MSEL

Modelling in Science Education and Learning

Modelling in Science Education and Learning
Volumen 6(2), No. 13, 2013.
Instituto Universitario de Matemática Pura y Aplicada

Modelo matemático del llenado de recipientes.

Eugenia Marmolejo, Jesús A. Riestra
Cinvestav del Instituto Politécnico Nacional. México.
ginauco@gmail.com, riestra@cinvestav.mx

Abstract

Nuestro interés en los parámetros matemáticos surge de la gran utilidad que tienen en problemas prácticos que se pueden describir con modelos matemáticos. Los parámetros permiten modificar las propiedades de las funciones y, por lo tanto, de los modelos. La identificación de los parámetros clave en un contexto dado, posibilita que los estudiantes comprendan el fenómeno que se está estudiando. En esta investigación nos centramos en el contexto del llenado de recipientes, mismo que resulta muy intuitivo para los alumnos; desarrollamos el modelo matemático del llenado y lo aplicamos a los casos particulares de los recipientes cilíndricos y cónicos.

Our interest in mathematical parameters arises from the great use they have in practical problems that can be described by mathematical models. Parameters allows to modify properties of functions and therefore of models. The identification of key parameters in a given context enables students to understand the phenomenon being studied. In this research we will focus on the context of filling containers, which is very intuitive for the students; we developed the mathematical model and apply it to the particular cases of cylindrical and conical containers.

Keywords: Modelo, parámetro, ecuaciones diferenciales, coeficiente director, Principio de Cavalieri.
Modelling, parameters, differential equations, gradient, slope, Cavalieri's theorem

1 Marco Teórico

Nuestro interés en los parámetros surge de la gran utilidad que tienen en problemas prácticos que se pueden resolver con modelos matemáticos. Los parámetros pueden asumir diferentes papeles dentro de los contextos en que son utilizados. Una situación muy común es la de encontrarlos como *generalizadores* que nos ayudan a representar a toda una familia de funciones. Por ejemplo, $y = \operatorname{sen}(ax)$ con $a \in \mathbb{R}$, es una familia cuyos miembros particulares están determinados por los valores que en cada caso asuma el parámetro a. En la Figura 1 mostramos las gráficas de algunos de sus elementos.

Siguiendo con este mismo ejemplo, en cuanto a las representaciones gráficas, el parámetro a puede verse como un *fijador* de posición. Así, siendo $a = 2$ tenemos la función $y = \operatorname{sen}(2x)$ a la cual corresponde una gráfica específica (ver Figura 1).

Por último, pero no menos importante, otro papel que comúnmente asumen los parámetros es el de la *cantidad indeterminada*, la cantidad que al asumir un valor u otro puede provocar diferentes efectos. De nuevo con el mismo ejemplo, en un *software* dinámico, como Geogebra, se pueden observar las variaciones gráficas de la función como respuesta a los diferentes valores del parámetro a.

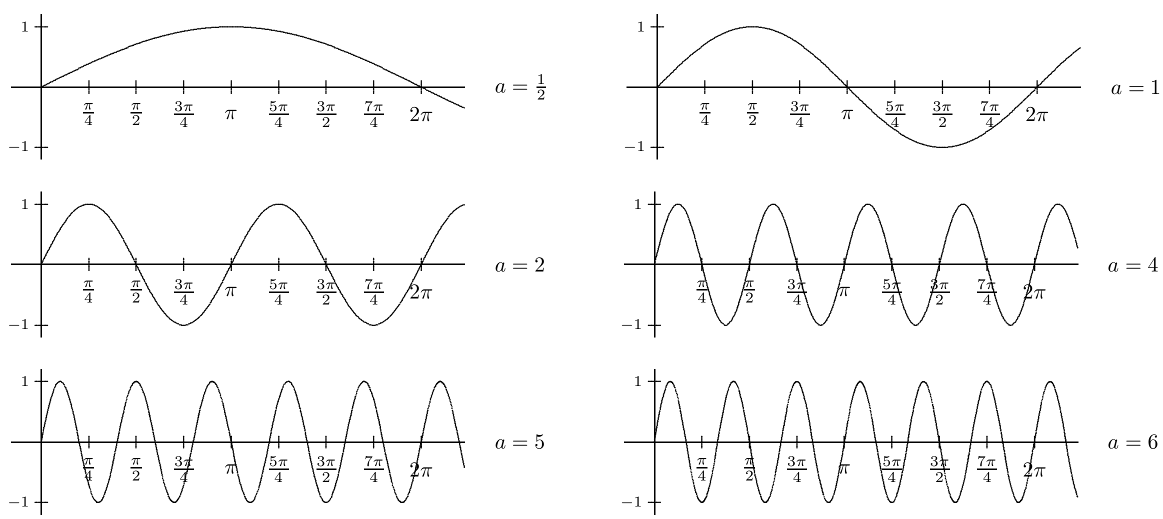


Figura 1: Elementos de la familia: $y = \operatorname{sen}(ax)$

Maschietto (2008) ([2]) comenta que a los alumnos de secundaria se les enseñan funciones como objetos algebraicos o geométricos antes de que las vean en cursos de Cálculo (ver Puig & Monzó, 2008 [3]). En este nivel el estudio se hace desde las perspectivas global y puntual. Global involucra dos aspectos: la consideración de funciones definidas mediante una fórmula (i.e., analíticamente) o mediante su representación gráfica, y las propiedades de la función.

Una propiedad de una función es global si es válida en un intervalo del domino de la función. En el caso analítico es necesario comparar los valores de la función en cierto intervalo. Por ejemplo, la propiedad de simetría vertical con respecto al eje Y se cumple si $f(x) = f(-x)$ para cualquier real x; otro ejemplo es la propiedad de monotonía (creciente), que se verifica si cada vez que $x_1 < x_2$ (siendo ambos puntos del intervalo en cuestión) se tiene necesariamente $h(x_1) < h(x_2)$.

Desde el punto de vista puntual, se considera a las funciones por los valores que toma en ciertos puntos del dominio (por ejemplo cuando se les pide a los alumnos tabular). El hecho de que $f(1) = 3$ no nos da ninguna información sobre el valor de $f(4)$.

Consideremos el siguiente ejemplo: Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1-x^2$. Desde el punto de vista global, f es un polinomio de segundo grado cuya gráfica es una parábola. El hecho $f(3) = -8 < 0$, es decir, "*la función es negativa en* $x = 3$", es una propiedad puntual, mientras que la propiedad "$f(x)$ *es negativa para toda* $x \in (1, \infty)$" es una propiedad global.

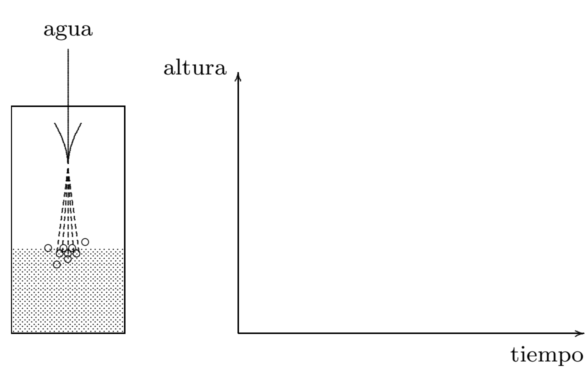
Desde su inicio, el estudio del Cálculo se ha caracterizado por un punto de vista adicional: el local. La continuidad, diferenciabilidad o la existencia del límite en un punto son propiedades locales, dependen de los valores $f(x)$ en una vecindad del punto en cuestión (Maschietto, 2008 [2]).

Los tratamientos del Cálculo dependen del estudio de las funciones, mismo que puede hacerse desde las tres perspectivas anteriores: Global, puntual y local. El papel de los parámetros en la modelización matemática es clave, ya que pueden modificar sustancialmente las propiedades de las funciones, y por ende, de los modelos.

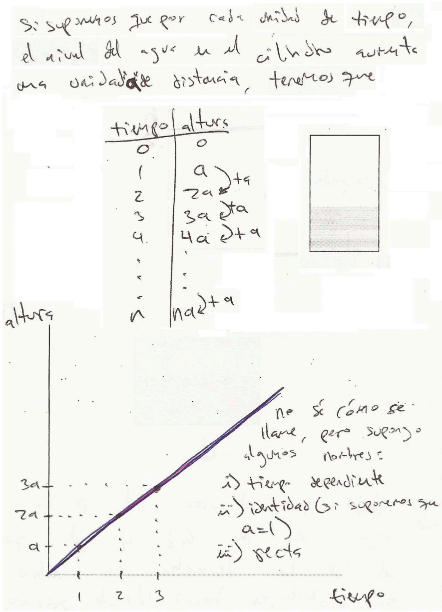
Un nexo entre el aspecto cognitivo y el aspecto matemático podría encontrarse en el saber identificar los parámetros en un contexto dado (modelo), siendo así posible profundizar en las singularidades y en las restricciones o limitaciones de los valores que puedan tomar los parámetros buscando alguna mejora en la modelización o en la precisión del modelo. Desde el punto de vista matemático, los parámetros pueden asumir el papel de variables o de indeterminadas.

2 Resultados

En el contexto del llenado de recipientes (ver Stölting, 2008 [4] o Swan, 1985 [5]) hicimos un estudio exploratorio con estudiantes del primer semestre de una Universidad de la Ciudad de México. Una de las preguntas fue la siguiente: *Cuando viertes agua de un grifo en un recipiente cilíndrico, que no tiene fugas, a velocidad constante, la altura del agua es una función del tiempo. Dibuja la gráfica de la función tiempo-altura del recipiente cilíndrico. ¿Cómo se llama la gráfica que dibujaste?*



El alumno hizo un análisis discreto de la situación, como podemos ver en la Figura 2. Propuso tres nombres para la gráfica, entre los cuales no incluye "función lineal" o "segmento de recta".



Transcripción:

"Si suponemos que por cada unidad de tiempo, el nivel del agua en el cilindro aumenta una unidad "a" de distancia, tenemos que

tiempo	altura	
0	0	
1	a	
		$+a$
2	$2a$	
		$+a$
3	$3a$	
		$+a$
4	$4a$	
$\vdots$	$\vdots$	
		$+a$
n	$n\,a$	

no sé cómo se llame, pero supongo algunos nombres:

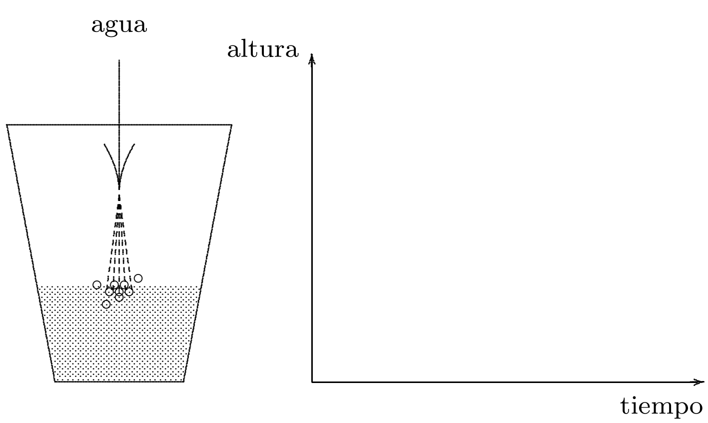
i) *tiempo dependiente*

ii) *identidad (si suponemos que a=1)*

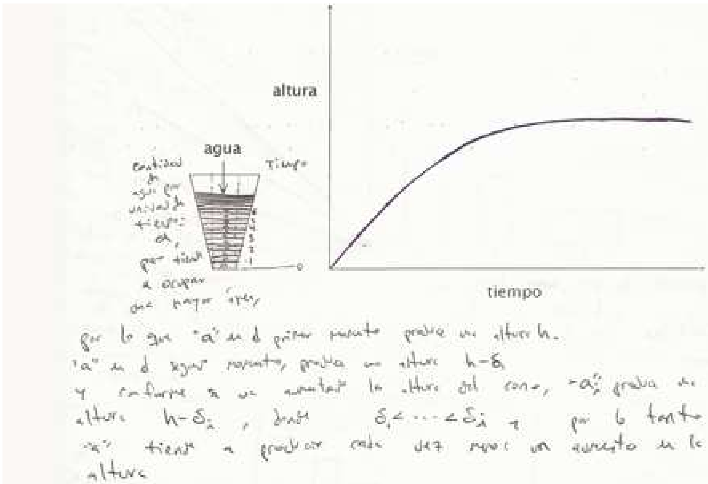
iii) *recta"*

Figura 2: Respuesta de Hugo (pregunta 1)

En la siguiente pregunta del estudio, se plantean las mismas cuestiones de la pregunta anterior pero en referencia a un recipiente cónico:



Para el recipiente cónico, el alumno propuso una representación gráfica aceptable de su llenado. Puede apreciarse (Figura 3) que nuevamente hace un análisis discretizando, esta vez, el recipiente.



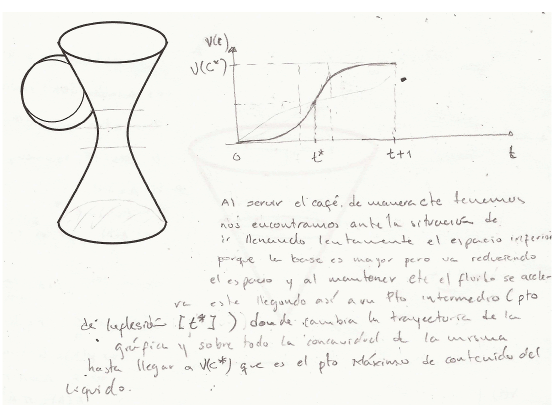
Transcripción:

“Cantidad de agua por unidad de tiempo a, pero tiende a ocupar una mayor área, por lo que “a” en el primer momento produce una altura h. “a” en el segundo momento produce una altura $h - \delta_1$ y conforme se va aumentando la altura del cono, “a” produce una altura $h - \delta_i$, donde $\delta_1 < \cdots < \delta_i$ y por lo tanto “a” tiende a producir cada vez menos un aumento en la altura.”

Figura 3: Respuesta de Hugo (pregunta 2)

Lo que está diciendo el alumno es que cuanto más grande sea el área A de la sección transversal del cilindro, más lentamente aumentará la altura. El lenguaje matemático para expresar lo que está sucediendo es el de las ecuaciones diferenciales. Como veremos en la sección 3, la tasa del crecimiento de la altura con respecto al tiempo, h', está dada por: $h' = \frac{G}{A(h)}$, donde el área A de la sección transversal depende de la altura h del nivel del agua y donde G es el gasto constante. El alumno dibujó, de manera intuitiva, la solución con la condición inicial $altura = 0$ para $t = 0$.

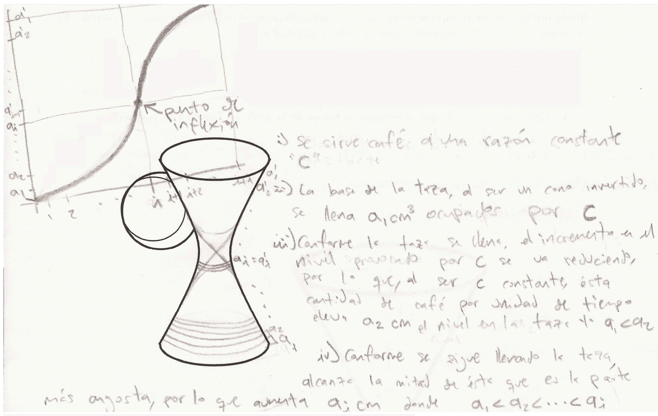
Otra de las preguntas que se les hizo a los alumnos fue la siguiente: *Supongamos que se sirve café a una razón constante en la taza que se muestra en la Figura. Haz un boceto de la gráfica del llenado de la taza con respecto al tiempo. ¿Cómo es la gráfica en términos de concavidad y por qué?* En las Figuras 4 y 5 mostramos las respuestas de dos estudiantes.

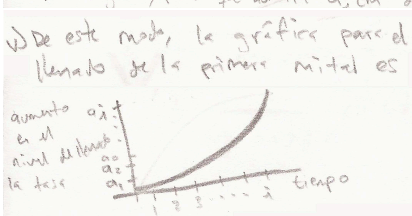


Transcripción:

“Al servir el café de manera cte tenemos nos encontramos ante la situación de ir llenando lentamente el espacio inferior porque la base es mayor pero va reduciendo el espacio y al mantener cte el fluido se acelera está llegando así a un Pto intermedio (pto de inflesión[sic] *$[t^\star]$) donde cambia la trayectoria de la gráfica y sobre todo la concavidad de la misma hasta llegar a $V(c^\star)$ que es el pto máximo de contenido del líquido.”*

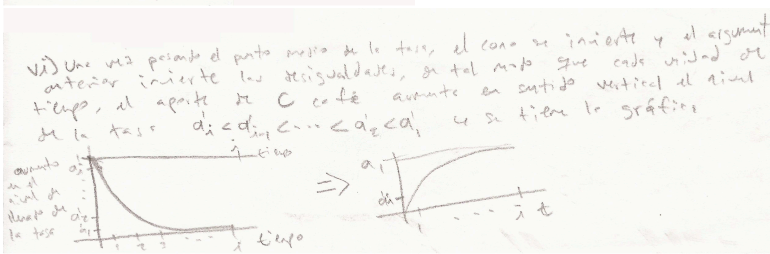
Figura 4: Respuesta de Erick (pregunta 3)





Transcripción:

“i) *Se sirve café a una razón constante “C”*
ii) *La base de la taza, al ser un cono invertido, se llena a_1 cm^3 ocupados por C*
iii) *Conforme la taza se llena, el incremento en el nivel provocado por C se va reduciendo, por lo que, al ser C constante, esta cantidad de café por unidad de tiempo eleva a_2 cm el nivel en la taza, por lo tanto $a_1 < a_2$.*
iv) *Conforme se sigue llenando la taza, alcanza la mitad de ésta que es la parte más angosta, por lo que aumenta a_i cm donde $a_1 < a_2 \ldots < a_i$*
v) *De este modo, la gráfica para el llenado de la primera mitad es*
vi) *Una vez pasando el medio de la taza, el cono se invierte y el argumento anterior invierte las desigualdades, de tal modo que cada unidad de tiempo, el aporte de C café aumenta en sentido vertical el nivel de la taza $a_i < a_{i-1} < \ldots < a_2 < a_1$ se tiene la gráfica*
vii) *uniendo ambas gráficas del llenado de la taza:”*



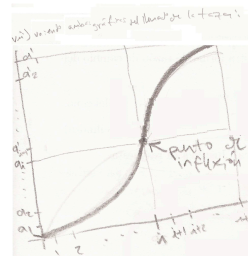


Figura 5: Respuesta de Hugo (pregunta 3)

3 Modelo matemático del llenado de recipientes

Supongamos que vamos a llenar un recipiente con agua, la cual es suministrada por un grifo con un flujo G constante, es decir, la razón del cambio del volumen con respecto al tiempo transcurrido es constante.

Primer Caso. Recipientes con sección transversal constante. Pensemos en un recipiente cuya sección transversal tiene un área A constante. A partir de cualquier instante t, donde la altura es h, si después de transcurrido un tiempo Δt la altura del líquido ha subido una altura Δh, entonces el incremento de volumen ΔV está dado por:

$$\Delta V = A\Delta h \tag{1}$$

Esto es, el volumen de un cilindro está dado por el producto del área de la base por la altura.

En ese mismo lapso de tiempo Δt, la llave ha suministrado un volumen de agua igual a $G\Delta t$. Ambos volúmenes son iguales, por lo tanto: $\Delta V = G\Delta t$, es decir, $A\Delta h = G\Delta t$. De donde obtenemos que:

$$\frac{\Delta h}{\Delta t} = \frac{G}{A} \tag{2}$$

Esto es, la razón a la que crece la altura es inversamente proporcional al área A y directamente proporcional al flujo. Esto quiere decir que cuanto más grande sea el área A de la sección transversal del cilindro, más lentamente aumentará la altura. Al inicio del llenado tenemos en el instante $t = 0$, que la altura es $h = 0$. De donde se sigue que:

$$\frac{h-0}{t-0} = \frac{G}{A}$$

es decir,

$$h = \frac{G}{A}t \tag{3}$$

Así que la altura es una función lineal del tiempo: la altura es directamente proporcional al tiempo con constante de proporcionalidad $\frac{G}{A}$.

Si suponemos que H es la altura del recipiente, entonces lo que hemos obtenido es que, para el caso de un recipiente de altura H con sección transversal constante, la gráfica de la altura del agua con respecto al tiempo transcurrido es un segmento de recta por el origen, cuyo coeficiente director es $\frac{G}{A}$, donde $0 \leqslant h \leqslant H$ y, por lo tanto, $0 \leqslant t \leqslant \frac{A}{G}H$ para que el tiempo final corresponda a $h = H$.

Para dos recipientes con la misma altura H y con sección transversal constante, si para cada altura h, con $0 \leqslant h \leqslant H$, las secciones transversales tienen la misma área, entonces, independientemente de la forma, su llenado en función del tiempo está representado por el mismo segmento de recta, puesto que, los volúmenes de ambos recipientes son iguales, como establece la fórmula del volumen de un cilindro: área de la base por la altura.

Ahora bien, dado que G es constante, A es el parámetro que determina el coeficiente director del segmento de recta. Así, si se tienen dos cilindros (cuyas secciones transversales son constantes), tales que la sección transversal de uno de ellos triplica en área a la del otro, entonces el volumen total del primero también triplica al del segundo, por lo que los tiempos de llenado estarán en la misma relación independientemente de la forma (ver Figura 6).

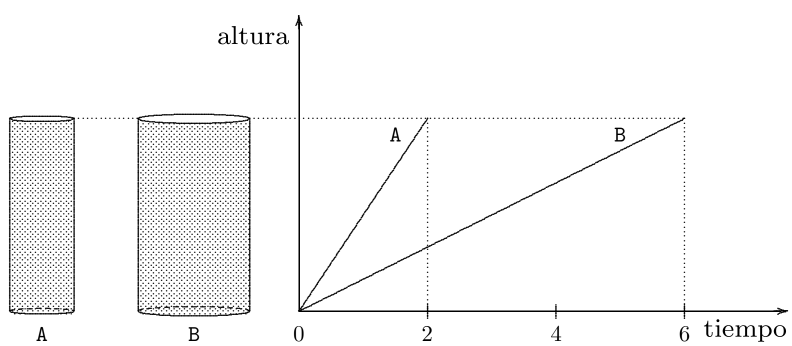


Figura 6: La sección transversal de `B` triplica en área a la de `A`.

Segundo Caso. Recipientes cuya área de la sección transversal no es constante sino que varía discretamente.

Si el área de la sección transversal varía en forma discreta, trabajamos por partes como se intenta ilustrar en la Figura 7.

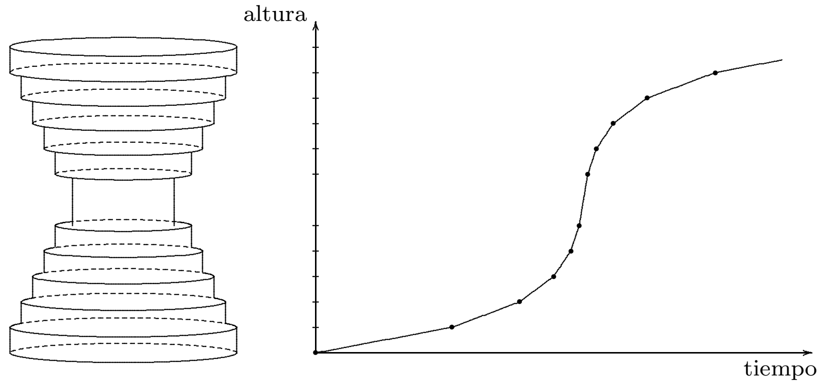


Figura 7: Recipientes cuya sección transversal varía en forma discreta

Tercer caso. Generalizando, consideremos recipientes en los que el área de la sección transversal no es constante sino que varía continuamente con la altura h, i.e., el área A de la sección tranversal es una función continua (de h).

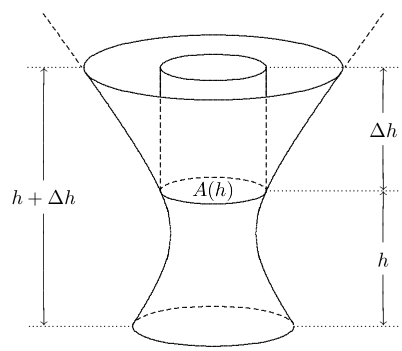


Figura 8: El área de la sección transversal varía continuamente

El gasto G es constante como antes. Si suponemos una altura h inicial, para incrementos "pequeños" del tiempo, digamos Δt, la altura sufrirá un aumento ("pequeño") Δh, por lo que el volumen sufrirá un incremento ΔV (igual a $G\Delta t$). Dicho incremento ΔV corresponde al volumen del sólido comprendido entre las secciones transversales cuyas áreas son $A(h)$ y $A(h+\Delta h)$, respectivamente. La Figura 8 ilustra dicho sólido (de volumen ΔV) cuya base, a la altura h (que se mantendrá fija), tiene área $A(h)$ y cuya tapa está a la altura $h+\Delta h$ con área $A(h+\Delta h)$. En esta figura también se ilustra un cilindro cuya base y cuya altura coinciden con la del sólido, luego el área de su base es $A(h)$ y su altura Δh.

La idea es que el volumen del cilindro, dado por el producto del área de su base por la altura, a saber $A(h)\cdot\Delta h$, aproxima cada vez "mejor" al volumen del sólido en la medida que la altura se aproxima a cero, i.e. $\Delta h\to 0$, queriendo con ello decir que el error E en dicha aproximación, a saber: $E=A(h)\cdot\Delta h-\Delta V$ con $E=E(\Delta h)$ para h fija, no sólo tiende a cero cuando Δh hace lo propio, sino que dicho error se vuelve despreciable en relación al valor exacto ΔV, esto es:

$$\lim_{\Delta h\to 0}\frac{A(h)\cdot\Delta h-\Delta V}{\Delta V}=0,\quad \text{o equivalentemente,}\quad \lim_{\Delta h\to 0}\frac{A(h)\Delta h}{\Delta V}=1 \tag{4}$$

Ahora bien, ΔV, el volumen del sólido, crece con Δh. Dicho volumen sólo se puede anular cuando Δh se anula. Por otra parte $\Delta V = G\Delta t$, así que ΔV crece con Δt y sólo se anula cuando Δt se anula, lo que garantiza que

$$\lim_{\Delta t \to 0} \Delta h = 0$$

Sustituyendo $G\Delta t$ en lugar de ΔV en la relación (4) y tomando el límite cuando $\Delta t \to 0$ (lo que implica $\Delta h \to 0$) tendremos que

$$\frac{A(h)}{G} \cdot \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta h}{\Delta t} = 1.$$

Luego entonces

$$h' = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta h}{\Delta t} = \frac{G}{A(h)} \tag{5}$$

La relación (5) presupone que el área de la sección transversal satisface $A(\xi) > 0$ con ξ variando desde 0 hasta la altura total, lo cual necesariamente se satisface para $\xi > 0$ (esto es, el recipiente no puede "estrangularse", lo que implicaría que $A(\xi) = 0$). La única excepción es la posibilidad de que $A(0) = 0$, lo cual ocurre en el caso de un cono cuyo vértice es la "base" del recipiente.

Este desarrollo correcto pero intuitivo, que corresponde al tipo de argumentación utilizado en Física y en Ingeniería, seguramente resulta muy adecuado didácticamente hablando.

Observación. Recuérdese que el *error absoluto* con el que un valor x estima a un valor exacto X se define por $x - X$ (un valor positivo representa una aproximación por exceso y uno negativo una aproximación por defecto). Para el mismo caso, el *error relativo* de tal estimación se define por $\frac{x-X}{X}$. Vale la pena resaltar la importancia de que al estimar a la "rebanada" ΔV con el volumen del cilindro $A(h) \cdot \Delta h$, no solamente el error absoluto se vuelve despreciable cuando $\Delta h \to 0$, sino que más aun el error relativo también. Como ambos volúmenes tienden a cero cuando $\Delta h \to 0$, por ese sólo hecho, el error absoluto, o sea la diferencia, tenderá *trivialmente* a cero, aunque ambos volúmenes no estén relacionados (en la noche todos los gatos son pardos). El por qué el error relativo sí funciona bien se explica por la propiedad de que los errores relativos no se acumulan. Cuando se aproxima el volumen del sólido con los volúmenes de los cilindros apilados, un error (relativo) del orden del 1% en cada rebanada asegura un error del 1% en el volumen total, independientemente del *número* de rebanadas.

Ahora justificaremos la relación (5) con rigor matemático. Para evitar argumentos intuitivos, supondremos, además de que la función área A es continua con $A(\xi) > 0$ para $\xi > 0$, el hecho de que el volumen ΔV, encerrado por el recipiente entre dos alturas cualesquiera h_1 y h_2, está dado por

$$\Delta V = \int_{h_1}^{h_2} A(\xi) d\xi \qquad \text{donde} \quad 0 \leq h_1 \leq h_2 \leq H \tag{6}$$

donde H es la altura total del recipiente. Como consecuencia del teorema del valor medio para integrales, en el caso $h_1 < h_2$ tenemos:

$$\Delta V = A(h_3)(h_2 - h_1), \qquad \text{donde} \quad h_1 < h_3 < h_2 \tag{7}$$

Note que como $A(h_3) > 0$, $\Delta V > 0$ siempre que $h_2 - h_1 > 0$. En particular para $0 \leq h < h + \Delta h$, donde $\Delta h > 0$ es el incremento en la altura después de transcurrido un tiempo $\Delta t > 0$, tenemos

$$\Delta V = A(h + \theta\Delta h) \cdot \Delta h, \qquad \text{donde} \quad 0 < \theta < 1. \tag{8}$$

Y, puesto que por otra parte $\Delta V = G\Delta t$, tenemos

$$G\Delta t = A(h+\theta\Delta h)\Delta h \qquad \text{o} \qquad \frac{\Delta h}{\Delta t} = \frac{G}{A(h+\theta\Delta h)} \qquad \text{con} \quad 0<\theta<1 \tag{9}$$

Claramente $A(h+\theta\Delta h) > 0$ pues $h \geq 0$ y $\theta\Delta h > 0$ (i.e. $h+\theta\Delta h > 0$). Se observa de (7) que cuando $\Delta t \to 0$, necesariamente $\Delta h \to 0$, por lo que tomando el límite cuando $\Delta t \to 0$, de la relación (9), usando la continuidad de la función área, obtenemos la relación (5):

$$h' = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{G}{A(h+\theta\Delta h)} = \frac{G}{A(h)}$$

De nuevo, una posible excepción sería que para $t=0$ correspondiera $A(0)=0$, en cuyo caso h' no estaría definida para $t=0$.

Note que de la relación (8) se deduce la relación (4). En efecto,

$$\lim_{\Delta h\to 0} \frac{A(h)\Delta h}{\Delta V} = \lim_{\Delta h\to 0} \frac{A(h)\Delta h}{A(h+\theta\Delta h)\Delta h} = \lim_{\Delta h\to 0} \frac{A(h)}{A(h+\theta\Delta h)} = 1$$

La fórmula (5) nos dice que la tasa instantánea de llenado es inversamente proporcional al área en dicho instante. En el caso del cono (Figura 9), tenemos lo siguiente:

$$\tan(\alpha) = \frac{r}{h}$$

de donde se sigue que

$$h\tan(\alpha) = r$$

Como $\tan(\alpha)$ es constante, y r depende de la altura h, entonces si $c := \tan(\alpha)$, tenemos que $r(h) = c\cdot h$, es decir, el radio varía linealmente con respecto a la altura y el área de la sección transversal está dada por $A(h) = \pi c^2 h^2$.

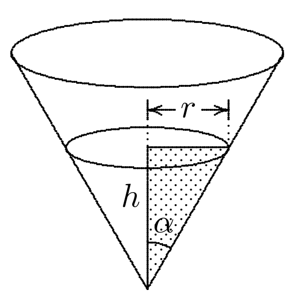


Figura 9: Cono

La ecuación diferencial que tenemos, a saber,

$$\frac{dh}{dt} = \frac{G}{A(h)},$$

es una ecuación diferencial de variables separables que podemos expresar de la siguiente forma:

$$A(h)dh = Gdt$$

$$\pi c^2 h^2 dh = Gdt$$

Integrando,

$$\pi c^2 \int h^2 dh = G \int dt$$

En el instante $t = 0$, la altura es cero, es decir $h = 0$; por lo tanto, la constante de integración es también cero, luego

$$\frac{\pi c^2}{3} h^3 = Gt\,.$$

Despejamos h y obtenemos la altura en función del tiempo:

$$h(t) = \left(\frac{3G}{\pi c^2}\right)^{\frac{1}{3}} t^{\frac{1}{3}}$$

donde $(\frac{3G}{\pi c^2})^{\frac{1}{3}}$ es constante, $0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi c^2}{3G} H^3$ y $0 \leqslant h \leqslant H$.

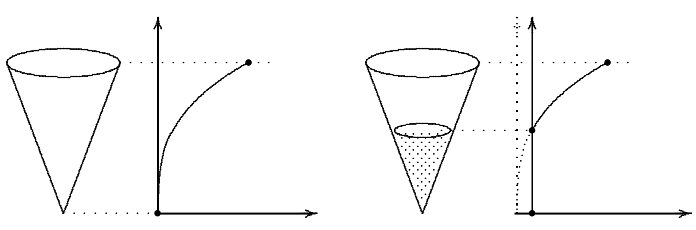


Figura 10: Condición inicial

La solución que nos interesa depende de la cantidad de agua que tenga el recipiente como condición inicial. Al comenzar el llenado, en la Figura (a), el cono está completamente vacío; y en (b), el recipiente ya tiene cierta cantidad de agua. Pero, claro está, la solución en el último caso está "contenida" en la solución del primero.

Lo interesante es que también en este caso general, de sección transversal variable, se sigue cumpliendo que si tenemos dos recipientes cuyas secciones transversales tienen la misma área (para cada altura dada) independientemente de su forma, su llenado en función del tiempo es el mismo. En particular, entonces, tienen el mismo volumen y se tiene implícitamente el Principio de Cavalieri: Si dos sólidos tienen, para la misma altura, secciones transversales con la misma área, entonces sus volúmenes son iguales. Este principio gozó de mucha aceptación en la enseñanza de la Geometría hace varias décadas (Evans, 1917 [1]). Al comparar el llenado de dos recipientes, con sección transversal constante o con sección transversal no constante, pero que varía continuamente, cuyas áreas están en una misma razón, es decir $\frac{A_1}{A_2} = k$, los tiempos de llenado estarán en esa razón también, al igual que las funciones que describen el llenado. Más precisamente, si $h_1(t)$ y $h_2(t)$ son dos funciones que describen el llenado de dos recipientes de áreas A_1 y A_2, entonces, $h_2(t) = h_1(kt)$. Si $k < 1$, la gráfica se alarga horizontalmente, si $k > 1$ se encoge horizontalmente, en ambos casos, por el factor $\frac{1}{k}$.

El parámetro que determina la forma de la gráfica del llenado es ahora *la función área* de la sección transversal.

Resumiendo, en los tres casos el parámetro que determina la forma de la gráfica del llenado es el área de la sección transversal.

Simulaciones de llenado de recipientes. La sección de un cilindro es un círculo, si el corte se hace perpendicular al eje de rotación. Los cilindros son un ejemplo de recipientes con sección transversal constante. Como mencionamos antes, dos recipientes con sección transversal constante y con la misma área, tendrán la misma función de llenado en función del tiempo. Es decir, la función de llenado de un cilindro y de un prisma (con igual altura H) es la misma, siempre que las secciones de ambos tengan la misma área. Usando GeoGebra, se puede simular el llenado de estos recipientes para visualizar la sección transversal conforme se va llenando el recipiente (ver Figura 11).

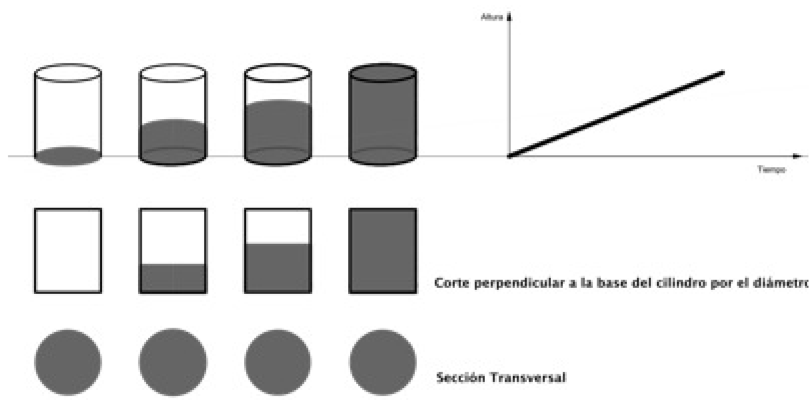


Figura 11: Llenado de un recipiente cilíndrico.

Cuando el área de la sección transversal no es constante, pero varía continuamente, como es el caso del cono, también podemos simular la situación y ver cómo va cambiando la sección transversal (ver Figura 12). Dos recipientes cuyas secciones transversales tengan la misma área, tendrán la misma función de llenado en función del tiempo.

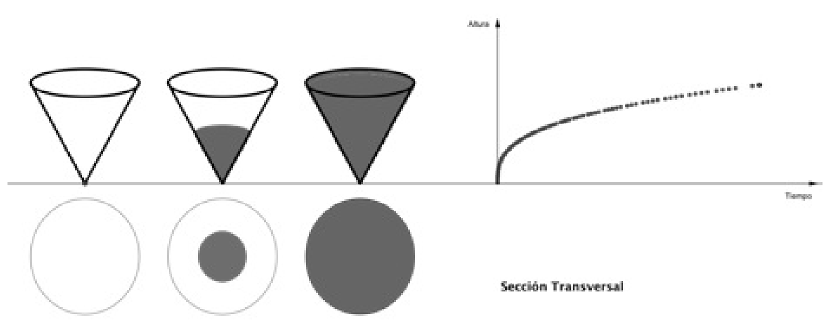


Figura 12: Llenado de un recipiente cónico.

Cabe hacerse la siguiente pregunta: Dada la gráfica de la altura con respecto al tiempo del llenado de un recipiente ¿se puede saber de qué recipiente se trata?

4 Conclusiones

Los tratamientos del Cálculo dependen del estudio de las funciones, y los parámetros aquí juegan un papel muy importante. En la modelización matemática son clave, ya que permiten modificar las propiedades de las funciones y, por lo tanto, de los modelos. Su flexibilidad les permite tomar valores fijos, lo que puede ayudar a que el modelo dependa de un número menor de parámetros. O se pueden introducir parámetros para generalizar los modelos. La identificación de los parámetros clave en un contexto dado (modelo), posibilita que los alumnos comprendan el fenómeno que se está estudiando y entiendan sus singularidades y limitaciones.

Agradecimientos

La autora agradece el apoyo brindado por CONACYT, así como el apoyo de su asesor, el doctor Gonzalo Zubieta Badillo.

Agradece asímismo a sus alumnos, sin cuya participación no hubiese sido posible este escrito.

Ambos autores agradecen a la M. en C. Susana Cristina Martínez Sánchez por el profesionalismo con el que fueron elaboradas las figuras, así como la revisión técnica y corrección de estilo del documento.

Finalmente, los autores agradecen al Profesor Richard Cabassut (Université de Strasbourg) quien durante la exposición oral de una versión preliminar de este trabajo, preguntó cómo se argumentaría en Física la deducción de la ecuación diferencial que modela el llenado de recipientes. La versión de entonces dejaba que desear física y matemáticamente hablando. Se ha hecho un gran esfuerzo para mejorar la argumentación y poder ofrecer (ahora sí) ambas visiones.

Referencias

[1] G. W. Evans. Cavalieri's theorem in his own words. *Amer. Math. Monthly* **24**, 447–451 (1917).

[2] M. Maschietto. Graphic Calculators and Micro-Straightness: Analysis of a Didactic Engineering. *International Journal of Computer for Mathematics Learning*, **13**, 207–230 (2008).

[3] L. Puig, O. Monzó. Competencias algebraicas en el proceso de modelización. *Actas de las VIII Jornadas d'Educació Matemática de la Comunitat Valenciana* (2008).

[4] P. Stölting. *Die Entwicklung funktionalen Denkens in der Sekundarstufe I vergleichende-Analysen und empirische Studien zum Mathematikunterricht in Deutschland und Frankreich (La pensée fonctionnelle des élèves de 10 à 16 àns — analyses comparatives et études empiriques de son enseignement en France et en Allemagne)*. Tesis de doctorado. Universität Regensburg / Université París. Diderot. (2008).

[5] M. Swan. *The language of functions and graphs*. Shell Centre for Mathematical Education, University of Nottingham (1985).

[6] Software libre GeoGebra, utilizado para las simulaciones. Disponible en: http://www.geogebra.org