

# Cálculo de momentos de inercia mediante el teorema de Steiner. Aplicación a la superficie de un triángulo rectángulo.

<b>Apellidos, nombre</b>	Juan Vicente Llopis Cosín ( <a href="mailto:jvllopis@fis.upv.es">jvllopis@fis.upv.es</a> ) María Gasque Albalade ( <a href="mailto:mgasque@fis.upv.es">mgasque@fis.upv.es</a> )
<b>Departamento</b>	Física Aplicada
<b>Centro</b>	Escuela Técnica Superior de Ingeniería Agronómica y del Medio Natural Universitat Politècnica de València

# 1 Resumen de las ideas clave

En este artículo se expone el procedimiento para el cálculo de momentos de inercia aplicando el teorema de Steiner. Con objeto de facilitar la comprensión y la contextualización de los contenidos teóricos, así de como favorecer la motivación y el aprendizaje, se resuelve un caso práctico.

El teorema de Steiner se emplea para calcular el momento de inercia de un sistema material respecto de cualquier eje, a partir del momento de inercia respecto del eje paralelo al primero que pase por el centro de gravedad y de la distancia entre ambos ejes.

Para la resolución del caso propuesto se dan datos como valores alfanuméricos. Al sustituir posteriormente valores concretos se obtienen resultados numéricos, lo que posibilita la evaluación de los resultados en un amplio rango.

# 2 Introducción

El teorema de Steiner es útil para el cálculo de momentos de inercia respecto de ejes de interés a partir de otros conocidos como datos. Su enunciado es el siguiente. "El momento de inercia respecto de un eje, es igual al momento de inercia respecto de un eje paralelo y que pase por el centro de gravedad más el producto de la masa por la distancia al cuadrado entre ambos ejes".

Por tanto, la aplicación del teorema implica que los ejes considerados sean paralelos, siendo la distancia entre ellos  $D$  la perpendicular a ambos y además uno de ellos debe pasar por el centro de gravedad.

Su expresión matemática es  $I_E = I_{EG} + MD^2_{EEG}$

Aplicado por ejemplo al eje X (Imagen 1):  $I_x = I_{xG} + MD^2_{xxG}$

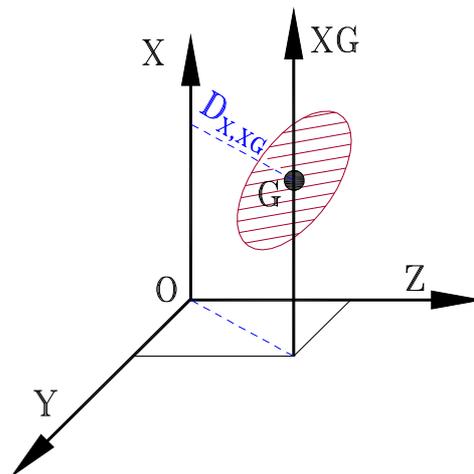


Imagen 1. Figura auxiliar para el teorema de Steiner aplicado al eje X

### 3 Objetivos

Una vez que el alumno lea con detenimiento este documento, será capaz de:

- Plantear y resolver las expresiones que le permitan calcular el momento de inercia de una superficie plana respecto de cualquier eje. Para ello será necesario que conozca o sepa determinar el área de la superficie, las coordenadas de su centro de gravedad, y el momento de inercia de dicha superficie respecto de sus ejes coordenados.
- Utilizar su capacidad de abstracción para su aplicación a casos de similar nivel de dificultad (superficies sencillas, generalmente de áreas conocidas).
- Plantear un problema con valores alfanuméricos y luego realizar un análisis posterior suponiendo distintos valores de los datos de partida sobre el modelo propuesto.

### 4 Desarrollo

Para alcanzar los objetivos propuestos, son necesarios los **conocimientos previos básicos de geometría de masas**:

- Concepto de centro de gravedad.
- Expresión correcta y representación gráfica del centro de gravedad en un sistema de referencia.
- Concepto y expresión general de momento de inercia.
- Expresiones de los momentos de inercia de sistemas continuos respecto de los elementos geométricos (punto, eje o plano) definidos en un sistema de referencia.
- Relaciones entre los momentos de inercia.
- Propiedades referentes a la suma de momentos de inercia: los momentos de inercia se pueden sumar y restar siempre que sea respecto del mismo elemento geométrico (punto, eje, plano).

El contenido presentado en este artículo puede ser de gran utilidad, dado que la resolución de un problema concreto proporciona la metodología general para la resolución de un gran número de problemas con planteamientos similares.

#### 4.1 Enunciado del problema

Para la superficie de un triángulo rectángulo homogéneo de densidad  $\sigma$ , base  $\mathbf{b}$  y altura  $\mathbf{h}$  (Imagen 2), calcular los momentos de inercia:

- a) Respecto del eje que pase por el centro de gravedad y sea paralelo al X,  $I_{xG}$ .
- b) Respecto del eje que pase por el vértice superior y sea paralelo al X,  $I_x$ .
- c) Respecto del eje que pase por el centro de gravedad y sea paralelo al Y,  $I_{yG}$ .
- d) Respecto del eje que pase por el vértice superior y sea paralelo al Y,  $I_y$ .
- e) Calcular  $I_x$  e  $I_y$  directamente por aplicación sucesiva del teorema de Steiner.

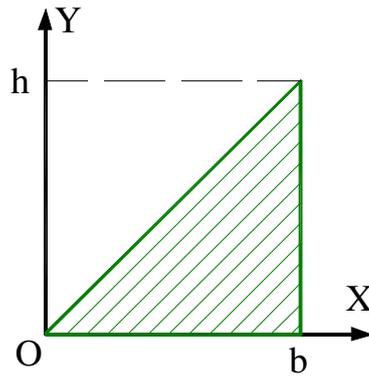


Imagen 2. Triángulo rectángulo homogéneo de densidad  $\sigma$ , base  $b$  y altura  $h$

## 4.2 Cálculo de los distintos momentos de inercia

### 4.2.1 Momento de inercia respecto del eje que pase por el centro de gravedad y sea paralelo al X, $I_{xG}$ .

Para calcular  $I_{xG}$  partimos de  $I_x$  como dato y aplicamos el teorema de Steiner:

$$I_x = I_{xG} + MD^2_{xxG}$$

**i** El momento de inercia de un triángulo rectángulo de densidad  $\sigma$ , base  $b$  y altura  $h$ , respecto del eje X,  $I_x$ , calculado por integración, es:

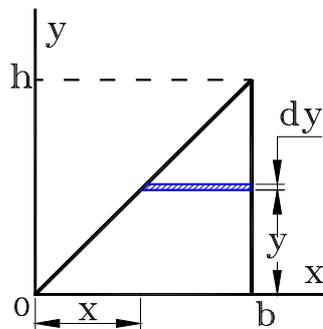


Imagen 3. diferencial de superficie para el cálculo de  $I_x$

$$I_x = \int_M y^2 dm$$

Siendo  $dm = \sigma \cdot dS$

Diferencial de superficie,  $dS$  (Imagen 3):

$$dS = (b - x) \cdot dy$$

Semejanza de triángulos:  $\frac{b-x}{b} = \frac{h-y}{h}$

De donde:  $b - x = \frac{b}{h}(h - y)$

Por tanto:

$$dS = (b - x) \cdot dy = \frac{b}{h}(h - y) \cdot dy \quad 0 \leq y \leq h$$

Sustituyendo el diferencial de superficie e integrando:

$$I_x = \int_M y^2 dm = \sigma \int_S y^2 ds = \sigma \int_0^h y^2 \frac{b}{h}(h - y) dy = \sigma \frac{b}{h} \int_0^h y^2 (h - y) dy = \sigma \frac{bh^3}{12} \Rightarrow \boxed{I_x = \frac{\sigma bh^3}{12}}$$

Despejando a partir del teorema de Steiner es  $I_{xG} = I_x - MD^2_{xxG}$ , siendo la distancia  $D^2_{xxG}$  entre los ejes la coordenada  $y_G = \frac{1}{3}h$  y la masa  $M = \frac{\sigma bh}{2}$ .

Sustituyendo resulta:

$$I_{xG} = I_x - MD^2_{xxG} = \frac{\sigma bh^3}{12} - \frac{\sigma bh}{2} \left( \frac{1}{3}h \right)^2 = \frac{\sigma bh^3}{12} - \frac{\sigma bh^3}{18} = \frac{\sigma bh^3}{36}$$

por tanto:  $I_{xG} = \frac{\sigma bh^3}{36}$

#### 4.2.2 Momento de inercia respecto del eje que pase por el vértice superior y sea paralelo al X, $I_{x'}$ .

Para calcular  $I_{x'}$ : (Imagen 4), aplicamos el teorema de Steiner y será:

$$I_{x'} = I_{xG} + MD^2_{x'xG}$$

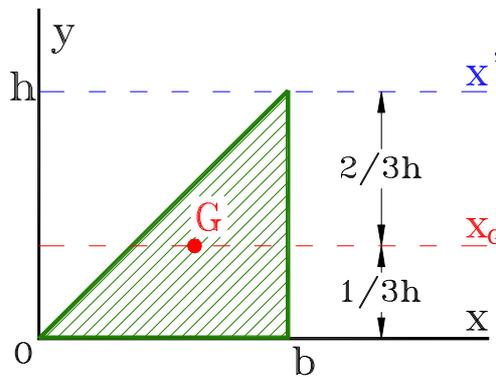


Imagen 4. Figura auxiliar para el cálculo de  $I_{x'}$

Sabiendo que:  $I_{xG} = \frac{\sigma bh^3}{36}$ ,  $M = \frac{\sigma bh}{2}$ , y  $D_{x'xG} = \left( h - \frac{1}{3}h \right)$

Sustituyendo los distintos términos:  $I_{x'} = \frac{\sigma bh^3}{36} + \frac{\sigma bh}{2} \left( h - \frac{1}{3}h \right)^2$

Operando y simplificando:  $I_{x'} = \sigma bh^3 \left( \frac{1}{36} + \frac{4}{18} \right) = \frac{\sigma bh^3}{4}$ ; Por tanto  $I_{x'} = \frac{\sigma bh^3}{4}$

#### 4.2.3 Momento de inercia respecto del eje del eje que pase por el centro de gravedad y sea paralelo al Y, $I_{yG}$ .

Para calcular  $I_{yG}$  partimos de  $I_y$  como dato y aplicamos el teorema de Steiner:

$$I_y = I_{yG} + MD^2_{yyG}$$

**i** El momento de inercia de un triángulo rectángulo de densidad  $\sigma$ , base  $b$  y altura  $h$ , respecto del eje  $Y$ , calculado por integración, es:

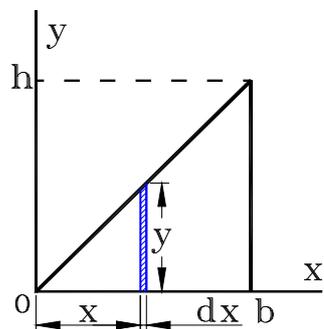


Imagen 5. diferencial de superficie para el cálculo de  $I_y$

$$I_y = \int_M x^2 dm$$

Siendo  $dm = \sigma \cdot dS$

Diferencial de superficie,  $dS$  (Imagen 5):

$$dS = y \cdot dx$$

Semejanza de triángulos:  $\frac{y}{h} = \frac{x}{b}$

$$\text{De donde: } y = \frac{h}{b}x$$

$$\text{Por tanto: } dS = y \cdot dx = \frac{h}{b}x \cdot dx \quad 0 \leq x \leq b$$

Sustituyendo el diferencial de superficie e integrando:

$$I_y = \int_M x^2 dm = \sigma \int_S x^2 ds = \sigma \frac{h}{b} \int_0^b x^3 dx = \sigma \frac{hb^3}{4} \Rightarrow \boxed{I_y = \sigma \frac{hb^3}{4}}$$

despejando a partir del teorema de Steiner es  $I_{yG} = I_y - MD_{yyG}^2$  siendo la distancia  $D_{yyG}^2$  entre los ejes la coordenada  $x_G = \frac{2}{3}b$  y la masa  $M = \frac{\sigma bh}{2}$ .

Sustituyendo resulta:

$$I_{yG} = I_y - MD_{yyG}^2 = \frac{\sigma b^3 h}{4} - \frac{\sigma bh}{2} \left( \frac{2}{3}b \right)^2 = \frac{\sigma b^3 h}{4} - \frac{4\sigma b^3 h}{18} = \frac{\sigma b^3 h}{36}$$

por tanto:  $\boxed{I_{yG} = \frac{\sigma b^3 h}{36}}$

#### 4.2.4 Momento de inercia respecto del eje del eje que pase el vértice superior y sea paralelo al $Y$ , $I_{y'}$ .

Para calcular  $I_{y'}$  (Imagen 6), aplicamos el teorema de Steiner y será:

$$I_{y'} = I_{yG} + MD_{y'yG}^2$$

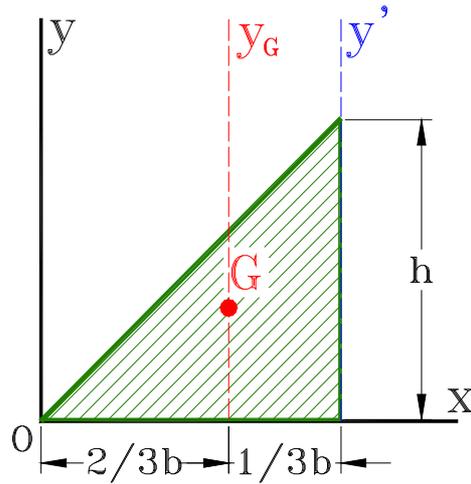


Imagen 6. Figura auxiliar para el cálculo de  $I_{y'}$ .

Sabiendo que:  $I_{y_G} = \frac{\sigma b^3 h}{36}$ ,  $M = \frac{\sigma b h}{2}$ , y  $D_{y'y_G} = \left(b - \frac{2}{3}b\right) = \frac{1}{3}b$

Sustituyendo los distintos términos:

$$I_{y'} = I_{y_G} + MD_{y'y_G}^2 = \frac{\sigma b^3 h}{36} + \frac{\sigma b h}{2} \left(\frac{1}{3}b\right)^2$$

Operando y simplificando:

$$I_{y'} = \frac{\sigma b^3 h}{36} + \frac{\sigma b^3 h}{18} = \frac{\sigma b^3 h}{12} \quad \text{Por tanto } \boxed{I_{y'} = \frac{\sigma b h^3}{12}}$$

#### 4.2.5 Calcular $I_{x'}$ e $I_{y'}$ directamente por aplicación sucesiva del teorema de Steiner.

Para este apartado aplicaremos de forma sucesiva el teorema de Steiner.

Para el cálculo de  $I_{x'}$  aplicamos dos veces el teorema de Steiner:

$$I_{x'} = I_{x_G} + MD_{x'x_G}^2$$

$$I_{x'} = I_{x_G} + MD_{x'x_G}^2$$

Restando ordenadamente resulta:  $I_{x'} - I_{x'} = M(D_{x'x_G}^2 - D_{x'x_G}^2)$

Operando queda:  $I_{x'} = I_{x'} + M(D_{x'x_G}^2 - D_{x'x_G}^2)$

$$\text{Sustituyendo: } I_{x'} = \frac{\sigma b h^3}{12} + \frac{\sigma b h}{2} \left[ \left(\frac{2}{3}h\right)^2 - \left(\frac{1}{3}h\right)^2 \right]$$

$$\text{Y simplificando: } I_{x'} = \frac{\sigma b h^3}{12} + \frac{\sigma b h}{2} \frac{3}{9} h^2 = \frac{\sigma b h^3}{4} \quad \text{por tanto: } \boxed{I_{x'} = \frac{\sigma b h^3}{4}}$$

Para el cálculo de  $I_{y'}$  se utiliza el mismo método. Aplicando dos veces el teorema de Steiner:

$$I_{y'} = I_{yG} + MD^2_{y'yG}$$

$$I_y = I_{yG} + MD^2_{yyG}$$

$$\text{Restando ordenadamente resulta: } I_{y'} - I_y = M(D^2_{y'yG} - D^2_{yyG})$$

$$\text{Operando queda: } I_{y'} = I_y + M(D^2_{y'yG} - D^2_{yyG})$$

$$\text{Sustituyendo: } I_{y'} = \frac{\sigma b^3 h}{4} + \frac{\sigma b h}{2} \left[ \left( \frac{1}{3} b \right)^2 - \left( \frac{2}{3} b \right)^2 \right]$$

$$\text{Y simplificando: } I_{y'} = \frac{\sigma b^3 h}{4} - \frac{\sigma b h}{2} \frac{3}{9} b^2 = \frac{\sigma b^3 h}{12} \quad \text{por tanto: } \boxed{I_{y'} = \frac{\sigma b^3 h}{12}}$$

Los resultados obtenidos en el cálculo de  $I_x$  e  $I_{y'}$  por aplicación sucesiva del teorema de Steiner coinciden con los calculados en los apartados anteriores.

## 5 Cierre

En este artículo se ha expuesto el procedimiento para el cálculo de momentos de inercia aplicando el teorema de Steiner. Se ha propuesto un caso práctico, en el que se han determinado momentos de inercia de la superficie de un triángulo rectángulo respecto de distintos ejes. Los conceptos básicos y cálculos accesorios se han ido recordando conforme era necesario.

Con el fin de que el estudiante pueda comprobar si es capaz de plantear un problema similar al desarrollado en este artículo, se propone que intente la resolución del siguiente caso:

Dada la superficie del triángulo rectángulo homogéneo de densidad  $\sigma$ , base  $b$ , y altura  $h$ , representado en la Imagen 7, calcular los momentos de inercia:

- Respecto del eje que pase por su centro de gravedad y sea paralelo al x,  $I_{xG}$ .
- Respecto del eje  $X_1$ ,  $I_{x1}$ .

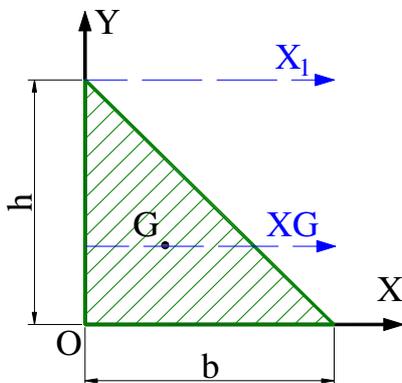


Imagen 7. Ejercicio propuesto para reforzar conceptos

DATOS:

$$M = \frac{\sigma b h}{2}$$

$$G(x_G, y_G) = \left( \frac{b}{3}, \frac{h}{3} \right)$$

$$I_x = \frac{\sigma b h^3}{12}$$

SOLUCIÓN:

$$I_{xG} = \frac{\sigma b h^3}{36}, \quad I_{x1} = \frac{\sigma b h^3}{4}$$

## **6 Bibliografía**

### **6.1 Libros:**

J. M. Bastero; J. Casellas. "Curso de mecánica", 4ª Edición. EUNSA, 2004, 720 pp.

F.P. Beer; E.R. Johnston; D.F. Mazurek "Mecánica vectorial para ingenieros. Estática", 10ª Edición. MC Graw Hill, 2013.

J.L. Meriam; J.G. Kraige. "Mecánica para ingenieros. Estática", 3ª Edición. Reverté, 1997, 456 pp.

### **6.2 Referencias de fuentes electrónicas:**

Rubio Michavila, C.; Gasque Albalade, M.; Llopis Cosín, JV. (2017). Geometría de masas. Centro de gravedad de superficie plana. Universitat Politècnica de València. Disponible en: <http://hdl.handle.net/10251/82482>