

# *Los objetos de aprendizaje como herramienta complementaria en la docencia de modelos de calidad de aguas superficiales*

**Elena Alemany, Enrique Javier Asensi**  
UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE VALENCIA  
[ealementy@mat.upv.es](mailto:ealementy@mat.upv.es), [easensi@hma.upv.es](mailto:easensi@hma.upv.es)

---

## **Abstract**

*Los modelos de calidad de aguas que permiten estudiar y gestionar los problemas ambientales ocasionados por vertidos de aguas residuales son modelos matemáticos basados en el planteamiento de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales de segundo orden. La complejidad que conlleva la construcción y estudio de estos modelos hace necesario introducir nuevas metodologías docentes. En esta contribución se presentan varias aplicaciones de laboratorios virtuales desarrolladas con el programa Mathematica y se muestran las ventajas de utilizar objetos de aprendizaje como herramienta docente en el aula, en particular si se aplican en la docencia de modelos de calidad de las aguas superficiales.*

*Water quality models that allow us to study and manage the environmental problems caused by wastewater discharges are mathematical models formulated by means of second order partial differential equations. The complexity that involves the construction and study of these models brings about the need to introduce new teaching methodologies. In this contribution, we present several applications of virtual laboratories developed with Mathematica and we show the advantages of using learning objects as a teaching tool in the classroom, particularly if applied to the teaching of surface water quality models.*

---

**Keywords:** Calidad de aguas, modelos matemáticos, objetos de aprendizaje.  
Water quality, mathematical models, learning objects

## 1 Introducción

El Espacio Europeo de Educación Superior está introduciendo importantes cambios en la comunidad universitaria y en su forma de entender el proceso de enseñanza-aprendizaje. En este nuevo contexto educativo, se pone de manifiesto la necesidad de desarrollar nuevas metodologías docentes para alcanzar las competencias básicas de cada titulación con ayuda de las herramientas que nos ofrecen las nuevas tecnologías.

Los modelos de calidad de aguas superficiales permiten estudiar y gestionar los problemas ambientales que ocasionan los vertidos de aguas residuales en ríos, lagos, estuarios y zonas costeras. Algunos ejemplos de estos problemas ambientales son:

- Disminución de los niveles de oxígeno disuelto en el agua por vertidos de materia orgánica.
- Eutrofización de las aguas por vertidos de nutrientes, principalmente nitrógeno y fósforo.
- Toxicidad debida a la presencia de compuestos tóxicos orgánicos y de metales pesados.
- Transmisión de enfermedades por la presencia de patógenos en el agua.

En varias titulaciones de la Universidad Politécnica de Valencia se imparten asignaturas donde se estudian modelos de calidad de aguas: Ingeniería de Caminos, Ingeniería Técnica de O.O.P.P., Licenciatura en Ciencias Ambientales, Máster en Ingeniería Hidráulica y Medio Ambiente y Máster en Ingeniería Ambiental.

El objetivo principal de estas asignaturas es que el alumno aprenda a plantear y utilizar modelos matemáticos de calidad de aguas ([8]). Por una parte se trata de introducirle al uso de las herramientas necesarias para el estudio de la evolución de las sustancias cuya presencia determina la calidad de las aguas naturales, enseñándole a desarrollar modelos predictivos sencillos en los escenarios más habituales. Por otra parte se aplican los modelos matemáticos a la gestión de los recursos hídricos desde el punto de vista de la calidad de las aguas, para establecer el nivel de tratamiento adecuado de los vertidos de aguas residuales con el fin de conseguir los objetivos de calidad fijados.

En este artículo se presentan varias aplicaciones de objetos de aprendizaje (laboratorios virtuales) desarrollados con el programa Mathematica ([12]) con la finalidad de facilitar el aprendizaje en el aula del proceso de modelización matemática en el contexto de la calidad de las aguas superficiales, dándole a este proceso un enfoque más práctico.

## 2 Los modelos de calidad de aguas

Los modelos de calidad de aguas se basan en el planteamiento de las ecuaciones de balance de materia que describen los procesos de transporte y transformación (físicos, químicos y biológicos) que sufren los contaminantes en las aguas superficiales. Desde el punto de vista matemático, las ecuaciones de balance son ecuaciones diferenciales en derivadas parciales de segundo orden con tres dimensiones espaciales y una cuarta dimensión temporal, cuya solución proporciona la concentración de las sustancias estudiadas en cualquier momento y posición. La ecuación diferencial que representa la variación de la concentración de un contaminante en función del tiempo, en un elemento diferencial de volumen es ([10]):

$$\frac{\partial C}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}(u_x C) - \frac{\partial}{\partial y}(u_y C) - \frac{\partial}{\partial z}(u_z C) + \frac{\partial}{\partial x}\left(E_x \frac{\partial C}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(E_y \frac{\partial C}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(E_z \frac{\partial C}{\partial z}\right) + S_k$$

donde:

- $C$ : es la concentración del contaminante ( $mg/l$ ).
- $u_x, u_y, u_z$ : son las componentes del vector velocidad del agua ( $m/s$ ).
- $E_x, E_y, E_z$ : son los coeficientes de dispersión longitudinal, transversal y vertical ( $m^2/s$ ).
- $S_k$ : son los términos fuente o sumidero del contaminante ( $mg/l s$ )

La ecuación del balance calcula cómo varía la concentración del contaminante ( $C$ ) respecto del tiempo en el elemento diferencial de volumen estudiado, distinguiendo tres términos ([9]):

- Transporte convectivo. Los términos en derivadas parciales espaciales de primer orden representan la variación de  $C$  respecto del tiempo debido a las entradas y salidas del contaminante a través de las fronteras del elemento diferencial de volumen por transporte convectivo (transporte debido a la velocidad del agua).
- Transporte dispersivo. Los términos en derivadas parciales de segundo orden representan la variación de  $C$  respecto del tiempo debido a las entradas y salidas del contaminante a través de las fronteras del elemento diferencial de volumen por transporte dispersivo (transporte por difusión molecular, difusión turbulenta y dispersión).
- Términos fuente-sumidero. El término  $S_k$  representa las variaciones de  $C$  respecto del tiempo debidas a entradas y salidas a través de las fronteras que no sean por transporte convectivo o dispersivo y los procesos de transformación físicos, químicos y biológicos que producen la aparición o desaparición de contaminante en el elemento diferencial de volumen.

La complejidad que conlleva la construcción y estudio de estos modelos se debe, por una parte, a la necesidad de identificar y formular matemáticamente los procesos de transformación físicos, químicos y biológicos que actúan como fuente o sumidero del contaminante estudiado. Por otro lado, es conveniente simplificar las ecuaciones planteadas reduciendo el número de dimensiones espaciales siempre y cuando sea compatible con el caso estudiado e identificar aquellos casos en los que existe estado estacionario. Además, una vez planteado y resuelto el modelo se deben estudiar y analizar las soluciones obtenidas en función de los valores de los parámetros del modelo y de las condiciones de contorno. En muchos casos las ecuaciones de balance planteadas no tienen solución analítica o bien su solución no permite entender fácilmente el modelo estudiado.

### 3 Los objetos de aprendizaje

Un área importante de aplicación de la tecnología actual lo constituye el desarrollo de nuevas metodologías docentes para la ingeniería y la ciencia. La utilización de tecnología en la docencia facilita la consecución de objetivos curriculares ([2], [1]) ya que sirve de apoyo en el proceso de

asimilación de contenidos, reduciendo el tiempo de adquisición del conocimiento. La experiencia docente muestra que el uso de metodologías tradicionales (como son la pizarra, transparencias, apuntes, etc.) no basta para que el alumno adquiera las competencias deseadas. En un primer intento de mejorar el rendimiento en el aula, se introdujeron en las aulas las simulaciones con hojas de cálculo, para permitir al alumno interactuar con los modelos matemáticos y relacionar la formulación matemática con el proceso modelizado.

Además de las ventajas que aporta la hoja de cálculo, los objetos de aprendizaje desarrollados con Mathematica han demostrado ser una herramienta eficaz para la realización de simulaciones dinámicas, y para ayudar a obtener una mejor comprensión de los modelos. Estos laboratorios también permiten experimentar activamente con los modelos y profundizar en el estudio de los componentes necesarios para su formulación. Por otro lado, los laboratorios disponen de una interfaz gráfica de fácil manejo, que puede contextualizarse para dar una representación visual del problema estudiado, por lo que su uso resulta más atractivo para el alumno.

Con el objetivo de facilitar el aprendizaje del alumno se han desarrollado más de veinte laboratorios virtuales relacionados con los modelos de calidad de aguas y con el tratamiento de las aguas residuales. Estos laboratorios se pueden utilizar a través del repositorio institucional de la Universidad Politécnica de Valencia (Riunet, [11]), siguiendo para su visualización las instrucciones especificadas en el propio repositorio. De este modo, puede ser necesario instalar el plugin de Wolfram CDF Player, o disponer de un navegador con soporte para aplicaciones Java para acceder a los objetos en un servidor remoto.

Todos los laboratorios se han diseñado con una misma interfaz gráfica para reducir el tiempo de aprendizaje en el uso de los mismos. Los laboratorios constan de un título situado en la parte superior y de una ventana con cuatro pestañas (Figura 1). La pestaña principal “Simulación” permite interactuar dinámicamente a través de los controles situados en unas cajas de color azul, mientras que en una caja blanca se muestran los resultados de la simulación realizada en forma de gráficos y tablas. Para facilitar el uso de los laboratorios se han añadido otras pestañas con información adicional. En la pestaña “Instrucciones” se describe cómo introducir los datos necesarios y cómo usar dinámicamente el laboratorio mediante las barras de desplazamiento, menús desplegables, etc. También se describen brevemente los contenidos teóricos necesarios relacionados con la simulación realizada por el laboratorio (pestaña “Descripción”) y los objetivos del laboratorio (pestaña “Objetivos”).

#### Modelo de Streeter-Phelps para un estuario.

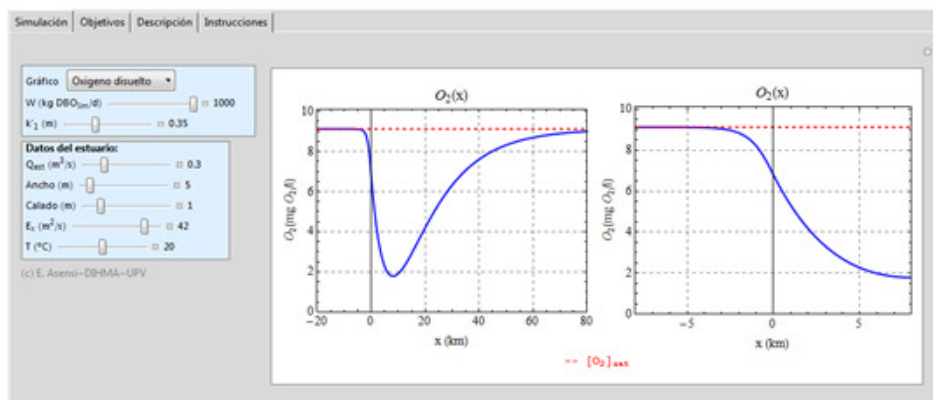


Figura 1: Ejemplo de objeto de aprendizaje ([3]).

A continuación se describen varias aplicaciones de objetos de aprendizaje desarrollados con Mathematica para facilitar el aprendizaje en el aula del proceso de modelización matemática en el contexto de la calidad de las aguas superficiales.

**Objeto de aprendizaje 1:**

**Transporte convectivo y dispersivo de un contaminante en un río.**

El objetivo principal de este laboratorio ([4]) es la introducción de conceptos tales como transporte convectivo, transporte dispersivo y contaminante conservativo y no conservativo.

Se considera un río con las siguientes características:

- Existe mezcla transversal completa, es decir  $C(y, z)$  es constante para un  $x$  dado, por lo tanto se puede simplificar la ecuación de balance considerando sólo la dimensión  $x$ .
- La velocidad del agua y el coeficiente de dispersión longitudinal son constantes ( $u = cte.$  y  $E = cte.$ )
- Se realiza un vertido puntual de un contaminante en el punto  $x_0$  del río, en forma de pulso (Figura 2).
- La velocidad de degradación del contaminante sigue una cinética de orden 1. Si consideramos  $k = 0 d^{-1}$  podemos estudiar el caso particular de un contaminante conservativo.

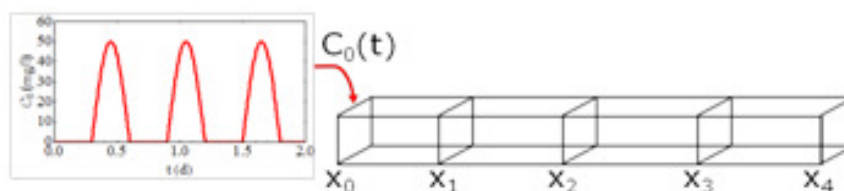


Figura 2: Vertido puntual de un contaminante en forma de pulso.

La ecuación de balance correspondiente al caso estudiado es:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = -u \frac{\partial C}{\partial x} + E \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} - k C$$

El laboratorio virtual permite resolver numéricamente la ecuación de balance y mostrar gráficamente la concentración del contaminante en el río y en función del tiempo (Figura 3).

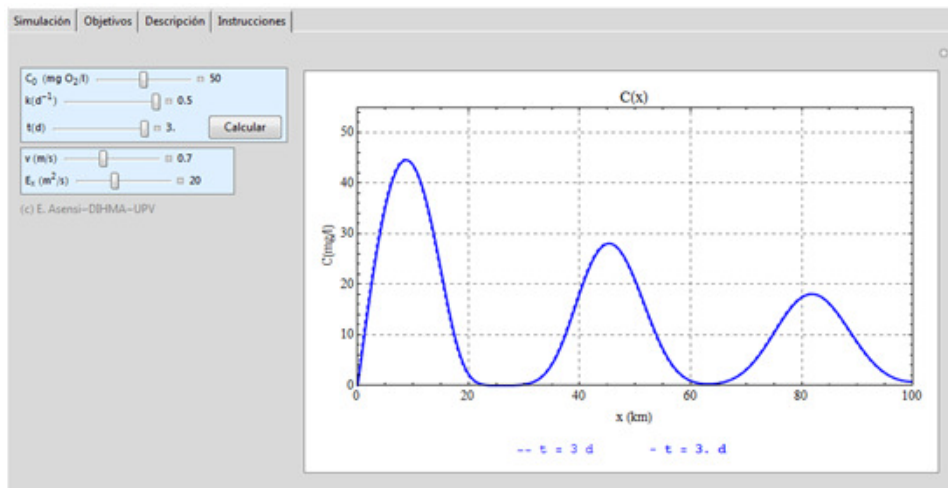


Figura 3: Objeto de aprendizaje 1: Transporte convectivo y dispersivo en un río ([4]).

Para mostrar el efecto del transporte convectivo se considera un contaminante conservativo ( $k = 0$ ) y un río sin dispersión ( $E = 0$ ). Al iniciarse el vertido se observa como el pulso se desplaza sin cambiar la forma del pulso al ser este transportado junto con el agua del río (Figura 4 izquierda).

Se puede introducir el concepto de transporte dispersivo, a partir del caso anterior pero con  $E$  distinto de cero. Al simular este caso se observa que el contaminante además de desplazarse por el transporte convectivo, también se mezcla en la dirección de flujo debido al transporte dispersivo, por lo que el pulso disminuye su altura y aumenta su amplitud (Figura 4 derecha). Variando el valor de  $E$  se puede fácilmente relacionar el proceso de mezcla con el coeficiente de dispersión. Así por ejemplo, si aumentamos el valor de  $E$  se observa que el proceso de mezcla es mayor.

También se puede estudiar la diferencia entre un contaminante conservativo y uno no conservativo considerando un río sin dispersión ( $E = 0$ ). Al introducir un valor de  $k \neq 0$ , el pulso del contaminante se desplaza en el río disminuyendo su altura y manteniendo su amplitud, debido a la desaparición de contaminante en el agua por el proceso de degradación introducido (Figura 6). Se puede estudiar también el efecto del valor de  $k$  con la disminución del contaminante en el río.

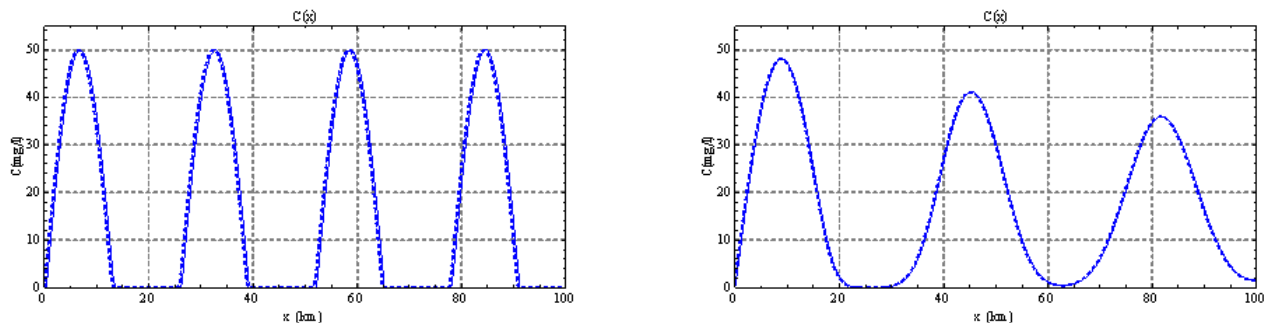


Figura 4: Contaminante conservativo en un río sin dispersión: izquierda  $k = 0$ ,  $E = 0$ , derecha  $k \neq 0$ ,  $E = 0$ .

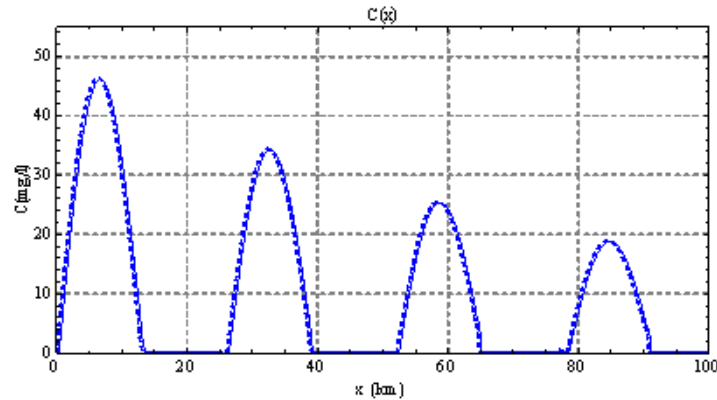


Figura 5: Contaminante no conservativo en un río sin dispersión.

**Objeto de aprendizaje 2.**

**Materia orgánica y oxígeno disuelto en un río. Estudio del estado transitorio y del estado estacionario.**

El objetivo principal de este laboratorio ([5]) es estudiar la evolución de la materia orgánica y el oxígeno disuelto en un río en función de los parámetros que definen el modelo y de las condiciones de contorno. También se pretende introducir al alumno en los conceptos de estado transitorio, estado estacionario y anoxia.

Se supone un río con mezcla transversal completa (río de dimensión 1), velocidad del agua constante ( $u = cte$ ) y sin transporte dispersivo ( $E = 0$ ). Además, se considera que se produce un vertido puntual y constante de materia orgánica en el punto  $x_0$  (Figura 7).

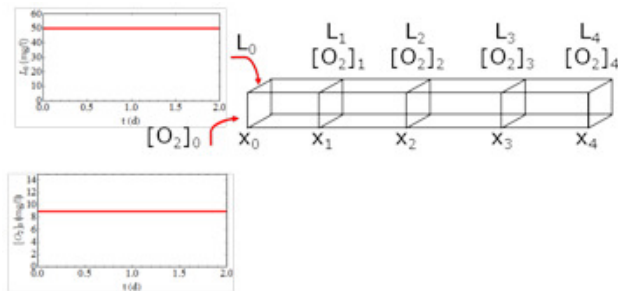


Figura 6: Vertido puntual y constante de materia orgánica en un río.

Las ecuaciones de balance necesarias para modelizar la concentración de materia orgánica (L) y de oxígeno disuelto ( $O_2$ ) en el río son:

$$\frac{\partial L}{\partial t} = -u \frac{\partial L}{\partial x} - k'_1 L \frac{O_2}{K_S + O_2}$$

$$\frac{\partial O_2}{\partial t} = -u \frac{\partial O_2}{\partial x} - k'_1 L \frac{O_2}{K_S + O_2} + k'_2 (O_{2sat} - O_2)$$

En las ecuaciones anteriores se han introducido los términos fuente-sumidero correspondientes a la degradación de la materia orgánica por parte de los microorganismos y al intercambio de oxígeno entre el agua y la atmósfera por reaeración superficial.



El laboratorio resuelve numéricamente las ecuaciones de balance y muestra gráficamente la concentración de materia orgánica y oxígeno disuelto en el río y en función del tiempo (Figura 8).

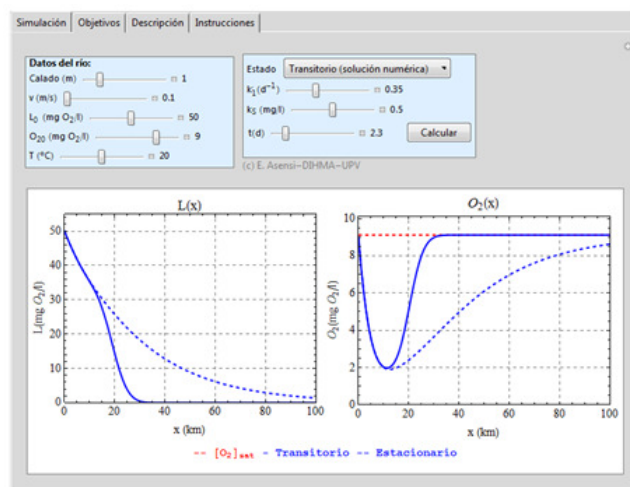


Figura 7: Objeto de aprendizaje 2. Materia orgánica y oxígeno disuelto en un río ([5]).

Para introducir los conceptos de estado transitorio y de estado estacionario, se puede mostrar cómo evoluciona la materia orgánica y el oxígeno disuelto en el río desde que se inicia el vertido hasta que su concentración no varía en el río con el tiempo (Figura 8).

Para entender mejor el modelo, el laboratorio permite estudiar la evolución de la concentración de la materia orgánica y del oxígeno disuelto en el río en función de los parámetros que definen los procesos ( $k'_1$ ,  $k_S$ ,  $v$ ,  $H$  y  $T$ ) y de las condiciones de contorno debidas al vertido ( $L_0$  y  $(O_2)_0$ ).

Otro concepto importante a destacar es el de anoxia. Simulando un vertido de materia orgánica rápidamente biodegradable ( $k'_1$  alto) o un vertido con un elevado contenido en materia orgánica ( $L_0$ ), se puede mostrar que en determinados puntos del río la concentración de oxígeno es próxima a cero o incluso cero y destacar los problemas ambientales asociados a esta situación (Figura 9). En este punto se puede justificar al alumno la utilidad de los modelos de calidad de aguas para gestionar el vertido realizado con el fin de fijar el grado de depuración que se debe realizar para evitar esta situación y conseguir unos niveles de oxígeno disuelto mínimos.

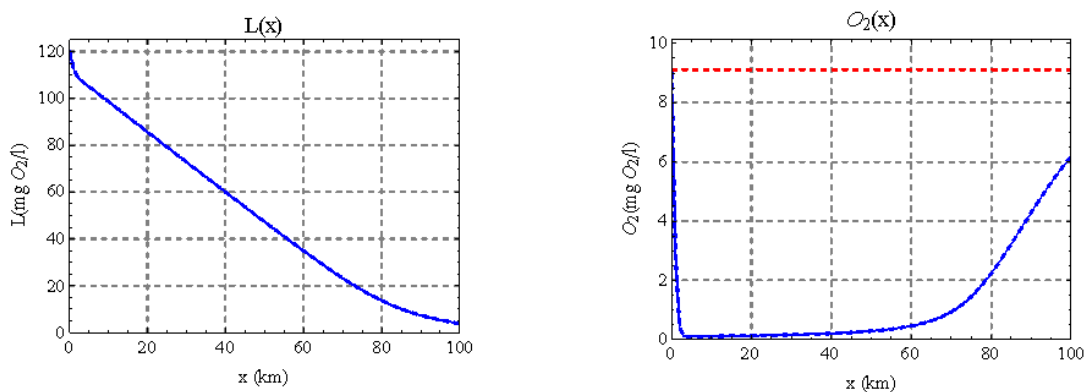


Figura 8: Materia orgánica y oxígeno disuelto en un río. Anoxia.



**Objetos de aprendizaje 3.**

**Estudio de los modelos de calidad de aguas en función de sus parámetros.**

Se han desarrollado varios laboratorios virtuales cuyo principal objetivo es identificar y formular matemáticamente los procesos de transformación (físicos, químicos y biológicos) que actúan como fuente o sumidero y estudiar los procesos de transformación en función de los parámetros que los definen. A continuación se muestran varios ejemplos.

**Ejemplo 1: Cinéticas de orden  $n$  y de Michaelis-Menten**

El objetivo de este laboratorio ([6]) es estudiar y comparar las cinéticas más comunes que se utilizan en la modelización de los términos fuente-sumidero en el ámbito de la calidad de las aguas.

Un contaminante desaparece del agua según una cinética de orden  $n$  si la variación de su concentración respecto del tiempo se puede expresar como:

$$\left. \frac{\partial C}{\partial t} \right|_{degr} = -k C^n$$

La cinética será del tipo de Michaelis-Menten si se cumple:

$$\left. \frac{\partial C}{\partial t} \right|_{degr} = -k \frac{C}{k_S + C}$$

Para entender mejor el significado de estas cinéticas el laboratorio representa gráficamente la velocidad de desaparición del contaminante  $dC/dt$  en función de  $C$  y cómo varía la concentración del contaminante en función del tiempo si este se encuentra en un lago completamente mezclado de dimensión cero (Figura 10). El laboratorio permite comparar entre sí los distintos tipos de cinéticas y estudiarlas en función de sus parámetros.

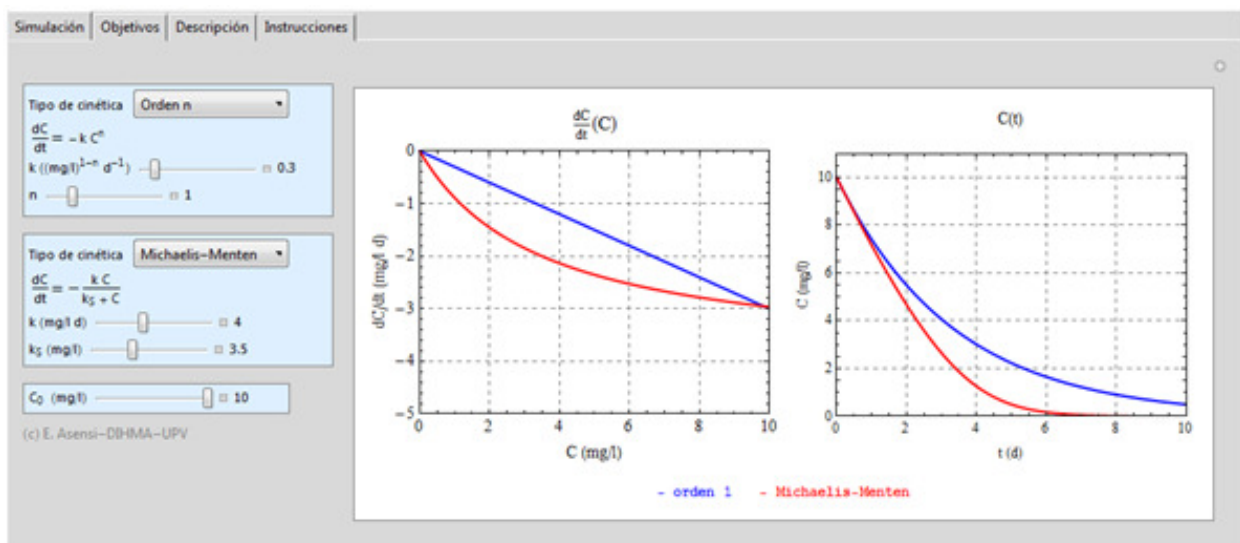


Figura 9: Cinéticas de orden  $n$  y de Michaelis-Menten ([6]).

**Ejemplo 2: Reaireación de  $O_2$  en lagos y ríos**

El objetivo principal de este laboratorio ([7]) es estudiar los procesos de reaireación superficial de oxígeno disuelto en lagos y ríos.

La velocidad con la que se intercambia el oxígeno disuelto entre el agua y la atmósfera por reaireación superficial se calcula como:

$$\left. \frac{\partial O_2}{\partial t} \right|_{reair} = k'_2 (O_{2\text{sat}} - O_2)$$

La concentración de oxígeno disuelto de saturación depende de la temperatura del agua, su salinidad y la altitud donde se encuentra el sistema de aguas naturales estudiado,  $O_{2\text{sat}} = O_{2\text{sat}}(T, S, z)$ . La constante de reaireación  $k'_2$  se calcula mediante fórmulas empíricas y depende de la temperatura del agua. En los ríos el parámetro  $k'_2$  depende del calado y de la velocidad del agua, mientras que en los lagos depende del calado y la velocidad del viento,  $k'_2 = k'_2(T, u, w, H)$ .

El laboratorio virtual permite calcular la velocidad de reaireación superficial en función de la concentración de oxígeno disuelto que existe en el agua en cada momento y calcula la evolución del oxígeno disuelto en ríos y lagos debida al proceso de reaireación superficial (Figura 11).

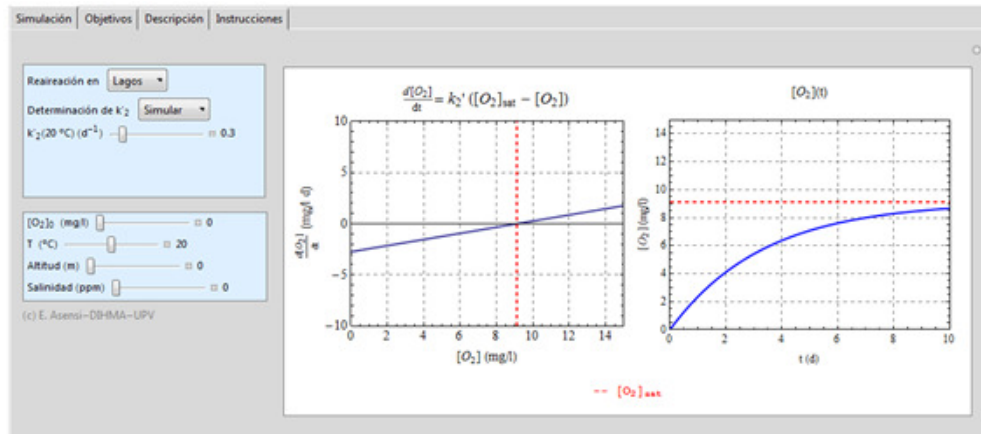


Figura 10: Reaireación de  $O_2$  en lagos y ríos ([7]).

## 4 Conclusiones

Las formas tradicionales de aprendizaje no proporcionan a los egresados la oportunidad y el tiempo suficiente que requiere el uso de la experimentación y la práctica como método para la asimilación de contenidos. Es por ello que nos planteamos el objetivo de incorporar la tecnología al entorno educativo y utilizarla para el desarrollo de herramientas docentes que optimicen las capacidades de aprendizaje por visualización, experimentación, asociación, etc.

Los objetos de aprendizaje han demostrado ser una herramienta eficaz que facilita el aprendizaje en el aula del proceso de modelización matemática en el contexto de la calidad de las aguas superficiales. Estos objetos permiten realizar simulaciones dinámicas, interactuar con los modelos matemáticos simulados y relacionar la formulación matemática con el proceso modelizado. Disponen de una interface gráfica de fácil manejo y uso atractivo para el alumno, que permite representar visualmente el problema estudiado. Su doble característica de interfaz gráfica y simulador dinámico propicia la consecución de objetivos tales como que el alumno adquiera con relativa rapidez conceptos complejos, poco intuitivos, que con métodos tradicionales podría incluso no llegar a asimilar.

Los laboratorios virtuales se han utilizado como herramienta complementaria en las clases de teoría y problemas de las asignaturas de “Calidad de Aguas” (3º de O.O.P.P.), “Transporte de Contaminantes en el Medio Natural” (Máster en Ingeniería Ambiental) y “Calidad y Contaminación de Aguas” (Máster en Ingeniería Hidráulica y Medio Ambiente), para propiciar una mejor comprensión de los modelos matemáticos desarrollados en la lección magistral. Varios indicadores docentes ponen de manifiesto que el uso de estos laboratorios supone una mejora en el aprendizaje de estas asignaturas. Así, por ejemplo, la asistencia y participación de los alumnos en el aula se ha incrementado. Como dato objetivo se observa que la valoración de los alumnos hacia estas metodologías docentes, que se recoge de sus respuestas a las encuestas de docencia, ha sido muy positiva, y también la valoración general de la docencia realizada por el profesor en el aula. Finalmente, La disponibilidad de los laboratorios virtuales a través del repositorio institucional de la UPV permite que éstos sean utilizados por los estudiantes desde su lugar de estudio, fuera del entorno universitario, mediante conexión por internet, convirtiéndolos en una herramienta que además de ser eficaz proporciona autonomía para el aprendizaje.



# Referencias

- [1] E. Alemany, E. Checa. *Un curso práctico de cálculo con Mathematica 8*. Ed. UPV. Valencia (2012).
- [2] E. J. Asensi, M. Martín. *Aplicación docente de una herramienta informática en las prácticas de tratamientos biológicos de aguas residuales*. I Encuentro Internacional de Enseñanza de la Ingeniería Civil. Ciudad Real (2003).
- [3] E. J. Asensi. Modelo de Streeter-Phelps para un estuario. Objeto de aprendizaje. Riunet. UPV (2012). Disponible en:  
<http://mathematica.upvnet.upv.es/eslabon/Ejercicio.asp?do=LO2Estuari>
- [4] E. J. Asensi. Transporte convectivo y dispersivo de un contaminante en un río. Objeto de aprendizaje. Riunet. UPV (2012). Disponible en:  
<http://labmathematica.upvnet.upv.es/eslabon/Ejercicio.asp?do=TransportRiu>
- [5] E. J. Asensi. Materia orgánica y oxígeno disuelto en un río. Estudio del estado transitorio y del estado estacionario. Objeto de aprendizaje. Riunet. UPV (2012). Disponible en:  
<http://labmathematica.upvnet.upv.es/eslabon/Ejercicio.asp?do=LO2Riu>
- [6] E. J. Asensi. Cinéticas de orden  $n$  y de Michaelis-Menten. Objeto de aprendizaje. Riunet. UPV (2012). Disponible en:  
<http://labmathematica.upvnet.upv.es/eslabon/Ejercicio.asp?do=Cinetiques>
- [7] E. J. Asensi. Estudio de la reaireación de oxígeno disuelto en ríos y lagos. Objeto de aprendizaje. Riunet. UPV (2012). Disponible en:  
<http://labmathematica.upvnet.upv.es/eslabon/Ejercicio.asp?do=Reaireacio>
- [8] R. Barat, M. Martín, E. J. Asensi. *La docencia de la asignatura de calidad de aguas / Teaching in water quality course*. I Encuentro Internacional de Enseñanza de la Ingeniería Civil. Ciudad Real (2003).
- [9] S. C. Chapra. *Surface Water Quality Modelling*. Ed. Mc-Graw Hill. New York (1997).
- [10] M. Martín, P. Marzal. *Modelación de la Calidad del Agua*. Ed. UPV. Valencia (1999).
- [11] Riunet. *Repositorio Institucional de la Universidad Politécnica de Valencia*. Disponible en  
<http://ruinet.upv.es>
- [12] Wolfram MathWorld. Disponible en: <http://mathworld.wolfram.com>

