MSEL
Modelling in Science Education and Learning

Modelling in Science Education and Learning
Volume 4, No. 5, 2011.
Instituto Universitario de Matemática Pura y Aplicada

Una propuesta de modelización en secundaria: problemas de estimación de magnitudes no alcanzables

Lluís Albarracín, Núria Gorgorió
Universitat Autònoma de Barcelona
LLuis.Albarracin@uab.cat, Nuria.Gorgorio@uab.cat

Abstract

En este artículo presentamos los Problemas de Estimación de Magnitudes No Alcanzables como una oportunidad para introducir la modelización matemática en las aulas de Educación Secundaria Obligatoria. Establecemos los conceptos de Magnitud No Alcanzable y de los problemas centrados en su estimación. A continuación, presentamos un estudio realizado con alumnos de secundaria con el objetivo de observar la presencia de procesos de modelización en las propuestas de resolución que plantean los alumnos para este tipo de problemas. A partir de los datos obtenidos se deduce que los alumnos pueden utilizar procesos de modelización en su resolución.

In this paper we present the Estimation of Non Attainable Magnitudes Problems as a tool to introduce mathematics modelling in compulsory secondary education classrooms. We define the concepts of Non Attainable Magnitude and the problems focused in its estimation. Secondly, we present an study done with secondary school students in order to observe whether they use modelling procedures in their resolution proposals. The data show that students can use modeling procedures to solve that kind of problems.

Keywords: Resolución de problemas, estimación, modelización, Educación Secundaria Obligatoria.

1 Introducción

Las posibilidades para introducir la modelización matemática en secundaria pueden verse limitadas por el grado de competencia de los alumnos en resolución de problemas, el nivel de los contenidos matemáticos desarrollados en secundaria o la complejidad de las situaciones planteadas. Sin embargo, no podemos descartar, al menos *a priori*, que los alumnos puedan generar modelos matemáticos por ellos mismos.

En este artículo presentamos un estudio sobre la resolución de problemas de estimación de magnitudes no alcanzables (PEMNA) por parte de los alumnos de Secundaria. Los resultados del trabajo sugieren que la introducción de problemas de estimación de magnitudes no alcanzables en las aulas de Secundaria puede ser una opción para superar algunas de estas dificultades, planteando nuevas formas de trabajar.

En nuestra investigación, pedimos a los alumnos de nuestro estudio que hagan propuestas de resolución para 6 problemas diferentes y analizamos si las estrategias presentes en sus propuestas de resolución contienen elementos de modelización.

Metafóricamente, podemos afirmar que son magnitudes cercanas aquellas para las que ya tenemos un conocimiento concreto y a las que hemos dado significado (el tamaño de un bolígrafo, el tiempo que pasa en el transcurso de un partido de fútbol o el número de personas que hay en una clase). Los problemas que presentamos a los alumnos se centran en estimar el valor de magnitudes realmente grandes. En esta dirección, la definición que proponemos para *magnitud no alcanzable* es la siguiente:

> *magnitud no alcanzable es aquella magnitud (física o abstracta) que se encuentra fuera de nuestro alcance de conocimiento y para la que todavía no hemos generado significado*

Debemos destacar que una magnitud será alcanzable o no en relación al conocimiento de cada individuo y dependiendo de sus competencias o experiencia.

Cuando nos planteamos realizar una estimación para el valor de una magnitud no alcanzable nos encontramos delante de lo que en nuestro estudio llamamos un problema de estimación de magnitudes no alcanzables. Nuestra definición para este tipo de problemas, influenciada por la dada por Puig [9] para problema, es la siguiente:

> *Un Problema de Estimación de Magnitudes No Alcanzables es una tarea planteada a un alumno en la que, sin un procedimiento, algoritmo o esquema que lleve a su resolución, ha de estimar el valor de una magnitud no alcanzable con el objetivo de crear significado a esta magnitud*

Algunos de los problemas que podemos plantear pueden parecer anecdóticos, como preguntar el tiempo necesario para ir en bicicleta de París a Pekín, pero otros tienen un importante papel en relación a la comprensión del entorno y una gran relevancia social. Una muestra sería la estimación del número de personas que hay en una manifestación, del consumo total de agua o de la basura generada en una población.

Nuestro estudio sugiere que es posible introducir la resolución problemas de magnitudes no alcanzables en Secundaria. Los motivos para hacerlo se centran en la necesidad de encontrar actividades que permitan trabajar la estimación, la resolución de problemas y la modelización, así como potenciar el trabajo por proyectos.

2 Referentes Teóricos

2.1 Resolución de problemas y modelización

La resolución de problemas es un campo que ha generado muchas investigaciones en el ámbito de la Didáctica de las Matemáticas. En uno de los primeros trabajos del área, Pólya[8] establece un modelo dividido en cuatro fases para la resolución de un problema:

- Comprensión del problema
- Elaboración de un plan
- Ejecución del plan
- Mirada retrospectiva

A partir de la introspección, Pólya examina el comportamiento de un resolutor que podríamos llamar ideal, que es capaz de autogestionar su labor resolutoria y que recorre linealmente las cuatro fases anteriores, pasando a la siguiente sólo cuando la anterior ha sido finalizada.

El modelo presentado por Pólya va acompañado de una serie de preguntas que el resolutor puede plantearse para avanzar en su labor. La gran mayoría de estas preguntas son variaciones de la pregunta *¿conoces un problema relacionado?*, con lo que este parece ser el motor de la resolución de problemas para Pólya. Varios autores han matizado el modelo de resolución de problemas propuesto por Pólya, aunque mantienen la esencia de esta estructuración en cuatro fases.

La primera fase consiste en la identificación, definición y comprensión del problema. En esta etapa se reconoce la existencia de un problema por parte del resolutor y la necesidad de resolverlo. La segunda fase de la resolución se centra en la planificación de la solución. Se trata de diseñar el esquema de actuación a seguir e identificar los objetivos a cumplir después de examinar las posibles estrategias generales que se pueden aplicar. La tercera etapa consiste en la ejecución del plan que se ha diseñado previamente y la cuarta fase consiste en una verificación de la tarea y de las decisiones tomadas, así como la validación de la solución y los resultados obtenidos a partir del plan inicial.

En nuestro estudio nos centraremos en la resolución de problemas con un contexto real. Siguiendo a Winter [12], la resolución de problemas de contexto real incluye la matematización de una situación no-matemática, que implica la construcción de un modelo matemático que respete la situación real, el cálculo de la solución y la transferencia del resultado obtenido a partir del modelo en la situación real. El paso más difícil de este proceso es determinar un modelo apropiado para la situación real planteada, ya que se requiere un buen conocimiento de ésta y un alto nivel de creatividad.

Una de les actividades científicas más relevantes en la actualidad consiste en generar modelos que permitan recrear de forma abstracta los objetos, fenómenos o procesos de los que pretendemos obtener un alto grado de comprensión. En general, en dichas situaciones los objetivos se centran en poder realizar predicciones o simulaciones que requieren obtener descripciones suficientemente precisas de los fenómenos para poder cumplir con nuestros propósitos.

La producción de modelos para resolver problemas no es exclusiva del ámbito científico en su más alto nivel, ya que diversos estudios han documentado que está presente incluso en las aulas. Lesh y Harel [6] afirman que “the products that problem solvers produce generally involve much more than simply giving brief answers to well formulated questions" (pág. 158). De hecho, en los últimos años, existe una tendencia a intentar transportar la creación de modelos a las aulas.

La forma en la que los estudiantes elaboran modelos para resolver problemas es objeto de discusión y existen diferentes posiciones al respecto (Borromeo Ferri [4]), pero, en general, se acepta que es un proceso multicíclico. Esto quiere decir que los alumnos pasan de la situación real al modelo y de la solución que les ofrece el modelo a una solución para el problema a partir de un conjunto de procesos que van revisando constantemente.

Siguiendo a Blum [1], los procesos de modelización se pueden estructurar en cinco fases principales:

1. Simplificar el problema real a un modelo real
2. Matematizar el modelo real a un modelo matemático
3. Buscar una solución a partir del modelo matemático
4. Interpretar la solución del modelo matemático
5. Validar la solución en el contexto del problema real

Estas fases se combinan en el siguiente esquema presentado por Blum y Leiss [2]:

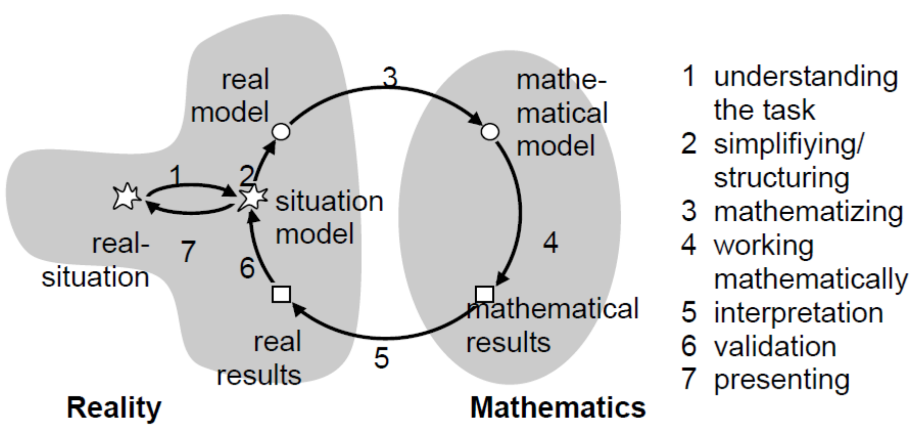

Figura 1: El ciclo de la modelización de Blum y Leiss

Estos procesos no siempre son sencillos para los estudiantes, y se han documentado dificultades en la modelización como la presencia excesiva de modelos lineales en situaciones que no lo requieren (Esteley, Villarreal y Alagia [3]).

2.2 Estimación

Son muchas las preguntas que podemos plantearnos para las que una estimación numérica puede representar una respuesta válida. La cantidad de pintura necesaria para pintar el comedor o el tiempo necesario para llegar al trabajo son cantidades difíciles de determinar con precisión y para las que es más eficiente encontrar una solución aproximada que pretender calcular la solución exacta. En esta situación debemos tener en cuenta que no siempre dispondremos de todos los datos, ni del tiempo o conocimientos necesarios para elaborar una respuesta precisa.

De hecho, algunas de estas preguntas no aceptan lo que entendemos por *una solución* en el sentido más estricto de la expresión, dado que diferentes condicionantes pueden influir en el valor final de ésta en función de la situación concreta que nos planteamos y de la forma en que es planteada.

Lo que es común en aquellos casos en los que nos disponemos a realizar una estimación es la necesidad de efectuar un pequeño conjunto de cálculos, aproximando algunas de las cantidades desconocidas. Como afirma Sowder [10], para que el valor resultante sea considerado correcto “the answer must fall within a certain interval, as determinated by the problem itself or some external source” (pág. 371).

Debemos tener en cuenta que la estimación es un conocimiento situado (Greeno [5]) y que se basa en la creación mental de modelos para el aprendizaje en contextos de la vida real. Estos modelos mentales utilizados en estimaciones de medidas deben estar basados en referencias cercanas al estimador. Son varios los investigadores que han estudiado la forma en la que diferentes partes del cuerpo pueden utilizarse como referencias para estimar magnitudes (Tretter, Jones, Andre, Negishi y Minogue [11] o Jones, Taylor y Broadwell [7]).

3 Metodología

Para conseguir una descripción completa del proceso de resolución de un PEMNA por parte de los alumnos, deberíamos considerar la comprensión del problema, la elaboración de un plan, la ejecución de éste y la mirada retrospectiva del alumno. Sin embargo, en nuestro estudio nos interesa analizar exclusivamente las *propuestas de resolución* de los alumnos. Por lo tanto, nos limitamos a presentar los problemas a los alumnos y pedirles que elaboren un plan de acción para resolverlos.

Para nuestro estudio hemos escogido 6 problemas de estimación de magnitudes no alcanzables:

- **Problema A:** ¿Cuánta gente cabe en el patio del instituto?

  Situación-contexto: Se quiere organizar un concierto y hay que decidir el número de personas que caben en el patio para saber cuántas entradas se pueden poner a la venta.

- **Problema B:** ¿Cuánta gente hay en una manifestación?

  Situación-contexto: En una manifestación cualquiera, se quiere aproximar el número de personas participantes.

- **Problema C:** ¿Cuántos SMS se envían en un día en tu comunidad autónoma?

  Situación-contexto: Para la comunidad autónoma del estudiante, se quiere aproximar el número de total de SMS enviados en un día.

- **Problema D:** ¿Cuántas gotas son necesarias para llenar un cubo de agua?

  Situación-contexto: En la sala de profesores aparece una gotera y se quiere aproximar el número de gotas que pueden caer hasta llenar un cubo.

- **Problema E:** ¿Cuántos vasos de agua son necesarios para llenar una piscina?

  Situación-contexto: Teniendo en cuenta la necesidad de ahorrar agua en verano, se quiere aproximar el número de vasos de agua equivalentes al volumen de una piscina.

- **Problema F:** ¿Cuántas monedas de euro caben en una caja fuerte de un metro cúbico?

  Situación-contexto: En las películas de atracos aparecen cajas fuertes llenas de dinero. Consideramos una caja fuerte de un metro cúbico llena de monedas de un euro, se quiere aproximar el número de monedas que caben en la caja fuerte.

Estos problemas se presentan a los alumnos acompañados de un enunciado que plantea una situación en la que la pregunta podría tomar sentido. Por ejemplo, el enunciado concreto para el problema A es el siguiente:

Problema A: Organización de un concierto

> Para el festival de final de curso, una buena opción sería traer un grupo conocido y organizar un concierto. Podríamos aprovechar la pista del patio para que pueda entrar toda la gente que quiera venir.
>
> En esta situación, una buena pregunta sería: *¿cuántas entradas podríamos vender para hacer un concierto si llenáramos el patio?*
>
> Describe **los pasos que seguirías** para calcular de forma aproximada esta cantidad con **tus propios recursos**. No es necesario que des un resultado, únicamente que expliques cómo lo harías.

La recogida de datos se llevó a cabo en dos centros de secundaria de la misma población, una ciudad de unos 200 000 habitantes en el área metropolitana de Barcelona. Uno de los centros es público y el otro un centro privado concertado. Las sesiones de recogida de datos se hicieron en clases de una hora, durante las cuales los alumnos podían enfrentarse a más de un problema y presentar su propuesta de resolución. Al inicio de cada sesión se le entregaba a cada alumno un problema para que planteara su resolución. Cuando un alumno consideraba que había completado su propuesta de resolución, la entregaba y se le ofrecía otro problema. De esta forma, tenemos 531 propuestas de resolución de 216 alumnos. El número de propuestas para cada problemas oscila entre 85 y 95.

4 Resultados

A continuación, presentamos los resultados obtenidos en nuestro estudio. Para generar estos resultados se ha realizado un análisis de las estrategias que aparecen en las diferentes propuestas de resolución que los alumnos plantearon para cada problema, determinando si contienen elementos de modelización. A continuación mostraremos algunos ejemplos de respuestas de los alumnos para ilustrar los diferentes tipos de propuestas que hemos obtenido.

4.1 No se detectan estrategias

Para empezar, mostraremos propuestas de los alumnos en los que no se puede detectar ningún tipo de estrategia para resolver el problema. Algunas de estas propuestas no intentan resolver el problema planteado. En otros casos no encontramos con una sucesión de ideas inconexas o incoherentes.

Un ejemplo es la siguiente propuesta[1] de un alumno de 1° de ESO para el problema D:

PD1 - goteras
Cogería un cubo y dejaría que caiga el agua, pero si por ejemplo la gotera es muy grande y caen más gotas pondría un cubo más alto o más grande. Cogería un cubo que más o menos da para toda la noche.

En este caso, podemos observar que este alumno de 1° de ESO tiene una idea acertada del tipo de problemática presentado en la situación, pero no intenta dar respuesta a la pregunta. El alumno se esfuerza en ofrecernos una posibilidad de actuación para resolver la situación, pero ignora la pregunta planteada y no encontramos ningún elemento de modelización. Un caso diferente, para el problema de la caja fuerte, es el siguiente:

PF2 - goteras
Primero mediria el espesor y el diametro total de una moneda de un euro. Después dividiria el resultado de las dimensiones de la moneda entre tres metros. Después tendría el resultado total de cuantas monedas caben esa caja fuerte pero tendría que restar un cuarto o la mitad porque sinó no se podría restar nada, ya que se caería todo. Las monedas se pondrían una sobre la otra en columnas.

En este segundo ejemplo podemos observar, una vez más, que el alumno tiene una idea adecuada sobre la situación descrita y ofrece una estrategia con procedimientos con contenido matemático. Sin embargo, su estrategia es difícilmente descifrable.

En general, hemos encontrado diversos tipos de respuestas que, como en los dos casos aquí presentados, no nos permiten identificar ningún elemento de modelización. En estos casos nos encontramos con alumnos que o bien no intentan dar respuesta a la pregunta planteada o lo hacen a partir de razonamientos erróneos o incoherentes.

4.2 Estrategias que no contienen modelización

Entre las respuestas de los alumnos que contienen estrategias para dar respuesta a la pregunta planteada en cada problema encontramos las que no contienen ningún tipo de elemento o proceso en el que intervenga la modelización.

Un claro ejemplo es el siguiente:

PB1 - manifestación
Llamas a la policía y se lo preguntas

En este ejemplo podemos observar que el alumno delega la responsabilidad de estimar la cantidad de personas participantes en una manifestación a una fuente de información externa, con lo que no encontramos ningún indicio de modelización.

Otro tipo de respuestas en las que no encontramos procesos de modelización son las que pretenden realizar un recuento exhaustivo. Un ejemplo es la siguiente propuesta:

[1] Presentamos las propuestas de los alumno traducidas del catalán al castellano respetando al máximo el formato de las expresiones utilizadas. Indicaremos para cada propuesta el problema al que pertenece y el curso del alumno. Si escribimos PB2 nos referimos a una propuesta de resolución para el problema B realizada por un alumno de 2° de ESO.

 ISSN 1988-3145

PB3 - manifestación
Pondría un sensor en forma de placa en el sitio en el que empieza el área de la manifestación. Para que cuando pisen, se vaya contando.

Una opción equivalente para el problema de la piscina es la siguiente:

PE3 - piscina
Cojo unos vasos y empiezo a llenarlos de agua de la piscina. Si me hacen falta más vasos los cojo y así hasta agotar el agua de la piscina. Cuando se haya agotado el agua cuento los vasos llenados y así sé cuantos vasos necesito.

En este tipo de propuestas los alumnos no tienen en cuenta algunas limitaciones importantes, como el tiempo o el material necesarios para realizar algunas de las medidas que proponen. En general, tampoco observamos ningún tipo de esquema que les ayude a realizar el recuento de una forma efectiva.

4.3 Estrategias que contienen modelización

Hemos encontrado propuestas que contienen elementos indicadores de modelización. Estos elementos difieren en función del problema planteado y del enfoque escogido por el alumno en su propuesta. De hecho, debemos recordar que al pedir únicamente a los alumnos que elaboren una propuesta de resolución, no podemos observar algunas partes del proceso de modelización. En concreto, nuestro instrumento de recogida de datos nos permite identificar propuestas que proponen modelos matemáticos pero no recoge aspectos relacionados con la búsqueda de una solución ni su validación.

En nuestro estudio hemos detectado tres tipos generales de estrategias en los que se pueden observar procesos de modelización. Una primera vía es la de utilizar la *regla del producto* a partir de una imagen previa de la forma en que están dispuestos los elementos a contar. Otra opción es la introducción de una *unidad* que se utiliza de forma iterada. La última vía detectada es la de la *concentración media* de los objetos a contar. A continuación, expondremos las características de cada una de estas estrategias.

Aquellos alumnos que proponen realizar un recuento de elementos a partir de un modelo mental de distribución uniforme utilizan la regla del producto. Este modelo se adapta a las situaciones en las que se cuentan personas en una superficie (problemas A y B) y monedas en un espacio (problema F). Un ejemplo es el siguiente:

PF2 - caja fuerte
Haría una columna de monedas de euro hasta que llegara hasta arriba, al límite superior de la caja fuerte (y las contaría). Iría poniendo monedas de euro en horizontal en el "suelo" de la caja fuerte hasta que no cupiesen más y las contaría. Multiplicaría una cantidad por la otra y ese sería el resultado.

Otra opción es aproximar el número de elementos a partir de introducir una unidad de referencia, como el espacio que ocupa una persona media o el volumen de una gota. Esta unidad propuesta es una abstracción del concepto del elemento a contar, ya que, excepto el recuento de SMS o monedas, no podemos considerar que los elementos contados tengan las mismas medidas. Una muestra de esta estrategia es la siguiente:

PA3 - concierto
Yo cogería a 10 alumnos y calcularía el espacio que ocupa cada uno. Después, haría la media para saber más o menos el número de alumnos que pueden caber en el patio. Calcularía la superficie total del patio y restaría los metros que ocuparía el escenario. El espacio restante, que sería en el que se pone a la gente, lo dividiría entre la media de espacio ocupado por cada alumno. Entonces, si caben 108 alumnos vendería 100, porqué sinó no habría espacio en el patio ni para respirar.

La última estrategia que hemos detectado que presenta elementos de modelización es la del cálculo de la concentración de elementos. En este caso nos encontramos con el cálculo de la densidad de población, del número de gotas en un volumen dado o de la media de SMS enviados por persona. El siguiente ejemplo ilustra este tipo de propuesta:

PC3 - SMS
En primer lugar realizaría una hoja de cálculo en la que estuviesen los nombres de 25 personas (entre amigos y familiares) y todos los días de un mes. Para poder completar la hoja con los SMS que envía cada persona en un día de un mes les daría la hoja y se deberían comprometer a llenarla con el número de SMS que envían. Pasado el mes, recogería los resultados y los clasificaría en una hoja de cálculo principal. Y de todos los SMS enviados por las 25 personas haría la media. Cuando tuviera la media la multiplicaría por el número total de habitantes.

5 Discusión y conclusiones

En nuestro estudio hemos observado que algunos alumnos son capaces de generar modelos matemáticos que les permitirían obtener las estimaciones planteadas. Sin embargo, una parte importante de los alumnos no ofrece propuestas con estrategias válidas o éstas no se pueden llevar a cabo por falta de tiempo o recursos. Por tanto, los resultados ponen en evidencia que no todos los alumnos son suficientemente competentes en resolución de problemas, al menos en este tipo de problemas. Al mismo tiempo, hemos podido observar que si se eligen los problemas adecuados algunos alumnos proponen estrategias que modelizan la situación.

Por tanto, de nuestro estudio podemos concluir que los alumnos de secundaria poseen conocimientos matemáticos suficientes para afrontar este tipo de problemas y que pueden intentar su resolución utilizando procesos de modelización. De hecho, hemos encontrado diferentes tipos de modelos planteados por los alumnos a un mismo problema, que permiten generar interesantes discusiones en el aula.

Así, para algunos de los problemas trabajados, se pidió posteriormente a los alumnos que completaran la resolución en clase, trabajando en pequeño grupo. El desarrollo de las propuestas recogidas sugiere que las limitaciones de carácter práctico que los alumnos encuentran al intentar llevar a cabo sus planteamientos iniciales podrían actuar como catalizadores para avanzar en la de modelización necesaria para que el proceso de resolución sea eficaz.

Desde un posicionamiento cercano al de Pólya en el que la idea relacionada con la pregunta *¿conoces un problema relacionado?* aparece como el motor del aprendizaje en resolución de problemas, creemos que el trabajo en resolución de problemas de magnitudes no alcanzables, con situaciones en las que la complejidad progresara, podría ser una vía para introducir la modelización en secundaria.

Por todo esto, opinamos que los problemas de estimación de magnitudes no alcanzables suponen una opción interesante para introducir la modelización matemática en secundaria. Hemos visto que algunos alumnos pueden modelizar las situaciones previstas y que se puede realizar desde diferentes puntos de vista. A partir de esta premisa, el trabajo en grupo por proyectos puede comportar que un número mayor de alumnos participen en los procesos de modelización.

Referencias

[1] W. Blum. Icme study 14: Applications and modelling in mathematics education— discussion on—discussion document. Educational studies in mathematics, 51:149—171, 2003.

[2] W. Blum and D. Leiss. How do students and teachers deal with modelling problems? In C. Haines, P. Galbraith, W. Blum, and S. Khan, editors, Mathematical modelling (ICTMA 12): Education, Engineering and Economics: Proceedings from the twelfth International Conference on the Teaching of Mathematical Modelling and Applications, pages 222—231, 2007.

[3] C. B. Esteley, M. E. Villarreal, and H. R. Alagia. The overgeneralization of linear models among university students' mathematical productions: A long-term study. Mathematical Thinking and Learning, 12:86—108, 2010.

[4] R. Borromeo Ferri. Theoretical and empirical differentiations of phases in the modelling process. ZDM, 38(2):86—95, 2006.

[5] J. G. Greeno. Number sense as situated knowing in a conceptual domain. Journal for Research in Mathematics Education, 22(13):170—218, 1991.

[6] R. Lesh and G. Harel. Problem solving, modeling, and local conceptual development. Mathematical Thinking and Learning, 5(2):157, 189, 2003.

[7] A. R. Taylor M. G. Jones and B. Broadwell. Estimating linear size and scale: Body rulers. International Journal of Science Education, 31(11):1495—1509, 2009.

[8] G. Polya. How to solve it. Princeton University Press, 1945.

[9] Luis Puig. Elementos de resolución de problemas. Ed. Comares, Granada, 1996.

[10] J. Sowder. Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning, chapter Estimation and number sense, pages 371—389. Macmillan Publishing Company, 1992.

[11] T. R. Tretter, M. G. Jones, T. Andre, A. Negishi, and J. Minogue. Conceptual boundaries and distances: Students' and adults' concepts of the scale of scientic phenomena. Journal of Research in Science Teaching, 83:282—319, 2006.

[12] H. Winter. Modelle als konstrukte zwischen lebensweltlichen situationen und arithmetischen begrien. Grundschule, 26(3):10—13, 1994.