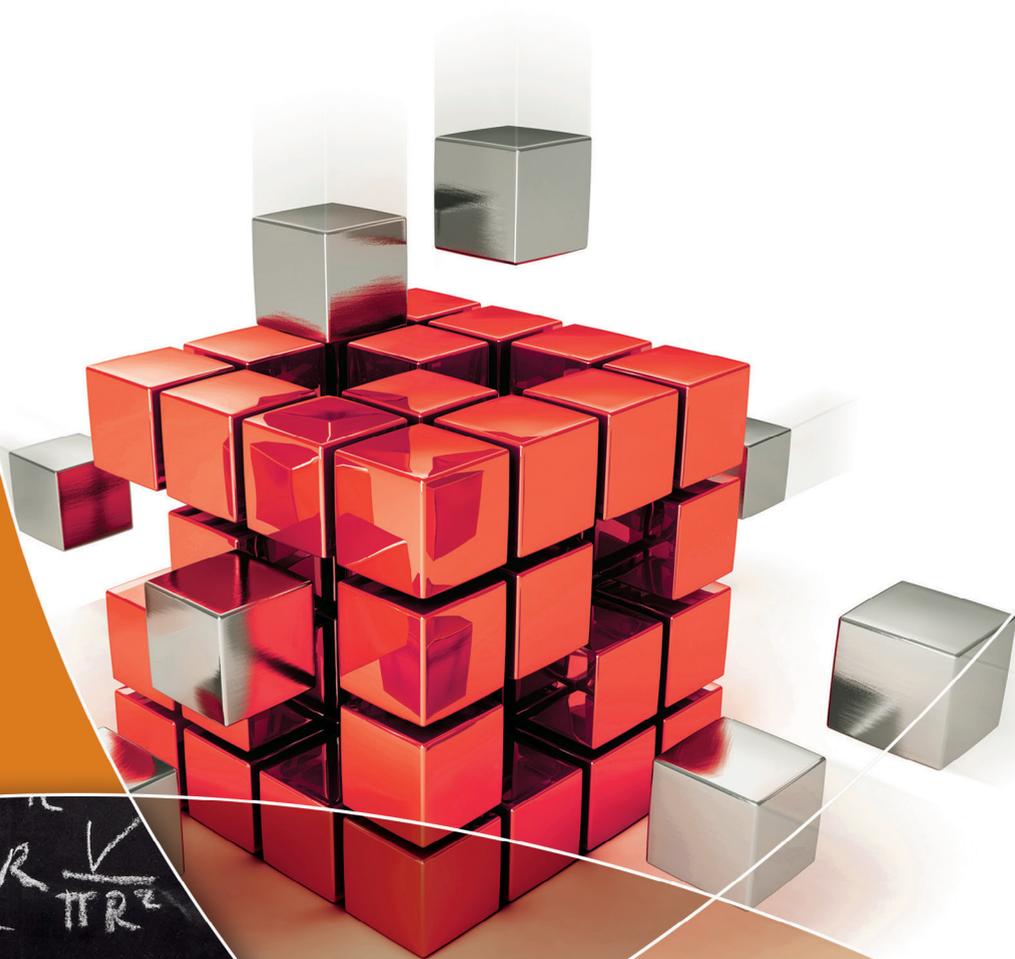




# Àlgebra matricial

**Vicent Estruch Fuster**  
**Valentín Gregori Gregori**  
**Bernardino Roig Sala**



$$2 \times \pi \times R \times \frac{V}{\pi R^2}$$
$$+ \pi R^2$$
$$R = \sqrt[3]{\frac{100}{3,14}} = 3,17$$
$$(a+b)x + (4a^3$$
$$+ 10a^2$$

EDITORIAL  
UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA

## Presentación

El presente libro contiene la parte de álgebra que los autores han redactado para la asignatura Álgebra matricial y geometría, del Grado en Tecnologías Interactivas, que se imparte en la Escuela Politécnica Superior de Gandia, por primera vez en el curso 2017-2018.

El libro, como es usual en textos matemáticos, expone los resultados con una continuada argumentación, pero en este caso sin apenas demostraciones. No obstante, en letra pequeña se presentan pruebas abreviadas o extensiones de la teoría que el lector puede obviar en una primera lectura.

El libro se ha estructurado en capítulos que contienen varias secciones, y en cada uno de ellos los resultados se ilustran con ejemplos apropiados. Al final de cada capítulo aparece una lista de ejercicios resueltos que podrán poner a prueba la comprensión y adquisición de conocimientos por parte del lector. Estos ejercicios, en ocasiones, complementan la teoría.

Los capítulos que conforman la obra son, en este orden: Teoría de conjuntos, Funciones e interpolación, Sistemas de Numeración, Espacios vectoriales, Matrices, Aplicaciones lineales, Determinantes, Sistemas de ecuaciones lineales y Diagonalización de matrices.

Para la comprensión del texto se requieren conocimientos de álgebra elemental. Los autores agradecerán cualquier sugerencia tendente a mejorar el presente texto en ediciones posteriores.

*Los autores*

## NOTACIÓN

En este texto se ha evitado un lenguaje excesivamente simbólico. No obstante, el lector debe conocer la siguiente terminología básica que se usa en matemáticas y ciencias tecnológicas:

$\forall$	Cuantificador universal. Se lee “para todo” o “para cada”
$\exists$	Cuantificador existencial. Se lee “existe”
$\iff$	Equivalencia proposicional. Se lee “si y sólo si”
sii	Abreviatura de “si y sólo si”
$\Rightarrow$	Implicación proposicional. La proposición de la izquierda implica la de la derecha. Se lee “implica”
	Se lee “tal (tales) que”
:	Se lee “tal (tales) que”
i.e.	En latín <i>id est</i> y se lee “es decir”
$\in$	Símbolo de pertenencia
$\subset$	Símbolo de inclusión
$\cup$	Símbolo de unión
$\cap$	Símbolo de intersección
$\mathbb{N}$	Conjunto de los números naturales (incluye al cero)
$\mathbb{N}^*$	El conjunto $\mathbb{N}$ sin el cero
$\mathbb{Z}$	El anillo de los números enteros
$\mathbb{Q}$	El cuerpo de los números racionales
$\mathbb{R}$	El cuerpo de los números reales
$\mathbb{C}$	El cuerpo de los números complejos

# Índice

<b>1</b>	<b>TEORÍA DE CONJUNTOS</b>	<b>13</b>
1.1	EL ÁLGEBRA DE BOOLE DE LA TEORÍA DE CONJUNTOS . . . . .	13
1.1.1	Conjuntos . . . . .	13
1.1.2	Ejemplos . . . . .	14
1.1.3	Representaciones gráficas . . . . .	14
1.1.4	Unión, intersección y complementación de conjuntos . . . . .	15
1.1.5	Conjunto complementario y diferencia de conjuntos . . . . .	16
1.1.6	Ejemplo . . . . .	16
1.1.7	El álgebra de Boole de la teoría de conjuntos . . . . .	17
1.2	CARDINALIDAD DE CONJUNTOS . . . . .	17
1.2.1	Partición . . . . .	17
1.2.2	Cardinal de un conjunto . . . . .	17
1.2.3	Ejemplo . . . . .	18
1.2.4	Producto cartesiano . . . . .	18
1.2.5	Ejemplos . . . . .	19
1.2.6	Variaciones con repetición . . . . .	19
1.2.7	Ejemplo . . . . .	19
1.3	COMBINATORIA ELEMENTAL . . . . .	20
1.3.1	Variaciones ordinarias . . . . .	20
1.3.2	Ejemplo . . . . .	20
1.3.3	Permutaciones ordinarias . . . . .	20
1.3.4	Ejemplo . . . . .	21
1.3.5	Combinaciones ordinarias. Números combinatorios . . . . .	21
1.3.6	Ejemplo . . . . .	21
1.4	UN POCO DE HISTORIA . . . . .	21
1.5	EJERCICIOS RESUELTOS . . . . .	22
<b>2</b>	<b>FUNCIONES E INTERPOLACIÓN</b>	<b>27</b>
2.1	APLICACIONES . . . . .	27
2.1.1	Aplicación . . . . .	27

2.1.2	Ejemplos . . . . .	28
2.1.3	Clases de aplicaciones . . . . .	28
2.1.4	Ejemplos . . . . .	28
2.1.5	Composición de aplicaciones . . . . .	29
2.1.6	La aplicación identidad $I$ . . . . .	29
2.1.7	Correspondencia inversa . . . . .	30
2.1.8	Ejemplo . . . . .	30
2.1.9	Nota . . . . .	30
2.1.10	Ejemplo . . . . .	30
2.1.11	Caracterización de la aplicación inversa . . . . .	31
2.2	FUNCIONES . . . . .	31
2.2.1	Función . . . . .	31
2.2.2	Ejemplo . . . . .	31
2.2.3	Nota . . . . .	32
2.2.4	Ejemplo . . . . .	32
2.2.5	Dominio o campo de existencia de una función . . . . .	32
2.2.6	Ejemplo . . . . .	33
2.2.7	Función inversa . . . . .	33
2.2.8	Ejemplo . . . . .	33
2.2.9	Composición $n$ -ésima de funciones . . . . .	34
2.3	REPRESENTACIÓN DE FUNCIONES . . . . .	34
2.3.1	Gráfica de funciones continuas . . . . .	34
2.3.2	Ejemplo . . . . .	35
2.3.3	Función definida a trozos . . . . .	35
2.3.4	Ejemplo . . . . .	35
2.3.5	Funciones discretas . . . . .	36
2.3.6	Ejemplo . . . . .	36
2.4	INTERPOLACIÓN . . . . .	37
2.4.1	Discretización e interpolación . . . . .	37
2.4.2	Interpolación lineal . . . . .	37
2.4.3	Ejemplo . . . . .	38
2.4.4	Interpolación polinómica . . . . .	38
2.4.5	Ejemplo . . . . .	39
2.5	REGRESIÓN Y CORRELACIÓN . . . . .	39
2.5.1	Nube de puntos . . . . .	39
2.5.2	Ejemplo . . . . .	40
2.5.3	Líneas de regresión . . . . .	41
2.5.4	Recta de regresión . . . . .	41
2.5.5	Ejemplo . . . . .	42
2.5.6	Cálculo de las rectas de regresión con conceptos estadísticos . . . . .	43
2.5.7	Ejemplo . . . . .	44

2.5.8	El coeficiente de correlación lineal . . . . .	45
2.5.9	Ejemplo . . . . .	46
2.5.10	Regresión parabólica . . . . .	46
2.5.11	Regresión exponencial . . . . .	47
2.6	UN POCO DE HISTORIA . . . . .	47
2.7	EJERCICIOS RESUELTOS . . . . .	48
<b>3</b>	<b>SISTEMAS DE NUMERACIÓN</b>	<b>57</b>
3.1	SISTEMA DE NUMERACIÓN . . . . .	57
3.1.1	Teorema fundamental de la numeración . . . . .	58
3.1.2	Ejemplo . . . . .	58
3.1.3	Nota . . . . .	59
3.1.4	Algoritmo para escribir un número en base $b$ . . . . .	59
3.1.5	Ejemplo . . . . .	59
3.1.6	Aritmética con números en base $b$ . . . . .	59
3.1.7	Ejemplo . . . . .	60
3.1.8	Regla del producto por la unidad seguida de ceros . . . . .	60
3.1.9	Ejemplo . . . . .	60
3.1.10	Expresión de números racionales en base $b$ . . . . .	60
3.1.11	Ejemplo . . . . .	60
3.1.12	Productos con el factor $b^k$ en el sistema base $b$ . . . . .	61
3.1.13	Ejemplo . . . . .	61
3.2	SISTEMAS DE NUMERACIÓN USADOS EN COMPUTACIÓN . . . . .	61
3.2.1	El sistema binario . . . . .	61
3.2.2	Ejemplo . . . . .	62
3.2.3	Escritura de un decimal en el sistema binario con $k$ cifras exactas . . . . .	62
3.2.4	Ejemplo . . . . .	63
3.2.5	Escritura de un decimal en sistema binario . . . . .	63
3.2.6	Los sistemas octal y hexadecimal . . . . .	64
3.2.7	Conversión de un número binario a los sistemas octal o hexadecimal . . . . .	64
3.2.8	Ejemplo . . . . .	65
3.3	UN POCO DE HISTORIA . . . . .	65
3.4	EJERCICIOS RESUELTOS . . . . .	66
<b>4</b>	<b>ESPACIOS VECTORIALES</b>	<b>71</b>
4.1	ESPACIOS VECTORIALES . . . . .	71
4.1.1	El espacio vectorial $\mathbb{R}^n$ . . . . .	71
4.1.2	Representaciones geométricas . . . . .	72
4.1.3	Subespacios vectoriales . . . . .	73
4.1.4	Subespacios de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ . . . . .	73
4.1.5	Combinaciones lineales . . . . .	73

4.1.6	Rectas vectoriales en $\mathbb{R}^n$ . . . . .	74
4.1.7	Ejemplo . . . . .	75
4.1.8	Interpretaciones geométricas . . . . .	75
4.1.9	Dependencia lineal . . . . .	76
4.1.10	Ejemplos . . . . .	77
4.1.11	Consecuencias . . . . .	77
4.2	BASE DE UN ESPACIO VECTORIAL . . . . .	77
4.2.1	Base de un espacio vectorial . . . . .	77
4.2.2	Teorema de la dimensión . . . . .	78
4.2.3	Bases canónicas . . . . .	78
4.2.4	Teorema de la base incompleta . . . . .	78
4.3	PROCESO DE REDUCCIÓN DE GAUSS . . . . .	78
4.3.1	Lema . . . . .	79
4.3.2	Nota . . . . .	79
4.3.3	Ejemplo . . . . .	79
4.3.4	Proceso de reducción de Gauss . . . . .	80
4.3.5	Ejemplo . . . . .	80
4.3.6	Suma de subespacios . . . . .	81
4.3.7	Nota . . . . .	81
4.3.8	Ejemplo . . . . .	81
4.4	UN POCO DE HISTORIA . . . . .	82
4.5	EJERCICIOS RESUELTOS . . . . .	82
<b>5</b>	<b>MATRICES</b> . . . . .	<b>87</b>
5.1	EL ESPACIO VECTORIAL DE LAS MATRICES . . . . .	87
5.1.1	Matriz . . . . .	87
5.1.2	Ejemplos . . . . .	88
5.1.3	El grupo abeliano $(\mathcal{M}_{m \times n}, +)$ . . . . .	88
5.1.4	El espacio vectorial $\mathcal{M}_{m \times n}$ . . . . .	89
5.1.5	Ejemplos . . . . .	89
5.1.6	Base de $\mathcal{M}_{m \times n}$ . . . . .	89
5.1.7	Ejemplo . . . . .	89
5.2	EL ANILLO DE LAS MATRICES CUADRADAS . . . . .	90
5.2.1	El producto de matrices . . . . .	90
5.2.2	Ejemplo . . . . .	90
5.2.3	El anillo de las matrices cuadradas $(\mathcal{M}_n, +, \cdot)$ . . . . .	91
5.3	TIPOS ESPECIALES DE MATRICES . . . . .	91
5.3.1	Matriz inversible . . . . .	91
5.3.2	Ejemplos . . . . .	92
5.3.3	Matrices triangulares . . . . .	92
5.3.4	Ejemplo . . . . .	93

5.3.5	Traspuesta de una matriz . . . . .	93
5.3.6	Ejemplos . . . . .	93
5.3.7	Nota . . . . .	93
5.3.8	Propiedades de la matriz traspuesta . . . . .	94
5.3.9	Otros tipos de matrices . . . . .	94
5.4	RANGO DE UNA MATRIZ . . . . .	94
5.4.1	Definición . . . . .	94
5.4.2	Teorema . . . . .	94
5.4.3	Ejemplo . . . . .	94
5.5	MATRICES ELEMENTALES . . . . .	95
5.5.1	Matrices elementales . . . . .	95
5.5.2	Ejemplos . . . . .	95
5.5.3	Cálculo de la inversa de una matriz mediante matrices elementales . . . . .	96
5.5.4	Ejemplo . . . . .	96
5.5.5	Teorema . . . . .	97
5.5.6	Inversas de matrices triangulares . . . . .	97
5.5.7	Ejemplo . . . . .	97
5.5.8	Descomposición $LU$ . . . . .	97
5.5.9	Ejemplo . . . . .	98
5.5.10	Matrices escalonadas. Descomposición $LS$ . . . . .	98
5.5.11	Ejemplo . . . . .	99
5.6	MATRICES POR BLOQUES . . . . .	100
5.6.1	Matrices por bloques . . . . .	100
5.6.2	Ejemplo . . . . .	101
5.7	UN POCO DE HISTORIA . . . . .	102
5.8	EJERCICIOS RESUELTOS . . . . .	102
<b>6</b>	<b>APLICACIONES LINEALES</b> . . . . .	<b>109</b>
6.1	APLICACIONES LINEALES . . . . .	109
6.1.1	Aplicaciones lineales . . . . .	109
6.1.2	Propiedades . . . . .	110
6.1.3	Ejemplos . . . . .	110
6.1.4	Ejemplo . . . . .	110
6.1.5	Núcleo . . . . .	110
6.1.6	Teorema (caracterización de aplicaciones inyectivas) . . . . .	111
6.1.7	Nota . . . . .	111
6.1.8	Ejemplo . . . . .	111
6.1.9	Proposición . . . . .	112
6.1.10	Proposición . . . . .	112
6.1.11	Teorema de la dimensión (de aplicaciones lineales) . . . . .	112
6.1.12	Corolario (idoneidad de las aplicaciones lineales) . . . . .	112

6.2	MATRICES Y APLICACIONES LINEALES . . . . .	112
6.2.1	Matriz asociada a una aplicación lineal . . . . .	112
6.2.2	Ejemplo . . . . .	114
6.2.3	Rango de una aplicación lineal . . . . .	114
6.2.4	Ejemplo . . . . .	114
6.2.5	Matriz de la aplicación identidad $I$ . . . . .	116
6.2.6	Isomorfismo entre aplicaciones lineales y matrices . . . . .	116
6.2.7	Nota . . . . .	117
6.2.8	Proposición . . . . .	117
6.3	APLICACIONES LINEALES Y MATRICES INVERSIBLES . . . . .	117
6.3.1	Proposición . . . . .	117
6.3.2	Nota . . . . .	117
6.3.3	Proposición . . . . .	117
6.3.4	Composición de aplicaciones lineales . . . . .	118
6.3.5	Ejemplo . . . . .	118
6.3.6	Proposición . . . . .	118
6.3.7	Teorema . . . . .	118
6.3.8	Corolario . . . . .	119
6.4	CAMBIOS DE BASE . . . . .	119
6.4.1	Expresión matricial del cambio de base en un espacio vectorial . . . . .	119
6.4.2	Ejemplo . . . . .	120
6.4.3	Matrices asociadas a una aplicación lineal . . . . .	121
6.4.4	Nota . . . . .	122
6.5	UN POCO DE HISTORIA . . . . .	123
6.6	EJERCICIOS RESUELTOS . . . . .	123
<b>7</b>	<b>DETERMINANTES</b> . . . . .	<b>129</b>
7.1	DETERMINANTE DE ORDEN $n$ . . . . .	129
7.1.1	Signatura de una permutación . . . . .	129
7.1.2	Determinante de orden $n$ . . . . .	130
7.1.3	Determinante de orden 3 y de orden 2 . . . . .	131
7.1.4	Ejemplos . . . . .	131
7.1.5	Propiedades de los determinantes de orden $n$ . . . . .	132
7.1.6	Ejemplos . . . . .	133
7.2	DESARROLLO DE UN DETERMINANTE . . . . .	134
7.2.1	Menor complementario y adjunto . . . . .	134
7.2.2	Ejemplo . . . . .	135
7.2.3	Proposición . . . . .	135
7.2.4	Proposición (desarrollo de un determinante) . . . . .	135
7.2.5	Proposición (determinante de una matriz triangular) . . . . .	136
7.2.6	Cálculo práctico de determinantes . . . . .	136

7.2.7	Ejemplo . . . . .	136
7.3	MATRIZ INVERSIBLE . . . . .	137
7.3.1	Proposición . . . . .	137
7.3.2	Teorema . . . . .	137
7.3.3	Corolario . . . . .	138
7.3.4	Nota . . . . .	138
7.3.5	Proposición . . . . .	138
7.3.6	Cálculo de la matriz inversa . . . . .	138
7.3.7	Ejemplo . . . . .	139
7.3.8	Aplicación al cálculo del rango de una matriz . . . . .	139
7.3.9	Ejemplo . . . . .	140
7.4	UN POCO DE HISTORIA . . . . .	140
7.5	EJERCICIOS RESUELTOS . . . . .	140
<b>8</b>	<b>SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES</b> . . . . .	<b>147</b>
8.1	SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES . . . . .	147
8.1.1	Sistemas de ecuaciones lineales . . . . .	147
8.1.2	Solución de un sistema de ecuaciones lineales . . . . .	148
8.1.3	Matriz ampliada . . . . .	149
8.1.4	Proposición . . . . .	149
8.1.5	Ejemplo . . . . .	149
8.1.6	Clasificación de sistemas . . . . .	150
8.1.7	Teorema de Rouché-Fröbenius . . . . .	150
8.1.8	Ejemplos . . . . .	151
8.2	RESOLUCIÓN DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES . . . . .	153
8.2.1	Regla de Cramer . . . . .	153
8.2.2	Ejemplos . . . . .	154
8.2.3	Método de reducción de Gauss . . . . .	155
8.2.4	Ejemplo . . . . .	156
8.2.5	Sistema homogéneo . . . . .	157
8.2.6	Ejemplo . . . . .	157
8.2.7	Resolución de un sistema de Cramer por descomposición $LU$ . . . . .	158
8.2.8	Resolución de un sistema por descomposición $LS$ . . . . .	158
8.2.9	Interpolación polinómica . . . . .	159
8.2.10	Sistemas sobredeterminados . . . . .	160
8.3	ECUACIONES DE LOS SUBESPACIOS DE $\mathbb{R}^n$ . . . . .	161
8.3.1	Ecuaciones vectorial y paramétricas de un subespacio vectorial . . . . .	161
8.3.2	Nota . . . . .	161
8.3.3	Ecuaciones de un subespacio vectorial (Eliminación de parámetros) . . . . .	162
8.3.4	Ejemplo . . . . .	163
8.4	RESOLUCIÓN NUMÉRICA DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES . . . . .	164

8.4.1	Aproximaciones sucesivas . . . . .	164
8.4.2	Métodos iterativos. Convergencia . . . . .	164
8.4.3	Método de Jacobi . . . . .	165
8.4.4	Método de Gauss-Seidel . . . . .	166
8.4.5	Nota . . . . .	166
8.5	UN POCO DE HISTORIA . . . . .	167
8.6	EJERCICIOS RESUELTOS . . . . .	168
<b>9</b>	<b>DIAGONALIZACIÓN DE MATRICES</b>	<b>179</b>
9.1	SUBESPACIOS PROPIOS . . . . .	179
9.1.1	Introducción . . . . .	179
9.1.2	Vectores propios . . . . .	180
9.1.3	Nota . . . . .	180
9.1.4	Subespacio propio . . . . .	180
9.1.5	Ejemplo . . . . .	180
9.1.6	El polinomio característico . . . . .	180
9.1.7	Unicidad del polinomio característico . . . . .	181
9.1.8	Ejemplo . . . . .	182
9.2	DIAGONALIZACIÓN DE MATRICES . . . . .	182
9.2.1	Definición . . . . .	182
9.2.2	Proposición . . . . .	182
9.2.3	Nota . . . . .	182
9.2.4	Proposición . . . . .	183
9.2.5	Ejemplo . . . . .	183
9.2.6	Teorema (caracterización de los endomorfismos diagonalizables) . . . . .	184
9.2.7	Ejemplo . . . . .	184
9.2.8	Nota . . . . .	184
9.2.9	Matriz de paso . . . . .	184
9.2.10	Potencia de una matriz . . . . .	184
9.2.11	Matrices simétricas . . . . .	185
9.2.12	Nota . . . . .	185
9.3	UN POCO DE HISTORIA . . . . .	185
9.4	EJERCICIOS RESUELTOS . . . . .	185
	<b>BIBLIOGRAFÍA . . . . .</b>	<b>193</b>
	<b>ÍNDICE DE TÉRMINOS . . . . .</b>	<b>195</b>

# Capítulo 1

## TEORÍA DE CONJUNTOS

En este capítulo se ofrece una (ingenua) introducción a la teoría de conjuntos que es suficiente para establecer y estudiar los conceptos que se definen a lo largo del texto.

### 1.1 EL ÁLGEBRA DE BOOLE DE LA TEORÍA DE CONJUNTOS

#### 1.1.1 Conjuntos

Un **conjunto** es una colección de elementos. Los conjuntos suelen denotarse con letras mayúsculas. Cuando se explicitan sus elementos, éstos, sin repetirse, se encierran entre llaves separados por comas. En ciertos contextos se utilizan los términos **sistema**, **colección** y **familia** como sinónimos de conjunto. Así se habla de “familia de conjuntos” en vez de “conjunto de conjuntos” y sistema de vectores en vez de conjunto de vectores.

Designaremos por  $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{R}$  y  $\mathbb{C}$  a los conjuntos de los números naturales, enteros, racionales, reales y complejos, respectivamente. Por ejemplo:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\} \text{ y } \mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}.$$

Un **conjunto unitario** es aquél que posee un único elemento. Esta terminología se extiende a conjuntos de dos o más elementos, de manera obvia. Para expresar que un elemento  $a$  **pertenece** a un conjunto  $S$  (o que está en  $S$ ) se escribe  $a \in S$ . Si  $a$  no está en  $S$  se escribe  $a \notin S$ . Para expresar que un conjunto  $A$  está **contenido** (o **incluido**) en otro  $B$  (i.e., todo elemento de  $A$  está en  $B$ ) se escribe  $A \subset B$  (o  $B \supset A$ ), en tal caso se dice que  $A$  es un **subconjunto** de  $B$ . Si  $A$  no está incluido en  $B$  se escribe  $A \not\subset B$ .

Se designa por  $\emptyset$  al conjunto, denominado **vacío**, que no posee elementos. Todo subconjunto no vacío  $S$  posee dos subconjuntos **impropios**:  $\emptyset$  y  $S$ . Los demás subconjuntos de  $S$  se llaman **proprios**.

Dos conjuntos  $A$  y  $B$  son **iguales**, y se escribe  $A = B$ , cuando poseen los mismos elementos, lo cual sucede si  $A \subset B$  y  $B \subset A$ .

Un conjunto también se describe a través de una expresión caracterizadora de sus elementos dentro de un contexto (conjunto **referencial**). Así, el conjunto  $\{0, 1, 2, 3, 4\}$  también se puede escribir de las dos formas siguientes:

$$\{x \in \mathbb{N} : x < 5\} \quad \text{o} \quad \{x \in \mathbb{Z} : 0 \leq x \leq 4\}.$$

### 1.1.2 Ejemplos

- (a) El conjunto  $V$  de las vocales es  $V = \{a, e, i, o, u\}$  (o también  $V = \{e, i, a, o, u\}$  pues el orden de aparición de los elementos es irrelevante).

Se tiene que  $\{a, e, o\} \subset V$  pero  $\{a, m\} \not\subset V$  pues  $m \notin V$ .

- (b)  $-2 \in \mathbb{Z}$  pero  $-2 \notin \mathbb{N}$ .

- (c) Se tienen las inclusiones *numéricas*  $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$  y  $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ . Sin embargo las inclusiones *contrarias* no se verifican.

- (d) El conjunto *binario*  $\{-1, 1\}$  se puede escribir  $\{x \in \mathbb{Z} : 1 \leq x^2 \leq 2\}$ .

- (e) Se tiene que

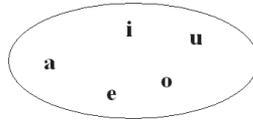
$$\{x \in \mathbb{R} : x^2 = -1\} = \emptyset.$$

Obsérvese que el conjunto  $\emptyset$  viene determinado por una condición imposible de cumplir.

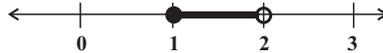
- (f) El conjunto  $\{0, 2, 4, \dots\}$  que contiene el 0 y los pares es el conjunto  $\{2n : n \in \mathbb{N}\}$  por lo que habitualmente se representa por  $2\mathbb{N}$ . Análogamente si  $p \in \mathbb{N}$  y es mayor que 0,  $p\mathbb{N}$  representa los naturales múltiplos de  $p$ , que también suelen denotarse  $\dot{p}$ .

### 1.1.3 Representaciones gráficas

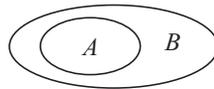
En ocasiones los conjuntos se describen (definen) mediante gráficos. Así, un **diagrama de Venn** es una representación gráfica plana de un conjunto, en la que sus elementos quedan encerrados por una línea, como se muestra en la figura siguiente en la que se representa el conjunto de vocales.



En un **diagrama lineal** los elementos del conjunto son los que resaltan sobre el segmento o la recta donde se representan. Este tipo de representación es interesante cuando se desea entrever un *orden* entre los elementos. En la figura inferior se representa en  $\mathbb{R}$  el conjunto  $I$  que es el intervalo  $[1, 2[$ .



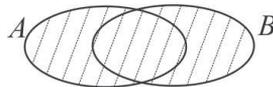
El gráfico siguiente *muestra* que  $A \subset B$ .



### 1.1.4 Unión, intersección y complementación de conjuntos

Sean  $A$  y  $B$  dos conjuntos. Se define la **unión** de los conjuntos  $A$  y  $B$ , y se denota  $A \cup B$  (se lee  $A$  unión  $B$ ), como el conjunto

$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ ó } x \in B\}.$$

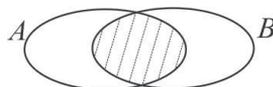


$A \cup B$  es el conjunto rayado.

De esta manera,  $A \cup B$  contiene los elementos de  $A$  o de  $B$  (recordar que la “o” lógica no es excluyente). Este concepto se extiende de forma natural a una familia cualquiera de conjuntos de manera que la unión de éstos está formada por los elementos que pertenecen a alguno de los conjuntos de la familia.

Se define la **intersección** de los conjuntos  $A$  y  $B$ , que se denota  $A \cap B$  (se lee  $A$  intersección  $B$ ), como el conjunto

$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ y } x \in B\}.$$



$A \cap B$  es el conjunto rayado.

De esta manera,  $A \cap B$  contiene los elementos comunes a  $A$  y a  $B$ . Si  $A$  y  $B$  no tienen elementos comunes se dice que son **disjuntos**. Al igual que antes este concepto se generaliza a una familia cualquiera de conjuntos.

De las definiciones se desprenden las siguientes propiedades inmediatas:

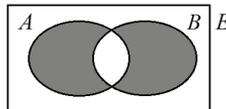
$$\begin{aligned} A &\subset A \cup B, \\ A \cap B &\subset A, \\ A \subset B &\Leftrightarrow A \cup B = B \Leftrightarrow A \cap B = A \end{aligned}$$

### 1.1.5 Conjunto complementario y diferencia de conjuntos

Si  $A$  y  $B$  son conjuntos dentro de un referencial  $E$ , se define el **complementario** de  $A$  (respecto  $E$ ), y se denota por  $A^c$  (se lee  $A$  complementario), como el conjunto formado por los elementos de  $E$  que no están en  $A$ . De manera más general se define el conjunto  $B - A$  (**diferencia** de  $B$  y  $A$ ), como el conjunto de los elementos de  $B$  que no están en  $A$ . Al hablar de  $A^c$  se omite la alusión a  $E$  si está implícito en el contexto. Es fácil observar que  $B - A = B \cap A^c$ . En la siguiente figura  $B - A$  es el conjunto rayado.



Se define la **diferencia simétrica** de dos conjuntos  $A$  y  $B$ , y se denota  $A \Delta B$  como  $A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B)$ . Este concepto se corresponde con la interpretación de la “o” exclusiva, en lógica. Es obvio que  $A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$ .



$A \Delta B$  es la zona sombreada.

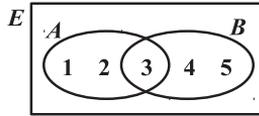
Las siguientes propiedades son inmediatas:

$$\begin{aligned} E^c &= \emptyset, & A^c &= B^c \Leftrightarrow A = B, & (A^c)^c &= A, \\ \emptyset^c &= E, & A \subset B &\Leftrightarrow B^c \subset A^c. \end{aligned}$$

### 1.1.6 Ejemplo

Sea el referencial  $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ . Sean los conjuntos  $A = \{1, 2, 3\}$ ,  $B = \{3, 4, 5\}$  (ver gráfico adjunto).

Entonces:  $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ,  $A \cap B = \{3\}$ ,  $A^c = \{4, 5, 6\}$ ,  $B^c = \{1, 2, 6\}$ ,  $B - A = \{4, 5\}$  ( $= B \cap A^c$ ),  $A - B = \{1, 2\}$  ( $= A \cap B^c$ ).



### 1.1.7 El álgebra de Boole de la teoría de conjuntos

Supongamos que los siguientes conjuntos están definidos en un referencial  $E$ . Se verifican las siguientes propiedades (de carácter dual):

Asociativas:

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C), \quad (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C).$$

Conmutativas:

$$A \cup B = B \cup A, \quad A \cap B = B \cap A.$$

Distributivas

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C), \quad (A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C).$$

Existencia de neutros:

$$A \cup \emptyset = A, \quad A \cap E = A.$$

Existencia de complementario:

$$A \cup A^c = E, \quad A \cap A^c = \emptyset.$$

Por cumplirse las anteriores propiedades, los conjuntos con las *leyes* de la unión, intersección y complementación constituyen un **álgebra de Boole**.

En un álgebra de Boole se verifican las **leyes de De Morgan** o del complementario:

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c, \quad (A \cap B)^c = A^c \cup B^c.$$

Puesto que la unión de conjuntos verifica la asociatividad, el uso de paréntesis es innecesario cuando aparece sólo esta operación. Esto mismo ocurre con la intersección.

## 1.2 CARDINALIDAD DE CONJUNTOS

### 1.2.1 Partición

Una familia de conjuntos  $A_1, A_2, \dots, A_n$  constituyen una **partición** del conjunto  $E$  si dos a dos son disjuntos y, además,  $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = E$ .

### 1.2.2 Cardinal de un conjunto

Se denomina **cardinal** del conjunto *finito*  $A$ , y se escribe  $\text{Cd}A$ , el número de elementos que contiene  $A$ .

**Para seguir leyendo haga click aquí**