

# *Estudio del flujo neutrónico en un reactor cilíndrico*

## *Study of the neutron flux distribution in a cylindrical reactor*

A. Vidal-Ferràndiz, Sofia Carlos, G. Verdú  
UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA  
[anvifer2@upv.es](mailto:anvifer2@upv.es), [scarlos@iqn.upv.es](mailto:scarlos@iqn.upv.es), [gverdu@iqn.upv.es](mailto:gverdu@iqn.upv.es)

---

### Abstract

*Dentro del Grado de Ingeniería de la Energía, impartido en la Universitat Politècnica de València, se encuentra la asignatura de Tecnología Nuclear, en la que los alumnos adquieren los conocimientos básicos sobre esta tecnología. Un objetivo primordial en este tipo de generación energética es el conocimiento de la distribución de la población neutrónica dentro de un reactor, con la finalidad de mantener la reacción en cadena. Es evidente que esta actividad no puede desarrollarse de forma experimental, por lo que los modelos matemáticos son de gran importancia para lograr este objetivo. Así, una de las prácticas que se propone a los alumnos es la obtención del perfil del flujo neutrónico en una geometría cilíndrica, que es un modelo aproximado del núcleo de un reactor, de forma analítica aprovechando para introducir las funciones de Bessel y dar un ejemplo de su utilización. Como método alternativo para obtener una aproximación de la solución del problema se utiliza el método de diferencias finitas. Se estudian distintas discretizaciones del reactor cilíndrico y se comparan las soluciones obtenidas.*

*In the Energy Engineering Degree of the Universitat Politècnica de València, the students attend to the Nuclear Technology course, in which the basic knowledge of this technology is presented. A main objective of this technology is to obtain neutron population distribution inside a reactor core, in order to maintain the fission reaction chain. As this activity cannot be experimentally developed, mathematical modelling is of great importance to achieve such objective. One of the computer laboratories proposed consists in the neutron flux determination analytically and numerically in a cylindrical geometry. The analytical solution makes use of the Bessel functions and is a good example of their applications. Alternatively, a numerical solution based on finite differences is used to obtain an approximate solution of the neutron flux. In this work, different discretizations of the cylindrical geometry are implemented and their results are compared.*

---

Palabras clave: Tecnología Nuclear, Ecuación de la Difusión, Flujo Neutrónico, Funciones de Bessel, Diferencias Finitas.

Keywords: Nuclear Technology, Diffusion Equation, Neutron Flux, Bessel Functions, Finite Differences.

## 1. Introducción

El grado de Ingeniería de la Energía impartido en la Escuela Técnica Superior de Ingenieros Industriales forma parte del grupo de ingenierías de la rama industrial que se imparten en la Universitat Politècnica de València. Dentro de esta titulación se establecen la competencia de:

*Poseer un sólido conocimiento de las tecnologías energéticas convencionales, nuclear y renovables, y una visión de conjunto de la problemática energética a sus diversas escalas.*

En el plan de estudios de la titulación la asignatura de Tecnología Nuclear se encuentra en el primer semestre del cuarto curso de la titulación, siendo una asignatura obligatoria dentro del grado de Ingeniería de la Energía. En la primera parte de la asignatura se presentan los fundamentos sobre el diseño de reactores nucleares. De esta manera, se repasan las interacciones de los neutrones con la materia, el proceso de fisión y los requisitos para poder mantener una reacción en cadena de manera estable y segura.

En el proceso de diseño y en el análisis de seguridad de un reactor nuclear es de vital importancia la simulación mediante modelos matemáticos. Uno de los modelos más importantes es la caracterización del flujo de neutrones dentro de un reactor nuclear que nos permite determinar si un reactor se encuentra en estado crítico. Puesto que la geometría cilíndrica se asemeja de forma simple al núcleo de un reactor, en la asignatura se plantea como práctica informática la determinación del flujo neutrónico en esta geometría con los siguientes objetivos:

1. Resolver la ecuación de la difusión neutrónica en una geometría cilíndrica tanto de forma analítica como numérica.
2. Estudiar la criticidad del reactor.
3. Introducir las funciones de Bessel.
4. Desarrollar un sencillo código de diferencias finitas con MATLAB<sup>®</sup>.
5. Introducir conceptos de programación para este tipo de códigos numéricos.
6. Establecer las bases para que los alumnos sean capaces de comprender y extender los modelos utilizados.

## 2. Tipos de reactores nucleares

Las diferentes tecnologías de reactores nucleares que se han desarrollado se agrupan en generaciones, como se muestra en la Figura 1. En estos momentos las tecnologías más extendidas a nivel mundial son las de los reactores de segunda generación, en concreto, los reactores de agua en ebullición (BWR) y los reactores de agua a presión (PWR). Tanto a los reactores PWR como BWR se les conoce como reactores de agua ligera, puesto que utilizan agua como moderador y refrigerante. Sin embargo, puede utilizarse otros materiales para realizar estas funciones. Así, por ejemplo, como refrigerante se puede utilizar un gas (helio o CO<sub>2</sub>) o deuterio, y como moderador se utiliza grafito y también deuterio. La tecnología CANDU, que utiliza deuterio como moderador y refrigerante, se denomina reactor de agua pesada, para diferenciarlo de las tecnologías de agua ligera.

Los elementos combustibles de los reactores de agua ligera, tanto BWR como los PWR, consisten en haces cuadrados de varillas dentro de las cuales se encuentran el uranio enriquecido necesario para la generación de fisiones. A modo de ejemplo, en un reactor PWR de diseño

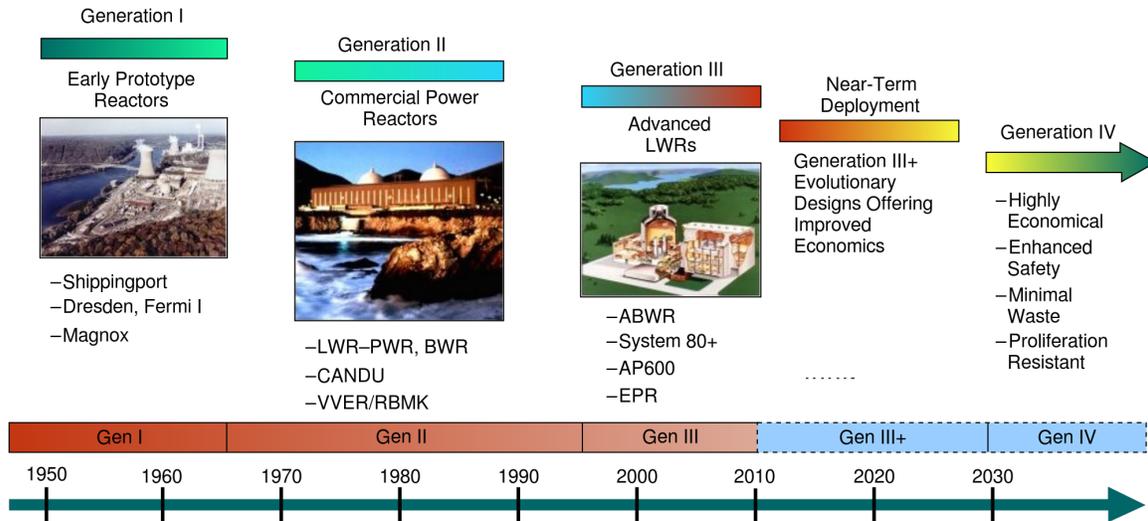


Figura 1: Generaciones de reactores.

Westinghouse de tres lazos con una potencia térmica de 2785 MWt consta de 157 elementos combustibles de  $17 \times 17$  varillas, con una zona de generación de 365.8 cm. El conjunto de todos los elementos combustibles se denomina núcleo del reactor y se encuentra situado dentro de una estructura de acero cilíndrica cuyas superficies superior e inferior son casquetes semiesféricos, denominada vasija. La Figura 2 muestra una sección axial del núcleo de un reactor de agua ligera.

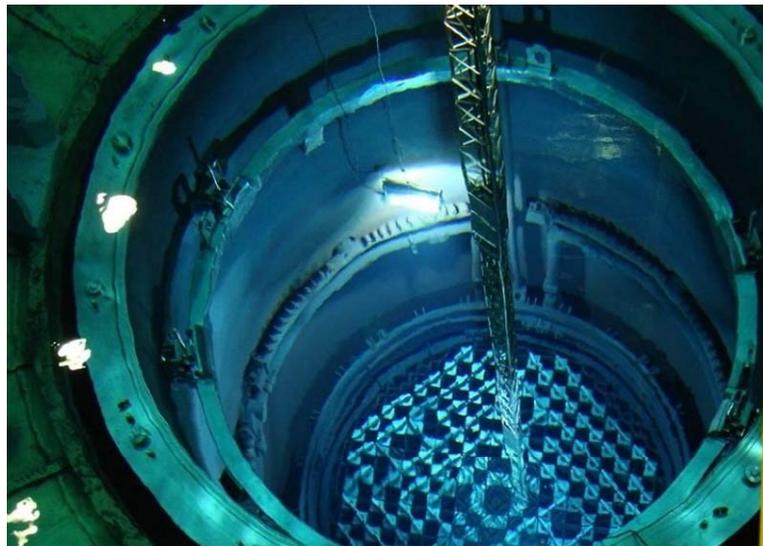


Figura 2: Vista axial del núcleo de un reactor de agua ligera.

Por tanto, el núcleo de un reactor nuclear de agua ligera ya sea del tipo PWR o BWR se puede modelar usando una geometría cilíndrica (Oliveira et al.). Así pues, el reactor objeto de estudio es un reactor cilíndrico y homogéneo como se muestra en la Figura 3, con las características, geométricas y neutrónicas, que se muestran en la Tabla 1. Con estas características se pretende determinar el flujo neutrónico en cada punto del reactor.

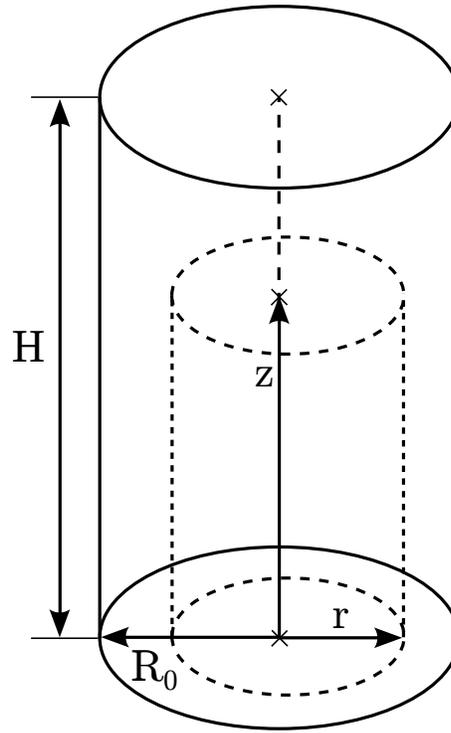


Figura 3: Reactor cilíndrico.

Altura	$H = 365 \text{ cm}$
Radio	$R_0 = 150 \text{ cm}$
Coefficiente de difusión	$D = 0.776 \text{ cm}$
Sección eficaz de absorción	$\Sigma_a = 0.0244 \text{ cm}^{-1}$
Sección eficaz de fisión	$\nu\Sigma_f = 0.0260 \text{ cm}^{-1}$

Tabla 1: Parámetros del reactor cilíndrico.

### 3. Solución analítica

La determinación del flujo de neutrones en un reactor homogéneo en estado estacionario puede abordarse de forma analítica resolviendo la ecuación de la difusión neutrónica que da cuenta del balance de neutrones dentro de un determinado volumen (Hebert, 2009). De este modo, la ecuación de la difusión neutrónica para un solo grupo de energía se expresa como,

$$-\vec{\nabla} \cdot (D\vec{\nabla}\phi(\vec{r})) + \Sigma_a\phi(\vec{r}) = \frac{1}{\lambda}\nu\Sigma_f\phi(\vec{r}). \quad (1)$$

donde el término  $\vec{\nabla} \cdot (D\vec{\nabla}\phi(\vec{r}))$  representa la cantidad de neutrones que difunden a través de las paredes del volumen de control,  $\Sigma_a\phi(\vec{r})$  es la cantidad de neutrones absorbidos por el medio y  $\nu\Sigma_f\phi(\vec{r})$  representa la cantidad de neutrones generados por fisión. Por último,  $\vec{r}$  es la coordenada espacial dentro del reactor. Para resolver este problema es necesario establecer unas condiciones de contorno que, este caso, van a ser de flujo nulo, que significa que en la frontera del reactor el flujo de neutrones será cero.

Como el reactor es homogéneo el término difusivo de la Ecuación (1) se reduce a un operador

laplaciano  $D\nabla^2\phi(\vec{r})$ . Este operador se puede expresar en coordenadas cilíndricas como,

$$\nabla^2\phi(r, \theta, z) = \frac{1}{r} \frac{\partial\phi}{\partial r} + \frac{\partial^2\phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2\phi}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}. \quad (2)$$

Podemos eliminar la variación angular  $\frac{\partial^2\phi}{\partial\theta^2}$ , ya que el reactor es simétrico en dicha coordenada. Sin embargo, sí que existirá variación del flujo neutrónico en la coordenada radial y en la axial. Por tanto, la ecuación de la difusión neutrónica en coordenadas cilíndricas se puede escribir como,

$$-D \left( \frac{1}{r} \frac{\partial\phi(r, z)}{\partial r} + \frac{\partial^2\phi(r, z)}{\partial r^2} + \frac{\partial^2\phi(r, z)}{\partial z^2} \right) + \Sigma_a\phi(r, z) = \frac{1}{\lambda} \nu\Sigma_f\phi(r, z). \quad (3)$$

Para obtener la solución analítica de la Ecuación (3), se utiliza el método de separación de variables, de manera que el flujo neutrónico puede escribirse como,

$$\phi(r, z) = R(r)Z(z), \quad (4)$$

donde  $R(r)$  y  $Z(z)$  son dos funciones que dependen únicamente de  $r$  y  $z$  respectivamente, sin que haya correlación entre ambas coordenadas. Sustituyendo la Ecuación (4) en la Ecuación (3), se obtiene la expresión,

$$\frac{1}{R(r)} \left( \frac{1}{r} \frac{dR(r)}{dr} + \frac{d^2R(r)}{dr^2} + \left( -\frac{\Sigma_a}{D} + \frac{\nu\Sigma_f}{\lambda D} \right) R(r) \right) + \frac{1}{Z(z)} \frac{d^2Z(z)}{dz^2} = 0 \quad (5)$$

Para que se cumpla la Ecuación (5) ambos sumandos deben ser constantes. De este modo, considerando el término dependiente de  $z$  se puede escribir como,

$$\frac{1}{Z(z)} \frac{d^2Z(z)}{dz^2} = -\alpha^2, \quad (6)$$

siendo  $\alpha$  una constante. La solución para la ecuación diferencial de la Expresión (6) es de la forma

$$Z(z) = A \cos(\alpha z) + B \sin(\alpha z). \quad (7)$$

Se consideran condiciones de contorno de flujo nulo, es decir en la frontera del reactor el flujo neutrónico es cero. Por lo tanto se cumple que en las superficies superior e inferior del cilindro el flujo neutrónico se anula, es decir,

$$\phi(r, 0) = R(r)Z(0) = 0, \quad \phi(r, H) = R(r)Z(H) = 0, \quad (8)$$

lo que implica,

$$A = 0, \quad \alpha = \frac{\pi}{H}, \quad (9)$$

donde nos hemos quedado únicamente con la solución de  $\alpha$  que asegura que el flujo neutrónico sea una función real positiva en todo el reactor. La expresión  $Z(z)$  queda como,

$$Z(z) = B \sin\left(\frac{\pi z}{H}\right). \quad (10)$$

Por tanto, haciendo uso de la expresión (10) y la sustituyéndola en la Ecuación (5) se tiene,

$$\frac{1}{r} \frac{dR(r)}{dr} + \frac{d^2R(r)}{dr^2} + \mu R(r) = 0, \quad (11)$$

donde

$$\mu = -\frac{\Sigma_a}{D} + \frac{\nu\Sigma_f}{\lambda D} - \left(\frac{\pi}{H}\right)^2 . \quad (12)$$

Si realizamos el cambio de variable,

$$\hat{r} = \sqrt{\mu}r , \quad (13)$$

en la Ecuación (11) se obtiene

$$\frac{d^2R}{d\hat{r}^2} + \frac{1}{\hat{r}} \frac{dR}{d\hat{r}} + R(\hat{r}) = 0 . \quad (14)$$

Reconocemos esta Ecuación (14) como la ecuación de Bessel de orden 0 (Temme, 1996), cuya solución viene dada por

$$R(\hat{r}) = CJ_0(\hat{r}) + EY_0(\hat{r}), \quad (15)$$

donde  $C$  y  $E$  son constantes,  $J_0(\hat{r})$  es la función de Bessel de primera especie y orden cero y  $Y_0(\hat{r})$  es la función de Bessel de segunda especie y orden cero.

Para que la ecuación que se obtenga tenga sentido físico, es necesario que el flujo neutrónico dentro del reactor,  $\phi(r, z)$ , sea un número real, positivo y finito. Por tanto, la constante  $E$  de la Ecuación (15) debe ser cero. De este modo se elimina el término de  $Y_0(\hat{r})$  ya que para  $r = 0$  se tiene que  $Y_0(\hat{r}) \rightarrow \infty$ . Por tanto, la expresión del flujo neutrónico en la coordenada radial viene dada por

$$R(\hat{r}) = CJ_0(\hat{r}). \quad (16)$$

Además, la condición de contorno de flujo nulo implica que,

$$J_0(\sqrt{\mu}R_0) = 0. \quad (17)$$

Esta condición se satisface para todos los ceros de la función de Bessel. La función de Bessel de orden cero presenta un número infinito de ceros reales que están dispuestos de la forma representada en la Figura 4. Para nuestra aplicación únicamente interesa el primer cero ya que representa el primer armónico de la solución, el único que cumple la condición de que el flujo tenga un valor positivo en todo el reactor.

El conocimiento de las funciones de Bessel es básico para entender la distribución neutrónica en un reactor cilíndrico. Por ello, la primera actividad que deben realizar los alumnos es dibujar la función  $J_0$  como se muestra en la Figura 4 y obtener el valor de su primer cero,  $v_1$ , ya sea de forma gráfica o utilizando un método de iterativo de búsqueda de raíces como la bisección o el método de Newton (Burden y Faires, 2002).

Si deshacemos el cambio de variable se tiene que

$$\sqrt{\mu} = \frac{v_1}{R_0}r . \quad (18)$$

Con lo que la expresión de  $R$  queda como

$$R(r) = CJ_0\left(\frac{v_1r}{R_0}\right). \quad (19)$$

De este modo, una vez obtenidas las expresiones para  $Z(z)$  y  $R(r)$ , según las Ecuaciones (10) y (17) respectivamente, se obtiene la de  $\phi(r, z)$ ,

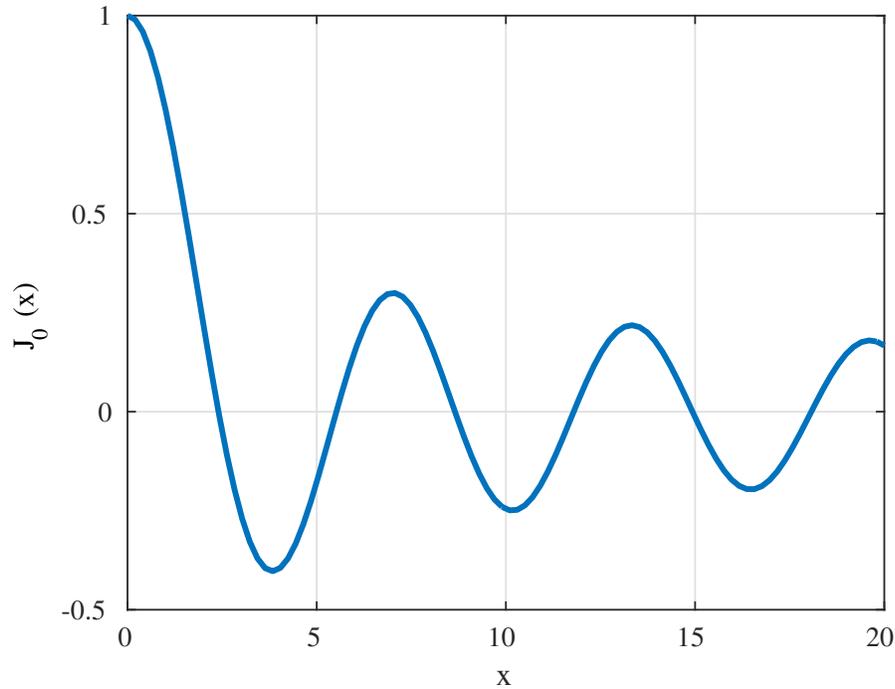


Figura 4: Función de Bessel.

$$\phi(r, z) = C J_0\left(\frac{v_1 r}{R_0}\right) \sin\left(\frac{\pi z}{H}\right). \quad (20)$$

Donde  $C$  es una constante positiva de normalización que depende de la potencia del reactor. Como para nuestro modelo de reactor cilíndrico desconocemos la potencia generada, se ha normalizado el flujo de forma que su máximo sea igual a 1 lo que implica que  $C = 1$ . Utilizando la Ecuación (20) con los datos de la Tabla 1 se puede representar gráficamente el perfil radial y axial del flujo neutrónico dentro del cilindro. De esta manera el perfil radial del flujo neutrónico en el plano medio se representa en la Figura 5 mientras que el perfil axial en  $r = 0$  está representado en la Figura 6.

La expresión del flujo neutrónico no es suficiente para asegurar que dentro del reactor se tiene la reacción de fisión automantenida, es decir que el reactor se encuentre en estado crítico. Para saber si el diseño que se propone con las dimensiones y los materiales adecuados será capaz de mantener el reactor en estado crítico es necesario obtener la *constante efectiva*,  $k_{\text{eff}}$ , del reactor. La constante efectiva es el autovalor asociado al modo fundamental, que es el que representa el flujo neutrónico en condiciones estacionarias. A partir de las expresiones (12) y (18) se obtiene que

$$\left(\frac{v_1}{R_0}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{H}\right)^2 = -\frac{\Sigma_a}{D} + \frac{\nu\Sigma_f}{k_{\text{eff}}D}. \quad (21)$$

Se define *Bucking geométrico*,  $B_g$ , al término de la izquierda de la Ecuación (21), el único que depende de la geometría del reactor. De este modo, para un reactor cilíndrico la constante efectiva viene determinada por la siguiente expresión

$$k_{\text{eff}} = \frac{\nu\Sigma_f}{(\Sigma_a + DB_g)}. \quad (22)$$

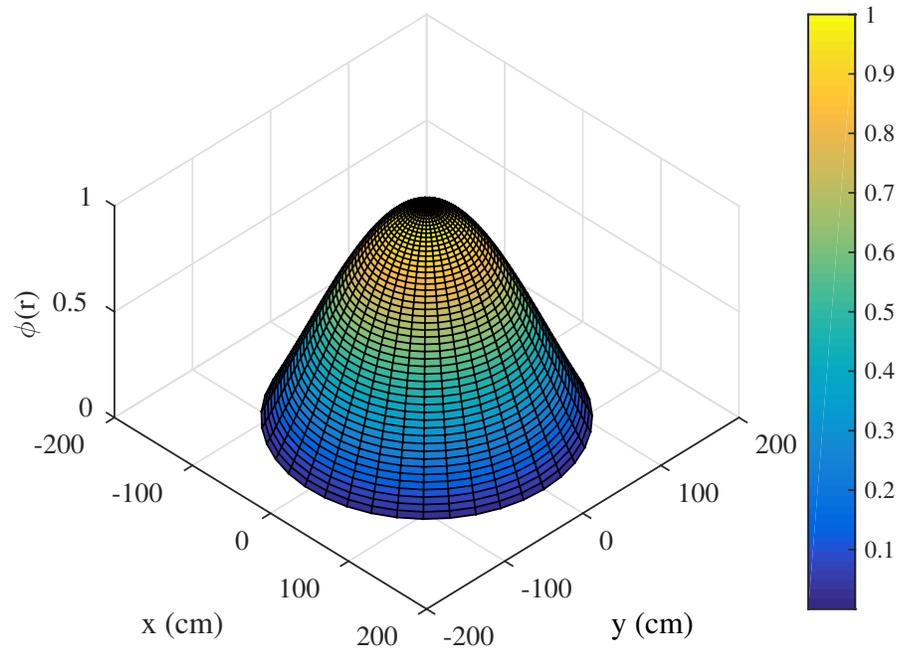
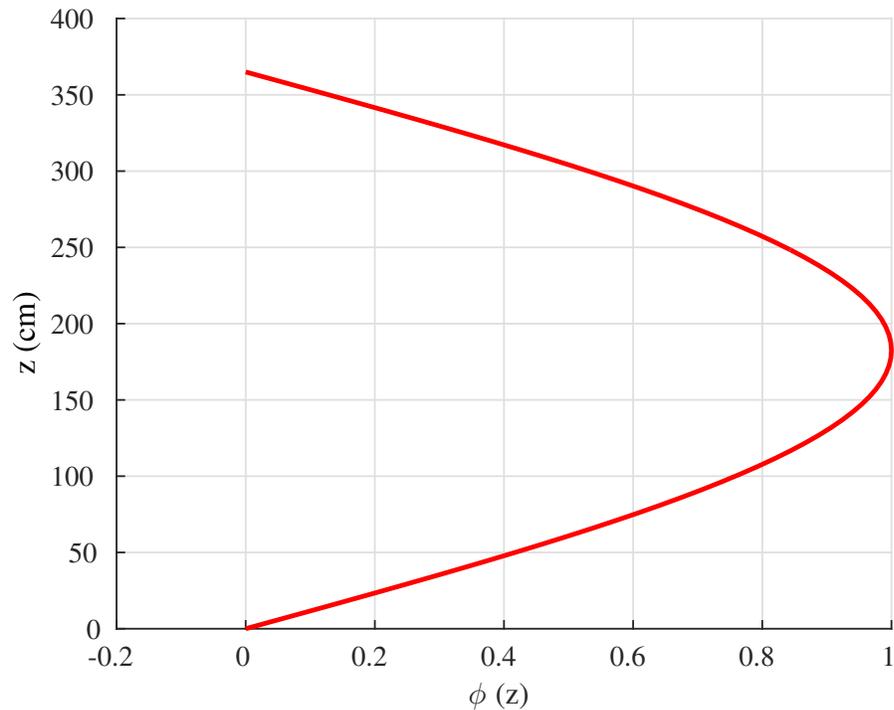


Figura 5: Perfil radial en el plano medio.

Figura 6: Perfil axial en  $r = 0$ .

El valor de la constante efectiva determina la criticidad del reactor de manera que si  $k_{\text{eff}} = 1$  indica que el reactor se encuentra en estado crítico. Si  $k_{\text{eff}} > 1$ , el reactor se encuentra en estado supercrítico, por lo que número de fisiones y del mismo modo la potencia del reactor aumentará de forma exponencial. Por otra parte si  $k_{\text{eff}} < 1$  el reactor está en estado subcrítico por lo que el número de fisiones disminuirá apagando progresivamente el reactor. Por tanto, el control de un reactor debe mantener la población neutrónica del reactor para mantener una potencia térmica

constante, así pues, en un reactor nuclear en funcionamiento la constante efectiva será cerca a 1.0. En el modelo de reactor cilíndrico propuesto en la práctica, el valor de la constante efectiva calculada de forma analítica es  $k_{\text{eff}} = 1.0544697$ .

## 4. Solución numérica

### 4.1. Método de diferencias finitas

El método de diferencias finitas es un método de carácter general que permite la resolución aproximada de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales (Burden y Faires, 2002). El primer paso para la aplicación del método consiste en discretizar el dominio de la ecuación a resolver. Como el problema es aximétrico es posible reducir la dimension del problema con un mallado bidimensional de  $(M + 1) \times (N + 2)$  nodos, como indica la Figura 7. Así pues, la malla del problema consiste en un rectángulo de base  $R_0$  y altura  $H$ , con condición de contorno de simetría para el lado izquierdo y condiciones de contorno de flujo nulo para el resto de lados. En este mallado los nodos están separados por una distancia,  $\Delta r$  y  $\Delta z$ , en la coordenada radial y axial, respectivamente.

En la Figura 7 se muestran dos tipos de numeraciones de los nodos. En la primera numeración,  $(i, j)$ , se indica la posición del nodo según su fila y columna en el plano discretizado. La segunda numeración,  $k$ , es una numeración secuencial los grados de libertad útil para la construcción de las matrices. Es importante notar que se han utilizado nodos auxiliares para tratar las condiciones de contorno de Dirichlet ya que estos nodos no forman parte de los grados de libertad del problema. Estos nodos están referenciados por  $i = N + 1, j = 0$  y  $j = M + 1$ , sin tener una numeración  $k$  asociada.

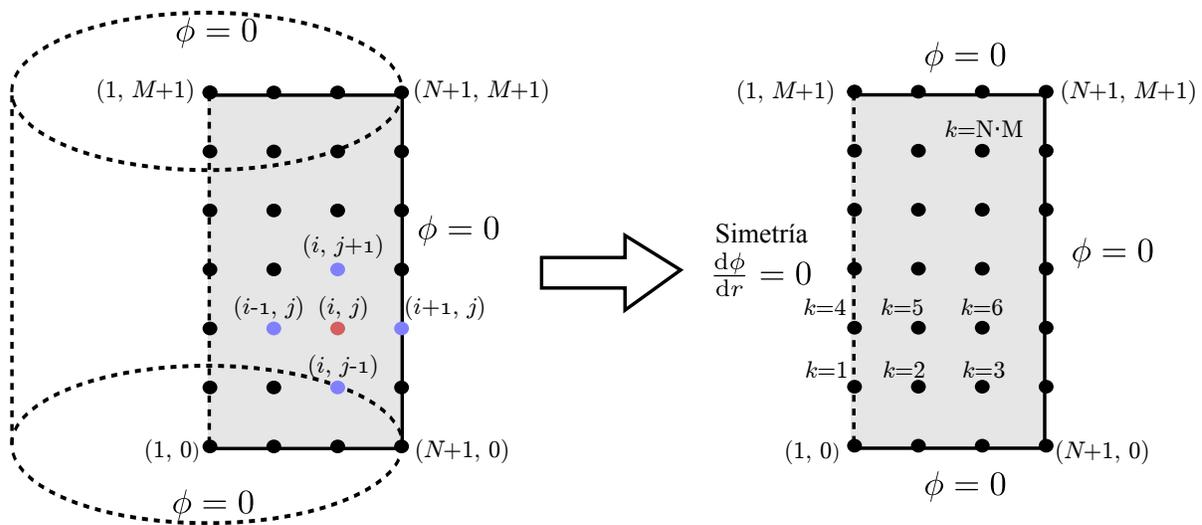


Figura 7: Mallado realizado para el reactor cilíndrico.

En segundo lugar, se estiman (Stacey, 2007) las derivadas parciales que aparecen en la Ecuación (3)

$$\frac{\partial^2 \phi(r, z)}{\partial r^2} \approx \frac{\phi_{i-1,j} - 2\phi_{i,j} + \phi_{i+1,j}}{(\Delta r)^2}, \quad (23)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \phi(r, z)}{\partial r} \approx \frac{1}{r_i} \frac{\phi_{i+1,j} - \phi_{i-1,j}}{2\Delta r}, \quad (24)$$

$$\frac{\partial^2 \phi(r, z)}{\partial z^2} \approx \frac{\phi_{i,j-1} - 2\phi_{i,j} + \phi_{i,j+1}}{(\Delta z)^2}. \quad (25)$$

Por lo que la ecuación de la difusión neutrónica discretizada en diferencias finitas queda como

$$a \phi_{i,j} + b \phi_{i-1,j} + c \phi_{i+1,j} + d \phi_{i,j-1} + e \phi_{i,j+1} = \frac{1}{\lambda} f \phi_{i,j}, \quad (26)$$

$$i \in [1, N], \quad j \in [1, M].$$

donde los coeficientes en general, son

$$a = \frac{2D}{(\Delta r)^2} + \frac{2D}{(\Delta z)^2} + \Sigma_a, \quad b = \frac{D}{2r_i \Delta r} - \frac{D}{(\Delta r)^2},$$

$$c = -\frac{D}{2r_i \Delta r} - \frac{D}{(\Delta r)^2}, \quad d = -\frac{D}{(\Delta z)^2},$$

$$e = -\frac{D}{(\Delta z)^2}, \quad f = \nu \Sigma_f,$$

$$i \in [2, N], \quad j \in [1, M].$$

En el eje central se impone la condición de simetría,

$$\frac{d\phi}{dr}(0, z) = 0. \quad (27)$$

Esta condición se establece numéricamente forzando que  $\phi_{i-1,j} = \phi_{i+1,j}$ . Por lo que los coeficientes de la Ecuación (26) teniendo en cuenta (27) para los nodo situados en el eje del cilindro,  $i = 1$ , vienen dados por

$$a = \frac{2D}{(\Delta r)^2} + \frac{2D}{(\Delta z)^2} + \Sigma_a, \quad b = 0,$$

$$c = -\frac{2D}{(\Delta r)^2}, \quad d = -\frac{D}{(\Delta z)^2},$$

$$e = -\frac{D}{(\Delta z)^2}, \quad f = \nu \Sigma_f,$$

$$i = 1, \quad j \in [1, M].$$

En el extremo superior, inferior y externo del cilindro, esa decir, en los nodos auxiliares donde  $j = 0$ ,  $j = M + 1$  y  $i = N + 1$  hay que tener en cuenta las condiciones de contorno de flujo nulo. Por lo que se han de cambiar los coeficiente  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$ ,  $e$  y  $f$  de forma similar.

El sistema de ecuaciones diferenciales puede reescribirse de forma matricial como,

$$\mathbf{A}\Phi = \frac{1}{\lambda}\mathbf{B}\Phi, \tag{28}$$

donde

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & c & 0 & 0 & \cdots & e & 0 & \cdots & 0 \\ b & a & c & 0 & \cdots & 0 & e & \cdots & 0 \\ 0 & b & a & c & \cdots & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ d & 0 & \cdots & b & a & c & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d & 0 & \cdots & b & a & c & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & & \ddots & \ddots & \ddots & b \\ 0 & \cdots & 0 & d & 0 & \cdots & 0 & b & a \end{pmatrix}, \tag{29}$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} f & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & f & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & f & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & f \end{pmatrix}, \tag{30}$$

$$\Phi = (\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_{N \times M - 1}, \phi_{N \times M})^T. \tag{31}$$

Este tipo de matrices se almacenan de forma dispersa ya que la mayoría de sus elementos son cero, preferiblemente en formato CSR (Saad, 2003) y deben de ser construidas eficientemente.

El problema generalizado de autovalores, dado por la Ecuación (28), se resuelve mediante la función de MATLAB® *eigs()* que utiliza un método iterativo de Krylov para resolver el autovalor de mayor magnitud. El autovector asociado al autovalor de mayor magnitud es la solución del flujo neutrónico en los nodos. Este autovector ha de ser normalizado de modo que el máximo flujo neutrónico sea igual a 1 de la misma forma que se ha hecho con la solución analítica.

La Tabla 2 muestra una comparación de los autovalores obtenidos para diferentes tamaños del problema. Se puede observar como el problema converge rápidamente a la solución analítica por lo que podemos validar el método de diferencias finitas. Es importante destacar que para esta aplicación de criticidad no es aceptable un error mayor a  $10 \times 10^{-5}$ . A la vista de los resultados de la Tabla 2 los alumnos observan que la primera de las discretizaciones no sería adecuada para resolver el problema y se deben considerar mallados más finos. El perfil radial del flujo neutrónico proporcionado por el método numérico comparado con la solución analítica se representa en la Figura 8. De igual forma, perfil axial obtenido se presenta en la Figura 9. En estas dos figuras se puede observar que con  $N = 50$  y  $M = 70$ , es decir, con 3500 grados de libertad obtenemos una solución prácticamente exacta para este problema.

Tamaño del problema	$k_{\text{eff}}$	$\Delta k_{\text{eff}} \times 10^5$
$N = 5, M = 7$	1.05500	53
$N = 50, M = 70$	1.05448	1
$N = 500, M = 700$	1.05447	0
Analítico	1.05447	

Tabla 2: Comparativa de los autovalores.

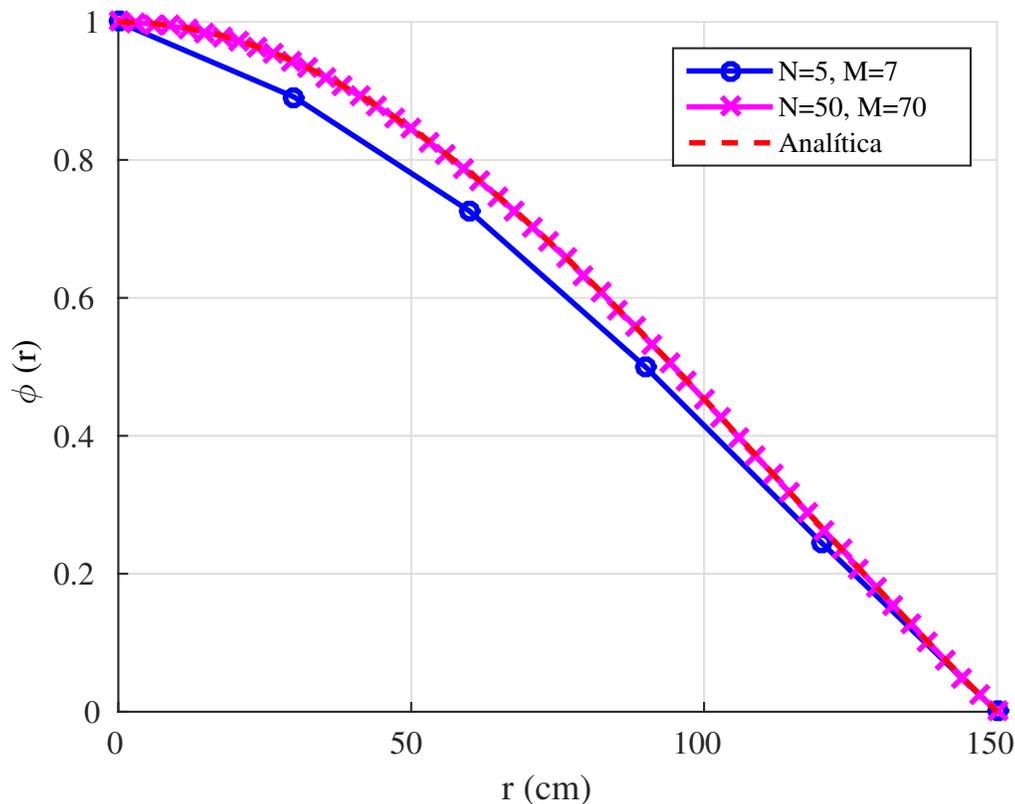


Figura 8: Comparativa de perfiles radiales.

Dentro del programa de Docencia en Red de la Universitat Politècnica de València, se han desarrollado dos objetos virtuales de aprendizaje que ayudan al alumno a comprobar si los cálculos que ha realizado los alumnos de forma autónoma son correctos. Dichos objetos muestran la forma del flujo sin poder visualizar el código que los produce. En concreto uno de los objetos de aprendizaje resuelve exactamente el problema planteado en la práctica, y es una buena herramienta para la comprobación del flujo axial y radial en el reactor cilíndrico homogéneo y con un único grupo de energía. La Figura 10 muestra una captura de pantalla del resultado que presenta el objeto de aprendizaje en el que dadas unas variables de entrada que se introducen en la parte izquierda de la ventana, se obtienen las curvas del flujo axial y radial. El objeto de aprendizaje desarrollado para el cálculo del reactor cilíndrico se encuentra disponible en la dirección:

- [http://labmatlab.upvnet.upv.es/eslabon/cilindro\\_df/default.aspx](http://labmatlab.upvnet.upv.es/eslabon/cilindro_df/default.aspx)

El segundo objeto de aprendizaje resuelve el flujo neutrónico en un reactor unidimensional heterogéneo, definido en la Figura 11, es decir con más de un material, y además dividiendo el espectro neutrónico en dos grupos de energía. En esta aproximación se consideran dos grupos de neutrones según su energía cinética. Los neutrones rápidos cuya energía cinética es mayor a 1 eV y los neutrones térmicos cuya energía es menor que este valor, con lo que se incrementa el número de ecuaciones en el modelo matemático. Este caso de aplicación está enfocado para que el alumno lo desarrolle de forma autónoma, de ahí que se plantee el cálculo para un reactor de una única dimensión, puesto que es la configuración geométrica más sencilla de las que se pueden estudiar. El alumno debe desarrollar las ecuaciones discretizadas en diferencias finitas para este caso, implementarlas en MATLAB® y obtener las distribuciones del flujo rápido y del flujo térmico de neutrones. Como solución del ejercicio el alumno debe aportar la representación

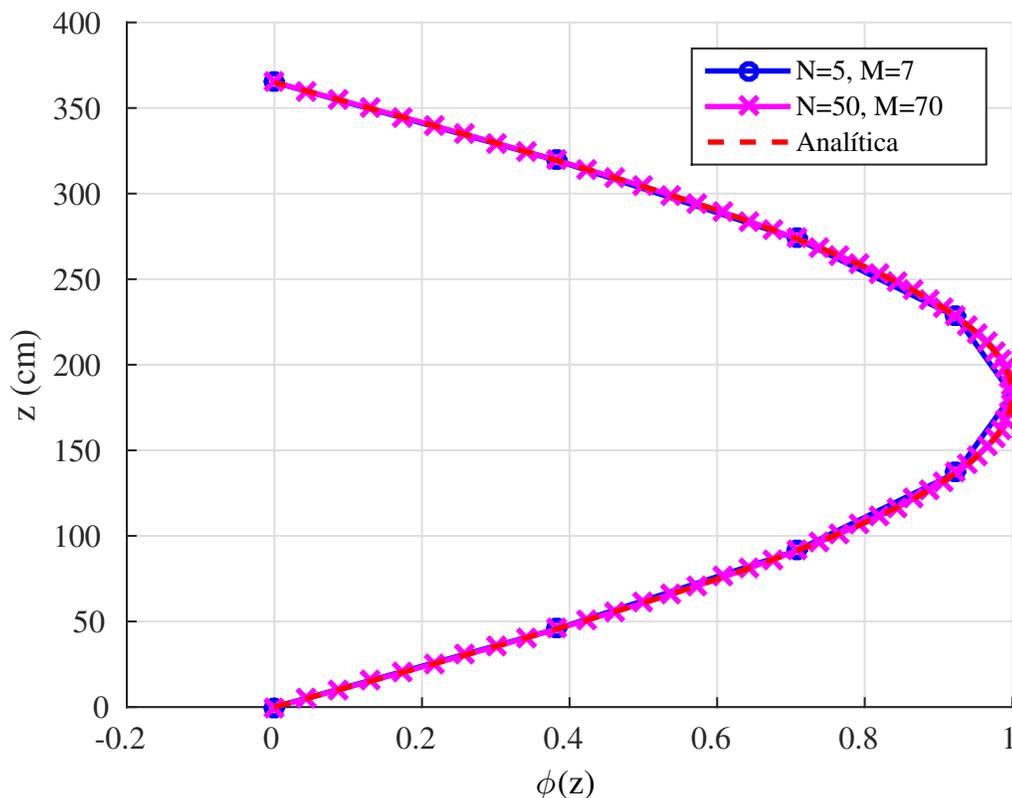


Figura 9: Comparativa de perfiles axiales.

gráfica de ambos flujos, mostrada en la Figura 12. Una vez obtenida la solución el alumno puede comprobar sus resultados en la aplicación online implementada por los profesores:

- <http://labmatlab.upvnet.upv.es/eslabon/reactor1D/default.aspx>

La evaluación de las prácticas se realiza mediante una memoria de prácticas con los ejercicios resueltos en clase en los que se obtiene el flujo neutrónico en un reactor homogéneo y considerando un único grupo de energía de los neutrones. Estos ejercicios son dirigidos por el profesor de prácticas. Además, se valora el ejercicio propuesto que considera un reactor multigrupo y heterogéneo, que el alumno realiza de forma autónoma.

## 5. Conclusiones

Dentro de los objetivos planteados en la asignatura de Tecnología Nuclear del Grado de Ingeniería de la energía, se encuentra la determinación del flujo neutrónico en un reactor nuclear. Este objetivo es inviable alcanzarlo de manera experimental, sin embargo, es factible utilizando modelos matemáticos que simulen las condiciones del reactor. De este modo, y aproximando la forma geométrica de los reactores nucleares de agua ligera a un cilindro, una de las sesiones de prácticas de la asignatura se dedica a obtener los modelos matemáticos que determinan el flujo neutrónico en un reactor cilíndrico. Este problema tiene una solución analítica, en la que se hace uso de las funciones de Bessel, concepto estudiado por los alumnos en la asignatura Matemáticas III del que se plantea una aplicación práctica. Para validar el problema y puesto que al aumentar la complejidad del reactor no es posible resolverlo de forma analítica, se propone el cálculo del flujo neutrónico mediante un método numérico, en concreto, se resuelve el problema utilizando el método de diferencias finitas, también estudiado en la asignatura Matemáticas III. Así pues,

Objetivos:

Calcular y visualizar la distribución de la población neutrónica en un cilindro homogéneo.

Número de puntos  
radiales

50

Número de puntos  
axiales

50

Radio del  
reactor(cm)

150

Altura del reactor  
(cm)

365

Coeficiente difusión  
(cm)

0.776

Sección eficaz de  
absorción (1/cm)

0.0244

Sección eficaz de  
fisión por nu (1/cm)

0.0260

Dibujar

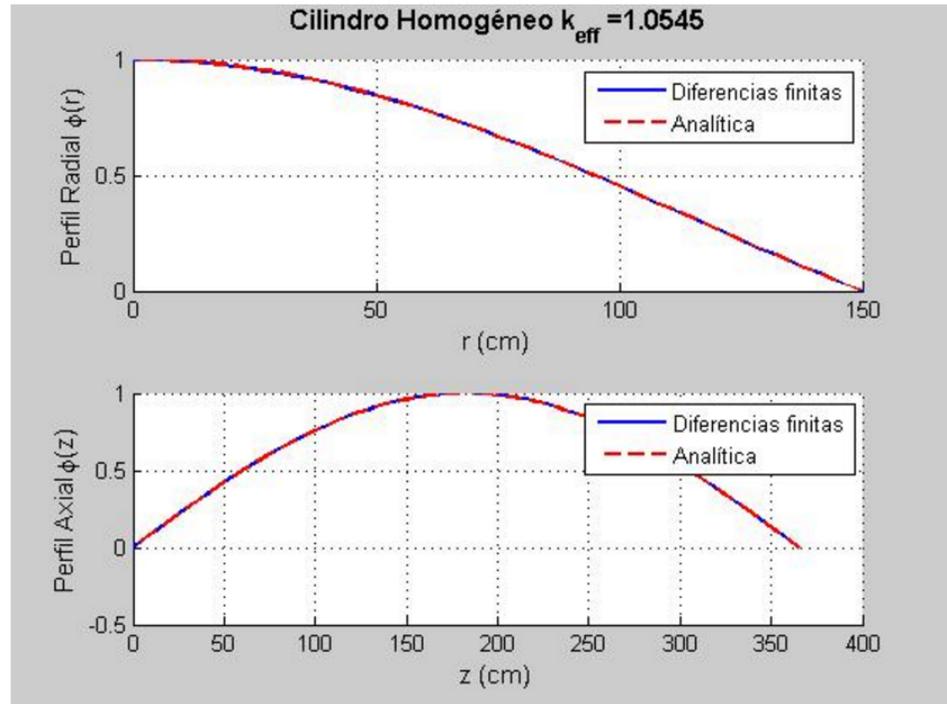


Figura 10: Captura del pantalla del objeto de aprendizaje.

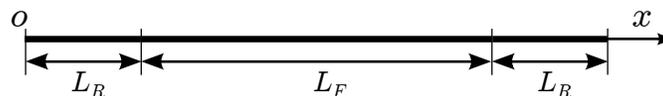


Figura 11: Reactor unidimensional con reflector.

con la guía del profesor, el alumno desarrolla las ecuaciones en derivadas parciales que definen el flujo neutrónico en un reactor y comprende la necesidad de utilizar los modelos matemáticos en el diseño y operación de un reactor nuclear. Las ecuaciones son implementadas en Matlab dado que los alumnos tiene una formación básica en programación, obtenida en la asignatura de Informática ubicada en el primer curso de la titulación. Además, los alumnos han realizado varias prácticas con esta herramienta en asignaturas relacionadas con la energía, como por ejemplo, en Energía y Desarrollo Sostenible. Una vez determinado el flujo neutrónico mediante el cálculo numérico, el alumno entiende la importancia del efecto de la discretización sobre el resultado final. Para ayudar a los alumnos en la comprobación de los cálculos se han desarrollado dos objetos de aprendizaje online, uno de ellos está dedicado a los ejercicios que se proponen en esta práctica.

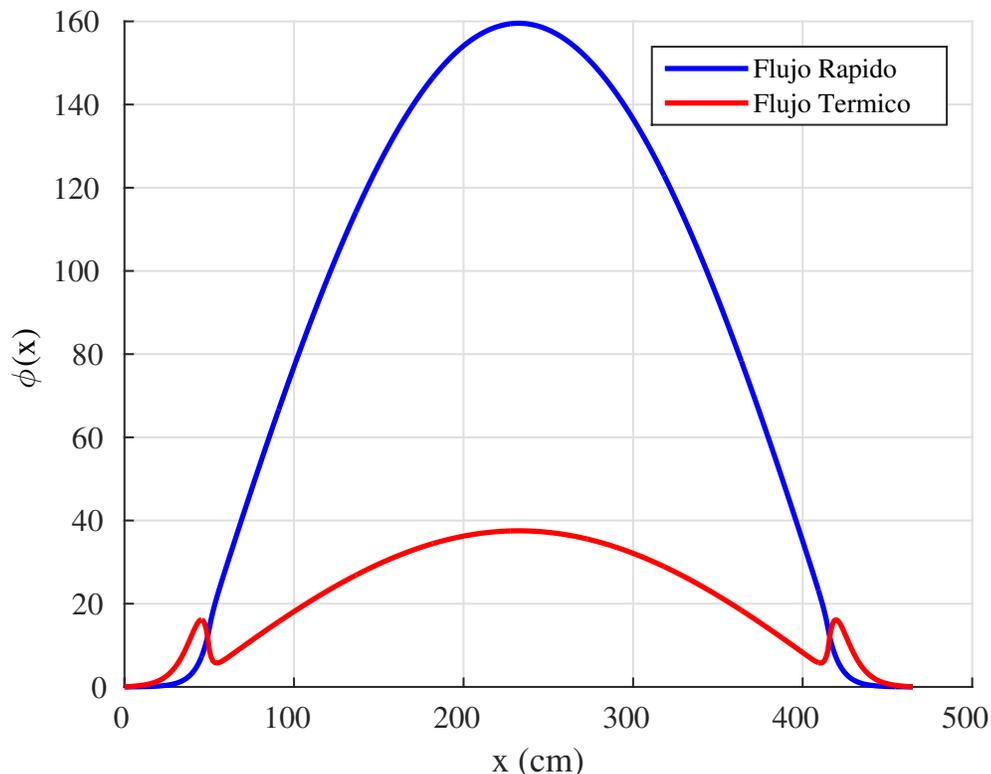


Figura 12: Distribución estacionaria del flujo con dos grupos.

## Referencias

-  Oliveira F., Bodmann B., Vilhena M., Carvalho F. (2017).  
*On an analytical formulation for the mono-energetic neutron space-kinetic equation in full cylinder symmetry.*  
 Annals of Nuclear Energy 99, 253–257.
-  Hébert A. (2009).  
*Applied Reactor Physics.*  
 Presses internationales Polytechnique, Quebec, Canada, ISBN 9782553014369.
-  Temme, N. M. (1996).  
*Special Functions: An Introduction to the Classical Functions of Mathematical Physics.*  
 John Wiley & Sons, Inc., ISBN 9781118032572.
-  Burden R., Faires J. (2007).  
*Análisis numérico.*  
 International Thomson Editores, ISBN 9789706861344.
-  Stacey W. M. (2007).  
*Nuclear Reactor Physics.*  
 John Wiley & Sons, ISBN 9783527611041.
-  Saad Y. (2003).  
*Iterative Methods for Sparse Linear Systems.*  
 Society for Industrial and Applied Mathematics,  
 Philadelphia, PA, USA, 2nd edn., ISBN 0898715342.

Modelling in Science Education and Learning  
<http://polipapers.upv.es/index.php/MSEL>