

Trayectorias modelizadoras en la ESO

Manel Sol

IES VILATZARA, VILASSAR DE MAR (BARCELONA)

msol@xtec.cat

Joaquín Giménez, Núria Rosich

UNIVERSITAT DE BARCELONA

quimgimenez@ub.edu, nuriariosich@ub.edu

Abstract

Se presentan los resultados de una investigación sobre las competencias modelizadoras de alumnos de la ESO con dificultades de aprendizaje de las matemáticas. Para ello se analizan las memorias escritas de sus actividades de modelización que hemos denominado Proyectos Matemáticos Realísticos. En especial se estudian las acciones que realizan los alumnos en la ejecución de su proyecto. La secuencia de todas las acciones que llevan a cabo los escolares lo hemos denominado "Ruta Modelizadora". Para su análisis hemos establecido una ruta hipotética que los alumnos de la ESO, como modelizadores no expertos, pueden llevar a cabo en un proceso de modelización completo. Esta ruta hipotética, formada por 16 acciones, la hemos utilizado como un instrumento de análisis. Los resultados de la investigación muestran que todos los alumnos son capaces de llevar a cabo sus proyectos matemáticos aunque se observan diferencias en los procesos que siguen.

We present the results of our research about ESO student low attainers' modelling competencies. We have analyzed their papers (dossiers) about the modelling activities they carried out. These modelling activities have been called Realistic modelling Project (RMP). We have studied specially the set of actions that students do when they carry out their projects. The sequence of all the actions has been called 'Modelling Route'. In order to analyse it we have set out a hypothetical modelling route that ESO students, as non-expert modellers, can perform a whole modelling process. This hypothetical route, consists of 16 actions, which we have used as an instrument of analysis. Research results show that all students are able to carry out their mathematical projects but there are differences in the processes followed.

Keywords: Mathematical project, modelling competence, modelling route, low attainers students.

It is more useful to know how to mathematize than to know a lot of mathematics. Teachers, in particular, would benefit by looking at their task in terms of teaching their students to mathematize rather than teaching them some mathematics. Wheeler, 1982

En este momento está ampliamente aceptada la necesidad de que los alumnos no universitarios aprendan a modelizar. La idea no es nueva, ya desde los años 70 del siglo pasado la relación entre las matemáticas y el mundo real ha sido un tema prioritario para la educación matemática. El alcance de este interés se comprueba por la amplia presencia de la modelización en los programas de las principales conferencias internacionales Icmé, Ictma o CERME por citar algunas de las más importantes.

En algunos países este interés se vio reflejado en los currículums y en los libros de texto que incorporaron propuestas en esta línea. A pesar de la importancia que todo el mundo le dio a este tema y los esfuerzos que se realizaron para mejorar el conocimiento y las metodologías de trabajo se constataba, al principio de los años 90, que este tipo de actividades no se habían llegado a generalizar y poco a poco se dejaron de proponer en las aulas. Algunos investigadores analizaron las dificultades que se habían dado para llevarlos a la práctica (Blum & Niss, 1991).

Hacia finales de los años 90 se volvió a recuperar el interés por llevar a las aulas de todos los niveles educativos las actividades de aplicación y modelización. Este interés se vio acrecentado pocos años más tarde, a partir de las pruebas PISA por un lado y de la incorporación de las competencias como objetivo educativo por otro. Ello ha promovido muchas investigaciones llevadas a cabo en los niveles universitarios o de expertos, pero no tantas en los niveles no universitarios o en la secundaria obligatoria. A pesar del valor que se le da a las actividades de modelización, su generalización continúa resistiéndose ya que no se han superado del todo las antiguas dificultades para llevarlas a las aulas y algunos investigadores continúan resaltando la distancia que actualmente existe entre los ideales educativos y la realidad del día a día en las aulas de matemáticas de todo el mundo (Blomhøj & Kjeldsen, 2006; Burkhardt & Pollak, 2006).

En el caso de Cataluña se conocen algunos trabajos a nivel universitario, por ejemplo Alsina (2001, 2007), Gómez (1998, 2002) y Montero (2008). A nivel no universitario el Grup Vilatzara se interesó por las aplicaciones matemáticas a la realidad al final de la década de los 90. En aquellos primeros trabajos se encuentra el origen de la investigación que presentamos. Al mismo tiempo el currículum actual de la ESO en Cataluña recoge este reto y señala explícitamente que la competencia matemática ha de ayudar al alumnado “a modelizar situaciones de la vida real y vinculadas a otras áreas de conocimiento y traducirlas a modelos matemáticos...”

Nuestro trabajo desde hace más de 15 años se interesa en el estudio del desarrollo de las competencias modelizadoras de los alumnos de la ESO. Nosotros creemos que la modelización matemática se aprende haciendo, por esto hemos diseñado una tarea que hemos llamado Proyectos Matemáticos Realísticos (PMR) (Sol, 1998, G. Viltzara, 2001). Entendemos que los PMR son actividades de larga duración, ricas en matematización, que empezando desde una perspectiva real promueve procesos de modelización y autonomía en los alumnos (Sol & Giménez, 2004). El principal objetivo de este tipo de actividad es que los estudiantes desarrollen las competencias modelizadoras (Blomhøj & Jensen, 2003) requeridas para abordar situaciones problemáticas de la realidad. Situaciones que están relacionadas con su vida personal y son de interés para los alumnos, como por ejemplo el instituto, el deporte, la ciudad, la ecología

o la economía. Este desarrollo tiene lugar mediante la reconstrucción guiada (Treffers, 1987) durante unas 6 semanas. Durante este tiempo los alumnos trabajan en grupo y con una gran autonomía ya que han de tomar sus propias decisiones sobre qué problemas abordar y con qué nivel de profundización.

Hemos analizado las producciones escritas de los alumnos para comprender la emergencia de comportamientos modelizadores de las personas no expertas como es su caso. También hemos establecido una ruta hipotética de realización de los PMR que nos permite analizar el proceso de modelización que los alumnos muestran en las memorias de sus trabajos y también su competencia modelizadora. En otros estudios anteriores (Giménez & Sol, 2005; Sol, Giménez & Rosich, 2007; Sol, 2009) se muestra como los estudiantes de la ESO desarrollan las competencias modelizadoras, incluso aquellos que tiene dificultades en el aprendizaje de las matemáticas. En este artículo mostraremos algunos aspectos relevantes de la investigación realizada por Sol (2009). En este trabajo nos planteábamos estudiar el desarrollo de las competencias modelizadoras del alumnado de la escuela secundaria obligatoria y específicamente del alumnado con dificultad de aprendizaje de las matemáticas situados en un aula heterogénea a través de los PMR. En concreto se mostrará como los PMR son tareas útiles para que los alumnos de la ESO desarrollen sus competencias modelizadoras, y la ruta hipotética de modelización es un instrumento que nos permite analizar la ruta que siguen en el proceso de modelización a partir de las memorias escritas que presentan. Al mismo tiempo se pueden detectar cuales son sus fortalezas y debilidades en el proceso de modelización y así pensar en cómo mejorar estos procesos.

1 Marco teórico

Para comprender nuestro estudio sobre las competencias modelizadoras de los alumnos de la ESO hemos de referirnos a diferentes aspectos. Al ciclo de modelización, sobre el que existe un debate desde hace años sobre los distintos enfoques que se dan y la ruta modelizadora que hemos diseñado como un instrumento de análisis del comportamiento de los alumnos; los proyectos matemáticos realísticos (PMR) como actividad para promover el ciclo de modelización y la competencia modelizadora de los alumnos que es lo que queremos estudiar a partir de los PMR.

1.1 Ciclo y ruta de modelización

En la discusión sobre la modelización matemática y actividades asociadas, hay autores e investigadores que a menudo representan el proceso de modelización como un ciclo de actividad para comprender el comportamiento de los estudiantes (Haines & Crouch, 2007). En nuestra investigación empezamos a utilizar el conocido ciclo de Mason (Mason & Johnston-Wilder, 2004, p 190).

De acuerdo con lo que proponen Haines & Crouch (2007) cada una de las fases o etapas en el ciclo se asocian con un conjunto de acciones. Algunas de ellas se definen de acuerdo con lo que se propone en otros ciclos conocidos (Voskoglou, 2007; Blum & Leib, 2007; Borromeo, 2007). Las primeras de estas acciones corresponde a las dos primeras fases del ciclo propuesto por Blum & Leib en la que los alumnos deben mostrar su capacidad para plantear una cuestión asociada a una situación real, habiendo comprendido la complejidad de esta situación. Las acciones 3 a 7 se refieren a diferentes aspectos del proceso de matematización, que aparece en

casi todos los modelos de modelización. Estas acciones han sido observadas empíricamente (Sol, 2009). Las acciones 8 a 10 las asociamos directamente al trabajo matemático en el ciclo de Blum & Leiß (2007). Las acciones 11 y 12 corresponden con la fase 3 del ciclo de Mason. Las acciones 13 a 15 se refieren a la validación del proceso. Finalmente la acción 16 indica lo que proponen todos los ciclos de modelización (tabla 1).

Para analizar el comportamiento de los alumnos, Borromeo (2006) desarrolló el constructor de *ruta individual de modelización* para referirse al itinerario seguido por los alumnos a través de las diferentes fases del ciclo de modelización y que se muestran en su expresión verbal así como en otras representaciones externas. En nuestro trabajo, el término de ruta de proyecto de modelización se refiere a la representación (correspondiente al desarrollo discursivo) que expresa un conjunto de acciones llevadas a cabo por un grupo de alumnos cuando producen un informe escrito sobre un proyecto de matemática realística. Esta ruta se puede representar de forma simbólica o gráficamente como se puede ver en la figura 1 donde los colores diferencian las fases del ciclo de modelización de Mason et al. (2004). La noción es por lo tanto un constructor técnico más que estrictamente cognitivo y nos permita analizar el informe escrito de los alumnos para comprender el proceso de modelización que han seguido.

TABLA 1 *Ciclos de modelización y acciones hipotéticas observables*

Fases de Blum & Leiß	Ciclo de Voskoglou	Ciclo de Mason	Acciones hipotéticas observables
1,2	Análisis	Especificar el problema	1. Reconocer un problema social abordable matemáticamente. 2. Concretar una finalidad problemática y reconocer medios para resolverla.
3	Matematización	Construir un modelo	3. Identificar objetos y relaciones relevantes 4. Seleccionar variables. Decidir valores. 5. Reconocer los ámbitos matemáticos del modelo 6. Explicitar relaciones entre objetos reales y contenidos matemáticos 7. Controlar la coherencia en el conjunto de relaciones matemáticas establecidas
4		Formulación matemática	8. Explicitar la relación entre variables usando lenguaje matemático 9. Formular hipótesis matemáticas 10. Formulación de problemas y sub-problemas
5	Resolución e interpretación	Encontrar soluciones matemáticas	11. Resolución de problemas
5		Interpretación	12. Encontrar e interpretar la solución matemática
6	Validación	Comparación con el original	13. Reconocer el significado y alcance de soluciones y conclusiones en la situación real. Explicitan el modelo. 14. Validar el modelo. 15. Modificar el modelo si es necesario
7		Escribir un informe	16. Comunicar el proceso y resultados cuando el modelo sea válido

Se muestra como un ciclo aunque no hay que interpretar el orden de las acciones como la secuencia que siguen los alumnos cuando realizan sus proyectos.

1.2 Los proyectos matemáticos realísticos

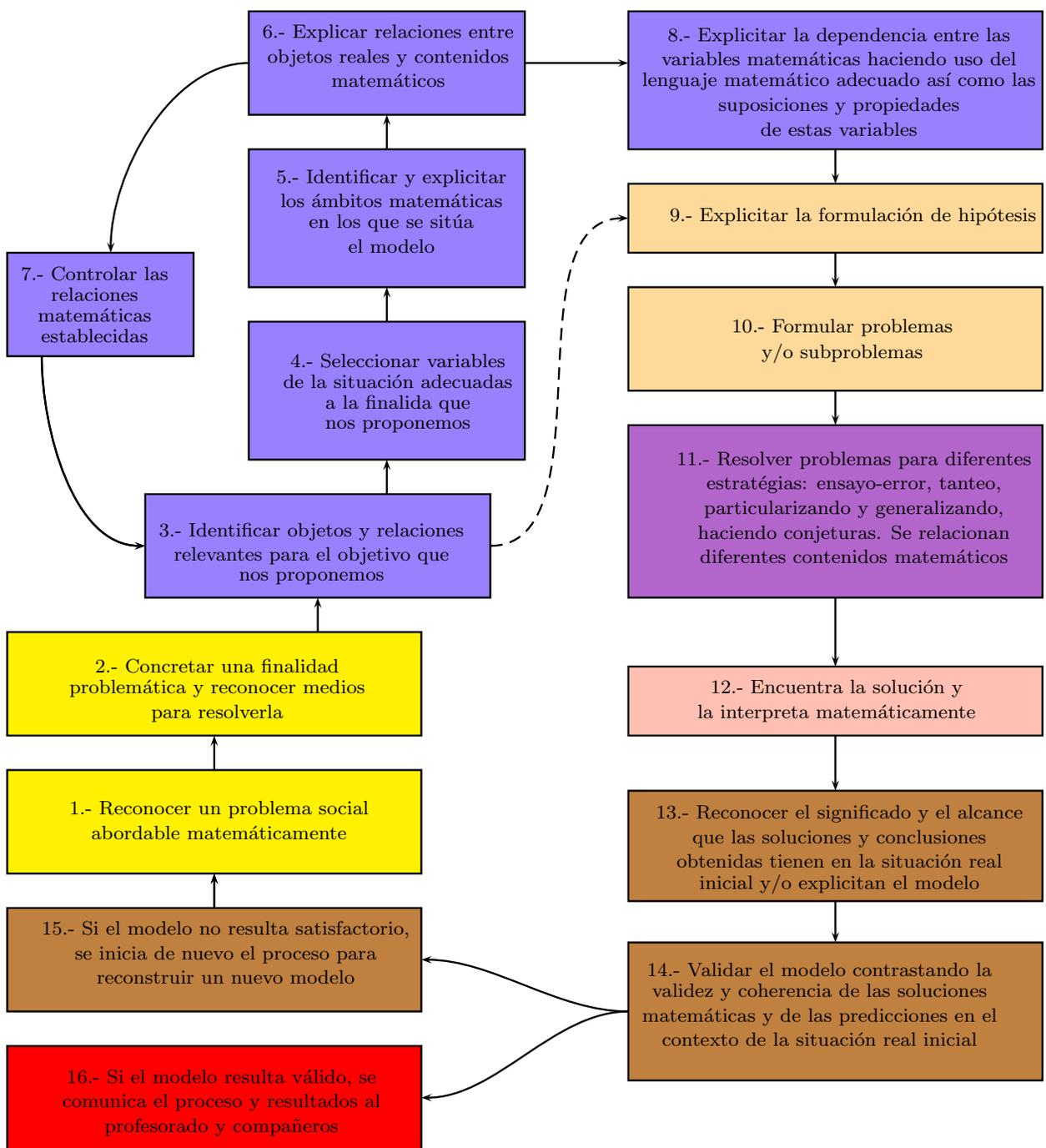
Los PMR promueven la modelización desde un enfoque educativo (Kaiser & Sriraman, 2006). En su realización, los alumnos desarrollan un proceso holístico de modelización (Blomhoj & Jensen, 2003). Los proyectos se sitúan en el marco de la Educación Matemática Realística (EMR) impulsada por H. Freudenthal desde el inicio de la década de los 70 ya que algunas de sus características coinciden con lo que se propone en la EMR. Así los PMR se plantean la resolución de problemas reales situados en contextos próximos a los alumnos. Es una tarea abierta tanto en su planteamiento como en su proceso y su final y de esta manera se le da un gran protagonismo al alumno que será quien concrete el trabajo. Es también colaborativa ya que el alumnado no trabaja de manera aislada sino en grupo promoviendo que los alumnos compartan los procesos y experiencias coincidiendo con la EMR. Promueve los dos procesos de modelización horizontal y vertical (Treffers, 1987). Desde la perspectiva de los contenidos matemáticos el PMR es globalizador ya que el alumno ha de activar todos sus conocimientos matemáticos adquiridos hasta entonces, es decir, que no responden a la idea de que se pone en práctica un contenido que se acaba de aprender, por ejemplo un proyecto en el que solo se aplica la estadística porque es el tema que se acaba de estudiar. Los PMR son un superproblema en el sentido de Friedlander (1996), ya que parte de un conglomerado de preguntas planteadas sobre una situación real en la que el alumno ha de estudiar el modelo que interviene. Su desarrollo se alarga en el tiempo, igual que los superproblema, pero se diferencian de ellos porque no se hacen completamente en el aula. Una parte del trabajo ha de hacerse fuera del aula ya que tendrán necesidad de obtener datos, medir, observar, buscar información. El profesorado tiene un papel especial a lo largo de todo el proceso ya que lo ha de guiar y orientar a distancia, sin intervenir directamente, respetando las iniciativas de los alumnos.

Algunos ejemplos de proyectos que han realizado alumnos de la ESO son:

- a) Han elaborado unos índices de precios al consumo a nivel familiar. Han elegido un conjunto de unos 50 productos de alimentación, higiene y limpieza. Durante un mes han recogido los tiques de las compras en cada familia de los que hacían el proyecto para observar las cantidades que se consumían de cada producto en ese tiempo. Decidieron que el mes de marzo sería el mes de referencia para hacer los cálculos. Los precios de su estudio los cogieron de las páginas web de diferentes centros comerciales porque así les permitiría ver fácilmente las variaciones del IPC según el centro donde realizan la compra. A partir de aquí establecieron que su IPC venía definido por la expresión:

$$IPC = \frac{\text{Total compra mes de estudio} - \text{Total compra mes de marzo}}{\text{Total compra mes de marzo}} \cdot 100$$

En el cálculo han tenido en cuenta todos los productos con las mismas cantidades y los diferentes precios el día 15 de cada mes abril y mayo. Su estudio lo han hecho diferenciando el centro comercial y en cada uno de ellos si podían comprar el mismo producto en una de las llamadas marcas blancas. De esta manera los alumnos llegaron a conclusiones sobre la variación del precio al consumo a su escala familiar según el centro donde hacían la compra y si compraban las marcas habituales o las marcas blancas. De este modo llegaron a la conclusión de que la variación de su IPC del mes de mayo en un determinado centro



comercial y considerando las marcas blancas fue de $-1,72\%$ pero en cambio comprando marcas comerciales conocidas la variación era del $-2,5\%$.

- b) Un grupo de alumnos aficionados al tenis se propusieron el estudio del rebote de las pelotas. Eligieron tres tipos diferentes de pelotas, una era para niños y era más blanda y las otras dos eran dos marcas conocidas para jugadores adultos. En su estudio se propusieron además tener en cuenta el tipo de suelo, así diferenciaron si se trataba de tierra batida, cemento, tierra normal. Para cada tipo de suelo dejaban caer cada tipo de pelota desde 100, 110, 120, 130 y 140 centímetros y medían la altura que alcanzaba la pelota en el primer rebote. Para tomar estas medidas dispusieron de un papel grande de $1,2 \times 2$ metros graduado (de uso en farmacias) y grababan con una cámara de video enfocando perpendicularmente al plano del papel. Observando después la grabación reconocían el punto de máxima altura alcanzado por la pelota, lo trasladaban sobre el papel y lo medían. De esta manera pudieron confeccionar tablas y gráficas para poder extraer sus conclusiones (tabla 2).

TABLA 2 *Resultados proyecto sobre las pelotas de tenis*

Pelota	Altura	Altura rebote		
		Cemento	Tierra	Tierra batida
1	100	54	30	32
	110	60	38	41
	120	65	45,5	53
	130	67	48	62
	140	69	52	68,5

En este caso no llegaron a expresar estas relaciones mediante una expresión algebraica ya que eran de primero de ESO y no tenían estos conocimientos.

- c) Alumnos de primero de ESO se interesaron por el peso de las mochilas escolares. A partir de su horario pesaron los libros y libretas necesarios para cada día de la semana. A continuación buscaron la media aritmética para establecer el peso medio diario que carga un alumno de primero que fue de 10,6 kg. Después calcularon cuantos días vienen al instituto a lo largo de todo el año que resultó ser 185. Esto les permitió calcular el peso que cargan en todo el año. A continuación se plantearon cual es la posición de los médicos frente a esta cuestión. Encontraron una información de una fundación especializada en problemas de espalda que de acuerdo con un estudio que habían realizado recomendaban que los niños no cargasen a sus espaldas un peso superior al 10% del suyo. Esto les llevo a la necesidad de calcular el peso medio de un alumno de primero. Hicieron un estudio del peso de sus compañeros de clase lo que les permitió establecer que el peso medio era de 39 kg. De acuerdo con las recomendaciones médicas tendrían que llevar mochilas de 3,9 kg y en cambio las llevan de 10,6 kg. Estas discrepancia la expresan de diferentes maneras, anuales, con gráficas etc. Seguidamente se interesan por lo que tendría que pesar un alumno de primero para llevar los 10,6 kg que se puede ver que tendría que ser 106 kg. Completan su estudio con una serie de recomendaciones para evitar cargar con los 10,6 kg diarios como tener taquillas en el instituto, trabajar con folios y no con libretas etc.

1.3 La competencia modelizadora

El término competencia lo entendemos como se define en el proyecto DeSeCo (Definition and Selection of Competencies) (OCDE, 2002). Por competencia matemática tomamos en conside-

ración la definición de Niss (2004). Sobre la competencia modelizadora existe un debate entre competencias y habilidades. Nosotros consideramos la definición de Blomhoj y Jensen (2003) en el que definen que la competencia modelizadora como el ser capaz de recorrer todos los pasos del proceso de modelización con autonomía y profundidad en un contexto concreto. De acuerdo con Maaß (2006) consideramos que la competencia modelizadora va más allá que el recorrer todos los pasos del proceso de modelización, es necesario además desarrollar la metacognición que consiste en la reflexión sobre su propio pensamiento (Sjuts, 2003). Aunque estamos de acuerdo con este planteamiento en nuestra investigación nos hemos centrado únicamente en el proceso de modelización que han seguido los alumnos y que nosotros hemos observado a partir del dossier escrito que presentan. Es decir, nosotros observamos qué acciones de la ruta modelizadora han realizado y en qué orden lo han hecho. En Sol (2009) se pueden ver indicadores de nivel competencial alcanzado para cada una de las acciones.

2 Metodología

El comportamiento modelizador de los alumnos de 12 a 16 años implicados en el estudio fue analizado observando sus informes escritos (como propone Haines & Houston, 2001). La metodología utilizada ha sido cualitativa etnográfica de estudio de caso que nos proporciona una comprensión global del comportamiento de los alumnos (Marshall & Roosman, 1989). En efecto, creemos que los textos analizados permiten una visión holística del proceso de modelización llevado a cabo, de acuerdo con la nomenclatura de Blomhoj & Jensen (2003). La investigación se ha llevado a cabo en un instituto de enseñanza secundaria de Vilassar de Mar (Barcelona). La población que ha participado en el estudio ha estado formada por el grupo de estudio (GE) formado por 6 alumnos de 2º de ESO, caracterizados por tener dificultades en el aprendizaje de las matemáticas, y dos grupos de contraste, llamados GC2 y GC4, formados por 8 alumnos de 2º de ESO, y 11 de cuarto de ESO respectivamente, caracterizados por haber realizado buenos proyectos que sirvieran de referencia. Para la interpretación de los resultados de los análisis se han comparado los que se han obtenido del grupo de estudio con los que se han obtenido de los dos grupos de contraste.

Los proyectos los han realizado en grupos de 2 ó 3 alumnos seleccionados voluntariamente y han trabajado durante un periodo de unas 6 semanas. A continuación describimos el proceso de realización de los proyectos.

Proceso de elaboración de los PMR

1. Los alumnos eligen un contexto de su interés y sobre él se plantean alguna cuestión que orientará su trabajo. Esto lo hacen fuera de la clase pero luego se sigue en el aula una lluvia de ideas (*brainstorming*) en la que participan todos los alumnos de la clase. De esta manera se seleccionan una serie de cuestiones que les interesan para cada grupo y los alumnos toman sus primeras decisiones. Estas cuestiones no tienen porqué ser matemáticas son más bien cuestiones de interés sobre el tema que han elegido. Por ejemplo unos alumnos del grupo de estudio (GE) hicieron un proyecto sobre pasteles y culturas en el que se planteaban comparar los precios e ingredientes de pasteles de diferentes culturas.

Una vez los alumnos han encontrado la información que necesitan pueden empezar a discutir la relevancia y alcance de estas cuestiones en el contexto del problema. En el ejemplo pidieron a diferentes compañeros de curso procedentes de otros países que les

facilitasen algunas recetas de repostería tradicional de sus lugares de procedencia. De esta manera reunieron recetas italianas, argentinas, árabes, inglesas y ecuatorianas.

2. En la siguiente etapa empezamos a guiar el proceso de construcción/deconstrucción (Gellert & Jablonka, 2006) del modelo real. Para ello los alumnos necesitan comprender las posibilidades de describir la situación en términos matemáticos y simplificarla. Deben seleccionar los objetos que son relevantes para el objetivo propuesto y descubrir las relaciones entre ellos. En el ejemplo que consideramos sobre pasteles y culturas, las variables relevantes eran ingredientes, cantidades y precios.
3. A continuación los alumnos deben expresar la cuestión o problema en términos matemáticos. Deben decidir que datos necesitan y pensar como obtenerlos. Por ejemplo, en algunos casos deberán medir directamente, en otros buscar información, en otros realizar cálculos. Ellos deben reconocer los objetos reales que están implicados, escoger las variables, describir las relaciones entre objetos reales y objetos matemáticos, explicar la relación de dependencia entre las variables y explicar los valores que han fijado. En el ejemplo, los alumnos tuvieron que equiparar las cantidades de las recetas para un mismo número de personas, también tuvieron que convertir las diferentes unidades de medida (taza, cucharadita...) a las del sistema internacional (gramos).
4. Seguidamente los alumnos resuelven la situación que se han planteado mediante un proceso de matematización en el que los alumnos hacen uso de modelos matemáticos conocidos o elaborados expresamente para la situación por ellos mismos. En el ejemplo los alumnos utilizaron básicamente la proporcionalidad.
5. El siguiente paso es responder a la pregunta principal de las que se han planteado al principio. En el ejemplo que consideramos responden completamente a las cuestiones que se habían planteado aportando argumentos matemáticos.
6. En las orientaciones que se les dan para preparar el informe escrito de su trabajo se les sugiere que es bueno justificar las soluciones matemáticas que han encontrado en el contexto real en el que han situado su proyecto.
7. Finalmente los alumnos comunicaron sus resultados a través de un informe escrito y una presentación oral al conjunto de la clase con la ayuda informática.

Análisis de las rutas modelizadoras

Las rutas modelizadoras se identificaron sobre el informe escrito de los alumnos. En concreto los enunciados y las acciones contenidas en este texto matemático que formaban parte del proceso de modelización fueron identificados y codificados y la decisión final se tomó por consenso en el equipo de investigación (Blommaert & Bulcaen, 2000).

Así por ejemplo, en el proyecto realizado por otros alumnos del grupo de estudio (GE) "El bar del instituto" observamos que se plantean cómo varía el número de personas que se pueden sentar en una mesa de igual tamaño en función de la forma, esto es, si la mesa es redonda o rectangular. Nuestra interpretación es que los alumnos plantean una cuestión matemática, correspondiente a la acción 10 de la tabla 1. En otro punto los alumnos escriben *decidimos usar mesas redondas ya que de esta manera aprovecharíamos el espacio que se pierde en las esquinas de las mesas rectangulares*. Aquí consideramos que los alumnos están concretando el problema que se plantean, lo que corresponde a la acción 2. De esta manera se ha realizado el análisis del texto.

Observamos que el mismo escrito incluye elementos del lenguaje simbólico y gráfico como evidencia de varias acciones. Por ejemplo en el caso del proyecto "El bar del instituto" nuestra interpretación es que enuncian una relación entre las variables implicadas haciendo uso de lenguaje matemático por lo que reconocemos la acción 8 de la tabla 1. Además, añade información gráfica que subministra explicaciones entre objetos reales (la mesa y el espacio requerido a su alrededor para las personas que se sientan) y objetos matemáticos tales como el radio y el diámetro (de la mesa y del espacio para sentarse) y nosotros interpretamos que esto es una evidencia de la acción 6. Finalmente, en la última línea de su informe, muestran la interpretación que hacen de la solución encontrada diciendo que el diseño elegido les permite poner 4 filas de mesas, pero se dan cuenta de que por solo 15 cm más podrían poner una quinta fila. Entonces dicen que reduciendo a cada lado de la mesa 1.5 cm no afectaría de manera apreciable en el conjunto del diseño y así mejorarían su solución inicial. Esta explicación nos sugiere que los alumnos han reconocido el significado y alcance de las soluciones en la situación real. En nuestra visión reconocemos así la presencia de la acción 13 de la tabla 1 que no sería muy frecuente observarla en alumnos de 12 a 13 años. Continuando con este proceso podemos representar la secuencia de acciones observadas en cada informe escrito por medio de una matriz o grafo, que nos permite comparar visualmente diferentes rutas modelizadoras. En el ejemplo de "El bar del instituto" podemos representar la ruta seguida por los alumnos en términos de un vector anotando cada una de las acciones observadas: 10, 1,2,3 12,9,3, 4, 12, 4, 4,8,6,11,4,8,6,11,13. De esta manera además de ver qué acciones han realizado también se pueden detectar aquellas que no han realizado que también tiene interés conocerlo para incidir en su aprendizaje.

3 Resultados

Los resultados más destacables de nuestra investigación referidos al proceso de modelización son los siguientes. En primer lugar se ha podido comprobar que los alumnos que tenían dificultades en el aprendizaje de las matemáticas siguen procesos de modelización más sencillos que los de los grupos de contraste. Son más sencillos porque la cantidad de procesos diferentes que emplean es menor que la de los otros alumnos y el número de veces que los hacen servir también es inferior. También se ha observado como los alumnos de cursos superiores realizan, en general, procesos de modelización más complejos, como se puede ver en la tabla 3.

TABLA 3 *Procesos de modelización*

Título	curso	Ruta de modelización	Acciones ignoradas
El bar del instituto	2	10, 1, 2, 3, 12, 9, 3, 4, 12, 4, 4, 8, 6, 11, 4, 8, 6, 11, 13	5, 7, 12, 14,15
La Torre de'n Nadal	3	2,5,10,5,11,12,10,11,8,12,13,2,3,10, 11,8,12,13,2,9,11,12,13,1,10,4, 6,11,12,13	7, 14, 15

Pero a pesar de estas diferencias se puede reconocer el itinerario que caracteriza a la modelización que es ir de la realidad al mundo de las matemáticas y volver al mundo real. Hay algunos procesos que los hacen con muchas dificultades como son la explicitación de relaciones entre objetos reales y matemáticos, formular hipótesis o validar el modelo ya sea todo o en parte. No se muestran muy conscientes de estar trabajando en un proceso amplio como es el de la modelización. Más bien hacen el proyecto como un conjunto de problemas que deben

resolverse uno tras otro. Se encuentra a faltar una visión de conjunto del problema y un sentido de direccionalidad, es decir, tener claro qué acciones han realizado y hacia donde se deben orientar las siguientes para alcanzar los objetivos que se han planteado.

4 Conclusiones

En primer lugar consideramos que la ruta hipotética de modelización implica 16 acciones que nos permiten, usándola como una herramienta metodológica, identificar el proceso que los alumnos siguen y reconocer sus niveles de competencia modelizadora. Esto nos puede ayudar a encontrar maneras de mejorar la interacción con los alumnos, mejorar los resultados de los proyectos y suministrar claves para nuevas maneras de evaluar. Nos permite reconocer diferencias de modelización entre alumnos de diferentes edades. También nos permite reconocer las acciones que presentan más dificultades para los alumnos y las que menos. Así por ejemplo, se ha observado que en general tienen dificultades para ser conscientes del problema general que se plantean, no son conscientes del proceso de modelización en el que se encuentran y lo ven más como un conjunto de pequeños problemas. Les cuesta reconocer y usar las variables que intervienen en la situación problemática real. Tienen muchas dificultades para comunicar la relevancia social del problema que se plantean, controlar las diferentes relaciones matemáticas que se establecen y validar el modelo, aunque hemos observado que hacen comprobaciones de resultados parciales. Esto puede ser debido en parte a que no se ha trabajado suficientemente las aplicaciones de las matemáticas a situaciones reales. También puede ser que no estén acostumbrados a plantearse problemas abiertos donde ellos han de tomar decisiones sobre lo que se plantean, sobre el proceso y las soluciones.

Creemos que hacen falta más investigaciones para saber como hacer más conscientes a los alumnos del proceso de modelización, a superar las dificultades más acusadas que hemos detectado y también de forma especial estudiar la intervención del profesorado para mejorar el conjunto del proceso.

Referencias

- [1] Alsina, C. (2001) Mathematical modelling by means of functional equations: The missing link in the learning of functions. A J.F. Matos, W. Blum, K. Houston, S.P. Carreira (eds.) *Modelling and mathematics education: ICTMA 9 Applications in Science and technology*. (pp300-310) Chichester: Horwood Publishing Limited.
- [2] Alsina, C. (2007) Less chalk, less words, less symbols...more objects, more context, more actions. A W. Blum, P.L. Galbraith, H-W. HennyM. Niss *Modelling and applications in Mathematics Education. The 14th ICMI Study*. (pp 35-44). Springer.
- [3] Blommaert, J.& Bulcaen, C (2000). Critical discourse analysis. *Annual Review of Anthropology*, 29, 447-466.
- [4] Blomhøj, M. & Jensen, T. H. (2003) Developing mathematical modelling competence: Conceptual clarification and educational planning. *Teaching Mathematics and its Applications*, 22, 123-139.
- [5] Blomhøj, M. & Kjeldsen (2006) Teaching mathematical modelling through project work - experiences from an in-service course for upper secondary teachers. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik* 38, 163-177.
- [6] Blum, W. & Niss, M. (1991) Applied Mathematical Problem Solving, Modelling, Applications, and Links to other subjects - State, trends and Issues in Mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*. 22, 37-68.
- [7] Blum, W. & Leiß, D. (2007a). How do students and teachers deal with modelling problems? In C. Haines et al. (Eds), *Mathematical Modelling. Education, Engineering and Economics*. Chichester: Horwood, 222-231.
- [8] Borromeo, R. (2006). Theoretical and empirical differentiations of phases in the modelling process. A *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 38 (2) 86-95.
- [9] Borromeo, R. (2007) Modelling problems from a cognitive perspective. In C. Haines, P. Galbraith, W. Blum and S.Khan (eds) *Mathematical Modelling (ICTMA12): Education, Engineering and Economics*. Chichester, Horwood Publishing, 260-270.
- [10] Burkhardt, H. & Pollak (2006). Modelling in Mathematics Classrooms: reflections on past developments and the future. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik* 38, 178-195.
- [11] Gellert, U, Jablonka, E (eds) (2006) *Mathematisation and demathematisation*. London. Sense.

- [12] Giménez, J., Sol, M. (2005). Students' difficulties when starting with mathematical projects. In: Eds L Santos, AP Canavarró, J Brocardo (2005). *Paths and crossroads*. Lisboa, APM, 217-230.
- [13] Gómez, J. (1998) *Contribució a l'estudi dels processos de modelització a l'ensenyament/aprenentatge de les matemàtiques a nivell universitari*. UAB. Tesis doctoral.
- [14] Gómez, J. (2002) *De la enseñanza al aprendizaje de las matemáticas*. Barcelona. Paidós.
- [15] Grup Vilatzara (2001) Experiencias sobre proyectos e investigaciones matemáticas en secundaria. En *Numeros* 46, La Laguna 29-47.
- [16] Haines, C, Houston, K (2001) Assessing students project work.
<http://www.springerlink.com/content/hn7120/?p=d7ff20538c5744afa395fadf95c83ea7&pi=0>
 Derek Holton (Ed.), *The Teaching and Learning of Mathematics at University Level: An ICMI Study*, 431-442. Kluwer Academic Publishers. Printed in the Netherlands.
- [17] Haines, C. Crouch, R. (2007) *Remarks on a modelling cycle and interpretation of behaviours*. Paper presented at ICTMA-13 Indiana (USA).
<http://www.springer.com/education/mathematics+education/book/978-1-4419-0560-4>
- [18] Maaß, K. (2007) *Modelling tasks for low achieving students. First results of an empirical study*. In D. Pitta-Pantazi & G. Philippou (eds.). CERME 5 Proceedings of the Fifth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education. (2120-2129) Larnaca. University of Cyprus.
- [19] Marshall, R. (1989) *Designing Qualitative Research*. CA: Sage
- [20] Mason, J. Johnston-Wilder, S. (2004) *Fundamental Constructs in Mathematics Education*. Routledge Falmer/Open University.
- [21] Montero, (2008) *Hacia una metodología docente basada en el aprendizaje activo del estudiante presencial de ingeniería, compatible con las exigencias del E.E.E.S*. Tesis doctoral.
- [22] Sol, M. (1998) Proyectos matemáticos en la ESO: Como los evaluamos. *UNO Revista de didáctica de las matemáticas*, 17, 105-114.
- [23] Sol, M. & Giménez, J. (2004) Proyectos matemáticos realistas y resolución de problemas. En J. Giménez, J.P. Ponte, L. Santos (eds) *La actividad matemática en el aula*. Barcelona Graó. 35-47.
- [24] Sol, M. (2009) *Análisis de les competències i habilitats en el treball de projectes matemàtics amb alumnes de 12-16 anys en una aula heterogènia*. Tesis doctoral. UB. Barcelona.
- [25] Sol, M. Giménez, J. Rosich, N. (2007): Competencias y proyectos matemáticos realistas en la ESO. *UNO Revista de didáctica de las matemáticas*, nº 46. 43-67.
- [26] Sol, M. Giménez, J. Rosich, N. (2009) Analyzing modelling as a process: A teaching experiment with immigrant students. H. Labelle, D. Gauthier (Eds.), *Quaderni di Ricerca in Didattica*, Supplemento n. 2, 2009.
- [27] Treffers, A. (1987). *Three dimensions: a model of goal and theory descriptions in mathematics instruction & the Wiskobas Project*. Dordrecht: Kluwer.

- [28] Voskoglou, M. (2007) A stochastic model for the modelling process. In C. Haines, P. Galbraith, W. Blum and S.Khan (eds) *Mathematical Modelling (ICTMA12): Education, Engineering and Economics*. Chichester, Horwood Publishing, 149-157.

