MSEL
MODELLING IN SCIENCE EDUCATION AND LEARNING

MODELLING IN SCIENCE EDUCATION AND LEARNING
Volumen 6(2), No. 15, 2013.
Instituto Universitario de Matemática Pura y Aplicada

Álgebra lineal y juegos de mesa

Jose M. Calabuig, Lluís M. García Raffi, Enrique A. Sánchez-Pérez
UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA
jmcalabu@mat.upv.es, lmgarcia@mat.upv.es, easancpe@mat.upv.es

Abstract

En este trabajo se presentan tres ejemplos que pueden servir para motivar e introducir algunas nociones clásicas de un temario de una asignatura de Álgebra Lineal (y su conexión con otras asignaturas como Probabilidad e Informática) de un grado en Ingeniería. Más concretamente en este artículo se muestra como el uso del Álgebra lineal *nos permite estudiar probabilidades y estrategias ganadoras de tres juegos de mesa: uno de monedas, el juego de las* Escaleras y los Toboganes© *y el conocido* Monopoly©.

In this paper we present three examples that can be used to motivate and introduce classical notions of a course of Linear Algebra (and its connection with other subjects such as Probability and Computing) in an Engineering degree. More specifically in this article we shown how the use of Linear algebra *allows us to study odds and winning strategies by means of three board games: one of Coins, the game called* Snakes and Ladders © *and finally the well-known* Monopoly ©.

Keywords: Álgebra lineal, modelización matemática, cadenas de Markov, probabilidad.
Lineal Algebra, mathematical modelling, Markov chains, probability

1 Introducción

Las asignaturas de Cálculo y Álgebra Lineal son asignaturas básicas en la formación del ingeniero. Sin embargo, y en contraposición, son percibidas por el alumno como simples escollos de carácter teórico, que se han de superar, de dudosa utilidad y aplicabilidad cuando se incorporen al mercado laboral. Por otra parte, con la entrada en vigor del Espacio Europeo de la Educación Superior (EEES) las asignaturas de Matemáticas han sufrido una drástica reducción en número de créditos. Si bien antes de la implantación del EEES además de las asignaturas de Cálculo y Álgebra Lineal aparecían algunas asignaturas de Modelización Matemática, con los nuevos grados estas asignaturas que conectan el "mundo real" con el "mundo matemático" han desaparecido y, en consecuencia, sería deseable que su planteamiento e incluso alguno de sus contenidos pasaran a formar parte de las asignaturas de carácter básico que aparecen en el primer curso de los grados.

Por todo ello, es necesario que dentro de las asignaturas se introduzca la resolución de problemas de la "vida real" que pongan de manifiesto la utilidad de las Matemáticas en la formación de un ingeniero. Creemos que aprender no se reduce a una simple capacidad mental de memorizar y reproducir. Si algo se ha aprendido se ha de ser capaz de aplicarlo de una manera creativa y en diferentes situaciones: *El aprender es la aplicación de lo aprendido* (Marth Stone, codirectora del Educational Technology Center de la Universidad de Harvard).

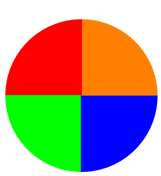
En muchas escuelas, la adaptación de las asignaturas de Matemáticas a los nuevos grados se ha limitado a la reducción de los contenidos que se impartían en las asignaturas correspondientes del plan viejo, con el fin de adaptarlos a la nueva carga docente. Esta adaptación pensamos que se revela claramente insuficiente si queremos formar a nuestros estudiantes, y futuros ingenieros, para que sean capaces de aplicar lo que han aprendido en su etapa de estudiantes cuando se incorporen al mundo laboral. En resumen deseamos generar titulados competentes matemáticamente, haciendo esa competencia extensiva a la capacidad de aplicar las Matemáticas para resolver problemas no exclusivamente de carácter matemático.

Con todo esto en este trabajo se presentan varios ejemplos y modelos que pueden servir para motivar e introducir las nociones clásicas de un temario de una asignatura de Álgebra Lineal (y su conexión con otras asignaturas como Probabilidad e Informática) de un grado en Ingeniería. Más concretamente en este artículo se muestra como el uso del *Álgebra lineal* nos permite estudiar probabilidades y estrategias ganadoras en juegos de mesa.

2 Un sencillo juego con monedas

Enunciado del problema

En esta primera sección comenzamos planteando un sencillo juego utilizando monedas.



Supongamos que tenemos en un tablero con cuatro sectores. Lanzamos dos monedas y avanzamos, en sentido horario, el número de caras que aparezcan. Si repetimos el procedimento....

¿Son todos los sectores igual de probables cuando pase mucho tiempo?

Los resultados posibles al lanzar dos monedas son CC, CX, XC, XX.

Utilizando la conocida *Regla de Laplace* (la probabilidad de que ocurra un suceso es el cociente entre los casos favorables y los casos posibles), según las normas del juego:

• podemos no movernos si al lanzar las dos monedas salen dos cruces (XX). Esto se produce con probabilidad 1/4,

• podemos movernos una posición si al lanzar las dos monedas sale una cara y una cruz (CX o XC). En este caso esto se producirá con probabilidad $2/4 = 1/2$, y

• podemos movernos dos posiciones si al lanzar las dos monedas salen dos caras (CC), que ahora se tendrá con probabilidad 1/4.

Planteamiento del problema

Denotemos por

• x_n a la probabilidad de estar en el sector **Naranja** tras n lanzamientos,

• y_n a la probabilidad de estar en el sector **Azul** tras n lanzamientos,

• z_n a la probabilidad de estar en el sector **Verde** tras n lanzamientos, y

• t_n a la probabilidad de estar en el sector **Rojo** tras n lanzamientos.

Lanzamos las monedas la primera vez...esto es n = 1.

Miremos la probabilidad de estar en el sector **Naranja**. Hacemos uso del conocido *Teorema de la Probabilidad Total* que los estudiantes de grado universitario conocen de su etapa en la enseñanaza de secundaria:

$$\begin{aligned}
x_1 =& \mathrm{Pr}(\text{estar en } \textbf{Naranja}) = \\
& \mathrm{Pr}(\text{estar en Naranja}|\text{estabas en } \textbf{Naranja})\mathrm{Pr}(\text{estabas en Naranja}) + \\
& \mathrm{Pr}(\text{estar en Naranja}|\text{estabas en } \textbf{Azul})\mathrm{Pr}(\text{estabas en Azul}) + \\
& \mathrm{Pr}(\text{estar en Naranja}|\text{estabas en } \textbf{Verde})\mathrm{Pr}(\text{estabas en Verde}) + \\
& \mathrm{Pr}(\text{estar en Naranja}|\text{estabas en } \textbf{Rojo})\mathrm{Pr}(\text{estabas en Rojo}) \\
=& \mathrm{Pr}(\text{sacar XX})\mathrm{Pr}(\text{estabas en } \textbf{Naranja}) + \\
& \mathrm{Pr}(\emptyset)\mathrm{Pr}(\text{estabas en } \textbf{Azul}) + \\
& \mathrm{Pr}(\text{sacar CC})\mathrm{Pr}(\text{estabas en } \textbf{Verde}) + \\
& \mathrm{Pr}(\text{sacar CX o CX})\mathrm{Pr}(\text{estabas en } \textbf{Rojo}) \\
=& (1/4)x_0 + 0y_0 + (1/4)z_0 + (2/4)t_0.
\end{aligned}$$

Es decir:

$$x_1 = \frac{1}{4}x_0 + 0y_0 + \frac{1}{4}z_0 + \frac{2}{4}t_0.$$

De la misma manera, con el resto de sectores tendríamos:

$$\begin{cases}
x_1 = \frac{1}{4}x_0 + 0y_0 + \frac{1}{4}z_0 + \frac{2}{4}t_0 \\
y_1 = \frac{2}{4}x_0 + \frac{1}{4}y_0 + 0z_0 + \frac{1}{4}t_0 \\
z_1 = \frac{1}{4}x_0 + \frac{2}{4}y_0 + \frac{1}{4}z_0 + 0t_0 \\
t_1 = 0x_0 + \frac{1}{4}y_0 + \frac{2}{4}z_0 + \frac{1}{4}t_0
\end{cases}$$

Lanzamos las monedas una segunda vez: esto es n = 2.

Claramente en este caso tenemos

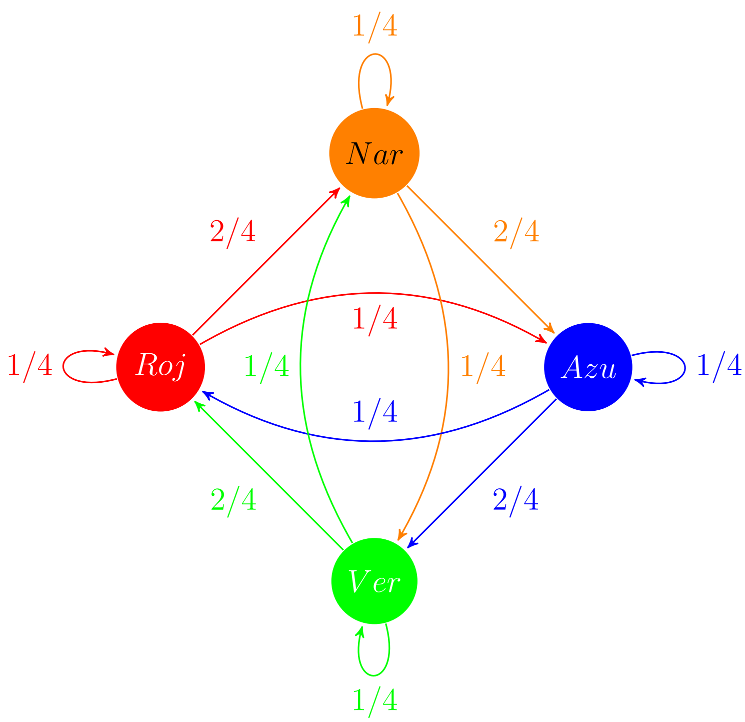
$$\begin{cases} x_2 = \frac{1}{4}x_1 + 0y_1 + \frac{1}{4}z_1 + \frac{2}{4}t_1 \\ y_2 = \frac{2}{4}x_1 + \frac{1}{4}y_1 + 0z_1 + \frac{1}{4}t_1 \\ z_2 = \frac{1}{4}x_1 + \frac{2}{4}y_1 + \frac{1}{4}z_1 + 0t_1 \\ t_2 = 0x_1 + \frac{1}{4}y_1 + \frac{2}{4}z_1 + \frac{1}{4}t_1 \end{cases}$$

Así en general podemos escribir matricialmente:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \\ t_n \end{pmatrix}}_{X_n} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1/4 & 0 & 1/4 & 2/4 \\ 2/4 & 1/4 & 0 & 1/4 \\ 1/4 & 2/4 & 1/4 & 0 \\ 0 & 1/4 & 2/4 & 1/4 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \\ z_{n-1} \\ t_{n-1} \end{pmatrix}}_{X_{n-1}}$$

⤹	**Naranja**	**Azul**	**Verde**	**Rojo**
Naranja	1/4	0	1/4	2/4
Azul	2/4	1/4	0	1/4
Verde	1/4	2/4	1/4	0
Rojo	0	1/4	2/4	1/4

Otra forma de visualizar esto es mediante los llamados *grafos*:



$$A = \begin{pmatrix} 1/4 & 0 & 1/4 & 2/4 \\ 2/4 & 1/4 & 0 & 1/4 \\ 1/4 & 2/4 & 1/4 & 0 \\ 0 & 1/4 & 2/4 & 1/4 \end{pmatrix}$$

En cualquier caso se trata de resolver,

$$X_n = A \cdot X_{n-1} = A^2 \cdot X_{n-2} = \ldots = A^n \cdot X_0.$$

Se trata entonces de calcular A^n.

Resolución del problema

Recordamos aquí algunas nociones y resultados:

• Se dice que un número α es un **valor propio** de una matriz A si existe un vector X no nulo de forma que $AX = \alpha X$. En dicho caso el vector X se llama **vector propio de** A (asociado al valor propio α).

• **Vector de probabilidad** es un vector cuyas componentes son no negativas y suman uno.

• Una matriz cuadrada cuyas columnas son vectores de probabilidad se llama **matriz estocástica**.

• Una **cadena de Markov** es una sucesión $(X_n)_{n\geq 1}$ de vectores de probabilidad que satisfacen la relación

$$X_n = A \cdot X_{n-1}, \qquad n \geq 1,$$

siendo A una matriz estocástica llamada **matriz de transición**.

• Se llama **estado estacionario de una Cadena de Markov** $(X_n)_{n\geq 1}$ al valor

$$X_\infty = \lim_{n\to\infty} X_n,$$

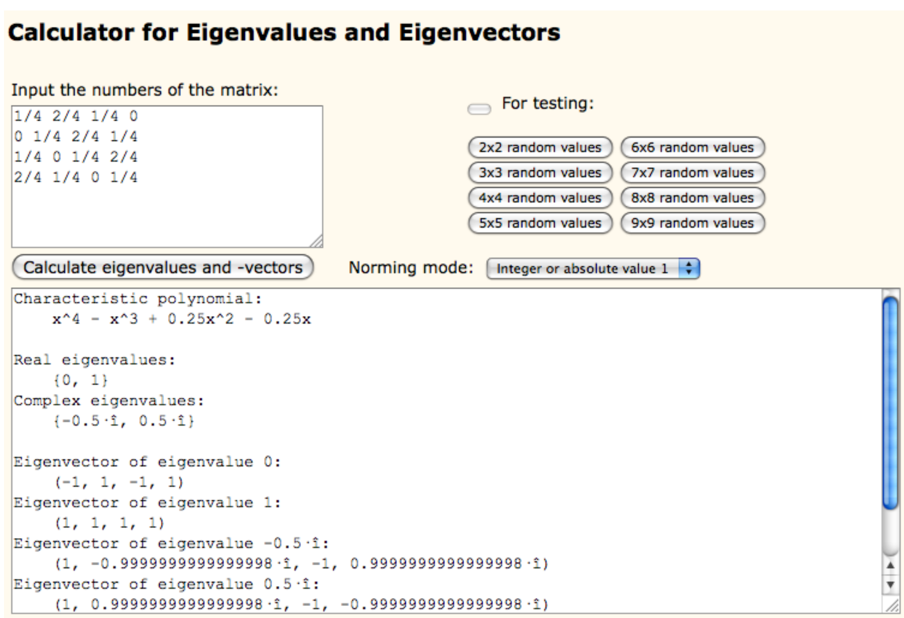
supuesto que exista. El estado estacionario indica el comportamiento de la Cadena de Markov con el paso del tiempo. Dicho estado estacionario es un vector de probabilidad que satisface

$$X_\infty = A \cdot X_\infty,$$

dicho de otra manera $\quad X_\infty$ es un vector propio de A asociado al valor propio $\alpha = 1$.

La resolución de nuestro problema se reduce entonces al cálculo del vector propio de A asociado al valor propio $\alpha = 1$. Para ello podemos usar un asistente informático o incluso en este caso hacerlo a mano. En la red es posible encontrar aplicaciones en línea que permiten hacer estos cálculos. En nuestro caso usamos

http://www.arndt-bruenner.de/mathe/scripts/engl_eigenwert.htm



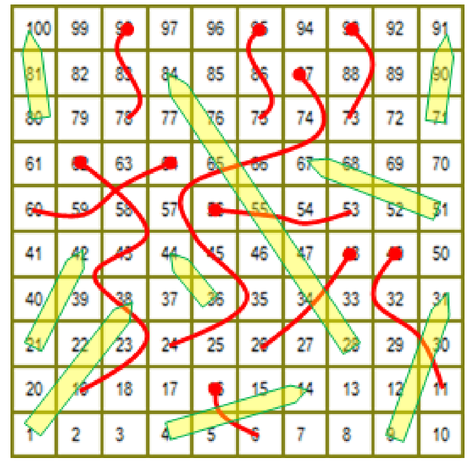
Cuando pase mucho tiempo, es decir, tras muchas tiradas como el vestor propio asociado al valor propio 1 es $X = (1, 1, 1, 1)$ entonces

$$X_\infty = \frac{1}{4}(1, 1, 1, 1),$$

es decir todas las casillas son igual de probables.

3 Un juego más interesante y un problema un poco más complicado: Las escaleras y los toboganes© (Snakes and Ladders©)

En el juego de las Escaleras y Toboganes© (en inglés Snakes and Ladders© o también Chutes and Ladders©) el jugador lanza un dado y se mueve por el tablero teniendo en cuenta que si cae en una casilla con una escalera sube a la correspondiente posición y si cae en un tobogán baja. El objetivo del juego es llegar a la última casilla. Los jugadores salen desde fuera del tablero y para llegar a la última casilla ha de ser con un número exacto. Pero supongamos que por el bien de nuestra impaciente familia ignoramos esta regla. **¿Qué pasará a largo plazo?**



Nuestro tablero consta de 9 escaleras y de 10 toboganes. La distribución de dicho tablero se resume en la siguientes tablas:

Escalera	desde	hacia
#1	1	38
#2	4	14
#3	9	31
#4	21	42
#5	28	84
#6	36	44
#7	51	67
#8	71	91
#9	80	100

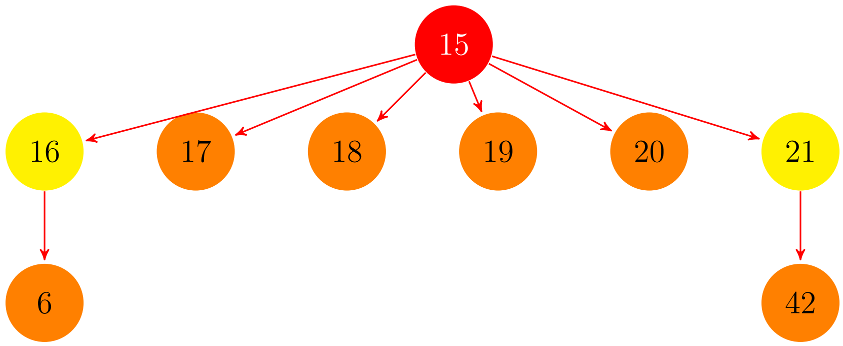
Tobogán	desde	hacia
#1	98	78
#2	95	75
#3	93	73
#4	87	24
#5	64	60
#6	62	19
#7	56	53
#8	49	11
#9	48	26
#10	16	6

Desde un punto de vista matemático la resolución es similar al problema planteado en la sección anterior salvo que, en este caso, la matriz (de transición) hay que construirla teniendo en cuenta varios casos. Veamos que, ahora, se obtiene una matriz 101×101 (reducible a una 82×82).

Si un jugador se encuentra en la casilla C y lanza el dado entonces podría moverse a las casillas $C+1, C+2, \ldots, C+6$. Si no hubiera ni escaleras ni toboganes la probabilidad de moverse a cada una de esas casillas sería $1/6$ (y sería 0 la probabilidad de moverse a cualquiera de las restantes casillas). Tendríamos así el vector

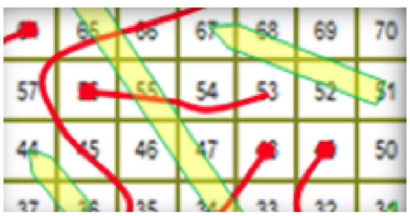
$$\big(0,\ldots,0,\overset{(C+1)}{1/6},\overset{(C+2)}{1/6},\overset{(C+3)}{1/6},\overset{(C+4)}{1/6},\overset{(C+5)}{1/6},\overset{(C+6)}{1/6},0,\ldots,0\big)\in\mathbb{R}^{101}.$$

Sin embargo las cosas cambian teniendo en cuenta las escaleras y los toboganes. Supongamos, por ejemplo, que estamos en la casilla 15. En este caso tenemos un tobogán en la casilla 16 que nos desciende a la 6 y una escalera en la casilla 21 que nos sube a la 42. En este caso el correspondiente vector sería:



$$\big(0,\ldots,0,\overset{(6)}{1/6},0,\ldots,0,\overset{(17)}{1/6},\overset{(18)}{1/6},\overset{(19)}{1/6},\overset{(20)}{1/6},0,\ldots,0,\overset{(42)}{1/6},0,\ldots,0\big)\in\mathbb{R}^{101}.$$

Un caso especial a tener en cuenta se produciría cuando a una casilla podamos llegar de más de una manera.



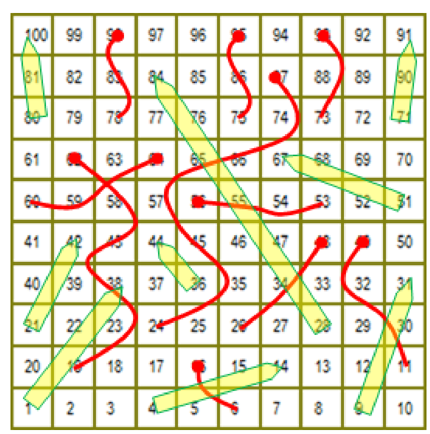
Por ejemplo si estamos en la casilla 50 podemos llegar a la casilla 53 porque al lanzar el dado saquemos un 3 o porque saquemos un 6 (puesto que en la casilla 56 hay un tobogán que nos baja a la 53). Esto significa que la probabilidad de llegar de la casilla 50 a la 53 no es de $1/6$ sino de $2/6$.

El último caso se debe a las casillas cercanas al final. Según nuestras *reglas familiares* el jugador gana en el momento que llega o sobrepasa a la casilla 100. Esto supone que si por ejemplo estamos en la casilla 97 ganaremos si con el dado sacamos un número mayor igual que 3 (esto es con probabilidad $4/6$). En este caso el correspondiente vector sería:

$$\big(0,\ldots,0,\overset{(98)}{1/6},\overset{(99)}{1/6},\overset{(100)}{4/6}\big)\in\mathbb{R}^{101}.$$

Con todas estas restricciones obtenemos una matriz 101×101 pero que se puede reducir puesto que en ella hay muchas filas que son nulas.

Efectivamente si por ejemplo nos fijamos en la casilla 21 como en ésta hay una escalera subiremos siempre a la casilla 42. Esto significa que si nos fijamos en la correspondiente fila de la matriz ésta será una fila de ceros que podemos eliminar. Lo mismo pasaría si caemos en la casilla 16 que puesto que tiene un tobogán a la casilla 6 proporcionaría que en nuestra matriz la fila 16 fuera una fila de ceros. Como en total hay 9 escaleras y 10 toboganes entonces habrá 19 columnas (y filas) nulas (de las 101 de la matriz). Con esta observación podríamos reducir nuestra matriz a una 82×82.



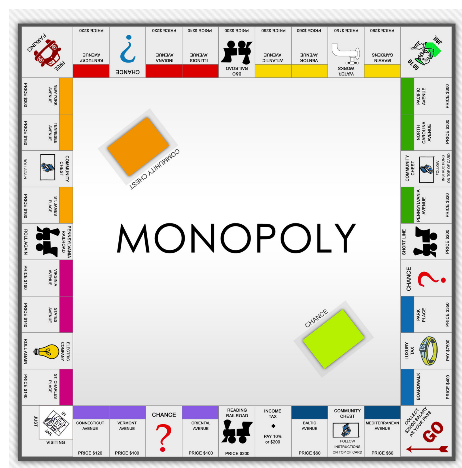
A diferencia de lo que pasaba en el juego de la sección anterior la introducción de la matriz, aún en el caso simplificado de la matriz 82×82 no se puede hacer a mano. Ésto proporciona una buena sesión práctica de laboratorio con un asistente informático como MatLab© que nos permita introducir la matriz y hacer los cálculos necesarios. Incluso nos daría la posibilidad de trabajar en coordinación con el Departamento de Informática para que propusieran alumno la realización del algoritmo y la programación de la rutina necesaria (en el correspondiente lenguaje en el que se impartan la asignatura).

Como era de esperar (dado que en el juego hay más casillas libres que con escaleras y toboganes) el estado estacionario es el vector que tiene todos los elementos cero salvo el último que es un uno. Dicho de otra manera, cuando pase mucho tiempo llegaremos a la última casilla.

Por otra parte el problema se podría completar con algunas preguntas como por ejemplo qué pasaría si para llegar a la última casilla fuera necesario sacar un número exacto. ¿Y si quitáramos algunas escaleras? ¿Y si lo que quitásemos fueran unos cuántos toboganes? ¿Se puede intuir la respuesta a las preguntas anteriores? Representar gráficamente los resultados obtenidos. Hacer un estudio temporal...

4 Todavía más difícil: un proyecto con el juego del Monopoly©

Con estas ideas se puede hacer un estudio del conocido juego del *Monopoly*©. El estudio de este juego es más complicado y, por ello, en este trabajo indicamos sólo alguna de las ideas que pueden servir para que los alumnos trabajen sobre él, a modo de proyecto. Si nos olvidamos de las reglas sobre los dobles, las cartas (de Suerte y Comunidad) y lo relacionado con las diferentes formas de salir de la Cárcel entonces podemos construir fácilmente la Matriz de Transición 40×40 (correspondientes a las casillas siendo la primera el "Inicio"). Teniendo en cuenta que al lanzar dos dados podemos obtener:



	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

entonces tendríamos:

- la primera columna de la matriz sería el vector de probabilidades:

$$(0,0,1/36,2/36,3/36,4/36,5/36,6/36,5/36,4/36,3/36,2/36,1/36,0,\ldots 0),$$

- la segunda columna de la matriz sería el vector de probabilidades:

$$(0,0,0,1/36,2/36,3/36,4/36,5/36,6/36,5/36,4/36,3/36,2/36,1/36,0,\ldots 0),$$

• la tercera columna de la matriz sería el vector de probabilidades:

$$(0,0,0,0,1/36,2/36,3/36,4/36,5/36,6/36,5/36,4/36,3/36,2/36,1/36,0,\ldots 0),$$

y así sucesivamente hasta obtener las $40 \times 40 = 1600$ entradas de la matriz.

El resultado en este caso es que todas las casillas serían igualmente probables. Sin embargo si complicamos el juego:

• Ampliamos la matriz 40×40 a una 80×80 añadiendo la posibilidad de que el jugador saque un doble (en cuyo caso vuelve a tirar): esto queda reflejado en las filas/columnas 41 a 80. A su vez esta matriz 80×80 la ampliamos a una 120×120 reflejando en las filas/columnas 81 a 120 la posibilidad de que el jugador saque de nuevo un doble.

• Ampliamos ahora la matriz 120×120 con tres filas/columnas más que se corresponden a la posibilidad de que un jugador esté en la cárcel hasta tres turnos (eliminamos la carta de *Salir de la cárcel*).

El tamaño final de la matriz es 123×123.

La tabla de probabilidades de cada casilla es:

		LJ model		RIJ model	
Number	**Space**	**Probability (%)**	**Rank**	**Probability (%)**	**Rank**
0	Go	3.09612	3	2.91826	3
1	MediterraneanAve	2.13138	36	2.01003	36
2	CommunityChest1	1.88488	37	1.77751	37
3	BalticAve	2.16240	35	2.03976	35
4	IncomeTax	2.32852	28	2.19659	27
5	ReadingRR	2.96310	6	2.80496	8
6	OrientalAve	2.26214	32	2.13457	32
7	Chance1	0.86505	40	0.81636	40
8	VermontAve	2.32096	29	2.19034	28
9	ConnecticutAve	2.30034	30	2.17118	30
10	JustVisiting	2.26954	31	2.14223	31
11	StCharlesPlace	2.70166	15	2.55955	15
12	ElectricCo	2.60404	20	2.61548	12
13	StatesAve	2.37209	26	2.17600	29
14	VirginiaAve	2.46489	24	2.42527	22
15	PennsylvaniaRR	2.91997	8	2.63657	11
16	StJamesPlace	2.79242	12	2.67892	9
17	CommunityChest2	2.59446	21	2.29513	24
18	TennesseeAve	2.93559	7	2.81968	6
19	NewYorkAve	3.08517	4	2.81156	7
20	FreeParking	2.88360	9	2.82480	5
21	KentuckyAve	2.83584	10	2.61421	13
22	Chance2	1.04803	38	1.04495	38
23	IndianaAve	2.73569	13	2.56728	14
24	IllinoisAve	3.18577	2	2.99549	2
25	BandORR	3.06590	5	2.89285	4
26	AtlanticAve	2.70720	14	2.54008	16
27	VentnorAve	2.67886	16	2.51920	18
28	WaterWorks	2.80742	11	2.65475	10
29	MarvinGardens	2.58605	22	2.43872	21
30	Jail	3.94998	1	9.38552	1
31	PacificAve	2.67737	17	2.52492	17
32	NorthCarolinaAve	2.62517	19	2.47692	20
33	CommunityChest3	2.36605	27	2.22919	26
34	PennsylvaniaAve	2.50063	23	2.35764	23
35	ShortLineRR	2.43264	25	2.29247	25
36	Chance3	0.86687	39	0.81745	39
37	ParkPlace	2.18640	33	2.06162	33
38	LuxuryTax	2.17985	34	2.05584	34
39	Boardwalk	2.62596	18	2.48612	19

según los dos modelos:

• *Leave Jail (LJ)* salir de la cárcel en el primer turno.

• *Remain in Jail (RIJ)* quedarse en la cárcel hasta que se pueda salir (tres turnos o dobles).

Agradecimientos

Los tres autores agradecen el apoyo a los proyectos PIME A09/2011 y PID-DMA 2012 de la Universitat Politècnica de València.

Referencias

[1] http://datagenetics.com/blog/november12011/.

[2] https://my.vanderbilt.edu/stacyfonstad/files/2011/10/monopoly.pdf.

[3] http://www.math.yorku.ca/Who/Faculty/Steprans/Courses/2042/Monopoly/Stewart2.html.

[4] http://web.mit.edu/sp.268/www/probability_and_monopoly.pdf.