para los modos de presión en la cámara [44, 109, 119], la condición de velocidad nula en la sección derecha del silenciador expresada mediante la ecuación (5.110) permite obtener de manera inmediata la relación entre los coeficientes de propagación asociados a las ondas progresivas y regresivas en la cámara, que puede expresarse como

$$D_{0,0} = C_{0,0} e^{-j2k_0 L_2} \quad (5.116)$$

para el modo de propagación plano, y

$$D_{t,s}^+ = C_{t,s}^+ e^{j2k_{2,t,s} L_2}, \quad D_{t,s}^- = C_{t,s}^- e^{j2k_{2,t,s} L_2} \quad (5.117)$$

para los modos de alto orden, con  $t = 0, 1, 2, 3, \dots, \infty$  y  $s = 0, 1, 2, 3, \dots, \infty$ , excluyendo el término para el que  $t = s = 0$ .

El procedimiento a utilizar a continuación sigue los pasos definidos anteriormente para la cámara de expansión simple. Obviamente, los aspectos relacionados con la evaluación de las integrales son similares, de manera que la información antes detallada se utiliza de nuevo para la cámara reversa.

#### Ajuste modal del campo de presiones

Para la condición de presión expresada por la ecuación (5.111), multiplicando ambos lados de la ecuación por  $J_t(\alpha_{t,s} r_1 / R_1) e^{jt\varphi_1} dS$  e integrando en  $S_1$ , se obtiene para  $t = 0$  y  $s = 0$

$$\begin{aligned}
(A_{0,0} + B_{0,0}) \frac{R_1^2}{2} &= C_{0,0} (1 + e^{-jk_0 L_2}) \frac{R_1^2}{2} \\
&+ \sum_{n=1}^{\infty} C_{0,n} (1 + e^{j2k_{2,0,n} L_2}) \frac{R_2 R_1}{\alpha_{0,n}} J_0(\alpha_{0,n} \delta_1 / R_2) J_1(\alpha_{0,n} R_1 / R_2) \\
&+ \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (C_{m,n}^+ e^{-jm\theta_0} + C_{m,n}^- e^{jm\theta_0}) (1 + e^{j2k_{2,m,n} L_2}) \\
&\quad \cdot \frac{R_2 R_1}{\alpha_{m,n}} J_m(\alpha_{m,n} \delta_1 / R_2) J_1(\alpha_{m,n} R_1 / R_2)
\end{aligned} \tag{5.118}$$

Para  $t = 0$  y  $s = 1, 2, 3, \dots, \infty$

$$\begin{aligned}
(A_{0,s} + B_{0,s}) \frac{R_1^2}{2} J_0(\alpha_{0,s}) \\
= \sum_{n=1}^{\infty} C_{0,n} (1 + e^{j2k_{2,0,n} L_2}) J_0(\alpha_{0,n} \delta_1 / R_2) \frac{\alpha_{0,n} R_1 / R_2 J'_0(\alpha_{0,n} R_1 / R_2)}{(\alpha_{0,s} / R_1)^2 - (\alpha_{0,n} / R_2)^2} \\
+ \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (C_{m,n}^+ e^{-jm\theta_0} + C_{m,n}^- e^{jm\theta_0}) (1 + e^{j2k_{2,m,n} L_2}) \\
\quad \cdot J_m(\alpha_{m,n} \delta_1 / R_2) \frac{\alpha_{m,n} R_1 / R_2 J'_0(\alpha_{m,n} R_1 / R_2)}{(\alpha_{0,s} / R_1)^2 - (\alpha_{m,n} / R_2)^2}
\end{aligned} \tag{5.119}$$

y para  $t = 1, 2, 3, \dots, \infty$  y  $s = 0, 1, 2, 3, \dots, \infty$ , queda

$$\begin{aligned}
(A_{t,s}^+ + B_{t,s}^+) \frac{R_1^2}{2} \left(1 - \frac{t^2}{\alpha_{t,s}^2}\right) J_t(\alpha_{t,s}) \\
= \sum_{n=1}^{\infty} C_{0,n} (1 + e^{j2k_{2,0,n} L_2}) J_t(\alpha_{0,n} \delta_1 / R_2) \frac{\alpha_{0,n} R_1 / R_2 J'_t(\alpha_{0,n} R_1 / R_2)}{(\alpha_{t,s} / R_1)^2 - (\alpha_{0,n} / R_2)^2} \\
+ \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \left( C_{m,n}^+ J_{m+t}(\alpha_{m,n} \delta_1 / R_2) e^{-jm\theta_0} + C_{m,n}^- (-1)^t J_{m-t}(\alpha_{m,n} \delta_1 / R_2) e^{jm\theta_0} \right) \\
\quad \cdot (1 + e^{j2k_{2,m,n} L_2}) \frac{\alpha_{m,n} R_1 / R_2 J'_t(\alpha_{m,n} R_1 / R_2)}{(\alpha_{t,s} / R_1)^2 - (\alpha_{m,n} / R_2)^2}
\end{aligned} \tag{5.120}$$

Considerando de nuevo la condición de presión dada por la ecuación (5.111), multiplicando ambos lados de la ecuación por  $J_t(\alpha_{t,s} r_1 / R_1) e^{-jt\varphi_1} dS$  e integrando en  $S_1$ , se obtiene para  $t = 1, 2, 3, \dots, \infty$  y  $s = 0, 1, 2, 3, \dots, \infty$

$$\begin{aligned}
& (A_{t,s}^- + B_{t,s}^-) \frac{R_1^2}{2} \left(1 - \frac{t^2}{\alpha_{t,s}^2}\right) J_t(\alpha_{t,s}) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} C_{0,n} (1 + e^{j2k_2,0,n} L_2) J_t(\alpha_{0,n} \delta_1 / R_2) \frac{\alpha_{0,n} R_1 / R_2 J'_t(\alpha_{0,n} R_1 / R_2)}{(\alpha_{t,s} / R_1)^2 - (\alpha_{0,n} / R_2)^2} \\
&+ \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \left( C_{m,n}^+ (-1)^t J_{m-t}(\alpha_{m,n} \delta_1 / R_2) e^{-jm\theta_0} + C_{m,n}^- J_{m+t}(\alpha_{m,n} \delta_1 / R_2) e^{jm\theta_0} \right) \\
&\quad \cdot (1 + e^{j2k_2,m,n} L_2) \frac{\alpha_{m,n} R_1 / R_2 J'_t(\alpha_{m,n} R_1 / R_2)}{(\alpha_{t,s} / R_1)^2 - (\alpha_{m,n} / R_2)^2}
\end{aligned} \tag{5.121}$$

Procediendo de manera idéntica al caso anterior, se multiplica ahora la ecuación (5.112) de continuidad de presión en la contracción por el modo de presión del conducto de salida  $J_t(\alpha_{t,s} r_3 / R_3) e^{jt\varphi_3}$  y se integra en  $S_3$ , obteniéndose para  $t = 0$  y  $s = 0$

$$\begin{aligned}
(E_{0,0} + F_{0,0}) \frac{R_3^2}{2} &= C_{0,0} (1 + e^{-j2k_0 L_2}) \frac{R_3^2}{2} \\
&+ \sum_{n=1}^{\infty} C_{0,n} (1 + e^{j2k_2,0,n} L_2) \frac{R_2 R_3}{\alpha_{0,n}} J_0(\alpha_{0,n} \delta_3 / R_2) J_1(\alpha_{0,n} R_3 / R_2) \\
&+ \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (C_{m,n}^+ + C_{m,n}^-) (1 + e^{j2k_2,m,n} L_2) \\
&\quad \cdot \frac{R_2 R_3}{\alpha_{m,n}} J_m(\alpha_{m,n} \delta_3 / R_2) J_1(\alpha_{m,n} R_3 / R_2)
\end{aligned} \tag{5.122}$$

Para  $t = 0$  y  $s = 1, 2, 3, \dots, \infty$ , resulta

$$\begin{aligned}
(E_{0,s} + F_{0,s}) \frac{R_3^2}{2} &J_0(\alpha_{0,s}) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} C_{0,n} (1 + e^{j2k_2,0,n} L_2) J_0(\alpha_{0,n} \delta_3 / R_2) \frac{\alpha_{0,n} R_3 / R_2 J'_0(\alpha_{0,n} R_3 / R_2)}{(\alpha_{0,s} / R_3)^2 - (\alpha_{0,n} / R_2)^2} \\
&+ \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (C_{m,n}^+ + C_{m,n}^-) (1 + e^{j2k_2,m,n} L_2) \\
&\quad \cdot J_m(\alpha_{m,n} \delta_3 / R_2) \frac{\alpha_{m,n} R_3 / R_2 J'_0(\alpha_{m,n} R_3 / R_2)}{(\alpha_{0,s} / R_3)^2 - (\alpha_{m,n} / R_2)^2}
\end{aligned} \tag{5.123}$$

y para  $t = 1, 2, 3, \dots, \infty$  y  $s = 0, 1, 2, 3, \dots, \infty$ , queda

$$\begin{aligned}
& (E_{t,s}^+ + F_{t,s}^+) \frac{R_3^2}{2} \left(1 - \frac{t^2}{\alpha_{t,s}^2}\right) J_t(\alpha_{t,s}) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} C_{0,n} (1 + e^{j2k_{2,0,n}L_2}) J_t(\alpha_{0,n}\delta_3/R_2) \frac{\alpha_{0,n}R_3/R_2 J'_t(\alpha_{0,n}R_3/R_2)}{(\alpha_{t,s}/R_3)^2 - (\alpha_{0,n}/R_2)^2} \\
&+ \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \left( C_{m,n}^+ J_{m+t}(\alpha_{m,n}\delta_3/R_2) + C_{m,n}^- (-1)^t J_{m-t}(\alpha_{m,n}\delta_3/R_2) \right) \\
&\quad \cdot (1 + e^{j2k_{2,m,n}L_2}) \frac{\alpha_{m,n}R_3/R_2 J'_t(\alpha_{m,n}R_3/R_2)}{(\alpha_{t,s}/R_3)^2 - (\alpha_{m,n}/R_2)^2}
\end{aligned} \tag{5.124}$$

Ahora se multiplica la ecuación (5.112) por  $J_t(\alpha_{t,s}r_3/R_3) e^{-j^t\varphi_3} dS$  y se integra en  $S_3$ , dando para  $t = 1, 2, 3, \dots, \infty$  y  $s = 0, 1, 2, 3, \dots, \infty$

$$\begin{aligned}
& (E_{t,s}^- + F_{t,s}^-) \frac{R_3^2}{2} \left(1 - \frac{t^2}{\alpha_{t,s}^2}\right) J_t(\alpha_{t,s}) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} C_{0,n} (1 + e^{j2k_{2,0,n}L_2}) J_t(\alpha_{0,n}\delta_3/R_2) \frac{\alpha_{0,n}R_3/R_2 J'_t(\alpha_{0,n}R_3/R_2)}{(\alpha_{t,s}/R_3)^2 - (\alpha_{0,n}/R_2)^2} \\
&+ \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \left( C_{m,n}^+ (-1)^t J_{m-t}(\alpha_{m,n}\delta_3/R_2) + C_{m,n}^- J_{m+t}(\alpha_{m,n}\delta_3/R_2) \right) \\
&\quad \cdot (1 + e^{j2k_{2,m,n}L_2}) \frac{\alpha_{m,n}R_3/R_2 J'_t(\alpha_{m,n}R_3/R_2)}{(\alpha_{t,s}/R_3)^2 - (\alpha_{m,n}/R_2)^2}
\end{aligned} \tag{5.125}$$

### Ajuste modal del campo de velocidades

Deben considerarse ahora las ecuaciones de velocidad (5.113)-(5.115). Éstas se multiplican por el modo de presión de la cámara  $J_t(\alpha_{t,s}r_2/R_2) e^{jt\theta}$ , la primera ecuación se integra en  $S_1$ , la segunda en  $S_3$  y la tercera en  $S_2 - S_1 - S_3$ . Finalmente se suman las tres integrales dando para  $t = 0$  y  $s = 0$

$$(A_{0,0} - B_{0,0}) R_1^2 + (E_{0,0} - F_{0,0}) R_3^2 = C_{0,0} (1 - e^{-j2k_0L_2}) R_2^2 \tag{5.126}$$

que no es más que la ecuación de continuidad de flujo volumétrico asociada a un modelo de onda plana.

Para  $t = 0$  y  $s = 1, 2, 3, \dots, \infty$ , se tiene

$$\begin{aligned}
& k_0 (A_{0,0} - B_{0,0}) \frac{R_2 R_1}{\alpha_{0,s}} J_0 (\alpha_{0,s} \delta_1 / R_2) J_1 (\alpha_{0,s} R_1 / R_2) \\
& - \sum_{n=1}^{\infty} k_{1,0,n} (A_{0,n} - B_{0,n}) J_0 (\alpha_{0,s} \delta_1 / R_2) \mathfrak{R}_1 \\
& - \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} k_{1,m,n} ((A_{m,n}^+ - B_{m,n}^+) + (A_{m,n}^- - B_{m,n}^-)) J_m (\alpha_{0,s} \delta_1 / R_2) \mathfrak{R}_2 \\
& + k_0 (E_{0,0} - F_{0,0}) \frac{R_2 R_3}{\alpha_{0,s}} J_0 (\alpha_{0,s} \delta_3 / R_2) J_1 (\alpha_{0,s} R_3 / R_2) \\
& - \sum_{n=1}^{\infty} k_{3,0,n} (E_{0,n} - F_{0,n}) J_0 (\alpha_{0,s} \delta_3 / R_2) \mathfrak{R}_3 \\
& - \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} k_{3,m,n} ((E_{m,n}^+ - F_{m,n}^+) + (E_{m,n}^- - F_{m,n}^-)) J_m (\alpha_{0,s} \delta_3 / R_2) \mathfrak{R}_4 \\
& = -k_{2,0,s} C_{0,s} (1 - e^{j2k_{2,0,s} L_2}) \frac{R_2^2}{2} J_0^2 (\alpha_{0,s})
\end{aligned} \tag{5.127}$$

donde

$$\mathfrak{R}_1 = \frac{\alpha_{0,s} \frac{R_1}{R_2} J_0 (\alpha_{0,n}) J_0' \left( \frac{\alpha_{0,s}}{R_2} R_1 \right)}{\left( \frac{\alpha_{0,n}}{R_1} \right)^2 - \left( \frac{\alpha_{0,s}}{R_2} \right)^2} \tag{5.128}$$

$$\mathfrak{R}_2 = \frac{\alpha_{0,s} \frac{R_1}{R_2} J_m (\alpha_{m,n}) J_m' \left( \frac{\alpha_{0,s}}{R_2} R_1 \right)}{\left( \frac{\alpha_{m,n}}{R_1} \right)^2 - \left( \frac{\alpha_{0,s}}{R_2} \right)^2} \tag{5.129}$$

$$\mathfrak{R}_3 = \frac{\alpha_{0,s} \frac{R_3}{R_2} J_0 (\alpha_{0,n}) J_0' \left( \frac{\alpha_{0,s}}{R_2} R_3 \right)}{\left( \frac{\alpha_{0,n}}{R_3} \right)^2 - \left( \frac{\alpha_{0,s}}{R_2} \right)^2} \tag{5.130}$$

$$\mathfrak{R}_4 = \frac{\alpha_{0,s} \frac{R_3}{R_2} J_m (\alpha_{m,n}) J_m' \left( \frac{\alpha_{0,s}}{R_2} R_3 \right)}{\left( \frac{\alpha_{m,n}}{R_3} \right)^2 - \left( \frac{\alpha_{0,s}}{R_2} \right)^2} \tag{5.131}$$

y para  $t = 1, 2, 3, \dots, \infty$  y  $s = 0, 1, 2, 3, \dots, \infty$ , queda

$$\begin{aligned}
& \left( k_0 (A_{0,0} - B_{0,0}) \frac{R_2 R_1}{\alpha_{t,s}} J_t (\alpha_{t,s} \delta_1 / R_2) J_1 (\alpha_{t,s} R_1 / R_2) \right. \\
& - \sum_{n=1}^{\infty} k_{1,0,n} (A_{0,n} - B_{0,n}) J_t (\alpha_{t,s} \delta_1 / R_2) \mathfrak{R}_5 \\
& - \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} k_{1,m,n} ((A_{m,n}^+ - B_{m,n}^+) J_{t+m} (\alpha_{t,s} \delta_1 / R_2)) \mathfrak{R}_6 \\
& \left. - \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} k_{1,m,n} ((A_{m,n}^- - B_{m,n}^-) (-1)^m J_{t-m} (\alpha_{t,s} \delta_1 / R_2)) \mathfrak{R}_6 \right) e^{jt\theta_0} \\
& + k_0 (E_{0,0} - F_{0,0}) \frac{R_2 R_3}{\alpha_{t,s}} J_t (\alpha_{t,s} \delta_3 / R_2) J_1 (\alpha_{t,s} R_3 / R_2) \\
& - \sum_{n=1}^{\infty} k_{3,0,n} (E_{0,n} - F_{0,n}) J_t (\alpha_{t,s} \delta_3 / R_2) \mathfrak{R}_7 \\
& - \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} k_{3,m,n} ((E_{m,n}^+ - F_{m,n}^+) J_{t+m} (\alpha_{t,s} \delta_3 / R_2)) \mathfrak{R}_8 \\
& - \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} k_{3,m,n} ((E_{m,n}^- - F_{m,n}^-) (-1)^m J_{t-m} (\alpha_{t,s} \delta_3 / R_2)) \mathfrak{R}_8 \\
& = -k_{2,t,s} C_{t,s}^+ \left( 1 - e^{j2k_{2,t,s} L_2} \right) \frac{R_2^2}{2} \left( 1 - \frac{t^2}{\alpha_{t,s}^2} \right) J_t^2 (\alpha_{t,s})
\end{aligned} \tag{5.132}$$

con

$$\mathfrak{R}_5 = \frac{\alpha_{t,s} \frac{R_1}{R_2} J_0 (\alpha_{0,n}) J_0' \left( \frac{\alpha_{t,s}}{R_2} R_1 \right)}{\left( \frac{\alpha_{0,n}}{R_1} \right)^2 - \left( \frac{\alpha_{t,s}}{R_2} \right)^2}, \quad \mathfrak{R}_6 = \frac{\alpha_{t,s} \frac{R_1}{R_2} J_m (\alpha_{m,n}) J_m' \left( \frac{\alpha_{t,s}}{R_2} R_1 \right)}{\left( \frac{\alpha_{m,n}}{R_1} \right)^2 - \left( \frac{\alpha_{t,s}}{R_2} \right)^2} \tag{5.133}$$

$$\mathfrak{R}_7 = \frac{\alpha_{t,s} \frac{R_3}{R_2} J_0 (\alpha_{0,n}) J_0' \left( \frac{\alpha_{t,s}}{R_2} R_3 \right)}{\left( \frac{\alpha_{0,n}}{R_1} \right)^2 - \left( \frac{\alpha_{t,s}}{R_2} \right)^2}, \quad \mathfrak{R}_8 = \frac{\alpha_{t,s} \frac{R_3}{R_2} J_m (\alpha_{m,n}) J_m' \left( \frac{\alpha_{t,s}}{R_2} R_3 \right)}{\left( \frac{\alpha_{m,n}}{R_3} \right)^2 - \left( \frac{\alpha_{t,s}}{R_2} \right)^2} \tag{5.134}$$

Para las condiciones de velocidad dadas por las ecuaciones (5.113)-(5.115), multiplicando ambos lados de las ecuaciones por  $J_t (\alpha_{t,s} r_2 / R_2) e^{-jt\theta} dS$ , integrando la ecuación (5.113) en  $S_1$ , la ecuación (5.114) en  $S_3$  y la ecuación (5.115) en  $S_2 - S_1 - S_3$ , y sumando las tres se obtiene para  $t = 1, 2, 3, \dots, \infty$  y  $s = 0, 1, 2, 3, \dots, \infty$

$$\begin{aligned}
& \left( k_0 (A_{0,0} - B_{0,0}) \frac{R_2 R_1}{\alpha_{t,s}} J_t (\alpha_{t,s} \delta_1 / R_2) J_1 (\alpha_{t,s} R_1 / R_2) \right. \\
& - \sum_{n=1}^{\infty} k_{1,0,n} (A_{0,n} - B_{0,n}) J_t (\alpha_{t,s} \delta_1 / R_2) \Re_5 \\
& - \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} k_{1,m,n} ((A_{m,n}^+ - B_{m,n}^+) (-1)^m J_{t-m} (\alpha_{t,s} \delta_1 / R_2)) \Re_6 \\
& \left. - \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} k_{1,m,n} ((A_{m,n}^- - B_{m,n}^-) J_{t+m} (\alpha_{t,s} \delta_1 / R_2)) \Re_6 \right) e^{-jt\theta_0} \\
& + k_0 (E_{0,0} - F_{0,0}) \frac{R_2 R_3}{\alpha_{t,s}} J_t (\alpha_{t,s} \delta_3 / R_2) J_1 (\alpha_{t,s} R_3 / R_2) \\
& - \sum_{n=1}^{\infty} k_{3,0,n} (E_{0,n} - F_{0,n}) J_t (\alpha_{t,s} \delta_3 / R_2) \Re_7 \\
& - \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} k_{3,m,n} ((E_{m,n}^+ - F_{m,n}^+) (-1)^m J_{t-m} (\alpha_{t,s} \delta_3 / R_2)) \Re_8 \\
& - \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} k_{3,m,n} ((E_{m,n}^- - F_{m,n}^-) J_{t+m} (\alpha_{t,s} \delta_3 / R_2)) \Re_8 \\
& = -k_{2,t,s} C_{t,s}^- (1 - e^{j2k_{2,t,s} L_2}) \frac{R_2^2}{2} \left( 1 - \frac{t^2}{\alpha_{t,s}^2} \right) J_t^2 (\alpha_{t,s})
\end{aligned} \tag{5.135}$$

En todas las ecuaciones previas los números de onda axiales vienen dados por

$$k_{1,m,n} = \sqrt{k_0^2 - \left( \frac{\alpha_{m,n}}{R_1} \right)^2} \tag{5.136}$$

$$k_{2,m,n} = \sqrt{k_0^2 - \left( \frac{\alpha_{m,n}}{R_2} \right)^2} \tag{5.137}$$

$$k_{3,m,n} = \sqrt{k_0^2 - \left( \frac{\alpha_{m,n}}{R_3} \right)^2} \tag{5.138}$$

### Validación

La validación del modelo desarrollado mediante ajuste modal para el silenciador de cámara reversa se lleva a cabo mediante la comparación con resultados obtenidos mediante elementos finitos. La evaluación del comportamiento acústico se lleva a cabo de manera similar al caso de la cámara de expansión simple. Se asume que al silenciador llega una excitación dada por una onda plana incidente  $A_{m,n}$  de valor unidad, y en la salida la condición de contorno es una impedancia anecoica, de manera



que ahora se verifica que  $E_{m,n} = 0$  para todo valor de  $m$  y  $n$ . El sistema de infinitas ecuaciones (5.118)-(5.125), (5.126)-(5.127), (5.132) y (5.135) se trunca para obtener un problema con un número finito de incógnitas. Dados los valores de  $t_{max} = m_{max} = p$  y  $s_{max} = n_{max} = q$  se tiene  $3(2p+1)(q+1)$  ecuaciones e incógnitas, que en concreto son  $B_{m,n}$ ,  $C_{m,n}$  y  $F_{m,n}$ . Tras su evaluación se obtiene el  $TL$ , dado por

$$TL = -20 \log \left( \frac{R_3}{R_1} \left| F_{0,0} e^{jk_0(-L_3)} + \sum_{n=1}^q F_{0,n} e^{-jk_{3,0,n}(-L_3)} \right| \right) \quad (5.139)$$

Si se considera que  $p = 0$  y  $q = 0$  en la ecuaciones (5.118), (5.122) y (5.126), se obtiene, con  $R_1 = R_3$ ,

$$TL = 10 \log \left( 1 + \frac{1}{4} \left( \frac{S_2}{S_1} \right)^2 \tan^2(k_0 L_2) \right) \quad (5.140)$$

que es obviamente la fórmula del  $TL$  de una cámara reversa para onda plana dada por la expresión (2.280).

La tabla 5.5 muestra las características de las geometrías utilizadas para llevar a cabo la validación y para estudiar el efecto de la posición de los conductos de entrada y salida.

Geometría	$R_1$ (m)	$R_2$ (m)	$R_3$ (m)	$L_2$ (m)	$\delta_1$ (m)	$\delta_3$ (m)	$\theta_0$
1	0.02	0.091875	0.02	0.3	0.045	0.045	$\pi$
2	0.02	0.091875	0.02	0.3	0.045	0.045	$\pi/2$
3	0.02	0.091875	0.02	0.3	0.0	0.045	0.0
4	0.02	0.091875	0.02	0.3	0.0	0.057661	0.0
5	0.02	0.091875	0.02	0.05	0.045	0.045	$\pi$
6	0.02	0.091875	0.02	0.05	0.045	0.045	$\pi/2$
7	0.02	0.091875	0.02	0.05	0.0	0.045	0.0
8	0.02	0.091875	0.02	0.05	0.0	0.057661	0.0

TABLA 5.5: Dimensiones básicas de silenciadores de cámara reversa.

Las figuras mostradas a continuación presentan los resultados obtenidos para las geometrías de la tabla anterior. El índice de pérdidas de transmisión de las geometrías 1 y 5, obtenido mediante ajuste modal y elementos finitos, se muestra en la figura 5.13. Se comprueba que ambas técnicas dan lugar a una atenuación acústica idéntica en todo el rango de frecuencias de interés. Las mallas de elementos finitos utilizadas para la validación están formadas por elementos tetraédricos cuadráticos cuyo tamaño varía entre 0.0075 m en los conductos de entrada y salida y 0.015 m en la cámara. Para el modelado analítico se consideran los valores  $p = q = 5$ .

La figura 5.14 presenta una comparación de las geometrías 1, 2, 3 y 4. Se trata de una cámara reversa larga, con vistas a analizar en este caso el efecto de la posición de

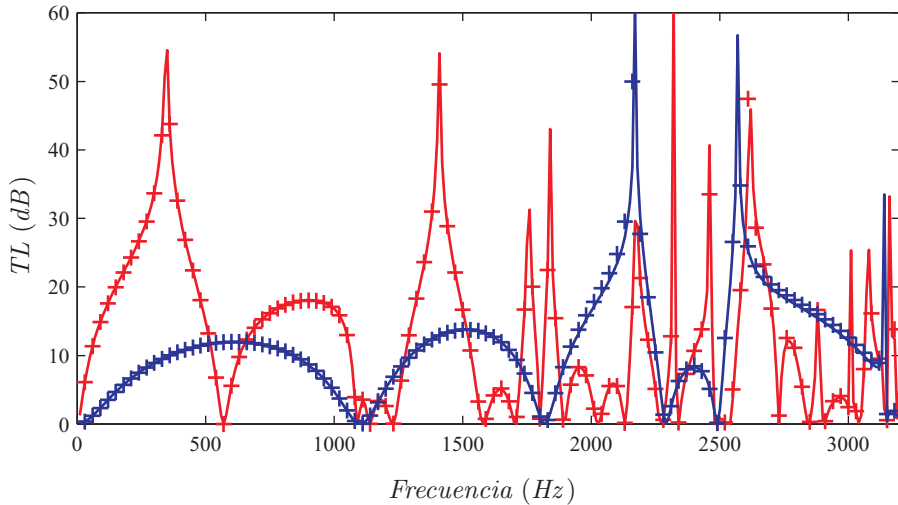


FIGURA 5.13:  $TL$  de cámaras reversas: —, geometría 1, AM; +, ídem, MEF; —, geometría 5, AM; +, ídem, MEF.

conductos. Se observa el comportamiento típico de cámaras reversas de cierta longitud [118], con resonancias de cuarto de onda claras hasta la propagación de modos de alto orden, momento a partir del cual la evolución del  $TL$  es más irregular y menos adecuada desde el punto de vista de atenuación de ruido. Puede comprobarse que la peor configuración corresponde al caso de ambos conductos descentrados a  $\theta_0 = 180^\circ$  (geometría 1), como consecuencia de la propagación del modo (1,0). Esta situación se resuelve parcialmente modificando el descentrado a  $\theta_0 = 90^\circ$  (geometría 2), con lo cual se retrasa la aparición de modos de alto orden hasta el modo (2,0). Para obtener una atenuación más favorable (zonas de resonancia) en un rango de frecuencia mayor, puede optarse por centrar el tubo de entrada (geometría 3), con lo cual dicho conducto cae sobre la línea nodal de los modos previos y se restringe su propagación. Así, el primer modo de alto orden que se propaga es el modo axisimétrico (0,1), cuya frecuencia de corte es mayor. Manteniendo el conducto de entrada centrado y el de salida descentrado con la distancia óptima (línea nodal del modo (0,1) a una distancia del centro dada por  $0.6276R_2$ ), se puede observar como mejora el  $TL$  [118].

La figura 5.15 muestra la comparación de las geometrías 5, 6, 7 y 8, correspondientes a una cámara corta. Ahora el comportamiento es de tipo cúpula de atenuación debido a la propagación diametral, y de nuevo los comentarios previos son aplicables en el sentido de que la configuración con entrada centrada limita la propagación de modos de alto orden, sobre todo con el descentrado óptimo.

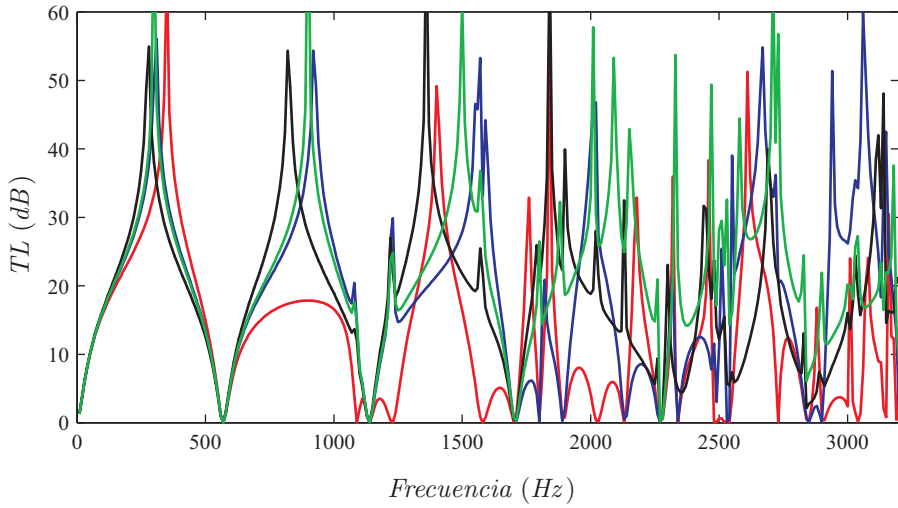


FIGURA 5.14: *TL de cámaras reversas:* —, geometría 1; —, geometría 2; —, geometría 3; —, geometría 4.

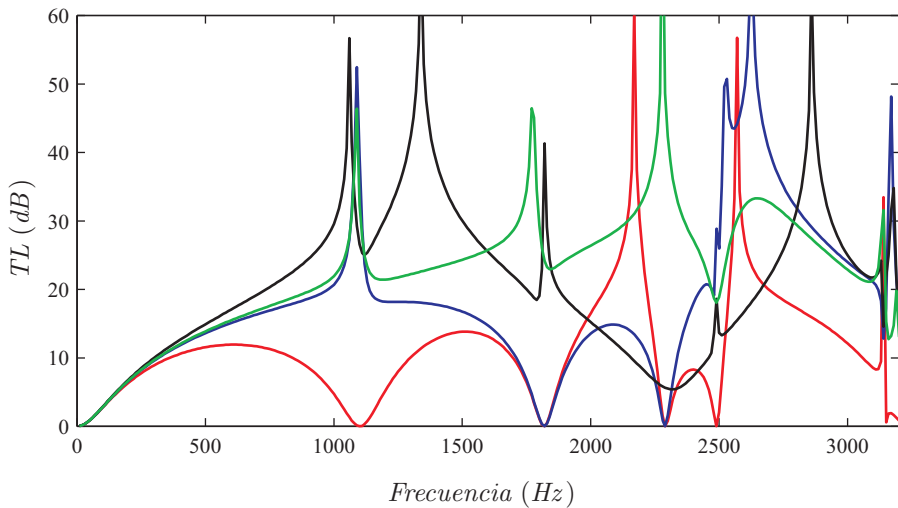


FIGURA 5.15: *TL de cámaras reversas:* —, geometría 5; —, geometría 6; —, geometría 7; —, geometría 8.

### III. Cámara con doble salida opuesta

El comportamiento de esta configuración puede variar desde el asociado a una cámara de expansión simple hasta el de una cámara reversa. La utilización de doble salida permite reducir la pérdida de carga y el ruido asociado al flujo [120]. La figura 5.16 muestra la geometría de un silenciador con dos salidas en lados opuestos, así como

la nomenclatura básica asociada. Si se consideran por separado las regiones 1, 2 y 3, se tiene una cámara reversa. Con los conductos 1, 2 y 4 se dispone de una cámara de expansión simple. Ambas configuraciones son por tanto casos particulares de la geometría analizada en esta sección.

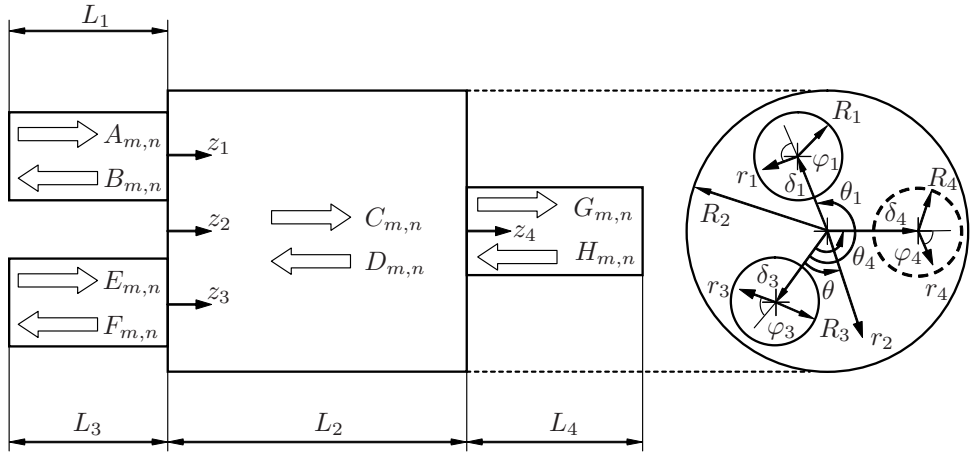


FIGURA 5.16: *Silenciador con doble salida opuesta.*

El tratamiento de este tipo de silenciador utiliza las ecuaciones obtenidas en el modelado de la cámara reversa, añadiendo las ecuaciones necesarias para la consideración de la presencia de la segunda salida. Debe tenerse en cuenta que ahora se tienen dos coeficientes de propagación adicionales al incluir el segundo tubo de salida. De esta manera, las condiciones de contorno a verificar por el campo acústico son las que se muestran a continuación. Se consideran en primer lugar las condiciones que afectan al campo acústico en la zona de la izquierda (expansión de la entrada y contracción de la salida en el mismo lado). Para las presiones, la continuidad asociada da lugar a

$$(P_A(r_1, \varphi_1, z_2) + P_B(r_1, \varphi_1, z_2))|_{z_2=0} = (P_C(r_2, \theta, z_2) + P_D(r_2, \theta, z_2))|_{z_2=0} \text{ en } S_1 \quad (5.141)$$

$$(P_C(r_2, \theta, z_2) + P_D(r_2, \theta, z_2))|_{z_2=0} = (P_E(r_3, \varphi_3, z_2) + P_F(r_3, \varphi_3, z_2))|_{z_2=0} \text{ en } S_3 \quad (5.142)$$

La continuidad de la velocidad acústica axial permite escribir, para la zona de transición entre conductos y cámara central

$$(U_A(r_1, \varphi_1, z_2) + U_B(r_1, \varphi_1, z_2))|_{z_2=0} = (U_C(r_2, \theta, z_2) + U_D(r_2, \theta, z_2))|_{z_2=0} \text{ en } S_1 \quad (5.143)$$

$$(U_E(r_3, \varphi_3, z_2) + U_F(r_3, \varphi_3, z_2))|_{z_2=0} = (U_C(r_2, \theta, z_2) + U_D(r_2, \theta, z_2))|_{z_2=0} \text{ en } S_3 \quad (5.144)$$

En la placa lateral izquierda, la condición de pared rígida se expresa como

$$(U_C(r_2, \theta, z_2) + U_D(r_2, \theta, z_2))|_{z_2=0} = 0 \quad \text{en } S_2 - S_1 - S_3 \quad (5.145)$$

En la zona de contracción (sección asociada al segundo tubo de salida), las condiciones de contorno de presión son

$$(P_C(r_2, \theta, z_2) + P_D(r_2, \theta, z_2))|_{z_2=L_2} = (P_G(r_4, \varphi_4, z_4) + P_H(r_4, \varphi_4, z_4))|_{z_4=0} \quad \text{en } S_4 \quad (5.146)$$

Las condiciones de velocidad se escriben como

$$(U_C(r_2, \theta, z_2) + U_D(r_2, \theta, z_2))|_{z_2=L_2} = (U_G(r_4, \varphi_4, z_4) + U_H(r_4, \varphi_4, z_4))|_{z_4=0} \quad \text{en } S_4 \quad (5.147)$$

$$(U_C(r_2, \theta, z_2) + U_D(r_2, \theta, z_2))|_{z_2=L_2} = 0 \quad \text{en } S_2 - S_4 \quad (5.148)$$

$S_1$ ,  $S_2$ ,  $S_3$  y  $S_4$  son las áreas de la sección transversal en el tubo de entrada, la cámara, el primer tubo de salida y el segundo tubo de salida respectivamente.

#### Ajuste modal de la presión en la entrada

Con el fin de obtener un sistema algebraico de ecuaciones cuyas incógnitas sean los coeficientes de propagación  $A_{m,n}$ ,  $B_{m,n}$ ,  $C_{m,n}$ ,  $D_{m,n}$ ,  $E_{m,n}$ ,  $F_{m,n}$ ,  $G_{m,n}$  y  $H_{m,n}$ , se procede a multiplicar la ecuación (5.141) de continuidad de presión por el modo de presión del conducto de entrada  $J_t(\alpha_{t,s}r_1/R_1)e^{jt\varphi_1}$ , y luego se lleva a cabo la integración en  $S_1$ . Para  $t = 0$  y  $s = 0$  se obtiene

$$\begin{aligned} (A_{0,0} + B_{0,0}) \frac{R_1^2}{2} &= (C_{0,0} + D_{0,0}) \frac{R_1^2}{2} \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} (C_{0,n} + D_{0,n}) \frac{R_2 R_1}{\alpha_{0,n}} J_0(\alpha_{0,n} \delta_1 / R_2) J_1(\alpha_{0,n} R_1 / R_2) \\ &+ \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} ((C_{m,n}^+ + D_{m,n}^+) e^{-jm\theta_1} + (C_{m,n}^- + D_{m,n}^-) e^{jm\theta_1}) \\ &\quad \cdot \frac{R_2 R_1}{\alpha_{m,n}} J_m(\alpha_{m,n} \delta_1 / R_2) J_1(\alpha_{m,n} R_1 / R_2) \end{aligned} \quad (5.149)$$

Para  $t = 0$  y  $s = 1, 2, 3, \dots, \infty$

$$\begin{aligned} (A_{0,s} + B_{0,s}) \frac{R_1^2}{2} J_0(\alpha_{0,s}) \\ = \sum_{n=1}^{\infty} (C_{0,n} + D_{0,n}) J_0(\alpha_{0,n} \delta_1 / R_2) \frac{\alpha_{0,n} R_1 / R_2 J_0'(\alpha_{0,n} R_1 / R_2)}{(\alpha_{0,s} / R_1)^2 - (\alpha_{0,n} / R_2)^2} \\ + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} ((C_{m,n}^+ + D_{m,n}^+) e^{-jm\theta_1} + (C_{m,n}^- + D_{m,n}^-) e^{jm\theta_1}) \\ \quad \cdot J_m(\alpha_{m,n} \delta_1 / R_2) \frac{\alpha_{m,n} R_1 / R_2 J_0'(\alpha_{m,n} R_1 / R_2)}{(\alpha_{0,s} / R_1)^2 - (\alpha_{m,n} / R_2)^2} \end{aligned} \quad (5.150)$$

y para  $t = 1, 2, 3, \dots, \infty$  y  $s = 0, 1, 2, 3, \dots, \infty$ , queda

$$\begin{aligned}
& (A_{t,s}^+ + B_{t,s}^+) \frac{R_1^2}{2} \left(1 - \frac{t^2}{\alpha_{t,s}^2}\right) J_t(\alpha_{t,s}) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} (C_{0,n} + D_{0,n}) J_t(\alpha_{0,n} \delta_1 / R_2) \frac{\alpha_{0,n} R_1 / R_2 J_t'(\alpha_{0,n} R_1 / R_2)}{(\alpha_{t,s} / R_1)^2 - (\alpha_{0,n} / R_2)^2} \\
&+ \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} ((C_{m,n}^+ + D_{m,n}^+) J_{m+t}(\alpha_{m,n} \delta_1 / R_2) e^{-jm\theta_1}) \frac{\alpha_{m,n} R_1 / R_2 J_t'(\alpha_{m,n} R_1 / R_2)}{(\alpha_{t,s} / R_1)^2 - (\alpha_{m,n} / R_2)^2} \\
&+ \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} ((C_{m,n}^- + D_{m,n}^-) (-1)^t J_{m-t}(\alpha_{m,n} \delta_1 / R_2) e^{jm\theta_1}) \frac{\alpha_{m,n} R_1 / R_2 J_t'(\alpha_{m,n} R_1 / R_2)}{(\alpha_{t,s} / R_1)^2 - (\alpha_{m,n} / R_2)^2}
\end{aligned} \tag{5.151}$$

Repetiendo el procedimiento con el modo  $J_t(\alpha_{t,s} r_1 / R_1) e^{-jt\varphi_1}$ , con  $t = 1, 2, 3, \dots, \infty$  y  $s = 0, 1, 2, 3, \dots, \infty$ , se obtiene

$$\begin{aligned}
& (A_{t,s}^- + B_{t,s}^-) \frac{R_1^2}{2} \left(1 - \frac{t^2}{\alpha_{t,s}^2}\right) J_t(\alpha_{t,s}) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} (C_{0,n} + D_{0,n}) J_t(\alpha_{0,n} \delta_1 / R_2) \frac{\alpha_{0,n} R_1 / R_2 J_t'(\alpha_{0,n} R_1 / R_2)}{(\alpha_{t,s} / R_1)^2 - (\alpha_{0,n} / R_2)^2} \\
&+ \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} ((C_{m,n}^+ + D_{m,n}^+) (-1)^t J_{m-t}(\alpha_{m,n} \delta_1 / R_2) e^{-jm\theta_1}) \frac{\alpha_{m,n} R_1 / R_2 J_t'(\alpha_{m,n} R_1 / R_2)}{(\alpha_{t,s} / R_1)^2 - (\alpha_{m,n} / R_2)^2} \\
&+ \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} ((C_{m,n}^- + D_{m,n}^-) J_{m+t}(\alpha_{m,n} \delta_1 / R_2) e^{jm\theta_1}) \frac{\alpha_{m,n} R_1 / R_2 J_t'(\alpha_{m,n} R_1 / R_2)}{(\alpha_{t,s} / R_1)^2 - (\alpha_{m,n} / R_2)^2}
\end{aligned} \tag{5.152}$$

### Ajuste modal de la presión en la primera salida

En la zona del primer tubo de salida, siguiendo un procedimiento análogo al anterior se obtiene, de la ecuación (5.142), para  $t = 0$  y  $s = 0$

$$\begin{aligned}
(E_{0,0} + F_{0,0}) \frac{R_3^2}{2} &= (C_{0,0} + D_{0,0}) \frac{R_3^2}{2} \\
&+ \sum_{n=1}^{\infty} (C_{0,n} + D_{0,n}) \frac{R_2 R_3}{\alpha_{0,n}} J_0(\alpha_{0,n} \delta_3 / R_2) J_1(\alpha_{0,n} R_3 / R_2) \\
&+ \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} ((C_{m,n}^+ + D_{m,n}^+) + (C_{m,n}^- + D_{m,n}^-)) \\
&\quad \cdot \frac{R_2 R_3}{\alpha_{m,n}} J_m(\alpha_{m,n} \delta_3 / R_2) J_1(\alpha_{m,n} R_3 / R_2)
\end{aligned} \tag{5.153}$$

Para  $t = 0$  y  $s = 1, 2, 3, \dots, \infty$

$$\begin{aligned}
 & (E_{0,s} + F_{0,s}) \frac{R_3^2}{2} J_0(\alpha_{0,s}) \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} (C_{0,n} + D_{0,n}) J_0(\alpha_{0,n} \delta_3 / R_2) \frac{\alpha_{0,n} R_3 / R_2 J'_0(\alpha_{0,n} R_3 / R_2)}{(\alpha_{0,s} / R_3)^2 - (\alpha_{0,n} / R_2)^2} \\
 &+ \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} ((C_{m,n}^+ + D_{m,n}^+) + (C_{m,n}^- + D_{m,n}^-)) \\
 &\quad \cdot J_m(\alpha_{m,n} \delta_3 / R_2) \frac{\alpha_{m,n} R_3 / R_2 J'_0(\alpha_{m,n} R_3 / R_2)}{(\alpha_{0,s} / R_3)^2 - (\alpha_{m,n} / R_2)^2}
 \end{aligned} \tag{5.154}$$

Para  $t = 1, 2, 3, \dots, \infty$  y  $s = 0, 1, 2, 3, \dots, \infty$ , queda

$$\begin{aligned}
 & (E_{t,s}^+ + F_{t,s}^+) \frac{R_3^2}{2} \left(1 - \frac{t^2}{\alpha_{t,s}^2}\right) J_t(\alpha_{t,s}) \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} (C_{0,n} + D_{0,n}) J_t(\alpha_{0,n} \delta_3 / R_2) \frac{\alpha_{0,n} R_3 / R_2 J'_t(\alpha_{0,n} R_3 / R_2)}{(\alpha_{t,s} / R_3)^2 - (\alpha_{0,n} / R_2)^2} \\
 &+ \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} ((C_{m,n}^+ + D_{m,n}^+) J_{m+t}(\alpha_{m,n} \delta_3 / R_2)) \frac{\alpha_{m,n} R_3 / R_2 J'_t(\alpha_{m,n} R_3 / R_2)}{(\alpha_{t,s} / R_3)^2 - (\alpha_{m,n} / R_2)^2} \\
 &+ \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} ((C_{m,n}^- + D_{m,n}^-) (-1)^t J_{m-t}(\alpha_{m,n} \delta_3 / R_2)) \frac{\alpha_{m,n} R_3 / R_2 J'_t(\alpha_{m,n} R_3 / R_2)}{(\alpha_{t,s} / R_3)^2 - (\alpha_{m,n} / R_2)^2}
 \end{aligned} \tag{5.155}$$

y

$$\begin{aligned}
 & (E_{t,s}^- + F_{t,s}^-) \frac{R_3^2}{2} \left(1 - \frac{t^2}{\alpha_{t,s}^2}\right) J_t(\alpha_{t,s}) \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} (C_{0,n} + D_{0,n}) J_t(\alpha_{0,n} \delta_3 / R_2) \frac{\alpha_{0,n} R_3 / R_2 J'_t(\alpha_{0,n} R_3 / R_2)}{(\alpha_{t,s} / R_3)^2 - (\alpha_{0,n} / R_2)^2} \\
 &+ \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} ((C_{m,n}^+ + D_{m,n}^+) (-1)^t J_{m-t}(\alpha_{m,n} \delta_3 / R_2)) \frac{\alpha_{m,n} R_3 / R_2 J'_t(\alpha_{m,n} R_3 / R_2)}{(\alpha_{t,s} / R_3)^2 - (\alpha_{m,n} / R_2)^2} \\
 &+ \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} ((C_{m,n}^- + D_{m,n}^-) J_{m+t}(\alpha_{m,n} \delta_3 / R_2)) \frac{\alpha_{m,n} R_3 / R_2 J'_t(\alpha_{m,n} R_3 / R_2)}{(\alpha_{t,s} / R_3)^2 - (\alpha_{m,n} / R_2)^2}
 \end{aligned} \tag{5.156}$$

#### Ajuste modal de la velocidad en el lado izquierdo

Para las condiciones de velocidad expresadas en las ecuaciones (5.143)-(5.145), multiplicando ambos lados de las ecuaciones por  $J_t(\alpha_{t,s} r_2 / R_2) e^{jt\theta} dS$ , integrando la ecuación

ción (5.143) en  $S_1$ , la ecuación (5.144) en  $S_3$  y la ecuación (5.145) en  $S_2 - S_1 - S_3$  y sumando las tres, se obtiene para  $t = 0$  y  $s = 0$

$$(A_{0,0} - B_{0,0}) R_1^2 + (E_{0,0} - F_{0,0}) R_3^2 = (C_{0,0} - D_{0,0}) R_2^2 \quad (5.157)$$

que es la ecuación de continuidad de flujo volumétrico del modelo de onda plana.

Para  $t = 0$  y  $s = 1, 2, 3, \dots, \infty$ , se tiene

$$\begin{aligned} & k_0 (A_{0,0} - B_{0,0}) \frac{R_2 R_1}{\alpha_{0,s}} J_0(\alpha_{0,s} \delta_1 / R_2) J_1(\alpha_{0,s} R_1 / R_2) \\ & - \sum_{n=1}^{\infty} k_{1,0,n} (A_{0,n} - B_{0,n}) J_0(\alpha_{0,s} \delta_1 / R_2) \mathfrak{R}_1 \\ & - \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} k_{1,m,n} ((A_{m,n}^+ - B_{m,n}^+) + (A_{m,n}^- - B_{m,n}^-)) J_m(\alpha_{0,s} \delta_1 / R_2) \mathfrak{R}_2 \\ & + k_0 (E_{0,0} - F_{0,0}) \frac{R_2 R_3}{\alpha_{0,s}} J_0(\alpha_{0,s} \delta_3 / R_2) J_1(\alpha_{0,s} R_3 / R_2) \\ & - \sum_{n=1}^{\infty} k_{3,0,n} (E_{0,n} - F_{0,n}) J_0(\alpha_{0,s} \delta_3 / R_2) \mathfrak{R}_3 \\ & - \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} k_{3,m,n} ((E_{m,n}^+ - F_{m,n}^+) + (E_{m,n}^- - F_{m,n}^-)) J_m(\alpha_{0,s} \delta_3 / R_2) \mathfrak{R}_4 \\ & = -k_{2,0,s} (C_{0,s} - D_{0,s}) \frac{R_2^2}{2} J_0^2(\alpha_{0,s}) \end{aligned} \quad (5.158)$$

donde

$$\mathfrak{R}_1 = \frac{\alpha_{0,s} \frac{R_1}{R_2} J_0(\alpha_{0,n}) J'_0\left(\frac{\alpha_{0,s}}{R_2} R_1\right)}{\left(\frac{\alpha_{0,n}}{R_1}\right)^2 - \left(\frac{\alpha_{0,s}}{R_2}\right)^2} \quad (5.159)$$

$$\mathfrak{R}_2 = \frac{\alpha_{0,s} \frac{R_1}{R_2} J_m(\alpha_{m,n}) J'_m\left(\frac{\alpha_{0,s}}{R_2} R_1\right)}{\left(\frac{\alpha_{m,n}}{R_1}\right)^2 - \left(\frac{\alpha_{0,s}}{R_2}\right)^2} \quad (5.160)$$

$$\mathfrak{R}_3 = \frac{\alpha_{0,s} \frac{R_3}{R_2} J_0(\alpha_{0,n}) J'_0\left(\frac{\alpha_{0,s}}{R_2} R_3\right)}{\left(\frac{\alpha_{0,n}}{R_3}\right)^2 - \left(\frac{\alpha_{0,s}}{R_2}\right)^2} \quad (5.161)$$

$$\mathfrak{R}_4 = \frac{\alpha_{0,s} \frac{R_3}{R_2} J_m(\alpha_{m,n}) J'_m\left(\frac{\alpha_{0,s}}{R_2} R_3\right)}{\left(\frac{\alpha_{m,n}}{R_3}\right)^2 - \left(\frac{\alpha_{0,s}}{R_2}\right)^2} \quad (5.162)$$



y para  $t = 1, 2, 3, \dots, \infty$  y  $s = 0, 1, 2, 3, \dots, \infty$ , queda

$$\begin{aligned}
& \left( k_0 (A_{0,0} - B_{0,0}) \frac{R_2 R_1}{\alpha_{t,s}} J_t (\alpha_{t,s} \delta_1 / R_2) J_1 (\alpha_{t,s} R_1 / R_2) \right. \\
& \quad - \sum_{n=1}^{\infty} k_{1,0,n} (A_{0,n} - B_{0,n}) J_t (\alpha_{t,s} \delta_1 / R_2) \mathfrak{R}_5 \\
& \quad - \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} k_{1,m,n} ((A_{m,n}^+ - B_{m,n}^+) J_{t+m} (\alpha_{t,s} \delta_1 / R_2)) \mathfrak{R}_6 \\
& \quad \left. - \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} k_{1,m,n} ((A_{m,n}^- - B_{m,n}^-) (-1)^m J_{t-m} (\alpha_{t,s} \delta_1 / R_2)) \mathfrak{R}_6 \right) e^{jt\theta_1} \\
& + \left( k_0 (E_{0,0} - F_{0,0}) \frac{R_2 R_3}{\alpha_{t,s}} J_t (\alpha_{t,s} \delta_3 / R_2) J_1 (\alpha_{t,s} R_3 / R_2) \right. \\
& \quad - \sum_{n=1}^{\infty} k_{3,0,n} (E_{0,n} - F_{0,n}) J_t (\alpha_{t,s} \delta_3 / R_2) \mathfrak{R}_7 \\
& \quad - \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} k_{3,m,n} ((E_{m,n}^+ - F_{m,n}^+) J_{t+m} (\alpha_{t,s} \delta_3 / R_2)) \mathfrak{R}_8 \\
& \quad \left. - \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} k_{3,m,n} ((E_{m,n}^- - F_{m,n}^-) (-1)^m J_{t-m} (\alpha_{t,s} \delta_3 / R_2)) \mathfrak{R}_8 \right) e^{jt\theta_1} \\
& = -k_{2,t,s} (C_{t,s}^+ - D_{t,s}^+) \frac{R_2^2}{2} \left( 1 - \frac{t^2}{\alpha_{t,s}^2} \right) J_t^2 (\alpha_{t,s})
\end{aligned} \tag{5.163}$$

donde

$$\mathfrak{R}_5 = \frac{\alpha_{t,s} \frac{R_1}{R_2} J_0 (\alpha_{0,n}) J_0' \left( \frac{\alpha_{t,s}}{R_2} R_1 \right)}{\left( \frac{\alpha_{0,n}}{R_1} \right)^2 - \left( \frac{\alpha_{t,s}}{R_2} \right)^2} \tag{5.164}$$

$$\mathfrak{R}_6 = \frac{\alpha_{t,s} \frac{R_1}{R_2} J_m (\alpha_{m,n}) J_m' \left( \frac{\alpha_{t,s}}{R_2} R_1 \right)}{\left( \frac{\alpha_{m,n}}{R_1} \right)^2 - \left( \frac{\alpha_{t,s}}{R_2} \right)^2} \tag{5.165}$$

$$\mathfrak{R}_7 = \frac{\alpha_{t,s} \frac{R_3}{R_2} J_0 (\alpha_{0,n}) J_0' \left( \frac{\alpha_{t,s}}{R_2} R_3 \right)}{\left( \frac{\alpha_{0,n}}{R_3} \right)^2 - \left( \frac{\alpha_{t,s}}{R_2} \right)^2} \tag{5.166}$$

$$\mathfrak{R}_8 = \frac{\alpha_{t,s} \frac{R_3}{R_2} J_m(\alpha_{m,n}) J'_m \left( \frac{\alpha_{t,s}}{R_2} R_3 \right)}{\left( \frac{\alpha_{m,n}}{R_3} \right)^2 - \left( \frac{\alpha_{t,s}}{R_2} \right)^2} \quad (5.167)$$

Para las condiciones de velocidad dadas por las ecuaciones (5.143)-(5.145), multiplicando ambos lados de las ecuaciones por  $J_t(\alpha_{t,s}r_2/R_2) e^{-jt\theta} dS$ , integrando la ecuación (5.143) en  $S_1$ , la ecuación (5.144) en  $S_3$  y la ecuación (5.145) en  $S_2 - S_1 - S_3$  y sumando las tres, se obtiene para  $t = 1, 2, 3, \dots, \infty$  y  $s = 0, 1, 2, 3, \dots, \infty$

$$\begin{aligned} & \left( k_0 (A_{0,0} - B_{0,0}) \frac{R_2 R_1}{\alpha_{t,s}} J_t(\alpha_{t,s} \delta_1 / R_2) J_1(\alpha_{t,s} R_1 / R_2) \right. \\ & - \sum_{n=1}^{\infty} k_{1,0,n} (A_{0,n} - B_{0,n}) J_t(\alpha_{t,s} \delta_1 / R_2) \mathfrak{R}_5 \\ & - \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} k_{1,m,n} ((A_{m,n}^+ - B_{m,n}^+) (-1)^m J_{t-m}(\alpha_{t,s} \delta_1 / R_2)) \mathfrak{R}_6 \\ & \left. - \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} k_{1,m,n} ((A_{m,n}^- - B_{m,n}^-) J_{t+m}(\alpha_{t,s} \delta_1 / R_2)) \mathfrak{R}_6 \right) e^{-jt\theta_1} \\ & + \left( k_0 (E_{0,0} - F_{0,0}) \frac{R_2 R_3}{\alpha_{t,s}} J_t(\alpha_{t,s} \delta_3 / R_2) J_1(\alpha_{t,s} R_3 / R_2) \right. \\ & - \sum_{n=1}^{\infty} k_{3,0,n} (E_{0,n} - F_{0,n}) J_t(\alpha_{t,s} \delta_3 / R_2) \mathfrak{R}_7 \\ & - \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} k_{3,m,n} ((E_{m,n}^+ - F_{m,n}^+) (-1)^m J_{t-m}(\alpha_{t,s} \delta_3 / R_2)) \mathfrak{R}_8 \\ & \left. - \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} k_{3,m,n} ((E_{m,n}^- - F_{m,n}^-) J_{t+m}(\alpha_{t,s} \delta_3 / R_2)) \mathfrak{R}_8 \right) e^{-jt\theta_1} \\ & = -k_{2,t,s} (C_{t,s}^- - D_{t,s}^-) \frac{R_2^2}{2} \left( 1 - \frac{t^2}{\alpha_{t,s}^2} \right) J_t^2(\alpha_{t,s}) \end{aligned} \quad (5.168)$$

En las ecuaciones previas los números de onda axiales vienen dados por las expresiones (5.136)-(5.138).

#### Ajuste modal de la presión en la segunda salida

Utilizando un procedimiento análogo al descrito previamente, de la condición de presión dada por la ecuación (5.146) se obtiene para  $t = 0$  y  $s = 0$

$$\begin{aligned}
(G_{0,0} + H_{0,0}) \frac{R_4^2}{2} &= (C_{0,0} e^{-jk_0 L_2} + D_{0,0} e^{jk_0 L_2}) \frac{R_4^2}{2} \\
&+ \sum_{n=1}^{\infty} (C_{0,n} e^{jk_{2,0,n} L_2} + D_{0,n} e^{-jk_{2,0,n} L_2}) \frac{R_2 R_4}{\alpha_{0,n}} J_0(\alpha_{0,n} \delta_4 / R_2) J_1(\alpha_{0,n} R_4 / R_2) \\
&+ \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} ((C_{m,n}^+ + C_{m,n}^-) e^{jk_{2,m,n} L_2} + (D_{m,n}^+ + D_{m,n}^-) e^{-jk_{2,m,n} L_2}) \\
&\quad \cdot \frac{R_2 R_4}{\alpha_{m,n}} J_m(\alpha_{m,n} \delta_4 / R_2) J_1(\alpha_{m,n} R_4 / R_2)
\end{aligned} \tag{5.169}$$

Para  $t = 0$  y  $s = 1, 2, 3, \dots, \infty$

$$\begin{aligned}
(G_{0,s} + H_{0,s}) \frac{R_4^2}{2} J_0(\alpha_{0,s}) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} (C_{0,n} e^{jk_{2,0,n} L_2} + D_{0,n} e^{-jk_{2,0,n} L_2}) J_0(\alpha_{0,n} \delta_4 / R_2) \frac{\alpha_{0,n} R_4 / R_2 J'_0(\alpha_{0,n} R_4 / R_2)}{(\alpha_{0,s} / R_4)^2 - (\alpha_{0,n} / R_2)^2} \\
&+ \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} ((C_{m,n}^+ + C_{m,n}^-) e^{-jk_{2,m,n} L_2} + (D_{m,n}^+ + D_{m,n}^-) e^{jk_{2,m,n} L_2}) \\
&\quad \cdot J_m(\alpha_{m,n} \delta_4 / R_2) \frac{\alpha_{m,n} R_4 / R_2 J'_m(\alpha_{m,n} R_4 / R_2)}{(\alpha_{0,s} / R_4)^2 - (\alpha_{m,n} / R_2)^2}
\end{aligned} \tag{5.170}$$

Finalmente, para  $t = 1, 2, 3, \dots, \infty$  y  $s = 0, 1, 2, 3, \dots, \infty$ , queda

$$\begin{aligned}
(G_{t,s}^+ + H_{t,s}^+) \frac{R_4^2}{2} \left(1 - \frac{t^2}{\alpha_{t,s}^2}\right) J_t(\alpha_{t,s}) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} (C_{0,n} e^{jk_{2,0,n} L_2} + D_{0,n} e^{-jk_{2,0,n} L_2}) J_t(\alpha_{0,n} \delta_4 / R_2) \frac{\alpha_{0,n} R_4 / R_2 J'_t(\alpha_{0,n} R_4 / R_2)}{(\alpha_{t,s} / R_4)^2 - (\alpha_{0,n} / R_2)^2} \\
&+ \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \left( (C_{m,n}^+ e^{jk_{2,m,n} L_2} + D_{m,n}^+ e^{-jk_{2,m,n} L_2}) J_{m+t}(\alpha_{m,n} \delta_4 / R_2) \right. \\
&\quad \left. + (C_{m,n}^- e^{jk_{2,m,n} L_2} + D_{m,n}^- e^{-jk_{2,m,n} L_2}) (-1)^t J_{m-t}(\alpha_{m,n} \delta_4 / R_2) \right) \\
&\quad \cdot \frac{\alpha_{m,n} R_4 / R_2 J'_t(\alpha_{m,n} R_4 / R_2)}{(\alpha_{t,s} / R_4)^2 - (\alpha_{m,n} / R_2)^2}
\end{aligned} \tag{5.171}$$

y

$$\begin{aligned}
& (G_{t,s}^- + H_{t,s}^-) \frac{R_4^2}{2} \left( 1 - \frac{t^2}{\alpha_{t,s}^2} \right) J_t(\alpha_{t,s}) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} (C_{0,n} e^{jk_{2,0,n}L_2} + D_{0,n} e^{-jk_{2,0,n}L_2}) J_t(\alpha_{0,n}\delta_4/R_2) \frac{\alpha_{0,n}R_4/R_2 J'_t(\alpha_{0,n}R_4/R_2)}{(\alpha_{t,s}/R_4)^2 - (\alpha_{0,n}/R_2)^2} \\
&+ \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \left( (C_{m,n}^+ e^{jk_{2,m,n}L_2} + D_{m,n}^+ e^{-jk_{2,m,n}L_2}) (-1)^t J_{m-t}(\alpha_{m,n}\delta_4/R_2) \right. \\
&+ \left. (C_{m,n}^- e^{jk_{2,m,n}L_2} + D_{m,n}^- e^{-jk_{2,m,n}L_2}) J_{m+t}(\alpha_{m,n}\delta_4/R_2) \right) \\
&\quad \cdot \frac{\alpha_{m,n}R_4/R_2 J'_t(\alpha_{m,n}R_4/R_2)}{(\alpha_{t,s}/R_4)^2 - (\alpha_{m,n}/R_2)^2}
\end{aligned} \tag{5.172}$$

#### Ajuste modal de la velocidad en el lado derecho

Para la condición de velocidad en la contracción, a partir de las ecuaciones (5.147) y (5.148), se obtiene para  $t = 0$  y  $s = 0$

$$(G_{0,0} - H_{0,0}) R_4^2 = (C_{0,0} e^{-jk_0L_2} - D_{0,0} e^{jk_0L_2}) R_2^2 \tag{5.173}$$

que es la ecuación de continuidad de flujo volumétrico asociada a un modelo de onda plana.

Para  $t = 0$  y  $s = 1, 2, 3, \dots, \infty$ , resulta

$$\begin{aligned}
& k_{2,0,s} (C_{0,s} e^{jk_{2,0,s}L_2} - D_{0,s} e^{-jk_{2,0,s}L_2}) \frac{R_2^2}{2} J_0^2(\alpha_{0,s}) \\
&= -k_0 (G_{0,0} - H_{0,0}) \frac{R_2 R_4}{\alpha_{0,s}} J_0(\alpha_{0,s}\delta_4/R_2) J_1(\alpha_{0,s}R_4/R_2) \\
&+ \sum_{n=1}^{\infty} k_{4,0,n} (G_{0,n} - H_{0,n}) J_0(\alpha_{0,n}\delta_4/R_2) \Re_9 \\
&+ \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} k_{4,m,n} ((G_{m,n}^+ - H_{m,n}^+) + (G_{m,n}^- - H_{m,n}^-)) J_m(\alpha_{0,n}\delta_4/R_2) \Re_{10}
\end{aligned} \tag{5.174}$$

donde

$$\Re_9 = \frac{\alpha_{0,s} \frac{R_4}{R_2} J_0(\alpha_{0,n}) J'_0\left(\frac{\alpha_{0,s} R_4}{R_2}\right)}{\left(\frac{\alpha_{0,n}}{R_4}\right)^2 - \left(\frac{\alpha_{0,s}}{R_2}\right)^2} \tag{5.175}$$

$$\mathfrak{R}_{10} = \frac{\alpha_{0,s} \frac{R_4}{R_2} J_m(\alpha_{m,n}) J'_m\left(\frac{\alpha_{0,s}}{R_2} R_4\right)}{\left(\frac{\alpha_{m,n}}{R_4}\right)^2 - \left(\frac{\alpha_{0,s}}{R_2}\right)^2} \quad (5.176)$$

Para  $t = 1, 2, 3, \dots, \infty$  y  $s = 0, 1, 2, 3, \dots, \infty$

$$\begin{aligned} & k_{2,t,s} \left( C_{t,s}^+ e^{jk_{2,t,s}L_2} - D_{t,s}^+ e^{-jk_{2,t,s}L_2} \right) \frac{R_2^2}{2} \left( 1 - \frac{t^2}{\alpha_{t,s}^2} \right) J_t^2(\alpha_{t,s}) \\ &= -k_0 (G_{0,0} - H_{0,0}) \frac{R_2 R_4}{\alpha_{t,s}} J_t(\alpha_{t,s} \delta_4 / R_2) J_1(\alpha_{t,s} R_4 / R_2) \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} k_{4,0,n} (G_{0,n} - H_{0,n}) J_t(\alpha_{t,s} \delta_4 / R_2) \mathfrak{R}_{11} \\ &+ \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} k_{4,m,n} \left( (G_{m,n}^+ - H_{m,n}^+) J_{t+m}(\alpha_{t,s} \delta_4 / R_2) \right. \\ &\quad \left. + (G_{m,n}^- - H_{m,n}^-) (-1)^m J_{t-m}(\alpha_{t,s} \delta_4 / R_2) \right) \mathfrak{R}_{12} \end{aligned} \quad (5.177)$$

En último lugar se obtiene, para  $t = 1, 2, 3, \dots, \infty$  y  $s = 0, 1, 2, 3, \dots, \infty$

$$\begin{aligned} & k_{2,t,s} \left( C_{t,s}^- e^{jk_{2,t,s}L_2} - D_{t,s}^- e^{-jk_{2,t,s}L_2} \right) \frac{R_2^2}{2} \left( 1 - \frac{t^2}{\alpha_{t,s}^2} \right) J_t^2(\alpha_{t,s}) \\ &= -k_0 (G_{0,0} - H_{0,0}) \frac{R_2 R_4}{\alpha_{t,s}} J_t(\alpha_{t,s} \delta_4 / R_2) J_1(\alpha_{t,s} R_4 / R_2) \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} k_{4,0,n} (G_{0,n} - H_{0,n}) J_t(\alpha_{t,s} \delta_4 / R_2) \mathfrak{R}_{13} \\ &+ \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} k_{4,m,n} \left( (G_{m,n}^+ - H_{m,n}^+) (-1)^m J_{t-m}(\alpha_{t,s} \delta_4 / R_2) \right. \\ &\quad \left. + (G_{m,n}^- - H_{m,n}^-) J_{t+m}(\alpha_{t,s} \delta_4 / R_2) \right) \mathfrak{R}_{14} \end{aligned} \quad (5.178)$$

con

$$\mathfrak{R}_{11} = \frac{\alpha_{t,s} \frac{R_4}{R_2} J_0(\alpha_{0,n}) J'_0\left(\frac{\alpha_{t,s}}{R_2} R_4\right)}{\left(\frac{\alpha_{0,n}}{R_4}\right)^2 - \left(\frac{\alpha_{t,s}}{R_2}\right)^2} \quad (5.179)$$

$$\mathfrak{R}_{12} = \frac{\alpha_{t,s} \frac{R_4}{R_2} J_m(\alpha_{m,n}) J'_m\left(\frac{\alpha_{t,s}}{R_2} R_4\right)}{\left(\frac{\alpha_{m,n}}{R_4}\right)^2 - \left(\frac{\alpha_{t,s}}{R_2}\right)^2} \quad (5.180)$$

$$\Re_{13} = \frac{\alpha_{t,s} \frac{R_4}{R_2} J_0(\alpha_{0,n}) J'_0\left(\frac{\alpha_{t,s}}{R_2} R_4\right)}{\left(\frac{\alpha_{0,n}}{R_4}\right)^2 - \left(\frac{\alpha_{t,s}}{R_2}\right)^2} \quad (5.181)$$

$$\Re_{14} = \frac{\alpha_{t,s} \frac{R_4}{R_2} J_m(\alpha_{m,n}) J'_m\left(\frac{\alpha_{t,s}}{R_2} R_4\right)}{\left(\frac{\alpha_{m,n}}{R_4}\right)^2 - \left(\frac{\alpha_{t,s}}{R_2}\right)^2} \quad (5.182)$$

### Caracterización del silenciador

La evaluación del índice de pérdidas de transmisión se consigue asumiendo que sobre el silenciador actúa una excitación dada por una onda plana incidente  $A_{0,0}$  de valor arbitrario, que por comodidad puede tener amplitud unidad. En las dos salidas se supone que la terminación es anecoica, lo cual implica que no se produce reflexión alguna, de manera que  $E_{m,n} = H_{m,n} = 0$  para todo valor de  $m$  y  $n$ . De las infinitas ecuaciones e incógnitas presentes en las ecuaciones (5.149)-(5.158), (5.163), (5.168)-(5.174) y (5.177)-(5.178), se reduce la dimensión del problema mediante truncado. Para valores máximos de  $t$  y  $s$  dados por  $t_{max}$  y  $s_{max}$ , se dispone de  $5(2t_{max} + 1)(s_{max} + 1)$  ecuaciones, y para valores máximos de  $m$  y  $n$  denotados mediante  $m_{max}$  y  $n_{max}$ , se tienen  $5(2m_{max} + 1)(n_{max} + 1)$  incógnitas, asociadas a los coeficientes de propagación  $B_{m,n}$ ,  $C_{m,n}$ ,  $D_{m,n}$ ,  $F_{m,n}$  y  $G_{m,n}$ . Haciendo  $t_{max} = m_{max} = p$  y  $s_{max} = n_{max} = q$ , se logra un sistema de ecuaciones algebraico a partir de cuya solución puede obtenerse el  $TL$  mediante la expresión

$$TL = -10 \log \left( \left( \frac{R_3}{R_1} \right)^2 \left| F_{0,0} e^{jk_0(-L_3)} + \sum_{n=1}^q F_{0,n} e^{-jk_{3,0,n}(-L_3)} \right|^2 + \left( \frac{R_4}{R_1} \right)^2 \left| G_{0,0} e^{-jk_0 L_4} + \sum_{n=1}^q G_{0,n} e^{jk_{4,0,n} L_4} \right|^2 \right) \quad (5.183)$$

Si se desea obtener los resultados asociados al modelo de onda plana basta con hacer  $p = 0$  y  $q = 0$  en las ecuaciones anteriores.

Para validar el desarrollo previo y estudiar el efecto de la posición de los conductos, se consideran las geometrías detalladas en la tabla 5.6. Todas se caracterizan por tener las dimensiones  $R_1 = R_3 = R_4 = 0.02$  m,  $R_2 = 0.091875$  m,  $L_1 = L_3 = L_4 = 0.1$  m y  $L_2 = 0.3$  m. Las diferencias vienen dadas por la distinta ubicación de los conductos de entrada y salida. Para la validación se toma como referencia la solución proporcionada por el método de elementos finitos. La malla utilizada para efectuar la validación tiene un tamaño aproximado de elemento de 0.0075 m en los conductos de entrada y salida así como en las zonas de la cámara cercanas a la expansión y las contracciones, y 0.015 m en el resto del dominio. Los elementos utilizados para realizar el mallado son tetraedros cuadráticos. Para la solución analítica, y como en

los casos anteriores, se toman los valores  $p = q = 5$ .

<i>Geometría</i>	$\delta_1$ (m)	$\delta_3$ (m)	$\delta_4$ (m)	$\theta_1$	$\theta_4$
1	0.045	0.045	0.045	$\pi$	0.0
2	0.045	0.045	0.045	$\pi/2$	0.0
3	0.045	0.045	0.045	$\pi/2$	$\pi$
4	0.057661	0.057661	0.057661	$\pi$	0.0
5	0.057661	0.057661	0.057661	$\pi/2$	0.0
6	0.057661	0.057661	0.057661	$\pi/2$	$\pi$
7	0.0	0.045	0.045	0.0	0.0
8	0.0	0.057661	0.057661	0.0	0.0
9	0.0	0.07	0.07	0.0	0.0

TABLA 5.6: *Dimensiones básicas de silenciadores con doble salida opuesta.*

La figura 5.17 muestra la comparación de los resultados del modelo analítico y de elementos finitos para la geometría 1. Se comprueba que existe una concordancia excelente entre ambos modelos en todo el rango de frecuencia de interés. El modelo analítico predice de forma correcta todas las particularidades del  $TL$ , incluyendo de forma precisa los efectos de la tridimensionalidad del campo acústico.

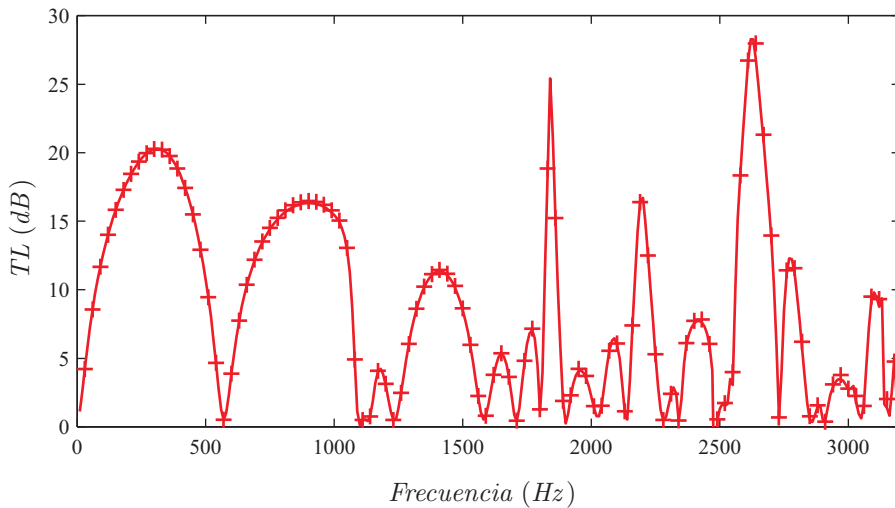


FIGURA 5.17:  $TL$  de silenciador con doble salida opuesta: —, geometría 1, AM; +, ídem, MEF.

La figura 5.18 considera tres configuraciones en las que las distancias de descentrado son las mismas para los tres conductos, dadas por  $\delta_1 = \delta_3 = \delta_4 = 0.045$  m, y varía el ángulo relativo de éstos. Tal como muestra la figura 5.16, la referencia angular se ha

tomado (sin pérdida de generalidad) en el conducto de salida 3. Resulta evidente que cuando la entrada está a  $180^\circ$  (geometría 1), se obtiene la peor atenuación, debido a la propagación del primer modo asimétrico (1,0). Este comportamiento mejora ubicando la entrada a  $90^\circ$  (geometrías 2 y 3), lo cual aumenta las prestaciones del silenciador hasta el inicio de la propagación del modo asimétrico (2,0). Se observa que el cambio de  $\theta_4 = 0.0$  a  $\theta_4 = \pi$  no produce cambios significativos en la atenuación.

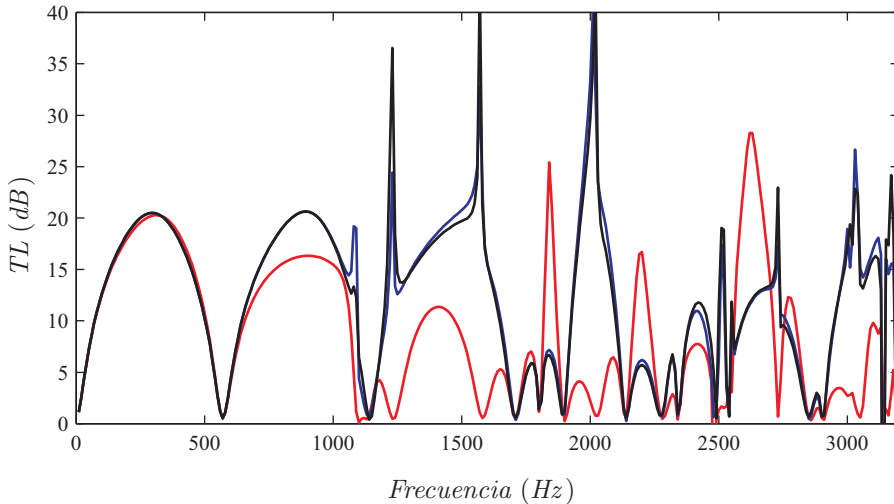


FIGURA 5.18: *TL de silenciadores con doble salida opuesta: —, geometría 1; —, geometría 2; —, geometría 3.*

La figura 5.19 considera, como en el caso anterior, tres configuraciones de silenciador en las que la distancia de descentrado es la misma para los tres conductos, y varía el ángulo relativo de éstos. Ahora la distancia de descentrado es  $0.6276R_2$  [117, 118], es decir, los conductos están ubicados en la línea nodal del modo axisimétrico (0,1). Resulta evidente que cuando la entrada está a  $180^\circ$  (geometría 4), se obtiene la peor atenuación, debido a la propagación del modo asimétrico (1,0). Esta situación se corrige si se mueve el conducto de entrada, formando un ángulo de valor  $90^\circ$  respecto al conducto de salida 3, de manera que la atenuación mejora hasta que se inicia la propagación del modo asimétrico (2,0). Por tanto el comportamiento es prácticamente idéntico al observado en la figura 5.18. El hecho de utilizar la distancia  $0.6276R_2$  no garantiza una buena atenuación debido a que el descentrado hace que se estén excitando los modos (1,0) y (2,0), cuya frecuencia de corte es inferior a la del modo (0,1).

La figura 5.20 considera el efecto de mantener la entrada centrada. Se busca que dicho conducto permanezca en la línea nodal de los dos primeros modos de alto orden, responsables de la caída del *TL*. Las salidas están descentradas y  $\theta_4 = 0$ . Ahora sí resulta muy útil la utilización de la distancia de descentrado óptima con la que la



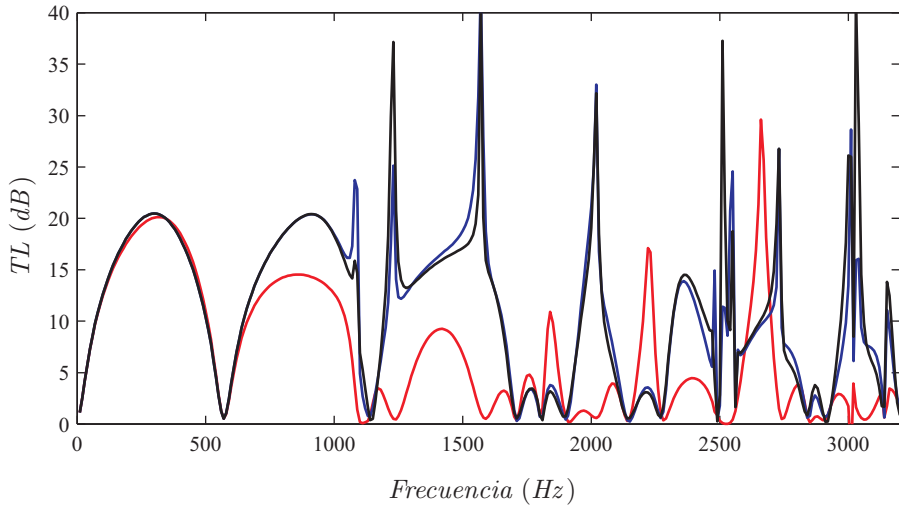


FIGURA 5.19: *TL de silenciadores con doble salida opuesta:* —, geometría 4; —, geometría 5; —, geometría 6.

atenuación mejora claramente hasta la propagación del primer modo axisimétrico, tal como se muestra en la figura 5.20. En ésta puede observarse que la línea azul supera a la roja en todo el rango de frecuencias altas, y es ligeramente superior a la negra al menos hasta la propagación del primer modo axisimétrico.

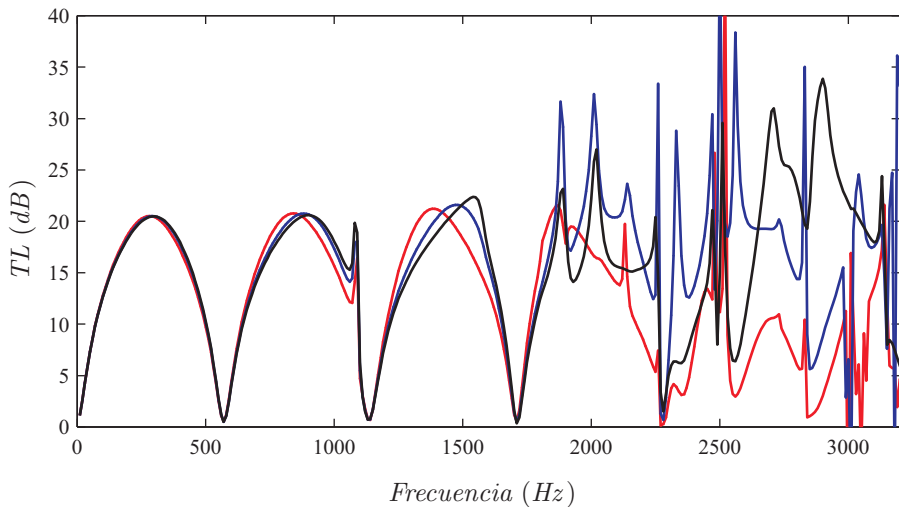


FIGURA 5.20: *TL de silenciadores con doble salida opuesta:* —, geometría 7; —, geometría 8; —, geometría 9.

Se considera ahora la situación en la que de partida, el silenciador incluye el conducto de entrada y de salida en el mismo lado. Las dimensiones asociadas son  $R_1 = R_3 = 0.0268$  m,  $R_2 = 0.091875$  m,  $L_2 = 0.3$  m,  $\delta_1 = 0$  m y  $\delta_3 = 0.057661$  m (óptimo). Se estudia el efecto de añadir la salida en el lado opuesto, para varios valores de radio de conducto que se detallan en la tabla 5.7, con el descentrado dado por  $\delta_4 = 0.057661$  m (óptimo) y  $\theta_4 = 0^\circ$ .

<i>Geometría</i>	$R_4$ (m)
10	0.0
11	0.005
12	0.01
13	0.015
14	0.02
15	0.0268

TABLA 5.7: *Geometrías consideradas para analizar el efecto de la adición de la segunda salida en el lado opuesto a la entrada.*

La figura 5.21 muestra el efecto de la adición de la segunda salida en el lado opuesto a la entrada. Se observa una transición de comportamiento entre una cámara reversa pura cuando no hay salida en el lado opuesto (geometría 10) hasta un comportamiento de cámara de expansión simple cuando la salida en el lado opuesto tiene el mismo radio que el otro conducto de salida (geometría 15). La utilización de una segunda salida en el lado opuesto da lugar por tanto a una menor atenuación, proporcionando como contrapartida una mayor área de escape que permitirá reducir la pérdida de carga del silenciador y el ruido asociado al flujo [120].

A continuación se considera la situación en la que, de partida, el silenciador incluye el conducto de entrada y el de salida en el lado opuesto. Las dimensiones asociadas son:  $R_1 = R_4 = 0.0268$  m,  $R_2 = 0.091875$  m,  $L_2 = 0.3$  m,  $\delta_1 = 0$  m,  $\delta_4 = 0.057661$  m (óptimo) y  $\theta_4 = 0^\circ$ . Se estudia el efecto de añadir la salida en el mismo lado que la entrada, para varios valores de radio de conducto que se detallan en la tabla 5.8, con el descentrado dado por  $\delta_3 = 0.057661$  m (óptimo).

La figura 5.22 muestra los resultados obtenidos. Se observa una escasa modificación del comportamiento acústico, que es similar en todos los casos al de una cámara de expansión simple. Por tanto, la adición de la segunda salida en el lado de la entrada tiene la virtud de no modificar la atenuación y permitir a su vez una potencial menor pérdida de carga y menor ruido de flujo. Selamet y Ji [120] muestran que con dos salidas en el mismo lado se pierde cierto nivel de atenuación. Con el silenciador con doble salida opuesta se resuelve ese problema, ya que la figura 5.22 pone de manifiesto que el nivel de atenuación máximo en las cúpulas del  $TL$  se mantiene al añadir la segunda salida en el lado de la entrada.

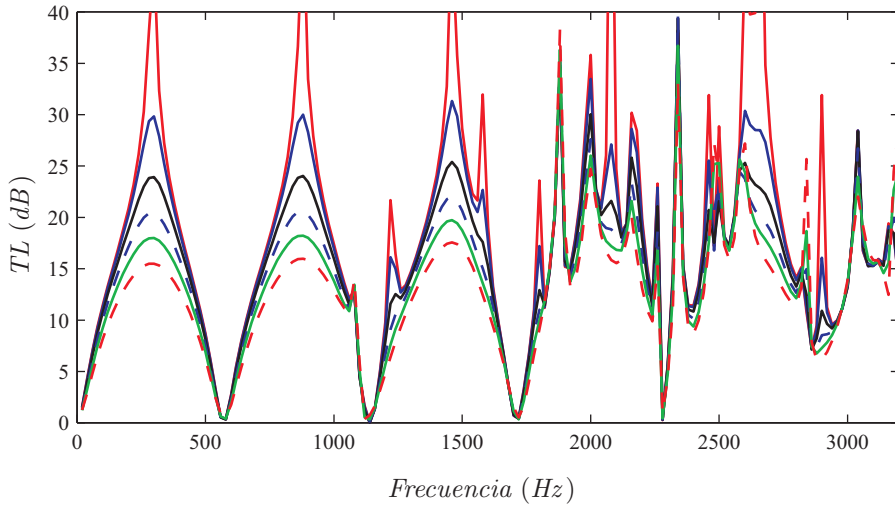


FIGURA 5.21: *TL de silenciadores con doble salida opuesta:* —, geometría 10; —, geometría 11; —, geometría 12; - - -, geometría 13; —, geometría 14; - - -, geometría 15.

Geometría	$R_3$ (m)
16	0.0
17	0.005
18	0.01
19	0.015
20	0.02
21	0.0268

TABLA 5.8: *Geometrías consideradas para analizar el efecto de la adición de la segunda salida en el lado de la entrada.*

En último lugar se considera el efecto de la variación del área de los conductos de salida. Las dimensiones asociadas son:  $R_1 = 0.0268$  m,  $R_2 = 0.091875$  m,  $L_2 = 0.3$  m,  $\delta_1 = 0$  m,  $\delta_3 = \delta_4 = 0.057661$  m (óptimo) y  $\theta_4 = 0^\circ$ . Se estudia el efecto de modificar el área de ambos conductos de salida. Los valores de radio de conducto se detallan en la tabla 5.9.

La figura 5.23 muestra los resultados obtenidos. Tal como cabe prever, se observa una gran modificación de los niveles máximos de atenuación, que son mayores para menores secciones transversales. En todos los casos la forma del  $TL$  es de tipo cúpula, como en el caso de una cámara de expansión simple. El análisis de esta configuración forma parte de la contribución de la Tesis y parte de los resultados se han publicado en la referencia [6].

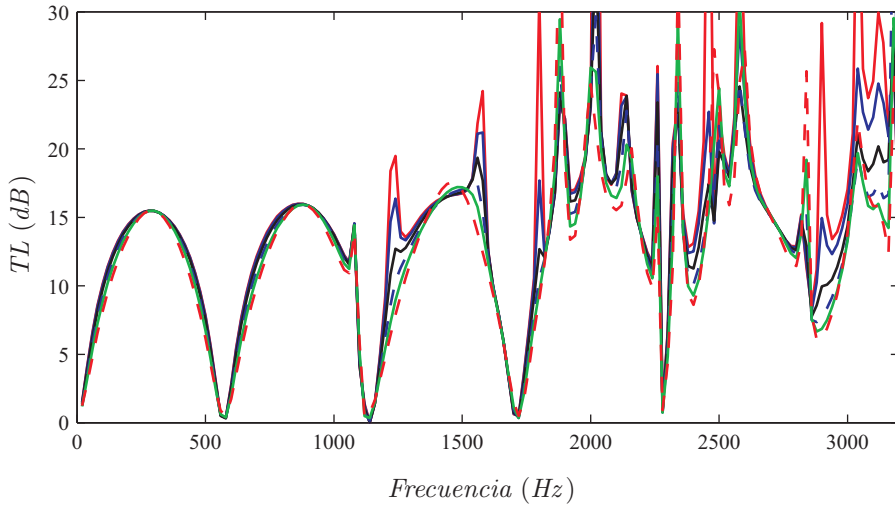


FIGURA 5.22: *TL de silenciadores con doble salida opuesta:* —, geometría 16; —, geometría 17; —, geometría 18; - - -, geometría 19; —, geometría 20; - - -, geometría 21.

Geometría	$R_3 = R_4$ (m)
22	0.005
23	0.015
24	0.02
25	0.0268

TABLA 5.9: *Geometrías consideradas para analizar el efecto del área de los conductos de salida.*

#### iv. Cámara reversa con material absorbente y placa perforada

Hasta ahora, las geometrías consideradas mediante ajuste modal han sido de tipo reactivo puro, es decir, no se ha considerado ningún fenómeno de disipación energética. Una posible fuente de disipación puede ser la debida a la existencia de elementos perforados y materiales absorbentes. En esta sección se lleva a cabo el modelado tridimensional mediante ajuste modal de silenciadores de cámara reversa con material absorbente y placa perforada. El objetivo de la adición de disipación consiste en aumentar la baja atenuación asociada a las bandas de paso típicas de las cámaras reversas.

La figura 5.24 muestra la geometría bajo análisis, similar a la cámara reversa reactiva estudiada anteriormente, con la diferencia de que ahora se da la presencia de una placa perforada que divide la cámara central en dos partes, una de longitud  $L_c$  con aire y otra de longitud  $L_a$  con material absorbente.

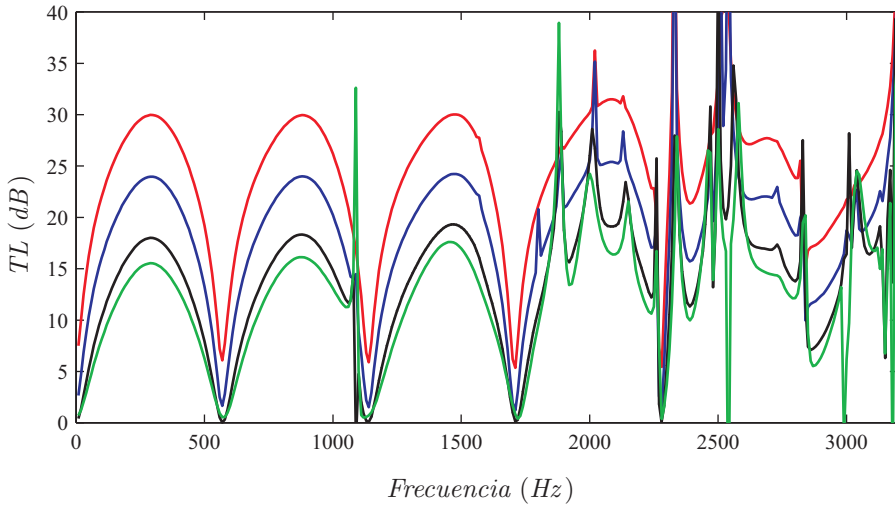


FIGURA 5.23: TL de silenciadores con doble salida opuesta: —, geometría 22; —, geometría 23; —, geometría 24; —, geometría 25.

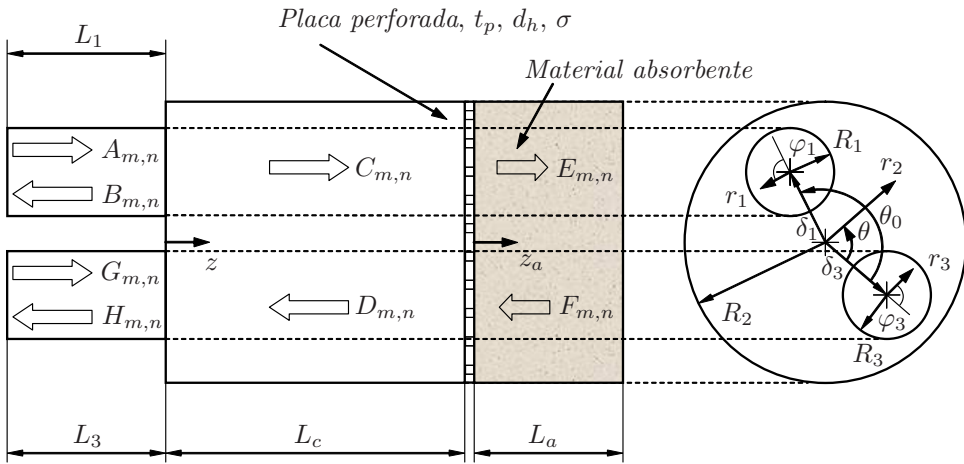


FIGURA 5.24: Silenciador de cámara reversa con material absorbente y placa perforada.

La presión acústica en un conducto circular cualquiera (por ejemplo el conducto de entrada de radio  $R_1$ ) puede escribirse como la suma de una onda progresiva  $A$  viajando en la dirección positiva de  $z$

$$\begin{aligned}
P_A(r_1, \varphi_1, z) = & A_{0,0} e^{-j\kappa z} + \sum_{n=1}^{\infty} A_{0,n} J_0 \left( \frac{\alpha_{0,n}}{R_1} r_1 \right) e^{j\kappa_{1,0,n} z} \\
& + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (A_{m,n}^+ e^{-jm\varphi_1} + A_{m,n}^- e^{jm\varphi_1}) J_m \left( \frac{\alpha_{m,n}}{R_1} r_1 \right) e^{j\kappa_{1,m,n} z}
\end{aligned} \tag{5.184}$$

y una onda regresiva  $B$ , viajando en la dirección negativa de  $z$

$$\begin{aligned}
P_B(r_1, \varphi_1, z) = & B_{0,0} e^{j\kappa z} + \sum_{n=1}^{\infty} B_{0,n} J_0 \left( \frac{\alpha_{0,n}}{R_1} r_1 \right) e^{-j\kappa_{1,0,n} z} \\
& + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (B_{m,n}^+ e^{-jm\varphi_1} + B_{m,n}^- e^{jm\varphi_1}) J_m \left( \frac{\alpha_{m,n}}{R_1} r_1 \right) e^{-j\kappa_{1,m,n} z}
\end{aligned} \tag{5.185}$$

donde  $\kappa_{z,m,n}$  representa el número de onda axial para el modo  $(m, n)$ . Éste viene dado en general por la expresión

$$\kappa_{z,m,n} = \sqrt{\kappa^2 - \left( \frac{\alpha_{m,n}}{R_i} \right)^2} \tag{5.186}$$

donde  $R_i, i = 1, 2, 3$  corresponde al radio del conducto en el que se propaga la onda caracterizada. El número de onda depende del medio a través del que se propaga la onda acústica,

$$\kappa = \begin{cases} k_0 = \frac{2\pi f}{c_0}, & -L_1 \leq z \leq L_c \\ \tilde{k} = \frac{2\pi f}{\tilde{c}}, & 0 \leq z_a \leq L_a \end{cases} \tag{5.187}$$

siendo  $k_0$  el número de onda correspondiente a la propagación de la onda en el aire,  $f$  la frecuencia y  $c_0$  la velocidad del sonido en el aire. Análogamente,  $\tilde{k}$  corresponde al número de onda del material absorbente y  $\tilde{c}$  es la velocidad equivalente del sonido en el mismo.

La velocidad acústica axial  $U$  para las ondas  $A$  y  $B$  se obtiene de la ecuación de Euler (2.47), como

$$\begin{aligned}
U_A(r_1, \varphi_1, z) = & \frac{1}{\rho_0 \omega} \left( \kappa A_{0,0} e^{-j\kappa z} - \sum_{n=1}^{\infty} \kappa_{1,0,n} A_{0,n} J_0 \left( \frac{\alpha_{0,n}}{R_1} r_1 \right) e^{j\kappa_{1,0,n} z} \right. \\
& \left. - \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \kappa_{1,m,n} (A_{m,n}^+ e^{-jm\varphi_1} + A_{m,n}^- e^{jm\varphi_1}) J_m \left( \frac{\alpha_{m,n}}{R_1} r_1 \right) e^{j\kappa_{1,m,n} z} \right)
\end{aligned} \tag{5.188}$$

y

$$\begin{aligned}
 U_B(r_1, \varphi_1, z) = & \frac{-1}{\rho_0 \omega} \left( \kappa B_{0,0} e^{j\kappa z} - \sum_{n=1}^{\infty} \kappa_{1,0,n} B_{0,n} J_0 \left( \frac{\alpha_{0,n}}{R_1} r_1 \right) e^{-j\kappa_{1,0,n} z} \right. \\
 & \left. - \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \kappa_{1,m,n} (B_{m,n}^+ e^{-jm\varphi_1} + B_{m,n}^- e^{jm\varphi_1}) J_m \left( \frac{\alpha_{m,n}}{R_1} r_1 \right) e^{-j\kappa_{1,m,n} z} \right)
 \end{aligned} \tag{5.189}$$

donde  $\rho_0$  debe reemplazarse por  $\tilde{\rho}$  cuando se trabaja con  $U_E$  y  $U_F$  en la región con absorbente.

En este tipo de silenciador se utilizan las ecuaciones obtenidas en el caso de una cámara reversa reactiva, añadiendo las ecuaciones necesarias para la presencia de la placa perforada y realizando las modificaciones oportunas debidas a la existencia del material absorbente. De esta manera las condiciones a verificar por el campo acústico son las que se muestran a continuación. En el lado izquierdo de la cámara deben satisfacerse las condiciones de continuidad de presión

$$(P_A(r_1, \varphi_1, z) + P_B(r_1, \varphi_1, z))|_{z=0} = (P_C(r_2, \theta, z) + P_D(r_2, \theta, z))|_{z=0} \quad \text{en } S_1 \tag{5.190}$$

$$(P_G(r_3, \varphi_3, z) + P_H(r_3, \varphi_3, z))|_{z=0} = (P_C(r_2, \theta, z) + P_D(r_2, \theta, z))|_{z=0} \quad \text{en } S_3 \tag{5.191}$$

y de velocidad

$$(U_A(r_1, \varphi_1, z) + U_B(r_1, \varphi_1, z))|_{z=0} = (U_C(r_2, \theta, z) + U_D(r_2, \theta, z))|_{z=0} \quad \text{en } S_1 \tag{5.192}$$

$$(U_G(r_3, \varphi_3, z) + U_H(r_3, \varphi_3, z))|_{z=0} = (U_C(r_2, \theta, z) + U_D(r_2, \theta, z))|_{z=0} \quad \text{en } S_3 \tag{5.193}$$

$$(U_C(r_2, \theta, z) + U_D(r_2, \theta, z))|_{z=0} = 0 \quad \text{en } S_2 - S_1 - S_3 \tag{5.194}$$

En el lado derecho de la cámara, la condición de continuidad de pared rígida impone

$$(U_E(r_2, \theta, z_a) + U_F(r_2, \theta, z_a))|_{z_a=L_a} = 0 \quad \text{en } S_2 \tag{5.195}$$

En la placa perforada se tiene por un lado la continuidad de la velocidad acústica axial

$$(U_C(r_2, \theta, z) + U_D(r_2, \theta, z))|_{z=L_c} = (U_E(r_2, \theta, z_a) + U_F(r_2, \theta, z_a))|_{z_a=0} \tag{5.196}$$

y por otro la relación entre la variación de presión y la velocidad, dada por la impedancia acústica  $\tilde{Z}_p$ ,

$$(U_C + U_D)|_{z=L_c} = \frac{(P_C + P_D)|_{z=L_c} - (P_E + P_F)|_{z_a=0}}{\tilde{Z}_p} \tag{5.197}$$

de manera que estas dos últimas ecuaciones son válidas en toda la sección transversal  $S_2$ .

Siguiendo un procedimiento de ajuste modal similar al caso de la cámara reversa reactiva, para la condición de continuidad de presión en la entrada se obtienen las ecuaciones (5.118)-(5.121) mientras que para la continuidad de presión en la salida se obtienen las expresiones (5.122)-(5.125), haciendo algunas modificaciones indicadas a continuación. En lo referente a las condiciones de continuidad de velocidad en el lado izquierdo, las expresiones obtenidas ahora son básicamente iguales a las ecuaciones (5.126), (5.127), (5.132) y (5.135), con algunos cambios. Éstos consisten en sustituir los coeficientes  $E$  y  $F$  en el tubo de salida de la cámara reversa reactiva por los nuevos coeficientes  $G$  y  $H$  asociados a la salida de la cámara reversa con material absorbente y placa perforada, y la longitud  $L_2$  por  $L_c$ . En cuanto a la ecuación (5.196) vinculada a la placa perforada, las propiedades de ortogonalidad de los modos de presión en la cámara permiten escribir [7, 49, 109], para  $t = 0$  y  $s = 0$ ,

$$\frac{k_0}{\rho_0} (C_{0,0}e^{-jk_0L_c} - D_{0,0}e^{jk_0L_c}) = \frac{\tilde{k}}{\tilde{\rho}} (E_{0,0} - F_{0,0}) \quad (5.198)$$

Para  $t = 0$  y  $s = 1, 2, 3, \dots, \infty$  se tiene

$$\frac{k_{2,0,s}}{\rho_0} (C_{0,s}e^{jk_{2,0,s}L_c} - D_{0,s}e^{-jk_{2,0,s}L_c}) = \frac{\tilde{k}_{2,0,s}}{\tilde{\rho}} (E_{0,s} - F_{0,s}) \quad (5.199)$$

mientras que para  $t = 1, 2, 3, \dots, \infty$  y  $s = 0, 1, 2, 3, \dots, \infty$  resulta

$$\frac{k_{2,t,s}}{\rho_0} (C_{t,s}^{\pm}e^{jk_{2,t,s}L_c} - D_{t,s}^{\pm}e^{-jk_{2,t,s}L_c}) = \frac{\tilde{k}_{2,t,s}}{\tilde{\rho}} (E_{t,s}^{\pm} - F_{t,s}^{\pm}) \quad (5.200)$$

Combinando la ecuación (5.197) con las propiedades de ortogonalidad se puede escribir, para  $t = 0$  y  $s = 0$ ,

$$C_{0,0}e^{-jk_0L_c} \left( \frac{\tilde{Z}_p}{\rho_0\omega} k_0 - 1 \right) - D_{0,0}e^{jk_0L_c} \left( \frac{\tilde{Z}_p}{\rho_0\omega} k_0 + 1 \right) = -(E_{0,0} + F_{0,0}) \quad (5.201)$$

Para  $t = 0$  y  $s = 1, 2, 3, \dots, \infty$  se obtiene la expresión

$$C_{0,s}e^{jk_{2,0,s}L_c} \left( \frac{\tilde{Z}_p}{\rho_0\omega} k_{2,0,s} + 1 \right) - D_{0,s}e^{-jk_{2,0,s}L_c} \left( \frac{\tilde{Z}_p}{\rho_0\omega} k_{2,0,s} - 1 \right) = (E_{0,s} + F_{0,s}) \quad (5.202)$$

y para  $t = 1, 2, 3, \dots, \infty$  y  $s = 0, 1, 2, 3, \dots, \infty$  se llega a

$$C_{t,s}^{\pm}e^{jk_{2,t,s}L_c} \left( \frac{\tilde{Z}_p}{\rho_0\omega} k_{2,t,s} + 1 \right) - D_{t,s}^{\pm}e^{-jk_{2,t,s}L_c} \left( \frac{\tilde{Z}_p}{\rho_0\omega} k_{2,t,s} - 1 \right) = (E_{t,s}^{\pm} + F_{t,s}^{\pm}) \quad (5.203)$$



Finalmente la ecuación (5.195) proporciona directamente

$$F_{0,0} = E_{0,0} e^{-j2\tilde{k}L_a}, \quad F_{0,s} = E_{0,s} e^{j2\tilde{k}_{2,0,s}L_a}, \quad F_{t,s}^{\pm} = E_{t,s}^{\pm} e^{j2\tilde{k}_{2,t,s}L_a} \quad (5.204)$$

El sistema de ecuaciones obtenido se resuelve tal como se ha indicado en los casos anteriores. Se procede considerando una onda plana incidente y una terminación de tipo anecoico, con lo cual se llega a un sistema con  $6(2t_{max} + 1)(s_{max} + 1)$  ecuaciones y  $6(2m_{max} + 1)(n_{max} + 1)$  incógnitas cuyo cálculo permite definir el campo acústico. Llevando a cabo el truncado de  $t_{max}$  y  $m_{max}$  a  $p$ , y  $s_{max}$  y  $n_{max}$  a  $q$ , y resolviendo el sistema de ecuaciones algebraico resultante, puede obtenerse el índice de pérdidas de transmisión, dado por

$$TL = -20 \log \left( \frac{R_3}{R_1} \left| H_{0,0} e^{jk_0(-L_3)} + \sum_{n=1}^q H_{0,n} e^{-jk_{3,0,n}(-L_3)} \right| \right) \quad (5.205)$$

Con el fin de validar el desarrollo anterior y estudiar en detalle la influencia en la atenuación acústica de la posición relativa de los conductos de entrada y salida, de la resistividad del material absorbente y de la porosidad de la placa perforada, se consideran las geometrías mostradas en la tabla 5.10, en la que se detallan algunos de sus parámetros principales. En todos los casos considerados, se han mantenido los radios de los conductos de entrada y salida, el radio de la cámara, la longitud de los tubos de entrada y salida, la longitud de la cámara con aire y la longitud de la cámara con material absorbente. Los valores utilizados son  $R_1 = R_3 = 0.02$  m,  $R_2 = 0.091875$  m,  $L_1 = L_3 = 0.1$  m,  $L_c = 0.25$  m y  $L_a = 0.05$  m.

La validación del desarrollo previo se lleva a cabo mediante la comparación con resultados obtenidos por medio del método de elementos finitos, para la geometría 1. Como en los casos anteriores los elementos son tetraedros cuadráticos y la malla utilizada para efectuar la validación tiene un tamaño aproximado de elemento que varía desde 0.0075 m en los cambios de sección a 0.015 m en la zona central del silenciador. En cuanto a la placa perforada, se ha considerado la expresión (2.172) indicada en el capítulo 2 [46, 84, 85],

$$\tilde{Z}_p = \rho_0 c_0 \frac{\left( 6 \cdot 10^{-3} + jk_0 \left( t_p + 0.425 \left( 1 + \frac{\tilde{Z}}{Z_0} \frac{\tilde{k}}{k_0} \right) d_h F(\sigma) \right) \right)}{\sigma} \quad (5.206)$$

donde  $d_h$  es el diámetro de los orificios,  $t_p$  es el espesor de la placa perforada,  $\sigma$  es la porosidad y  $F(\sigma)$  es el factor que considera la interacción de orificios. El material absorbente utilizado en este silenciador (fibra de vidrio texturizada de Owens Corning) se caracteriza por el número de onda  $\tilde{k}$  y la impedancia compleja  $\tilde{Z}$  cuyas expresiones son [39, 46]

$$\tilde{Z} = Z_0 \left( \left( 1 + 0.09534 \left( \frac{f\rho_0}{R} \right)^{-0.754} \right) + j \left( -0.08504 \left( \frac{f\rho_0}{R} \right)^{-0.732} \right) \right) \quad (5.207)$$

<i>Geometría</i>	$\delta_1$ (m)	$\delta_3$ (m)	$\theta_0$	$R$ (rayl/m)	$t_p$ (m)	$d_h$ (m)	$\sigma$ (%)
1	0.045	0.045	$\pi$	1000	0.001	0.0035	15
2	0.045	0.045	$\pi/2$	1000	0.001	0.0035	15
3	0.0	0.045	0.0	1000	0.001	0.0035	15
4	0.0	0.057661	0.0	1000	0.001	0.0035	15
5	0.045	0.045	$\pi$	0.0	0.001	0.0035	15
6	0.045	0.045	$\pi$	2000	0.001	0.0035	15
7	0.045	0.045	$\pi$	4000	0.001	0.0035	15
8	0.045	0.045	$\pi$	8000	0.001	0.0035	15
9	0.0	0.057661	0.0	0.0	0.001	0.0035	15
10	0.0	0.057661	0.0	2000	0.001	0.0035	15
11	0.0	0.057661	0.0	4000	0.001	0.0035	15
12	0.0	0.057661	0.0	8000	0.001	0.0035	15
13	0.045	0.045	$\pi$	1000	--	--	--
14	0.045	0.045	$\pi$	1000	0.001	0.0035	20
15	0.045	0.045	$\pi$	1000	0.001	0.0035	10
16	0.045	0.045	$\pi$	1000	0.001	0.0035	5

TABLA 5.10: *Parámetros básicos de silenciadores de cámara reversa con material absorbente y placa perforada.*

$$\tilde{k} = k_0 \left( \left( 1 + 0.16 \left( \frac{f\rho_0}{R} \right)^{-0.577} \right) + j \left( -0.18897 \left( \frac{f\rho_0}{R} \right)^{-0.595} \right) \right) \quad (5.208)$$

Cabe indicar que cuando no hay material absorbente en el silenciador, como en las geometrías 5 y 9, la impedancia acústica se calcula mediante la expresión (2.118),

$$Z_p = \rho_0 c_0 \frac{6 \cdot 10^{-3} + j k_0 (t_p + 0.85 d_h F(\sigma))}{\sigma} \quad (5.209)$$

La figura 5.25 muestra la comparación de los resultados del modelo analítico y el cálculo con elementos finitos para la geometría 1. Se comprueba que existe una concordancia excelente entre ambos modelos en todo el rango de frecuencias representado.

La figura 5.26 presenta una comparación de la atenuación asociada a las geometrías 1, 2, 3 y 4. Se pretende analizar el efecto de la posición de los conductos de entrada y salida. Se puede observar que al haber material absorbente y placa perforada en la cámara reversa los valores mínimos de atenuación ya no son nulos. Puede comprobarse que la peor configuración corresponde al caso de ambos conductos descentrados a  $180^\circ$  (geometría 1), como consecuencia de la propagación del modo asimétrico (1,0) que da lugar a una caída de atenuación. Utilizando idénticas distancias de descentrado, pero con  $90^\circ$  de ángulo relativo (geometría 2), se evita este problema en gran medida, extendiéndose la propagación de modos de alto orden hasta el modo asimétrico (2,0). Para obtener una atenuación más favorable puede optarse por centrar la entrada (geometría 3), con lo cual dicho conducto cae sobre la línea nodal de los modos anteriores

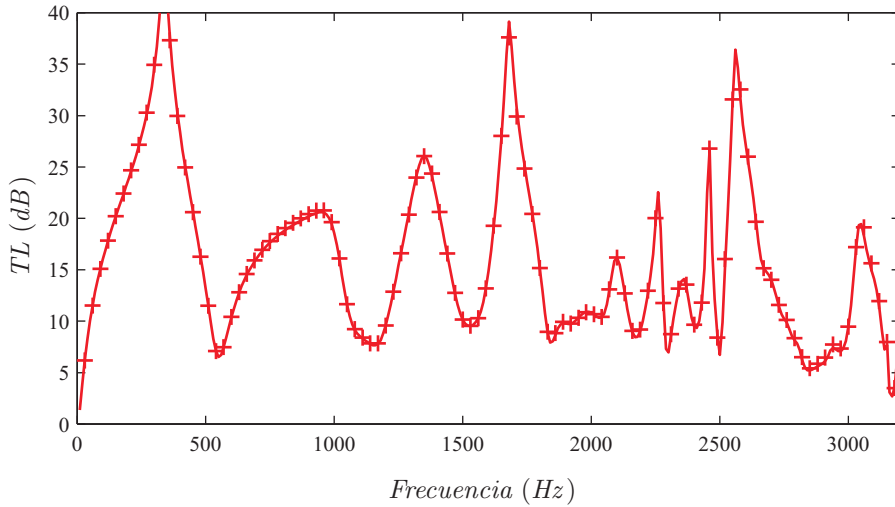


FIGURA 5.25: *TL de silenciador de cámara reversa con material absorbente y placa perforada: —, geometría 1, AM; +, ídem, MEF.*

y se restringe su propagación. Así, el primer modo de alto orden que se propaga es el modo axisimétrico  $(0,1)$ , cuya frecuencia de corte es mayor. Si se considera finalmente entrada centrada y salida en la línea nodal del modo  $(0,1)$  (geometría 4), se obtiene claramente el mejor comportamiento, tal como se deduce de la figura 5.26, dado que la propagación de modos de alto orden se extiende por encima del modo  $(0,1)$ .

La figura 5.27 muestra el efecto de la resistividad del material absorbente en el comportamiento acústico del silenciador estudiado. Para el análisis se han elegido las geometrías 5, 6, 7 y 8, que tienen los mismos parámetros geométricos y distintos valores de resistividad, como muestra la tabla 5.10. Se comprueba que con la introducción de fibra en el interior del silenciador se eliminan las bandas de paso, es decir, zonas de atenuación nula y se reduce el valor de la atenuación en los picos de resonancia. Se puede observar que el primer pico es menos sensible a la variación de resistividad que los picos siguientes. Cabe indicar que con mayores resistividades se obtiene mayor valor medio de atenuación en todo el rango de frecuencias de interés.

La figura 5.28 muestra los resultados de las geometrías 9, 10, 11 y 12. Se trata de una cámara reversa con material absorbente y placa perforada, con entrada centrada y salida descentrada con distancia óptima  $0.6276R_2$ . Se analiza ahora el efecto de la variación de resistividad incluyendo el caso sin material absorbente (geometría 9). De nuevo los comentarios anteriores son aplicables en el sentido de que la introducción de fibra elimina las bandas de paso y hace que la atenuación sea más uniforme en el rango de frecuencias estudiado. Sin embargo, dado que esta configuración tiene un posicionado apropiado de conductos, la configuración sin fibra es bastante aceptable, y la introducción de material absorbente no permite una mejora tan clara a alta

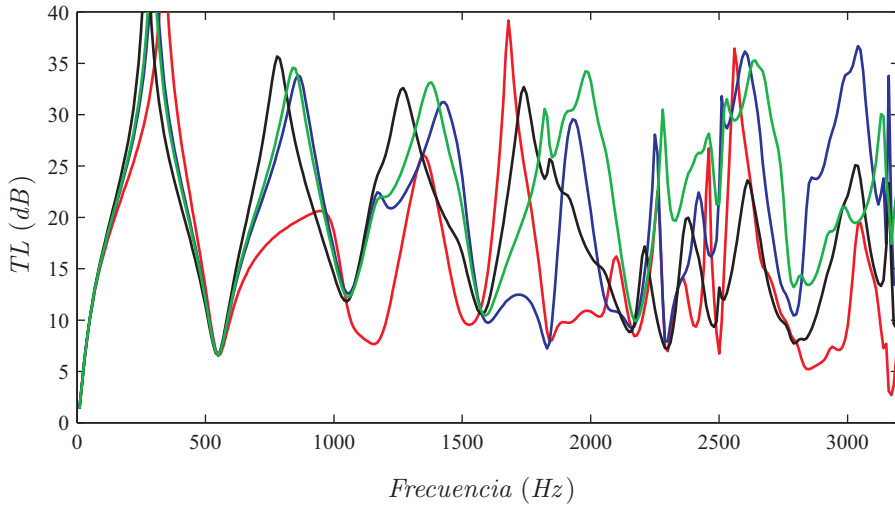


FIGURA 5.26: TL de silenciadores de cámara reversa con material absorbente y placa perforada: —, geometría 1; —, geometría 2; —, geometría 3; —, geometría 4.

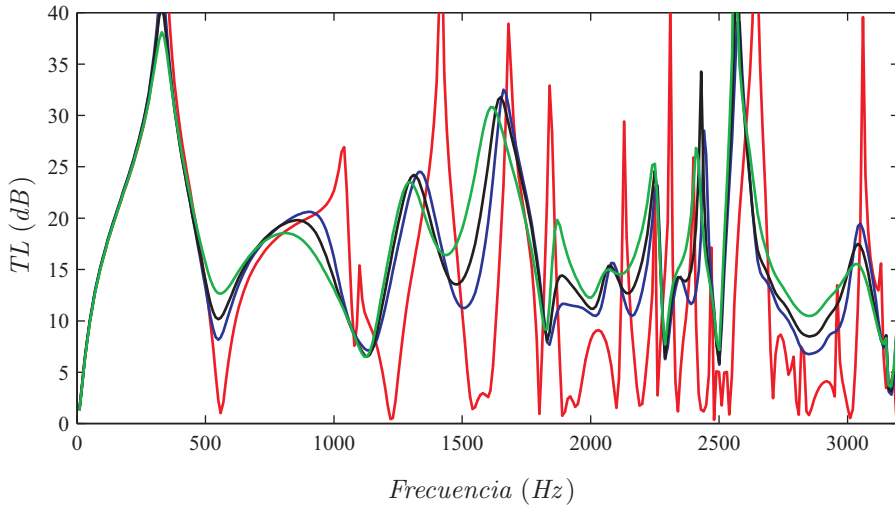


FIGURA 5.27: TL de silenciadores de cámara reversa con material absorbente y placa perforada: —, geometría 5; —, geometría 6; —, geometría 7; —, geometría 8.

frecuencia como en el caso anterior.

La figura 5.29 presenta el efecto que tiene la porosidad de la placa perforada en la atenuación acústica. Para el análisis se han elegido cuatro geometrías: geometría 13

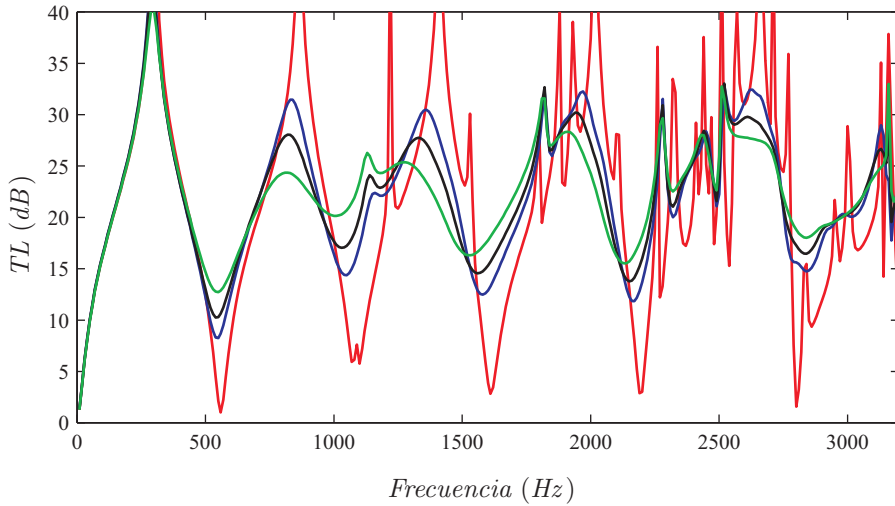


FIGURA 5.28: *TL de silenciadores de cámara reversa con material absorbente y placa perforada: —, geometría 9; —, geometría 10; —, geometría 11; —, geometría 12.*

(sin placa perforada), geometría 14 ( $\sigma = 20\%$ ), geometría 15 ( $\sigma = 10\%$ ) y geometría 16 ( $\sigma = 5\%$ ). Se puede observar que el primer pico de resonancia apenas sufre cambios con la variación de la porosidad. Sin embargo, con porosidades menores los siguientes picos se desplazan hacia frecuencias más bajas.

El tratamiento de esta geometría forma parte de las aportaciones de la Tesis y parte de los resultados se encuentran en los trabajos [7, 49].

## 5.4. Conclusiones

En este capítulo se ha llevado a cabo la descripción modal analítica de la solución de la ecuación de ondas en conductos. En primer lugar se han presentado soluciones clásicas para secciones transversales de tipo rectangular y circular. A continuación se ha considerado el caso de conductos de sección no uniforme con geometrías cónicas.

Posteriormente se ha presentado la aplicación detallada del método de ajuste modal al modelado tridimensional de silenciadores de geometrías diversas. Así, se ha obtenido una formulación de bajo coste computacional que presenta buenas características de convergencia y precisión. En primer lugar se han considerado geometrías reactivas, tales como cámaras de expansión simple y cámaras reversas, para las que se ha mostrado la formulación completa del método de ajuste modal así como las expresiones analíticas necesarias para evaluar las integrales asociadas al método. Posteriormente se ha propuesto una nueva configuración reactiva con doble salida opuesta, para la que se han deducido las ecuaciones de ajuste modal. El modelo obtenido ha sido

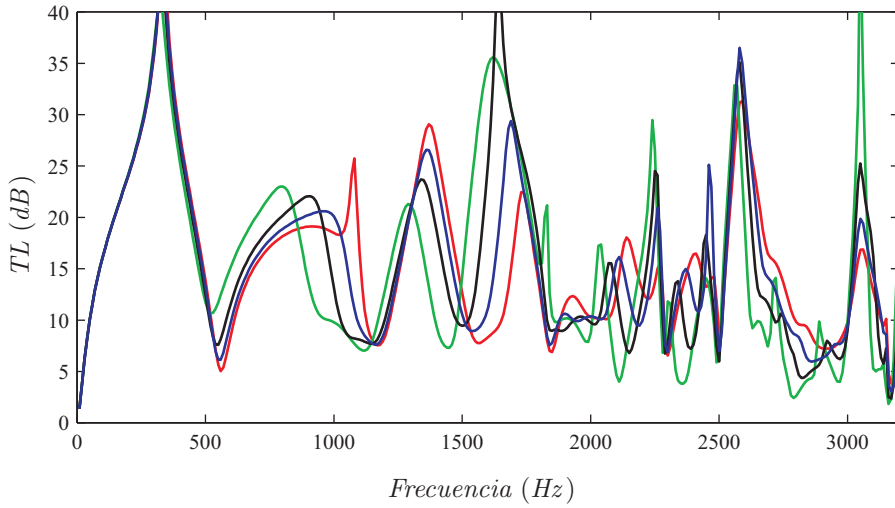


FIGURA 5.29: *TL de silenciadores de cámara reversa con material absorbente y placa perforada: —, geometría 13; —, geometría 14; —, geometría 15; —, geometría 16.*

validado mediante la comparación con resultados evaluados por medio del método de elementos finitos, mostrando una concordancia excelente. De igual manera se ha abordado el modelado de un silenciador disipativo como el caso de cámaras reversas con material absorbente y placa perforada. Para todas las geometrías modeladas se ha hecho un estudio paramétrico mostrando el efecto que tiene en la atenuación acústica la posición relativa de los conductos, la resistividad del material absorbente y la porosidad de la placa perforada .

Parte de los resultados presentados en este capítulo han sido publicados en las referencias [6, 7, 49].

## Capítulo 6

# Modelado acústico de catalizadores mediante técnicas analíticas modales multidimensionales

### Resumen del capítulo:

*En este capítulo se aplica el método de ajuste modal al modelado acústico de catalizadores con geometría axisimétrica, formados por conductos circulares y cónicos. Para ello, se recurre a las dos técnicas presentadas anteriormente, 3D conductos/3D monolito y 3D conductos/1D monolito. Se detalla el desarrollo matemático y las integrales vinculadas a cada configuración. Posteriormente se lleva a cabo la validación de los resultados obtenidos mediante las dos técnicas con cálculos de elementos finitos. Adicionalmente se estudia la influencia de dos parámetros importantes como la porosidad y resistividad del monolito sobre la atenuación acústica del catalizador.*





## 6.1. Introducción

En los capítulos anteriores se han presentado dos metodologías para el modelado acústico de catalizadores de automoción. Los modelos unidimensionales, tratados en el capítulo 2, presentan la ventaja de tener un bajo coste computacional, pero tienen como principal inconveniente el hecho de ser sólo válidos a bajas frecuencias. En cuanto al método de elementos finitos, presentado en los capítulos 3 (silenciadores) y 4 (catalizadores), es una alternativa completa en cuanto a versatilidad en tipo de geometrías, condiciones de contorno, etc., pero el coste computacional asociado, en ocasiones, es prohibitivo. Debido a la existencia de catalizadores con geometrías simples de conductos (circulares y cónicas) se plantea la posibilidad de llevar a cabo el modelado acústico desde un punto de vista analítico, que permita resolver en parte los inconvenientes asociados a los métodos anteriores.

Dokumaci [52, 53] estudió el comportamiento acústico de catalizadores con geometrías circulares simples (sin cambio de sección) utilizando el modelo de onda plana. La geometría con conductos cónicos se estudió en el trabajo de Selamat *et al.* [123] con el método de elementos finitos. La escasa consideración recibida en la literatura de estos tipos de geometrías desde un punto de vista analítico tridimensional ha conducido a la aplicación del método de ajuste modal a catalizadores con geometrías circulares y cónicas.

## 6.2. Geometría circular

### 6.2.1. Modelo 3D conductos/3D monolito

En esta sección se considera el modelado mediante ajuste modal de catalizadores de geometría circular. La técnica utilizada consiste en considerar que el campo acústico es tridimensional en todos los conductos incluyendo el monolito. La figura 6.1 muestra un catalizador de geometría circular, junto con la nomenclatura básica asociada. Se consideran cinco regiones  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  y  $E$ . El conducto de entrada tiene radio  $R_1$ , el intermedio  $R_2$  y el de salida  $R_3$ . El monolito (región  $C$ ) se caracteriza por medio de la densidad  $\rho_m$  y la velocidad del sonido  $c_m$  equivalentes, como se ha visto en la sección 2.8.2, mientras que el medio de propagación de las regiones restantes ( $A$ ,  $B$ ,  $D$  y  $E$ ) es el aire con densidad  $\rho_0$  y velocidad del sonido  $c_0$ .

La presión acústica en las regiones donde el medio de propagación es el aire, como por ejemplo la  $A$ , viene dada por

$$P_A(r, z_1) = \sum_{n=0}^{\infty} (A_n^+ e^{-jk_{A,n}z_1} + A_n^- e^{jk_{A,n}z_1}) \psi_{A,n}(r) \quad (6.1)$$

siendo  $\psi_{A,n}(r)$  el modo de presión transversal en la región  $A$  y  $k_{A,n}$  el número de onda axial en el aire dado por

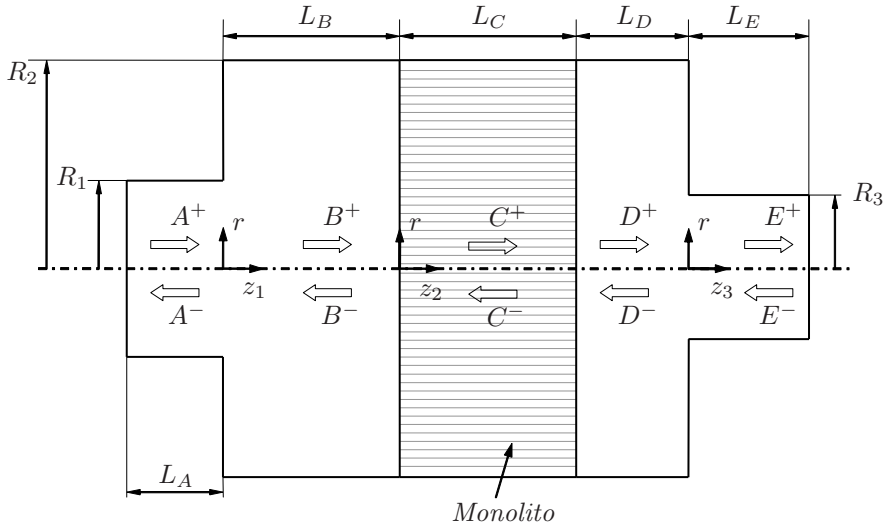


FIGURA 6.1: Esquema del catalizador de geometría circular asociado al modelo 3D conductos/3D monolito.

$$k_{A,n} = \begin{cases} \sqrt{k_0^2 - \left(\frac{\alpha_n}{R_1}\right)^2}, & k_0 > \frac{\alpha_n}{R_1} \\ -\sqrt{k_0^2 - \left(\frac{\alpha_n}{R_1}\right)^2}, & k_0 < \frac{\alpha_n}{R_1} \end{cases} \quad (6.2)$$

En el monolito la presión acústica se expresa de la siguiente manera

$$P_C(r, z_2) = \sum_{n=0}^{\infty} (C_n^+ e^{-jk_{C,n}z_2} + C_n^- e^{jk_{C,n}z_2}) \psi_{C,n}(r) \quad (6.3)$$

donde  $\psi_{C,n}(r)$  es el modo de presión transversal de la región C y  $k_{C,n}$  es el número de onda axial en el monolito dado por

$$k_{C,n} = \begin{cases} \sqrt{k_m^2 - \left(\frac{\alpha_n}{R_2}\right)^2}, & k_m > \frac{\alpha_n}{R_2} \\ -\sqrt{k_m^2 - \left(\frac{\alpha_n}{R_2}\right)^2}, & k_m < \frac{\alpha_n}{R_2} \end{cases} \quad (6.4)$$

En la ecuación (6.4)  $k_m$  es el número de onda equivalente definido por  $k_m = \omega/c_m$ , donde  $c_m$  es la velocidad del sonido equivalente que se puede expresar por la expresión (2.186) indicada en el capítulo 2,

$$c_m = \frac{c_0}{\sqrt{\left(1 + \frac{R\phi}{j\omega\rho_0} G_c(s)\right) (\gamma - (\gamma - 1) F)}} \quad (6.5)$$

A partir de las presiones puede evaluarse la velocidad acústica axial utilizando la ecuación de Euler (2.47), tal como se ha hecho anteriormente. Para ello, se utiliza la densidad del aire  $\rho_0$  en los conductos  $A$ ,  $B$ ,  $D$  y  $E$ , y la densidad equivalente del monolito  $\rho_m$  en el conducto  $C$ . Dicha densidad viene dada por la ecuación (2.180).

Las condiciones de contorno a satisfacer por el campo acústico son, en la expansión

$$P_A(r, z_1)|_{z_1=0} = P_B(r, z_1)|_{z_1=0} \quad \text{en } S_A \quad (6.6)$$

$$U_A(r, z_1)|_{z_1=0} = U_B(r, z_1)|_{z_1=0} \quad \text{en } S_A \quad (6.7)$$

$$U_B(r, z_1)|_{z_1=0} = 0 \quad \text{en } S_B - S_A \quad (6.8)$$

En la interfase  $B-C$  resulta

$$P_B(r, z_1)|_{z_1=L_B} = P_C(r, z_2)|_{z_2=0} \quad \text{en } S_B \equiv S_C \quad (6.9)$$

$$U_B(r, z_1)|_{z_1=L_B} = \phi U_C(r, z_2)|_{z_2=0} \quad \text{en } S_B \equiv S_C \quad (6.10)$$

Siendo  $\phi$  la porosidad del monolito. Se tienen ecuaciones similares para la interfase  $C-D$

$$P_C(r, z_2)|_{z_2=L_C} = P_D(r, z_3)|_{z_3=-L_D} \quad \text{en } S_C \equiv S_D \quad (6.11)$$

$$\phi U_C(r, z_2)|_{z_2=L_C} = U_D(r, z_3)|_{z_3=-L_D} \quad \text{en } S_C \equiv S_D \quad (6.12)$$

y para la contracción

$$P_D(r, z_3)|_{z_3=0} = P_E(r, z_3)|_{z_3=0} \quad \text{en } S_E \quad (6.13)$$

$$U_D(r, z_3)|_{z_3=0} = U_E(r, z_3)|_{z_3=0} \quad \text{en } S_E \quad (6.14)$$

$$U_D(r, z_3)|_{z_3=0} = 0 \quad \text{en } S_D - S_E \quad (6.15)$$

Las ecuaciones asociadas a la aplicación de la técnica de ajuste modal se obtienen como sigue. Para la ecuación (6.6) de continuidad de presión en la expansión, se multiplica ésta por el modo  $\psi_{A,s}(r)$ , con  $s = 0, 1, 2, 3, \dots, \infty$  y se integra en  $S_A$ , llegando a

$$(A_s^+ + A_s^-) \langle \psi_{A,s}(r) \psi_{A,s}(r) \rangle_{S_A} = \sum_{n=0}^{\infty} (B_n^+ + B_n^-) \langle \psi_{B,n}(r) \psi_{A,s}(r) \rangle_{S_A} \quad (6.16)$$

donde  $\langle \rangle_S$  denota la integral en  $S$  y

$$\langle \psi_{A,s}(r) \psi_{A,s}(r) \rangle_{S_A} = R_1^2 J_0^2(\alpha_s) \quad (6.17)$$

$$\langle \psi_{B,n}(r) \psi_{A,s}(r) \rangle_{S_A} = \begin{cases} \frac{2\alpha_n \frac{R_1}{R_2} J_0(\alpha_s) J_1\left(\frac{\alpha_n}{R_2} R_1\right)}{\left(\frac{\alpha_n}{R_2}\right)^2 - \left(\frac{\alpha_s}{R_1}\right)^2} & \frac{\alpha_n}{R_2} \neq \frac{\alpha_s}{R_1} \\ R_1^2 J_0^2(\alpha_s) & \frac{\alpha_n}{R_2} = \frac{\alpha_s}{R_1} \end{cases} \quad (6.18)$$

Para las ecuaciones asociadas al campo de velocidad en la expansión las ecuaciones (6.7) y (6.8) se multiplican por  $\psi_{B,s}(r)$ , para  $s = 0, 1, 2, 3, \dots, \infty$ , la primera se integra en  $S_A$  y la segunda en  $S_B - S_A$ , ambas se suman y se obtiene

$$\sum_{n=0}^{\infty} k_{A,n} (A_n^+ - A_n^-) \mathfrak{R}_1 = k_{B,s} (B_s^+ - B_s^-) R_2^2 J_0^2(\alpha_s) \quad (6.19)$$

donde

$$\mathfrak{R}_1 = \begin{cases} \frac{2\alpha_s \frac{R_1}{R_2} J_0(\alpha_n) J_1\left(\frac{\alpha_s}{R_2} R_1\right)}{\left(\frac{\alpha_s}{R_2}\right)^2 - \left(\frac{\alpha_n}{R_1}\right)^2} & \frac{\alpha_s}{R_2} \neq \frac{\alpha_n}{R_1} \\ R_1^2 J_0^2(\alpha_s) & \frac{\alpha_s}{R_2} = \frac{\alpha_n}{R_1} \end{cases} \quad (6.20)$$

En cuanto a las condiciones en la interfase  $B-C$ , ecuaciones (6.9) y (6.10), las propiedades de ortogonalidad de los modos de presión permiten escribir [44, 109, 119],

$$B_s^+ e^{-jk_{B,s}L_B} + B_s^- e^{jk_{B,s}L_B} = C_s^+ + C_s^- \quad (6.21)$$

para la continuidad de presión, y

$$\frac{k_{B,s}}{\rho_0 \omega} (B_s^+ e^{-jk_{B,s}L_B} - B_s^- e^{jk_{B,s}L_B}) = \phi \frac{k_{C,s}}{\rho_m \omega} (C_s^+ - C_s^-) \quad (6.22)$$

para la continuidad de velocidad.

De manera similar y haciendo uso de las propiedades de ortogonalidad de los modos de presión, las ecuaciones (6.11) y (6.12) proporcionan

$$C_s^+ e^{-jk_{C,s}L_C} + C_s^- e^{jk_{C,s}L_C} = D_s^+ e^{-jk_{D,s}(-L_D)} + D_s^- e^{jk_{D,s}(-L_D)} \quad (6.23)$$

$$\phi \frac{k_{C,s}}{\rho_m \omega} (C_s^+ e^{-jk_{C,s}L_C} - C_s^- e^{jk_{C,s}L_C}) = \frac{k_{D,s}}{\rho_0 \omega} (D_s^+ e^{-jk_{D,s}(-L_D)} - D_s^- e^{jk_{D,s}(-L_D)}) \quad (6.24)$$

En la contracción se utiliza un procedimiento idéntico al utilizado en la expansión, de manera que para  $s = 0, 1, 2, 3, \dots, \infty$ , la ecuación de continuidad de presión (6.13) permite obtener

$$\sum_{n=0}^{\infty} (D_n^+ + D_n^-) \langle \psi_{D,n}(r) \psi_{E,s}(r) \rangle_{S_E} = (E_s^+ + E_s^-) \langle \psi_{E,s}(r) \psi_{E,s}(r) \rangle_{S_E} \quad (6.25)$$

donde

$$\langle \psi_{E,s}(r) \psi_{E,s}(r) \rangle_{S_E} = R_3^2 J_0^2(\alpha_s) \quad (6.26)$$

$$\langle \psi_{D,n}(r) \psi_{E,s}(r) \rangle_{S_E} = \begin{cases} \frac{2\alpha_n \frac{R_3}{R_2} J_0(\alpha_s) J_1\left(\frac{\alpha_n}{R_2} R_3\right)}{\left(\frac{\alpha_n}{R_2}\right)^2 - \left(\frac{\alpha_s}{R_3}\right)^2} & \frac{\alpha_n}{R_2} \neq \frac{\alpha_s}{R_3} \\ R_3^2 J_0^2(\alpha_s) & \frac{\alpha_n}{R_2} = \frac{\alpha_s}{R_3} \end{cases} \quad (6.27)$$

Finalmente, las ecuaciones asociadas al campo de velocidad en la contracción, (6.14) y (6.15), proporcionan

$$k_{D,s} (D_s^+ - D_s^-) R_2^2 J_0^2(\alpha_s) = \sum_{n=0}^{\infty} k_{E,n} (E_n^+ - E_n^-) \mathfrak{R}_2 \quad (6.28)$$

donde

$$\mathfrak{R}_2 = \begin{cases} \frac{2\alpha_s \frac{R_3}{R_2} J_0(\alpha_n) J_1\left(\frac{\alpha_s}{R_2} R_3\right)}{\left(\frac{\alpha_s}{R_2}\right)^2 - \left(\frac{\alpha_n}{R_3}\right)^2} & \frac{\alpha_s}{R_2} \neq \frac{\alpha_n}{R_3} \\ R_3^2 J_0^2(\alpha_s) & \frac{\alpha_s}{R_2} = \frac{\alpha_n}{R_3} \end{cases} \quad (6.29)$$

El sistema algebraico de ecuaciones obtenido se resuelve mediante truncado, aplicando las condiciones de contorno oportunas. El cálculo de la  $TL$  implica una onda incidente,  $A_0^+ = 1$  y  $A_n^+ = 0$  para  $n > 0$ , y una salida anecoica,  $E_n^- = 0$ . Así se consiguen  $8(s_{max} + 1)$  ecuaciones y  $8(n_{max} + 1)$  incógnitas ( $A_n^-, B_n^+, B_n^-, C_n^+, C_n^-, D_n^+, D_n^-$  y  $E_n^+$ ). El truncado de  $s_{max}$  y  $n_{max}$  a un valor  $q$  permite la evaluación de la  $TL$  mediante la expresión

$$TL = -20 \log \left( \frac{R_3}{R_1} \left| \sum_{n=0}^q E_n^+ e^{-jk_{E,n} L_E} \right| \right) \quad (6.30)$$

Para la validación de la herramienta analítica se toma como referencia el método de elementos finitos. La malla axisimétrica utilizada para efectuar dicha validación

está formada por elementos cuadriláteros cuadráticos con un tamaño de elemento de 0.0025 m. Para la solución analítica se toma el valor  $q = 5$ .

La figura 6.2 muestra la comparación de los resultados del modelo de ajuste modal y de elementos finitos para la geometría de catalizador circular modelado con la técnica 3D conductos/3D monolito. La geometría considerada está caracterizada por  $R_1 = R_3 = 0.0268$  m,  $R_2 = 0.091875$  m,  $L_A = L_B = L_D = L_E = 0.1$  m y la longitud del monolito es  $L_C = 0.2$  m. Los conductos capilares son de sección transversal cuadrada de modo que se toma  $\alpha = 1.07$  para evaluar el número de onda tangencial  $s$  mediante la ecuación (2.183). El monolito se caracteriza por los siguientes valores:  $R = 500$  rayl/m y  $\phi = 0.8$ . Se puede comprobar que hay una concordancia excelente entre ajuste modal y elementos finitos en todo el rango de frecuencia de interés.

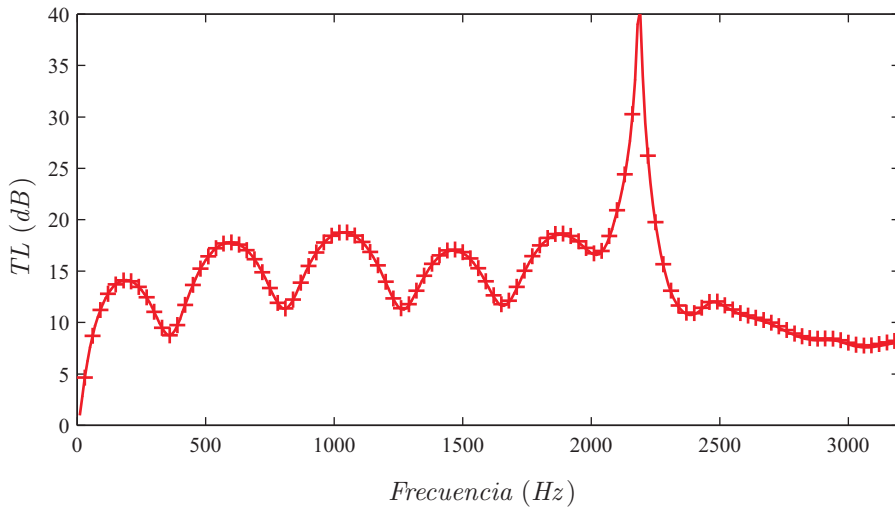


FIGURA 6.2: *TL de catalizador circular modelado con la técnica 3D/3D:*  
—, AM; +, MEF.

La figura 6.3 muestra la influencia que tiene la porosidad del monolito en la atenuación acústica. En dicha figura se presentan resultados para los valores  $\phi = 0.7, 0.8$  y  $0.9$ . El resto de valores son los utilizadas para la validación del método de ajuste modal. Se observa que valores bajos de porosidad implican una menor atenuación a bajas frecuencias (primera cúpula de atenuación). A partir de esta primera cúpula de atenuación, la influencia de la porosidad es más irregular y depende del rango de frecuencias considerado. Por ejemplo, una menor porosidad tiende a producir los valores máximos de atenuación en la segunda y la tercera cúpula. Para frecuencias mayores el efecto de la porosidad es el contrario, con mayor atenuación al aumentar  $\phi$ . Esta influencia irregular es debida a que en este análisis se ha asumido que se varía el valor de  $\phi$  mientras que  $R$  permanece constante, lo cual implica que se modifica otra característica de monolito (por ejemplo, el tamaño de los conductos capilares).

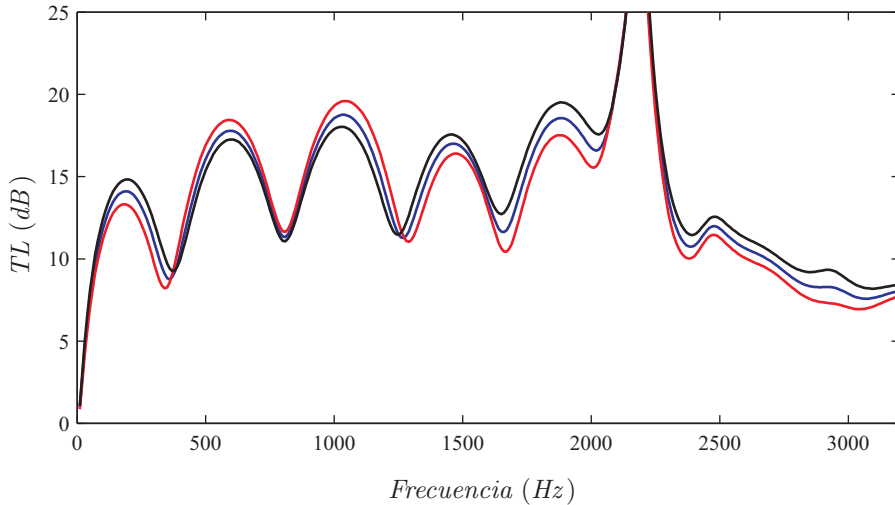


FIGURA 6.3: TL de catalizador circular modelado con la técnica 3D/3D para diferentes valores de porosidad del monolito, AM: —,  $\phi = 0.7$ ; —,  $\phi = 0.8$ ; —,  $\phi = 0.9$ .

El efecto de la resistividad se presenta en la figura 6.4. Se consideran los valores  $R = 500$  rayl/m,  $750$  rayl/m y  $1000$  rayl/m, para un valor constante de la porosidad dado por  $\phi = 0.8$ . En este caso, existe una tendencia clara en el índice de pérdidas de transmisión del catalizador. El aumento de la resistividad da lugar a una mayor atenuación en todo el rango de frecuencias de interés. Dada la excelente concordancia con los resultados de elementos finitos mostrados en la figura 6.2, resulta evidente que las tendencias mostradas aquí en base a ajuste modal coinciden con los obtenidos en el capítulo 4.

### 6.2.2. Modelo 3D conductos/1D monolito

La figura 6.5 muestra un catalizador de geometría circular modelado con la técnica 3D conductos/1D monolito, con la notación básica asociada. La técnica utilizada en esta sección consiste en la sustitución del monolito por una matriz de transferencia que asume comportamiento acústico unidimensional en su interior. De esta forma, la solución del campo acústico puede ser tridimensional en los conductos de entrada y salida (las regiones  $A$ ,  $B$ ,  $C$  y  $D$  de la figura 6.5), pero no se permite la existencia de modos de alto orden en el monolito.

Las condiciones a verificar por el campo acústico son las que se muestran a continuación. En la expansión se tiene

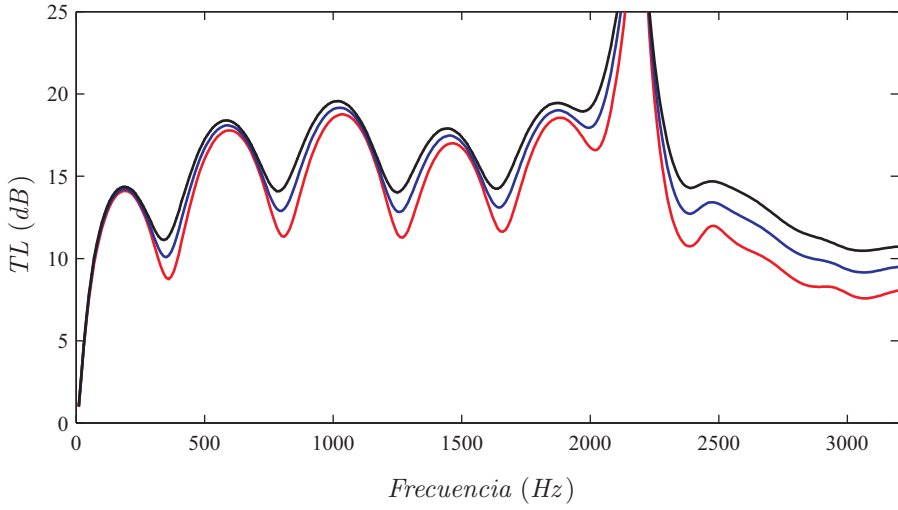


FIGURA 6.4:  $TL$  de catalizador circular modelado con la técnica 3D/3D para diferentes valores de resistividad, AM: —,  $R = 500$  rayl/m; —,  $R = 750$  rayl/m; —,  $R = 1000$  rayl/m.

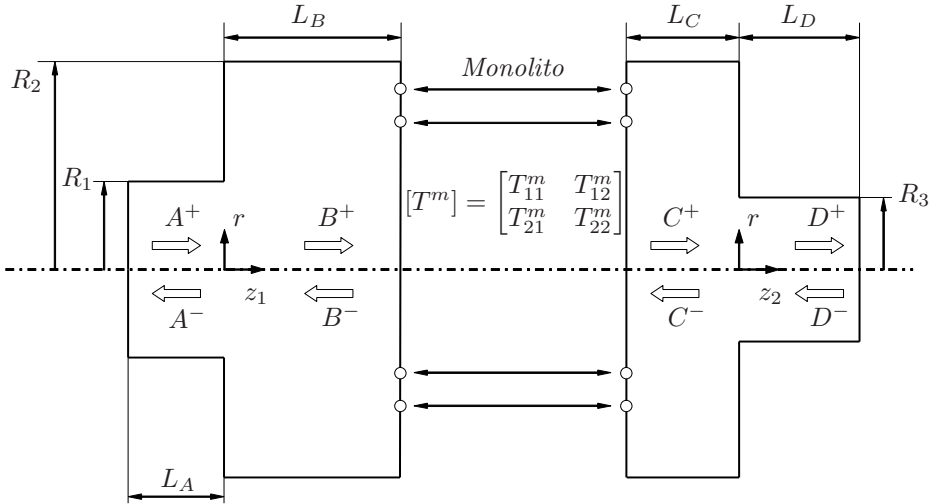


FIGURA 6.5: Esquema del catalizador de geometría circular asociado al modelo 3D conductos/1D monolito.

$$P_A(r, z_1)|_{z_1=0} = P_B(r, z_1)|_{z_1=0} \quad \text{en } S_A \quad (6.31)$$

$$U_A(r, z_1)|_{z_1=0} = U_B(r, z_1)|_{z_1=0} \quad \text{en } S_A \quad (6.32)$$

$$U_B(r, z_1)|_{z_1=0} = 0 \quad \text{en } S_B - S_A \quad (6.33)$$



En la contracción puede escribirse

$$P_C(r, z_2)|_{z_2=0} = P_D(r, z_2)|_{z_2=0} \quad \text{en } S_D \quad (6.34)$$

$$U_C(r, z_2)|_{z_2=0} = U_D(r, z_2)|_{z_2=0} \quad \text{en } S_D \quad (6.35)$$

$$U_C(r, z_2)|_{z_2=0} = 0 \quad \text{en } S_C - S_D \quad (6.36)$$

En la técnica utilizada, 3D conductos/1D monolito, el monolito se sustituye por una matriz de cuatro polos  $[T^m]$ , con lo que la relación entre los campos acústicos de presión y velocidad a ambos lados de éste resulta ser

$$\begin{Bmatrix} P_B(r, z_1)|_{z_1=L_B} \\ U_B(r, z_1)|_{z_1=L_B} \end{Bmatrix} = [T^m] \begin{Bmatrix} P_C(r, z_2)|_{z_2=-L_C} \\ U_C(r, z_2)|_{z_2=-L_C} \end{Bmatrix} \quad \text{en } S_B \equiv S_C \quad (6.37)$$

donde

$$[T^m] = \begin{bmatrix} T_{11}^m & T_{12}^m \\ T_{21}^m & T_{22}^m \end{bmatrix} \quad (6.38)$$

Por tanto, las condiciones a verificar en la entrada y la salida del monolito son las siguientes

$$P_B(r, z_1)|_{z_1=L_B} = T_{11}^m P_C(r, z_2)|_{z_2=-L_C} + T_{12}^m U_C(r, z_2)|_{z_2=-L_C} \quad \text{en } S_B \equiv S_C \quad (6.39)$$

$$U_B(r, z_1)|_{z_1=L_B} = T_{21}^m P_C(r, z_2)|_{z_2=-L_C} + T_{22}^m U_C(r, z_2)|_{z_2=-L_C} \quad \text{en } S_B \equiv S_C \quad (6.40)$$

Procediendo de forma similar al caso estudiado en la sección 6.2.1, para la expansión se obtienen las ecuaciones (6.16) y (6.19). En lo referente a la contracción, las ecuaciones obtenidas en este caso son iguales a las ecuaciones (6.25) y (6.28), con algunos cambios. Éstos consisten en sustituir los coeficientes  $D$  y  $E$  del tubo de salida del catalizador circular estudiado con la técnica 3D conductos/3D monolito por los nuevos coeficientes  $C$  y  $D$  asociados a la salida del catalizador analizado en esta sección. En cuanto a las ecuaciones (6.39) y (6.40), las propiedades de ortogonalidad de los modos de presión permiten escribir [44, 109, 119]

$$B_s^+ e^{-jk_{B,s}L_B} + B_s^- e^{jk_{B,s}L_B} = T_{11}^m \left( C_s^+ e^{-jk_{C,s}(-L_C)} + C_s^- e^{jk_{C,s}(-L_C)} \right) + T_{12}^m \frac{k_{C,s}}{\rho_0 \omega} \left( C_s^+ e^{-jk_{C,s}(-L_C)} - C_s^- e^{jk_{C,s}(-L_C)} \right) \quad (6.41)$$

$$\frac{k_{B,s}}{\rho_0 \omega} \left( B_s^+ e^{-jk_{B,s}L_B} - B_s^- e^{jk_{B,s}L_B} \right) = T_{21}^m \left( C_s^+ e^{-jk_{C,s}(-L_C)} + C_s^- e^{jk_{C,s}(-L_C)} \right) + T_{22}^m \frac{k_{C,s}}{\rho_0 \omega} \left( C_s^+ e^{-jk_{C,s}(-L_C)} - C_s^- e^{jk_{C,s}(-L_C)} \right) \quad (6.42)$$

El sistema de ecuaciones anterior se resuelve aplicando las condiciones de contorno adecuadas en las secciones de entrada y salida (onda plana en la entrada,  $A_0^+ = 1$  y  $A_n^+ = 0$  para  $n > 0$ , y conducto con salida anecoica,  $D_n^- = 0$ ). Así, haciendo  $s_{max} = n_{max} = q$ , se dispone de  $6(q+1)$  ecuaciones e incógnitas. El índice de pérdidas de transmisión se obtiene a partir de la fórmula

$$TL = -20 \log \left( \frac{R_3}{R_1} \left| \sum_{n=0}^q D_n^+ e^{-jk_{D,n}L_D} \right| \right) \quad (6.43)$$

La validación del desarrollo previo se lleva a cabo mediante la comparación con resultados obtenidos mediante elementos finitos para un catalizador circular modelado con la técnica 3D conductos/1D monolito. La geometría estudiada está caracterizada por los siguientes valores:  $R_1 = R_3 = 0.0268$  m,  $R_2 = 0.091875$  m y  $L_A = L_B = L_C = L_D = 0.1$  m. El monolito en el modelo 3D conductos/1D monolito se caracteriza por una matriz de cuatro polos  $[T^m]$ , que en ausencia de flujo medio dicha matriz se calcula por las expresiones (2.187), (2.339) y (2.340) indicadas en el capítulo 2,

$$[T^m] = \begin{bmatrix} \cos(k_m L_m) & \frac{jZ_m \operatorname{sen}(k_m L_m)}{\phi} \\ \frac{j\phi \operatorname{sen}(k_m L_m)}{Z_m} & \cos(k_m L_m) \end{bmatrix} \quad (6.44)$$

donde la longitud del monolito es  $L_m = 0.2$  m y la porosidad del monolito es  $\phi = 0.8$ . Las simulaciones de ajuste modal y de elementos finitos se llevan a cabo considerando los siguientes valores (iguales a los valores utilizados en la sección 6.2.1):  $R = 500$  rayl/m,  $C_p = 1007$  J/(kg K),  $\mu = 1.802 \cdot 10^{-5}$  Pa s y  $\kappa = 0.02476$  W/(m K). Cabe indicar que los conductos capilares son de sección transversal cuadrada y por tanto se toma  $\alpha = 1.07$ . Como en el caso anterior, se ha utilizado una malla axisimétrica de elementos cuadriláteros cuadráticos de 0.0025 m de tamaño uniforme. Para el método de ajuste modal se toma como número máximo de modos el valor  $q = 5$ . La figura 6.6 muestra los resultados obtenidos mediante los dos métodos. Puede observarse que, al igual que ocurría en el modelo 3D/3D, de nuevo existe una concordancia excelente entre el método de ajuste modal y elementos finitos en todo el rango de frecuencia de interés.

En la figura 6.7 se muestra el efecto que tiene la porosidad del monolito en la atenuación acústica del catalizador circular modelado con la técnica 3D/1D. Se consideran los valores  $\phi = 0.7, 0.8$  y  $0.9$ . El resto de valores son los utilizados en la validación (en concreto, se tiene  $R = 500$  rayl/m). Como en el modelo 3D/3D se puede observar que a bajas frecuencias (primera cúpula), a menor porosidad se tiene menor valor de atenuación. A partir de la segunda cúpula el modelo predice una influencia más irregular. Por ejemplo, una menor porosidad produce mayor atenuación en la segunda y tercera cúpula. Para frecuencias altas se obtiene mayor atenuación aumentando el valor de  $\phi$ .

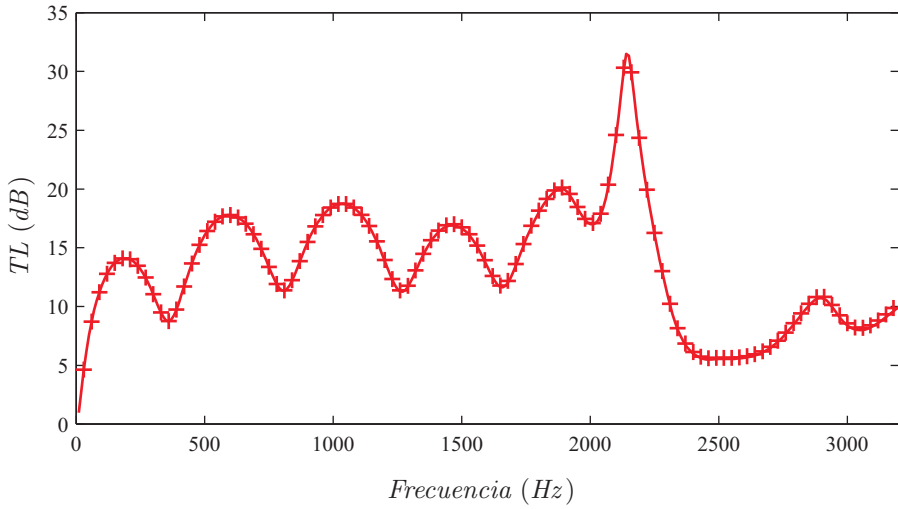


FIGURA 6.6: *TL de catalizador circular modelado con la técnica 3D/1D:*  
 —, AM; +, MEF.

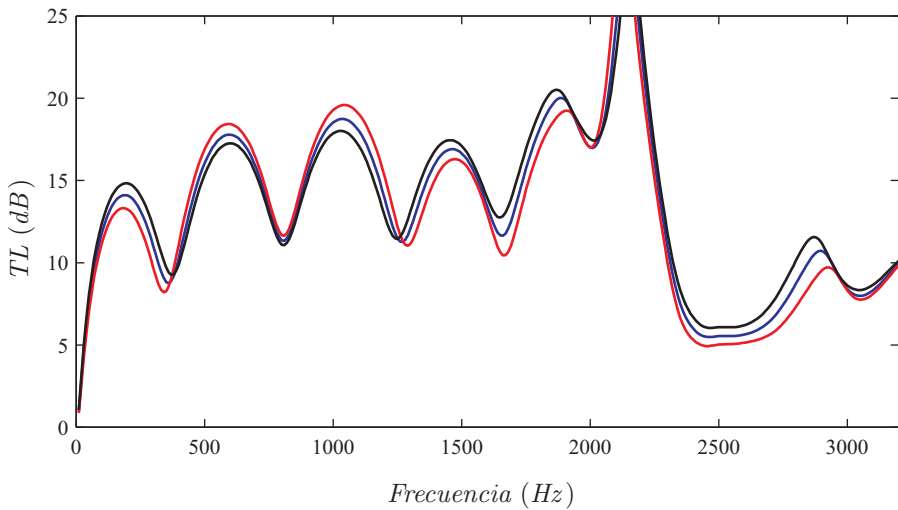


FIGURA 6.7: *TL de catalizador circular modelado con la técnica 3D/1D para diferentes valores de porosidad del monolito, AM:* —,  $\phi = 0.7$ ; —,  $\phi = 0.8$ ; —,  $\phi = 0.9$ .

La figura 6.8 muestra la influencia de la resistividad en el comportamiento acústico del catalizador. Para el análisis se han considerado tres valores:  $R = 500$  rayl/m,  $R = 750$  rayl/m y  $R = 1000$  rayl/m, para una porosidad constante dada por  $\phi = 0.8$ . Se puede observar que a mayor resistividad se obtienen mayores niveles de atenuación en todo el rango de frecuencias.

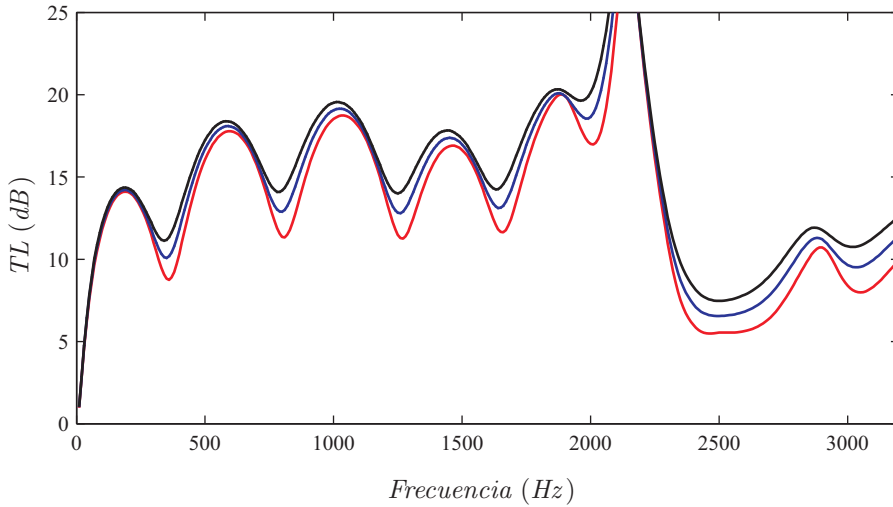


FIGURA 6.8: *TL de catalizador circular modelado con la técnica 3D/1D para diferentes valores de resistividad, AM: —,  $R = 500$  rayl/m; —,  $R = 750$  rayl/m; —,  $R = 1000$  rayl/m.*

### 6.2.3. Comparación de modelos 3D/3D y 3D/1D

En esta sección se lleva a cabo la comparación de los resultados proporcionados por los modelos 3D/3D y 3D/1D implementados mediante ajuste modal. Para ello, se analiza de nuevo la misma geometría estudiada en las secciones 6.2.1 y 6.2.2, que consiste en un catalizador circular cuyas dimensiones para el modelo 3D/3D según la figura 6.1 son  $R_1 = R_3 = 0.0268$  m,  $R_2 = 0.091875$  m,  $L_A = L_B = L_D = L_E = 0.1$  m y  $L_C = 0.2$  m, que corresponden a los valores  $R_1 = R_3 = 0.0268$  m,  $R_2 = 0.091875$  m,  $L_A = L_B = L_C = L_D = 0.1$  m y  $L_m = 0.2$  m del modelo 3D/1D (véase la figura 6.5). El monolito se caracteriza mediante los valores  $R = 500$  rayl/m y  $\phi = 0.8$ . Los conductos capilares tienen una sección transversal cuadrada con lo cual se toma  $\alpha = 1.07$  para calcular el número de onda tangencial  $s$ .

La figura 6.9 presenta los resultados obtenidos mediante las simulaciones de ajuste modal 3D/3D y 3D/1D. Se puede observar que existe una concordancia de las dos curvas de atenuación en el rango de bajas y medias frecuencias. Las discrepancias entre los dos modelos para esta geometría aparecen en mayor medida a altas frecuencias.

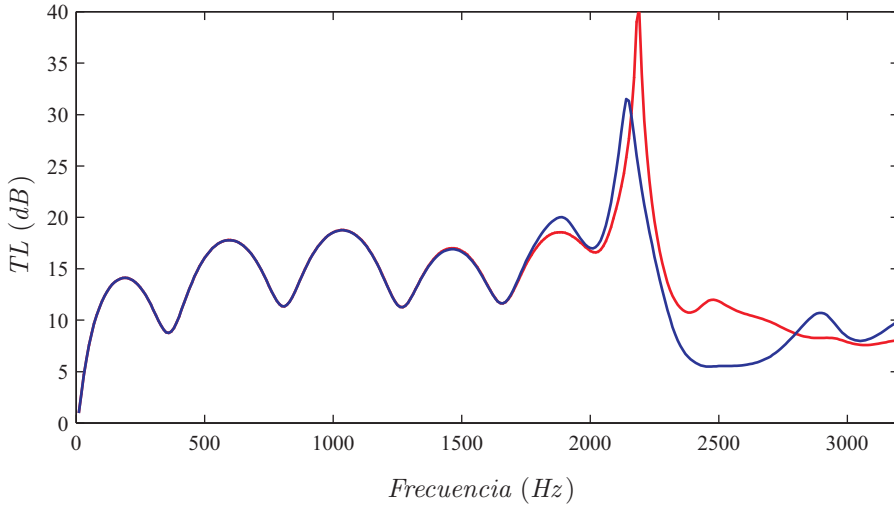


FIGURA 6.9:  $TL$  de catalizador circular, AM: —, modelo 3D/3D; —, modelo 3D/1D.

## 6.3. Geometría con conductos cónicos

### 6.3.1. Modelo 3D conductos/3D monolito

La figura 6.10 muestra un catalizador con conductos cónicos formado por tres conductos de tipo circular (entrada, salida y monolito) y dos conductos troncocónicos (expansión y contracción), junto con la notación básica y los sistemas de coordenadas incluidos en la formulación. La utilización de las transiciones cónicas en silenciadores y catalizadores puede tener diversos fines, como por ejemplo garantizar un adecuado proceso de renovación de la carga en un rango de revoluciones amplio [95] o reducir los fenómenos de separación de flujo [54]. Debe indicarse que estos fenómenos quedan fuera de los objetivos planteados en la Tesis, los cuales se refieren al modelado y caracterización de silenciadores y catalizadores desde un punto de vista acústico.

Para la resolución del problema acústico cabe considerar la ecuación de Helmholtz en coordenadas cilíndricas y esféricas, ecuaciones (5.19) y (5.33), respectivamente. Se asume que el dominio estudiado y las condiciones de contorno aplicadas presentan simetría de revolución. En base a los desarrollos previos, la solución del campo de presiones axisimétrico obtenida a partir de la expresión (5.29) para los conductos de tipo circular permite escribir para el tubo de entrada,

$$P_A(r, z_1) = \sum_{n=0}^{\infty} (A_n^+ e^{-jk_{A,n}z_1} + A_n^- e^{jk_{A,n}z_1}) J_0\left(\frac{\alpha_n}{R_A} r\right) \quad (6.45)$$

y de forma análoga, para el conducto de salida se tiene

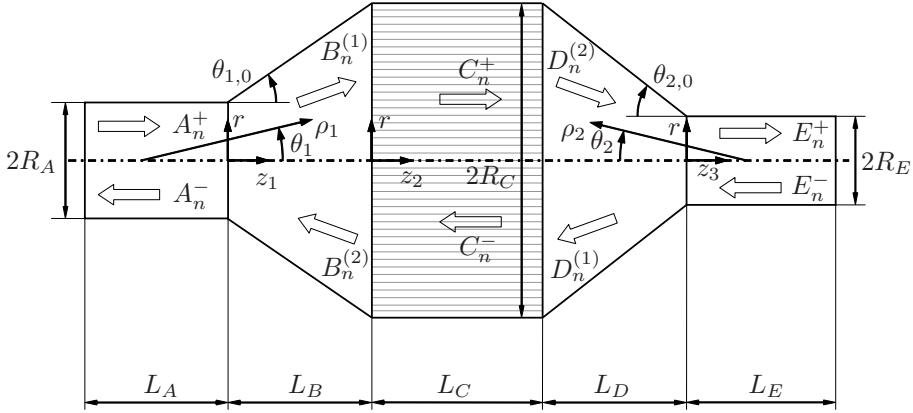


FIGURA 6.10: Esquema del catalizador con conductos cónicos asociado al modelo 3D conductos/3D monolito.

$$P_E(r, z_3) = \sum_{n=0}^{\infty} (E_n^+ e^{-jk_{E,n}z_3} + E_n^- e^{jk_{E,n}z_3}) J_0\left(\frac{\alpha_n}{R_E} r\right) \quad (6.46)$$

El número de onda axial del conducto de entrada viene dado por

$$k_{A,n} = \begin{cases} \sqrt{k_0^2 - \left(\frac{\alpha_n}{R_A}\right)^2}, & k_0 > \frac{\alpha_n}{R_A} \\ -\sqrt{k_0^2 - \left(\frac{\alpha_n}{R_A}\right)^2}, & k_0 < \frac{\alpha_n}{R_A} \end{cases} \quad (6.47)$$

válido también para el conducto de salida  $E$  con las sustituciones oportunas.

Para la cámara central resulta,

$$P_C(r, z_2) = \sum_{n=0}^{\infty} (C_n^+ e^{-jk_{C,n}z_2} + C_n^- e^{jk_{C,n}z_2}) J_0\left(\frac{\alpha_n}{R_C} r\right) \quad (6.48)$$

donde  $k_{C,n}$  es el número de onda axial en el monolito y viene dado por la expresión

$$k_{C,n} = \begin{cases} \sqrt{k_m^2 - \left(\frac{\alpha_n}{R_C}\right)^2}, & k_m > \frac{\alpha_n}{R_C} \\ -\sqrt{k_m^2 - \left(\frac{\alpha_n}{R_C}\right)^2}, & k_m < \frac{\alpha_n}{R_C} \end{cases} \quad (6.49)$$

siendo  $k_m$  el número de onda complejo del fluido equivalente.

En el caso de las transiciones, en base a la ecuación (5.45) resulta para el conducto de la expansión (cono divergente)

$$P_B(\rho_1, \theta_1) = \sum_{n=0}^{\infty} \left( B_n^{(1)} h_{\nu_{B,n}}^{(1)} \left( \frac{\omega}{c_0} \rho_1 \right) + B_n^{(2)} h_{\nu_{B,n}}^{(2)} \left( \frac{\omega}{c_0} \rho_1 \right) \right) P_{\nu_{B,n}}(\cos \theta_1) \quad (6.50)$$

donde  $\nu_{B,n}$  se obtiene a partir de la condición de pared rígida y depende del semiángulo de cono  $\theta_{1,0}$ . Para el conducto de la contracción (cono convergente) se obtiene

$$P_D(\rho_2, \theta_2) = \sum_{n=0}^{\infty} \left( D_n^{(1)} h_{\nu_{D,n}}^{(1)} \left( \frac{\omega}{c_0} \rho_2 \right) + D_n^{(2)} h_{\nu_{D,n}}^{(2)} \left( \frac{\omega}{c_0} \rho_2 \right) \right) P_{\nu_{D,n}}(\cos \theta_2) \quad (6.51)$$

de manera que en este caso  $\nu_{D,n}$  depende del semiángulo de cono  $\theta_{2,0}$ . Es interesante tener en cuenta el sistema de referencia utilizado para el caso de cono convergente, tal como muestra la figura 6.10.

Las condiciones a satisfacer por el campo acústico se refieren a la continuidad del campo de presiones y velocidades axiales en las transiciones geométricas existentes en el catalizador. Para la parte izquierda de la expansión resulta

$$P_A(r, z_1)|_{z_1=0} = P_B(\rho_1, \theta_1)|_{z_1=0} \quad \text{en } S_A \quad (6.52)$$

$$U_A(r, z_1)|_{z_1=0} = U_B(\rho_1, \theta_1)|_{z_1=0} \quad \text{en } S_A \quad (6.53)$$

Para la sección derecha de la expansión se debe cumplir

$$P_C(r, z_2)|_{z_2=0} = P_B(\rho_1, \theta_1)|_{z_2=0} \quad \text{en } S_C \quad (6.54)$$

$$\phi U_C(r, z_2)|_{z_2=0} = U_B(\rho_1, \theta_1)|_{z_2=0} \quad \text{en } S_C \quad (6.55)$$

En la contracción, la sección de la izquierda permite plantear

$$P_C(r, z_2)|_{z_2=L_C} = P_D(\rho_2, \theta_2)|_{z_2=L_C} \quad \text{en } S_C \quad (6.56)$$

$$\phi U_C(r, z_2)|_{z_2=L_C} = U_D(\rho_2, \theta_2)|_{z_2=L_C} \quad \text{en } S_C \quad (6.57)$$

y en el lado derecho se obtiene finalmente

$$P_E(r, z_3)|_{z_3=0} = P_D(\rho_2, \theta_2)|_{z_3=0} \quad \text{en } S_E \quad (6.58)$$

$$U_E(r, z_3)|_{z_3=0} = U_D(\rho_2, \theta_2)|_{z_3=0} \quad \text{en } S_E \quad (6.59)$$

Pueden observarse ciertas diferencias en comparación con los casos analizados anteriormente. En éstos, la expansión o contracción correspondiente se forma a partir de la unión entre dos elementos de sección transversal distinta. Esto implica una discontinuidad geométrica abrupta o brusca, de manera que en la zona común la presión y la velocidad axial son continuas. En la zona no común, por contra, se impone la condición de velocidad axial (normal a la superficie) nula. En el catalizador de tipo bicónico la transición entre los conductos de tipo circular y cónico es gradual, dado que en la región de unión las áreas transversales coinciden. Por ello se utilizan las

condiciones de continuidad de presión y velocidad axial, pero no se aplica en este caso la condición de velocidad nula.

Para los conductos circulares la obtención de la velocidad acústica axial es inmediata, dado que se puede utilizar la ecuación de Euler (2.47). Para el conducto  $A$  (y  $E$ ) proporciona

$$U_A = -\frac{1}{j\rho_0\omega} \frac{\partial P_A}{\partial z}$$

y para el monolito

$$U_C = -\frac{1}{j\rho_m\omega} \frac{\partial P_C}{\partial z}$$

siendo  $\rho_m$  la densidad compleja del fluido equivalente, que viene dada por la expresión (2.180).

En lo referente a los conductos cónicos, puede obtenerse la velocidad axial a partir de su valor en coordenadas esféricas. Para ello es posible considerar la ecuación de Euler en dichas coordenadas [65], de manera que las velocidades radial  $U_\rho$  y cenital  $U_\theta$  se escriben como

$$U_\rho = -\frac{1}{j\rho_0\omega} \frac{\partial P}{\partial \rho} \quad (6.60)$$

$$U_\theta = -\frac{1}{j\rho_0\omega} \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial \theta} \quad (6.61)$$

La velocidad axial es por tanto

$$U = U_\rho \cos \theta - U_\theta \sin \theta \quad (6.62)$$

Considerando el conducto cónico asociado a la expansión y la presión en éste, dada por la expresión (6.50), y utilizando las ecuaciones (6.60)-(6.62), resulta

$$\begin{aligned} U_B(\rho_1, \theta_1) &= -\frac{1}{j\rho_0\omega} \left( \frac{\partial P_B(\rho_1, \theta_1)}{\partial \rho_1} \cos \theta_1 - \frac{1}{\rho_1} \frac{\partial P_B(\rho_1, \theta_1)}{\partial \theta_1} \sin \theta_1 \right) \\ &= -\frac{1}{j\rho_0\omega} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \left( B_n^{(1)} \frac{\partial h_{\nu_{B,n}}^{(1)} \left( \frac{\omega}{c_0} \rho_1 \right)}{\partial \rho_1} + B_n^{(2)} \frac{\partial h_{\nu_{B,n}}^{(2)} \left( \frac{\omega}{c_0} \rho_1 \right)}{\partial \rho_1} \right) P_{\nu_{B,n}}(\cos \theta_1) \cos \theta_1 \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\rho_1} \frac{\partial P_{\nu_{B,n}}(\cos \theta_1)}{\partial \theta_1} \left( B_n^{(1)} h_{\nu_{B,n}}^{(1)} \left( \frac{\omega}{c_0} \rho_1 \right) + B_n^{(2)} h_{\nu_{B,n}}^{(2)} \left( \frac{\omega}{c_0} \rho_1 \right) \right) \sin \theta_1 \right) \end{aligned} \quad (6.63)$$



De manera similar, en el conducto cónico asociado a la contracción, la velocidad axial viene dada por

$$\begin{aligned}
 U_D(\rho_2, \theta_2) &= \frac{1}{j\rho_0\omega} \left( \frac{\partial P_D(\rho_2, \theta_2)}{\partial \rho_2} \cos \theta_2 - \frac{1}{\rho_2} \frac{\partial P_D(\rho_2, \theta_2)}{\partial \theta_2} \sen \theta_2 \right) \\
 &= \frac{1}{j\rho_0\omega} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \left( D_n^{(1)} \frac{\partial h_{\nu_D, n}^{(1)} \left( \frac{\omega}{c_0} \rho_2 \right)}{\partial \rho_2} + D_n^{(2)} \frac{\partial h_{\nu_D, n}^{(2)} \left( \frac{\omega}{c_0} \rho_2 \right)}{\partial \rho_2} \right) P_{\nu_D, n}(\cos \theta_2) \cos \theta_2 \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{\rho_2} \frac{\partial P_{\nu_D, n}(\cos \theta_2)}{\partial \theta_2} \left( D_n^{(1)} h_{\nu_D, n}^{(1)} \left( \frac{\omega}{c_0} \rho_2 \right) + D_n^{(2)} h_{\nu_D, n}^{(2)} \left( \frac{\omega}{c_0} \rho_2 \right) \right) \sen \theta_2 \right)
 \end{aligned} \tag{6.64}$$

donde se ha introducido un cambio de signo que tiene en cuenta la orientación del sistema de coordenadas esférico respecto al cilíndrico. Con el fin de compactar los desarrollos matemáticos asociados a la técnica de ajuste modal se incluye la siguiente nomenclatura

$$P_{I, n}^{(j)}(\rho_i, \theta_i) = h_{\nu_{I, n}}^{(j)} \left( \frac{\omega}{c_0} \rho_i \right) P_{\nu_{I, n}}(\cos \theta_i) \tag{6.65}$$

$$GP_{I, n}^{(j)}(\rho_i, \theta_i) = \frac{\partial h_{\nu_{I, n}}^{(j)} \left( \frac{\omega}{c_0} \rho_i \right)}{\partial \rho_i} P_{\nu_{I, n}}(\cos \theta_i) \cos \theta_i - \frac{1}{\rho_i} \frac{\partial P_{\nu_{I, n}}(\cos \theta_i)}{\partial \theta_i} h_{\nu_{I, n}}^{(j)} \left( \frac{\omega}{c_0} \rho_i \right) \sen \theta_i \tag{6.66}$$

donde para  $I = B$ ,  $i = 1$  se considera el conducto cónico de expansión y para  $I = D$ ,  $i = 2$  se tiene el asociado a la contracción. De igual manera,  $j = 1$  implica la consideración de los términos progresivos y  $j = 2$  se refiere a los regresivos.

### Ajuste modal en la expansión

Se plantea ahora el procedimiento a utilizar con el objetivo de obtener los coeficientes de propagación  $A_n^+$ ,  $A_n^-$ ,  $B_n^{(1)}$ ,  $B_n^{(2)}$ ,  $C_n^+$ ,  $C_n^-$ ,  $D_n^{(1)}$ ,  $D_n^{(2)}$ ,  $E_n^+$  y  $E_n^-$ . Para la consideración de la región asociada a la expansión se procede multiplicando las ecuaciones de continuidad por un modo de presión adecuado. Las expresiones obtenidas se simplifican en gran manera teniendo en cuenta las propiedades de ortogonalidad de las funciones de Bessel.

$$\sum_{n=0}^{\infty} (A_n^+ + A_n^-) \int_0^{R_A} J_0 \left( \frac{\alpha_n}{R_A} r \right) J_0 \left( \frac{\alpha_s}{R_A} r \right) r dr = (A_s^+ + A_s^-) \frac{R_A^2}{2} J_0^2(\alpha_s) \tag{6.67}$$

Las ecuaciones de continuidad de presión y velocidad (6.52) y (6.53) en la sección izquierda del conducto de expansión  $B$  se multiplican por el modo de presión del conducto de entrada  $J_0(\alpha_s r/R_A)$ , para  $s = 0, 1, 2, 3, \dots, \infty$ , y se realiza la integral en  $S_A$ , dando lugar a

$$(A_s^+ + A_s^-) \frac{R_A^2}{2} J_0^2(\alpha_s) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{R_A} \left( B_n^{(1)} P_{B,n}^{(1)}(\rho_1, \theta_1) + B_n^{(2)} P_{B,n}^{(2)}(\rho_1, \theta_1) \right) J_0 \left( \frac{\alpha_s}{R_A} r \right) r dr \quad (6.68)$$

$$\begin{aligned} & (-jk_{A,s} A_s^+ + jk_{A,s} A_s^-) \frac{R_A^2}{2} J_0^2(\alpha_s) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{R_A} \left( B_n^{(1)} GP_{B,n}^{(1)}(\rho_1, \theta_1) + B_n^{(2)} GP_{B,n}^{(2)}(\rho_1, \theta_1) \right) J_0 \left( \frac{\alpha_s}{R_A} r \right) r dr \end{aligned} \quad (6.69)$$

La distancia entre el vértice del conducto cónico  $B$  y la sección de integración viene dada por

$$Vert_{B1} = \frac{R_A L_B}{R_C - R_A} \quad (6.70)$$

y por tanto, en las integrales de las ecuaciones (6.68) y (6.69), se tiene

$$\rho_1 = \sqrt{Vert_{B1}^2 + r^2} \quad (6.71)$$

$$\theta_1 = \arctan \left( \frac{r}{Vert_{B1}} \right) \quad (6.72)$$

Éstas han de evaluarse de forma numérica.

De forma similar, las ecuaciones de continuidad (6.54) y (6.55) en el lado derecho del conducto de expansión  $B$  se multiplican por el modo de presión de la cámara central  $J_0(\alpha_s r/R_C)$ , con  $s = 0, 1, 2, 3, \dots, \infty$ , y se integran en  $S_C$ , obteniendo

$$(C_s^+ + C_s^-) \frac{R_C^2}{2} J_0^2(\alpha_s) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{R_C} \left( B_n^{(1)} P_{B,n}^{(1)}(\rho_1, \theta_1) + B_n^{(2)} P_{B,n}^{(2)}(\rho_1, \theta_1) \right) J_0 \left( \frac{\alpha_s}{R_C} r \right) r dr \quad (6.73)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\phi}{\rho_m} (-jk_{C,s} C_s^+ + jk_{C,s} C_s^-) \frac{R_C^2}{2} J_0^2(\alpha_s) \\ &= \frac{1}{\rho_0} \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{R_C} \left( B_n^{(1)} GP_{B,n}^{(1)}(\rho_1, \theta_1) + B_n^{(2)} GP_{B,n}^{(2)}(\rho_1, \theta_1) \right) J_0 \left( \frac{\alpha_s}{R_C} r \right) r dr \end{aligned} \quad (6.74)$$

En este caso, la distancia del vértice del conducto cónico  $B$  a la sección de integración es

$$Vert_{B2} = \frac{R_C L_B}{R_C - R_A} = Vert_{B1} + L_B \quad (6.75)$$

de manera que en las ecuaciones (6.73) y (6.74) las coordenadas esféricas verifican

$$\rho_1 = \sqrt{Vert_{B2}^2 + r^2} \quad (6.76)$$

$$\theta_1 = \arctan\left(\frac{r}{Vert_{B2}}\right) \quad (6.77)$$

Como en el caso anterior, las integrales previas se evalúan de forma numérica.

#### Ajuste modal en la contracción

El procedimiento a seguir en la contracción  $D$  es similar al caso de la expansión. Las ecuaciones (6.56) y (6.57) asociadas al lado izquierdo del conducto cónico  $D$  se multiplican por el modo de presión de la cámara central  $J_0(\alpha_s r/R_C)$ , para  $s = 0, 1, 2, 3, \dots, \infty$ , y después se lleva a cabo la integral en la sección  $S_C$ , de manera que se obtiene

$$\begin{aligned} & (C_s^+ e^{-jk_C, s L_C} + C_s^- e^{jk_C, s L_C}) \frac{R_C^2}{2} J_0^2(\alpha_s) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{R_C} \left( D_n^{(1)} P_{D,n}^{(1)}(\rho_2, \theta_2) + D_n^{(2)} P_{D,n}^{(2)}(\rho_2, \theta_2) \right) J_0\left(\frac{\alpha_s}{R_C} r\right) r dr \end{aligned} \quad (6.78)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\phi}{\rho_m} \left( -jk_{C,s} C_s^+ e^{-jk_C, s L_C} + jk_{C,s} C_s^- e^{jk_C, s L_C} \right) \frac{R_C^2}{2} J_0^2(\alpha_s) \\ &= -\frac{1}{\rho_0} \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{R_C} \left( D_n^{(1)} GP_{D,n}^{(1)}(\rho_2, \theta_2) + D_n^{(2)} GP_{D,n}^{(2)}(\rho_2, \theta_2) \right) J_0\left(\frac{\alpha_s}{R_C} r\right) r dr \end{aligned} \quad (6.79)$$

Debe tenerse en cuenta el signo negativo en el lado derecho de la ecuación (6.79), debido a la orientación del sistema de referencia del conducto  $D$ , tal como se ha indicado anteriormente. La sección de integración se encuentra a una distancia del vértice del conducto  $D$  dada por

$$Vert_{D2} = \frac{R_C L_D}{R_C - R_E} \quad (6.80)$$

y por tanto en las ecuaciones (6.78) y (6.79) ha de considerarse

$$\rho_2 = \sqrt{Vert_{D2}^2 + r^2} \quad (6.81)$$

$$\theta_2 = \arctan\left(\frac{r}{Vert_{D2}}\right) \quad (6.82)$$

Las ecuaciones (6.58) y (6.59) asociadas al lado derecho del conducto de contracción se multiplican por el modo de presión del tubo de salida  $J_0(\alpha_s r/R_E)$ , para  $s = 0, 1, 2, 3, \dots, \infty$ , se integran en  $S_E$  y se llega a

$$(E_s^+ + E_s^-) \frac{R_E^2}{2} J_0^2(\alpha_s) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{R_E} \left( D_n^{(1)} P_{D,n}^{(1)}(\rho_2, \theta_2) + D_n^{(2)} P_{D,n}^{(2)}(\rho_2, \theta_2) \right) J_0 \left( \frac{\alpha_s}{R_E} r \right) r dr \quad (6.83)$$

$$\begin{aligned} & (-jk_{E,s} E_s^+ + jk_{E,s} E_s^-) \frac{R_E^2}{2} J_0^2(\alpha_s) \\ &= - \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{R_E} \left( D_n^{(1)} GP_{D,n}^{(1)}(\rho_2, \theta_2) + D_n^{(2)} GP_{D,n}^{(2)}(\rho_2, \theta_2) \right) J_0 \left( \frac{\alpha_s}{R_E} r \right) r dr \end{aligned} \quad (6.84)$$

donde se incluye, igual que anteriormente, el signo menos para el lado derecho de la ecuación (6.84) obtenida a partir de la condición de continuidad de velocidad. Por último, el vértice del conducto cónico  $D$  y la sección de integración se encuentran a una distancia dada por

$$Vert_{D1} = \frac{R_E L_D}{R_C - R_E} = Vert_{D2} - L_D \quad (6.85)$$

y en consecuencia, para evaluar las integrales de las ecuaciones (6.83) y (6.84) sobre  $S_E$  debe tenerse en cuenta que

$$\rho_2 = \sqrt{Vert_{D1}^2 + r^2} \quad (6.86)$$

$$\theta_2 = \arctan \left( \frac{r}{Vert_{D1}} \right) \quad (6.87)$$

La caracterización del catalizador en base a su índice de pérdidas de transmisión se lleva a cabo con las condiciones habituales que implican  $A_0^+ = 1$ ,  $A_n^+ = 0$  para  $n > 0$  y  $E_n^- = 0$  para todo  $n$ , junto con el correspondiente truncado  $s_{max} = n_{max} = q$ . El sistema de  $8(q+1)$  ecuaciones e incógnitas se resuelve y permite obtener el  $TL$ , dado por

$$TL = -20 \log \left( \frac{R_E}{R_A} \left| \sum_{n=0}^q E_n^+ e^{-jk_{E,n} L_E} \right| \right) \quad (6.88)$$

A diferencia de los casos anteriores, la consideración de  $q = 0$  no reproduce la solución del modelo de onda plana como el mostrado en [54], dado que ahora los modos fundamentales en las zonas cónicas presentan un perfil esférico.

La validación de la formulación previa se lleva a cabo mediante la comparación con resultados de elementos finitos para una geometría bicónica cuyas dimensiones son  $L_A = L_E = 0.05$  m,  $L_B = L_D = 0.03$  m,  $L_C = 0.135$  m,  $R_A = R_E = 0.0268$  m y  $R_C$

= 0.0886 m, de manera que los semiángulos de apertura vienen dados por  $\theta_{1,0} = \theta_{2,0} = 64.106^\circ$ . Para el monolito se consideran los valores  $R = 500$  rayl/m,  $\phi = 0.8$  y  $\alpha = 1.07$ . Los cálculos de elementos finitos se han llevado a cabo con una malla axi-simétrica de elementos cuadriláteros cuadráticos con 0.0025 m de tamaño. El índice de pérdidas de transmisión de la geometría considerada se muestra en la figura 6.11. Como puede comprobarse, la concordancia entre los resultados proporcionados por ambas técnicas de modelado es excelente en todo el intervalo de frecuencias considerado.

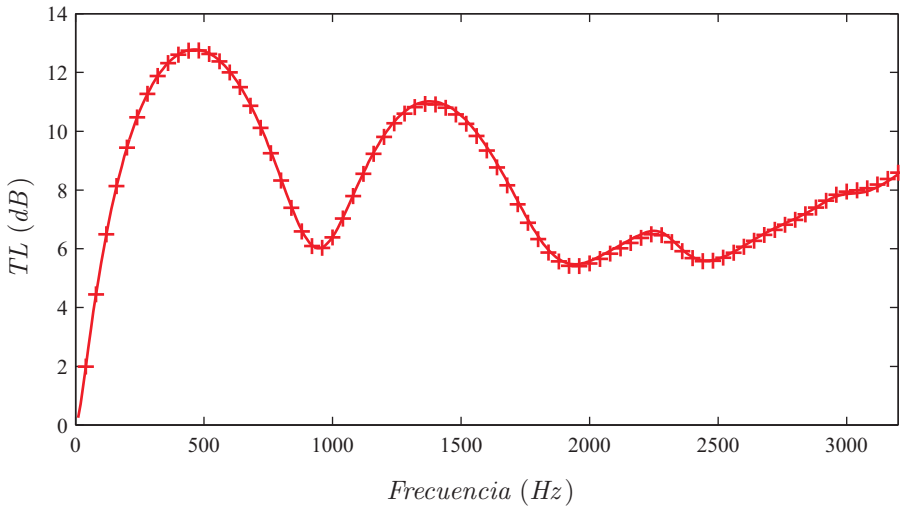


FIGURA 6.11: *TL de catalizador bicónico modelado con la técnica 3D/3D:*  
—, AM; +, MEF.

En la figura 6.12 se estudia el efecto de la porosidad del monolito, que toma los valores  $\phi = 0.7$ ,  $\phi = 0.8$  y  $\phi = 0.9$ , para una resistividad fija de valor  $R = 500$  rayl/m. Los capilares son de sección transversal cuadrada de manera que  $\alpha = 1.07$ . Se puede observar que con el aumento de la porosidad se tiene mayor atenuación en todo el rango de frecuencias estudiado. Este comportamiento es distinto al observado en el caso del catalizador circular, modelado también mediante la técnica 3D/3D, en el que la influencia de la porosidad es irregular y depende del intervalo de frecuencias considerado.

El efecto de la resistividad se muestra en la figura 6.13, considerando los valores  $R = 500$  rayl/m,  $R = 750$  rayl/m y  $R = 1000$  rayl/m. El resto de valores son los utilizados en la validación (en concreto, se tiene  $\phi = 0.8$ ). Se puede observar que a medias y altas frecuencias se obtienen mayores valores de atenuación con el aumento de la resistividad. A bajas frecuencias el efecto de la resistividad es prácticamente despreciable.

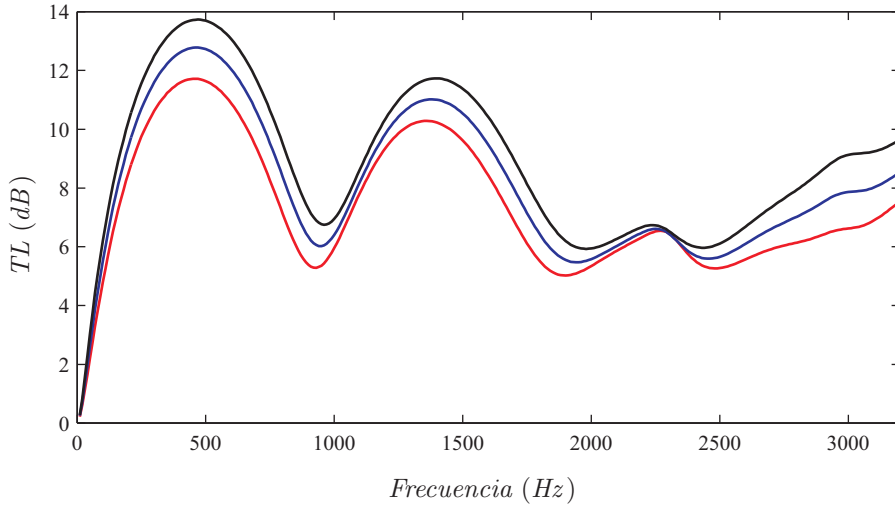


FIGURA 6.12:  $TL$  de catalizador bicónico modelado con la técnica 3D/3D para diferentes valores de porosidad del monolito, AM: —,  $\phi = 0.7$ ; —,  $\phi = 0.8$ ; —,  $\phi = 0.9$ .

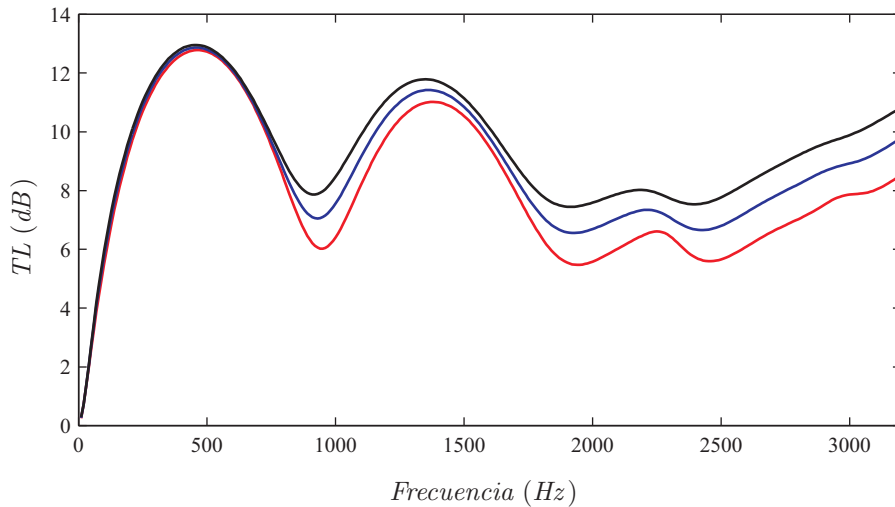


FIGURA 6.13:  $TL$  de catalizador bicónico modelado con la técnica 3D/3D para diferentes valores de resistividad, AM: —,  $R = 500$  rayl/m; —,  $R = 750$  rayl/m; —,  $R = 1000$  rayl/m.

### 6.3.2. Modelo 3D conductos/1D monolito

La figura 6.14 muestra un esquema para el modelado 3D conductos/1D monolito de un catalizador con conductos cónicos mediante el método de ajuste modal. En el interior del tubo cilíndrico de entrada se tiene el campo de presión

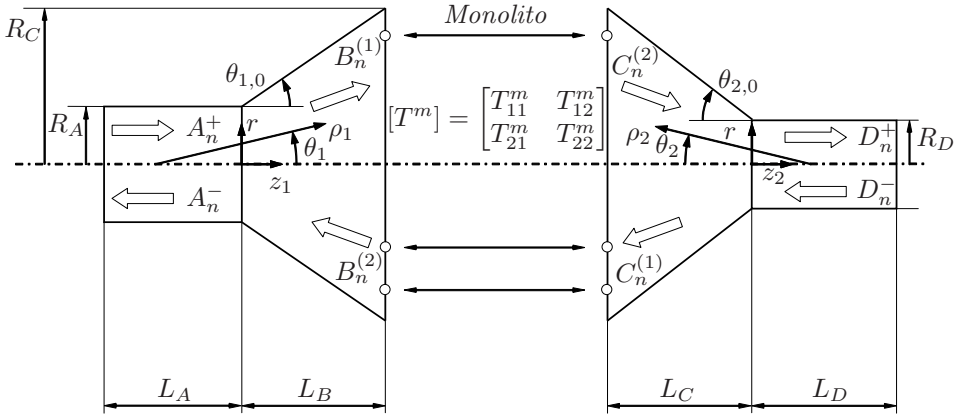


FIGURA 6.14: Esquema del catalizador con conductos cónicos asociado al modelo 3D conductos/1D monolito.

$$P_A(r, z_1) = \sum_{n=0}^{\infty} (A_n^+ e^{-jk_{A,n}z_1} + A_n^- e^{jk_{A,n}z_1}) J_0\left(\frac{\alpha_n}{R_A} r\right) \quad (6.89)$$

expresión asimismo válida para el conducto de salida  $D$  con los cambios oportunos. El número de onda axial en los tubos de sección circular viene definido, por ejemplo, por la ecuación (6.47).

La presión acústica en los conductos cónicos, por ejemplo en la región  $B$ , viene dada por la expresión

$$P_B(\rho_1, \theta_1) = \sum_{n=0}^{\infty} \left( B_n^{(1)} h_{\nu_{B,n}}^{(1)}\left(\frac{\omega}{c_0} \rho_1\right) + B_n^{(2)} h_{\nu_{B,n}}^{(2)}\left(\frac{\omega}{c_0} \rho_1\right) \right) P_{\nu_{B,n}}(\cos \theta_1) \quad (6.90)$$

Las condiciones a satisfacer por el campo acústico difieren del caso asociado al modelado 3D conductos/3D monolito, dado que en la técnica aplicada aquí el monolito se sustituye por una matriz de transferencia que relaciona las variables de presión y velocidad acústica axial en la entrada y la salida del monolito. Las condiciones de contorno en la expansión se escriben en la forma habitual

$$P_A(r, z_1)|_{z_1=0} = P_B(\rho_1, \theta_1)|_{z_1=0} \quad \text{en } S_A \quad (6.91)$$

$$U_A(r, z_1)|_{z_1=0} = U_B(\rho_1, \theta_1)|_{z_1=0} \quad \text{en } S_A \quad (6.92)$$

Para la contracción se tiene

$$P_D(r, z_2)|_{z_2=0} = P_C(\rho_2, \theta_2)|_{z_2=0} \quad \text{en } S_D \quad (6.93)$$

$$U_D(r, z_2)|_{z_2=0} = U_C(\rho_2, \theta_2)|_{z_2=0} \quad \text{en } S_D \quad (6.94)$$

La relación entre las variables acústicas a ambos lados del monolito puede expresarse de la siguiente manera

$$\left\{ \begin{array}{l} P_B(\rho_1, \theta_1)|_{z_1=L_B} \\ U_B(\rho_1, \theta_1)|_{z_1=L_B} \end{array} \right\} = \begin{bmatrix} T_{11}^m & T_{12}^m \\ T_{21}^m & T_{22}^m \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{l} P_C(\rho_2, \theta_2)|_{z_2=-L_C} \\ U_C(\rho_2, \theta_2)|_{z_2=-L_C} \end{array} \right\} \quad \text{en } S_B \equiv S_C \quad (6.95)$$

con lo cual, las condiciones de contorno en el caso del monolito se expresan como

$$P_B(\rho_1, \theta_1)|_{z_1=L_B} = T_{11}^m P_C(\rho_2, \theta_2)|_{z_2=-L_C} + T_{12}^m U_C(\rho_2, \theta_2)|_{z_2=-L_C} \quad \text{en } S_B \equiv S_C \quad (6.96)$$

$$U_B(\rho_1, \theta_1)|_{z_1=L_B} = T_{21}^m P_C(\rho_2, \theta_2)|_{z_2=-L_C} + T_{22}^m U_C(\rho_2, \theta_2)|_{z_2=-L_C} \quad \text{en } S_B \equiv S_C \quad (6.97)$$

La obtención de la velocidad axial se lleva a cabo como se ha indicado en la sección anterior. Para compactar la notación se recurre de nuevo, por conveniencia, a las expresiones (6.65) y (6.66),

$$P_{I,n}^{(j)}(\rho_i, \theta_i) = h_{\nu_{I,n}}^{(j)} \left( \frac{\omega}{c_0} \rho_i \right) P_{\nu_{I,n}}(\cos \theta_i) \quad (6.98)$$

$$GP_{I,n}^{(j)}(\rho_i, \theta_i) = \frac{\partial h_{\nu_{I,n}}^{(j)} \left( \frac{\omega}{c_0} \rho_i \right)}{\partial \rho_i} P_{\nu_{I,n}}(\cos \theta_i) \cos \theta_i - \frac{1}{\rho_i} \frac{\partial P_{\nu_{I,n}}(\cos \theta_i)}{\partial \theta_i} h_{\nu_{I,n}}^{(j)} \left( \frac{\omega}{c_0} \rho_i \right) \sin \theta_i \quad (6.99)$$

donde para  $I = B$ ,  $i = 1$  se considera el conducto cónico de expansión y para  $I = C$ ,  $i = 2$  se tiene el asociado a la contracción. De igual manera,  $j = 1$  implica la consideración de los términos progresivos y  $j = 2$  se refiere a los regresivos.

Procediendo de manera análoga al caso del modelado 3D conductos/3D monolito, estudiado en la sección 6.3.1, para la expansión se obtienen las ecuaciones (6.68) y (6.69). En lo referente a la contracción, se multiplican las ecuaciones (6.93) y (6.94) por el modo de presión del conducto de salida  $J_0(\alpha_s r/R_D)$ , para  $s = 0, 1, 2, 3, \dots, \infty$ , y se integra en la sección  $S_D$ , de manera que se obtiene

$$\begin{aligned} (D_s^+ + D_s^-) \frac{R_D^2}{2} J_0^2(\alpha_s) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{R_D} & \left( C_n^{(1)} P_{C,n}^{(1)}(\rho_2, \theta_2) \right. \\ & \left. + C_n^{(2)} P_{C,n}^{(2)}(\rho_2, \theta_2) \right) J_0 \left( \frac{\alpha_s}{R_D} r \right) r dr \end{aligned} \quad (6.100)$$

$$\begin{aligned} & (-jk_{D,s} D_s^+ + jk_{D,s} D_s^-) \frac{R_D^2}{2} J_0^2(\alpha_s) \\ & = - \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{R_D} \left( C_n^{(1)} GP_{C,n}^{(1)}(\rho_2, \theta_2) + C_n^{(2)} GP_{C,n}^{(2)}(\rho_2, \theta_2) \right) J_0 \left( \frac{\alpha_s}{R_D} r \right) r dr \end{aligned} \quad (6.101)$$



donde se incluye, igual que anteriormente, el signo menos para el lado derecho de la ecuación (6.101). La distancia entre el vértice del conducto cónico  $C$  y la sección de integración  $S_D$  viene dada por

$$Vert_{C1} = \frac{R_D L_C}{R_C - R_D} \quad (6.102)$$

de manera que en las ecuaciones (6.100) y (6.101) ha de considerarse

$$\rho_2 = \sqrt{Vert_{C1}^2 + r^2} \quad (6.103)$$

$$\theta_2 = \arctan\left(\frac{r}{Vert_{C1}}\right) \quad (6.104)$$

Para las ecuaciones (6.96) y (6.97), la aplicación de la técnica de ajuste modal requiere la elección de funciones de ponderación adecuadas. Entre las diferentes posibilidades disponibles, en esta Tesis se han obtenido buenos resultados considerando  $J_0(\alpha_s r/R_C)$ ,  $s = 0, 1, 2, 3, \dots, \infty$ , tal como se muestra posteriormente. Las integrales se escriben por tanto como

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{R_C} \left( B_n^{(1)} P_{B,n}^{(1)}(\rho_1, \theta_1) + B_n^{(2)} P_{B,n}^{(2)}(\rho_1, \theta_1) \right) J_0\left(\frac{\alpha_s}{R_C} r\right) r dr \\ &= T_{11}^m \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{R_C} \left( C_n^{(1)} P_{C,n}^{(1)}(\rho_2, \theta_2) + C_n^{(2)} P_{C,n}^{(2)}(\rho_2, \theta_2) \right) J_0\left(\frac{\alpha_s}{R_C} r\right) r dr \\ &- \frac{T_{12}^m}{j\omega\rho_0} \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{R_C} \left( C_n^{(1)} GP_{C,n}^{(1)}(\rho_2, \theta_2) + C_n^{(2)} GP_{C,n}^{(2)}(\rho_2, \theta_2) \right) J_0\left(\frac{\alpha_s}{R_C} r\right) r dr \end{aligned} \quad (6.105)$$

$$\begin{aligned} & - \frac{1}{j\omega\rho_0} \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{R_C} \left( B_n^{(1)} GP_{B,n}^{(1)}(\rho_1, \theta_1) + B_n^{(2)} GP_{B,n}^{(2)}(\rho_1, \theta_1) \right) J_0\left(\frac{\alpha_s}{R_C} r\right) r dr \\ &= T_{21}^m \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{R_C} \left( C_n^{(1)} P_{C,n}^{(1)}(\rho_2, \theta_2) + C_n^{(2)} P_{C,n}^{(2)}(\rho_2, \theta_2) \right) J_0\left(\frac{\alpha_s}{R_C} r\right) r dr \\ &+ \frac{T_{22}^m}{j\omega\rho_0} \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{R_C} \left( C_n^{(1)} GP_{C,n}^{(1)}(\rho_2, \theta_2) + C_n^{(2)} GP_{C,n}^{(2)}(\rho_2, \theta_2) \right) J_0\left(\frac{\alpha_s}{R_C} r\right) r dr \end{aligned} \quad (6.106)$$

Una vez aplicadas las condiciones de contorno pertinentes ( $A_0^+ = 1$ ,  $A_n^+ = 0$  para  $n > 0$  y  $D_n^- = 0$  para todo  $n$ ) y el truncado  $s_{max} = n_{max} = q$ , se resuelve el sistema de  $6(q+1)$  ecuaciones e incógnitas y se evalúa el  $TL$  a partir de la expresión

$$TL = -20 \log \left( \frac{R_D}{R_A} \left| \sum_{n=0}^q D_n^+ e^{-jk_{D,n} L_D} \right| \right) \quad (6.107)$$

La validación de la formulación previa se lleva a cabo mediante la comparación con resultados de elementos finitos. Para ello, se ha utilizado una malla axisimétrica de elementos cuadriláteros cuadráticos con un tamaño aproximadamente uniforme de 0.0025 m. El catalizador bicónico considerado para la validación tiene nuevamente las dimensiones  $R_A = R_D = 0.0268$  m,  $R_C = 0.0886$  m,  $L_A = L_D = 0.05$  m,  $L_B = L_C = 0.03$  m y  $L_m = 0.135$  m, y los semiángulos de apertura son  $\theta_{1,0} = \theta_{2,0} = 64.106^\circ$ . El monolito está construido con capilares de sección transversal cuadrada, y por tanto  $\alpha = 1.07$ . Para la porosidad del monolito se toma el valor  $\phi = 0.8$  y para la resistividad  $R = 500$  rayl/m. Para la solución analítica se considera que  $q = 5$ . La figura 6.15 muestra los resultados obtenidos para la geometría indicada, calculados mediante ajuste modal y elementos finitos. De nuevo, se comprueba que la concordancia entre ambas técnicas de modelado es muy buena.

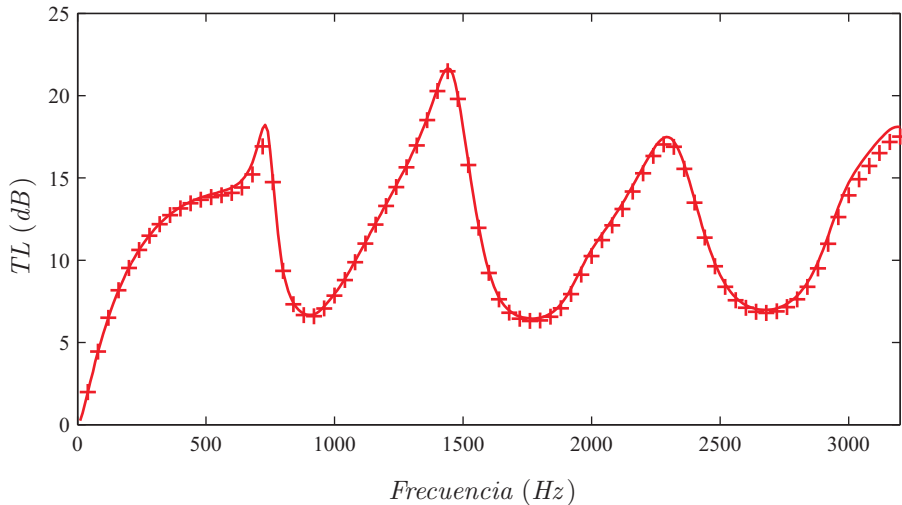


FIGURA 6.15: *TL de catalizador bicónico modelado con la técnica 3D/1D:*  
—, AM; +, MEF.

En la figura 6.16 se muestra el efecto que tiene la porosidad del monolito en la atenuación acústica del catalizador bicónico considerando los valores  $\phi = 0.7$ ,  $\phi = 0.8$  y  $\phi = 0.9$ . El resto de valores son los considerados en la validación (en particular, se tiene  $R = 500$  rayl/m). Se puede observar que a baja frecuencia (primera cúpula de atenuación) una menor porosidad produce una menor atenuación. Esta tendencia se invierte a medias y altas frecuencias.

La figura 6.17 muestra el efecto de la resistividad en el comportamiento del catalizador. Para el análisis se han considerado tres valores:  $R = 500$  rayl/m,  $R = 750$  rayl/m y  $R = 1000$  rayl/m, para un valor constante de porosidad dado por  $\phi = 0.8$ . Se comprueba que a mayor resistividad, se obtienen mayores valores de atenuación en la mayor parte del rango de frecuencias, a excepción de las zonas asociadas a picos

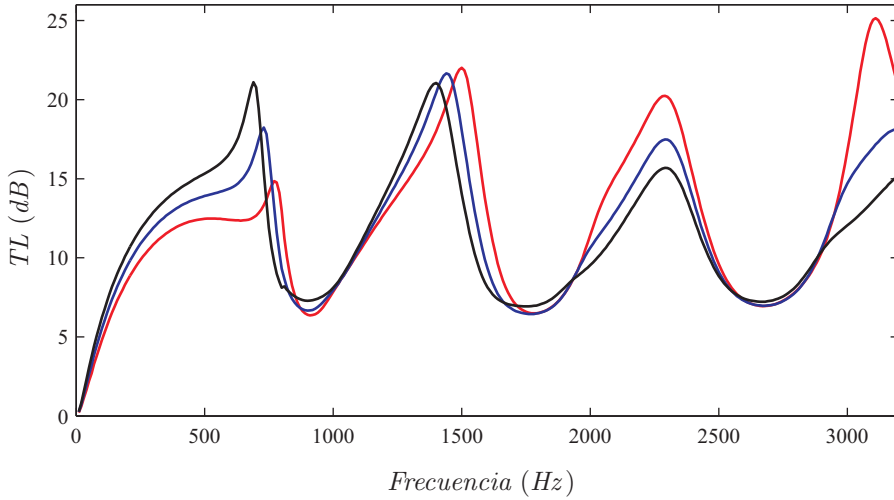


FIGURA 6.16: TL de catalizador bicónico modelado con la técnica 3D/1D para diferentes valores de porosidad del monolito, AM: —,  $\phi = 0.7$ ; —,  $\phi = 0.8$ ; —,  $\phi = 0.9$ .

de atenuación, que sufren una reducción más marcada para resistividades mayores. A bajas frecuencias se puede observar que la influencia de la resistividad es menor.

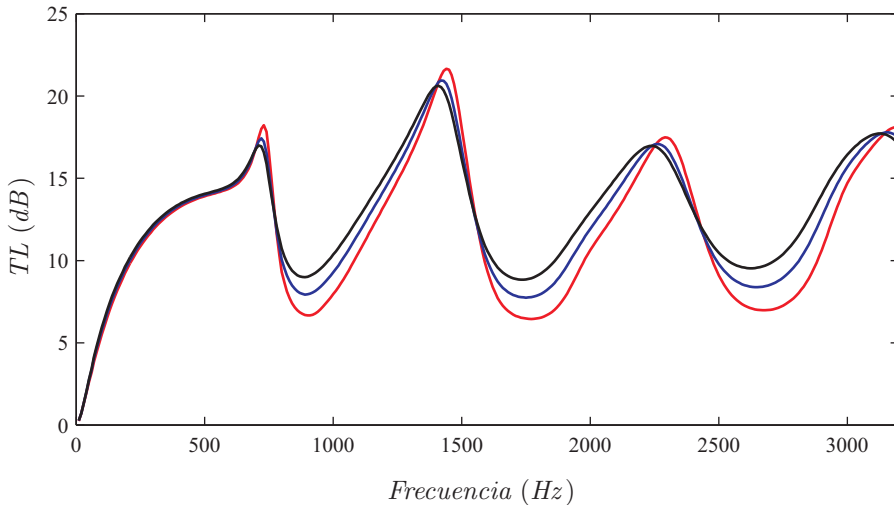


FIGURA 6.17: TL de catalizador bicónico modelado con la técnica 3D/1D para diferentes valores de resistividad, AM: —,  $R = 500$  rayl/m; —,  $R = 750$  rayl/m; —,  $R = 1000$  rayl/m.

### 6.3.3. Comparación de modelos 3D/3D y 3D/1D

Se procede ahora a llevar a cabo una comparación entre los resultados obtenidos mediante los modelos de ajuste modal 3D/3D y 3D/1D para un catalizador con conductos cónicos. Para ello, se analiza la misma geometría estudiada en las secciones 6.3.1 y 6.3.2. Para el monolito se consideran los valores  $R = 500$  rayl/m,  $\phi = 0.8$  y  $\alpha = 1.07$ .

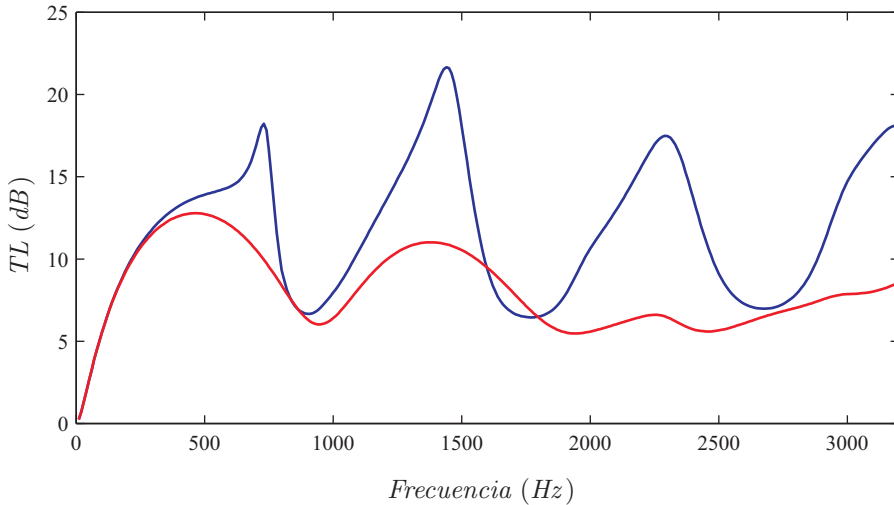


FIGURA 6.18:  $TL$  de catalizador bicónico, AM: —, modelo 3D/3D; —, modelo 3D/1D.

Los resultados obtenidos se muestran en la figura 6.18. Se puede observar que existe similitud entre los resultados proporcionados por las dos técnicas hasta una frecuencia muy baja, en torno a 300 Hz. A partir de dicha frecuencia las curvas de atenuación presentan discrepancias muy considerables entre sí, superiores a las detectadas en la geometría circular tratada en la sección 6.2.

## 6.4. Comentarios sobre la consideración de flujo medio

La consideración de flujo medio en los modelos analíticos presentados en este capítulo puede abordarse de forma simplificada si sólo se tienen en cuenta los efectos de éste en el comportamiento acústico del monolito. Es sabido que el efecto convectivo del flujo medio tiene una influencia prácticamente despreciable en conductos reactivos, esto es, sin elementos perforados ni materiales absorbentes, cuando se evalúan atenuaciones acústicas. Por consiguiente, las soluciones de la ecuación de ondas *sin flujo* para los conductos de entrada y salida y las transiciones troncocónicas mostradas en las secciones 6.2 y 6.3 *pueden seguir utilizándose en presencia de flujo*. Éste por tanto

sólo se incluye al modelar la región del monolito.

Tal como se indicó en la sección 4.2.3 del capítulo 4, el modelo 3D conductos/1D monolito en ausencia de flujo medio presenta mayor concordancia con las medidas experimentales, motivo por el que se puede aplicar el mismo modelo para el caso con flujo medio, lo cual garantiza una aproximación matemática al problema de gran sencillez. Por tanto, para considerar la presencia de flujo medio en los modelos analíticos desarrollados en el presente capítulo, es posible sustituir la matriz de transferencia de las ecuaciones (6.37), caso circular, y (6.95), configuración cónica, por la matriz de cuatro polos con flujo medio (2.248), utilizada anteriormente en los capítulos 2 y 4.

## 6.5. Conclusiones

En este capítulo se ha presentado la aplicación del método de ajuste modal al modelado acústico de catalizadores con geometrías de gran interés, cuyo tratamiento en la bibliografía existente es escaso. Para el modelado mediante ajuste modal se han utilizado las dos técnicas descritas anteriormente, 3D/3D y 3D/1D. En primer lugar se ha considerado la geometría circular, para la que se ha presentado detalladamente el desarrollo matemático del método de ajuste modal para las dos técnicas de modelado. Los modelos obtenidos han sido validados mediante el método de elementos finitos, mostrando una concordancia excelente. De igual manera, se ha abordado el modelado de catalizadores con conductos cónicos mediante el método de ajuste modal, de nuevo con las técnicas 3D/3D y 3D/1D. Para las geometrías con conductos cónicos se ha aplicado un procedimiento que permite su caracterización en base a las funciones de Legendre y de Hankel esféricas. En todos los casos estudiados se ha realizado un estudio paramétrico para analizar el efecto de la porosidad del monolito y su resistividad en la atenuación acústica.

Adicionalmente, se han comparado, tanto para las configuraciones circulares como cónicas, las predicciones de los modelos 3D/3D y 3D/1D. En el caso circular se detectan algunas diferencias ligeras, sobre todo en el rango de altas frecuencias. Para la geometría con conductos cónicos dichas discrepancias son mayores, de manera que la predicción proporcionada por el modelo 3D/3D muestra poca similitud con los resultados 3D/1D. En el capítulo anterior ya se indicó que el modelo 3D/3D, habitual en la bibliografía, presentaba ciertas deficiencias a la hora de modelar el comportamiento acústico del monolito. Dichas deficiencias se resuelven, al menos en parte, con la propuesta 3D/1D realizada en esta Tesis. Estos aspectos quedan corroborados por los resultados analíticos obtenidos en el presente capítulo mediante ajuste modal.

Actualmente se está trabajando en la preparación de resultados asociados a los modelos analíticos presentados en este capítulo, para su posterior publicación.



## Capítulo 7

# Conclusiones y desarrollos futuros

### **Resumen del capítulo:**

*Se recogen en este capítulo las principales conclusiones expuestas en los capítulos anteriores, destacando especialmente aquellas relacionadas con el objetivo final de la Tesis. Se señalan las aportaciones introducidas y se proponen posibles desarrollos futuros que continúen la línea de investigación aquí presentada.*





## 7.1. Conclusiones

Se describen aquí las conclusiones obtenidas a lo largo de la Tesis, relacionadas con el desarrollo e implementación de métodos eficaces para el diseño y modelado acústico de la línea de escape, y en concreto, de dos de sus componentes más relevantes, como son los silenciadores y los catalizadores.

- Se ha comprobado que los modelos de onda plana para silenciadores y catalizadores no son válidos en el rango usual de trabajo de los motores de combustión interna alternativos. Esto justifica recurrir a modelos más precisos, de tipo numérico y analítico, como el método de elementos finitos y el método de ajuste modal, para estudiar el comportamiento acústico de los componentes de la línea de escape.
- Se ha llevado a cabo el desarrollo e implementación de modelos de elementos finitos para la simulación tridimensional del comportamiento acústico de silenciadores de escape en condiciones generales, es decir, en presencia de flujo medio, material absorbente y elementos perforados.
- Se ha considerado el acoplamiento de diversos subdominios conectados mediante superficies perforadas cuando existe flujo medio, incluyendo el caso en el que uno de los subdominios conectados tiene material absorbente en contacto con las perforaciones. Además se ha analizado el efecto de las condiciones de contorno asociadas al conducto perforado. Para ello se han aplicado las condiciones de continuidad de velocidad y de desplazamiento, comparando los resultados obtenidos por ambas con resultados experimentales. La condición de continuidad de desplazamiento ha demostrado más concordancia con las medidas experimentales para dos geometrías de resonador concéntrico con material absorbente.
- Se ha llevado a cabo el desarrollo e implementación de modelos de elementos finitos para la simulación y análisis de catalizadores de automoción. Se han presentado dos modelos, el denominado modelo 3D/3D, habitual en la bibliografía, en el que es posible la propagación tridimensional en todo el dominio del catalizador, y el modelo propuesto en la Tesis, 3D/1D, que considera propagación unidimensional en los capilares. Se han aplicado los dos modelos a un catalizador comercial y se han comparado los resultados obtenidos mediante ambos con medidas experimentales, mostrando que la técnica propuesta 3D/1D presenta una mayor concordancia con dichas medidas. Se ha analizado la influencia de la porosidad del monolito y su resistividad en la atenuación acústica. También se ha aplicado el método de elementos finitos para el modelado acústico de catalizadores en presencia de flujo medio. Para ello se ha tenido en cuenta la técnica 3D/1D, ya que en el caso sin flujo medio ha dado resultados que se asemejan más a las medidas experimentales que los proporcionados por la técnica 3D/3D.
- Se ha llevado a cabo la descripción modal analítica de la solución de la ecuación de ondas en conductos de pared rígida. En primer lugar se han considerado las soluciones disponibles en la literatura para secciones transversales de tipo

rectangular y circular. Se ha abordado además la propagación de ondas en el caso de conductos de sección no uniforme con geometría cónica.

- Se ha desarrollado el modelado analítico multidimensional del comportamiento acústico de silenciadores de escape mediante el método de ajuste modal. Se ha presentado la aplicación de dicho método a diversos silenciadores, tales como cámaras de expansión simple y cámaras reversas. Posteriormente, y como contribución, se ha extendido la aplicación del método a silenciadores con doble salida opuesta y cámaras reversas con material absorbente y placa perforada. Para ambas configuraciones, se ha presentado la formulación completa del método de ajuste modal así como las integrales asociadas. Los modelos obtenidos han sido validados mediante la comparación con resultados evaluados mediante el método de elementos finitos, mostrando una concordancia excelente.
- Para el caso de las cámaras de expansión simple y las reversas, se ha analizado el efecto de la posición de los conductos de entrada y salida. En lo referente al silenciador con doble salida opuesta, se ha analizado detalladamente el efecto en la atenuación acústica de parámetros de diseño como el radio de los conductos y su posición relativa. Para la cámara reversa con material absorbente y placa perforada, se ha considerado en concreto el efecto que tiene en la atenuación acústica la posición relativa de los conductos, la porosidad de la placa perforada y la resistividad del material absorbente.
- Se ha llevado a cabo el desarrollo e implementación de técnicas para el modelado analítico tridimensional del comportamiento acústico de catalizadores con geometrías relevantes, poco consideradas en la literatura científica, como el caso de catalizadores circulares y con conductos cónicos. Para ambas geometrías se han aplicado las técnicas 3D/3D y 3D/1D. Los resultados obtenidos mediante ajuste modal se han validado con cálculos de elementos finitos, mostrando una concordancia excelente. Adicionalmente, se han comparado, tanto para las configuraciones circulares como cónicas, las predicciones de los modelos 3D/3D y 3D/1D, mostrando que los resultados obtenidos mediante ambos modelos son distintos. Para el catalizador circular se observan diferencias ligeras, sobre todo a alta frecuencia. En el caso del catalizador con conductos cónicos la predicción proporcionada por el modelo 3D/3D muestra poca similitud con los resultados 3D/1D.

## 7.2. Desarrollos futuros

En los últimos años se ha comenzado a considerar la degradación acústica asociada a los elementos fundamentales de la línea de escape. En este sentido, las áreas de trabajo que se proponen como continuación de la línea de investigación presentada se centran en el desarrollo de modelos acústicos avanzados de los materiales utilizados en los dispositivos del sistema de escape de motores de combustión, que contemplen la variación de propiedades con el paso del tiempo y que puedan ser incorporados a las herramientas de diseño acústico de la línea de escape con vistas a obtener soluciones

constructivas cuya degradación temporal pueda ser minimizada. En concreto cabe considerar los siguientes aspectos:

- Definición y desarrollo de técnicas experimentales que permitan la caracterización acústica avanzada de los diversos materiales utilizados en los componentes integrantes del sistema de escape de motores de combustión interna alternativos, en diferentes etapas de su vida en funcionamiento. Esto permitirá ampliar los modelos existentes de materiales absorbentes y monolitos cerámicos y definir nuevos modelos que contemplen la degradación asociada a la circulación de los productos de la combustión. Las técnicas experimentales también han de permitir la caracterización acústica de los propios componentes integrantes del sistema de escape, en diferentes etapas de su vida. Esto permitirá, por un lado, extender modelos existentes, definir nuevos modelos que contemplen la influencia del paso del tiempo y el efecto de la posible existencia de elementos de protección y, por otro, validar los resultados que se obtengan posteriormente en base a simulación.
- Desarrollo e implementación de herramientas de simulación del comportamiento acústico de componentes, basadas en las técnicas presentadas en esta Tesis (elementos finitos y métodos analíticos modales multidimensionales), que tengan en cuenta que se produce una degradación de propiedades acústicas en los componentes y materiales más relevantes. De esta manera, debe ser posible la consideración del efecto del paso del tiempo y el estudio de su influencia en el control de las emisiones acústicas.
- Obtención de modelos acústicos asociados a dispositivos adicionales de la línea de escape, cuyo impacto en la reducción de ruido es relevante, tales como filtros de partículas en motores diésel.



# Bibliografía

- [1] A.L. Abrahamson. A finite element formulation for sound propagation in axisymmetric ducts containing compressible mean flow. Technical Report 77-1301, American Institute of Aeronautics and Astronautics, 1977.
- [2] M. Abramowitz y I.A. Stegun. *Handbook of Mathematical Functions*. Dover Publications, Nueva York, 1972.
- [3] J. Albelda, F.D. Denia, A. Broatch y F.J. Fuenmayor. Modelado acústico de silenciadores con flujo medio y placas perforadas mediante elementos finitos. En *IV Congreso de Métodos Numéricos en Ingeniería*. SEMNI, Sevilla, 1999.
- [4] J.F. Allard. *Propagation of Sound in Porous Media: Modelling Sound Absorbing Materials*. Elsevier Science Publishers LTD, Londres y Nueva York, 1993.
- [5] J.F. Allard, A. Aknine y C. Depollier. Acoustical properties of partially reticulated foams with high and medium flow resistance. *Journal of the Acoustical Society of America*, 79:1734–1740, 1986.
- [6] A.G. Antebas, A.M. Pedrosa, F.D. Denia y F.J. Fuenmayor. Acoustic behaviour of circular mufflers with single inlet and double opposite outlet. En *Nineteenth International Congress on Acoustics*. Madrid, 2007.
- [7] A.G. Antebas, F.D. Denia, A.M. Pedrosa y F.J. Fuenmayor. Modelado analítico multidimensional del comportamiento acústico de silenciadores de escape de cámara reversa con material absorbente y placa perforada. En *V Congreso Ibérico de Acústica y XXXIX Congreso Español de Acústica*. Coimbra, 2008.
- [8] R.J. Astley y A. Cummings. A finite element scheme for attenuation in ducts lined with porous material: comparison with experiment. *Journal of Sound and Vibration*, 116:239–263, 1987.
- [9] R.J. Astley y A. Cummings. Wave propagation in catalytic converters: formulation of the problem and finite element solution scheme. *Journal of Sound and Vibration*, 188:635–657, 1995.
- [10] R.J. Astley y W. Eversman. Acoustic transmission in non-uniform ducts with mean flow, part II: the finite element method. *Journal of Sound and Vibration*, 74:103–121, 1981.

- [11] K. Attenborough. Acoustical characteristics of rigid fibrous absorbents and granular materials. *Journal of the Acoustical Society of America*, 73:785–799, 1983.
- [12] A.B. Bauer. Impedance theory and measurements on porous acoustic liners. *Journal of Aircraft*, 14:720–728, 1977.
- [13] D.A. Baxa. *Noise Control in Internal Combustion Engines*. John Wiley & Sons, Nueva York, 1982.
- [14] A.H. Benade. Equivalent circuits for conical waveguides. *Journal of the Acoustical Society of America*, 83:1764–1769, 1988.
- [15] J.L. Bento. *Acoustic Characteristics of Perforate Liners in Expansion Chambers*. Tesis doctoral, University of Southampton, Southampton, 1983.
- [16] L.L. Beranek. Acoustical properties of homogeneous, isotropic rigid tiles and flexible blankets. *Journal of the Acoustical Society of America*, 19:556–568, 1947.
- [17] L.L. Beranek. *Noise Reduction*. Península Pub, California, 1988.
- [18] M.A. Biot. Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid. *Journal of the Acoustical Society of America*, 28:168–178, 1956.
- [19] R.H. Bolt. On the design of perforated facings for acoustic materials. *Journal of the Acoustical Society of America*, 19:917–921, 1947.
- [20] M. Åbom. Derivation of four-pole parameters including higher order mode effects for expansion chamber mufflers with extended inlet and outlet. *Journal of Sound and Vibration*, 137:403–418, 1990.
- [21] A. Broatch, X. Margot, A. Gil y F.D. Denia. A CFD approach to the computation of the acoustic response of exhaust mufflers. *Journal of Computational Acoustics*, 13:301–316, 2005.
- [22] D.B. Callaway y L.G. Ramer. The use of perforated facings in designing low frequency resonant absorbers. *Journal of the Acoustical Society of America*, 24: 309–312, 1952.
- [23] J.Y. Chung y D.A. Blaser. Transfer function method of measuring in-duct acoustic properties. I. Theory. *Journal of the Acoustical Society of America*, 68: 907–913, 1980.
- [24] J.Y. Chung y D.A. Blaser. Transfer function method of measuring in-duct acoustic properties. II. Experiment. *Journal of the Acoustical Society of America*, 68: 914–921, 1980.
- [25] G. Conciauro, M. Guglielmi y R. Sorrentino. *Advanced Modal Analysis*. John Wiley & Sons, Chichester, 2000.

- [26] J.P. Coyette. Flow acoustics using finite elements. Technical background and application to muffler systems. Technical report, LMS International, 1995.
- [27] A. Craggs. The use of simple three-dimensional acoustic finite elements for determining the natural modes and frequencies of complex shaped enclosure. *Journal of Sound and Vibration*, 23:331–339, 1972.
- [28] A. Craggs. An acoustic finite element approach for studying boundary flexibility and sound transmission between irregular enclosures. *Journal of Sound and Vibration*, 30:343–357, 1973.
- [29] A. Craggs. A finite element method for damped acoustic systems: an application to evaluate the performance of reactive mufflers. *Journal of Sound and Vibration*, 48:377–392, 1976.
- [30] A. Craggs. A finite element method for modelling dissipative mufflers with a locally reactive lining. *Journal of Sound and Vibration*, 54:285–296, 1977.
- [31] M.J. Crocker. *Handbook of Acoustics*. John Wiley & Sons, Nueva York, 1998.
- [32] A. Cummings. Sound transmission at sudden area expansions in circular ducts, with superimposed mean flow. *Journal of Sound and Vibration*, 38:149–155, 1975.
- [33] A. Cummings. The effects of grazing turbulent pipe-flow on the impedance of an orifice. *Acustica*, 61:233–242, 1986.
- [34] A. Cummings y I.J. Chang. Sound attenuation of a finite length dissipative flow duct silencer with internal mean flow in the absorbent. *Journal of Sound and Vibration*, 127:1–17, 1988.
- [35] W.A. Davern. Perforated facings backed with porous materials as sound absorbers-an experimental study. *Applied Acoustics*, 10:85–112, 1977.
- [36] P.O.A.L. Davies. Practical flow duct acoustics. *Journal of Sound and Vibration*, 124:91–115, 1988.
- [37] P.O.A.L. Davies y P.E. Doak. Wave transfer to and from conical diffusers with mean flow. *Journal of Sound and Vibration*, 138:345–350, 1990.
- [38] P.O.A.L. Davies y P.E. Doak. Spherical wave propagation in a conical pipe with mean flow. *Journal of Sound and Vibration*, 137:343–346, 1990.
- [39] M.E. Delany y E.N. Bazley. Acoustical properties of fibrous absorbent materials. *Applied Acoustics*, 3:105–116, 1970.
- [40] F.D. Denia. *Modelado del Comportamiento Acústico de Silenciadores de Escape mediante Técnicas Analíticas y el Método de Elementos Finitos*. Tesis doctoral, Departamento de Ingeniería Mecánica y de Materiales, Universidad Politécnica de Valencia, Valencia, 2004.

- [41] F.D. Denia, J. Albelda, A.J. Torregrosa y M. Tur. Mode-matching technique applied to reversing mufflers. Comparison with other analytical solutions. En *Fifth International Conference on Mathematical and Numerical Aspects of Wave Propagation*. SIAM, Santiago de Compostela, 2000.
- [42] F.D. Denia, J. Albelda, F.J. Fuenmayor y A.J. Torregrosa. Acoustic behaviour of elliptical chamber mufflers. *Journal of Sound and Vibration*, 241:401–421, 2001.
- [43] F.D. Denia, F.J. Fuenmayor, M. Tur y J. Albelda. Atenuación de ruido en silenciadores con geometría cónica. Modelado numérico y modal y medida experimental. En *XV Congreso Nacional de Ingeniería Mecánica*. AEIM, Cádiz, 2002.
- [44] F.D. Denia, Ródenas, J.J., A. Roda y A. Broatch. Estudio numérico y experimental de la atenuación acústica en silenciadores elípticos con placa perforada. En *V Congreso de Métodos Numéricos en Ingeniería*. SEMNI, Sevilla, 2002.
- [45] F.D. Denia, F.J. Fuenmayor y J. Albelda. Three-dimensional analysis of mufflers with conical ducts. Analytical, numerical and experimental studies. En *Inter-Noise 2003. The 32nd International Congress and Exposition on Noise Control Engineering*. I-INCE, Jeju, Corea, 2003.
- [46] F.D. Denia, A. Selamet, F.J. Fuenmayor y R. Kirby. Acoustic attenuation performance of perforated dissipative mufflers with empty inlet/outlet extensions. *Journal of Sound and Vibration*, 302:1000–1017, 2007.
- [47] F.D. Denia, A.G. Antebas, J.M. Casas y F.J. Fuenmayor. Modelado numérico del comportamiento acústico de catalizadores. Influencia de la técnica de acoplamiento conducto/monolito en la predicción de la atenuación sonora. En *Congreso de Métodos Numéricos en Ingeniería*. SEMNI, Barcelona, 2009.
- [48] F.D. Denia, A.G. Antebas, R. Kirby y F.J. Fuenmayor. Multidimensional acoustic modelling of catalytic converters. En *Sixteenth International Congress on Sound and Vibration*. IIAV, Kraków, 2009.
- [49] F.D. Denia, A.G. Antebas, A. Selamet y A.M. Pedrosa. Acoustic characteristics of circular dissipative reversing chamber mufflers. *Noise Control Engineering Journal*, Pendiente de aceptación.
- [50] N.S. Dickey, A. Selamet y J.M. Novak. The effect of high-amplitude sound on the attenuation of perforated tube silencers. *Journal of the Acoustical Society of America*, 108:1068–1081, 2000.
- [51] P.E. Doak. Acoustic wave propagation in a homentropic, irrotational, low Mach number mean flow. *Journal of Sound and Vibration*, 155:545–548, 1992.
- [52] E. Dokumaci. Sound transmission in narrow pipes with superimposed uniform mean flow and acoustic modelling of automobile catalytic converters. *Journal of Sound and Vibration*, 182:799–808, 1995.



- [53] E. Dokumaci. On transmission of sound in circular and rectangular narrow pipes with superimposed mean flow. *Journal of Sound and Vibration*, 210:375–389, 1998.
- [54] V. Easwaran y M.L. Munjal. Plane wave analysis of conical and exponential pipes with incompressible mean flow. *Journal of Sound and Vibration*, 152: 73–93, 1992.
- [55] A.I. El-Sharkawy y A.H. Nayfeh. Effect of an expansion chamber on the propagation of sound in circular ducts. *Journal of the Acoustical Society of America*, 63:667–674, 1978.
- [56] L.J. Eriksson. Higher order mode effects in circular ducts and expansion chambers. *Journal of the Acoustical Society of America*, 68:545–550, 1980.
- [57] W. Eversman y R.J. Astley. Acoustic transmission in non-uniform ducts with mean flow, part I: the method of weighted residuals. *Journal of Sound and Vibration*, 74:89–101, 1981.
- [58] W. Eversman, E.L. Cook y R.J. Beckemeyer. A method of weighted residuals for the investigation of sound transmission in non-uniform ducts with flow. *Journal of Sound and Vibration*, 38:105–123, 1975.
- [59] G.D. Garrison. Suppression of combustion oscillations with mechanical damping devices. Technical Report FR3299, Pratt and Whitney Aircraft, 1969.
- [60] G.M.L. Gladwell. A variational formulation of damped acousto-structural vibration problems. *Journal of Sound and Vibration*, 4:172–186, 1966.
- [61] G.M.L. Gladwell y V. Mason. Variational finite element calculation of the acoustic response of a rectangular panel. *Journal of Sound and Vibration*, 14: 115–135, 1971.
- [62] G.M.L. Gladwell y G. Zimmermann. On energy and complementary energy formulations of acoustic and structural vibration problems. *Journal of Sound and Vibration*, 3:233–241, 1966.
- [63] G.R. Gogate y M.L. Munjal. Analytical and experimental aeroacoustic studies of open-ended three-duct perforated elements used in mufflers. *Journal of the Acoustical Society of America*, 97:2919–2927, 1995.
- [64] K.H. Huebner, E.A. Thornton y T.G. Byrom. *The Finite Element Method for Engineers*. John Wiley & Sons, Nueva York, 1995.
- [65] W.F. Hughes y E.W. Gaylord. *Ecuaciones Básicas de las Ciencias de la Ingeniería*. McGraw-Hill, Méjico, 1971.
- [66] J.G. Ih y B.H. Lee. Analysis of higher-order mode effects in the circular expansion chamber with mean flow. *Journal of the Acoustical Society of America*, 77: 1377–1388, 1985.

- [67] J.G. Ih y B.H. Lee. Theoretical prediction of the transmission loss of circular reversing chamber mufflers. *Journal of Sound and Vibration*, 112:261–272, 1987.
- [68] U. Ingard. On the theory and design of acoustic resonators. *Journal of the Acoustical Society of America*, 25:1037–1061, 1953.
- [69] U. Ingard. Perforated facing and sound absorption. *Journal of the Acoustical Society of America*, 26:151–154, 1954.
- [70] U. Ingard y R.H. Bolt. Absorption characteristics of acoustic material with perforated facings. *Journal of the Acoustical Society of America*, 23:533–540, 1951.
- [71] U. Ingard y H. Ising. Acoustic nonlinearity of an orifice. *Journal of the Acoustical Society of America*, 42:6–17, 1967.
- [72] K. Jayaraman y K. Yam. Decoupling approach for modeling perforated tube muffler components. *Journal of the Acoustical Society of America*, 69:390–396, 1981.
- [73] X. Jing, X. Sun, J. Wu y K. Meng. Effect of grazing flow on the acoustic impedance of an orifice. *AIAA Journal*, 39:1478–1484, 2001.
- [74] Y. Kagawa, T. Yamabuchi, T. Yoshikawa, S. Ooie, N. Kyouno y T. Shindou. Finite element approach to acoustic transmission-radiation systems and application to horn and silencer design. *Journal of Sound and Vibration*, 69:207–228, 1980.
- [75] F.C. Karal. The analogous acoustical impedance for discontinuities and constrictions of circular cross section. *Journal of the Acoustical Society of America*, 25:327–334, 1953.
- [76] J. Kergomard y A. Garcia. Simple discontinuities in acoustic waveguides at low frequencies: critical analysis and formulae. *Journal of Sound and Vibration*, 114:465–479, 1987.
- [77] J. Kergomard, A. Garcia, G. Tagui y J.P. Dalmont. Analysis of higher order mode effects in an expansion chamber using modal theory and equivalent electrical circuits. *Journal of Sound and Vibration*, 129:457–475, 1989.
- [78] J. Kim y W. Soedel. General formulation of four pole parameters for three-dimensional cavities utilizing modal expansion, with special attention to the annular cylinder. *Journal of Sound and Vibration*, 129:237–254, 1989.
- [79] J. Kim y W. Soedel. Development of a general procedure to formulate four pole parameters by modal expansion and its application to three-dimensional cavities. *Journal of Vibration and Acoustics*, 112:452–459, 1990.
- [80] Y.J. Kim y J.W. Choi. General solution of acoustic wave equation for circular reversing chamber with temperature gradient. *Journal of Vibration and Acoustics*, 113:543–550, 1991.

- [81] Y.J. Kim, J.W. Choi y B. Duk. Acoustic characteristics of an expansion chamber with constant mass flow and steady temperature gradient (theory and numerical simulation). *Journal of Vibration and Acoustics*, 112:460–467, 1990.
- [82] R. Kirby. Simplified techniques for predicting the transmission loss of a circular dissipative silencer. *Journal of Sound and Vibration*, 243:403–426, 2001.
- [83] R. Kirby. Transmission loss predictions for dissipative silencers of arbitrary cross section in the presence of mean flow. *Journal of the Acoustical Society of America*, 114:200–209, 2003.
- [84] R. Kirby y A. Cummings. The impedance of perforated plates subjected to grazing gas flow and backed by porous media. *Journal of Sound and Vibration*, 217:619–636, 1998.
- [85] R. Kirby y F.D. Denia. Analytic mode matching for a circular dissipative silencer containing mean flow and a perforated pipe. *Journal of the Acoustical Society of America*, 122:3471–3482, 2007.
- [86] G. Kirchhoff. Ueber den einfluss der wärmeleitung in einem gase auf die schallbewegung. *Annalen der Physik und Chemie*, 134:177–193, 1868.
- [87] J.W. Kooi y S.L. Sarin. An experimental study of the acoustic impedance of Helmholtz resonator arrays under a turbulent boundary layer. *American Institute of Aeronautics and Astronautics, Aeroacoustics Conference, 7th, Palo Alto, CA*, page 10 pp, 1981.
- [88] S.H. Lee y J.G. Ih. Empirical model of the acoustic impedance of a circular orifice in grazing mean flow. *Journal of the Acoustical Society of America*, 114: 98–113, 2003.
- [89] F.P. Mechel. *Mathieu Functions: Formulas, Generation, Use*. S. Hirzel Verlag, Stuttgart, 1997.
- [90] T.H. Melling. The acoustic impedance of perforates at medium and high sound pressure levels. *Journal of Sound and Vibration*, 29:1–65, 1973.
- [91] R. Mittra y S.W. Lee. *Analytical Techniques in the Theory of Guided Waves*. MacMillan, Nueva York, 1971.
- [92] P.M. Morse y H. Feshbach. *Methods of Theoretical Physics*. McGraw-Hill, Nueva York, 1953.
- [93] P.M. Morse y K.U. Ingard. *Theoretical Acoustics*. McGraw-Hill, Nueva Jersey, 1968.
- [94] M.L. Munjal. *Acoustics of Ducts and Mufflers*. John Wiley & Sons, Nueva York, 1987.
- [95] M. Muñoz y F. Payri. *Motores de Combustión Interna Alternativos*. Sección de Publicaciones, Universidad Politécnica de Madrid, Madrid, 1989.

- [96] M.K. Myers. On the acoustic boundary condition in the presence of flow. *Journal of Sound and Vibration*, 71:429–434, 1980.
- [97] V. Pagneux, N. Amir y J. Kergomard. A study of wave propagation in varying cross-section waveguides by modal decomposition. Part I. Theory and validation. *Journal of the Acoustical Society of America*, 100:2034–2048, 1996.
- [98] R. Payri. *Análisis de la Atenuación producida por Filtros Acústicos: Síntesis y Modelado de Silenciadores de Escape*. Tesis doctoral, Departamento de Máquinas y Motores Térmicos, Universidad Politécnica de Valencia, Valencia, 1999.
- [99] K.S. Peat. Evaluation of four-pole parameters for ducts with flow by the finite element method. *Journal of Sound and Vibration*, 84:389–395, 1982.
- [100] K.S. Peat. The acoustical impedance at discontinuities of ducts in the presence of a mean flow. *Journal of Sound and Vibration*, 127:123–132, 1988.
- [101] K.S. Peat. The acoustical impedance at the junction of an extended inlet or outlet duct. *Journal of Sound and Vibration*, 150:101–110, 1991.
- [102] K.S. Peat y K.L. Rathi. A finite element analysis of the convected acoustic wave motion in dissipative silencers. *Journal of Sound and Vibration*, 184:529–545, 1995.
- [103] A.D. Pierce. Wave equation for sound in fluids with unsteady inhomogeneous flow. *Journal of the Acoustical Society of America*, 87:2292–2299, 1990.
- [104] A.D. Pierce. *Acoustics*. Acoustical Society of America, Woodbury, NY, 1991.
- [105] M.C. Potter y D.C. Wiggert. *Mecánica de Fluidos*. Thomson, México, 2002.
- [106] K.N. Rao y M.L. Munjal. Experimental evaluation of impedance of perforates with grazing flow. *Journal of Sound and Vibration*, 108:283–295, 1986.
- [107] S.S. Rao. *The Finite Element Method in Engineering*. Pergamon Press, Oxford, 1989.
- [108] L. Rayleigh. *The Theory of Sound*. Dover Publications, Nueva York, 1945.
- [109] J. Rey y A. Castro. *Funciones de Bessel*. Dossat, Madrid, 1958.
- [110] H.S. Roh, W.P. Arnott, J.M. Sabatier y R. Raspet. Measurement and calculation of acoustic propagation constants in arrays of small air-filled rectangular tubes. *Journal of the Acoustical Society of America*, 89:2617–2624, 1991.
- [111] D. Ronneberger. The acoustical impedance of holes in the wall of flow ducts. *Journal of Sound and Vibration*, 24:133–150, 1972.
- [112] D.F. Ross. A finite element analysis of perforated component acoustic systems. *Journal of Sound and Vibration*, 79:133–143, 1981.

- [113] S. Rossetti, P. Gardonio y M.J. Brennan. A wave model for rigid-frame porous materials using lumped parameter concepts. *Journal of Sound and Vibration*, 286:81–96, 2005.
- [114] A.D. Sahasrabudhe y M.L. Munjal. Analysis of inertance due to higher order mode effects in a sudden area discontinuity. *Journal of Sound and Vibration*, 185:515–529, 1995.
- [115] M.G. Schorr y F.J. Beck. Electromagnetic field of the conical horn. *Journal of Applied Physics*, 21:795–801, 1950.
- [116] A. Selamet y V. Easwaran. Wave propagation and attenuation in Herschel-Venturi tubes. *Journal of the Acoustical Society of America*, 101:936–942, 1997.
- [117] A. Selamet y Z.L. Ji. Acoustic attenuation performance of circular expansion chambers with offset inlet/outlet: I. Analytical approach. *Journal of Sound and Vibration*, 213:601–617, 1998.
- [118] A. Selamet y Z.L. Ji. Acoustic attenuation performance of circular flow-reversing chambers. *Journal of the Acoustical Society of America*, 104:2867–2877, 1998.
- [119] A. Selamet y Z.L. Ji. Acoustic attenuation performance of circular expansion chambers with extended inlet/outlet. *Journal of Sound and Vibration*, 223:197–212, 1999.
- [120] A. Selamet y Z.L. Ji. Acoustic attenuation performance of circular expansion chambers with single-inlet and double-outlet. *Journal of Sound and Vibration*, 229:3–19, 2000.
- [121] A. Selamet y P.M. Radavich. The effect of length on the acoustic attenuation performance of concentric expansion chambers: an analytical, computational and experimental investigation. *Journal of Sound and Vibration*, 201:407–426, 1997.
- [122] A. Selamet, N.S. Dickey y J.M. Novak. Wave attenuation by universal Venturi tubes: Finite difference predictions with analytical and experimental comparisons. *Noise Control Engineering Journal*, 44:224–230, 1996.
- [123] A. Selamet, V. Easwaran, J.M. Novak y R.A. Kach. Wave attenuation in catalytic converters: Reactive versus dissipative effects. *Journal of the Acoustical Society of America*, 103:935–943, 1998.
- [124] A. Selamet, Z.L. Ji y P.M. Radavich. Acoustic attenuation performance of circular expansion chambers with offset inlet/outlet: II. Comparison with experimental and computational studies. *Journal of Sound and Vibration*, 213:619–641, 1998.
- [125] A. Selamet, I.J. Lee, Z.L. Ji y N.T. Huff. Acoustic attenuation performance of perforated absorbing silencers. En *SAE Paper 2001-01-1435*. *SAE International Congress and Exhibition*. Detroit, 2001.

- [126] A. Selamet, F.D. Denia y A.J. Besa. Acoustic behavior of circular dual-chamber mufflers. *Journal of Sound and Vibration*, 265:967–985, 2003.
- [127] A. Selamet, I.J. Lee y N.T. Huff. Acoustic attenuation of hybrid silencers. *Journal of Sound and Vibration*, 262:509–527, 2003.
- [128] A. Selamet, M.B. Xu, I.J. Lee y N.T. Huff. Analytical approach for sound attenuation in perforated dissipative silencers. *Journal of the Acoustical Society of America*, 115:2091–2099, 2004.
- [129] A. Selamet, M.B. Xu, I.J. Lee y N.T. Huff. Analytical approach for sound attenuation in perforated dissipative silencers with inlet/outlet extensions. *Journal of the Acoustical Society of America*, 117:2078–2089, 2005.
- [130] R.K. Sigman, R.K. Majjigi y B.T. Zinn. Use of finite element techniques in the determination of the acoustic properties of turbofan inlets. Technical Report 77-18, American Institute of Aeronautics and Astronautics, 1977.
- [131] M.R. Stinson. The propagation of plane sound waves in narrow and wide circular tubes, and generalization to uniform tubes of arbitrary cross-sectional shape. *Journal of the Acoustical Society of America*, 89:550–558, 1991.
- [132] J.W. Sullivan. A method for modeling perforated tube muffler components. I. Theory. *Journal of the Acoustical Society of America*, 66:772–778, 1979.
- [133] J.W. Sullivan. A method for modeling perforated tube muffler components. II. Applications. *Journal of the Acoustical Society of America*, 66:779–788, 1979.
- [134] J.W. Sullivan. Some gas flow and acoustic pressure measurements inside a concentric-tube resonator. *Journal of the Acoustical Society of America*, 76:479–484, 1984.
- [135] J.W. Sullivan y M.J. Crocker. Analysis of concentric-tube resonators having unpartitioned cavities. *Journal of the Acoustical Society of America*, 64:207–215, 1978.
- [136] X. Sun, X. Jing, H. Zhang y Y. Shi. Effect of grazing-bias flow interaction on acoustic impedance of perforated plates. *Journal of Sound and Vibration*, 254:557–573, 2002.
- [137] A.N. Tijonov y A.A. Samarsky. *Ecuaciones de la Física Matemática*. Mir, Moscú, 1980.
- [138] M.I. Torres. *Modelado Acústico de Silenciadores con Material Absorbente*. Tesis doctoral, Departamento de Ingeniería Mecánica y de Materiales, Universidad Politécnica de Valencia, Valencia, 2006.
- [139] M. Utsumi. An efficient method for sound transmission in non-uniform circular ducts. *Journal of Sound and Vibration*, 227:735–748, 1999.

- [140] M. Utsumi. Sound transmission in circular ducts of continuously varying cross-sectional area. *Journal of Sound and Vibration*, 242:369–376, 2001.
- [141] C.N. Wang. Numerical decoupling analysis of a resonator with absorbent material. *Applied Acoustics*, 58:109–122, 1999.
- [142] E.S. Weibel. On webster horn equation. *Journal of the Acoustical Society of America*, 27:726–727, 1955.
- [143] M. Willatzen. The influence of a liquid flow on sound fields confined by conical walls. *Journal of Sound and Vibration*, 248:847–863, 2001.
- [144] T.W. Wu. *Boundary Element Acoustics*. WIT Press, Southampton, 2000.
- [145] T.W. Wu y C.Y.R Cheng. Boundary element analysis of reactive mufflers and packed silencers with catalyst converters. *Electronic Journal of Boundary Elements*, 1:218–235, 2003.
- [146] C.I.J. Young y M.J. Crocker. Prediction of transmission loss in mufflers by the finite element method. *Journal of the Acoustical Society of America*, 57:144–148, 1975.
- [147] C.I.J. Young y M.J. Crocker. Acoustic analysis, testing and design of flow-reversing muffler chambers. *Journal of the Acoustical Society of America*, 60:1111–1118, 1976.
- [148] S. Zhang y J. Jin. *Computation of Special Functions*. John Wiley & Sons, Nueva York, 1996.
- [149] O.C. Zienkiewicz y R.L. Taylor. *The Finite Element Method*, Vol 1. Butterworth-Heinemann, Oxford, 5ª edición, 2000.
- [150] C. Zwikker y C.W. Kosten. *Sound Absorbing Materials*. Elsevier, Amsterdam, 1949.

