



RECONSTRUCCIÓN DE ALTA RESOLUCIÓN EN TOMOGRAFÍA AXIAL COMPUTERIZADA

*Cálculo de una matriz del sistema polar
por el método de Joseph*

Proyecto Final de Carrera

Presentado por: Amadeo Iborra Carreres

Dirigido por: Dra. María José Rodríguez Álvarez
Dr. Antonio Soriano Asensi

Índice general

1. Introducción	5
1.1. Presentación del problema	5
1.2. Objetivo del proyecto	7
1.3. Descripción de la solución	10
1.4. Descripción de la estructura de la memoria	11
2. El método de Joseph	13
2.1. Planteamiento teórico	13
2.2. Implementación	14
3. Antecedentes, metodología y materiales empleados	17
3.1. Métodos de reconstrucción	17
3.1.1. Hasta el presente	17
3.1.2. Investigación actual	18
3.2. Resolución del sistema de ecuaciones mediante el MLEM . . .	19
3.3. Tratamiento de la matriz del sistema	20
3.3.1. Mallado	20
3.3.2. Cálculo de los elementos de la matriz del sistema . . .	20
4. Resultados	23
4.1. Complejidad temporal	23
4.1.1. Influencia en el cálculo de la matriz A	23
4.1.2. Influencia en las iteraciones del MLEM	25
4.2. Calidad de la imagen reconstruida	25
5. Conclusiones	33
5.1. Líneas futuras	34

Capítulo 1

Introducción

1.1. Presentación del problema

Lo que pretendemos con la tomografía axial computerizada (TAC) es obtener una imagen en tres dimensiones del interior de un objeto sin destruirlo. Se trata de obtener una imagen en tres dimensiones a partir de múltiples proyecciones en dos dimensiones.

La reconstrucción de imágenes mediante TAC puede abordarse mediante métodos algebraicos. Para ello se plantea el sistema lineal de ecuaciones que describe el proceso de adquisición. La resolución de dicho sistema de ecuaciones es el proceso de reconstrucción.

$$AX = B \tag{1.1}$$

Donde X representa la imagen a reconstruir, B representa las mediciones obtenidas del TAC y A representa la matriz del sistema: la geometría del escáner. A recoge las contribuciones de cada píxel a cada rayo en cada rotación.

La imagen resultante representa el área que el escáner ha barrido en todas sus rotaciones. Este área se conoce como *field of view* (FOV) y se subdivide en píxeles (conocidos como vóxeles). Considerando que cada uno de los píxeles en que se subdivide el FOV es una de las incógnitas a resolver mediante el sistema de ecuaciones 1.1, cada ecuación representa la medida de un píxel del detector en cada una de las proyecciones. En función de la resolución del detector empleado, el número de proyecciones y la resolución deseada de la imagen reconstruida, el sistema de ecuaciones descrito en 1.1 puede alcanzar tamaños considerables. Así, en el caso de una adquisición de N rotaciones con un detector con S píxeles, con el que se pretende reconstruir un FOV subdividido en $n \times n$ píxeles, tenemos $n \times n$ incógnitas y $N \times S$

ecuaciones. Este sistema es un sistema disperso y muy grande (128x128 píxeles y 300 proyecciones son datos habituales de este tipo de imágenes). Bajo demanda de alta resolución alcanza tamaños del orden de varios GB. La matriz del sistema plantea, pues, el problema principal al tratarse de una matriz que alcanza tamaños muy grandes.

De la forma de los píxeles en que se subdivide el FOV depende el aprovechamiento de las simetrías que presenta el funcionamiento natural de TAC [1]. Así, un mallado de píxeles cuadrados, aprovecha tan solo cuatro simetrías, mientras que un mallado polar, permite aprovechar tantas simetrías como posiciones de rotación tiene el escáner, como muestra la figura 1.1.

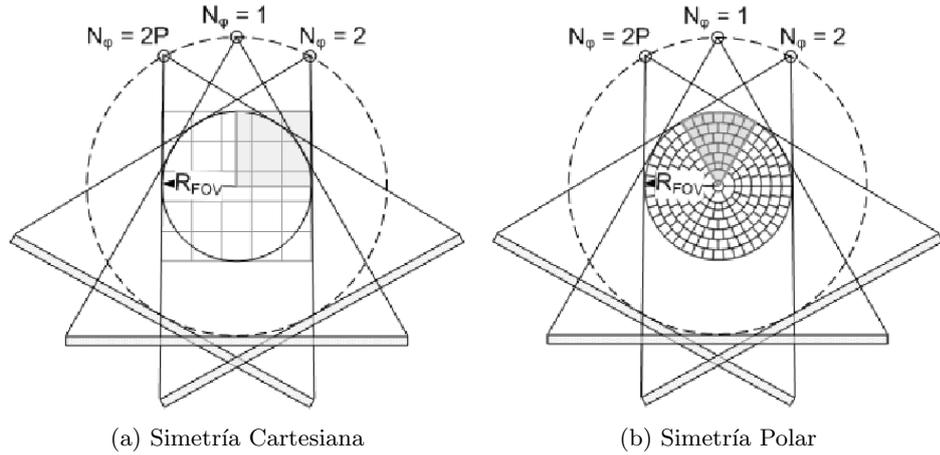


Figura 1.1: La zona sombreada representa la menor área que resulta simétrica al resto en un TAC de dos dimensiones y N rotaciones.

Con este diseño polar del pixelado del FOV la matriz del sistema se reduce de forma que sólo es necesario calcular un trozo de una parte de la matriz (A_1) para tener la matriz completa. El resto se obtiene por rotación. Si se expresan las simetrías del sistema de forma matricial, el vector de proyecciones se puede descomponer en un conjunto de N proyecciones (B_i), donde cada B_i actúa sobre todos los píxeles del FOV. A su vez, A se puede descomponer en N submatrices A_i , que afectan a B_i componentes distintas y cada A_i se puede obtener a partir de rotar la submatriz A_1 .

En consecuencia, A se puede expresar como una matriz de bloques en la que el primer bloque (A_1) corresponde al bloque calculado y el resto son

rotaciones de este, es decir,

$$A = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ \vdots \\ A_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_1 R \\ A_1 R^2 \\ \vdots \\ A_1 R^{N-1} \end{pmatrix}$$

donde las diferentes potencias R^i representan la permutación o rotación de los píxeles necesaria para obtener la submatriz deseada a partir de la matriz A_1 , obteniendo al final la matriz completa.

Una vez elegida la estructura de A se deben hallar los valores de cada uno de los elementos de la matriz, que representan la contribución de cada píxel del FOV a cada uno de los rayos del escáner en cada rotación. Para, a continuación, resolver el sistema de ecuaciones 1.1 y obtener la imagen del objeto bajo estudio (X).

1.2. Objetivo del proyecto

Este proyecto se desarrolla en el marco de la investigación que, el grupo de Matemáticas Multidisciplinares para la Industria, la Ciencia y los Servicios Públicos (MATMICS) en el Departamento de Matemática Aplicada, está llevando a cabo para el desarrollo de varios métodos de reconstrucción de imágenes para un TAC de alta resolución que se está desarrollando íntegramente en la Comunidad Valenciana.

Nuestro grupo de trabajo tiene dos objetivos complementarios para resolver este problema:

- Obtener una matriz que describa el sistema que pretendemos estudiar, de forma que esta matriz se pueda almacenar fácilmente en la memoria RAM de un ordenador y a su vez que se pueda acceder a los elementos de la matriz de forma sencilla para resolver el sistema de ecuaciones 1.1.
- Resolver el sistema de ecuaciones 1.1 con calidad y rapidez.

Este trabajo desarrolla el primer objetivo de nuestro grupo (construir la matriz de sistema). Se propone el desarrollo del cálculo de los valores de la matriz del sistema para el cálculo de integrales de línea por el método de Joseph [2] (ver figura 1.2).

Este método debe calcular la intersección entre los rayos y un mallado polar compuesto por sectores como se muestra en la figura 1.3, i.e., el método de Joseph debe resolver el problema ilustrado en la figura 1.4.

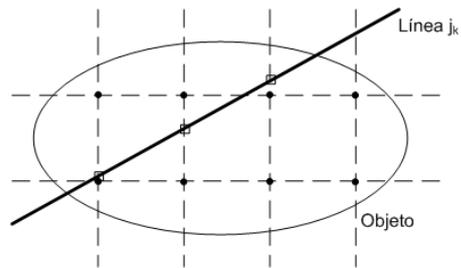


Figura 1.2: Representación gráfica del cálculo de integrales de línea por el método de Joseph en un mallado cartesiano tradicional.

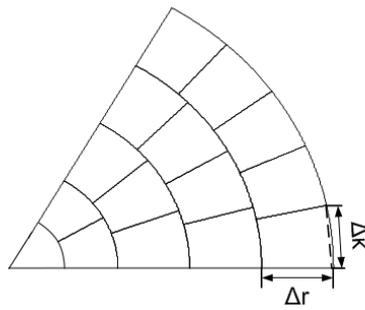


Figura 1.3: Mallado por sectores polares para la matriz del sistema. La imagen representa un sector del FOV.

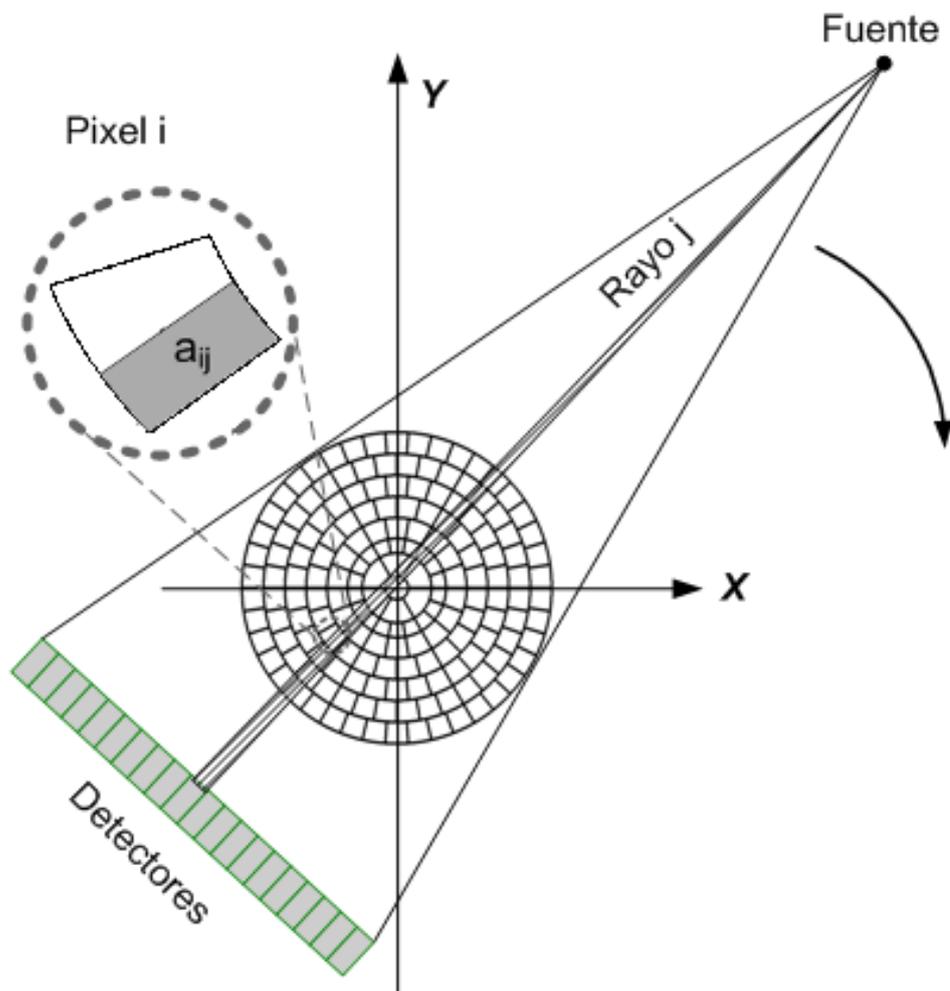


Figura 1.4: Representación gráfica del cálculo a realizar. Cada rayo k cubre una porción de área a_{ij} del área total del píxel ij .

Nuestro grupo ha desarrollado un método alternativo para el cálculo de las intersecciones de los diferentes rayos con los píxeles sectoriales polares (se trata de una versión mejorada del cálculo de área por círculos presentada en [1, 3]). No obstante, el método de Joseph ha sido ampliamente usado para resolver este tipo de problemas [4, 5, 6]. Resulta capital una implementación de este método para dicho tipo de mallado a fin de comparar resultados (en función de tiempo y calidad) para la elección de un método en concreto o incluso la proposición de ambos métodos, a usar cada uno de ellos según las condiciones lo requieran.

Este trabajo aborda principalmente el primer objetivo, obtener la matriz del sistema. También se ha empezado a sentar las bases del segundo objetivo, resolver el sistema de ecuaciones 1.1. Pues la forma de almacenar los elementos de la matriz es clave a la hora de plantearnos la resolución total del problema, teniendo en cuenta las dimensiones del sistema que se pretende resolver. Ambos problemas están íntimamente ligados, pues disponer de la solución del problema permite evaluar la bondad de la matriz del sistema empleada para describir el TAC.

Se ha resuelto el sistema 1.1 utilizando el algoritmo *Maximum Likelihood Expectation Maximization* (MLEM) [7, 8]. Es un método iterativo ampliamente utilizado para la reconstrucción de imágenes tomográficas [9, 10, 11, 12, 13, 14]. Que hemos adaptado a las particularidades de nuestro mallado polar.

Las matrices obtenidas en este trabajo también se están utilizando para resolver el sistema 1.1 con métodos directos como la descomposición QR utilizando rotaciones de Givens, pero de esto sólo hablaremos al final del presente trabajo cuando comentemos los trabajos futuros, de los que este proyecto es solo un primer paso.

Para abordar el problema de la resolución del sistema de ecuaciones 1.1 hemos hecho un estudio previo [3] con el fin de determinar qué formas de construir la matriz del sistema ofrecen una mejora en la calidad de la imagen reconstruida con respecto al nivel de reconstrucción actual (resolución, contraste, tolerancia al ruido, etc).

1.3. Descripción de la solución

Para cumplir estos objetivos ha sido necesario estudiar los conceptos relacionados con el funcionamiento básico de un TAC y de los diferentes tipos de mallado del FOV. En concreto, por sus particularidades, ha sido necesario profundizar en el mallado polar para la construcción de una matriz que describa la geometría del TAC y a su vez resuma requisitos como el de fácil almacenaje. Y finalmente se ha abordado el estudio y mejora de los algo-

ritmos necesarios para resolver el sistema de ecuaciones 1.1, desarrollando además el método de Joseph específicamente para nuestro mallado polar a fin de poder comparar resultados.

El método de Joseph se implementa con el supuesto de un mallado sectorial (ver figura 1.3). Esta implementación debe interactuar directamente con sus estructuras y el método de Joseph está originalmente pensado para implementarse sobre un mallado cartesiano. Nosotros lo hemos adaptado al mallado polar como se explica en el capítulo dedicado al método de Joseph.

El método de Joseph propone dos formas para el cálculo de las integrales de línea según éstas se acercan más al eje X o al eje Y . Puesto que el método de Joseph se aplica a un mallado sectorial, que está sujeto a una simetría por cada rotación, solamente es necesario realizar los cálculos de la primera rotación (submatriz A_1) y a partir de este punto obtener el resto de la matriz. De este modo, dado que la primera rotación se efectúa cercana al eje X nos permite usar sólo una de las dos formas propiciando una implementación más simple y clara que facilita enormemente su mantenimiento.

1.4. Descripción de la estructura de la memoria

Esta memoria consta de este mismo capítulo, *Introducción*, donde se incluyen los conceptos básicos y se dibuja el marco del problema de la reconstrucción de imágenes mediante TAC además del planteamiento del objetivo del proyecto junto con una breve descripción de la solución. Esta memoria está formada por cuatro capítulos más. A saber:

- *El método de Joseph*: donde se explica con más profundidad en qué consiste este método desde un punto de vista teórico y práctico para construir la matriz del sistema.
- *Antecedentes, metodología y materiales empleados*: donde se recoge las técnicas y métodos principales que han llevado a sentar las bases de este proyecto, considerando métodos de reconstrucción y tratamientos de la matriz del sistema.
- *Resultados*: donde se realiza un análisis de los resultados obtenidos por el método de Joseph frente al método ya implementado por nuestro grupo desde los puntos de vista de eficiencia temporal y calidad de las imágenes obtenidas.
- *Conclusiones*: donde se recoge las reflexiones fruto de los análisis realizados e ilustrados en el capítulo anterior y propuestas de futuros trabajos en el grupo.

Capítulo 2

El método de Joseph

P. Joseph plantea su método [2] en 1982 como solución a un problema común de los algoritmos de reconstrucción: aumentar la precisión con la que se pueden calcular las integrales de línea a través de una malla finita de píxeles. Aumentando esta precisión, los algoritmos iterativos pueden realizar mejores comparaciones entre las proyecciones que realizan de la imagen en reconstrucción y las medidas del escáner.

2.1. Planteamiento teórico

El método consiste en la evaluación de la anchura de la intersección de cada rayo con cada píxel $L_{n,n'}$ multiplicada por el valor del píxel $P_{n,n'}$.

$$S(K) = \sum_{n,n'} L_{n,n'} P_{n,n'}$$

Cada rayo K se puede expresar como una recta, en función de x o de y

$$y(x) = -\cot(\theta)x + y_0$$

$$x(y) = -\tan(\theta)y + x_0$$

donde θ es el ángulo que forma la recta con el eje Y .

El método propuesto por P. Joseph asume la imagen como una función continua $f(x, y)$ muestreada sobre una malla de puntos, que es la malla de píxeles. En esta malla de píxeles, un píxel dado n, n' tiene un valor

$$P_{n,n'} = f(x_n, y_{n'})$$

siendo $x_n, y_{n'}$ las coordenadas del centro del píxel.

Entonces la integral de línea a resolver es

$$S(K) = \int_{L_K} ds f(x, y) \quad (2.1)$$

$$= \frac{1}{|\sin \theta|} \int f(x, y(x)) dx \quad \text{si } |\sin \theta| \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (2.2)$$

$$= \frac{1}{|\cos \theta|} \int f(x(y), y) dy \quad \text{si } |\cos \theta| \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$$

dependiendo si la recta del rayo K se acerca más al eje X o al eje Y .

En el caso que nos ocupa, puesto que se ha de aplicar este método a una malla que posee un gran número de simetrías, solamente es necesario el cálculo sobre la primera proyección. La apertura del haz de rayos del escáner, el ángulo que forma el rayo más externo respecto al centro del haz, es de 7° . Por lo que en la primera proyección todos los rayos van a tener ángulos entre 80° y 100° . Se cumple $|\sin \theta| \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$ cuando $\theta \geq 45^\circ$, así que todos los rayos de la primera proyección cumplen esta condición. A partir de este punto sólo necesitamos una de las dos opciones, considerando desde ahora que la ecuación 2.1 es directamente igual a la ecuación 2.2 y entonces tenemos que

$$S(K) = \frac{1}{|\sin \theta|} \int f(x, y(x)) dx$$

El autor considera dos términos

$$\begin{aligned} n' &= \lfloor y(x_n) \rfloor \\ \lambda_n &= y(x_n) - n' \end{aligned}$$

y aproxima la integral anterior obteniendo que

$$f(x_n, y(x_n)) \simeq (1 - \lambda_n)P_{n,n'} + \lambda_n P_{n,n'+1}$$

interpolación de dos puntos de la malla, que es una buena aproximación a la función continua $f(x, y)$.

2.2. Implementación

Tenemos un haz cónico de rayos (rectas) que salen del emisor del escáner, que está situado en el punto e (véase figura 2.1). Estos rayos cortan a una recta D (detectores del escáner) de forma que los cortes son equidistantes entre sí y además la distancia entre cada corte es la unidad. Si proyectamos el centro c de un píxel a la recta D usando como centro de proyección el punto e obtenemos un punto c' en la recta.

Si algún rayo corta al píxel centrado en c , entonces c' queda situado entre dos cortes en la recta D . Sea el rayo L_1 el responsable del corte d_1 en la recta D y de la misma manera L_2 de d_2 . Además sea que el primer corte que es superior a c' es d_1 y el primer corte que es inferior a c' es d_2 . Consideremos $\lambda = |c' - d_2|$ y por tanto se cumple que $|d_1 - c'| = \lambda - 1$.

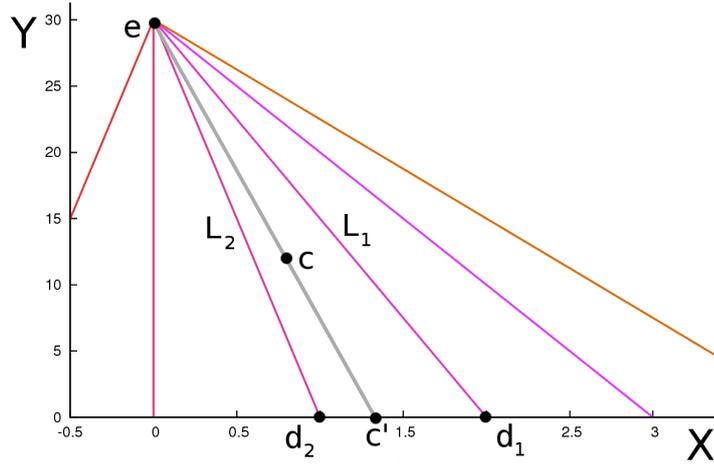


Figura 2.1: Representación del enunciado del planteamiento práctico.

Entonces el píxel centrado en c contribuye a L_1 en un factor directamente proporcional a λ y contribuye a L_2 en un factor directamente proporcional a $(\lambda - 1)$. En la implementación se ha elegido un sistema de referencia adecuado para poder cumplir con el enunciado anterior de forma que sobre la recta D quedan colocados los detectores y esta recta queda sobre el eje X , en el punto e el foco emisor de rayos queda sobre el eje Y y los centros de los sectores polares quedan dispuestos en el FOV que está entre D y e .

De esta forma, recorriendo todos los píxeles podemos calcular las contribuciones de cada uno de éstos a cada rayo en una rotación dada. Nótese que esta contribución es diferente para cada rotación del emisor de rayos, pero puesto que solamente es necesario el cálculo de una sección de la matriz del sistema (A_1), este cálculo se efectúa con extrema rapidez.

Capítulo 3

Antecedentes, metodología y materiales empleados

Durante este capítulo revisaremos el trabajo, técnicas y algoritmos que han servido de base para la elección de algunas de las líneas de investigación en las que ha trabajado nuestro grupo y las cuales han hecho posible la realización de este proyecto.

3.1. Métodos de reconstrucción

3.1.1. Hasta el presente

Durante la primera etapa de la implantación del TAC se resolvió el problema de la reconstrucción mediante métodos directos. Estos métodos contemplan el sistema de ecuaciones 1.1 y lo resuelven, bien invirtiendo la matriz del sistema o descomponiéndola en una matriz triangular y otra con buenas propiedades y usando sustitución regresiva.

El principal problema de los métodos directos es el gran tamaño que alcanza la matriz del sistema bajo demanda de resoluciones aceptables. Este hecho los hace inabordables en la práctica incluso con el crecimiento de la potencia de las máquinas actuales.

Estos primeros métodos directos dieron paso a métodos iterativos y analíticos. Los métodos iterativos usan la matriz del sistema (A) y las mediciones del escáner (B) para converger a una imagen (X) que da solución al problema. Estos métodos iterativos se basan en una función de minimización (cada método propone una diferente) y resuelven el problema como un problema de optimización.

Los métodos analíticos se basan en una operación llamada *backprojection* que permite *analizar* de qué píxeles provienen los diferentes valores medidos por el escáner. Este tipo de métodos requieren muchas rotaciones del escáner (del orden de cientos) para evitar el artefacto estrella que ocurre cuando se realizan pocas proyecciones.

Por supuesto se buscan métodos en los que la pérdida de calidad en la imagen sea menor y se establece un compromiso entre la eficiencia (en términos de tiempo hasta la convergencia y uso de espacio) y la calidad del resultado (en términos de la calidad de la imagen, como resolución, contraste, ausencia de artefactos, etc).

3.1.2. Investigación actual

El hecho de que los métodos iterativos sean realizables en la práctica con el fin de conseguir imágenes de calidad aceptable no solo les ha hecho imponerse sobre los métodos directos, si no que ha potenciado la mejora y propuesta de nuevos métodos iterativos que cada vez alcanzan unos resultados mejores. En la actualidad, de entre los métodos analíticos se impone el *Filtered Backprojection* [15] (FBP) y métodos basados en éste, al resultar los que mejor eficiencia y calidad han demostrado en sus resultados.

Las actuales líneas de investigación abiertas en nuestro grupo son las más prometedoras de un amplio espectro de técnicas exploradas por el grupo en los pasados años. Parte de esta exploración ha constituido la tesis doctoral de C. Mora Mora [3], presentada en 2008, los resultados de la cual, nos sirven de base. La exploración del grupo en estos últimos años concluye que el uso de métodos iterativos y matrices del sistema que aprovechen al máximo las simetrías inherentes al escáner resulta el camino más prometedor. Además presta especial atención a un método en concreto: *Maximum Likelihood Expectation Maximization* [7, 8] (MLEM), que pertenece a la familia de métodos iterativos y dentro de ésta a una subfamilia de métodos estadísticos.

Los métodos iterativos estadísticos poseen todas las ventajas de los métodos iterativos y además intentan modelar el ruido mediante funciones estadísticas. Por ejemplo el MLEM modela el ruido como una distribución de Poisson y obtiene muy buenos resultados en cuanto a eficiencia y calidad de la imagen. Este método ha sido implementado por el grupo y es el método para el que se implementa el cálculo de integrales por el método de Joseph, que constituye este proyecto.

3.2. Resolución del sistema de ecuaciones mediante el MLEM

Los métodos iterativos intentan resolver el sistema de ecuaciones 1.1 mediante una serie de estimaciones. Durante una iteración dada k , estos algoritmos proyectan una imagen X^k con la información de A , la geometría del escáner, y la comparan con B , la adquisición del escáner. Calculan una corrección de esta comparación y la aplican a X^k obteniendo X^{k+1} . La diferencia entre cada método iterativo radica en la forma de comparación y de corrección. El proceso iterativo empieza generando una imagen X^0 arbitraria (por ejemplo, una imagen uniforme, inicializada a cero, si el proceso de corrección consiste en una suma, o inicializada a uno, si el proceso de corrección consiste en una multiplicación, como es el caso del MLEM).

El algoritmo MLEM tiene la siguiente forma:

$$Imagen^{k+1} = Imagen^k \times CalculoCorrección \left(\frac{MedidaEscáner}{Proyección(Imagen^k)} \right)$$

El término $Proyección(Imagen^k)$ se calcula mediante $\sum_{j=1}^m a_{ij}x_j^k$ que debería ser igual a b_i . Mientras que el término $MedidaEscáner$ es, de hecho, b_i . Mediante el cociente, el MLEM realiza la comparación de su estimación de los píxeles cruzados por el rayo i con la adquisición del escáner para el rayo i . Por simplicidad, durante el siguiente paso de la explicación nos referiremos a estos coeficientes de comparación como τ_i (un coeficiente por cada rayo i).

La función $CalculoCorrección()$ se calcula mediante $\sum_{i=1}^n \tau_i a_{ij}$. Este proceso es conocido como *backprojection*. El resultado de la *backprojection* debe dividirse por $\sum_{i=1}^n a_{ij}$ de forma que quede normalizado. Este cálculo del factor de corrección se efectúa para cada píxel j de la imagen.

Componiendo los términos de la explicación llegamos a la expresión del algoritmo MLEM:

$$x_j^{k+1} = x_j^k \frac{1}{\sum_{i=1}^n a_{ij}} \sum_{i=1}^n \frac{b_i}{\sum_{j'=1}^m a_{ij'}x_{j'}^k} a_{ij}$$

que se evalúa para cada píxel j de la imagen durante cada iteración k .

3.3. Tratamiento de la matriz del sistema

3.3.1. Mallado

Este proyecto gira en torno a la matriz de sistema, parte fundamental para la reconstrucción de la imagen. La partición que se realice del FOV se verá reflejada en la matriz del sistema. Se han investigado muchos tipos de mallado posibles y en concreto nuestro grupo ha investigado a fondo mallados cuadrados, sectoriales (con radio constante y relación de aspecto constante) y circulares [1, 3].

El mallado cuadrado consiste en dividir el FOV en píxeles cuadrados de igual altura y anchura. Pero añade problemas como el escaso aprovechamiento de las simetrías inherentes en el funcionamiento del TAC. Otro de los inconvenientes es que el área pixelada no se ajusta adecuadamente a la forma del FOV (que es circular) por lo que existe un área que forma parte del pixelado y que no forma parte del FOV en todas las posiciones de rotación del escáner.

En el mallado polar de radio constante el espaciado radial de los píxeles se fija a un tamaño concreto. Si observamos la figura 1.3 Δr permanecería constante y Δk variaría por cada anillo de forma que los píxeles fuesen lo más grandes posible.

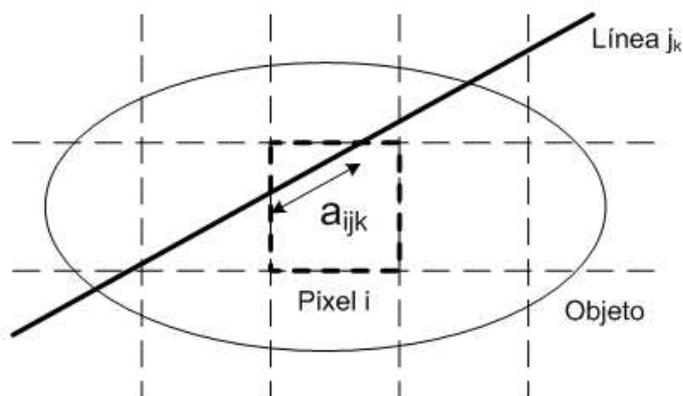
El mallado sectorial de relación de aspecto constante mantiene la relación entre la altura y anchura del sector conforme se va alejando del centro del FOV. Si observamos la figura 1.3 la relación entre Δr y Δk permanece a la unidad. A diferencia de el mallado polar de radio constante, los anillos polares no tienen siempre la misma anchura.

El mallado circular de relación de aspecto constante considera circunferencias inscritas en sectores de relación de aspecto constante y ofrece la ventaja de un cálculo del área de intersección entre el píxel y el rayo un tanto más simple, al requerir tan solo el cálculo del área de un sector del círculo. No obstante un mallado circular no cubre toda el área del FOV. Entre los círculos quedan huecos que constituyen un problema en cuanto a la calidad de la imagen.

3.3.2. Cálculo de los elementos de la matriz del sistema

Se han propuesto formas y métodos para el cálculo de los valores de la matriz del sistema que representan las intersecciones entre los píxeles del FOV y los rayos en cada rotación del escáner. En concreto, nuestro grupo ha investigado a fondo entre otros el método de Siddon [16] (véase figura 3.1), el método de Joseph (véase figura 3.2) y el método de los cubos [17, 18, 3]

(véase figura 3.3). De los cuales, los resultados más prometedores se han obtenido mediante el uso del método de Joseph. Por ello, resulta interesante adaptar el método de Joseph para el cálculo de las intersecciones de los rayos en los píxeles de un mallado sectorial de relación de aspecto constante.



$$b_j = \sum_{k=1..M} \sum_{i=1..N} a_{ijk}$$

Figura 3.1: Representación gráfica del cálculo de integrales de línea por el método de Siddon en un mallado cartesiano tradicional.

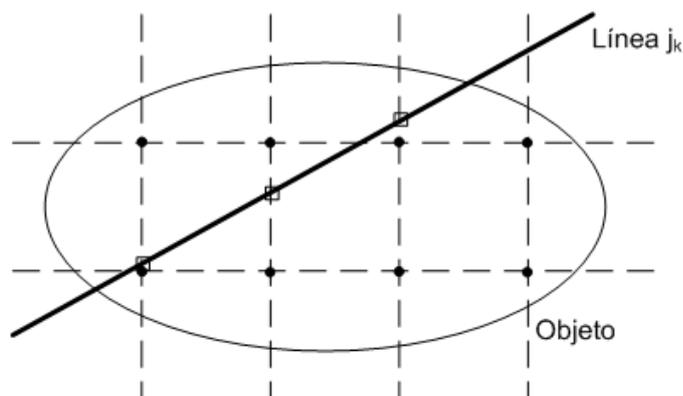
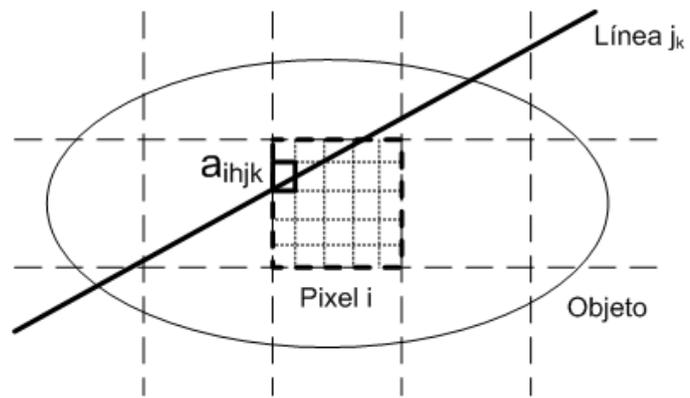


Figura 3.2: Representación gráfica del cálculo de integrales de línea por el método de Joseph en un mallado cartesiano tradicional.



$$b_j = \sum_{k=1..M} \sum_{i=1..N} \sum_{h=1..H} a_{ihjk}$$

Figura 3.3: Representación gráfica del cálculo de integrales de línea por el método de cubos en un mallado cartesiano tradicional.

Capítulo 4

Resultados

Resulta de especial interés comparar el método de Joseph contra el método ya implementado por el grupo para el cálculo de las intersecciones de los rayos con los sectores polares, como ya hemos comentado anteriormente. Esta comparación se realiza en términos de eficiencia temporal y calidad de la imagen obtenida. Tras la implementación del método de Joseph se comprueba que éste como el método ya implementado por el grupo anteriormente, tienen una complejidad espacial constante ($O(1)$) lo cual resulta ideal para la tarea en cuestión y deja la eficiencia espacial fuera de discusión.

4.1. Complejidad temporal

Con el fin de determinar si existe alguna diferencia significativa entre el tiempo de generación de la matriz del sistema al usar uno u otro método, se han llevado a cabo diferentes ejecuciones en una misma máquina con carga del sistema (ajena a la propia ejecución que nos ocupa) nula. Dicha máquina posee un procesador modelo *PC Intel Core 2 Quad* funcionando a una frecuencia de 2.50 GHz y 3.5 GB de memoria RAM.

4.1.1. Influencia en el cálculo de la matriz A

Tras la ejecución de la generación de matrices para la reconstrucción de imágenes con diferentes resoluciones y número de proyecciones se han obtenido los resultados mostrados en los siguientes gráficos. La pareja de gráficos de la figura 4.1 muestra la comparativa entre el método implementado anteriormente y el método de Joseph respecto a los tiempos de generación de la matriz del sistema (A).

Podemos observar que desde el cálculo con una resolución de 0.5 mm

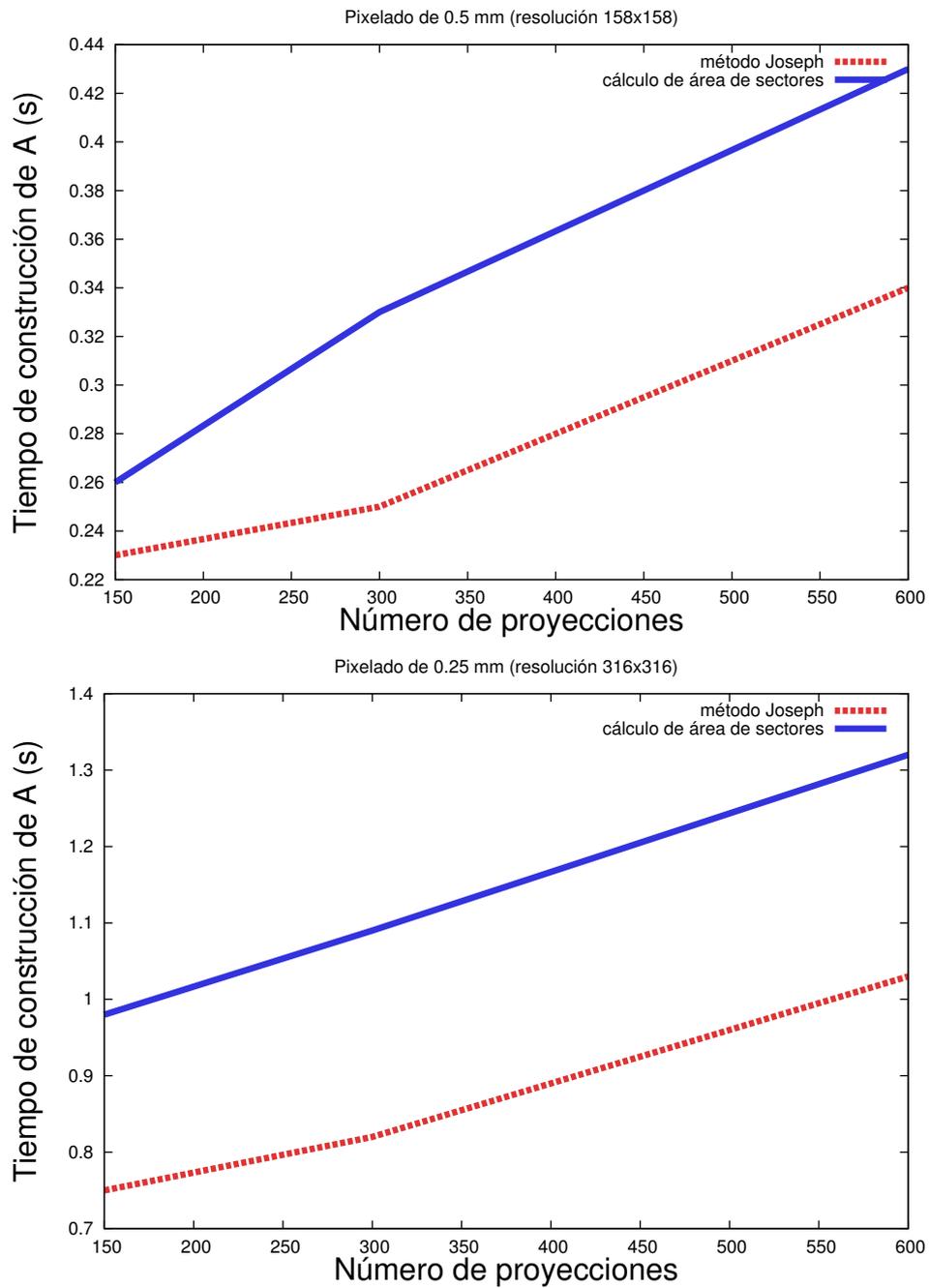


Figura 4.1: Gráfico comparativo del tiempo de reconstrucción de la matriz del sistema (A) de ambos métodos.

(pixelado de 158x158) hasta el cálculo con una resolución de 0.25 mm (pixelado de 316x316) la tendencia en el aumento de del tiempo de cálculo

respecto al aumento de proyecciones se mantiene constante. Además también se mantiene la diferencia de tiempos entre ambos métodos. Podemos decir que el método de Joseph presenta una ligera ventaja temporal durante la generación de la matriz. En todos los casos el método de Joseph tarda, aproximadamente, un 30% menos del tiempo invertido por el método implementado anteriormente por el grupo, pero con una resolución de 316x316 píxeles esta diferencia representa a penas unas décimas de segundo.

Por lo anterior, aun habiendo diferencias en los tiempos de cálculo de ambos métodos, estas diferencias no tienen mayor importancia. Al menos por el momento, pues es posible que, con el fin de obtener más resolución o trasladar el problema a la reconstrucción en tres dimensiones, esta ventaja temporal pueda tener algún interés, pero no en este momento.

4.1.2. Influencia en las iteraciones del MLEM

La siguiente pareja de gráficos (figura 4.2) muestra la comparativa entre los tiempos invertidos por el algoritmo MLEM para completar una iteración en función del número de proyecciones y de la resolución de la imagen a reconstruir, usando la matriz del sistema (A) calculada mediante ambos métodos. Se debe tener en cuenta que los tiempos representados en los gráficos resultan del cálculo de una sola iteración. Así pues el algoritmo MLEM realiza entre diez y treinta iteraciones para converger a la imagen reconstruida, por tanto, el tiempo total de la reconstrucción será del orden de entre diez y treinta veces mayor que los tiempos reflejados en los gráficos.

No obstante no se observan apenas diferencias entre ambos métodos. El tiempo que el algoritmo MLEM invierte en realizar una proyección es, por tanto, el mismo, independientemente de que se haya usado cualquiera de los dos métodos en cuestión. Así pues, desde el punto de vista temporal, no existe diferencia apreciable entre ambos métodos.

4.2. Calidad de la imagen reconstruida

Durante esta sección se muestran imágenes reconstruidas mediante el algoritmo MLEM a partir de mediciones obtenidas con el módulo CT de Albira (correspondiente al *phantom* de la figura 4.3).

Para el estudio de la calidad de las imágenes se han seleccionado diferentes regiones de interés (*region of interest*), a las que a partir de ahora nos referiremos como ROI, señaladas en la figura 4.4 mediante índices (del 1 al 5) que además nos permiten saber de qué material están hechas estas ROI. Además en la figura 4.4 se ha añadido un detalle del *phantom* real para mejorar la comprensión de la forma de las imágenes que se reconstruyen.

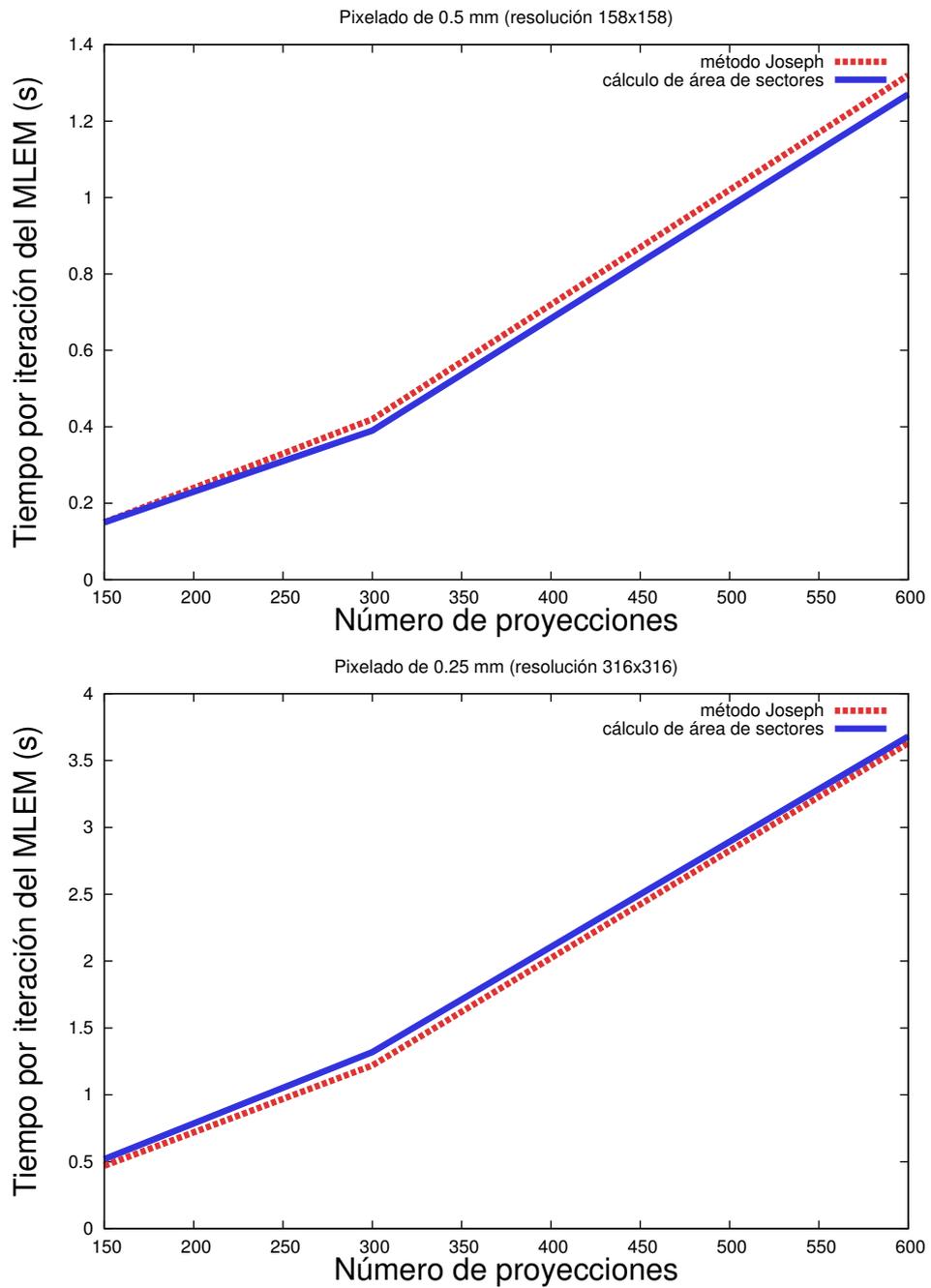


Figura 4.2: Gráfico comparativo del tiempo de cada iteración efectuada por el algoritmo MLEM usando las matrices del sistema (A) generadas por ambos métodos.

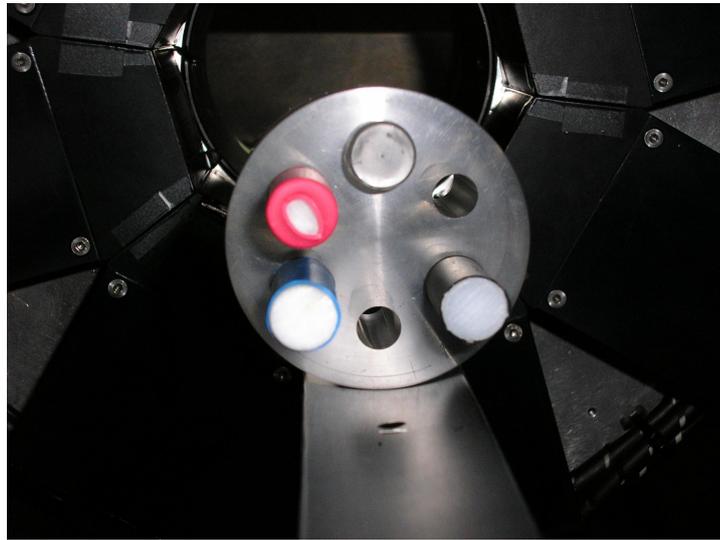


Figura 4.3: Fotografía del *phantom* usado para obtener las mediciones del escáner.

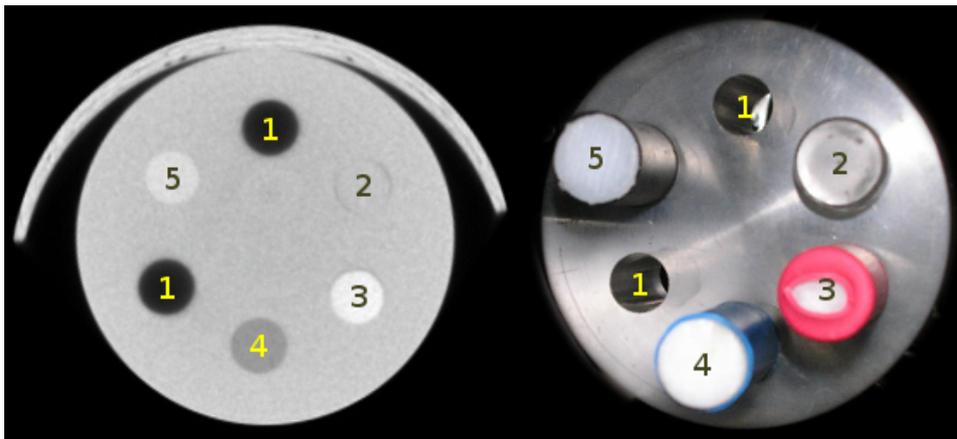
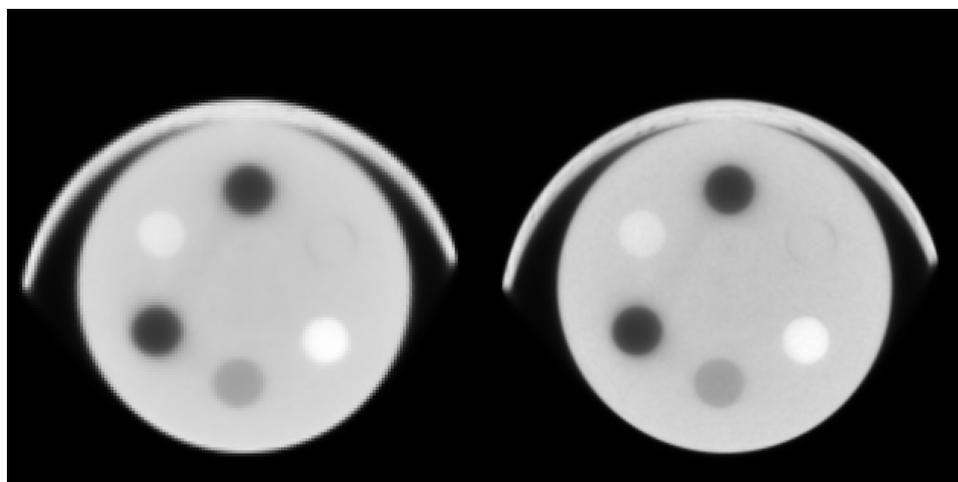


Figura 4.4: Detalle de la forma general que poseen las imágenes reconstruidas frente al objeto real que se pretende reconstruir. Los índices sobre la imagen muestran las diferentes secciones de materiales homogéneos que constituyen las regiones de interés. Estos materiales son: 1.- Aire, 2.- Metacrilato, 3.- Delrin, 4.- Polietileno y 5.- Mylar.

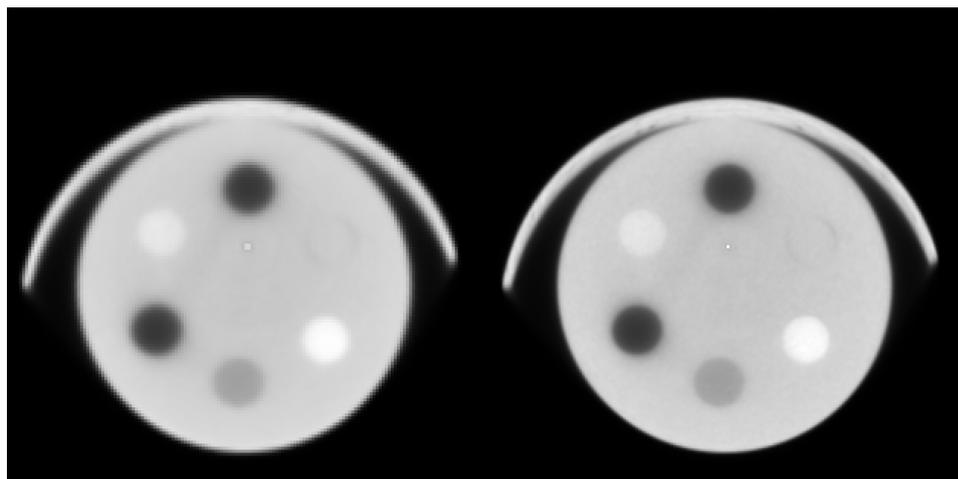
En la figura 4.5 podemos observar los resultados de la reconstrucción usando el método implementado anteriormente para el cálculo de las intersecciones rayo - sector frente al método de Joseph usando el MLEM con treinta iteraciones. Se puede observar el aumento de calidad de las imágenes con resolución de 0.25 mm frente a las imágenes con resolución de 0.5 mm debido a que las primeras poseen el doble de resolución que las segundas

(316x316 píxeles frente a 158x158 píxeles respectivamente).



(a) Método anterior 158x158

(b) Método anterior 316x316



(c) Método de Joseph 158x158

(d) Método de Joseph 316x316

Figura 4.5: Imágenes reconstruidas por el algoritmo MLEM con treinta iteraciones, con un mallado sectorial polar y usando ambos métodos y diferentes resoluciones.

Calculando el valor medio de los píxeles en las ROI, es posible calcular su desviación media como una medida de la homogeneidad y de la calidad de la imagen. Resulta interesante observar la variación del valor medio del píxel y su desviación estándar respecto al número de iteraciones, para poder observar si con un método u otro es posible obtener imágenes de la misma calidad con un número de iteraciones similar. En las siguientes figuras se muestran una serie de gráficos que comparan el anterior método para sec-

tores y el método de Joseph mediante el estudio del valor medio del píxel y su desviación estándar para cada ROI (ver figuras 4.6, 4.7, 4.8, 4.9, 4.10).

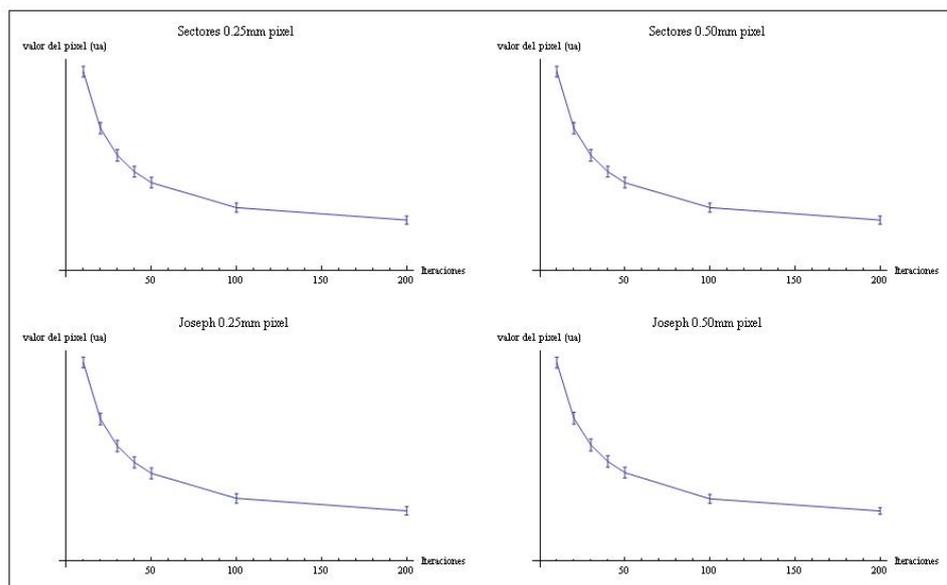


Figura 4.6: Variación del valor del píxel y de la desviación estándar con el uso de ambos métodos y el número de iteraciones realizadas en el MLEM, para el aire (ROI 1).

Se puede observar que el aumento del número de iteraciones conlleva un pequeño aumento de la desviación estándar y una estabilización en el valor medio del píxel. En general cuanto más próximo es el valor de la densidad al *fondo* del *phantom* menos iteraciones necesita para estabilizarse. Se consigue calcular un valor estable para el metacrilato a partir de la iteración diez, pero para el aire, por el contrario, tras doscientas iteraciones, sigue sin obtenerse un valor estable.

En todos los materiales (salvo el aire, cuya densidad es la que más difiere del *fondo*) entre las iteraciones treinta y cuarenta ya se han calculado valores estables. Que no se corregirán en futuras iteraciones. No obstante, aumentar el número de iteraciones conlleva un aumento de la desviación estándar, por lo que la mejor opción es no realizar más de cuarenta iteraciones.

Ambos métodos parecen comportarse del mismo modo. Aportan iguales calidades, valores estables de píxeles y mismos aumentos de desviaciones (en el crecimiento de número de iteraciones). Salvo que a resoluciones bajas, el método de Joseph es más resistente a aumentar la desviación. Aunque ésta efectivamente aumenta, lo hace en menor modo. De todos modos este detalle no se espera que sea muy relevante, ya que se buscan resoluciones altas.

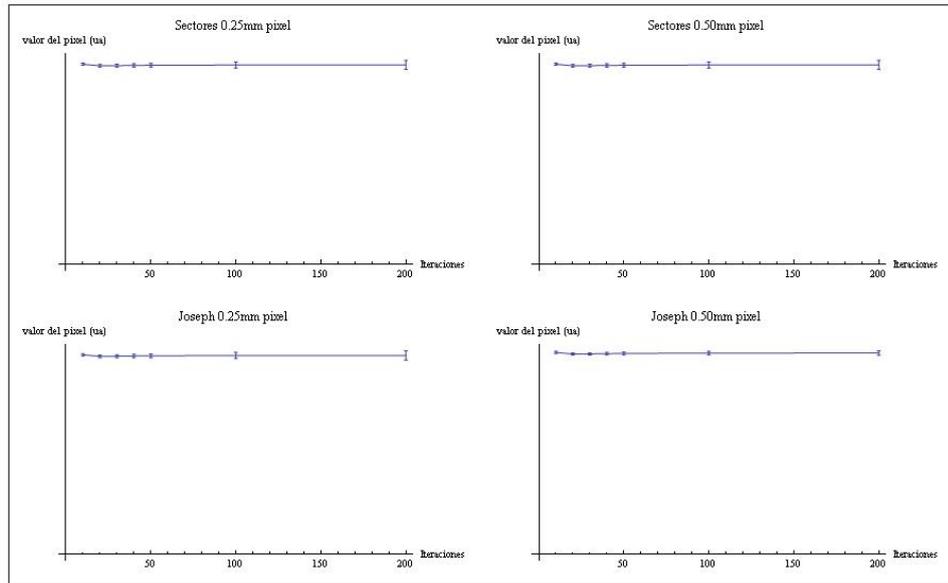


Figura 4.7: Variación del valor del píxel y de la desviación estándar con el uso de ambos métodos y el número de iteraciones realizadas en el MLEM, para el metacrilato (ROI 2).

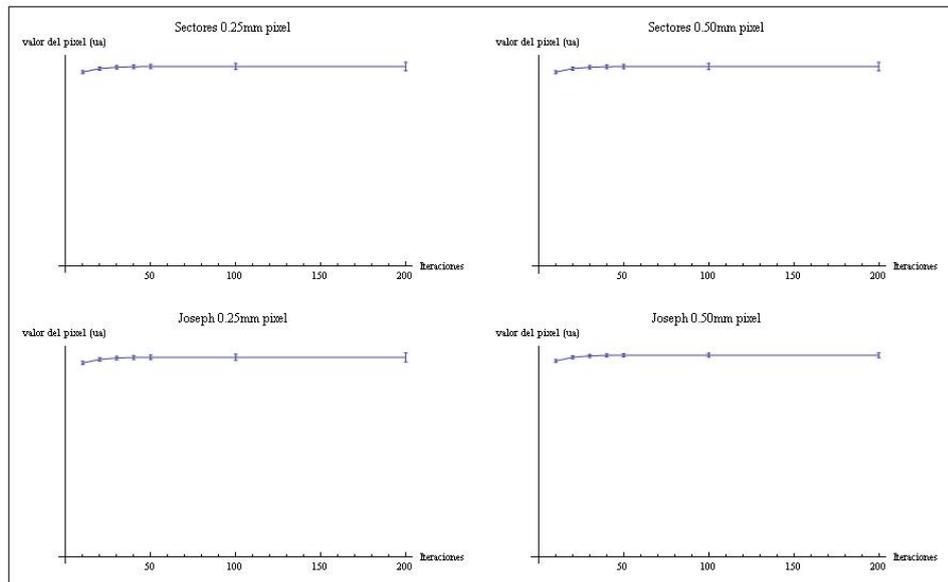


Figura 4.8: Variación del valor del píxel y de la desviación estándar con el uso de ambos métodos y el número de iteraciones realizadas en el MLEM, para el delrin (ROI 3).

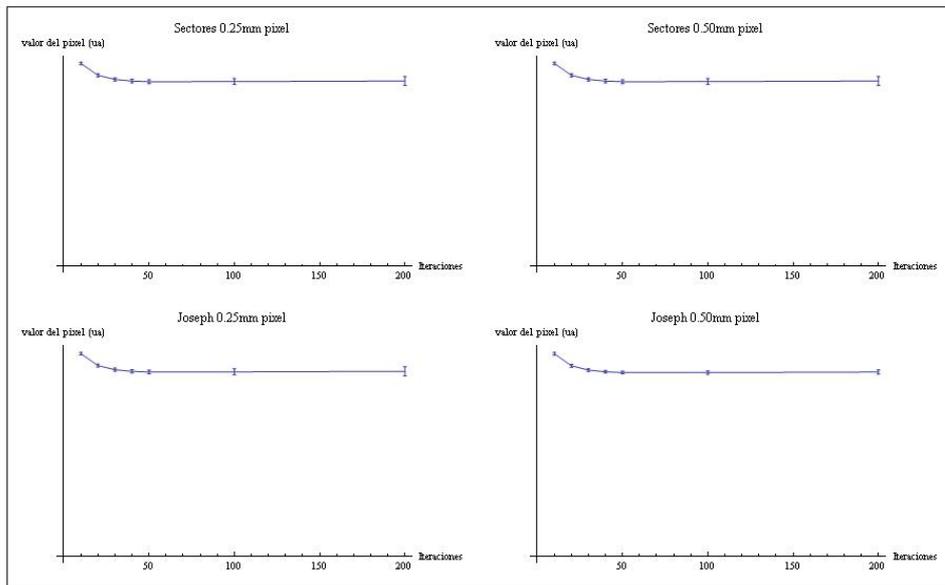


Figura 4.9: Variación del valor del píxel y de la desviación estándar con el uso de ambos métodos y el número de iteraciones realizadas en el MLEM, para el polietileno (ROI 4).

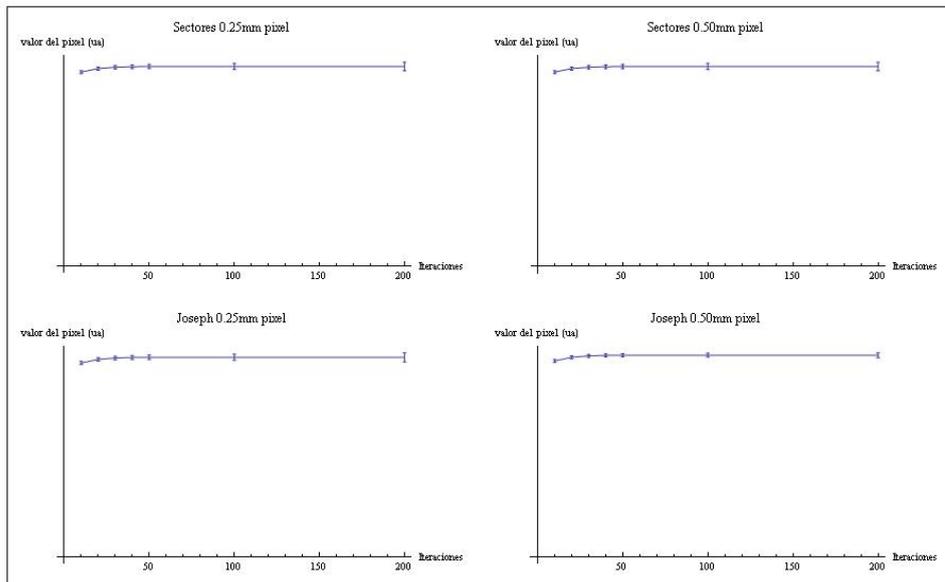


Figura 4.10: Variación del valor del píxel y de la desviación estándar con el uso de ambos métodos y el número de iteraciones realizadas en el MLEM, para el mylar (ROI 5).

Capítulo 5

Conclusiones

Los ensayos realizados han sido en circunstancias tales que pretenden modelar escenarios generales. Se ha usado un *phantom* 5 materiales de distintas densidades y se ha evitado el efecto del ruido. Para ambos métodos, se ha comparado el tiempo de generación de la matriz del sistema y el tiempo de cada iteración de la reconstrucción en función del número de proyecciones y resolución. También se ha evaluado la convergencia del valor medio de píxel reconstruido en función del número de proyecciones y resolución para ambos métodos.

Tras el análisis de los resultados que ofrece el método de Joseph frente al método anterior desarrollado por el grupo podemos ver que ambos métodos tienen el mismo coste temporal, tanto en la generación de la matriz del sistema como en la influencia en la iteración del MLEM, e influyen de igual manera en la calidad de las imágenes, tanto en cuanto a la pronta estabilización del valor medio de los píxeles como en cuanto a la desviación estándar. No es posible, entonces, discernir cual de los dos métodos es preferible al otro.

En una circunstancia en particular, es posible que uno de los dos métodos aventaje al otro. Una vez obtenida la medición del escáner, si el usuario no queda satisfecho con un método elegido, puede interesarle volver a reconstruir la imagen usando el otro método. De esta forma, no se descarta uno de los dos métodos, sino que se propone que ambos métodos formen parte del software de reconstrucción que se está desarrollando por nuestro grupo, ofreciendo la ventaja de que la reconstrucción de imágenes mediante matriz del sistema de sectores polares posea dos alternativas de generación a elección del usuario.

5.1. Líneas futuras

Paralelamente al enfoque de este trabajo, continúan abiertas varias líneas de investigación. Entre ellas la de resolver el sistema 1.1 de forma directa mediante la descomposición de A en QR , de forma que $A = QR$ y el nuevo sistema a resolver es $RX = Q^T B$, siendo R una matriz triangular y Q una matriz ortogonal. Este proceso de descomposición constituye la mayor parte del tiempo en la reconstrucción de forma directa.

Puesto que si no se varía la resolución de la imagen a obtener o la geometría del escáner la matriz A no cambia, tampoco cambian las matrices Q y R por lo que estas matrices pueden ser precalculadas y eliminadas del coste de la reconstrucción. Nuestro grupo plantea en [19] un algoritmo eficiente para realizar esta descomposición mediante rotaciones de Givens de forma que el coste del algoritmo está asociado con el número de elementos no nulos de A .

En el caso de la reconstrucción de imágenes TAC, A posee alrededor del 1% de elementos no nulos, lo cual permite la descomposición QR de matrices del sistema para resoluciones realistas y reduce el proceso de reconstrucción de imágenes a una multiplicación matricial ($Q^T B$) y a sustitución regresiva (debido a que R es triangular), dos procesos altamente eficientes y rápidos.

Bibliografía

- [1] María José Rodríguez Álvarez, Filomeno Sánchez, Antonio Soriano, Amadeo Iborra, and Cibeles Mora. Exploiting Symmetries for Weight Matrix design in CT Imaging. *Mathematical and Computer Modelling*, 2010. (Aceptado).
- [2] Peter M. Joseph. An Improved Algorithm for Reprojecting Rays through Pixel Images. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 1(3):192–196, 1982.
- [3] Cibeles Mora. *Métodos de reconstrucción volumétrica algebraica de imágenes topográficas. Aplicación a un TAC de pequeños animales y a un Simulador-TAC*. PhD thesis, Universidad Politécnica de Valencia, Mayo 2008.
- [4] Yair Censor and Gabor T. Herman. On some optimization techniques in image reconstruction from projections. *Applied Numerical Mathematics*, 3(5):365–391, 1987.
- [5] Michel Defrise, Frédéric Noo, and Hiroyuki Kudo. A solution to the long-object problem in helical cone-beam tomography. *Physics in Medicine and Biology*, 45(3):623, 2000.
- [6] Xuan Liu, C. Comtat, C. Michel, P. Kinahan, M. Defrise, and D. Townsend. Comparison of 3-D reconstruction with 3D-OSEM and with FORE+OSEM for PET. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 20(8):804–814, 2001.
- [7] L. A. Shepp and Y. Vardi. Maximum Likelihood Reconstruction for Emission Tomography. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 1(2):113–122, 1982.
- [8] K. Lange and R. Carson. EM reconstruction algorithms for emission and transmission tomography. *Journal of Computer Assisted Tomography*, 8(2):306–316, 1984.

- [9] G.D. Tourassi, C.E. Jr. Floyd, M.T. Munley, J.E. Bowsher, and R.E. Coleman. Improved lesion detection in SPECT using MLEM reconstruction. *IEEE Transactions on Nuclear Science*, 38(2):780–783, 1991.
- [10] Y.K. Ng, I. Orlic, S.C. Liew, K.K. Loh, S.M. Tang, T. Osipowicz, and F. Watt. A PIXE micro-tomography experiment using MLEM algorithm. *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section B: Beam Interactions with Materials and Atoms*, 130(1-4):109–112, 1997.
- [11] R.G. Wells, P.H. Simkin, P.F. Judy, M.A. King, P.H. Pretorius, H.C. Gifford, and P. Schneider. Maximizing the detection and localization of Ga-67 tumors in thoracic SPECT MLEM (OSEM) reconstructions. *Nuclear Science Symposium Conference Record, 1998. IEEE*, 2:1367–1371, 1998.
- [12] Reinhard Möller. A systolic implementation of the MLEM reconstruction algorithm for positron emission tomography images. *Parallel Computing*, 25(7):905–920, 1999.
- [13] J.E. Ortuño, J.J. Vaquero, G. Kontaxakis, M. Desco, and A. Santos. Diseño de un tomógrafo pet para pequeños animales con geometría octagonal: estudios preliminares. *Proceedings CASEIB 2003 - XXI Annual Congress of the Spanish Society of Biomedical Engineering*, pages 183–186, 2003.
- [14] N. Bissantz, B.A. Mair, and A. Munk. A multi-scale stopping criterion for MLEM reconstructions in PET. *Nuclear Science Symposium Conference Record, 2006. IEEE*, pages 3376–3379, 2006.
- [15] L. A. Feldkamp, L. C. Davis, and J. W. Kress. Practical cone-beam algorithm. *Journal of the Optical Society of America*, 1(6):612–619, 1984.
- [16] R. Siddon. Fast calculation of the exact radiological path length for a three dimensional CT array. *Medical Physics*, 12:252–255, 1985.
- [17] H. Turbell. *Cone Beam Reconstruction using Filtered Backprojection*. PhD thesis, Linköpings University, Department of Electrical Engineering, 2001.
- [18] T. M. Benson and J. Gregor. Framework for iterative cone-beam micro CT reconstruction. *IEEE Transactions on Nuclear Science*, 52(5):1335–1340, 2005.
- [19] María José Rodríguez Álvarez, Filomeno Sánchez, Antonio Soriano, and Amadeo Iborra. Sparse Givens resolution of large system of linear equa-

tions: Applications to image reconstruction. *Mathematical and Computer Modelling*, 52(7-8):1258 – 1264, 2010. *Mathematical Models in Medicine, Business and Engineering* 2009.