



UNIVERSITAT
POLITÈCNICA
DE VALÈNCIA

Doctorado en Administración y Dirección de Empresas

TESIS DOCTORAL

Optimización Multiobjetivo para la Selección de Carteras a la
Luz de la Teoría de la Credibilidad: Una Aplicación en el
Mercado Integrado Latinoamericano

Autor:

Jairo Alexander González Bueno

Directores:

Dr. Fernando García García

Dr. Javier Oliver Muncharaz

Valencia, abril 2018

DEDICATORIAS

“Los logros que una persona alcanza en la vida generalmente no son propios, siempre han sido obtenidos con la ayuda de aquellas personas que más nos aprecian.

Esta tesis doctoral y lo que ella implica en mi vida es dedicada a mi madre Ernestina, a mi padre Jose Maria (Q.E.P.D), a mis hermanos Edwin y Nelson, a mis cuñadas Nicoleta y Laura, y a mis sobrinos Rafael y Danna”.

AGRADECIMIENTOS

En primer lugar quiero dar las gracias a Dios, por estar conmigo en cada paso que doy, por permitirme con su guía y bendición lograr las metas que me he propuesto a lo largo de mi vida, y sobre todo agradezco el haberme regalado una familia maravillosa, quienes a pesar de no estar presentes físicamente, fueron mi soporte en estos dos últimos años.

En segundo lugar, un especial aprecio, admiración y eterno agradecimiento a mis directores de tesis, los Doctores Fernando García García y Javier Oliver Muncharaz. Infinitas gracias por haber aceptado dirigir esta investigación. Este triunfo es fruto de sus invaluable acompañamientos, orientaciones, aportes y experiencias investigativas.

A la Doctora Rima Tamošiūnienė, por haberme facilitado los medios para llevar a cabo mi Estancia de Investigación en el Departamento de Ingeniería Financiera de la Facultad de Administración de Empresas de *Vilnius Gedeminas Technical University*.

A las Doctoras Xiaoxia Huang de *University of Science and Technology Beijing* y Aleksandra Rutkowska de *Poznan University of Economics* por su amabilidad y disposición para resolver por correo mis dudas referentes a la Teoría de la Credibilidad.

A la Doctora Gladys Rocío Ramirez Jurado, docente de la Facultad de Administración de Empresas de la Universidad Pontificia Bolivariana, Seccional Bucaramanga, porque gracias a su apoyo y gestión, obtuve la comisión de estudios por dos años para culminar mi tesis doctoral.

Así mismo, agradezco a la Universidad Pontificia Bolivariana, Seccional Bucaramanga, por su valiosa política de apoyo para la formación de docentes, la cual me permitió culminar con orgullo este proyecto de formación doctoral.

Un especial reconocimiento y agradecimiento a mi amiga y compañera de trabajo, Gladys Elena Rueda Barrios, por su amistad, consejos, recomendaciones, y apoyo incondicional y desinteresado para la materialización de este gran sueño profesional.

Igualmente, doy eternas gracias a mis grandes amigas, Adriana Rueda Diaz y Cecilia Rios Cala, por su cariño y amistad, que aun estando físicamente lejos, espiritualmente siempre estuvieron junto a mí apoyándome en este proyecto doctoral.

A todas aquellas personas que, aunque no aparecen aquí con nombres y apellidos, han estado presentes de alguna forma durante el desarrollo de este trabajo y han hecho posible que hoy vea la luz.

A todos mi eterno agradecimiento.

RESUMEN

El presente trabajo de investigación doctoral tiene como fin optimizar carteras multiobjetivo a la luz de la teoría de la credibilidad. Con el fin de cumplir con este propósito, se propone un novedoso modelo difuso de optimización denominado “*Modelo Credibilístico Multiobjetivo de Media-Semivarianza-Liquidez para la Selección de Carteras*”. La incertidumbre de la liquidez y el rendimiento futuro de cada activo se modela por medio de números difusos L-R con funciones de referencia tipo potencia. Con el objetivo de conseguir un modelo más realista se considera la restricción de cardinalidad que limita el número de activos que participan en las carteras y las restricciones de cotas superiores e inferiores que permiten combinaciones de activos que respetan las preferencias del inversor. Con el propósito de seleccionar la cartera óptima, esta investigación define por primera vez el ratio de Sortino en un entorno credibilístico. El problema de optimización multiobjetivo resultante es lineal y convexo, y la introducción de restricciones realistas convierte el modelo de un problema de optimización cuadrática clásica (*classical quadratic optimization problem*) a un problema de programación cuadrática de enteros mixtos (*quadratic mixed-integer problem*) que es *NP-hard*. Para superar este inconveniente se aplica el *Non-dominated Sorting Genetic Algorithm*

(NSGAI), MOEA que ha sido utilizado con éxito en la generación de soluciones eficientes en varios modelos multiobjetivos de selección de carteras. Finalmente, se demuestra la efectividad y eficiencia del modelo en aplicaciones prácticas, asumiendo por primera vez la toma de decisiones de inversión en el Mercado Integrado Latinoamericano (MILA), que integra los mercados bursátiles de Chile, Colombia, México y Perú.

Palabras Clave:

Selección de Cartera Difusa; Números Difusos L-R; Teoría de la Credibilidad; Media-Semivarianza-Liquidez; Optimización Evolutiva Multiobjetivo.

RESUM

El present treball d'investigació doctoral té com a finalitat optimitzar carteres multiobjectiu a la llum de la teoria de la credibilitat. Per tal de complir amb aquest propòsit, es proposa un nou model difús d'optimització denominat “*Model Credibilístic multiobjectiu de Mitjana-Semivarianza-Liquiditat per a la Selecció de Carteres*”. La incertesa de la liquiditat i el rendiment futur de cada actiu es modela per mitjà de nombres difusos L-R amb funcions de referència tipus potència. Amb l'objectiu d'aconseguir un model més realista es considera la restricció de cardinalitat que limita el nombre d'actius que participen en les carteres i les restriccions de cotes superiors i inferiors que permeten combinacions d'actius que respecten les preferències de l'inversor. Amb el propòsit de seleccionar la cartera òptima, aquesta investigació defineix per primera vegada la ràtio de Sortino en un entorn credibilístic. El problema d'optimització multiobjectiu resultant és lineal i convex, la introducció de restriccions realistes converteix el model d'un problema d'optimització quadràtica clàssica (*classical quadratic optimization problem*), a un problema de programació quadràtica d'enters mixtes (*quadratic mixed-integer problem*) que és *NP-hard*. Per superar aquest inconvenient s'aplica el *Non-dominated Sorting Genetic Algorithm* (NSGAI), MOEA que ha estat utilitzat amb èxit en la generació de

solucions eficients en diversos models multiobjectiu de selecci3n de carteres. Finalment, es demostra l'efectivitat i efici3ncia del model en aplicacions pr3ctiques, assumint per primera vegada la presa de decisions d'inversi3n al Mercat Integrat Llatinoameric3 (MILA), que integra els mercats borsaris de Xile, Col3mbia, M3xic i Per3.

Paraules Clau:

Selecci3n de Cartera Difusa; N3meros difusos L-R; Teoria de la Credibilitat; Mitja-Semivarianza-Liquiditat; Optimitzaci3n Evolutiva multiobjectiu.

ABSTRACT

The present doctoral dissertation aims to optimize multiobjective portfolio in the light of credibility theory. In order to meet this purpose, a novel fuzzy optimization model called "*Multiobjective Credibilistic Mean-Semivariance-Liquidity Portfolio Selection Model*" is proposed. The uncertainty of the future return and liquidity of each asset are modeled by means of LR-fuzzy numbers belonging to the power family. In order to make a more realistic model, it is considered the cardinality constraint limiting the number of assets participating in the portfolios, and upper and lower bound constraints allowing assets combinations which respect the investor's wishes. In the interest of selecting the optimal portfolio, this research defines for the first time, the Sortino ratio under a credibilistic environment. The resulting multiobjective optimization problem is linear and convex, and the introduction of realistic constraints into the portfolio optimization problem convert the model from a classical quadratic optimization problem to a quadratic mixed-integer problem (QMIP) that is NP-hard. To overcome this drawback, it is applied the Non-dominated Sorting Genetic Algorithm (NSGAI), MOEA that has been used successfully in the generation of efficient solutions in several multi-objective portfolio selection models. Finally, an empirical study is included to demonstrate the effectiveness and

efficiency of the model in practical applications using for the first time a dataset of assets from the Latin American Integrated Market (MILA by its Spanish acronym), which integrates the stock exchange markets of Chile, Colombia, Mexico, and Peru.

Keywords

Fuzzy portfolio selection; L-R Fuzzy numbers; Credibility theory; Mean-Semivariance-Liquidity; Evolutionary multiobjective optimization.

ÍNDICE GENERAL

Índice General.....	xi
Índice de Tablas.....	xvi
Índice de Figuras.....	xviii
Publicaciones.....	xxi

1	Introducción	1
1.1	Antecedentes	1
1.2	Motivaciones de la Investigación.....	5
1.3	Objetivos	9
1.3.1	Objetivo General.....	10
1.3.2	Objetivos Específicos	10
1.4	Estructura de la Tesis	10
2	Optimización de Carteras	12
2.1	Introducción	12
2.2	Medidas de Riesgo en el Problema de Selección de Carteras	15
2.2.1	Medidas de Riesgo de Dispersión.....	18
2.2.1.1	Media Desviación Estándar o Media Varianza	18
2.2.1.2	Desviación Media Absoluta	32
2.2.2	Medidas de Riesgo de <i>Downside</i>	35
2.2.2.1	Primero la Seguridad (<i>Safety-First</i>)	36
2.2.2.2	Media Semivarianza.....	39
2.2.2.3	Semidesviación Media Absoluta	41

2.2.2.4	Momento Parcial Más Bajo (<i>Lower Partial Moment</i>).....	42
2.2.2.5	Valor en Riesgo (VaR).....	43
2.2.2.6	Valor en Riesgo Condicional (CVaR).....	45
2.3	La Optimización de Cartera en la Práctica	47
2.3.1	Costos de Transacción	47
2.3.2	Restricciones de Cardinalidad	48
2.3.3	Restricción de Cota Mínima y Máxima de Participación de un Activo en la Cartera	49
2.3.4	Restricción de Cota Mínima y Máxima de Participación en un Sector en la Cartera	50
2.4	Resumen y Conclusiones	51
3	Algoritmos Evolutivos Multi-objetivo en Optimización de Carteras.....	54
3.1	Introducción	54
3.2	Problemas de Optimización Multiobjetivo (MOPs)	56
3.2.1	MOPs Totalmente Conflictivos, no Conflictos y Parcialmente Conflictivos ..	58
3.2.2	Dominancia de Pareto y Optimalidad	59
3.2.3	Métodos para Resolver MOPs	63
3.2.4	Optimización de Objetivos de MOPs	64
3.3	Algoritmos Evolutivos (EAs)	66
3.4	Algoritmos Evolutivos Multiobjetivo (MOEAs)	69
3.5	El Problema de Optimización de Cartera con el Apoyo de MOEAs.....	73
3.6	<i>Non-dominated Sorting Genetic Algorithm</i> (NSGAI).....	79
3.6.1	Ordenamiento Rápido de Soluciones No-Nominadas	80
3.6.2	Preservación de la Diversidad.....	82
3.6.3	Ciclo Principal	84
3.7	Resumen y Conclusiones	87
4	Teoría de la Credibilidad	90
4.1	Introducción	90
4.2	Números Difusos L-R y Aritmética Difusa	92
4.3	Teoría de la Credibilidad	95

4.3.1	Medida de Credibilidad y Espacio de Credibilidad	95
4.3.2	Variable Difusa	99
4.3.3	Función de Pertenencia y Teorema de Inversión de Credibilidad	100
4.3.4	Distribución de Credibilidad.....	103
4.3.4.1	Distribución de Credibilidad de un Número Difuso L-R.....	104
4.3.5	Independencia	106
4.3.6	Aritmética Difusa.....	107
4.3.7	Por qué Adoptar la Teoría de Credibilidad.....	110
4.3.8	Valor Esperado de una Variable Difusa.....	112
4.3.8.1	Valor Esperado de un Número Difuso L-R.....	113
4.3.8.2	Valor Esperado de Otras Variables Difusas	115
4.3.9	Varianza de una Variable Difusa	116
4.3.9.1	Varianza un Número Difuso L-R.....	116
4.3.9.2	Varianza de Otras Variables Difusas.....	119
4.3.10	Semivarianza de una Variable Difusa.....	120
4.3.10.1	Semivarianza de un Número Difuso L-R.....	121
4.3.10.2	Semivarianza de Otras Variables Difusas	123
4.4	Resumen y Conclusiones	123
5	Caracterización de los Mercados de Capitales de Latinoamérica.....	125
5.1	Introducción	125
5.2	Análisis del Tamaño, Liquidez y Concentración.....	129
5.2.1	Tamaño del Mercado	129
5.2.2	Liquidez de Mercado	136
5.2.3	Concentración del Mercado	139
5.3	Análisis de Volatilidad de los Precios de las Acciones y de los Tipos de Cambio.....	141
5.4	Análisis de Correlación de los Precios de las Acciones y de los Tipos de Cambio.....	147
5.5	Impacto del Riesgo cambiario sobre la Rentabilidad de Carteras de Inversión en los Índices Bursátiles Latinoamericanos para un Inversionista de Estados Unidos y 5 inversionistas de América Latina	149
5.6	Análisis del Riesgo Soberano	152

5.6.1	El Problema de Selección de Carteras en Latinoamérica	157
5.7	Conclusiones	158
6	Modelo Credibilístico Multi-objetivo de Media-Semivarianza-Liquidez para la Selección de Carteras	162
6.1	Introducción	162
6.2	Descripción del Problema	163
6.2.1	Notación	164
6.2.2	Variables de Decisión	165
6.3	Funciones Objetivo	165
6.3.1	Rentabilidad	165
6.3.2	Riesgo	168
6.3.3	Liquidez	168
6.4	Restricciones	170
6.4.1	Presupuesto de Capital	170
6.4.2	Ventas en Corto	170
6.4.3	Cota Máxima de Participación de un Activo en la Cartera	170
6.4.4	Cota Mínima de Participación de un Activo en la Cartera	170
6.4.5	Cardinalidad	171
6.5	El Problema de Decisión	171
7	Solución Metodológica	173
7.1	Introducción	173
7.2	Base de Datos	174
7.3	Tamaño de la Muestra	175
7.4	Retorno Esperado <i>Crisp</i> Credibilístico del <i>i</i> -ésimo Activo	181
7.5	Liquidez Esperada <i>Crisp</i> Credibilística del <i>i</i> -ésimo Activo	182
7.6	Tasa Libre de Riesgo Esperada <i>Crisp</i> Credibilística	183
7.7	Rentabilidad Esperada de la Cartera	184
7.8	Riesgo de la Cartera	184
7.9	Liquidez Esperada de la Cartera	186
7.10	Restricciones	186

7.11	<i>Non-dominated Sorting Genetic Algorithm (NSGAI)</i>	187
7.11.1	Parámetros NSGAI.....	190
8	Resultados Experimentales	191
8.1	Introducción.....	191
8.2	Retorno Esperado <i>Crisp</i> Credibilístico del <i>i</i> -ésimo Activo	192
8.3	Liquidez Esperada <i>Crisp</i> Credibilística del <i>i</i> -ésimo Activo	197
8.4	Asignación Óptima de Activos	201
8.4.1	Cartera I.....	201
8.4.2	Cartera II.....	202
8.4.3	Cartera III.....	203
8.4.4	Cartera IV.....	204
8.4.5	Fronteras Óptimas de Pareto.....	206
8.4.6	Selección de las Carteras Óptimas.....	210
8.4.7	Rebalanceo de Carteras.....	215
9	Conclusiones y Desarrollos Futuros	220
9.1	Conclusiones de la Revisión de la Literatura.....	220
9.1.1	Optimización de Carteras.....	221
9.1.2	MOEAs en Optimización de Carteras.....	221
9.1.3	Teoría de la Credibilidad	222
9.2	Conclusiones de la Investigación Empírica	222
9.2.1	Caracterización de los Mercados de Capitales de Latinoamérica.....	222
9.2.2	Modelo Credibilístico Multiobjetivo de Media-Semivarianza-Liquidez para la Selección de carteras	223
9.3	Futuras Líneas de Investigación.....	225
	Referencias	227

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 3.1 Comparación de los MOEAs más Conocidos y Utilizados.....	72
Tabla 3.2 Los MOEAs más Utilizados para Resolver el Problema de Optimización de Cartera	79
Tabla 5.1 Medidas de Tamaño, Liquidez y Concentración 2014-2016.....	131
Tabla 5.2 Concentración Mercados Accionarios de Latinoamérica 2007-2016	141
Tabla 5.3 Matriz de Correlación de los Índices Bursátiles de Latinoamérica, Estados Unidos y Europa 2002-2016.....	148
Tabla 5.4 Matriz de Correlación de los Tipos de Cambio de Latinoamérica, Estados Unidos y Europa 2002-2016.....	149
Tabla 5.5 EMBIG de Latinoamérica 2000-2016.....	154
Tabla 5.6 Matriz de Correlación de los EMBIG de Latinoamérica 2000-2016	155
Tabla 5.7 Calificación Deuda Soberana Largo Plazo Moneda Extranjera de Latinoamérica 2000-2016.....	156
Tabla 7.1 Número de Compañías Listadas en el Mercado MILA a Junio 2017	175
Tabla 7.2 Compañías del Mercado MILA que Durante el Periodo de Junio 2011 a Diciembre 2015 Cumplen con los Tres Criterios de Selección: i) Presencia en Bolsa, ii) Volumen de Negociación, y iii) Rentabilidad Promedio Positiva	176
Tabla 7.3 Compañías del Mercado MILA, que Durante el Periodo de Enero 2012 a Junio 2015, Cumplen con los Tres Criterios de Selección: i) Presencia en Bolsa, ii) Volumen de Negociación, y iii) Rentabilidad Promedio Positiva.....	177
Tabla 7.4 Compañías del Mercado MILA que Durante el Periodo de Junio 2012 a Diciembre 2016 Cumplen con los Tres Criterios de Selección: i) Presencia en Bolsa, ii) Volumen de Negociación, y iii) Rentabilidad Promedio Positiva	179

Tabla 7.5 Compañías del Mercado MILA que Durante el Periodo de Enero 2013 a Junio 2017 Cumplen con los Tres Criterios de Selección: i) Presencia en Bolsa, ii) Volumen de Negociación, y iii) Rentabilidad Promedio Positiva	180
Tabla 7.6 Parámetros principales del Algoritmo NSGAII	190
Tabla 8.1 Retornos Difusos Esperados (Periodo I)	192
Tabla 8.2 Retornos Difusos Esperados (Periodo II).....	193
Tabla 8.3 Retornos Difusos Esperados (Periodo III).....	194
Tabla 8.4 Retornos Difusos Esperados (Periodo IV)	195
Tabla 8.5 Liquidez Difusa Esperada (Periodo I)	197
Tabla 8.6 Liquidez Difusa Esperada (Periodo II).....	198
Tabla 8.7 Liquidez Difusa Esperada (Periodo III)	199
Tabla 8.8 Liquidez Difusa Esperada (Cartera IV).....	199
Tabla 8.9 Rentabilidad Objetivo Difusa Esperada (Cartera I-IV).....	210
Tabla 8.10 Rentabilidad Difusa Esperada (Carteras I-IV)	212
Tabla 8.11 Liquidez Difusa Esperada (Carteras I-IV).....	215

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1.1 Estructura de la Tesis	11
Figura 2.1 Tipos de Riesgos Financieros.....	15
Figura 2.2 Medidas de Riesgo en el Problema de Selección de Carteras.....	17
Figura 2.3 Conjuntos Eficientes y Factibles	31
Figura 2.4 <i>Downside Risk</i>	36
Figura 2.5 CVaR y VaR para una Distribución t de Student.....	46
Figura 3.1 Transformación del Vector de Decisión al Vector de Respuestas	57
Figura 3.2 Relación de la Dominancia de Pareto entre las Soluciones Candidatas Relativas a la Solución B.....	61
Figura 3.3 Frentes Óptimos de Pareto para un mismo Espacio de Soluciones	63
Figura 3.4 Estructura General de un Algoritmo Evolutivo	67
Figura 3.5 Descomposición de Tareas de un EA y un MOEA.....	71
Figura 3.6 Ordenamiento Rápido de Soluciones No-Dominadas en NSGAI para dos objetivos	80
Figura 3.7 <i>Crowding-distance</i> usados en NSGAI para dos Objetivos.....	82
Figura 3.8 Esquema del Funcionamiento de NSGAI.....	86
Figura 4.1 Funciones de Pertenencia L-R y sus Parámetros de Forma	95
Figura 4.2 Distribuciones de Credibilidad de una Variable Fuzzy L-R	105
Figura 4.3 Función de Pertenencia Triangular	110
Figura 4.4 Función de Pertenencia del Retorno de un Cartera $\xi = (0, 1.5, 3)$	111
Figura 5.1 Tendencia de la Tasa de Crecimiento Anual de la Capitalización Bursátil de Latinoamérica 2000-2016.....	132

Figura 5.2 Tasa de Crecimiento Promedio Anual de la Capitalización Bursátil de Latinoamérica 2000-2016.....	132
Figura 5.3 Capitalización Relativa Promedio de Latinoamérica 2000-2016.....	134
Figura 5.4 Número de Firmas Registradas en Bolsa de Latinoamérica 2000-2016.....	135
Figura 5.5 Tendencia de la Tasa de Crecimiento Anual del Volumen de Acciones de Latinoamérica 2000-2016.....	138
Figura 5.6 Razón Volumen de Negociado en Acciones/PIB de Latinoamérica 2010-2016.....	139
Figura 5.7 Tasa de Rotación de Latinoamérica 2010-2016.....	139
Figura 5.8 Dominancia Índices Bursátiles de Latinoamérica, Estados Unidos y Europa 2002-2016.....	142
Figura 5.9 Tendencia de la Tasa de Crecimiento Semanal de los Índices Bursátiles de Latinoamérica, Estados Unidos y Europa 2002-2016	144
Figura 5.10 Dominancia Tipos de Cambio de Latinoamérica, Estados Unidos y Europa 2002-2016.....	145
Figura 5.11 Tendencia de los Tipos de Cambio de Latinoamérica, Estados Unidos y Europa 2002-2016	146
Figura 5.12 Comportamiento de la Rentabilidad Nominal de una Cartera que Invierte en los Índices Accionarios de Latinoamérica para un Inversor de Estados Unidos, Argentina, Brasil, Chile, Colombia, México y Perú 2002-2015	150
Figura 5.13 Comportamiento de la Rentabilidad Real de una Cartera que Invierte en los Índices Accionarios de Latinoamérica para un Inversor de Estados Unidos, Argentina, Brasil, Chile, Colombia, México y Perú 2002-2015	151
Figura 5.14 Tendencia del EMBIG de Latinoamérica 2000-2016.....	153
Figura 6.1 Estimación Núcleo, Soporte y Parámetros de Forma del i -ésimo Activo..	167
Figura 7.1 Determinación de la Población Objeto de Estudio	174
Figura 7.2 Flujo de la Información del Modelo Credibilístico Multiobjetivo de Media-Semivarianza-Liquidez para la Selección de Carteras	189
Figura 8.1 Tendencia de la Tasa de Crecimiento Semanal de los Activos Seleccionados Jun 2011-Jun 2017.....	196
Figura 8.2 Fronteras Óptimas de Pareto del Modelo Credibilístico Multiobjetivo de Media-Semivarianza-Liquidez (Carteras I-IV)	206

Figura 8.3 <i>Downside Risk</i> y Rentabilidad Esperada Correspondientes al Modelo Credibilístico Multiobjetivo de Media-Semivarianza-Liquidez (Carteras I-IV).....	207
Figura 8.4 Liquidez y Rentabilidad Esperada Correspondientes al Modelo Credibilístico Multiobjetivo de Media-Semivarianza-Liquidez (Carteras I-IV).....	208
Figura 8.5 <i>Downside Risk</i> y Liquidez Esperada Correspondientes al Modelo Credibilístico Multiobjetivo de Media-Semivarianza-Liquidez (Carteras I-IV).....	209
Figura 8.6 Asignación Óptima de los Activos de las (Carteras I-IV).....	211
Figura 8.7 Funciones de Pertenencia Rentabilidad Difusa Esperada (Carteras I-IV) ..	212
Figura 8.8 Distribuciones de Credibilidad Rentabilidad Difusa Esperada (Carteras I-IV).....	213
Figura 8.9 Funciones de Pertenencia Liquidez Difusa Esperada (Carteras I-IV)	214
Figura 8.10 Distribuciones de Credibilidad Liquidez Difusa Esperada (Carteras I-IV).....	215
Figura 8.11 Tendencia del Comportamiento de la Cartera Rebalanceada Frente a Cartera Sin Rebalancear Enero 2016-Octubre 2017	216
Figura 8.12 Tendencia del Comportamiento de la Cartera Rebalanceada Frente al ETF MILATRC Marzo 2016-Octubre 2017	217
Figura 8.13 Dominancia Carteras Óptimas Frente al ETF MILATRC Marzo 2016-Octubre 2017.....	217
Figura 8.14 Efecto del Tipo de Cambio en la Rentabilidad de la Cartera Rebalanceada para un Inversioista de Chile, Colombia, México y Perú Enero 2016-Octubre 2017.....	218

PUBLICACIONES

De la presente tesis doctoral se ha extraído el siguiente conjunto de publicaciones en revistas y actas de congresos internacionales de adecuado prestigio:

Rodriguez, J.N., González, Jairo-Alexander, Rueda, Gladys-Elena, Diaz, Q.S. (Septiembre 2017). Diversificación Internacional de Portafolio en los Mercados Accionarios de Argentina, Brasil, Chile, Colombia, México y Perú. Trabajo presentado en el II Congreso Internacional en Administración de Negocios Internacionales CIANI 2017, Bucaramanga, Colombia.

González, Jairo-Alexander, Díaz, Q.S.M., Núñez, R.J. (2016). Optimización de Carteras a la Luz de la Teoría de Decisión Fuzzy. Revista Científica Puente. 10 (2). 103-115.

Arribas, I., González, Jairo-Alexander, Guijarro, F., Oliver, J. (Mayo, 2016). Impact of Foreign Exchange Risk on Investment Portfolio Performance in Latin American Stock Indexes. Trabajo presentado en 9th International Scientific Conference “Business and Management 2016”, Vilnius, Lithuania.

Garcia, F., González, Jairo-Alexander, Oliver, J. (2015). Mean-variance Investment Strategy applied in Emerging Financial Markets: Evidence from the Colombian Stock Market. *Intellectual Economics*. 9 (1). 22-29.

Garcia, F., González, Jairo-Alexander, Oliver, J. (Febrero, 2016). Evolución de los Mercados Accionarios Latinoamericanos: Impacto de las Crisis Financieras Internacionales. Trabajo presentado en XXVI Jornadas Luso-Espanholas de Gestão Científica, Idanha-a-Nova, Portugal.

González, B. Jairo-Alexander, Rueda, Gladys-Elena. (2015). A Current Vision of Modern Theory of Portfolio. *I + D Revista de Investigaciones*. 5 (1). 43-55.

Garcia, F., González, Jairo-Alexander, Oliver, J. (Julio, 2015). Application of the Theory of Markowitz for Structure Portfolio Investment in the Colombian Stock Market. Trabajo presentado en 1st International Conference on Business Management, Valencia, España.

Capítulo 1

1 INTRODUCCIÓN

1.1 Antecedentes

La selección de carteras es uno de los temas más explorados y dinámicos de la teoría financiera moderna. Ésta hace referencia a la asignación de la riqueza del inversor entre diferentes tipos de activos financieros con el objetivo de no solo minimizar el riesgo de la riqueza terminal, sino que también el valor esperado de ésta sea igual a un nivel prescrito. La primera formulación matemática del problema de selección de carteras fue el modelo clásico y seminal de media varianza propuesto por Markowitz (1952), quien asumió como una variable aleatoria la tasa de retorno de un activo, tomó la esperanza matemática y la varianza de esa variable aleatoria como el retorno y el riesgo respectivamente, y determinó la cartera óptima resolviendo una programación cuadrática. Alternativamente, para mejorar el modelo de media varianza, Konno y Yamazaki (1991) propusieron el primer modelo de selección de carteras de programación lineal, utilizando

la desviación absoluta como medida alternativa para cuantificar el riesgo. Sin embargo, el modelo de desviación media absoluta es equivalente al modelo de media varianza si los rendimientos siguen una distribución normal multivariante (Vercher, Bermúdez, y Segura, 2007). Como puede apreciarse, cuando los rendimientos de la cartera son típicamente asimétricos, la varianza y la desviación absoluta no son apropiadas para medir el riesgo de la cartera, debido a que éstas consideran en iguales condiciones tanto los retornos altos que el inversionista desea, como los retornos bajos que el inversionista no desea (X. Li y Qin, 2014). En otras palabras, estas medidas de riesgo penalizan las desviaciones alcistas (*i.e.* ganancias) y bajistas (*i.e.* pérdidas) del retorno esperado (Gupta, Mittal, y Mehlawat, 2013). Para resolver este problema, varias medidas de riesgo de tipo *downside* (*i.e.* medidas de riesgo que solo consideran como arriesgado los resultados por debajo de un nivel de referencia) han sido propuestas: semivarianza (Markowitz, 1959), momento parcial más bajo (*lower partial moment*) (Bawa, 1975; Fishburn, 1977), semidesviación absoluta (Speranza, 1993), valor en riesgo (*VaR*) (J.P.Morgan, 1996) y valor en riesgo condicional (*CVaR*) (Rockafellar y Uryasev, 2000, 2002), entre otras. Una de las medidas de riesgo *downside* más comúnmente aceptadas es la semivarianza, introducida inicialmente por Markowitz (1959) y posteriormente desarrollada y analizada en modelos de selección de carteras de media semivarianza (Choobineh y Branting, 1986; Estrada, 2004; Grootveld y Hallerbach, 1999; Mao y Brewster, 1970; Markowitz, Todd, Xu, y Yamane, 1993; Rom y Ferguson, 1994). La ventaja principal sobre la varianza es que la semivarianza no considera los valores por encima de un valor crítico (*i.e.* ganancias) como riesgo (Gupta, Mittal, *et al.*, 2013), y es una medida de riesgo más apropiada cuando un inversionista está más interesado en la posibilidad de reducir o cubrir sus posibles pérdidas y la variabilidad de éstas, que en las de sus posibles ganancias

(Markowitz *et al.*, 1993). No obstante, cabe señalar que el modelo de media semivarianza es computacionalmente más complejo que el modelo de media varianza (Grootveld y Hallerbach, 1999; Markowitz *et al.*, 1993).

Tradicionalmente, en la mayoría de los modelos de selección de carteras existentes las decisiones de los inversionistas se rigen por dos criterios fundamentales: el retorno y el riesgo (Konno y Yamazaki, 1991; Markowitz *et al.*, 1993; Speranza, 1993). Sin embargo, frecuentemente en el proceso de selección de carteras se encuentra que no toda la información relevante para la toma de decisiones de inversión puede ser capturada solo por el retorno y el riesgo. En este sentido, es importante tener en cuenta otros criterios que podrían tener un nivel de importancia igual o mayor para el inversionista. Al considerar éstos en un modelo de selección de carteras, es posible obtener portafolios en los que un rendimiento o riesgo menos favorable es compensado por los beneficios adicionales que aportan al desempeño de la cartera la inclusión de otros criterios, alcanzándose un mayor nivel satisfacción para el inversionista (Gupta, Inuiguchi, Mehlawat, y Mittal, 2013). Por estas razones, la aplicación de modelos de toma de decisiones multiobjetivo para resolver el problema de optimización de carteras ha registrado un aumento considerable en los últimos años (Anagnostopoulos y Mamanis, 2010; Babaei, Sepehri, y Babaei, 2015; Branke, Scheckenbach, Stein, Deb, y Schmeck, 2009; Chunchinda, Dandapani, Hamid, y Prakash, 1997; Hallerbach y Spronk, 2002; Joro y Na, 2006; Konno y Yamazaki, 1991; Lwin, Qu, y MacCarthy, 2017).

En la mayoría de los estudios antes mencionados, el retorno de los activos se asume como una variable aleatoria, y la teoría de la probabilidad fue la principal herramienta

matemática para tratar la incertidumbre en el pasado. No obstante, el mundo es complejo y la aleatoriedad no es el único tipo de incertidumbre en la realidad, especialmente cuando se incluyen factores humanos (Huang, 2010). En los mercados financieros la información disponible es a menudo incompleta, lo que conduce a que las decisiones se tomen bajo incertidumbre. Por otra parte, los mercados se ven afectados por la vaguedad y la ambigüedad asociada a expresiones lingüísticas como "alto riesgo", "bajo rendimiento" y "baja liquidez" utilizados por los inversionistas y los expertos en inversiones (Gupta, Inuiguchi, *et al.*, 2013; Gupta, Mittal, *et al.*, 2013). Debido a la información vaga y ambigua, varios investigadores han utilizado la teoría de conjuntos difusos (Zadeh, 1965) en el problema de selección de carteras para integrar la información cualitativa y cuantitativa, las preferencias subjetivas de los inversionistas y el conocimiento experto. Una rica literatura disponible propone diferentes aproximaciones para cuantificar la incertidumbre del rendimiento futuro del activo mediante distribuciones de posibilidad (Carlsson, Fullér, y Majlender, 2002; Dubois y Prade, 1985; Saborido, Ruiz, Bermúdez, Vercher, y Luque, 2016; Vercher *et al.*, 2007; S. Wang y Zhu, 2002; Yue y Wang, 2017). Aunque la medida de posibilidad ha sido ampliamente utilizada, no es auto-dual. Como alternativa, B. Liu y Liu (2002) propusieron una medida de credibilidad auto-dual para superar las limitaciones de la medida de posibilidad. Desde entonces, algunos investigadores sugieren modelar la incertidumbre del rendimiento futuro del activo mediante distribuciones de credibilidad (Barak, Abessi, y Modarres, 2013; Huang, 2006; Jalota, Thakur, y Mittal, 2017a; Mehlawat, 2016; Vercher y Bermúdez, 2015; B. Wang, Li, y Watada, 2017).

Un aspecto importante a considerar en los modelos difusos de optimización de cartera está relacionado con la selección apropiada de la función de pertenencia que mejor se ajuste a los datos históricos de los rendimientos de los activos. Existe una gran cantidad de literatura que utiliza funciones de pertenencia convencionales, como lineal, trapezoidal, triangular y sigmoide (Gupta, Mittal, *et al.*, 2013; X. Li, Zhang, Wong, y Qin, 2009; Mashayekhi y Omrani, 2016; Qin, 2017; Qin, Li, y Ji, 2009; Yue y Wang, 2017) para este propósito. En un esfuerzo por buscar un mejor ajuste de la representación difusa de los datos históricos, algunos investigadores han estado utilizando números difusos de tipo L-R, debido a que la función de pertenencia generada por estos números difusos es más flexible, y, es una mejor opción para este tipo de proceso de modelado (Jalota *et al.*, 2017a; Jalota, Thakur, y Mittal, 2017b; Saborido *et al.*, 2016; Vercher y Bermúdez, 2013, 2015)

1.2 Motivaciones de la Investigación

Una vez expuestos los antecedentes de algunas investigaciones previas relacionadas con el problema objeto de estudio de la presente investigación, esto es, el problema de selección de carteras, a continuación resulta conveniente describir las razones que ayudaron a perfilar el objeto de estudio de la presente tesis doctoral y que han servido de motivación para la realización de la misma:

i) La mayoría de los modelos de optimización basados en el ajuste de números difusos LR para modelar los parámetros inciertos de una cartera revisados hasta la fecha (Jalota *et al.*, 2017b; Saborido *et al.*, 2016; Vercher y Bermúdez, 2013, 2015) se enfocan en modelar directamente la incertidumbre del rendimiento esperado de la cartera, en lugar de utilizar la combinación de incertidumbres proporcionadas por los rendimientos de los

activos individualmente considerados. De acuerdo a la revisión literaria realizada, existen solo tres estudios en los cuales la incertidumbre sobre el rendimiento de cada activo individual se modeliza como un número difuso L-R (Jalota *et al.*, 2017a; Vercher, 2008; Vercher *et al.*, 2007). La principal ventaja de utilizar números difusos L-R para los activos individuales, es que permite obtener una mejor información sobre el comportamiento de cada activo, y, por consiguiente, se logra una mejor contribución en la formación de la cartera (Jalota *et al.*, 2017a). Por lo anterior, es lógico extender la literatura a un modelo de selección de carteras asumiendo que la rentabilidad de cada activo individual se representa mediante un número difuso de tipo L-R, con funciones de referencia de la familia de potencias.

ii) Una importante cuestión que ha revelado la revisión de los estudios es que una gran parte de los modelos de selección de carteras basados en ajustes de números difusos L-R han sido desarrollados bajo un entorno posibilístico. De acuerdo a los conocimientos del autor de este trabajo, solo existen tres estudios en los que los investigadores han modelizado la incertidumbre del rendimiento de una cartera mediante distribuciones de credibilidad (Jalota *et al.*, 2017a, 2017b; Vercher y Bermúdez, 2015). Aunque la medida de posibilidad ha sido extensamente utilizada en la literatura para representar la tasa de rendimiento de los activos en la teoría de selección de carteras, posee la desventaja de inconsistencia con la ley de medio excluido y la ley de contradicción. A modo de ejemplo, un evento difuso puede fallar aunque su valor de posibilidad sea 1, y se puede mantener aunque su valor de necesidad sea 0. Esto obedece a que la medida de posibilidad no satisface la propiedad de dualidad, plenamente necesaria en la teoría y en la práctica. Asimismo, es importante resaltar que un evento difuso seguramente ocurrirá si su valor de credibilidad es 1, es decir, el evento difuso se mantendrá si su valor de credibilidad es

1, y fallará si su valor de credibilidad es 0 (Gupta, Mehlawat, Inuiguchi, y Chandra, 2014b). En este propósito, es fundamental abordar el uso de la medida de credibilidad como la medida básica de la ocurrencia de un evento difuso y estudiar su aplicación en los modelos de toma de decisiones multiobjetivo para resolver el problema de optimización de carteras.

iii) En los estudios disponibles en la literatura, se evidencia que existe una fuerte dependencia de la varianza como una medida de riesgo en los modelos de optimización de carteras (Mehlawat, 2016; Metaxiotis y Liagkouras, 2012). Según se ha citado, para que la varianza difusa sea una medida de riesgo eficiente, la función de pertenencia de los retornos de los activos financieros debe ser simétrica, lo que resulta una aceptación limitada de la varianza como medida de riesgo. Es este propósito, la semivarianza como medida de riesgo *downside*, no depende de un determinado tipo de función de pertenencia simétrica y puede calcularse a partir de datos no simétricos. Según el nivel de conocimientos del autor de este estudio, solo existen dos investigaciones en las que se adoptó la semivarianza como medida de riesgo en un modelo credibilístico de optimización basado en el ajuste de números difusos L-R para modelar los parámetros inciertos de la cartera (Jalota *et al.*, 2017a, 2017b). Como puede apreciarse, la consideración de la semivarianza como medida de riesgo en un entorno credibilístico no se ha estudiado mucho, a pesar de que ésta es más dinámica y general que la varianza, y no depende de ninguna función de pertenencia específica. Dada esta condición, resulta oportuno realizar un aporte a la literatura y considerar la semivarianza como la medida de riesgo en un modelo de optimización de carteras multiobjetivo a la luz de la teoría de la credibilidad.

iii) La mayoría de los modelos difusos de optimización de carteras revisados hasta la fecha han sido evaluados en mercados financieros como la Bolsa de Madrid (España), la Bolsa de Valores de Bombay (India), la Bolsa de Valores de Shanghai (China) y la Bolsa de Valores de Nueva York (USA), entre otros. Según el leal saber y entender, no existen estudios numéricos y experimentales que se hayan desarrollado en los mercados financieros latinoamericanos. A este respecto, el presente estudio hace una contribución a la literatura proponiendo un modelo difuso multiobjetivo de selección de carteras, donde se asume por primera vez la toma de decisiones de inversión en el Mercado Integrado Latinoamericano (MILA), que integra los mercados bursátiles de Chile, Colombia, México y Perú.

iv) Además de la rentabilidad y el riesgo, la liquidez es también una de las principales preocupaciones de los inversionistas al realizar la toma de decisiones. Generalmente, los inversores prefieren una mayor liquidez de sus carteras, especialmente cuando el mercado presenta una tendencia alcista, debido a que los rendimientos de los activos altamente líquidos tienden a aumentar con el paso del tiempo. Una revisión de la literatura mostró que la liquidez se ha considerado como una variable difusa en modelos de selección de carteras (Arenas-Parra, Bilbao-Terol, y Rodríguez-Uría, 2001; Gupta, Inuiguchi, y Mehlawat, 2011; Gupta, Mehlawat, y Saxena, 2008; Jalota *et al.*, 2017a, 2017b). Debido a la importancia de la liquidez de los activos, y debido a la preferencia de los inversionistas de poseer una cartera que sea fácilmente liquidada, es útil incorporar el criterio de liquidez al formular el modelo de selección de carteras y obtener estrategias de inversión multiobjetivo bajo un entorno de decisión difusa.

v) El concepto de cartera óptima recae en la teoría moderna de portafolio (Markowitz, 1952), la cual asume (entre otras cosas) que los inversionistas actúan racionalmente y sus decisiones siempre estarán orientadas a maximizar la rentabilidad esperada para un determinado nivel de riesgo, o minimizar el riesgo soportado para un determinado nivel de rentabilidad esperada. En este propósito, se requiere establecer medidas o indicadores que relacionen la rentabilidad obtenida por una cartera con el riesgo asociado a la misma, permitiendo, de esta forma, una correcta evaluación y comparación de los resultados obtenidos en una cartera dada. Para tal fin, se han desarrollado las llamadas medidas de *performance* de las carteras, basadas en los dos elementos definitorios de éstas: la rentabilidad y el riesgo. Entre las medias de *performance* se encuentra el ratio de Sortino (Sortino y Forsey, 1996; Sortino y Price, 1994; Sortino y Van Der Meer, 1991), que permite medir la prima de rentabilidad por unidad de riesgo soportado de un activo o cartera. El ratio de Sortino es una modificación del ratio de Sharpe (Sharpe, 1994), y se fundamenta en el supuesto de que el objetivo de los inversionistas es el de minimizar la volatilidad proveniente de los retornos negativos (*i.e.* volatilidad no deseada). De acuerdo a la revisión literaria de esta investigación, no existen estudios en los cuales se haya aplicado el ratio de Sortino en un entorno credibilístico. En este sentido, para seleccionar la cartera óptima de la frontera eficiente, este estudio define por primera vez el ratio credibilístico de Sortino, como la relación entre la prima de riesgo credibilística y la semivarianza credibilística.

1.3 Objetivos

Una vez expuestos los motivos que justifican la realización de la presente tesis doctoral, resulta necesario plantear los objetivos que se persiguen con la misma, con el fin de delimitar los ejes fundamentales de la investigación.

En el marco de este proyecto de investigación se ha identificado un objetivo principal, que se desglosa, a su vez, en cuatro objetivos secundarios:

1.3.1 Objetivo General

Optimizar carteras multiobjetivo a la luz de la Teoría de la Credibilidad en el Mercado Integrado Latinoamericano (MILA).

1.3.2 Objetivos Específicos

- Caracterizar la situación actual de los mercados de capitales de Latinoamérica.
- Plantear un modelo credibilístico de tres objetivos para generar carteras eficientes que incorporen las preferencias del inversor y las condiciones del mercado.
- Aplicar el modelo credibilístico multiobjetivo de selección de carteras en el Mercado Integrado Latinoamericano (MILA).
- Presentar las conclusiones y aportaciones del estudio a la comunidad académica y científica.

1.4 Estructura de la Tesis

La tesis se divide en 6 partes como se aprecia en la figura 1.1. En la primera parte, en el capítulo 1, se expone los antecedentes, las motivaciones y los objetivos de la investigación. En la segunda parte, los capítulos 2, 3 y 4, examinan el estado del arte de la optimización de carteras, los algoritmos evolutivos multiobjetivo en la optimización de carteras, y la teoría de la credibilidad. La tercera parte corresponde al capítulo 5 y presenta una caracterización de los mercados de capitales de Latinoamérica durante el periodo de enero de 2000 a diciembre de 2016. En la siguiente parte, los capítulos 6 y 7 proponen el

modelo credibilístico multiobjetivo de media-semivarianza-liquidez para la selección de carteras, y explican la solución metodológica para resolver el modelo aplicando el algoritmo NSGAII (*Non-dominated Sorting Genetic Algorithm II*). En la quinta parte, en el capítulo 8, se testea el modelo propuesto usando los retornos históricos semanales de los mercados accionarios de Chile, Colombia, México y Perú entre junio de 2011 y junio de 2017. Este capítulo también incluye una discusión de los resultados obtenidos. Finalmente, la sexta parte corresponde al capítulo 9, y presenta las conclusiones y establece posibles líneas futuras de investigación que se generen a raíz de los resultados de la investigación.

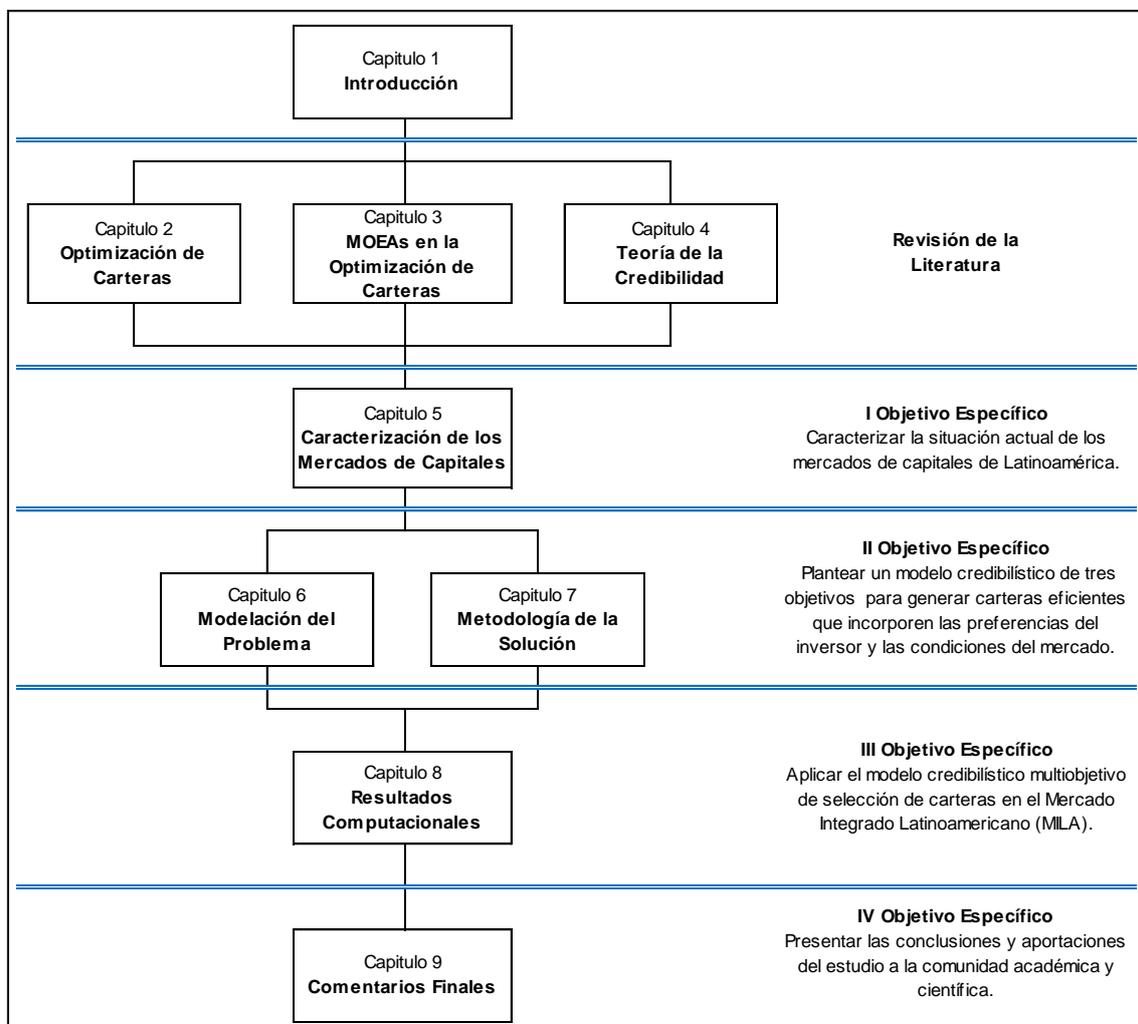


Figura 1.1 Estructura de la Tesis

Capítulo 2

2 OPTIMIZACIÓN DE CARTERAS

2.1 Introducción

La teoría de optimización de carteras ha sido fundamental para el desarrollo y entendimiento de los mercados financieros y la toma de decisiones financieras. El mayor avance en este campo lo produjo el profesor Harry Markowitz en 1952, con la publicación de su artículo seminal “*Portfolio Selection*” (Kolm, Tütüncü, y Fabozzi, 2014). Esta innovadora teoría proporcionó una respuesta a la pregunta fundamental: ¿Cómo un inversionista debe asignar sus fondos entre las diferentes alternativas de inversión? En primer lugar, Markowitz cuantificó el retorno y riesgo de un activo, utilizando las medidas estadísticas de su media y varianza, respectivamente. En segundo lugar, sugirió que los inversionistas deberían considerar en conjunto la rentabilidad y el riesgo, y determinar la asignación de sus fondos entre las diferentes alternativas de inversión en función del *trade-off* entre el riesgo y la rentabilidad.

Sobre la base de las consideraciones anteriores, la idea propuesta por Markowitz de que un óptimo *trade-off* entre la rentabilidad y el riesgo debería ser la base de la toma de decisiones financieras, constituyó un aporte sin precedentes por dos razones fundamentales: En primer lugar, postuló que una evaluación cuantitativa conjunta del rendimiento y el riesgo de una cartera se podría llevar a cabo considerando los retornos de los activos y sus co-movimientos. Un principio importante de esta innovadora propuesta fue el de la diversificación de la cartera, que se basa en la idea de que el riesgo de un portafolio depende de la covarianza de los activos que lo componen y no del riesgo promedio de los mismos (Fabozzi, Kolm, Pachamanova, y Focardi, 2007; Mascareñas, 2015). Este concepto fue ajeno al análisis financiero clásico (análisis ad hoc) descrito por Graham y Dodd (1934), que giraba en torno a la valoración de los activos individuales, principalmente a través del uso del Balance General y el Estado de Resultados, y diseñados para identificar aquellos activos que se vendían por debajo o por encima de su valor intrínseco o su valor en libros (Bhalla, 2008). En segundo lugar, Markowitz formuló el proceso de decisión financiera como un problema de optimización, y sugirió que entre un número infinito de carteras que logran un retorno objetivo y específico, el inversionista debe elegir la cartera que ofrece la varianza más pequeña. Todas las demás carteras son “ineficientes” debido a que poseen una mayor varianza, y por lo tanto, un mayor riesgo (Fabozzi *et al.*, 2007).

El trabajo de Markowitz ha tenido un alto impacto en la investigación académica y la industria financiera en su conjunto (Kolm *et al.*, 2014). Al realizar algunas búsquedas en Internet a partir de la redacción de esta tesis doctoral se revela que 122.000 artículos en Google Académico citan el artículo original de Markowitz “Portfolio Selection”.

Cuando se busca “Modern Portfolio Theory” se obtienen aproximadamente 1.230.000 aciertos en Google, 3.410 videos en YouTube, 105 libros en Amazon y miles de tweets en Twitter.

No obstante, al realizar una comparación entre los supuestos simplistas del modelo inicial de Markowitz y las condiciones existentes en el mundo real a las que se enfrentan los decisores (*e.g.* requisitos adicionales sobre el número o proporción de los activos seleccionados, la distribución de los rendimientos, etc.), se evidencia la necesidad de mejorarlo, y como consecuencia, se ha producido una creciente complejidad en los modelos que abordan el problema de selección de carteras (Ponsich, Jaimes, y Coello, 2013). En el orden de las ideas anteriores, el modelo de media varianza (Markowitz, 1952) ha sido extendido mediante la introducción de nuevas medidas del riesgo de la inversión: semivarianza (Markowitz, 1959), desviación absoluta (Konno y Yamazaki, 1991), valor en riesgo (J.P.Morgan, 1996), entre otras, y de factores que permiten modelizar los requisitos del inversionista y de los mercados financieros: costes de transacción, horizonte multi-periodo, cardinalidad restringida, entre otros (Vercher, 2015).

En el marco de las observaciones anteriores, la sección 2.1 de este capítulo tiene como pretensión realizar una revisión sistemática de la literatura que permita analizar no solo el modelo clásico de optimización de media varianza, sino también revisar varias extensiones de este modelo considerando medidas alternativas de riesgo. En la sección 2.2 se ahonda los aspectos relacionados con la optimización de carteras en la práctica. Finalmente, la sección 2.3 presenta el resumen y las conclusiones correspondientes a este capítulo.

2.2 Medidas de Riesgo en el Problema de Selección de Carteras

A pesar del frecuente uso del término “riesgo”, no existe una definición formal del vocablo y, por lo tanto, el entendimiento común del término posee una inherente característica de subjetividad. La definición que da el Diccionario de la Real Academia Española (2014) sobre el vocablo riesgo es “contingencia o proximidad de un daño”, es decir, es la posibilidad de que ocurra (o no ocurra) un evento “negativo”. En este contexto, el riesgo solo se “materializará” cuando un evento toma lugar, aunque éste puede estar siempre presente (Alonso y Berggrun, 2015). Desde el punto de vista matemático, el riesgo generalmente no distingue entre desviaciones positivas o negativas, y se modela como una variable aleatoria (Cottin y Döhler, 2009; Danthine y Donaldson, 2005), donde la función de densidad, describe la probabilidad de que el riesgo tome un determinado valor.

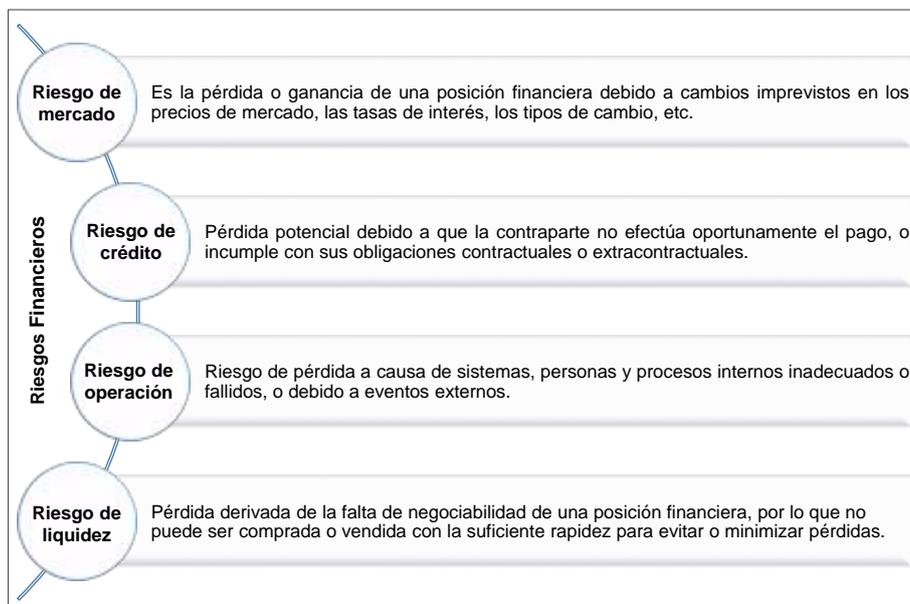


Figura 2.1 Tipos de Riesgos Financieros

Fuente: Elaboración propia a partir de McNeil, Frey, y Embrechts (2005), y Unger y Poddig (2014)

En finanzas, el concepto de riesgo se relaciona con una pérdida o una ganancia. Dowd (2002) define el riesgo financiero como “*la perspectiva de pérdidas o ganancias financieras debido a cambios imprevistos en los factores de riesgo subyacentes*” (p. 1). Usualmente, según su naturaleza los riesgos financieros se dividen en: riesgo de mercado, riesgo de crédito, riesgo de operación y riesgo de liquidez (McNeil *et al.*, 2005; Unger y Poddig, 2014), tal y como se muestra en la figura 2.1.

En referencia a la clasificación anterior, Dowd (2002) señala que dentro del riesgo de mercado se encuentran otros tipos más específicos de factores de riesgo, como por ejemplo, riesgo del subyacente, riesgo de tasas de interés, riesgo de tipo de cambio, riesgo asociado al precio de los *commodities*, entre otros. En este propósito, esta tesis doctoral cubre el aspecto relacionado con el riesgo de mercado, que es el riesgo derivado de la variación en los precios de mercado de los activos en una cartera dada.

Prosiguiendo con el análisis, es importante tener presente las actitudes que los inversionistas poseen hacia al riesgo y cómo éstas influyen en el proceso de toma de decisiones financieras. Según se ha citado, el riesgo es generalmente subjetivo y depende de la situación. Las actitudes del inversionista frente al riesgo dependen de las preferencias subjetivas, que pueden ser conceptualizadas a través de la teoría de la utilidad¹ (Dowd, 2005). De acuerdo a los planteamientos presentados por Hanisch (2006), una medida de riesgo representa la cantidad del grado de incertidumbre, o el nivel de consecuencias negativas que el inversionista está dispuesto a tomar en una decisión bajo

¹ La teoría de la utilidad se ocupa de las preferencias de los individuos en las situaciones que conllevan la toma de decisiones (Fishburn, 1970, p. 1). En este contexto, las decisiones y la teoría de la utilidad están estrechamente relacionadas. Fishburn (1970) señala: “*Para una relación entre decisión y preferencia, se asumirá que las preferencias, en mayor o menor medida, rigen las decisiones, y, en términos generales, un tomador de decisiones preferiría implementar una alternativa más preferida que una menos preferida*” (p. 1).

riesgo. En este sentido, por un lado, las medidas de riesgo capturan la incertidumbre sobre cuáles serán los posibles resultados que ocurrirán, y por otra parte, cómo los resultados negativos influyen en las decisiones del inversor. En este propósito, diferentes medidas de riesgo se han establecido para cuantificar no solo la densidad de una variable aleatoria, sino también para reflejar las preferencias subjetivas del inversionista (Unger y Poddig, 2014).

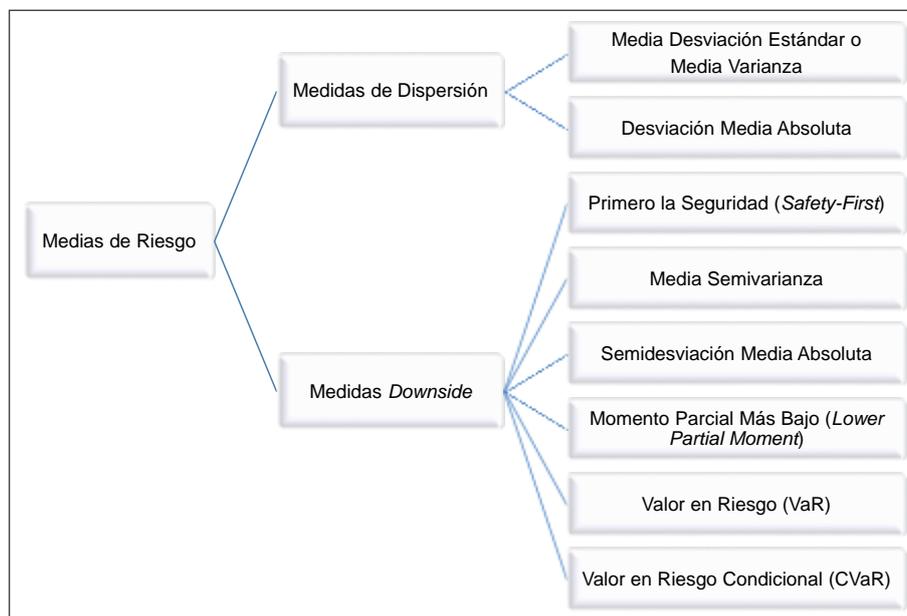


Figura 2.2 Medidas de Riesgo en el Problema de Selección de Carteras

Fuente: Elaboración propia a partir de Fabozzi *et al.* (2007)

Como muestra la figura 2.2, en el problema de selección de carteras se distinguen dos tipos de medidas de riesgo: medidas de riesgo de dispersión y medidas de riesgo *Downside*² (Fabozzi *et al.*, 2007; Ortobelli, Rachev, Stoyanov, Fabozzi, y Biglova, 2005). A continuación se presentará una revisión de estas medidas y su uso en la optimización de carteras:

² En términos anglosajones al riesgo de las pérdidas se le llama “*downside risk*” y riesgo de las ganancias “*upside risk*”.

2.2.1 Medidas de Riesgo de Dispersión

Las medidas de riesgo de dispersión son medidas de incertidumbre. Sin embargo, la incertidumbre no cuantifica necesariamente el riesgo. Estas medidas de riesgo, denominadas también “simétricas”, penalizan los rendimientos tanto por encima como por debajo del rendimiento esperado. En otras palabras, no hacen distinción entre las desviaciones positivas (*i.e.* ganancias) y las negativas (*i.e.* pérdidas) respecto al valor esperado del rendimiento (Fabozzi, Focardi, y Kolm, 2010). A continuación se analizarán las medidas de riesgo simétricas de varianza y desviación absoluta.

2.2.1.1 Media Desviación Estándar o Media Varianza³

El paso más importante en la dirección de la gestión cuantitativa de carteras fue realizado por Markowitz (1952) con la introducción del modelo de optimización de cartera basado en un contexto bi-criterio de riesgo-retorno (media-varianza). Inicialmente, este modelo generó relativamente poco interés, pero con el tiempo, la comunidad científica y financiera adoptó la tesis. En la actualidad, los principios introducidos a través de este modelo siguen siendo el núcleo de varios enfoques modernos para la asignación de activos, análisis de inversiones, gestión de riesgos, presupuestos de capital y toma de decisiones en condiciones de incertidumbre (Zopounidis, Doumpos, y Fabozzi, 2014). En 1990, Harry Markowitz, Merton Miller y William Sharpe recibieron el Premio Nobel por su trabajo pionero en la teoría de la economía financiera⁴.

³ La varianza y la desviación estándar se considera como una misma medida de riesgo debido a que la desviación estándar es la raíz cuadrada de la varianza.

⁴ Markowitz recibió el premio por haber desarrollado la teoría de selección de carteras, Sharpe por sus contribuciones a la teoría de la formación de precios de activos financieros y el desarrollo del modelo de valoración del precio de los activos financieros o *capital asset pricing model* (conocido como modelo CAPM), y Miller por su trabajo en la teoría de las finanzas corporativas.

La teoría de Markowitz, popularmente referida como teoría moderna de portafolio, proporciona una respuesta a la pregunta fundamental: ¿Cómo debería un inversionista asignar el capital entre las posibles opciones de inversión? El análisis de cartera se debe fundamentar en algunos criterios que sirvan de guía para lo importante y lo poco importante, lo relevante y lo irrelevante (Azmi, 2013). Algunos de estos criterios incluyen la liquidez, la clase de activos, la región de los activos, la microeconomía, la macroeconomía y la dinámica del mercado (Azmi y Tamiz, 2010). La elección adecuada de estos criterios depende de la situación y la naturaleza del inversionista. Para cada tipo de inversionista, los detalles del análisis de la cartera deben ser seleccionados adecuadamente. No obstante, hay dos criterios que son comunes a todos los inversionistas: la media (retorno esperado) y la varianza del retorno (riesgo). Para Markowitz, las “creencias” o proyecciones respecto a los activos, siguen las mismas reglas de probabilidad que obedecen a las variables aleatorias. Bajo esta suposición, se deduce que el rendimiento esperado de la cartera, es el promedio ponderado de los rendimientos esperados de los activos individuales, y la varianza del rendimiento de la cartera es una función particular de las varianzas de, y las covarianzas entre, los activos y sus pesos en la cartera (Gupta, Mehlawat, Inuiguchi, y Chandra, 2014a). Por lo tanto, los inversionistas deben considerar de forma conjunta el riesgo y el retorno, y determinar la asignación de capital entre las alternativas de inversión sobre la base del principio *trade-off* entre ellos (Kolm *et al.*, 2014). Además, Markowitz sugirió que la selección de carteras debe basarse en las creencias razonables sobre el desempeño futuro más que el desempeño pasado *per se*. Las percepciones basadas en los desempeños pasados asumen, en efecto, que el promedio de los retornos en el pasado son buenas estimaciones del retorno “probable” en el futuro, y la varianza del retorno en el pasado es una buena medida

de la incertidumbre del retorno en el futuro (Gupta *et al.*, 2014a).

La sabiduría convencional siempre ha dicho: “No ponga todos los huevos en una sola canasta”. En términos más técnicos, este viejo adagio aborda los beneficios de la diversificación (Fabozzi, Gupta, y Markowitz, 2002). A tal efecto, es importante señalar que Markowitz, a través de su modelo de media varianza, fue el primero en mostrar los efectos de la diversificación, es decir, la reducción del riesgo a través de la asignación del capital entre varios activos financieros. En esencia, la diversificación se fundamenta en las características de retorno-riesgo (*i.e.* covarianza o correlación) de los diferentes activos. Sin embargo, “más” activos podría no ser necesariamente una “buena” alternativa, si todos los activos exhiben las mismas características de retorno-riesgo. En otras palabras, invertir todo el dinero en activos que están altamente correlacionados no es una estrategia de inversión muy prudente, por más pequeña que sea la probabilidad de que un activo cualquiera tenga un mal desempeño. Esto se debe en parte a que si un único activo tiene un mal desempeño, es probable que debido a su alta correlación con los otros activos éstos también presenten un mal desempeño, afectando el rendimiento de la cartera. Por lo tanto, una “buena” cartera estaría compuesta por activos en los cuales sus características de retorno-riesgo son más diferentes que similares (Fabozzi *et al.*, 2007; Gupta *et al.*, 2014a).

Es bien sabido que la distribución de los rendimientos de los activos no es normal y a menudo exhiben colas gordas o pesadas⁵ (Boudt, Lu, y Peeters, 2015; Fama, 1965b; Jansen, Koedijk, y De-Vries, 2000; Y.S. Kim, Giacometti, Rachev, Fabozzi, y Mignacca,

⁵ La presencia de colas gordas o pesadas es debido al exceso de curtosis de una distribución empírica con relación a la supuesta por una normal teórica. Este exceso incrementa la probabilidad de presenciar valores grandes y pequeños a costa de disminuir la probabilidad de ocurrencia de los valores moderados. Como se sabe, la curtosis de una distribución normal es 3 (mesocúrtica). Si la distribución empírica tiene curtosis menor que 3 se dice que ésta es platocúrtica y si tiene valores mayores que tres, entonces, se dice que es leptocúrtica o de colas gordas (Ramírez-Sánchez, 2004).

2012; Mandelbrot, 1963a, 1963b). Así mismo, hay cierta evidencia de que las varianzas de los retornos de algunos activos no son limitadas (*i.e.* son infinitas, y por lo tanto no existen) (Fabozzi *et al.*, 2007). En igual forma, se ha probado que si los rendimientos de los activos se comportan como una distribución de Pareto-estable, la diversificación puede ya no ser una actividad económica significativa (Fama, 1965a). Bajo este contexto, el principio de la diversificación se podría poner en duda. No obstante, la mayoría de los estudios están de acuerdo en que un cierto nivel de diversificación es alcanzable en los mercados (Campbell, Lettau, Malkiel, y Xu, 2001; Evans y Archer, 1968; Malkiel, 2002; Vardharaj, Fabozzi, y Jones, 2004).

El concepto de diversificación es tan intuitivo y tan influyente que ha sido continuamente aplicado en diferentes áreas de las finanzas. En efecto, una gran parte de las innovaciones que rodean a las finanzas ha estado en la aplicación del concepto de diversificación o en la introducción de nuevos métodos para obtener mejores estimaciones de las varianzas y covarianzas, permitiendo así una mayor precisión tanto en la diversificación como en la medida de riesgo. Sin embargo, el riesgo general de la cartera va más allá de la desviación estándar de ésta. Una cartera con una baja desviación estándar esperada podría tener un mal desempeño a causa de que existen otras varias dimensiones de riesgo que son importantes a considerar al diseñar una política de inversión (Fabozzi, Focardi, y Kolm, 2006). A continuación se presentará la formulación matemática del modelo de media varianza propuesto por Markowitz (1952):

Definición 2.1 Rendimiento de un Activo (Gupta *et al.*, 2014a)

El rendimiento de un activo se expresa como la tasa de rendimiento, que se define durante un período dado como:

$$r_{it} = [(p_{it} - p_{i,t-1}) + d_{it}] / (p_{i,t-1}). \quad 2.1$$

Donde:

r_{it} = Variable aleatoria que representa la tasa de rendimiento (por período⁶) del i -ésimo activo ($i = 1, 2, \dots, n$).

p_{it} = Precio de cierre del periodo actual.

$p_{i,t-1}$ = Precio de cierre del periodo anterior.

d_{it} = Dividendo(s) en el periodo.

Otra definición del rendimiento de un activo es el retorno continuo o logarítmico en un periodo t , y es dada por:

$$r_{it} = \text{Ln} \left[\frac{(p_{it} - p_{i,t-1}) + d_{it}}{p_{i,t-1}} \right] = \text{Ln} [(p_{it} - p_{i,t-1}) + d_{it}] - \text{Ln} (p_{i,t-1}). \quad 2.2$$

Donde:

$\text{Ln}(\cdot)$ = Corresponde a la función de logaritmo natural.

Es importante anotar que el retorno continuo (fórmula 2.2.) es aproximadamente igual al cálculo del retorno discreto (fórmula 2.1.), es decir, que las diferencias son pequeñas, más aun cuando se utilizan períodos cortos (Unger y Poddig, 2014). No obstante, emplear el retorno continuo implica algunas desventajas y beneficios.

La ventaja de utilizar los retornos continuos radica en la facilidad de conversión de los rendimientos en diferentes períodos, y en las propiedades estadísticas (*e.g.* si se conocen los rendimientos diarios, el rendimiento mensual puede calcularse simplemente

⁶ Nótese que el período de retorno puede ser un día, una semana, un mes o un año.

como la suma de los rendimientos diarios presentados durante el mes). Una desventaja del retorno discreto es que no es simétrico, mientras que el rendimiento continuo muestra una densidad simétrica, que está más en línea con la distribución normal o gaussiana, que es una suposición en varias teorías financieras (Unger y Poddig, 2014).

Para una buena comprensión de la aplicabilidad y las limitaciones de las tasas de rendimiento continua o discreta de un activo en la teoría de carteras, es necesario presentar la siguiente definición:

Definición 2.2 Cartera (Gupta *et al.*, 2014a)

Una cartera es un conjunto de dos o más activos representados por una n-tupla⁷ ordenada $\Theta = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)$, donde ω_i representa la proporción o el peso relativo de los fondos invertidos en el i-ésimo activo. Bajo esta definición, el rendimiento esperado (por periodo) de una inversión (cartera) es dada por:

$$r(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n) = E \left[\sum_{i=1}^n r_i \omega_i \right]. \quad 2.3$$

Donde:

$E[\cdot]$ = Representa el valor esperado de la variable aleatoria en el paréntesis y $r_i = E[r_i]$.

El valor esperado de la variable aleatoria también puede ser aproximado por el promedio derivado de los datos pasados, es decir:

$$r_i = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T r_{i,t}. \quad 2.4$$

⁷ Una tupla, es una lista ordenada de elementos. Una n-tupla es una secuencia (o lista ordenada) de n elementos, siendo n un número natural (entero no-negativo).

Una vez vista la anterior definición, y para dar por concluido el análisis de la incidencia de las tasas de retorno logarítmica o discreta de un activo en los modelos de optimización de carteras de media varianza, es importante señalar que la principal desventaja de utilizar el rendimiento continuamente compuesto (r_i^{Log}), es que el rendimiento de una cartera no corresponde al promedio ponderado de los rendimientos de cada uno de los activos (Alonso y Berggrun, 2015). Véase la explicación de este detalle:

$$r_p^{Log} = \text{Ln} \left[\frac{VP_t}{VP_{t-1}} \right] = \text{ln}(VP_t) - \text{ln}(VP_{t-1}) = \text{Ln} \left(\frac{\sum_{i=1}^n p_{i_t} \omega_i}{\sum_{i=1}^n p_{i_{t-1}} \omega_i} \right). \quad 2.5$$

Donde:

r_p^{Log} = Rendimiento continuo (por periodo) de la cartera.

VP_t = Valor de la cartera en el periodo actual.

VP_{t-1} = Valor de la cartera en el periodo anterior.

Nótese que esta expresión no es equivalente a la suma ponderada de los rendimientos continuos de cada activo, es decir, la expresión 2.5 no es equivalente a (Alonso y Berggrun, 2015):

$$\text{Ln} \left[\frac{p_{1_t}}{p_{1_{t-1}}} \right] \omega_1 + \text{Ln} \left[\frac{p_{2_t}}{p_{2_{t-1}}} \right] \omega_2 + \dots + \text{Ln} \left[\frac{p_{n_t}}{p_{n_{t-1}}} \right] \omega_n = \sum_{i=1}^n r_i^{Log} \omega_i. \quad 2.6$$

Sin embargo, la tasa de rendimiento discreta de un activo (r_i^{Dis}), el rendimiento esperado de una cartera sí corresponde al promedio ponderado de los rendimientos de cada uno de los activos (Alonso y Berggrun, 2015), en otras palabras:

$$r_p^{\text{Dis}} = r_1^{\text{Dis}} \omega_1 + r_2^{\text{Dis}} \omega_2 + \dots + r_n^{\text{Dis}} \omega_n = \sum_{i=1}^n r_i^{\text{Dis}} \omega_i. \quad 2.7$$

Donde:

r_p^{Dis} = Rendimiento discreto (por periodo) de la cartera.

Obsérvese que en las anteriores consideraciones los retornos de los activos son tratados como variables aleatorias que se derivan del análisis estocástico basado en datos históricos. Esto es razonable ya que el conocimiento de los datos refleja ciertos aspectos de los rendimientos de los activos. No obstante, debido a la complejidad del mercado accionario, los retornos de los activos generalmente están influenciados por múltiples factores, como por ejemplo, el desempeño de la empresa, las fuerzas del mercado de la oferta y la demanda, las noticias positivas y negativas, las cuestiones políticas etc. los cuales conjuntamente forman los *input* de las previsiones del retorno (B. Wang, Wang, y Watada, 2011, citado por B. Wang *et al.*, 2017, p. 1). Por una parte, los datos históricos contienen poca información respecto a los anteriores *input*. Por la otra, estos factores de influencia a menudo se evalúan con cierto nivel de ambigüedad, ya que generalmente no son estadísticos debido a las dificultades prácticas de la adquisición de los datos, la naturaleza de la imprecisión de la medición y la vaguedad de la percepción humana, un factor conjunto en varias aplicaciones del mundo real (B. Wang *et al.*, 2017). En este orden de ideas, algunos investigadores han argumentado que la aleatoriedad no es el único tipo de incertidumbre en la realidad (Gupta, Mittal, *et al.*, 2013; Huang, 2010; Mehlawat, 2016) y el conocimiento experto podría aplicarse para mejorar la precisión de éstas previsiones (Huang y Qiao, 2012; B. Wang *et al.*, 2017). En los últimos años, la teoría de conjuntos difusos (Zadeh, 1965) se ha aplicado como una herramienta ampliamente

aceptada para tratar el conocimiento experto así como la incertidumbre no estadística involucrada en las previsiones de los retornos de los activos. Teniendo en cuenta esta utilidad, recientemente se han propuesto varios modelos de selección de carteras en los cuales los retornos de los activos son tratados como variables difusas (Calvo, Ivorra, y Liern, 2015, 2016; Gupta, Mittal, *et al.*, 2013; Jalota *et al.*, 2017a, 2017b; Saborido *et al.*, 2016; Vercher y Bermúdez, 2013, 2015).

Prosiguiendo con el análisis del modelo de media varianza, es importante señalar que bajo el contexto de este modelo un inversionista preferirá tener una cartera que ofrezca el mayor retorno esperado posible $r(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)$ y además que la rentabilidad de ésta tenga la mínima dispersión o variabilidad posible. Con este propósito, Markowitz sugirió que la varianza que mide la dispersión del rendimiento esperado, podría ser utilizada para cuantificar el riesgo de la cartera. La varianza del i -ésimo activo denotada por σ_i^2 es expresada como (Gupta *et al.*, 2014a):

$$\sigma_i^2 = E[(r_i - E[r_i])^2]. \quad 2.8$$

Markowitz sugirió la desviación estándar como otra medida de dispersión. La desviación estándar del i -ésimo activo se expresa como:

$$\sigma_i = \sqrt{E[(r_i - E[r_i])^2]}. \quad 2.9$$

Nótese que la varianza del rendimiento de una cartera no se determina únicamente por las varianzas de los rendimientos individuales de los activos. También depende de la covarianza entre la rentabilidad de los activos. La covarianza σ_{ij} entre los rendimientos de los activos r_i y r_j se expresa como (Gupta *et al.*, 2014a, p. 4):

$$\sigma_{ij} = E[(r_i - E[r_i])(r_j - E[r_j])]. \quad 2.10$$

Utilizando datos pasados, la covarianza σ_{ij} puede aproximarse de la siguiente manera:

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (r_{it} - r_i)(r_{jt} - r_j). \quad 2.11$$

Además, σ_{ij} puede expresarse en términos del coeficiente de correlación (ρ_{ij}) como:

$$\sigma_{ij} = \rho_{ij}\sigma_i\sigma_j. \quad 2.12$$

En este orden de ideas, la varianza del rendimiento esperado de una cartera estará dada por (Gupta *et al.*, 2014a, p. 4):

$$v(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \omega_i \omega_j \sigma_{ij}. \quad 2.13$$

Definición 2.3 Ventas en corto (Jain, Jain, y McInish, 2012)

Vender en corto se define generalmente como la práctica de vender títulos adquiridos en préstamo, en otras palabras, el inversionista vende un activo financiero que no tiene y lo compra posteriormente. Desde el punto de vista matemático, las ventas en corto se representan como proporciones negativas de la riqueza invertida (Michaud, 1989).

En correspondencia con la definición anterior, en el análisis de selección de carteras se excluyen los valores negativos de ω_i (*i.e.* no se permite las ventas en corto). Por lo tanto, $\omega_i \geq 0$ para todo i ($i = 1, 2, \dots, n$). Además, dado que ω_i es la proporción del total de los fondos invertidos, la siguiente expresión se debe cumplir:

$$\sum_{i=0}^n \omega_i = 1. \quad 2.14$$

A continuación se presentan dos planteamientos diferentes del modelo de media varianza basados en los siguientes supuestos derivados de lo expuesto anteriormente (Gupta *et al.*, 2014a):

- (i) Los precios de todos los activos en cualquier momento son estrictamente positivos.
- (ii) La tasa de rendimiento r_i ($i = 1, 2, \dots, n$) es una variable aleatoria que toma valores finitos.
- (iii) Cualquier activo es infinitamente divisible, es decir, un inversor puede comprar o poseer una fracción de un activo.
- (iv) Todos los activos son líquidos, en otras palabras, un activo puede ser comprado o vendido bajo demanda en cualquier cantidad al precio de mercado.
- (v) No existen costos de transacción.
- (vi) No se permite la venta en corto de un activo.

Caso 1: Cartera de mínima varianza dado un nivel de rentabilidad deseado

$$\mathbf{P (2.1.)} \quad \text{Min} \sum_{i=1}^n \cdot \sum_{j=1}^n \omega_i \omega_j \sigma_{ij}$$

Sujeto a

$$\sum_{i=1}^n r_i \omega_i = r_0, \quad 2.3$$

$$\sum_{i=0}^n \omega_i = 1, \quad 2.14$$

$$\omega_i \geq 0, \quad i = 1, 2, 3, \dots, n, \quad 2.15$$

Donde r_0 es el retorno de la cartera deseado por el inversionista. La función objetivo del problema P (2.1) minimiza el riesgo de la cartera (varianza). La restricción (2.3) asegura que el rendimiento esperado de la cartera al final del período de tenencia sea igual al valor objetivo de r_0 deseado por el inversionista. La expresión (2.14) representa la restricción del presupuesto de capital en los activos y la restricción (2.15) asegura la no venta en corto de los activos. El problema P (2.1) es un problema de programación cuadrática. Al variar el nivel deseado de retorno r_0 y resolver repetidamente el problema de programación cuadrática, se puede obtener la cartera de mínima varianza para cada valor de r_0 . No obstante, el aspirar a un rendimiento más alto de r_0 es poco realista de ser alcanzado con los activos en consideración. En otras palabras, el problema P (2.1) puede llegar a ser inviable si el inversionista desea un rendimiento más alto. El valor del retorno alcanzable de la cartera, es decir, r_0 , siempre se ubicará entre r_{\min} y r_{\max} . El r_{\min} es el valor de r_0 correspondiente a la cartera de mínima varianza, esto es, es el retorno correspondiente a la cartera obtenida resolviendo el problema P (2.1) excluyendo la restricción (2.3). El r_{\max} es el rendimiento máximo posible r_0 , es decir, es la rentabilidad máxima media entre los rendimientos medios de los activos (Gupta *et al.*, 2014a).

Caso 2: Cartera de máxima rentabilidad dado un nivel de riesgo deseado

$$\mathbf{P (2.2.)} \quad \text{Max} \quad \sum_{i=1}^n r_i \omega_i$$

Sujeto a

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \omega_i \omega_j \sigma_{ij} = v_0, \quad 2.13$$

$$\sum_{i=0}^n \omega_i = 1, \quad 2.14$$

$$\omega_i \geq 0, \quad i = 1, 2, 3, \dots, n, \quad 2.15$$

Donde v_0 es el riesgo de cartera (varianza) que el inversionista está dispuesto a tomar. Nótese que a diferencia de r_0 en el problema P (2.1), en este caso no es una tarea fácil encontrar el rango de v_0 en que éste se encuentra. No obstante, es posible encontrar el límite superior del intervalo para v_0 , es decir, v_{\max} , que sería el valor v_0 de la cartera de máximo rendimiento esperado, en otras palabras, es la varianza correspondiente a la cartera obtenida resolviendo el problema P (2.2) excluyendo la restricción (2.13). Como puede observarse, se pueden generar diferentes carteras considerando los valores $v_0 \leq v_{\max}$. Además, el valor v_0 no debe ser demasiado pequeño, de lo contrario, el problema P (2.2) sería inviable (Gupta *et al.*, 2014a).

Definición 2.4 Frontera Eficiente (Gordon, Sharpe, y Bailey, 2003)

El conjunto factible (también conocido como conjunto de oportunidad) representa todas las carteras que se podrían formar de un grupo de N valores. Los puntos A, B, C, D, E, F, G y H de la figura 2.3 son ejemplos de dichas carteras.

A las carteras ubicadas sobre la línea gruesa que tienen forma de curva cóncava entre los puntos C y E se les denomina carteras eficientes (o frontera eficiente), debido a que contienen las carteras que ofrecen el máximo rendimiento esperado para niveles variables de riesgo, y un mínimo riesgo para niveles variables de rendimiento esperado (Gordon *et al.*, 2003). El punto C representa la cartera de mínima varianza, es decir, la combinación de títulos en dicha cartera representa el menor riesgo posible. Por el contrario, el punto E representa la cartera con un 100% de inversión en un solo activo que ofrece el rendimiento máximo esperado. Así mismo, el punto B representa una cartera

ineficiente, una persona no invertiría en una cartera B sencillamente porque la cartera D es mejor (*i.e.* ofrece un mayor retorno esperado al mismo nivel de riesgo). Dentro de la frontera eficiente, el nivel de aversión al riesgo de un inversionista (*i.e.* preferencia en cuanto a riesgo y rentabilidad) influirá en la elección de la cartera de mínima varianza C, la cartera de máxima rentabilidad esperada E, o cualquier cartera ubicada a lo largo de la frontera eficiente (Markowitz, 1952).

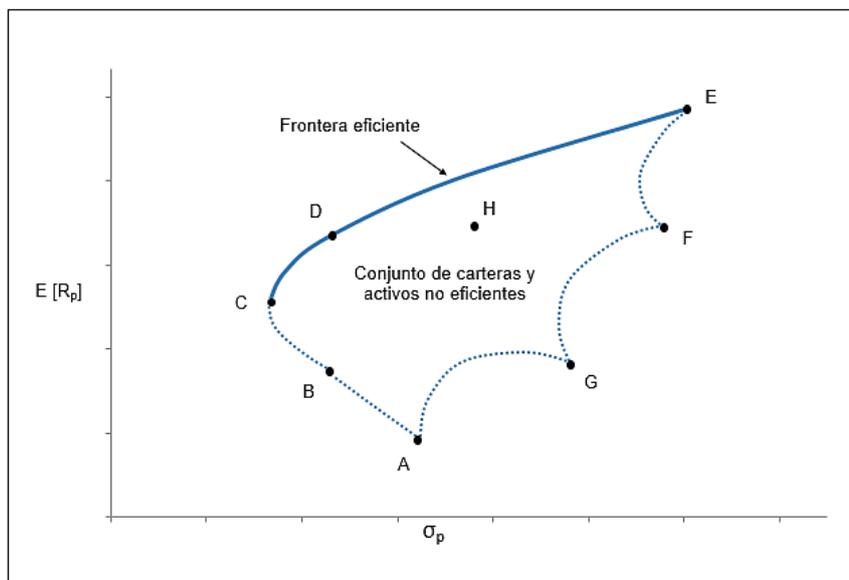


Figura 2.3 Conjuntos Eficientes y Factibles

Fuente: Elaboración propia

Después de haber presentado las principales consideraciones del modelo de media varianza se evidencia que la estrategia de "maximizar el rendimiento esperado y minimizar el riesgo" generalmente no se cuestiona. No obstante, la cuestión referente al cálculo del riesgo como la varianza de los rendimientos de los activos financieros ha generado varias críticas entre los investigadores y académicos (Artzner, Delbaen, Eber, y Heath, 1999; Fabozzi *et al.*, 2007; Metaxiotis y Liagkouras, 2012; Vercher y Bermúdez, 2012), las cuales se relacionan a continuación (Gupta *et al.*, 2014a; Ponsich *et al.*, 2013):

- i) El supuesto de una distribución normal multivariante de la tasa de rendimiento de los activos no se mantiene en la práctica (las distribuciones son típicamente asimétricas).
- ii) Las técnicas tradicionales de optimización de carteras no tienen en cuenta las preferencias del inversionista individual, quien algunas veces prefiere las carteras que se encuentran detrás de la frontera no dominada.⁸
- iii) Los problemas de programación cuadrática de gran escala son difíciles de resolver (complejidad computacional).
- iv) Para los mercados reales, el tamaño de la matriz de varianza-covarianza puede ser muy grande y, por lo tanto, difícil de estimar.

Varios autores trataron de aliviar estas dificultades utilizando diversos esquemas de aproximación. El modelo de índice único de Sharpe (1963) es un avance en esta dirección. Este autor señaló que si el problema de la selección de la cartera pudiera formularse como un problema de programación lineal, las perspectivas de las aplicaciones prácticas serían mejoradas. Como resultado de esto, en las últimas décadas se han hecho varios intentos para linealizar el modelo de optimización de cartera utilizando medidas alternativas de riesgo que serán analizadas en las siguientes secciones.

2.2.1.2 Desviación Media Absoluta

El modelo de optimización de carteras de desviación media absoluta fue introducido por Konno (1988, 1990), y, posteriormente refinado por Konno y Yamazaki (1991), como una alternativa al modelo de optimización de carteras de media varianza de Markowitz.

⁸ En una optimización multiobjetivo las soluciones no-dominadas son las que representan los mejores compromisos entre todos los objetivos (*i.e.* no se puede mejorar un objetivo sin empeorar al menos uno de los otros). Las técnicas tradicionales de optimización de carteras tienden a seleccionar soluciones que no cumplen esta condición (*i.e.* no son necesariamente mejores en todos los objetivos).

Para cuantificar el riesgo de una cartera, los autores utilizaron la función de riesgo L1 (desviación absoluta) en lugar de la función de riesgo L2 (desviación estándar).

La desviación absoluta de una variable aleatoria es el valor absoluto esperado de la diferencia entre la variable aleatoria y su media. El riesgo de la cartera medido como desviación absoluta se expresa como (Gupta *et al.*, 2014a, p. 21):

$$DA(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n) = E \left[\left| \sum_{i=1}^n r_i \omega_i - E \left[\sum_{i=1}^n r_i \omega_i \right] \right| \right]. \quad 2.16$$

El siguiente teorema propuesto por Konno y Yamazaki (1991) presenta la relación entre el riesgo de la cartera usando la varianza y la desviación absoluta como medidas de riesgo:

Teorema 2.1. (Gupta *et al.*, 2014a): Sea (r_1, r_2, \dots, r_n) una distribución normal multivariante. Entonces, la desviación absoluta para una cartera dada se expresaría como:

$$DA(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sigma(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n). \quad 2.17$$

Donde

$$\sigma(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n) = \sqrt{E \left[\left(\sum_{i=1}^n R_i \omega_i - E \left[\sum_{i=1}^n R_i \omega_i \right] \right)^2 \right]}. \quad 2.18$$

A partir del teorema anterior, los autores probaron la equivalencia de los modelos de media varianza y de desviación media absoluta, en un entorno en el cual la distribución conjunta de los rendimientos de los activos se asume como normal multivariante. Los resultados obtenidos en el modelo de desviación media absoluta, en el que solo se necesita

estimar los retornos esperados de los activos, provee resultados similares a los proporcionados en el modelo de media varianza, aunque en la práctica se obtienen carteras óptimas diferentes (Vercher, 2015). Esto obedece al hecho de que cada uno de los modelos utiliza diferentes estadísticos para estimar los parámetros de entrada del problema de optimización (Simaan, 1997). No obstante, ni el modelo de media varianza ni el modelo de desviación media absoluta es superior al otro desde el punto de vista de la estabilidad y rendimiento esperado de la inversión (Vercher, 2015, p. 26).

Una de las principales ventajas del modelo de desviación media absoluta obedece a que puede ser tratado como un problema de programación lineal en lugar de un problema de programación cuadrática, permitiéndose de esta forma aplicarlo a un gran número de activos (Chang, Yang, y Chang, 2009). Las ventajas computacionales del modelo de desviación media absoluta sobre el modelo de media varianza se demuestran una vez más en los trabajos desarrollados por Konno (2003), y, Konno y Koshizuka (2005).

Prosiguiendo el análisis, es conveniente señalar que diversos estudios muestran que *“los inversores o gestores de carteras asocian el riesgo a la variabilidad de los resultados negativos o pérdidas (downside risk) y no tanto a la de sus ganancias (upside potential)”* (Manzana, 2009, p. 161). En otras palabras, los inversionistas o gestores de carteras se preocupan más por evitar las pérdidas que por buscar ganancias. Esta asimetría entre los resultados positivos y negativos respecto del valor esperado del rendimiento pone de manifiesto que tanto la varianza como la desviación absoluta no son medidas adecuada para cuantificar el riesgo, al menos tal y como es percibido por los inversionistas. Como

se verá a continuación, varias medidas de tipo *downside risk* han sido propuestas en las últimas décadas para resolver este conflicto.

2.2.2 Medidas de Riesgo de *Downside*

El objetivo de las medidas de riesgo *downside* en los modelos de optimización de carteras es maximizar la probabilidad de que el rendimiento esperado de la cartera esté por encima de cierto nivel mínimo aceptable (a menudo denominado nivel de referencia o nivel de desastre) (Fabozzi *et al.*, 2006). La ubicación del riesgo *downside* en una distribución hipotética del retorno de un activo se muestra figura 2.4. Como se puede apreciar, estas medidas de riesgo hacen una clara distinción entre las volatilidades de pérdidas (*downside*) y las volatilidades de ganancias (*upside*), y solo la volatilidad que se encuentra por debajo del nivel mínimo aceptado incurre en riesgo. En otras palabras, todas las rentabilidades por encima de este nivel de referencia generan "incertidumbre", que no es más que una oportunidad sin riesgos para rendimientos inesperadamente altos (Rom y Ferguson, 1994).

Nótese que frecuentemente las medidas de riesgo *downside* son computacionalmente más complicadas de usar bajo el contexto de la teoría de selección de carteras, debido a que con frecuencia se tiene que recurrir a estimaciones no paramétricas, a simulaciones y a técnicas de optimización computacionalmente intensivas (Fabozzi *et al.*, 2010). Por otro lado, para la estimación de las medidas de riesgo *downside* solo se utiliza una porción de los datos originales, incluso solo la cola de la distribución empírica, ocasionando un aumento en el error de estimación. No obstante, estas medidas de riesgo son muy útiles para evaluar el riesgo de los activos financieros con distribuciones de

retorno asimétricas, como por ejemplo las opciones de compra y venta y otros contratos de derivados (Fabozzi *et al.*, 2007). A continuación se analizarán las medidas de riesgo *downside* más comunes como “primero la seguridad” (*safety-First*), semivarianza, semidesviación absoluta, “momento parcial más bajo” (*lower partial moment*), valor en riesgo (VaR) y valor en riesgo condicional (CVaR).

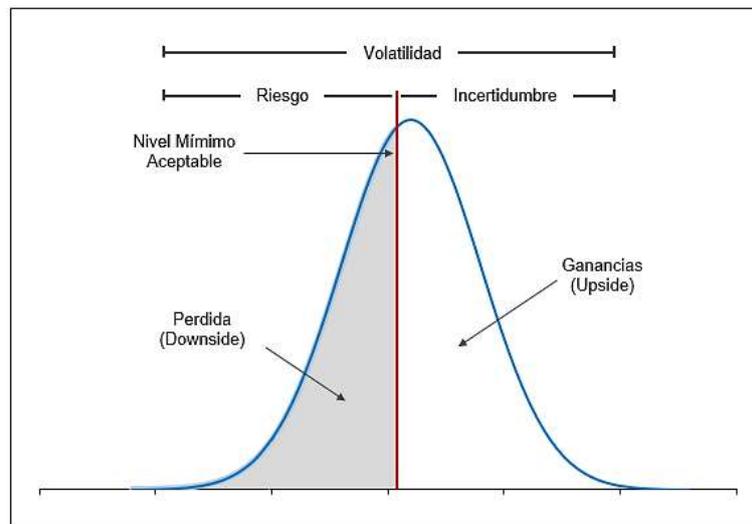


Figura 2.4 *Downside Risk*

Fuente: Rom y Ferguson (1994)

2.2.2.1 Primero la Seguridad (*Safety-First*)

Dos importantes artículos referentes a la selección de carteras fueron publicados en 1952: primero, el artículo de Markowitz referente a la teoría clásica de cartera. Segundo, el artículo de Roy⁹ referente a la teoría primero la seguridad (*safety-first*), que sentó las bases para el desarrollo de las medidas de riesgo *downside*.

⁹ En 1952, Markowitz publicó su artículo “*Portfolio Selection*” en *Journal of Finance*. Aproximadamente 3 meses después, Roy publicó su artículo “*Safety-First and the Holding of Assets*” en *Econometrica*. Debido a ello, Markowitz recibió mayor reconocimiento, y el artículo de Roy no fue recuperado del olvido hasta que Arzac y Bawa (1977) publicaron su artículo “*Portfolio Choice and Equilibrium in Capital Markets with Safety-First Investors*” en el *Journal of Finance Economics*.

Roy (1952) a través de su principio comportamental de “primero la seguridad”, proporcionó el primer paso hacia el modelo más completo de lo que la literatura financiera contemporánea denominada como teoría conductual de la cartera (Shefrin y Statman, 2000, citado en J.M. Chen, 2016). Este principio afirma que *“la riqueza de las personas se encuentra constantemente expuesta a situaciones externas adversas, por lo cual es lógico que ellas, influidas por el miedo y la necesidad de seguridad, traten de reducir la probabilidad de ocurrencia de una catástrofe financiera”*(Useche-Arévalo, 2015). En la teoría clásica de cartera, un inversionista construye una cartera bajo el principio de *trade-off* riesgo-retorno. El *trade-off* entre el riesgo y el retorno, y la asignación de los activos de la cartera, dependen de la función de utilidad del inversionista. Bajo este contexto, puede ser difícil, o incluso imposible, determinar la función de utilidad real de un inversionista (Fabozzi *et al.*, 2006). Ahora bien, bajo el enfoque de “primero la seguridad”, un inversor en lugar de pensar en términos de la función de utilidad, primero debe asegurarse conservar una cierta cantidad de capital (Fabozzi *et al.*, 2010). A partir de entonces decide el retorno mínimo aceptable que logre la preservación de este capital. En esencia, el inversor elige su cartera resolviendo el siguiente problema de optimización (Chapados, 2011):

$$\text{Min SF}(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n) = P(r_p - r_o). \quad 2.19$$

Donde:

P = Es la función probabilidad.

r_p = Es el retorno de la cartera.

Así mismo, es probable que el inversionista desconozca la función de probabilidad.

No obstante, utilizando la desigualdad de Tchebycheff¹⁰ se obtiene (Chapados, 2011):

$$P(r_p \leq r_o) \leq \frac{\sigma_p^2}{(\mu_p - r_o)^2}. \quad 2.20$$

Sujeto a

$$\sum_{i=0}^n \omega_i = 1. \quad 2.14$$

Donde:

μ_p = Es el retorno esperado de la cartera.

σ_p^2 = Es la varianza de la cartera.

Por lo tanto, al no conocer la función de probabilidad, el inversor terminará resolviendo la siguiente aproximación (Chapados, 2011):

$$\text{Min SF}(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n) = \frac{\sigma_p}{\mu_p - r_o}. \quad 2.21$$

Sujeto a

$$\sum_{i=0}^n \omega_i = 1. \quad 2.14$$

Nótese que si r_o es igual a la tasa libre de riesgo, entonces este problema de optimización es equivalente a maximizar el ratio Sharpe (Sharpe, 1966) de una cartera.

¹⁰ Para una variable aleatoria x con valor esperado μ y varianza σ_x^2 , la desigualdad de Tchebycheff indica que para cualquier número real positivo c se mantiene que (Fabozzi *et al.*, 2010):

$$P = (|x - \mu| > c) \leq \frac{\sigma_x^2}{c^2}$$

Aplicando la desigualdad de Tchebycheff se obtiene

$$\begin{aligned} P(r_p \leq r_o) &= P(\mu_p - r_p \geq \mu_p - r_o) \\ &\leq \frac{\sigma_p^2}{(\mu_p - r_o)^2} \end{aligned}$$

Como puede observarse, tanto el modelo de Markowitz como el de Roy, pretenden optimizar la relación rentabilidad-riesgo. Así mismo, García, Sánchez y Trinidad (1998) comprobaron que desde el punto de vista matemático, ambos modelos se reducen al mismo, con la salvedad de que: i) Markowitz le concede más importancia al riesgo como factor determinante de las preferencias del inversor a la hora de conformar la cartera, mientras que Roy se inclina por la determinación de una rentabilidad mínima; ii) Roy no incluye la restricción de no negatividad en los activos que componen la cartera del inversor (*i.e.* $\omega_i \geq 0$, para $i=1, 2, \dots, n$) (Markowitz, 1959, p. 305). Esta condición plantea desde el punto de vista financiero, la posibilidad de obtener mayores rentabilidades, puesto que la obtención de un valor negativo permite al inversor recurrir al endeudamiento respecto a este activo (Roy, 1952, p. 438), lo que supone al mismo tiempo una mayor flexibilidad a la hora de llevar a cabo el proceso de inversión. Sin embargo, siempre queda el recurso, como también señala Roy, de eliminar el mencionado activo y repetir el proceso de selección.

2.2.2.2 Media Semivarianza

Markowitz en su libro “*Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments*”, propuso el uso de la semivarianza para corregir el hecho de que la varianza penaliza por igual las rentabilidades positivas y negativas (Markowitz, 1959, pp. 188-201). Años más tarde, Markowitz reconoció que la “semivarianza es una medida de riesgo más plausible que la varianza, debido a que solo tiene en cuenta las desviaciones adversas (Markowitz, 1991). Matemáticamente la semivarianza es el valor esperado de las desviaciones negativas de los posibles resultados del rendimiento esperado al cuadrado. El riesgo de la cartera medido a través de la semivarianza se define como (Gupta *et al.*, 2014a):

$$sv(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n) = E \left[\left[\left[\sum_{i=1}^n r_i \omega_i - E \left[\sum_{i=1}^n r_i \omega_i \right] \right]^- \right] \right]^2. \quad 2.22$$

Donde,

$$\left[\sum_{i=1}^n r_i \omega_i - E \left[\sum_{i=1}^n r_i \omega_i \right] \right]^- = \begin{cases} \sum_{i=1}^n r_i \omega_i - E \left[\sum_{i=1}^n r_i \omega_i \right], & \text{Si } \sum_{i=1}^n r_i \omega_i - E \left[\sum_{i=1}^n r_i \omega_i \right] < 0, \\ 0, & \text{Si } \sum_{i=1}^n r_i \omega_i - E \left[\sum_{i=1}^n r_i \omega_i \right] \geq 0. \end{cases}$$

Obsérvese que al utilizar el modelo de media semivarianza no es necesario calcular la matriz de varianza-covarianza, pero la función de distribución conjunta de los activos es necesaria [*i.e.* $F(r_{i_t}, \dots, r_{n_T}), i = 1, 2, \dots, n; t = 1, 2, \dots, T$]. Así mismo, es importante resaltar que esta medida de riesgo trata de minimizar la dispersión del rendimiento de la cartera con respecto al rendimiento esperado, pero solo cuando la primera es inferior a la última (Gupta *et al.*, 2014a). Cabe agregar que si la distribución de los rendimientos de los activos es simétrica o tiene el mismo grado de simetría, la semivarianza y la varianza producen el mismo conjunto de carteras eficientes (Markowitz *et al.*, 1993).

Prosiguiendo el análisis, es conveniente señalar que la semivarianza es una de las medidas de riesgo *downside* más conocidas. En efecto, ha recibido gran atención debido a que refleja la percepción de los inversores sobre el riesgo de una forma directa, clara y comparativamente simple (Huang, 2008a). Varios académicos como Choobineh y Branting (1986), Grootveld y Hallerbach (1999), Jin, Markowitz, y Yu Zhou (2006), Kaplan y Alldredge (1997), Mao (1970), Mao y Brewster (1970), y Markowitz *et al.* (1993) investigaron sus propiedades y demostraron los méritos que tiene la semivarianza para medir el riesgo de la cartera.

Para finalizar este apartado, es importante mencionar que la semivarianza fue introducida como medida de riesgo *downside* en un entorno estocástico. No obstante, recientemente ha sido extendida a un entorno de decisión difusa (Gupta, Mittal, *et al.*, 2013; Huang, 2008a; Jalota *et al.*, 2017a, 2017b; X. Li, Qin, y Kar, 2010; Y.J. Liu, Zhang, y Zhao, 2016; Qin *et al.*, 2009; Yang, Lin, Chang, y Chang, 2011)

2.2.2.3 Semidesviación Media Absoluta

La semidesviación absoluta fue propuesta por Speranza (1993) como una medida alternativa para cuantificar el riesgo. Esta autora comprobó que al tomar la función de riesgo como una combinación lineal de las semidesviaciones medias absolutas (*i.e.* las desviaciones medias por debajo y por encima del retorno de la cartera), se puede obtener un modelo equivalente al modelo de desviación media absoluta (Konno y Yamazaki, 1991), sí la suma de los coeficientes de la combinación lineal es positiva. En efecto, este modelo es equivalente al modelo de media varianza (Markowitz, 1952), sí los rendimientos de los activos se distribuyen normalmente. Además, Speranza (1993) propuso que a través de una adecuada selección de los coeficientes de combinación (1 y 0 para las desviaciones por debajo y por encima de la media, respectivamente) es posible reducir sustancialmente el número de restricciones a la mitad en comparación con el modelo de desviación media absoluta (Gupta *et al.*, 2014a).

La semidesviación absoluta del rendimiento de la cartera por debajo del rendimiento esperado en el período pasado t ($t = 1, 2, \dots, T$), puede expresarse como (Gupta *et al.*, 2014a):

$$SDA(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n) = \left| \min \left\{ 0, \sum_{i=1}^n (r_{it} - r_i) \omega_i \right\} \right| = \frac{\left| \sum_{i=1}^n (r_{it} - r_i) \omega_i \right| + \sum_{i=1}^n (r_{it} - r_i) \omega_i}{2}. \quad 2.23$$

Por lo tanto, la semidesviación absoluta esperada del rendimiento de la cartera por debajo del rendimiento esperado viene dada por (Gupta *et al.*, 2014a):

$$SDA(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n) = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^T SDA(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n) \quad 2.24$$

$$SDA(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n) = \sum_{i=1}^T \frac{\left| \sum_{i=1}^n (r_{it} - r_i) \omega_i \right| + \sum_{i=1}^n (r_{it} - r_i) \omega_i}{2T}.$$

2.2.2.4 Momento Parcial Más Bajo (*Lower Partial Moment*)

El momento parcial más bajo (*Lower Partial Moment*) fue introducido por Bawa (1975, 1976) y Fishburn (1977), y además desarrollado y analizado por Bawa y Lindenberg (1977), Harlow y Rao (1989) y Grootveld y Hallerbach (1999). Esta media de riesgo *downside* provee una generalización natural de la semivarianza descrita previamente y propone medir lo que se conoce como momento parcial más bajo (*Lower Partial Moment*), ya que solo la parte a la izquierda de un valor objetivo de la distribución de una variable es utilizada para su cálculo. En otras palabras, consiste en ajustar la función de distribución por debajo de un umbral u objetivo determinado (Manzana, 2009). El momento parcial más bajo viene dado por (Fabozzi *et al.*, 2010):

$$LPM(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n) = \sigma_{r_p, q, r_o} = \left[E[\min[(r_p - r_o), 0]^q] \right]^{1/q}. \quad 2.25$$

Donde:

q = Índice de potencia

r_o = Tasa de retorno objetivo (*i.e.* lo que Roy (1952) denominó nivel de desastre)

Nótese que al establecer $q = 2$ y r_o igual al rendimiento esperado se obtiene la semivarianza. Además, Fishburn comprobó que $q = 1$ representa un inversor de riesgo neutro, mientras que $0 < q \leq 1$, y, $q > 1$ corresponden a un inversor amante del riesgo (*risk-seeking*) y a un inversor adverso al riesgo (*risk-averse*), respectivamente (Fabozzi *et al.*, 2006).

2.2.2.5 Valor en Riesgo (VaR)

El Valor en Riesgo (VaR) fue desarrollado por primera vez por J.P. Morgan a principios de la década de 1990 y puesto a disposición a través del software Risk-Metrics™ en octubre de 1994 (J.P.Morgan,1996). El VaR se centra en determinar la máxima pérdida esperada asociada al riesgo de mercado que puede sufrir una cartera, en un horizonte temporal determinado¹¹, bajo unas circunstancias normales de los mercados y para un nivel de confianza dado¹² (Gordon, 2009; Moscoso, 2014). Desde el punto de vista matemático, el nivel de confianza α de una cartera en cierto horizonte de tiempo t es el retorno de la cartera r_p tales que la fracción α de los retornos será mejor que el r_p en el horizonte de tiempo. Más formalmente, el nivel de confianza α de una cartera se define como el $(1 - \alpha)$ -percentil de la distribución de los retorno de la cartera (Chapados, 2011):

$$\text{VaR}_\alpha(r_p) = -\inf_r \{r: P(r_p \geq r) \geq \alpha\}.^{13} \quad 2.26$$

Donde:

P = Función de probabilidad.

¹¹ El horizonte temporal puede expresarse en días, semanas, meses y hasta un año.

¹² Normalmente se emplean intervalos de confianza hasta un 95%. Para un intervalo de confianza del 95%, el 5% de los rendimientos se situarán a 1,65 desviaciones típicas de la media. Ante una cartera valorada en EUR, un intervalo de confianza del 5% y el dato del VaR de la misma, se podría concluir que existe una probabilidad del 5% de perder más de (VaR x Valor de la Cartera) EUR, o que con el 95% de probabilidad se puede asegurar que se pierde como mucho ese valor (DeLlano-Paz, 2015).

¹³ El signo menos en la expresión es para que la medida de riesgo sea positiva.

El VaR resulta útil para los tomadores de decisiones debido a que proporciona una cifra expresada en unidades monetarias que resume la exposición de un activo financiero al riesgo de mercado, lo cual facilita su comprensión. No obstante, el uso del VaR presenta algunos problemas prácticos y computacionales los cuales fueron analizados por Gordon y Baptista (2002), Gaivoronski y Pflug (2005), y, Mittnik, Rachev y Schwartz (2002). En efecto, el VaR tiene varias propiedades que no son deseables en una medida de riesgo:

i) El VaR no posee la propiedad de subaditividad, por lo que la cuantía del VaR de una cartera formada por dos subcarteras puede ser mayor que la suma de los riesgos individuales de ambas. La propiedad de subaditividad es la descripción matemática del efecto de la diversificación y por lo tanto no es razonable pensar que una cartera más diversificada tendría un mayor riesgo (Fabozzi *et al.*, 2007; Scutellà y Recchia, 2013).

ii) Cuando el VaR se calcula a partir de la generación o simulación de escenarios, resulta ser una función no lisa y no convexa de las carteras. En consecuencia, la función VaR tiene múltiples puntos estacionarios, haciendo que resulte más difícil encontrar el valor óptimo en el proceso de optimización de la cartera (Fabozzi *et al.*, 2010);

iii) El VaR le da poca importancia a las pérdidas más extremas o extraordinarias, debido a que no refleja adecuadamente la asimetría y la curtosis¹⁴ de la distribución (Moscoso, 2014).

¹⁴ Desde la perspectiva de un agente de mercado, la asimetría y curtosis también son importantes. Cuando el rendimiento de la cartera está sesgada negativamente (asimétrica negativa) es más probable tener un evento extremo en la cola izquierda que uno en la cola derecha, y por consiguiente, el inversor típico prefiere una distribución de rendimientos asimétricos más positivos. De forma similar, una cartera con curtosis más pequeña tiende a tener menos eventos extremos, y por lo tanto es preferida por la mayoría de los inversores (W.C. Kim, Fabozzi, Cheridito, y Fox, 2014).

iv) El supuesto de normalidad sobrestima el VaR para valores percentiles muy altos, mientras que subestima los valores de percentiles bajos los cuales corresponden a los eventos extremos o extraordinarios (Moscoso, 2014).

2.2.2.6 Valor en Riesgo Condicional (CVaR)

Las deficiencias en el VaR conducen a Artzner *et al.* (1999) a derivar cuatro propiedades deseables que debería cumplir una medida de riesgo para ser denominada “coherente”¹⁵. En la misma línea, Rockafellar y Uryasev (2000, 2002) proponen el Valor en Riesgo Condicional (CVaR) como una medida “coherente” que describe el tamaño promedio que puede tener las pérdidas que están por encima del nivel de VaR estimado, de modo que provee información adicional sobre la cola de la distribución de pérdidas y ganancias de una cartera (Moscoso, 2014).

Desde el punto de vista matemático, la expresión del CVaR se define como (Chapados, 2011):

$$\text{CVaR}_\alpha(r_p) = E[r_p | r_p < \text{VaR}_\alpha(r_p)]. \quad 2.27$$

En la literatura el CVaR también es referido como Déficit Esperado (*Expected Shortfall*), Pérdida Esperada de la Cola (*Expected Tail Loss*) y Valor Medio en Riesgo (*Average Value at Risk*) (Jorion, 2003).

¹⁵ Una medida de riesgo ρ es una medida de riesgo coherente si satisface las siguientes propiedades (Artzner *et al.*, 1999):

1. Homogeneidad positiva: Si se incrementa el valor de la cartera en λ , el riesgo también debe aumentar en λ .
 $\rho(\lambda x) = \lambda \rho(x)$, para cualquier número real λ
2. Monotonicidad: A mayor rentabilidad debe haber un mayor riesgo.
Si $x \leq y$, luego $\rho(x) \leq \rho(y)$
3. Invariante en traslación: Invertir una cantidad adicional de efectivo α , debe aumentar el riesgo en la misma cantidad.
 $\rho(x + \alpha) = \rho(x) + \alpha$, para cualquier número real α
4. Subaditividad o diversificación: La composición de la cartera no debe aumentar el riesgo.
 $\rho(x + y) \leq \rho(x) + \rho(y)$

Una de las ventajas del CVaR se fundamenta en que analiza los rendimientos inferiores al VaR, cuantificando la pérdida esperada en ese escenario. A modo de ejemplo, dos carteras pueden tener igual VaR y aparentar poseer el mismo nivel de riesgo, no obstante, al analizar el CVaR se podrá determinar que la cartera de mayor riesgo será la que cuente con el mayor CVaR. Como se observa, el análisis de esta situación se escapa al análisis del VaR, por lo que se prefiere en algunas ocasiones trabajar con el CVaR. Como se aprecia, el VaR nunca será mayor que el CVaR, por ello, las carteras con bajo CVaR tendrán un VaR aún menor.

Otra de las ventajas del CVaR en su utilidad especialmente cuando la distribución de los retornos de los activos no es continua y lejos de la hipótesis de normalidad (Moscoso, 2014). Las propiedades del CVaR son analizadas en detalle por Acerbi y Tasche (2002), Gordon (2009), y, Rockafellar y Uryasev (2002). La ubicación del VaR en una distribución hipotética del retorno de un activo y su relación con el CVaR se presentan en la figura 2.5.

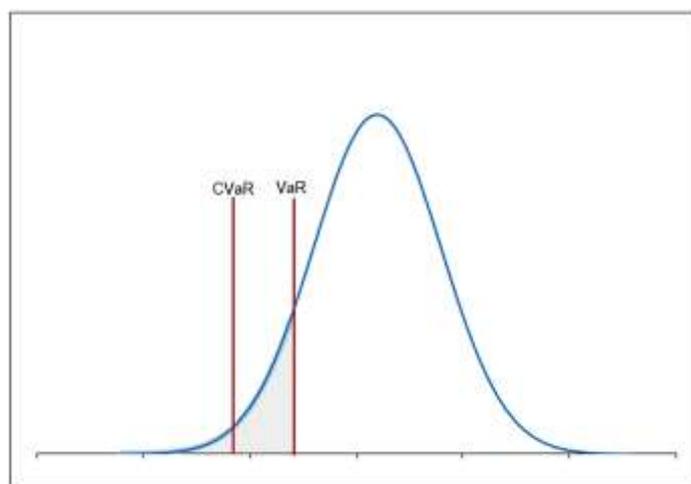


Figura 2.5 CVaR y VaR para una Distribución t de Student

Fuente: Chapados (2011)

2.3 La Optimización de Cartera en la Práctica

El modelo clásico de media varianza se basa en varios supuestos simplistas, los cuales se asumen en un mercado perfecto donde los activos financieros se negocian en fracciones (no negativas), no hay límite en el número de activos en la cartera, los inversores no tienen preferencia sobre los activos y no les interesa los diferentes tipos de activos en su carteras (Lwin, 2015). No obstante, para que el conjunto de carteras eficientes sea realista, desde el punto de vista de la planificación y gestión de carteras, se deben incorporar a la formulación del problema diferentes tipos de restricciones, que permitan considerar las preferencias del inversor, las condiciones del mercado, los requerimientos financieros o la responsabilidad social, entre otros (Vercher, 2015). A continuación, se describirá las restricciones que a menudo se utilizan en las aplicaciones prácticas.

2.3.1 Costos de Transacción

Cuando un inversionista compra o vende activos financieros, incurre en unos gastos ocasionados por los costos de transacción y los impuestos. En algunos casos, estos costos pueden incluirse como una tasa variable y proporcional a la cantidad negociada (Akian, Menaldi, y Sulem, 1996; Davis y Norman, 1990; Dumas y Luciano, 1991; Shreve y Soner, 1994), o como un costo fijo, es decir, una tarifa fija por transacción (Lobo, Fazel, y Boyd, 2007; Oksendal y Sulem, 2002). Al incorporar directamente los costos de transacción en el proceso asignación de activos, las carteras resultantes son más rentables y muestran mejoras en términos de los rendimientos realizados ajustados al riesgo (Kolm *et al.*, 2014). No obstante, los costos de transacción dificultan el problema de optimización de la cartera cuando el número de activos es mayor que dos, especialmente en un entorno dinámico (Brown y Smith, 2011).

2.3.2 Restricciones de Cardinalidad

En el modelo clásico, las proporciones de los activos no son limitadas y no importa cuán pequeña es la asignación de la inversión. Sin embargo, en la práctica los inversionistas prefieren tener una cartera con un número limitado de activos debido a que la gestión de una cartera con varios valores a menudo es tediosa y difícil de supervisar (Lwin, 2015). En este propósito, la restricción de cardinalidad busca reducir los costos de transacción y asegurar un cierto grado de diversificación limitando el número de activos (k) en una cartera (Skolpadungket, Dahal, y Harnpornchai, 2007). La restricción de cardinalidad es caracterizada de la siguiente forma (Bermúdez y Vercher, 2012; Lwin, 2015):

$$\sum_{i=1}^n y_i = k. \quad 2.28$$

$$y_i \in \{0,1\}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Donde

k = Número de activos deseados en la cartera

y_i = Variable binaria que indica si el i -ésimo activo está contenido en la cartera. Toma el valor de 1 si el i -ésimo activo está incluido en la cartera, y el valor de 0 en otros casos.

$$k_l \leq C(x) \leq k_u. \quad 2.29$$

Donde

k_l = Número mínimo de activos invertidos en la cartera

k_u = Número máximo de activos invertidos en la cartera

$C(x)$ = Rank [diagonal(x)] = n.º de proporciones estrictamente positivas en la cartera X

En la literatura, hay dos alternativas para la restricción de cardinalidad. En una alternativa (ecuación 2.28) el inversionista puede decidir que la cartera esté compuesta por un determinado número de acciones (k) (Armanianzas y Lozano, 2015; Chang *et al.*, 2009; Cura, 2009; Deng, Lin, y Lo, 2012; Fernández y Gómez, 2007; Golmakani y Fazel, 2011). La otra alternativa (ecuación 2.29) es la restricción de desigualdad donde la restricción de cardinalidad se extiende al límite mínimo y máximo de activos que conformaran la cartera $[k_l, k_u]$ (Anagnostopoulos y Mamanis, 2011b; Cesarone, Scozzari, y Tardella, 2013; Chiam, Tan, y Al Mamum, 2008; Crama y Schyns, 2003; Gaspero, Tollo, Roli, y Schaerf, 2011; Liagkouras y Metaxiotis, 2014). Para Bermúdez y Vercher (2012), la restricción de cardinalidad equivalente a la expresión 2.28 implica la introducción de variables binarias y la restricción de cardinalidad equivalente a la expresión 2.29 requiere la introducción de variables enteras. Si se introduce la restricción de cardinalidad utilizando la desigualdad: $k_l \leq C(x) \leq k_u$, siendo $c(X) = \text{Rank} [\text{diag}(X)]$ el número de proporciones estrictamente positivas en la cartera X , el problema se convierte en un problema NP-duro (*NP-hard*) porque la función $c(X)$ es cuasiconvexa, de modo que la utilización de procedimientos meta-heurísticos¹⁶ para la resolución del problema estará plenamente justificada.

2.3.3 Restricción de Cota Mínima y Máxima de Participación de un Activo en la Cartera

La cota mínima (*floor constraint* o *lower bound*) representa la mínima fracción del prepuesto que puede ser invertida en un activo, lo que evita un gran número de muy

¹⁶ Un problema de optimización se puede resolver utilizando métodos exactos o métodos heurísticos. Los métodos exactos proporcionan una solución óptima al problema (*i.e.* la que maximiza o minimiza la función objetivo). Mientras que los métodos heurísticos proporcionan soluciones factibles aunque no necesariamente óptimas. No obstante, la combinación de métodos exactos y heurísticos proporciona resultados exactos al óptimo global (Crossley y Williams, 2000).

pequeñas inversiones. En contraste, la cota máxima (*ceiling constraint* o *upper bound*) especifica la máxima fracción del presupuesto que puede ser invertida en un activo, lo cual asegura la diversificación de la inversión o no sobrepasar un umbral dado si ya se tiene previamente un paquete de acciones (Bermúdez, Segura, y Vercher, 2012). En concreto, la cota mínima y máxima de participación en la cartera se define mediante:

$$\omega_i \geq l_i y_i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad 2.30$$

$$\omega_i \leq u_i y_i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad 2.31$$

$$y_i \in \{0,1\}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Donde:

l_i = Mínima fracción del capital que puede ser invertida en el i -ésimo activo

u_i = Máxima fracción del capital que puede ser invertida en el i -ésimo activo

2.3.4 Restricción de Cota Mínima y Máxima de Participación en un Sector en la Cartera

Con el propósito de construir una cartera diversificada, los inversionistas podrían restringir la concentración de la cartera en un sector en particular. Al igual que la restricción vista en la sección anterior, se requiere determinar que la proporción total invertida en cada sector se encuentre entre los límites inferior y superior especificados por los inversionistas. Este tipo de restricción fue incorporada en la optimización de cartera por primera vez por Chang, Meade, Beasley y Sharaiha (2000), y posteriormente considerada por Anagnostopoulos y Mamanis (2011a), y, Vijayalakshmi Pai y Michel (2009). Bajo este contexto, la restricción de cota mínima y máxima de participación en un sector en la cartera estaría dada por la expresión:

$$l_{s_i} \leq \sum_{i \in I} \omega_i \leq u_{s_i}. \quad 2.32$$

Para un subconjunto dado de activos $I \subset \{1, 2, \dots, n\}$

Donde:

l_{s_i} = Proporción mínima a invertir en un sector “s” en la cartera

u_{s_i} = Proporción máxima a invertir en un sector “s” en la cartera

2.4 Resumen y Conclusiones

En la optimización de carteras el riesgo de mercado, esto es, el riesgo de la variación de los activos financieros que conforman una cartera dada, se puede medir utilizando medidas de riesgo de dispersión. Los enfoques comunes que utilizan este tipo de medidas de riesgo son el modelo seminal de media varianza y el modelo de desviación media absoluta.

El modelo de media varianza fue publicado hace 65 años, y es poco probable que su popularidad e impacto tanto en el entorno académico e investigador como en la industria financiera desaparezcan en el futuro. La hipótesis básica de este modelo es que las preferencias de un inversor se pueden representar por la función cuadrática (*i.e.* función de utilidad) del rendimiento esperado y la varianza de la cartera. Así mismo, el principio básico subyacente de este modelo clásico es que los inversionistas actúan racionalmente y sus decisiones siempre estarán orientadas a maximizar la rentabilidad esperada para un determinado nivel de riesgo o minimizar el riesgo soportado para un determinado nivel de rentabilidad esperada.

Con el modelo de media varianza Markowitz introdujo por primera vez el concepto de diversificación a través de la noción estadística de la covarianza entre los activos individuales, y la desviación estándar global de la cartera. Antes de la publicación de esta teoría, la literatura financiera había tratado la interacción entre el retorno y el riesgo de una manera ad hoc.

El modelo de desviación media absoluta es equivalente al modelo de media varianza si los rendimientos siguen una distribución normal multivariante. No obstante, cuando los rendimientos de los activos de una cartera son típicamente asimétricos, la varianza y la desviación absoluta no son apropiadas para medir el riesgo de la cartera debido a que este tipo de medidas de riesgo no hace distinción entre ganancias y pérdidas respecto del valor esperado del rendimiento. Con el propósito de resolver este conflicto, en los últimos años se han propuesto diversas medidas de riesgo denominadas *downside*, es decir, que solo consideran como arriesgado los resultados por debajo de cierto nivel de referencia. Las medidas de riesgo *downside* más comunes son: *safety-risk*, semivarianza, semidesviación absoluta, *lower partial moment*, VaR y CVaR.

El modelo de media semivarianza y el modelo de media varianza producen el mismo conjunto de carteras eficientes si la distribución de los rendimientos de los activos son simétricos o tienen el mismo grado de simetría. Así mismo, el modelo de semidesviación media absoluta es equivalente al modelo de media varianza si los rendimientos de los activos se distribuyen normalmente.

El planteamiento del enfoque de media varianza y *safety-risk* es dual. Markowitz concede más importancia al riesgo como factor determinante de las preferencias del

inversor a la hora de formar la cartera, mientras que Roy se inclina por la determinación de una rentabilidad mínima. Así mismo, queda patente que desde el punto de vista matemático ambos modelos se reducen a lo mismo, salvo algunas excepciones presentadas en el capítulo.

La medida de riesgo *lower partial moment* es una generalización natural de la semivarianza. Por otra parte, respecto a la medida del riesgo del VaR, se puede concluir que es una medida útil para medir la exposición de un activo financiero al riesgo de mercado. No obstante, el uso del VaR presenta algunos problemas prácticos y computacionales. En este propósito, la media de riesgo del CVaR se propuso para corregir las deficiencias presentadas con el VaR.

Los modelos de optimización de cartera en los últimos años han optado por incorporar diferentes tipos de restricciones que permitan considerar las preferencias del inversor, las condiciones del mercado, los requerimientos financieros o la responsabilidad social, entre otros. Este tipo de restricciones permiten estructurar carteras más realistas desde el punto de vista de la planificación y gestión de carteras. Entre las restricciones más usadas en la práctica en los modelos de optimización de cartera se encuentran: los costos de transacción, la restricción de cardinalidad, la restricción de cota mínima y máxima de participación de un activo en la cartera, y la restricción de cota mínima y máxima de participación en un sector en la cartera.

Capítulo 3

3 ALGORITMOS EVOLUTIVOS MULTI-OBJETIVO EN OPTIMIZACIÓN DE CARTERAS

3.1 Introducción

La optimización puede ser considerada como un proceso de toma de decisiones para aprovechar al máximo los recursos disponibles, y de esta forma obtener los mejores resultados posibles. Gran parte de los problemas del mundo real implican la optimización simultánea de varios objetivos que generalmente presentan conflictos entre sí, es decir, la mejora de un objetivo puede conllevar el deterioro de otro/s. Un ejemplo característico de este tipo de problemas es la optimización de carteras. En efecto, el modelo de media varianza ha sido criticado debido a que se basa en supuestos poco realistas. En este propósito, en los últimos años los modelos de optimización de cartera han incorporado algunas restricciones del mundo real (*e.g.* cardinalidad, cota mínima y máxima de

participación de un activo en la cartera), y han propuesto otras medidas de riesgo (*e.g.* VaR, *lower partial moment*). No obstante, la inclusión de estas restricciones y nuevas medidas de riesgo han ocasionado que el problema de selección de carteras sea difícil de resolver con métodos exactos (Metaxiotis y Liagkouras, 2012).

Los algoritmos evolutivos [*evolutionary algorithms* (EAs)] han sido fundamentales para resolver problemas de optimización que son demasiado complejos para ser resueltos mediante técnicas determinísticas (Andriosopoulos y Nomikos, 2014; Y. Chen y Wang, 2015; Corazza, Fasano, y Gusso, 2013; Fu, Chung, y Chung, 2013; Smimou, 2014; F. Wang, Yu, y Cheung, 2014). Los EAs se adaptan bien a los problemas de optimización multiobjetivo (MOP) debido a que están inspirados en los principios darwinianos de selección natural y reproducción genética (Darwin, 1859), que son inherentemente multiobjetivo (Metaxiotis y Liagkouras, 2012). Gracias a las técnicas que ofrecen los Algoritmos Evolutivos Multiobjetivo [*Multiobjective Evolutionary Algorithms* (MOEAs)], el modelo clásico de media varianza ha sido extendido para combinar dos o más objetivos en conflicto sujetos a diversas restricciones realistas (J. Li y Xu, 2013; Liagkouras y Metaxiotis, 2013, 2017; Mousavi, Esfahanipour, y Zarandi, 2014; Suksonghong, Boonlong, y Goh, 2014; P. Zhang y Zhang, 2014).

El tercer capítulo de esta tesis doctoral está estructurado de la siguiente forma: En la sección 3.2 se introduce los principales aspectos relacionados con los problemas de optimización multiobjetivo (MOPs). Las secciones 3.3 y 3.4 revisan los conceptos teóricos básicos sobre los algoritmos evolutivos EAs y los algoritmos evolutivos multiobjetivo MOEAs. En la sección 3.5 se ofrece una breve revisión de los artículos más relevantes que tratan de la implementación de MOEAs para la solución del problema de

selección de carteras. La sección 3.6 examina las características principales del *Non-dominated Sorting Genetic Algorithm* (NSGAI), algoritmo propuesto para resolver el modelo que se propondrá en esta tesis doctoral. Para finalizar, la sección 3.7 presenta el resumen y las conclusiones del capítulo.

3.2 Problemas de Optimización Multiobjetivo (MOPs)

La optimización hace referencia a encontrar la mejor solución posible a un problema, dado un conjunto de limitaciones o restricciones (Coello, 2006). Para García-Rodríguez (2012) una optimización multiobjetivo se define como “*el procedimiento para encontrar un vector de variables de decisión que satisfaga las restricciones dadas y optimice un vector de funciones cuyos elementos representan las funciones objetivo, que generalmente se encuentran en conflicto entre sí*” (p. 18). Por lo tanto, el término optimizar significa “*encontrar las soluciones que darían valores aceptables para todas las funciones objetivo*” (Osyczka, 1985, p. 194).

Un problema de optimización multiobjetivo [*multi-objective optimization problems* (MOPs)] puede ser formalmente definido como (Lwin, 2015; Villazón-Terrazas, 2015):

$$\begin{array}{ll}
 \text{Maximizar/minimizar } F(x) = \{f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x)\}. & \\
 \text{Sujeto a } & \begin{array}{ll} g_i(x) \leq 0, & i = 1, 2, \dots, p \quad \text{Restricción de desigualdad,} \\ h_j(x) = 0, & j = 1, 2, \dots, q \quad \text{Restricción de igualdad,} \\ x \in D, & m \geq 2. \end{array} & 3.1
 \end{array}$$

Donde

x = Es el vector n -dimensional de la variable de decisión $x = [x_1, x_2, \dots, x_D]$, definidas en el espacio D de soluciones factibles. El término espacio de solución también es denominado como espacio de búsqueda o espacio de decisión.

Una solución a este problema maximiza (o minimiza) los componentes de $F(x)$, a la vez que cumple con las restricciones $g_i(x)$ y $h_j(x)$. El vector de las variables de decisión puede ser discreto o continuo, y las m funciones objetivo pueden ser lineales o no, y discretas o continuas. La Función de evaluación $F: D \rightarrow \mathfrak{R}^m$, es una transformación del vector de las variables de decisión $x = [x_1, x_1, \dots, x_D]$ en un vector de respuestas (o vector objetivo) $F(x) = [f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x)]$, en el que $f_i(x)$ representa la idoneidad de (x) para el i -ésimo objetivo (ver figura 3.1) (Coello, Lamont, y Van, 2007; Deb, 2001; Lwin, 2015; Villazón-Terrazas, 2015).

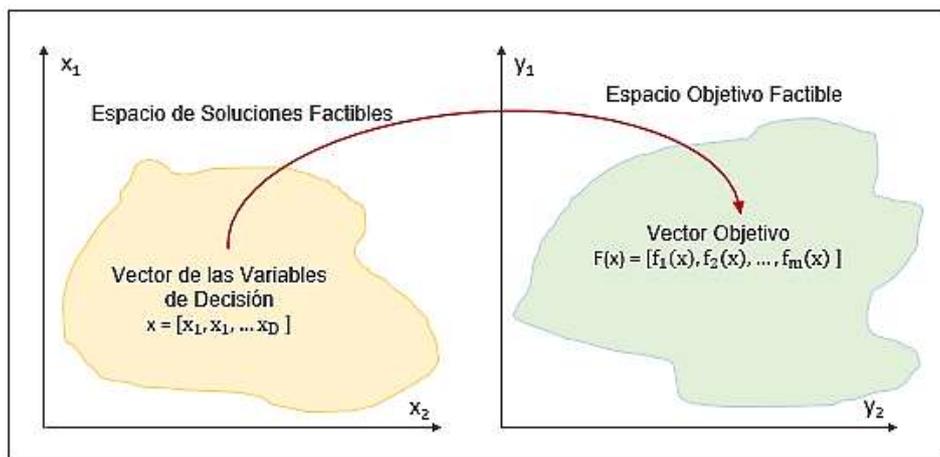


Figura 3.1 Transformación del Vector de Decisión al Vector de Respuestas

Fuente: Goh y Tan (2009, p. 2)

Nótese que en la ecuación 3.1., hay m funciones objetivo consideradas, y cada una de éstas puede ser maximizada o minimizada. En el contexto de la optimización, el principio de dualidad (Deb, 2001, 2012) sugiere que un problema de maximización puede ser transformado en uno de minimización, simplemente multiplicando la función objetivo por -1 . Este principio ha permitido que los problemas de optimización con diversos tipos

de objetivos sean fáciles de manejar, debido a que permiten transformar los objetivos en un mismo tipo de problema de optimización (Lwin, 2015).

3.2.1 MOPs Totalmente Conflictivos, no Conflictos y Parcialmente Conflictivos

Una de las principales diferencias entre la optimización de un único objetivo y una multiobjetivo es que los problemas multiobjetivos constituyen un espacio objetivo multi-dimensional \mathfrak{R}^m . Esto conduce a tres casos posibles de problemas multiobjetivo, dependiendo de si los objetivos son totalmente conflictivos, no conflictivos o parcialmente conflictivos. En los problemas multiobjetivo de la primera categoría, la naturaleza conflictiva de los objetivos es tal que no se puede mejorar sin violar ninguna restricción. Esto da resultado a una situación interesante, donde todas las soluciones factibles son también óptimas. Por lo tanto, los problemas multiobjetivo totalmente conflictivos son, quizás, los más simples de los tres, debido a que no se requiere ninguna optimización. En contraste, un problema multiobjetivo es no conflictivo si los diversos objetivos están correlacionados, y la optimización de algún objetivo arbitrario conduce a la mejora posterior de los otros objetivos. Esta clase de problemas multiobjetivo puede tratarse como un problema de un único objetivo, optimizando el problema con un objetivo seleccionado arbitrariamente, o agregando los diferentes objetivos dentro de una función escalar. Intuitivamente, solo existe una única solución óptima para este tipo de problemas multiobjetivo (Goh y Tan, 2009).

Generalmente, los problemas del mundo real son instancias del tercer tipo de problemas multiobjetivo, esto es, problemas de optimización multiobjetivo parcialmente conflictivos. Para Goh y Tan (2009), este tipo de problemas implica buscar el conjunto

de soluciones que representan los *trade-offs*¹⁷ o los mejores compromisos entre los diferentes objetivos, y no una única solución óptima. Con el propósito de generar soluciones de mejor compromiso, es necesario definir el concepto de optimalidad en los problemas de optimización multiobjetivo.

3.2.2 Dominancia de Pareto y Optimalidad

La noción de "óptimo" más comúnmente adoptada es la propuesta originalmente por Edgeworth (1881) y posteriormente generalizada por Pareto (1896). Aunque algunos autores llaman a esta noción el óptimo de Edgeworth-Pareto (ver por ejemplo Stadler, 1988)), el término más comúnmente aceptado es Pareto óptimo. A continuación se presentaran las siguientes definiciones (Deb, 2001; Lwin, 2015; Zitzler, Thiele, y Bader, 2010) que son conceptos fundamentales para resolver MOPs:

Definición 3.1 Solución Factible

Una solución x es identificada como una solución factible si cumple con las restricciones $g_i(x)$ y $h_j(x)$, y, además $x \in D$.

Definición 3.2 Dominada y No-dominada

Una solución factible x domina a otra solución factible y (denotada como $x \preceq y$), sí y solo sí:

$$\forall_i \in \{1, 2, \dots, m\}, x_i \text{ es mejor o igual que } y_i \wedge \exists_i \in \{1, 2, \dots, m\} \mid x_i \text{ es mejor que } y_i$$

¹⁷ En los problemas de optimización multiobjetivo, existe una dificultad inherente al trabajar con varios objetivos que generalmente presentan conflictos entre sí: La imposibilidad de encontrar una solución que sea simultáneamente "buena" para todos los objetivos. Bajo esta perspectiva, el concepto de *Trade-off* se asocia al hecho de que al seleccionar una solución en lugar de otra se obtiene una mejora de unos aspectos y el empeoramiento de otros.

Es decir, x domina a y , si x es mejor o igual a y en todos los objetivos y estrictamente mejor en al menos un objetivo. Alternativamente, se puede afirmar que x es no-dominada por y , o y está dominada por x . Por otra parte, es importante resaltar que si una solución x no domina a otra solución y , y a la vez, y no domina a x , entonces ambas son no-dominadas, y por consiguiente forman parte de las soluciones que se desean encontrar (García-Rodríguez, 2012).

Definición 3.3 Incomparables (o Indeterminadas)

Dos soluciones, x , y , son denotadas incomparables (denotadas por $x \parallel y$) si ni x domina y , ni y domina x ,

$$\text{Sí } x \not\prec y \vee y \not\prec x, \tag{3.2}$$

En la figura 3.2 se ilustra la relación de las soluciones dominadas, no-dominadas e incomparables, en un escenario con dos funciones de idoneidad que están siendo minimizadas. Para este ejemplo, se toma la solución B como punto de referencia, y las regiones destacadas en color verde, gris y blanco, ilustran las tres diferentes relaciones de dominancia. Las soluciones ubicadas en la región verde están dominadas por la solución B, debido a que B es mejor en ambos objetivos. Por la misma razón, las soluciones ubicadas en la región blanca dominan la solución B. Aunque B tiene un valor objetivo menor en comparación con las soluciones ubicadas entre los límites de las regiones gris y verde, solo domina débilmente estas soluciones, en virtud del hecho de que comparten un valor objetivo similar a lo largo de una u otra dimensión. Las soluciones ubicadas en las regiones grises son incomparables a la solución B, debido a que no es posible establecer ninguna superioridad de una solución sobre la otra: Las soluciones en la región

gris izquierda son mejores solo en el segundo objetivo, mientras que las soluciones en la región derecha son mejores solo en el primer objetivo (Goh y Tan, 2009)

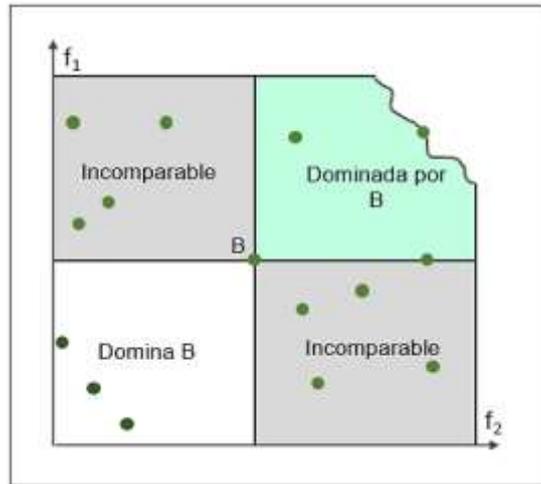


Figura 3.2 Relación de la Dominancia de Pareto entre las Soluciones Candidatas
Relativas a la Solución B

Fuente: Goh y Tan (2009, p. 4)

Una vez ilustrado el concepto de dominancia de Pareto, a continuación se definirá el conjunto de soluciones deseables para la optimización multiobjetivo.

Definición 3.4 Pareto Óptimo (Eficiente)

Una solución $x' \in D$ es identificada (globalmente) como Pareto óptimo, si no existe una solución $x \in D$, tal que $F(x)$ domine $F(x')$.

En palabras, esta definición indica que x' es Pareto óptimo si no existe un vector dado x que pueda hacer decrecer uno de los criterios sin causar un incremento simultáneo en al menos uno de los otros criterios (asumiendo una minimización) (Clemptner, 2014; Coello *et al.*, 2007).

Definición 3.5 Conjunto Óptimo de Pareto (o Conjunto de Soluciones Eficientes)

Es el conjunto de todas las soluciones óptimas de Pareto, y se denotado por:

$$\mathbb{P}_{\text{true}} = \{x' \in D \mid \nexists x \in D, F(x) \leq F(x')\}, \quad 3.3.$$

En esta perspectiva, el conjunto de soluciones de *trade-off* se conoce como el conjunto óptimo de Pareto, y estas soluciones también son denominan soluciones "no-inferiores", "admisibles" o "eficientes". Los correspondientes vectores objetivos de estas soluciones se denominan "no-dominados", y cada componente objetivo de cualquier solución no-dominada en el conjunto óptimo de Pareto solo puede mejorarse, degradando al menos uno de sus otros componentes objetivos (Goh y Tan, 2009; Shin, Lee, Kim, y Zhang, 2005).

Definición 3.6 Frente Óptimo de Pareto (o Frontera Eficiente)

Es la imagen de \mathbb{P}_{true} trazada en el espacio de objetivo factible, y se denota por:

$$\mathbb{EF}_{\text{true}} = \{F(x) \mid x \in \mathbb{P}_{\text{true}}\}, \quad 3.4.$$

En la figura 3.3 se ilustran los conjuntos óptimos de Pareto para diferentes escenarios con dos funciones de idoneidad y para el mismo espacio de soluciones. El óptimo de Pareto está compuesto por soluciones ubicadas en la frontera de la región factible del espacio de soluciones¹⁸ (Kanthababu, 2013; Villazón-Terrazas, 2015):

¹⁸ En realidad la figura no representa el espacio de soluciones si no una imagen en \mathbb{R}^2 mapeada por la función de idoneidad (F_1, F_2) , que es donde está definida la dominancia.

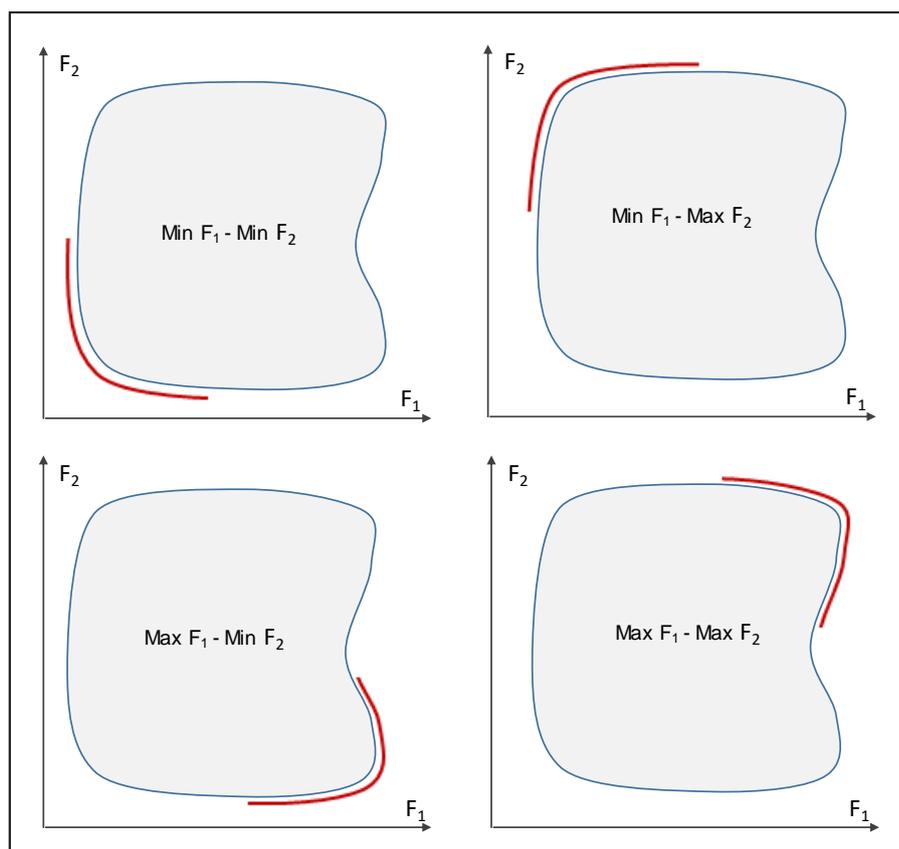


Figura 3.3 Frentes Óptimos de Pareto para un mismo Espacio de Soluciones
Fuente: Elaboración propia a partir de Kanthababu (2013, p. 355), y Villazón-Terrazas (2015, p. 40)

3.2.3 Métodos para Resolver MOPs

Existen dos enfoques para resolver los problemas de optimización multiobjetivo (Lwin, 2015; Swain, Panda, y Mahapatra, 2016; Yegireddy y Panda, 2014). Un enfoque es la optimización simultánea de todos los objetivos basándose en la relación de dominancia para determinar el conjunto óptimo de Pareto (\mathbb{P}_{true}), o el subconjunto representativo del conjunto óptimo de Pareto ($\mathbb{P}_{\text{known}}$), (ver sección 3.2.2). El otro enfoque es el método clásico de suma ponderada, en el cual la función objetivo se formula como una suma ponderada de los objetivos. A continuación se presenta los principales aspectos de este enfoque.

i) Método de Suma Ponderada

Este enfoque combina los múltiples objetivos en una función de costo escalar, lo que hace que el problema sea de un único objetivo antes de la optimización. Su denotación es:

$$\begin{aligned} \text{Maximizar/minimizar } F(x) &= \sum_{m=1}^M \lambda_m f_m(x), \\ \lambda_m &\leq 0, \\ \text{Sujeto a } \sum_{m=1}^M \lambda_m &= 1, \end{aligned} \tag{3.5}$$

Donde

λ_m = Pueden reflejar la importancia relativa de los objetivos.

Este enfoque produce una solución única con un vector de peso dado $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m\}$. Por lo tanto, el problema debe ser resuelto repetidas veces con diferentes combinaciones de pesos (*i.e.* predeterminados) para lograr soluciones múltiples que permitan determinar el conjunto óptimo de Pareto (\mathbb{P}_{true}) o un subconjunto representativo del conjunto óptimo de Pareto ($\mathbb{P}_{\text{known}}$). Una desventaja de este modelo, es que en la práctica, puede ser muy difícil seleccionar con precisión y exactitud los pesos de los objetivos, ya que pequeñas perturbaciones en los pesos pueden conducir a soluciones muy diferentes.

3.2.4 Optimización de Objetivos de MOPs

Para la mayoría de los MOPs, el conocimiento del conjunto óptimo de Pareto (\mathbb{P}_{true}), y por ende del frente óptimo de Pareto (EF_{true}), ayuda al tomador de decisiones a seleccionar aquella solución que representa el mejor compromiso. No obstante, la identificación de todo el conjunto óptimo de Pareto (\mathbb{P}_{true}), para muchos problemas

multiobjetivo, es prácticamente imposible debido a su tamaño. Además, para varios problemas, especialmente en los problemas de optimización combinatorial¹⁹, comprobar la optimalidad de la solución es computacionalmente inviable. Por lo tanto, un enfoque práctico en la optimización multiobjetivo es investigar el conjunto de soluciones [*the best-known Pareto set* ($\mathbb{P}_{\text{known}}$)] que mejor se aproxime al conjunto óptimo de Pareto (\mathbb{P}_{true}). Teniendo en cuenta estos intereses, un enfoque de optimización multiobjetivo debería alcanzar los siguientes tres objetivos en conflicto (Kanthababu, 2013; Konak, Coit, y Smith, 2006; Zitzler, Deb, y Thiele, 2000):

- i) *The best-known Pareto front* ($\mathbb{EF}_{\text{known}}$) debe estar lo más cerca posible del verdadero frente óptimo de Pareto ($\mathbb{EF}_{\text{true}}$). Idealmente, *the best-known Pareto set* ($\mathbb{P}_{\text{known}}$) debería ser un subconjunto del conjunto óptimo de Pareto (\mathbb{P}_{true}).
- ii) Las soluciones en *the best-known Pareto set* ($\mathbb{P}_{\text{known}}$) deben ser diversas y estar uniformemente distribuidas sobre el frente óptimo de Pareto para proporcionar al tomador de decisiones una imagen real de los *trade-offs*.
- iii) *The best-known Pareto front* ($\mathbb{EF}_{\text{known}}$) debe captar todo el espectro del frente óptimo de Pareto. Esto requiere investigar soluciones en los extremos del espacio de la función objetivo.

Para un límite de tiempo computacional dado, el primer objetivo es el más útil, debido a qué enfoca la búsqueda en una región particular del frente óptimo de Pareto. Por otra parte, el segundo objetivo demanda un esfuerzo de búsqueda para ser distribuido

¹⁹ Un problema de optimización multiobjetivo es combinatorial cuando el vector n-dimensional de la variable de decisión $x = [x_1, x_2, \dots, x_D]$ es discreto y finito.

uniformemente sobre el frente óptimo de Pareto. El tercer objetivo tiene como propósito extender el frente óptimo de Pareto en ambos extremos, explorando de esta forma nuevas soluciones extremas.

3.3 Algoritmos Evolutivos (EAs)

Los algoritmos evolutivos (EAs) son técnicas estocásticas (involucra a las variables aleatorias) que emulan el proceso de evolución natural de las especies²⁰ para resolver problemas de optimización, búsqueda y aprendizaje (Bäck, Fogel, y Michalewics, 1997; Goldberg, 1989), y donde las posibles soluciones a un problema dado son consideradas como individuos de una población que irá evolucionando para hallar las mejores soluciones a dicho problema (García-García *et al.*, 2015). Existen cuatro tipos de EAs que han servido de base a las diversas investigaciones que se han realizado en el área de la computación evolutiva: los algoritmos genéticos [*genetic algorithms* (AGs)] (Holland, 1975), las estrategias de evolución [*evolutionary strategies* (ES)] (Rechenberg, 1973), la programación evolutiva [*evolutionary programming* (EP)] (L. J. Fogel, Owens, y Walsh, 1966), y la programación genética [*genetic programming* (GP)] (Koza, 1992)²¹.

A continuación se definirán los elementos que intervienen en los EAs (Duran, Cotta, y Fernández, 2009; García-Rodríguez, 2012):

²⁰ La Computación Evolutiva fue originada en 1930 por W. D. Cannon y sus principios se sustentan en la “Teoría Neo-Darwiniana de la Evolución” (García-Rodríguez, 2012). Esta teoría establece que la historia de la vasta mayoría de la vida en el planeta puede ser explicada a través de una serie de procesos estadísticos que actúan sobre y dentro de las poblaciones y especies: la reproducción, la mutación, la competencia y la selección. Bajo este contexto, la evolución es, por lo tanto, el resultado de estos procesos estocásticos (es decir, probabilísticos) fundamentales que interactúan entre sí en las poblaciones, generación tras generación (Quintero y Coello, 2006 p. 5).

²¹ Los AGs se basan en operadores que tratan de modelar los operadores genéticos existentes en la naturaleza, como el cruce y la mutación, los cuales son aplicados a los individuos que codifican las posibles soluciones. Las ES y la EP aplican transformaciones basadas en mutaciones efectuadas sobre los padres para obtener los hijos, lo que permite mantener una línea general de comportamiento del individuo en su descendencia. Finalmente, la GP codifica las soluciones al problema en forma de programas, habitualmente codificados en una estructura de árbol, y adapta dichas estructuras empleando operadores muy específicos (Romero-Zalaz, 2005, p. 40).

Definición 3.7 Representación

Estructura de datos (denominada cromosomas) que codifica la información o parámetros (también conocida como genes) de una posible solución a un problema. Los cromosomas pueden representarse por cadenas binarias, reales, etc. (Ver figura 3.4). Un gen es un elemento de un cromosoma que codifica el valor de un solo parámetro, así, el genotipo corresponde a la codificación del cromosoma, y el fenotipo a la decodificación de este.

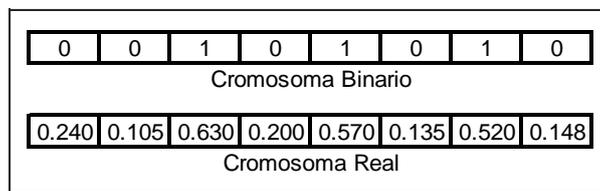


Figura 3.4 Estructura General de un Algoritmo Evolutivo
Fuente (García-Rodríguez, 2012)

Definición 3.8 Parámetros

Valores utilizados en la simulación de un proceso evolutivo (*e.g.* tamaño de la población, probabilidad de aplicar un operador genético, número de generaciones).

Definición 3.9 Población

Conjunto de individuos (soluciones) que codifican las variables de decisión de la función objetivo del problema. Cada uno de estos individuos debe estar configurado en forma de cromosoma.

Definición 3.10 Función de Evaluación

Se le conoce también como función fitness, función de aptitud o función objetivo, y representa los requisitos a los cuales la población debe adaptarse.

Definición 3.11 Operadores Genéticos

Operadores probabilísticos que generan nuevas poblaciones a partir de la población actual. Se pueden clasificar en tres tipos:

- **Selección:** Elige los individuos más aptos para generar la siguiente población.
- **Cruce:** Combina los cromosomas de dos individuos para obtener los descendientes. Su aplicación selectiva hacia los individuos padre favorece la transmisión de las características de un progenitor a su descendencia, aun cuando éstas sean mezcladas con las de otros individuos.
- **Mutación:** Ayuda a mantener la diversidad genética a través de la introducción aleatoria de pequeñas alteraciones a la codificación de algunos individuos.

Así mismo, los algoritmos evolutivos incorporan un mecanismo que permite conservar durante el proceso evolutivo a los individuos que han presentado el mejor fitness, sin aplicarles ninguna operación genética sobre ellos. En este tratamiento denominado “elitismo” se copia el mejor individuo de una generación a la siguiente, evitando de esta forma que éste se pierda a causa del proceso evolutivo. Así, el mejor individuo de una generación siempre será igual o mejor al de su generación anterior, asegurando el comportamiento monótono del máximo valor de la función de fitness por iteración, lo cual es condición necesaria y suficiente para la convergencia del algoritmo (García-Rodríguez, 2012).

El pseudocódigo de un EA básico se describe en el Algoritmo 3.1. (Bäck y Schwefel, 1993; Lwin, 2015):

Algoritmo 3.1 Estructura Genérica de un EA Básico

```
1   $g \leftarrow 0$ ;  
2  inicializar a población  $P^g$  con individuos aleatorios;  
3  evaluar cada individuo en  $P^g$ ;  
4  while not criterio de parada do;  
5     $g \leftarrow g + 1$ ;  
6     $\hat{P}^g \leftarrow$  cruzar ( $P^g$ );  
7     $\hat{P}^g \leftarrow$  mutar ( $\hat{P}^g$ );  
8    evaluar ( $\hat{P}^g$ );  
9     $P^{g+1} \leftarrow$  seleccionar ( $\hat{P}^g \cup P^g$ );
```

En el algoritmo 3.1., un individuo representa una solución potencial al problema que se está resolviendo. Inicialmente, la población se genera aplicando un procedimiento aleatorio o utilizando una heurística específica para el problema a resolver. Cada individuo en la población es evaluado por una función fitness. En cada iteración (generación), una población de soluciones tentativas se reproduce, sujetas a las variaciones genéticas que se dan en la selección natural (supervivencia del más apto). Nuevas soluciones de descendentes son producidas por el cruce de padres y la mutación de los individuos resultantes para promover diversidad genética. Una selección estratégica adecuada es luego aplicada para identificar las soluciones que sobreviven a la siguiente generación. Este proceso se repite para un número predefinido de generaciones (o función de evaluación) o para algún otro criterio de parada específico (Bäck y Schwefel, 1993; Lwin, 2015).

3.4 Algoritmos Evolutivos Multiobjetivo (MOEAs)

El potencial de los algoritmos evolutivos para resolver problemas de optimización multiobjetivo fue sugerido por Rosenberg (1960), e Ito, Akagi y Nishikawa (1983). No obstante, la primera implementación real de lo que en la actualidad se denomina un algoritmo evolutivo multiobjetivo [*multi-objective evolutionary algorithm* (MOEA)] se acredita a Schaffer (1984), quien propuso el *Vector Evaluation Genetic Algorithm*

(VEGA). VEGA tenía principalmente el objetivo de resolver problemas en el aprendizaje de máquinas (*machine learning*) (Schaffer, 1984, 1985; Schaffer y Grefenstette, 1985).

Los algoritmos evolutivos son particularmente adecuados para resolver problemas de optimización multiobjetivo debido a que tratan simultáneamente con un conjunto de posibles soluciones (la llamada población). Esto permite encontrar varios miembros del conjunto óptimo de Pareto en una sola "ejecución" del algoritmo, en lugar de tener que realizar una serie de ejecuciones separadas como en el caso de las técnicas de programación matemáticas tradicionales (Coello, 1999). Además, los algoritmos evolutivos son menos susceptibles a la forma o continuidad del frente óptimo de Pareto (*e.g.* pueden tratar fácilmente con frentes óptimos de Pareto discontinuos o cóncavos), mientras que estas dos cuestiones son una preocupación real para las técnicas de programación matemática. En este orden de ideas, los MOEAs son unas técnicas muy atractivas de solución de MOPs, puesto que abordan la búsqueda y la toma de decisiones multiobjetivo. Además, tienen la capacidad de buscar espacios parcialmente ordenados para varias alternativas de *trade-offs* (Coello *et al.*, 2007).

Las figuras 3.5 muestran, respectivamente, una descomposición general de las tareas de un EA y un MOEA. Por definición, la Tarea 2 del caso MOEA calcula k (donde $k \geq 2$) funciones fitness. Además, debido a que los MOEAs esperan un valor fitness único con el cual realizar la selección, a veces se requiere un proceso adicional para transformar los vectores fitness de las soluciones MOEAs en un escalar (Tarea 2a). Aunque las diversas técnicas de transformación varían en su impacto algorítmico, el resto del MOEAs

es estructuralmente idéntico a su homólogo de un único objetivo. Sin embargo, esto no implica que las diferencias sean insignificantes (Coello *et al.*, 2007).

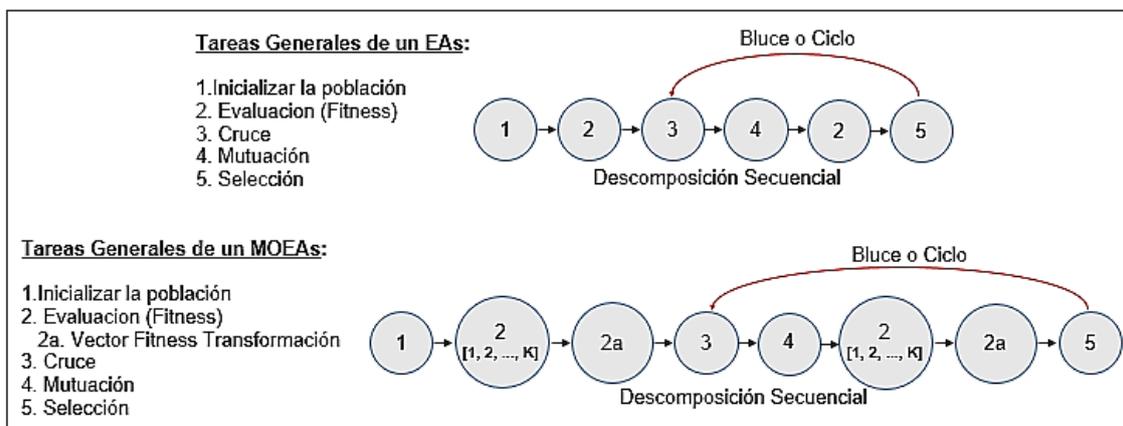


Figura 3.5 Descomposición de Tareas de un EA y un MOEA

Fuente: Coello *et al.* (2007)

Desde el esfuerzo pionero de Schaffer (1984), se han propuesto varias técnicas evolutivas diferentes para la optimización multiobjetivo con el propósito de cumplir los tres objetivos de optimización descritos anteriormente (ver sección 3.2.4). La mayoría de estos MOEAs se basan en gran medida en los modelos computacionales de algoritmos genéticos (GAs), la programación evolutiva (EP) y las estrategias de evolución (ES). En este orden de ideas, los diferentes MOEAs propuestos para los MOPs se pueden clasificar en tres categorías (Maulik, Bandyopadhyay, y Mukhopadhyay, 2011): i) *Population-Based Non-Pareto Algorithms*, ii) *Pareto-Based Non-Elitist Algorithms*, y, iii) *Pareto-Based Elitist Algorithms*.

La tabla 3.1 presenta algunos de estos algoritmos, junto a un breve resumen de sus ventajas y desventajas (Kanthababu, 2013; Konak *et al.*, 2006):

Tabla 3.1 Comparación de los MOEAs más Conocidos y Utilizados

<i>Population-Based Non-Pareto Algorithms</i>						
Algoritmo	Asignación Fitness	Mecanismo de Diversidad	Elitismo	Población Externa	Ventajas	Desventajas
<i>Vector Evaluated Genetic Algorithm (VEGA)</i> (Schaffer, 1985)	Cada subpoblación se evalúa con respecto a un objetivo diferente	No	No	No	Implementación sencilla	Tendencia a converger al extremo de cada objetivo
<i>Pareto-Based Non-Elitist Algorithms</i>						
Algoritmo	Asignación Fitness	Mecanismo de Diversidad	Elitismo	Población Externa	Ventajas	Desventajas
<i>Multiple Objective GA (MOGA)</i> (Fonseca y Fleming, 1993)	Jerarquización de Pareto	i) <i>Fitness-Sharing</i> ii) <i>Niching</i>	No	No	Extensión Sencilla de un Algoritmo de Objetivo Único	i)Convergencia lenta i)Problemas relacionados con el parámetro de tamaño de nicho
<i>Niched Pareto GA (NPGA)</i> (Horn, Nafpliotis, y Goldberg, 1993)	i)No asignación de fitness ii)Selección de torneo	El nicho cuenta como desempate en la selección de torneos	No	No	Proceso de selección muy simple con selección de torneos	i)Problemas relacionados con el parámetro de tamaño de nicho ii)Parámetro extra para la selección de torneos
<i>Non-dominated Sorting GA (NSGA)</i> (Srinivas y Deb, 1994)	Jerarquización basada en un ordenamiento no dominado	i) <i>Fitness-Sharing</i> ii) <i>Niching</i>	No	No	Rápida Convergencia	Problemas relacionados con el parámetro de tamaño de nicho

<i>Pareto-Based Elitist Algorithms</i>						
Algoritmo	Asignación Fitness	Mecanismo de Diversidad	Elitismo	Población Externa	Ventajas	Desventajas
<i>Strength Pareto Evolutionary Algorithm (SPEA)</i> (Zitzler y Thiele, 1998)	Jerarquización basada en el archivo externo de soluciones no dominadas	Agrupamiento para truncar la población externa	Si	Si	i) Muestras Adecuadas ii) No parámetros para la agrupación	Algoritmo de agrupamiento complejo

<i>Pareto-Based Elitist Algorithms</i>						
Algoritmo	Asignación Fitness	Mecanismo de Diversidad	Elitismo	Población Externa	Ventajas	Desventajas
<i>Strength Pareto Evolutionary Algorithm II (SPEA2)</i> <small>(Zitzler, Laumanns, y Thiele, 2001)</small>	Fuerza de los dominadores	Densidad basada en el k-ésimo vecino más cercano	Si	Si	i) SPEA Mejorado ii) Asegura la preservación de los puntos extremos	Calculo de la densidad y el fitness computacionalmente costosa
<i>Pareto Archived Evolutionary Strategy (PAES)</i> <small>(Knowles y Corne, 1999)</small>	La dominación de Pareto se usa para reemplazar a un padre si domina la descendencia	Densidad celular como separador de vínculos entre descendientes y padres	Si	Si	i)Estrategia de escalada de mutación al azar ii) Fácil de implementar iii) Computacionalmente eficiente	i)No es un enfoque basado en la población ii) El rendimiento depende del tamaño de las celdas
<i>Pareto Envelope-Based Selection Algorithm (PESA)</i> <small>(Corne, Knowles, y Oates, 2000)</small>	No asignación de fitness	Densidad basada en células	Elitismo Puro	Si	i) Fácil de implementar ii)Computacionalmente eficiente	i)El rendimiento depende del tamaño de las celdas ii) Información previa necesaria sobre el espacio objetivo
<i>Elitist Non-dominated Sorting GA (NSGAI)</i> <small>(Deb, Agrawal, Pratap, y Meyarivan, 2000)</small>	Jerarquización basada en un ordenamiento no dominado	<i>Crowding distance</i>	Si	No	i) Parametro Unico (N) ii) Muestras adecuadas iii) Eficiente	La <i>Crowding distance</i> trabaja solo en un espacio objetivo

Fuente: Elaboración propia a partir de Kanthababu (2013) y Konak *et al.* (2006)

3.5 El Problema de Optimización de Cartera con el Apoyo de MOEAs

La utilidad de los algoritmos evolutivos multiobjetivo (MOEAs) para la solución del problema de optimización de cartera con restricciones realistas es indiscutible y puede ser testificada por un número considerable de estudios en el campo (Castillo y Coello, 2007; Liagkouras y Metaxiotis, 2015; Metaxiotis y Liagkouras, 2012; Schlottmann y Seese, 2004). A continuación, se ofrece una breve revisión de los artículos más relevantes que

tratan de la implementación de MOEAs para la solución del problema de selección de carteras:

Arnone, Loraschi y Tettamanzi (1993) fueron los primeros en utilizar un MOEA para la optimización de carteras. Los autores adoptaron el modelo de Markowitz (1952), y utilizaron el *lower partial moment* como medida de riesgo. No obstante, el uso de este riesgo *downside* hace el problema más difícil, debido a que la forma de la superficie objetivo es generalmente no convexa y, por consiguiente, la programación cuadrática no puede ser utilizada para encontrar soluciones exactas. Los autores adoptaron un algoritmo genético con una función de agregación lineal ponderada para resolver este problema.

Shoaf y Foster (1996) usan un algoritmo genético con una combinación lineal de pesos para la selección de carteras de media varianza. Los autores destacan un tema importante: la codificación. El problema de selección de carteras es un problema de asignación, por lo tanto, una representación directa (*i.e.* utilizando variables de decisión como se hace normalmente con los algoritmos genéticos para representar los pesos de cada acción) no funciona bien. La razón es que este tipo de representación producirá frecuentemente soluciones inviables, en las que los valores asignados no suman 1.0, lo cual es una limitación impuesta al problema. Proponen una representación alternativa que resuelve este problema, pero con el efecto secundario de una mayor sensibilidad a las tasas de mutación y crossover.

Vedarajan, Chan y Goldberg (1997) adoptan los dos objetivos del modelo de Markowitz, esto es, maximizar el rendimiento esperado de la cartera y minimizar el riesgo. Estos autores utilizan un algoritmo genético con una función de agregación lineal

que combina los dos objetivos en un único valor escalar y en el que los pesos son variados para generar diferentes soluciones no-dominadas.

Chang *et al.* (2000) utilizan tres algoritmos heurísticos basados en algoritmos genéticos, búsqueda tabú (Glover y Laguna, 1997) y cristalización simulada (Kirkpatrick, Gelatt, y Vecchi, 1983), para resolver el modelo de media varianza con restricciones de cardinalidad y cotas inferior y superior sobre la proporción del presupuesto de capital que se desea invertir en un activo. Los investigadores prueban que debido a estas limitaciones, la frontera eficiente limitada por este tipo de restricciones es más difícil de aproximar y puede presentar algunas discontinuidades.

Lin, Wang y Yan (2001) consideran una variación del modelo de media varianza con costos de transacción fijos y lotes mínimos de transacción. El problema de selección de carteras se modela como un problema de programación lineal en números enteros con funciones de objetivos múltiples. Desarrollan un algoritmo genético basado en NSGAI y GENOCOOP (Michalewicz y Nazhiyath, 1995) para la solución del modelo propuesto y proporcionan un ejemplo numérico para probar la eficiencia del algoritmo.

Schaerf (2002) examina el modelo de media varianza y considera restricciones adicionales como la cardinalidad de la cartera y la cantidad de acciones individuales. La autora utiliza técnicas de búsqueda local, principalmente la búsqueda tabú, y realiza una comparación con los estudios previos de selección de carteras que utilizan este tipo de enfoque. Así mismo, propone nuevos algoritmos que combinan diferentes relaciones de vecindario, y comprueba cómo el uso de la aleatorización y de una forma simple de adaptación, simplifica el establecimiento de un gran número de parámetros críticos.

Maringer y Kellerer (2003) sugieren un algoritmo híbrido de búsqueda local que combina principios de cristalización simulada y estrategias evolutivas. Aplicaron el algoritmo al problema de selección de carteras cuando hay restricciones como el número de activos en la cartera y la no negatividad de los pesos de los activos, y encontraron que el algoritmo era altamente eficiente y confiable.

Ehrgott, Klamroth y Schwehm (2004) plantean un modelo para la optimización de cartera que amplía el modelo media-varianza. Con el apoyo de *Standard and Poor's*, utilizan cinco objetivos específicos relacionados con el retorno y el riesgo, cinco funciones de utilidad para cada objetivo, y una función de utilidad global aditiva. Los resultados numéricos presentados y soportados en la búsqueda local personalizada, la cristalización simulada, la búsqueda tabú y la heurística, demuestran que los problemas de tamaño pueden resolverse rápidamente.

Subbu, Bonissone, Eklund, Bollapragada y Chalermkraivuth (2005) presentan un enfoque de optimización multiobjetivo híbrido que combina algoritmos evolutivos con una programación lineal para maximizar simultáneamente el retorno esperado, minimizar el riesgo e identificar la frontera eficiente que cumpla con todas las restricciones consideradas. Los autores demostraron que su *Pareto Sorting Evolutionary Algorithm* (PSEA), es capaz de identificar de manera robusta el frente de Pareto de las carteras óptimas definidas en el espacio retorno-riesgo.

Chiam, Al Mamun y Low (2007) proponen una representación basada en órdenes (*order-based representation*) para la optimización de la cartera multiobjetiva evolutiva, que puede ser extendida fácilmente para tratar varias restricciones realistas como la

cardinalidad y la cota mínima y máxima de participación de un activo en la cartera. Los autores proporcionan un amplio estudio experimental, que incluye la evaluación del rendimiento algorítmico basado en un conjunto de problemas de referencia con métricas de rendimiento y pruebas estadísticas.

Chang *et al.* (2009) utilizan un algoritmo evolutivo para resolver el enfoque heurístico de los problemas de optimización de cartera con diferentes medidas de riesgo. Los autores comparan los desempeños obtenidos con el modelo de media varianza en la frontera eficiente limitada por cardinalidad, y demuestran que los problemas complejos de optimización de la cartera pueden ser resueltos por un algoritmo genético si se utilizan medidas de riesgo como la varianza, la semivarianza, la desviación absoluta y varianza con asimetría. Finalmente, proporcionan resultados empíricos para demostrar la robustez de su método heurístico.

Anagnostopoulos y Mamanis (2011a) investigan la capacidad de algunos MOEAs, como NSGAI, PESA y SPEA2 para solucionar los complejos problemas de optimización de la cartera. Los autores evaluaron las técnicas de los mencionados MOEAs con resultados proporcionados por los métodos exactos, y concluyen que el desempeño de PESA es mejor en términos de la cercanía al frente óptimo de Pareto, mientras que NSGAI y SPEA2 tienen el mejor desempeño promedio en términos del indicador de hipervolumen. Los resultados muestran que los MOEAs, en general, son estrategias eficientes y confiables para este tipo de problemas, y, además, son flexibles para adaptarse a una adición de una nueva restricción, o a un remplazo de una nueva función de riesgo.

En un contexto de optimización difusa, Gupta, Inuiguchi, *et al.* (2013) proponen un modelo credibilístico multiobjetivo para la selección de carteras con restricciones de probabilidad difusa. Los criterios financieros utilizados son el rendimiento a corto plazo y largo plazo, el riesgo y la liquidez. El problema es resuelto utilizando un algoritmo inteligente híbrido, que integra la simulación difusa con un algoritmo genético de código real. Los autores comprobaron que el modelo genera carteras que son óptimas hasta el punto de alcanzar los valores de credibilidad más altos para las funciones objetivo, y, mostraron que la principal ventaja de este modelo multicriterio es que trata la incertidumbre de los mercados financieros de manera más realista, debido a que los cuatro criterios considerados pueden tener formas funcionales generales.

Vercher y Bermúdez (2015) examinaron el problema de optimización multiobjetivo con restricciones de cardinalidad para generar carteras eficientes dentro de un marco difuso de semidesviación media absoluta. Los autores asumieron que el rendimiento de una cartera dada se modela mediante variables difusas de tipo L-R, cuyas distribuciones de credibilidad recogen las relaciones contemporáneas entre los rendimientos de los activos individuales. Por último, aplicaron una estrategia de clasificación basada en el VaR Fuzzy, para seleccionar la mejor cartera entre las soluciones óptimas de Pareto, lo cual permitió encontrar una composición explícita de la cartera para los diferentes perfiles de riesgo de los inversores.

Jalota *et al.* (2017b) señalan que, en los modelos desarrollados hasta el momento, los números fuzzy L-R necesarios para modelar los parámetros inciertos en un problema de selección de carteras multiobjetivo se someten a la opinión del decisor o al experto en

el mercado. Esta toma de decisiones se vuelve muy subjetiva y por lo que proponen un sistema para extraer a partir de datos históricos, la información requerida para ajustar los números fuzzy L-R y no necesitar la intervención humana. Desarrollaron 4 modelos, y diseñaron un algoritmo multiobjetivo denominado *Entropy-Cross Entropy* (ECE), y a través de varios ejemplos numéricos demuestran la validez de los modelos planteados.

3.6 Non-dominated Sorting Genetic Algorithm (NSGAI)

Liagkouras y Metaxiotis (2015) examinaron 220 artículos de revistas y congresos internacionales de reconocido prestigio, y encontraron que el NSGAI y SPEA2, con un 29.17% y un 25% respectivamente, son los dos MOEAs más populares para resolver el problema de optimización de cartera (ver tabla 3.2).

Tabla 3.2 Los MOEAs más Utilizados para Resolver el Problema de Optimización de Cartera

Tipo MOEA	NSGAI	SPEA2	PESA	SPEA	PAES	MOGA	NPGA2	IBEA
%	29.17%	25.00%	16.67%	8.33%	8.33%	4.17%	4.17%	4.70%

Fuente: Elaboración propia a partir de Liagkouras y Metaxiotis (2015)

Sobre la base de la consideración anterior, el modelo que se propondrá en esta tesis doctoral se resolverá aplicando el MOEA-NSGAI. A continuación se presentará las principales características de este EA.

NSGAI fue presentado por Deb *et al.*, (2000) y es una versión mejorada de NSGA (Srinivas y Deb, 1994). Este MOEA, comparado con su predecesor, presenta tres características significativas (Lwin, 2015):

- i) Reduce la complejidad computacional de $O(JI^3)$ a $O(JI^2)$, donde J es el número de objetivos y I es el tamaño de la población²².
- ii) Agrega un procedimiento de elitismo que previene la pérdida de soluciones prometedoras ya encontradas.
- iii) Integra un operador de selección denominado *crowding distance* que ayuda a preservar la diversidad de las soluciones en el frente óptimo de Pareto.

3.6.1 Ordenamiento Rápido de Soluciones No-Nominadas

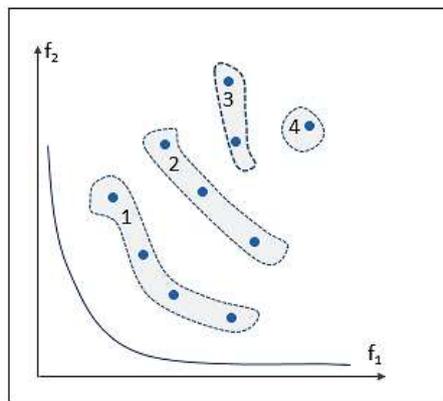


Figura 3.6 Ordenamiento Rápido de Soluciones No-Dominadas en NSGAII para dos objetivos

Fuente: Lwin (2015)

NSGAII se basa en el marco básico que utiliza una técnica de clasificación por capas. La idea básica es clasificar las soluciones de la población en frentes no dominados F_i . En primer lugar, se identifican todas las soluciones no-dominadas en la población P . El conjunto de estas soluciones se clasifican en una categoría con el primer frente o nivel F_1 . Este conjunto de soluciones son a continuación suprimidas de la población, y al conjunto siguiente de soluciones no-dominadas se les atribuye el segundo frente o nivel

²² El NSGA original tiene una complejidad de $O(JI^3)$, lo cual hace que este MOEA sea muy costoso con tamaños de población grandes.

F_2 (Lwin, 2015). El proceso se repite con los individuos restantes hasta que toda la población se clasifica (Ver figura 3.6).

Algoritmo 3.2 Ordenamiento rápido de soluciones no-dominadas

```

1  for each  $p \in P$ 
2     $s_p = \emptyset$ 
3     $n_p = 0$ 
4    for each  $q \in P$ 
5      if  $(p \leq q)$  then // Si p domina a q
6         $s_p = s_p \cup \{q\}$ ; // Agrega q a soluciones dominadas por p
7      else if  $(q \leq p)$  then
8         $n_p = n_p + 1$ ; // Incrementa el contador de dominación de p
9      end if
10   end for
11   if  $n_p = 0$  then // p pertenece al primer frente
12      $p_{rank} = 1$ 
13      $F_1 = F_1 \cup \{p\}$ 
14   else if
15 end for
16  $i = 1$ ; // Inicializa el contador de frente
17 while  $F_i \neq \emptyset$  do
18    $Q = \emptyset$ ; // Usado para guardar los miembros del siguiente frente
19   for each  $p \in F_i$ 
20     for each  $q \in s_p$ 
21        $n_p = n_p - 1$ 
22       if  $n_p = 0$  then // q pertenece al siguiente frente
23          $q_{rank} = i + 1$ 
24          $Q = Q \cup \{q\}$ 
25       end if
26     end for
27   end for
28    $i = i + 1$ 
29    $F_i = Q$ 
30 end while

```

El procedimiento de ordenamiento rápido de soluciones no dominadas (*Fast Non-dominated Sorting*) se describe en el Algoritmo 3.2. Cada solución tiene dos entidades: i) un contador de dominancia n_p , que es el número de soluciones que dominan a p , y, ii) un conjunto s_p , que es el conjunto de soluciones que p domina. Todas las soluciones del primer frente no-dominado tendrán n_p en cero. A continuación, para cada solución p con $n_p = 0$, se visita cada miembro q de su conjunto s_p y se reduce el contador de dominancia

en una unidad. De este modo, si para algún miembro de la población q su contador de dominancia toma el valor 0, q se sitúa en una lista separada Q . Estos miembros pertenecen al segundo frente no dominado. Después, el procedimiento anterior se repite con cada miembro de Q y se identifica el tercer frente. Este proceso continúa hasta que todos los frentes son identificados (Deb, Agrawal, Pratap, y Meyarivan, 2002).

3.6.2 Preservación de la Diversidad

En primer lugar, se necesita definir el estimador de densidad. Para obtener una estimación de la densidad de soluciones que rodean una solución en particular de la población en el espacio de decisión, se calcula la distancia media entre los puntos a cada lado de este punto en cada uno de los objetivos. Esta cantidad de distancias, i_{distance} , sirve como una estimación del perímetro del cubo formado usando los vecinos más cercanos como vértices, y se denomina *crowding-distance* (Deb et al., 2002). En la figura 3.7 la *crowding-distance* de la i -ésima solución en su frente (marcado con círculos azules), es la longitud media de los lados del cubo (mostrado con líneas discontinuas).

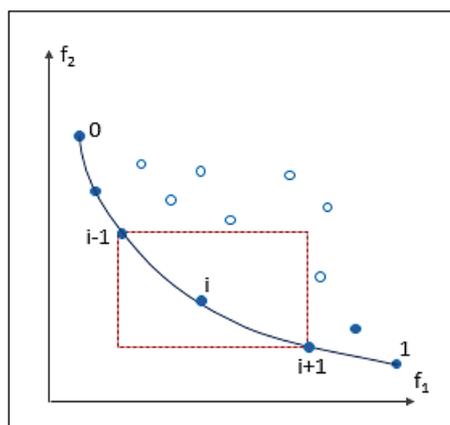


Figura 3.7 *Crowding-distance* usados en NGSAlI para dos Objetivos.

Los Puntos Azules son las Soluciones del mismo Frente No-dominado

Fuente: Deb et al. (2002)

El algoritmo 3.3., describe el procedimiento del cálculo de la *crowding-distance* de todas las soluciones en un conjunto I de puntos no dominados. Este cálculo requiere la ordenación de los puntos de dicho conjunto de acuerdo a cada valor de la función objetivo de forma ascendente en orden de magnitud. Después, para cada función objetivo, a las soluciones limite (soluciones con menor y mayor valor objetivo) se les asigna un valor distancia infinito. A todas las demás soluciones intermedias se les asigna un valor distancia igual a la diferencia absoluta normalizada de los valores de la función en las dos soluciones adyacentes, y este cálculo se realiza con todas las funciones objetivo. El valor general de la *crowding-distance* se calcula como la suma de los valores de las distancias individuales correspondientes a cada uno de los objetivos donde cada función objetivo es normalizada antes de calcular esta distancia (Deb et al., 2002).

Algoritmo 3.3 Asignación de *crowding-distance*

```

1  L = |I|                                     // Número de soluciones en I
2  for each i
3  | I[i]distance = 0;                          // Se inicializa distancias
4  end for
5  for each objetivo m
6  | I = ordenar (I, m);                       // Ordena con base al valor de cada objetivo
7  | I[1]distance = I[L]distance = ∞;           // Puntos en el limite
8  | for i = 2 to (L - 1);                   // Para todos los demás puntos en I
9  | | I[i]distance = I[i]distance +  $\frac{[I(i + 1)m - I(i - 1)m]}{[f_m^{\max} - f_m^{\min}]}$ 
10 | end for
11 end for

```

I[i].m se refiere al valor de la m-ésima función objetivo en el individuo i-ésimo del conjunto I y los parámetros f_m^{\max} y f_m^{\min} son los valores máximo y mínimo de la m-ésima función objetivo.

Después de asignar a todos los miembros de la población en el conjunto I una distancia, se pueden comparar dos soluciones por su grado de proximidad con otras soluciones. Una solución con un valor menor de esta medida de distancia estará, en cierto sentido, más apiñada por otras soluciones. Esto es exactamente lo que se compara en el operador propuesto en NSGAI, el operador *crowded-comparison* (Deb et al., 2002). Aunque la Fig. 3.8 ilustra el cálculo del crowding-distance para dos objetivos, el procedimiento también es aplicable a más de dos objetivos.

El operador *crowded-comparison* (\prec_n) comentado en el párrafo anterior, guía el proceso de selección en las diversas etapas del algoritmo hacia un frente óptimo de Pareto distribuido de manera uniforme. NSGAI asume que cada individuo de la población i tiene dos atributos: i) Rango no dominado (i_{rank}), y, i) *Crowding-distance* ($i_{distance}$). El EA define un orden especial parcial \prec_n como sigue:

$$i \prec_n j \text{ si } (i_{rank} < j_{rank}) \text{ o } [(i_{rank} = j_{rank}) \text{ y } (i_{distance} > j_{distance})]$$

Es decir, entre dos soluciones con diferentes rangos es preferible la solución con el menor (mejor) rango. En otro caso, si ambas soluciones pertenecen al mismo frente, entonces es preferible la solución que se encuentra en una región menos densa (Deb et al., 2002).

3.6.3 Ciclo Principal

Una vez conocidos los procedimientos de ordenamiento rápido de soluciones no dominadas, la *crowding-distance* y el operador *crowded-comparison* se puede pasar a describir el algoritmo NSGAI.

Inicialmente, se crea una población P_0 al azar y se ordena según los frentes no-dominados (*i.e.* a cada solución se le asigna como fitness su rango de no-dominado: 1 es el mejor rango, 2 es el siguiente mejor rango y así sucesivamente). En un primer momento, se utilizan los operadores de selección por torneo binario, cruce y mutación para crear una población descendiente Q_0 de tamaño N . Dado que se introduce el elitismo comparando la población actual con las mejores soluciones no-dominadas previamente encontradas, el procedimiento es diferente después de la generación de la población inicial (Deb et al., 2002). El algoritmo 3.4 describe la construcción de la t -ésima generación.

Algoritmo 3.4 Construcción de la t -ésima generación

```

1   $R_t = P_t \cup Q_t$ ; // Combina padres y descendencia
2   $F =$  ordenamiento-rápido-soluciones-no-dominadas ( $R_t$ ); //  $F =$  Frentes en  $R_t$ 
3   $P_{t+1} = \emptyset$ 
4   $i = 1$ 
5  while  $|P_{t+1}| + |F_i| \leq N$  do // Hasta que la población de padres se llene
6  |   asignación-crowding-distance ( $F_i$ )
7  |    $P_{t+1} = P_{t+1} \cup F_i$ 
8  |    $i = i + 1$ 
9  end while
10 ordenar ( $F_i, \prec_n$ ); // Ordena en descenso usando  $\prec_n$ 
11  $P_{t+1} = P_{t+1} \cup F_i[1:(N - |P_{t+1}|)]$ ; // Solo elementos necesarios para llenar la población
12  $Q_{t+1} =$  crear-nueva-población ( $P_{t+1}$ ); // Selección, cruce y mutación
13  $t = t + 1$ 

```

El procedimiento paso a paso que presenta NSGAII es simple y directo. En primer lugar, se crea una población combinada R_t de tamaño $2N$ formada por la combinación de la población de la iteración anterior, P_t , y su conjunto de descendientes recién creados, Q_t , ambos de tamaño N . A continuación, la población R_t se ordena con base a sus rangos no-dominados [donde $F = (F_1, F_2, \dots, F_n)$ son todos los frentes no-dominados de R_t]. El elitismo está garantizado debido a que los todos los miembros de la población anterior y actual están incluidos en R_t . Las soluciones pertenecientes a F_1 son las mejores soluciones

en la población combinada R_t , por lo que hay que darles mayor importancia que a otras soluciones de dicho conjunto. Si el tamaño de F_1 es menor que N , se eligen todos los miembros de ese conjunto para la nueva población P_{t+1} . Los restantes miembros de la población son elegidos de los siguientes frentes no dominados en el orden de su clasificación (*i.e.* las soluciones del conjunto F_2 se eligen a continuación, seguidas por las soluciones de F_3 y así sucesivamente). Este procedimiento continúa hasta que no pueden añadirse más frentes no-dominados completos (Deb et al., 2002).

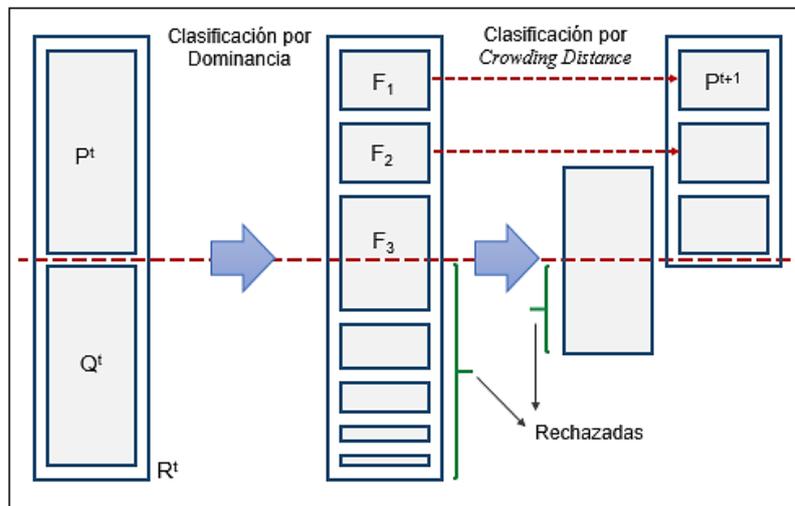


Figura 3.8 Esquema del Funcionamiento de NSGAII

Fuente: Deb et al. (2002)

Sea F_1 el último conjunto no-dominado añadido a la nueva población P_{t+1} . En general, el número de soluciones en todos los conjuntos desde F_1 hasta F_1 sería mayor que el tamaño de la población. Para elegir exactamente N miembros de la población, se ordenan las soluciones del último frente F_1 usando el operador *crowded-comparison* \prec_n en orden descendente y se eligen las mejores soluciones necesarias para completar la población. El procedimiento de NSGAII también se presenta en la figura 3.8. A la nueva

población P_{t+1} de tamaño N se le aplican los operadores de selección, crossover y mutación para crear una nueva población Q_{t+1} de tamaño N . Es importante tener presente que se utiliza el operador de selección por torneo binario, pero el criterio de selección ahora se basa en el operador *crowded-comparison* \prec_n . Dado que este operador requiere tanto el rango como la *crowding-distance* de cada solución de la población, se calculan estas cantidades mientras se forma la población P_{t+1} , como se muestra en el algoritmo 3.4. (Deb et al., 2002).

Nótese que la población de tamaño $2N$ no necesita ser ordenada por completo con base a los criterios de no-dominación. Tan pronto como el proceso de ordenación ha encontrado un número suficiente de frentes para obtener N miembros en P_{t+1} no hay razón para continuar con la ordenación. La diversidad entre las soluciones no-nominadas se introduce mediante el uso del operador *crowded-comparison*, que se utiliza en la selección de torneo y durante la fase de reducción de la población.

3.7 Resumen y Conclusiones

La mayoría de los problemas del mundo real requieren la búsqueda de soluciones que optimicen en forma simultánea múltiples objetivos que generalmente presentan conflictos entre sí. En este tipo de problemas no existe una solución única que pueda ser considerada como la mejor, sino un conjunto de soluciones que representan los mejores compromisos entre los diferentes objetivos. Dicho conjunto es denominado conjunto óptimo de Pareto (\mathbb{P}_{true}), y su imagen en el espacio objetivo se denominada frente óptimo de Pareto ($\mathbb{EF}_{\text{true}}$).

Los algoritmos evolutivos (EAs) se han convertido en una herramienta útil para resolver problemas multiobjetivo (MOPs). El objetivo final de un algoritmo evolutivo multiobjetivo (MOEAs) es dar a conocer el conjunto óptimo de Pareto (\mathbb{P}_{true}), y por ende el frente óptimo de Pareto (EF_{true}), que permita al tomador de decisiones seleccionar la solución que represente el mejor compromiso. No obstante, la identificación de \mathbb{P}_{true} en muchos MOPs es prácticamente imposible debido a su tamaño o inviabilidad computacional. En tales casos, una alternativa practica es investigar el conjunto de soluciones [*the best-known Pareto set* ($\mathbb{P}_{\text{known}}$)] que mejor se aproxime a \mathbb{P}_{true} .

La revisión de los articulas más relevantes de la aplicación de MOEAs en el problema de optimización de carteras, evidencia que las principales líneas de investigación en este campo de las finanzas se han destinado a: i) El desarrollo de modelos que incluyen características más realistas, proponiendo en especial nuevas medidas de riesgo, restricciones y funciones objetivos; ii) La adaptación del modo de trabajo de los MOEAs a estos nuevos modelos, aprovechando su capacidad para producir un conjunto de soluciones no-dominadas en una sola ejecución, y tratar las formulaciones complejas de los problemas que aparecen en este ámbito de aplicación.

Finalmente, la revisión de la literatura mostró que el *Non-dominated Sorting Genetic Algorithm* (NSGAI) es uno de los MOEAs más utilizados para resolver el problema de optimización de cartera. Este algoritmo incluye 3 modificaciones fundamentales que superan los problemas presentados con su predecesor, el NSGA: i) Reduce la complejidad computacional reescribiendo el código original de la ordenación de una manera más eficiente, guardando los datos temporales en cada paso para su

posterior reutilización; ii) Agrega un procedimiento de elitismo que combina la población actual con la población anterior para formar un conjunto mixto con el doble de individuos que la población original; y iii) Emplea una técnica que ayuda a mantener la diversidad de las soluciones en el frente óptimo de Pareto (*crowding-distance*).

La aplicación de los algoritmos evolutivos multiobjetivo (MOEAs) va a continuar desempeñando en el futuro un papel fundamental en la modelización y resolución de no solo los problemas de selección de carteras, sino también los problemas de la planificación y la gestión financiera.

Capítulo 4

4 TEORÍA DE LA CREDIBILIDAD

4.1 Introducción

En el marco teórico de Markowitz, una suposición implícita es que el rendimiento futuro de los activos puede ser reflejado correctamente por el rendimiento pasado. En otras palabras, los retornos de los activos están representados por variables aleatorias, cuyas características como el valor esperado y la varianza son calculados a partir de una muestra de los datos históricos disponibles (Qin, 2016). Bajo esta perspectiva, la teoría de la probabilidad es la herramienta matemática para manejar la incertidumbre en el pasado. No obstante, el mundo es complejo y la aleatoriedad no es el único tipo de incertidumbre en la realidad, especialmente cuando se incluyen factores humanos. El mercado de capitales es uno de los mercados más complejos del mundo y contiene casi todo tipo de incertidumbres. Los activos financieros son sensibles a diversos factores, incluyendo económicos, sociales, políticos, y muy importante, los factores psicológicos de las personas (Huang, 2010). Debido a que los retornos de los activos están rodeados

de ambigüedad y vaguedad, varios investigadores sugieren estimar los retornos de los activos utilizando la teoría de conjuntos difusos²³.

El concepto de conjunto difuso fue incorporado por Zadeh (1965) vía función de pertenencia. Para medir un evento difuso, Zadeh (1978) propuso el concepto de la medida de posibilidad. A partir de ese momento, la teoría de la posibilidad ha sido estudiada por varios autores (De Cooman, 1997; Dubois y Prade, 1988; Kaufmann y Gupta, 1985; Klir y Yuan, 1995; B. Liu, 2002b; Nahmias, 1978; Zimmermann, 1985), e investigada en el problema de selección de carteras a partir de los años noventa (Bermúdez y Vercher, 2012; Gupta *et al.*, 2008; Lacagnina y Pecorella, 2006; León, Liern, y Vercher, 2002; Saborido *et al.*, 2016; Tanaka y Guo, 1999; Watada, 1997; W.G. Zhang y Nie, 2005).

Aunque la medida de posibilidad ha sido ampliamente utilizada en el problema de selección de carteras, tiene la gran limitación de que no es auto-dual. Al utilizar una medida de posibilidad, la cual no tiene la propiedad de dualidad, se puede encontrar que dos eventos difusos con diferentes probabilidades de ocurrir puedan tener el mismo valor de posibilidad. Además, siempre que el valor de posibilidad del rendimiento de una cartera mayor que un valor objetivo sea inferior a 1, el valor de posibilidad del evento opuesto (*i.e.* el rendimiento de la cartera menor o igual al valor objetivo) tendrá el valor máximo de 1; o, cuando el valor de posibilidad del rendimiento de una cartera menor o igual que un valor objetivo sea inferior a 1, el valor de posibilidad del evento opuesto (*i.e.* el rendimiento de la cartera mayor que el valor objetivo) tendrá el valor máximo de 1. Estos resultados son bastante complicados y confundirán al tomador de decisiones

²³ El término *fuzzy* se suele traducir indistintamente como borroso o difuso.

(Huang, 2009). Para solventar esta dificultad, B. Liu y Liu (2002) presentaron una medida auto-dual, denominada medida de credibilidad, la cual fue definida como el valor promedio de la medida de posibilidad y la medida de necesidad. La teoría de la credibilidad, fundada por B. Liu (2004) y refinada por B. Liu (2007), es una rama de las matemáticas que ha sido extensamente utilizada en los campos de la decisión difusa, proceso difuso, cálculo difuso, ecuación diferencial difusa, lógica difusa, e inferencia difusa, entre otros. Desde entonces, la medida de credibilidad ha sido aplicada en el problema de selección de carteras (Huang, 2006, 2007, 2008b, 2009, 2010; Jalota *et al.*, 2017b; Vercher y Bermúdez, 2015; Wen y Peng, 2009).

El resto del capítulo está organizado de la siguiente manera: La sección 4.2 examina las definiciones básicas referentes a los números difusos L-R y la aritmética difusa. En la sección 4.3 se ahonda los aspectos fundamentales de la teoría de credibilidad y su aplicación en el problema de optimización de cartera. Finalmente, la sección 4.4 presenta el resumen y las conclusiones correspondientes a este cuarto capítulo.

4.2 Números Difusos L-R y Aritmética Difusa

A continuación se presenta algunas definiciones básicas que se utilizarán a lo largo de esta investigación:

Definición 4.1 Conjunto Difuso (Vercher y Bermúdez, 2012)

Sea X el conjunto universal. Un conjunto difuso \tilde{A} en X se caracteriza por una función de pertenencia $\mu_{\tilde{A}}(x)$ que asocia un número real en el intervalo $[0,1]$ con cada punto de X , donde el valor de $\mu_{\tilde{A}}(x)$ en x , representa el grado de pertenencia de x en \tilde{A} .

Definición 4.2 Número Difuso (Vercher y Bermúdez, 2012)

Un número difuso \tilde{A} es un conjunto difuso definido en el conjunto de números reales \mathfrak{R} , caracterizado por medio de una función de pertenencia $\mu_{\tilde{A}}(x)$ que es semicontinua superior y cumple la condición $\sup_{x \in \mathfrak{R}} \mu_{\tilde{A}}(x) = 1$, y cuyos cortes (α – cuts), para $0 \leq \alpha \leq 1$: $[\tilde{A}]^\alpha = \{x \in \mathfrak{R}: \mu_{\tilde{A}}(x) \geq \alpha\}$, son conjuntos convexos.

Definición 4.3 Funciones L, R (Dubois y Prade, 1987a):

Las funciones $L, R: [0,1] \rightarrow [0,1]$ son funciones de referencia de un número difuso $\tilde{A} = (x, \mu_{\tilde{A}}(x))$, si satisface las siguientes condiciones:

- i) $L(1) = R(1) = 0, L(0) = R(0) = 1$
- ii) $L(x)$ y $R(x)$ son funciones de referencia no-crecientes y semi-continuas superiormente.

Definición 4.4 Número Difuso L-R (Dubois, 1980)

Se dice que un número difuso \tilde{A} [*i.e.* $\tilde{A} = (a, b, c, d)_{L_\pi R_\rho}$] es un número difuso L-R sí su función de pertenencia es expresada como:

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} L_\pi \left(\frac{b-x}{b-a} \right), & \text{Sí } a \leq x < b, \\ 1, & \text{Sí } b \leq x \leq c, \\ R_\rho \left(\frac{x-c}{d-c} \right), & \text{Sí } c < x \leq d, \\ 0, & \text{En otro caso.} \end{cases} \quad 4.1$$

Donde $(b - a)$ y $(d - c)$ mide la amplitud izquierda y derecha de \tilde{A} , respectivamente; b y c son la cota inferior y superior del núcleo de \tilde{A} , (*i.e.* $[b, c] = \{x/\mu_{\tilde{A}}(x) = 1\}$); y L_π y R_ρ son las funciones de referencia que definen la forma izquierda y derecha de \tilde{A} , respectivamente.

En esta tesis doctoral se utilizarán los números difusos de tipo L-R, con funciones de referencia de la familia de potencias, donde $L_\pi(k) = 1 - k^\pi$, y $R_\rho(k) = 1 - k^\rho$, siendo $\pi > 0$ y $\rho > 0$. Nótese que π y ρ definen la forma de la función de referencia de tal manera que para un valor dado de k los valores mayores de estos parámetros de forma implicarán valores mayores de la función de pertenencia (Vercher y Bermúdez, 2013). A lo largo de esta investigación, el número difuso L-R con funciones de referencia de la familia de potencias será denotado por $\tilde{A} = (a, b, c, d)_{\pi, \rho}$.

La agregación de números difusos L-R proporciona números difusos de la misma forma cuando sus funciones de referencia son lineales o todas tienen la misma forma para L y R (Vercher *et al.*, 2007). No obstante, esto no aplica cuando los números difusos poseen diferentes formas (Inuiguchi, Ichihashi, y Tanaka, 1990; León y Vercher, 2004). Asumiendo que todas las funciones de referencia tienen la misma forma, siendo $L=R$ para cada $t = 1, 2, \dots, T$, y usando el principio de extensión de Zadeh, la siguiente regla aritmética se cumple:

Teorema 4.1 (Dubois y Prade, 1987a). Sea $\tilde{A} = (a_1, b_1, c_1, d_1)_{LR}$ y $\tilde{B} = (a_2, b_2, c_2, d_2)_{LR}$, dos números difusos L-R, y λ un número real (*i.e.* $\lambda \in \mathfrak{R}$). Entonces,

$$\tilde{A} + \tilde{B} = (a_1 + a_2, b_1 + b_2, c_1 + c_2, d_1 + d_2)_{LR}. \quad 4.2$$

$$\lambda \tilde{A} = \begin{cases} (\lambda a_1, \lambda b_1, \lambda c_1, \lambda d_1)_{LR} & \text{Sí } \lambda \geq 0, \\ (\lambda a_1, \lambda b_1, |\lambda|c_1, |\lambda|d_1)_{LR} & \text{Sí } \lambda < 0. \end{cases} \quad 4.3$$

Donde la adición y multiplicación por un escalar es definida por medio del principio de extensión sup-min.

Nótese que cualquier número difuso trapezoidal es un caso particular de un número difuso L-R, con π y $\rho = 1$. Adicionalmente si $b = c$, el número difuso sería triangular (ver figura 4.1)

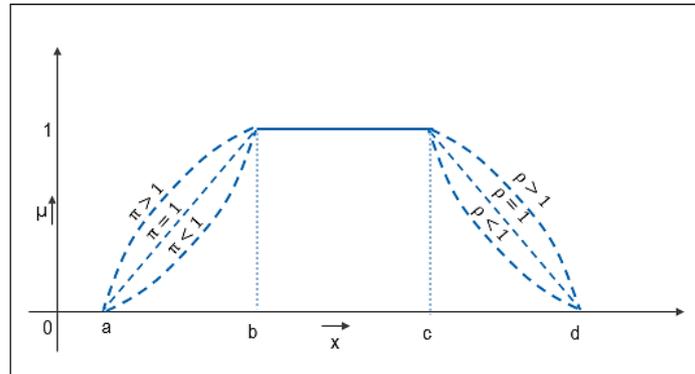


Figura 4.1 Funciones de Pertenencia L-R y sus Parámetros de Forma

Fuente: Jalota *et al.* (2017b)

4.3 Teoría de la Credibilidad

4.3.1 Medida de Credibilidad y Espacio de Credibilidad

Sea Θ un conjunto no vacío (que representa el espacio muestral) y $\mathcal{P}(\Theta)$ el conjunto de potencia de Θ (*i.e.* todos los subconjuntos posibles de Θ). Cada elemento en $\mathcal{P}(\Theta)$ es llamado un evento. Para presentar una definición axiomática de la credibilidad, es necesario asignar a cada evento A , un número $\text{Cr}\{A\}$, que representa la credibilidad de que A ocurrirá. Además, para asegurar que el número $\text{Cr}\{A\}$ tenga ciertas propiedades matemáticas que intuitivamente se espera tenga una medida de credibilidad, los siguientes cuatro axiomas deben cumplirse:

Axioma 1. Normalidad: $\text{Cr}\{\Theta\} = 1$;

Axioma 2. Monotonicidad: $\text{Cr}\{A\} \leq \text{Cr}\{B\}$ siempre que $A \subset B$;

Axioma 3. Auto-dualidad: $\text{Cr}\{A\} + \text{Cr}\{A^c\} = 1$ para cualquier evento A ;

Axioma 4. Maximalidad: $Cr \{ \cup_i A_i \} \leq \sup_i Cr \{ A_i \}$ para cualquier evento $\{ A_i \}$ con $\sup_i Cr \{ A_i \} < 0.5$.

Según Gupta *et al.*, (2014b) los tres primeros axiomas son auto explicativos. El axioma de maximalidad puede ser entendido como sigue: No hay incertidumbre en el resultado de un evento si su medida de credibilidad es 1 (o 0), debido a que esto indicará que el evento ocurrirá (o no). Por otra parte, un evento es el más incierto si su medida de credibilidad es 0.5, ya que en tal caso, tanto el evento como su complemento pueden ser considerados como “igualmente probables”. Además, si no hay información sobre la medida de credibilidad de un evento, entonces se debe considerar ésta como 0.5. Bajo este argumento, B. Liu (2002a) propuso el principio de máxima incertidumbre que establece que *“para cualquier evento, si hay varios valores razonables que una medida de credibilidad puede tomar, entonces se le asigna un valor lo más cercano como sea posible a 0.5”*

Definición 4.5 Medida de Credibilidad (B. Liu, 2007)

La función conjunto Cr se llama medida de credibilidad si satisface los axiomas de normalidad, monotonidad, auto-dualidad y maximalidad.

Ejemplo 4.1 (Gupta *et al.*, 2014b). Sea $\Theta = \{ \theta_1, \theta_2 \}$. En este caso solo hay cuatro eventos posibles: $A_1 = \emptyset$, $A_2 = \{ \theta_1 \}$, $A_3 = \{ \theta_2 \}$, $A_4 = \Theta = \{ \theta_1, \theta_2 \}$. Así mismo, se ha definido que $Cr\{A_1\} = 0$, $Cr\{A_2\} = 0.7$, $Cr\{A_3\} = 0.3$ y $Cr\{A_4\} = 1$. Para verificar si la función conjunto Cr es una medida de credibilidad o no, se verificarán los 4 axiomas:

Axioma 1. La función conjunto Cr satisface la normalidad, $Cr \{ \Theta \} = 1$.

Axioma 2. La función conjunto Cr satisface la monotonidad, por ejemplo,

$$A_1 \subset A_2 \text{ y } Cr\{A_1\} < Cr\{A_2\}$$

$$A_1 \subset A_3 \text{ y } Cr\{A_1\} < Cr\{A_3\}$$

$$A_1 \subset A_4 \text{ y } Cr\{A_1\} < Cr\{A_4\}$$

$$A_2 \subset A_4 \text{ y } Cr\{A_2\} < Cr\{A_4\}$$

$$A_3 \subset A_4 \text{ y } Cr\{A_3\} < Cr\{A_4\}$$

Axioma 3. La función conjunto Cr satisface la auto-dualidad, por ejemplo,

$$Cr\{A_1\} + Cr\{A_1^c\} (= Cr\{A_4\}) = 1$$

Axioma 4. La función de conjunto Cr satisface la maximalidad, por ejemplo,

$$Cr\{A_1 \cup A_3\} (= Cr\{A_3\}) \wedge 0.5 = \sup \{Cr\{A_1\}, Cr\{A_3\}\}$$

Por lo tanto, la función de conjunto Cr es una medida de credibilidad.

Los siguientes teoremas presentan 2 propiedades adicionales de la medida de credibilidad (B. Liu, 2007; B. Liu y Liu, 2002):

Teorema 4.2. Sea Θ un conjunto no vacío, $\mathcal{P}(\Theta)$ el conjunto de potencia de Θ y Cr la medida de credibilidad. Entonces, $Cr\{\emptyset\} = 0$, y, $0 \leq Cr\{A\} \leq 1$ para cualquier evento $A \in \mathcal{P}$.

Demostración (Gupta *et al.*, 2014b). De los axiomas 1 y 3, se tiene $Cr\{\emptyset\} = 1 - Cr\{\Theta\} = 1 - 1 = 0$. Además, $\emptyset \subset A \subset \Theta$, se tiene $Cr\{\emptyset\} \leq Cr\{A\} \leq Cr\{\Theta\}$ del axioma 2, es decir, $0 \leq Cr\{A\} \leq 1$.

Teorema 4.3. La medida de credibilidad es subaditiva, es decir, $Cr\{A \cup B\} \leq Cr\{A\} + Cr\{B\}$. Además, para cualquier $A, B \in \mathcal{P}(\Theta)$, la medida de credibilidad es no-aditiva, esto es, $Cr\{A \cup B\} = Cr\{A\} + Cr\{B\}$, si $Cr\{A\} = 0$ o $Cr\{B\} = 0$.

Demostración (Gupta *et al.*, 2014b). Con el propósito de demostrar el teorema 4.3., se consideran los siguientes tres casos:

i) $\text{Cr}\{A\} < 0.5$ y $\text{Cr}\{B\} < 0.5$. Usando el axioma 4, se tiene

$$\text{Cr}\{A \cup B\} = \text{Cr}\{A\} \vee \text{Cr}\{B\} \leq \text{Cr}\{A\} + \text{Cr}\{B\} .$$

ii) $\text{Cr}\{A\} \geq 0.5$. Usando los axiomas 2 y 3, se tiene que $\text{Cr}\{A^c\} \leq 0.5$ y $\text{Cr}\{A \cup B\} \geq \text{Cr}\{A\} \geq 0.5$, entonces

$$\begin{aligned} \text{Cr}\{A^c\} &= \text{Cr}\{A^c \cap B\} \vee \text{Cr}\{A^c \cap B^c\} \\ &\leq \text{Cr}\{A^c \cap B\} + \text{Cr}\{A^c \cap B^c\} \\ &\leq \text{Cr}\{B\} + \text{Cr}\{A^c \cap B^c\}. \end{aligned}$$

Usando la desigualdad anterior, se tiene

$$\begin{aligned} \text{Cr}\{A\} + \text{Cr}\{B\} &= 1 - \text{Cr}\{A^c\} + \text{Cr}\{B\} \\ &\geq 1 - \text{Cr}\{B\} - \text{Cr}\{A^c \cap B^c\} + \text{Cr}\{B\} \\ &= 1 - \text{Cr}\{A^c \cap B^c\} \\ &= \text{Cr}\{A \cup B\}. \end{aligned}$$

iii) $\text{Cr}\{B\} \geq 0.5$. Usando los axiomas 2 y 3, se tiene que $\text{Cr}\{B^c\} \leq 0.5$ y $\text{Cr}\{A \cup B\} \geq \text{Cr}\{B\} \geq 0.5$, entonces

$$\begin{aligned} \text{Cr}\{B^c\} &= \text{Cr}\{A \cap B^c\} \vee \text{Cr}\{A^c \cap B^c\} \\ &\leq \text{Cr}\{A \cap B^c\} + \text{Cr}\{A^c \cap B^c\} \\ &\leq \text{Cr}\{A\} + \text{Cr}\{A^c \cap B^c\}. \end{aligned}$$

Usando la desigualdad anterior, se tiene

$$\begin{aligned} \text{Cr}\{A\} + \text{Cr}\{B\} &= \text{Cr}\{A\} + 1 - \text{Cr}\{B^c\} \\ &\geq 1 - \text{Cr}\{A\} - \text{Cr}\{A^c \cap B^c\} + \text{Cr}\{A\} \\ &= 1 - \text{Cr}\{A^c \cap B^c\} \\ &= \text{Cr}\{A \cup B\}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, se establece la propiedad de subaditividad. Además, se deduce de la propiedad de subaditividad que $\text{Cr}\{A \cup B\} = \text{Cr}\{A\} + \text{Cr}\{B\}$ si $\text{Cr}\{A\} = 0$ o $\text{Cr}\{B\} = 0$.

Definición 4.6 Espacio de credibilidad (B. Liu y Liu, 2002)

Sea Θ un conjunto no vacío, $\mathcal{P}(\Theta)$ el conjunto de potencia de Θ y Cr la medida de credibilidad. Entonces, el triplete $(\Theta, \mathcal{P}(\Theta), Cr)$ se denomina espacio de credibilidad.

4.3.2 Variable Difusa

Tradicionalmente, una variable difusa se define por una función de pertenencia (Zadeh, 1965). Bajo el contexto de la teoría de credibilidad, una variable difusa se define como una función en un espacio de credibilidad, así como una variable aleatoria se define como una función medible en un espacio de probabilidad.

Definición 4.7 Variable Difusa (B. Liu, 2007)

Una variable difusa se define como una función medible de un espacio de credibilidad $(\Theta, \mathcal{P}(\Theta), Cr)$ al conjunto de números reales.

Ejemplo 4.2 (Gupta *et al.*, 2014b). Sea $\Theta = \{\theta_1, \theta_2\}$ con $Cr\{\theta_1\}$ y $Cr\{\theta_2\}$. Luego la función

$$\xi(\theta) = \begin{cases} 0, & \text{Sí } \theta = \theta_1, \\ 1, & \text{Sí } \theta = \theta_2. \end{cases}$$

define una variable difusa en $(\Theta, \mathcal{P}(\Theta), Cr)$.

Observación 4.1 (Huang, 2010). Dado que $\mathcal{P}(\Theta)$ es el conjunto de potencia de Θ , y una variable difusa ξ es una función en un espacio de credibilidad, entonces para cualquier conjunto B de los números reales, el conjunto

$$\{\xi \in B\} = \{\theta \in \Theta \mid \xi(\theta) \in B\}.$$

siempre es un elemento en \mathcal{P} , es decir, la variable difusa siempre es una función medible y $\{\xi \in B\}$ siempre es un evento.

Definición 4.8 (Huang, 2010). Sean ξ_1 y ξ_2 dos variables difusas definidas en el espacio de credibilidad $(\Theta, \mathcal{P}(\Theta), Cr)$, entonces $\xi_1 = \xi_2$ implica que $\xi_1(\theta) = \xi_2(\theta)$ para casi todo $\theta \in \Theta$.

4.3.3 Función de Pertenencia y Teorema de Inversión de Credibilidad

Una variable difusa ha sido definida como una función de un espacio de credibilidad al conjunto de números reales y no como una función de pertenencia. A continuación se presenta la función de pertenencia para una variable difusa.

Definición 4.9 (B. Liu, 2007) **Función de Pertenencia**

Sea ξ una variable difusa definida en el espacio de credibilidad $(\Theta, \mathcal{P}(\Theta), Cr)$. Luego su función de pertenencia se deriva de la medida de credibilidad usando la siguiente relación:

$$\mu(x) = (2Cr\{\xi = x\}) \wedge 1, \quad x \in \mathfrak{R}. \quad 4.4$$

Si se tiene la función de pertenencia de una variable difusa ξ , ¿cómo se puede conocer el valor de credibilidad (o grado de credibilidad) de un evento difuso? El siguiente teorema de inversión de credibilidad da la respuesta (B. Liu y Liu, 2002):

Teorema 4.4. Sea ξ una variable difusa con función de pertenencia μ . Entonces para cualquier conjunto A de los números reales, se tiene

$$\text{Cr}\{\xi \in A\} = \frac{1}{2} \left(\sup_{x \in A} \mu(x) + 1 - \sup_{x \in A^c} \mu(x) \right). \quad 4.5$$

Demostración (Huang, 2010). Con el fin de probar el teorema 4.4., se considera los siguientes 2 casos:

i) Si $\text{Cr}\{\xi \in A\} \leq 0.5$, entonces, usando el axioma 2, se sabe que $\text{Cr}\{\xi = x\} \leq 0.5$ para cada $x \in A$. Según el axioma 4, se tiene

$$\text{Cr}\{\xi \in A\} = \frac{1}{2} \left(\sup_{x \in A} (2\text{Cr}\{\xi = x\} \wedge 1) \right) = \frac{1}{2} \sup_{x \in A} \mu(x). \quad 4.6$$

Además, usando el axioma 3, se sabe que $\text{Cr}\{\xi \in A^c\} \geq 0.5$ y $\sup_{x \in A^c} \text{Cr}\{\xi = x\} \geq 0.5$. Por lo tanto, se tiene

$$\sup_{x \in A^c} \mu(x) = \sup_{x \in A^c} (2\text{Cr}\{\xi = x\} \wedge 1) = 1. \quad 4.7$$

Se deduce a partir de las expresiones 4.6 y 4.7 que la ecuación 4.5 se cumple.

ii) Sí $\text{Cr}\{\xi \in A\} \geq 0.5$, entonces $\text{Cr}\{\xi \in A^c\} \leq 0.5$. A partir del caso anterior, se deduce que

$$\begin{aligned} \text{Cr}\{\xi \in A\} &= 1 - \text{Cr}\{\xi \in A^c\} = 1 - \frac{1}{2} \left(\sup_{x \in A^c} \mu(x) + 1 - \sup_{x \in A} \mu(x) \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\sup_{x \in A^c} \mu(x) + 1 - \sup_{x \in A} \mu(x) \right). \end{aligned}$$

Observación 4.2 (Gupta *et al.*, 2014b). Sea ξ una variable difusa con función de pertenencia μ , entonces las siguientes ecuaciones pueden deducirse del teorema 4.4.

$$\text{Cr}\{\xi = x\} = \frac{1}{2} \left(\mu(x) + 1 - \sup_{y \neq x} \mu(y) \right), \quad \forall x \in \mathfrak{R};$$

$$\begin{aligned} \text{Cr}\{\xi \leq x\} &= \frac{1}{2} \left(\sup_{y \leq x} \mu(y) + 1 - \sup_{y > x} \mu(y) \right), \quad \forall x \in \mathfrak{R}; \\ \text{Cr}\{\xi \geq x\} &= \frac{1}{2} \left(\sup_{y \geq x} \mu(y) + 1 - \sup_{y < x} \mu(y) \right), \quad \forall x \in \mathfrak{R}. \end{aligned}$$

Además, si μ es una función continua, entonces,

$$\text{Cr}\{\xi = x\} = \frac{\mu(x)}{2}, \quad \forall x \in \mathfrak{R}.$$

Observación 4.3 (Huang, 2010). Una variable difusa tiene una función de pertenencia única, pero, una función de pertenencia puede producir múltiples variables difusas. Por ejemplo, sea $\Theta = \{\theta_1, \theta_2\}$ con $\text{Cr}\{\theta_1\}$ y $\text{Cr}\{\theta_2\}$. Se puede demostrar fácilmente que $(\Theta, \mathcal{P}(\Theta), \text{Cr})$ es un espacio de credibilidad. Definida las funciones

$$\xi_1(\theta) = \begin{cases} 0, & \text{Sí } \theta = \theta_1, \\ 1, & \text{Sí } \theta = \theta_2, \end{cases} \quad \xi_2(\theta) = \begin{cases} 0, & \text{Sí } \theta = \theta_1 \\ 1, & \text{Sí } \theta = \theta_2. \end{cases}$$

Es claro que aunque las variables difusas ξ_1 y ξ_2 tienen la misma función de pertenencia, (*i.e.* $\mu(t) \equiv 1$ en $t = 0$ o 1), son dos variables difusas diferentes en el sentido de la definición 4.8. Dado que una función de pertenencia puede producir múltiples variables difusas, no se puede definir una variable difusa a través de la función de pertenencia. Un sistema axiomático es necesario para definir una variable difusa y discutir las propiedades de ésta para asegurar la precisión y la consistencia de las investigaciones. Esto explica por qué la función de pertenencia se define a través de la medida de credibilidad. Sin embargo, para fines de aplicación, solo se necesita construir la función de pertenencia de una variable difusa, luego usar el teorema de inversión para obtener la medida de credibilidad y de esta forma utilizar la teoría de la credibilidad para resolver

los problemas de aplicación. El requisito matemático para la función de pertenencia es sencillo, es decir, B. Liu (2004) demostró que una función $\mu: \rightarrow [0, 1]$ es una función de pertenencia sí y solo sí $\sup \mu(t) = 1$. J. E. Chen y Otto (1995), Hong y Chen (1999), Kumar y Ganesh (1996), Medaglia, Fang, Nuttle y Wilson (2002), y, Triantaphyllou y Mann, (1990) presentan algunos métodos para construir las funciones de pertenencia.

Observación 4.4 (Huang, 2010). La función de pertenencia indica el grado en que la variable difusa ξ toma ciertos valores determinados. Si t es un punto imposible, el grado de pertenencia de ξ es $\mu(t) = 0$; y si t es el punto más posible, el grado de pertenencia de ξ es $\mu(t) = 1$. Sin embargo, esta última afirmación no es verdadera. El grado de posibilidad de que ocurran un evento difuso lo da el grado de credibilidad, y no el grado de pertenencia. A partir del teorema de inversión de credibilidad se sabe que el grado de credibilidad de un valor determinado depende no solo de su grado de pertenencia sino también del grado de pertenencia de su conjunto complementario.

4.3.4 Distribución de Credibilidad

Definición 4.10 Distribución de Credibilidad (B. Liu, 2002a)

La distribución de credibilidad $\Phi = \mathfrak{R} \rightarrow [0,1]$ de una variable difusa ξ es definida por

$$\Phi(x) = \text{Cr}\{\xi \leq x\} = \frac{1}{2} \left(\sup_{y \leq x} \mu(y) + 1 - \sup_{y > x} \mu(y) \right), \quad \forall x \in \mathfrak{R}. \quad 4.8$$

Es decir, $\Phi(x)$ es la credibilidad de que la variable difusa ξ tome un valor menor o igual que x . En términos generales, la distribución de credibilidad Φ no es continua ni a la derecha ni a la izquierda.

4.3.4.1 Distribución de Credibilidad de un Número Difuso L-R

La variable difusa ξ es una variable difusa de tipo L-R si su distribución de credibilidad tiene una función de pertenencia asociada μ_{ξ} , que corresponde a un número difuso de tipo

L-R $[\xi = (a, b, c, d)_{\pi, \rho}]$:

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} L_{\pi} \left(\frac{b-x}{b-a} \right), & \text{Sí } a \leq x < b, \\ 1, & \text{Sí } b \leq x \leq c, \\ R_{\rho} \left(\frac{x-c}{d-c} \right), & \text{Sí } c < x \leq d, \\ 0, & \text{En otro caso.} \end{cases} \quad 4.1$$

Para encontrar la medida de credibilidad $Cr\{\xi \leq x\}$, se utiliza el teorema de la inversión de credibilidad (ecuación 4.5.) (Jalota *et al.*, 2017b):

i) Sí $d \leq x$, se tiene

$$Cr\{\xi \leq x\} = \frac{1}{2}(1 + 1 - 0) = 1.$$

ii) Sí $c \leq x < d$, se tiene

$$\begin{aligned} Cr\{\xi \leq x\} &= \frac{1}{2} \left(1 + 1 - \left(1 - \left(\frac{x-c}{d-c} \right)^{\rho} \right) \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(1 + \left(\left(\frac{x-c}{d-c} \right)^{\rho} \right) \right). \end{aligned}$$

iii) Sí $b \leq x < c$, se tiene

$$Cr\{\xi \leq x\} = \frac{1}{2}(1 + 1 - 1) = \frac{1}{2}.$$

iv) Sí $a \leq x < b$, se tiene

$$\begin{aligned} Cr\{\xi \leq x\} &= \frac{1}{2} \left(\left(1 - \left(\frac{b-x}{b-a} \right)^{\pi} \right) + 1 - 1 \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\left(1 - \left(\frac{b-x}{b-a} \right)^{\pi} \right) \right). \end{aligned}$$

v) Sí $x < a$, se tiene

$$Cr\{\xi \leq x\} = \frac{1}{2}(0 + 1 - 1) = 0.$$

Es decir,

$$\text{Cr}\{\xi \leq x\} = \begin{cases} 0, & \text{Si } x \leq a, \\ \frac{1}{2} \left(1 - \left(\frac{b-x}{b-a} \right)^\pi \right), & \text{Si } a < x < b, \\ \frac{1}{2}, & \text{Si } b \leq x \leq c, \\ \frac{1}{2} \left(1 + \left(\frac{x-c}{d-c} \right)^\rho \right), & \text{Si } c < x < d, \\ 1, & \text{Si } d \leq x. \end{cases} \quad 4.9.$$

Como $\text{Cr}\{\xi > x\} = 1 - \text{Cr}\{\xi \leq x\}$, por lo tanto

$$\text{Cr}\{\xi > x\} = \begin{cases} 1, & \text{Si } x \leq a, \\ \frac{1}{2} \left(1 + \left(\frac{b-x}{b-a} \right)^\pi \right), & \text{Si } a < x < b, \\ \frac{1}{2}, & \text{Si } b \leq x \leq c, \\ \frac{1}{2} \left(1 - \left(\frac{x-c}{d-c} \right)^\rho \right), & \text{Si } c < x < d, \\ 0, & \text{Si } d \leq x. \end{cases} \quad 4.10.$$

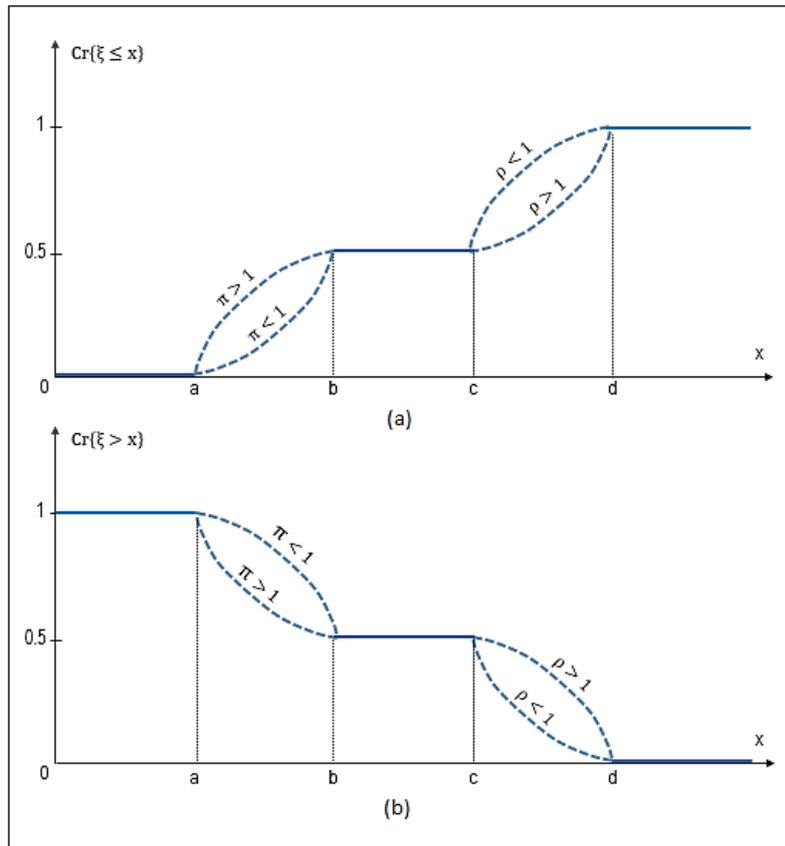


Figura 4.2 Distribuciones de Credibilidad de una Variable Fuzzy L-R

Fuente: Elaboración propia

La figura 4.2 muestra la representación gráfica del grado de credibilidad de un evento $\xi \leq x$ (ver figura 4.2.a), y de un evento $\xi > x$ (ver figura 4.2.b) de un número difuso L-R con funciones de referencia tipo potencia.

4.3.5 Independencia

La independencia de variables difusas es un concepto importante que ha sido discutido por varios investigadores desde diferentes ángulos (X. Li y Liu, 2006; B. Liu, 2004; Y.K. Liu y Gao, 2007; Nahmias, 1978; Yager, 1992; Zadeh, 1978). En esta tesis doctoral, se adopta la definición propuesta por Y.K. Liu y Gao (2007).

Definición 4.11 Independencia

Se dice que las variables difusas $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ son independientes, si para cualquier conjunto B_1, B_2, \dots, B_n de \mathfrak{R} se tiene

$$\text{Cr} \left\{ \bigcap_{i=1}^n \{\xi_i \in B_i\} \right\} = \min_{1 \leq i \leq n} \text{Cr} \{\xi_i \in B_i\}. \quad 4.11$$

Teorema 4.5 (B. Liu, 2007). Las variables difusas $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ son independientes sí y solo sí

$$\text{Cr} \left\{ \bigcup_{i=1}^n \{\xi_i \in B_i\} \right\} = \max_{1 \leq i \leq n} \text{Cr} \{\xi_i \in B_i\}. \quad 4.12$$

Demostración (Huang, 2010). Usando el axioma 3, las variables difusas $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ son independientes sí y solo sí

$$\begin{aligned}
 \text{Cr} \left\{ \bigcup_{i=1}^n \{\xi_i \in B_i\} \right\} &= 1 - \text{Cr} \left\{ \bigcap_{i=1}^n \{\xi_i \in B_i^c\} \right\} \\
 &= 1 - \min_{1 \leq i \leq n} \text{Cr} \{\xi_i \in B_i^c\} \\
 &= 1 - \max_{1 \leq i \leq n} \text{Cr} \{\xi_i \in B_i\}.
 \end{aligned}$$

4.3.6 Aritmética Difusa

Definición 4.12 (B. Liu, 2007). Sea $\mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$ una función, y $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ variables difusas definidas en el espacio de credibilidad $(\Theta_i, \mathcal{P}(\Theta_i), \text{Cr}_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$, respectivamente.

Entonces, $\xi = f(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ es una variables difusa definida como

$$\xi(\theta) = f[\xi_1(\theta), \xi_2(\theta), \dots, \xi_n(\theta)],$$

para cualquier $\theta \in \Theta$.

Teorema 4.6 Principio de Extensión de Zadeh (Huang, 2010). Sean $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ variables difusas independientes con funciones de pertenencia $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$, respectivamente, y $\mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$ una función continua. Entonces la función de pertenencia de μ de $\xi = f(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ es derivada de la función de membresía $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ para cualquier $x \in \mathfrak{R}$ por

$$\mu(x) = \sup_{x=f(x_1, x_2, \dots, x_n)} \min_{1 \leq i \leq n} \mu_i(x_i).$$

que es consistente con la expresión

$$\mu(x) = \sup_{x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathfrak{R}} \left\{ \min_{1 \leq i \leq n} \mu_i(x_i) \mid t = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \right\}.$$

Aquí se establece $\mu(x) = 0$ si no hay números reales x_1, x_2, \dots, x_n , tales que $x = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

A continuación se presenta algunos ejemplos para mostrar las operaciones sobre variables difusas (Huang, 2010):

Ejemplo 4.3. Sean ξ_1 una variable difusa con función de pertenencia μ_1 , y ξ_2 otra variable difusa con función de pertenencia μ_2 , entonces, la función de pertenencia μ de $\xi_1 \cdot \xi_2$ es

$$\mu(x) = \sup_{x_1, x_2 \in \mathfrak{R}} \{ \mu_1(x_1) \wedge \mu_2(x_2) \mid x = x_1 \cdot x_2 \}.$$

Ejemplo 4.4. Sean ξ_1 una variable difusa con función de pertenencia μ_1 , y ξ_2 otra variable difusa con función de pertenencia μ_2 , entonces, la función de pertenencia μ de $\xi_1 + \xi_2$ es

$$\begin{aligned} \mu(x) &= \sup_{x_1, x_2 \in \mathfrak{R}} \{ \mu_1(x_1) \wedge \mu_2(x_2) \mid x = x_1 + x_2 \} \\ &= \sup_{x_1 \in \mathfrak{R}} \{ \mu_1(x_1) \wedge \mu_2(x - x_1) \}. \end{aligned}$$

Ejemplo 4.5. Sean $\xi_1 = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ y $\xi_2 = (b_1, b_2, b_3, b_4)$ dos variables difusas trapezoidales con funciones de pertenencia μ_1 y μ_2 , respectivamente. La función de pertenencia μ de $\xi_1 + \xi_2$ es

$$\mu(x) = \sup_{x_1, x_2 \in \mathfrak{R}} \{ \mu_1(x_1) \wedge \mu_2(x_2) \mid x = x_1 + x_2 \}.$$

$$\mu(x) = \begin{cases} \frac{x - (a_1 + b_1)}{(a_2 + b_2) - (a_1 + b_1)}, & \text{Sí } a_1 + b_1 \leq x \leq a_2 + b_2, \\ 1, & \text{Sí } a_2 + b_2 \leq x \leq a_3 + b_3, \\ \frac{x - (a_4 + b_4)}{(a_3 + b_3) - (a_4 + b_4)}, & \text{Sí } a_3 + b_3 \leq x \leq a_4 + b_4, \\ 0, & \text{En otro caso.} \end{cases}$$

Lo cual demuestra que la suma de dos variables difusas trapezoidales $\xi_1 = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ y $\xi_2 = (b_1, b_2, b_3, b_4)$ también da como resultado una variable difusa trapezoidal. En otras palabras $\xi_1 + \xi_2 = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3, a_4 + b_4)$.

De manera similar, según el teorema 4.6., la función de pertenencia μ resultante del producto de una variable difusa trapezoidal $\xi = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ y un número escalar λ es

$$\mu_{\lambda\xi}(x) = \sup \{ \mu_{\xi}(x_1) \mid x = \lambda x_1 \}.$$

lo cual equivale a

$$\lambda \cdot \xi = \begin{cases} (\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3, \lambda a_4), & \text{Sí } \lambda \geq 0, \\ (\lambda a_4, \lambda a_3, \lambda a_2, \lambda a_1), & \text{Sí } \lambda < 0. \end{cases}$$

Es decir, el producto de un número escalar λ y una variable difusa trapezoidal $\xi = (a_1, a_2, a_3, a_4)$, también da como resultado una variable difusa trapezoidal. Nótese que una variable difusa triangular $\xi = (r_1, r_2, r_3)$ es en realidad una variable difusa trapezoidal especial $\xi = (r_1, r_2, r_3, r_4)$ cuando $r_2 = r_3$. Por lo tanto, se puede obtener fácilmente que la suma de dos variables difusas triangulares $\xi_1 = (a_1, a_2, a_3)$ y $\xi_2 = (b_1, b_2, b_3)$, también da como resultado una variable difusa triangular, $\xi_1 + \xi_2 = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$. El producto de un número escalar λ y una variable difusa triangular $\xi = (a_1, a_2, a_3)$, también da como resultado una variable difusa triangular, es decir,

$$\lambda \cdot \xi = \begin{cases} (\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3), & \text{Sí } \lambda \geq 0, \\ (\lambda a_3, \lambda a_2, \lambda a_1), & \text{Sí } \lambda < 0. \end{cases}$$

4.3.7 Por qué Adoptar la Teoría de Credibilidad

La medida de posibilidad es utilizada para medir un evento difuso. Sea ξ una variable difusa con función de pertenencia μ , entonces, $\text{Pos}\{A\} = \sup\{\mu(\xi(\theta)) \mid \theta \in A\}$ para cualquier evento difuso $A \in \mathcal{P}$. Aunque la medida de posibilidad es una medida importante y se utiliza ampliamente en la teoría de conjuntos difusos, no es auto-dual. Según lo citado en apartados anteriores, la propiedad de auto-dualidad es necesaria no solo en la teoría sino también en las investigaciones aplicadas. Sin auto-dualidad, la confusión aparecerá. Ante esta situación, la medida de credibilidad es más adecuada para el problema de selección de carteras en un entorno difuso. El siguiente ejemplo ilustra esta afirmación:

Ejemplo 4.6 (Huang, 2010). Una variable difusa ξ se denomina variable difusa triangular si tiene una función de pertenencia triangular, denotada por $\xi(r_1, r_2, r_3)$, con $r_1 < r_2 < r_3$ (ver figura 4.3).

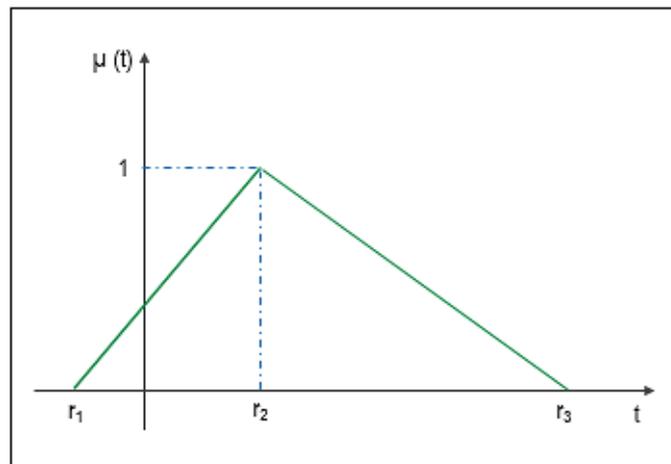


Figura 4.3 Función de Pertenencia Triangular

Fuente: Huang (2010)

$$\mu(t) = \begin{cases} \frac{t - r_1}{r_2 - r_1}, & \text{Si } r_1 \leq t \leq r_2, \\ \frac{t - r_3}{r_2 - r_3}, & \text{Si } r_2 \leq t \leq r_3, \\ 0, & \text{En otro caso.} \end{cases} \quad 4.13$$

Suponga que el rendimiento de una cartera puede describirse mediante una variable difusa triangular $\xi = (0, 1.5, 3)$ (ver figura 4.4). En este contexto, ¿qué evento será más probable que suceda: el evento en que el rendimiento de la cartera no será menor que 1.5, o el evento en que el rendimiento de la cartera será menor de 1.5?

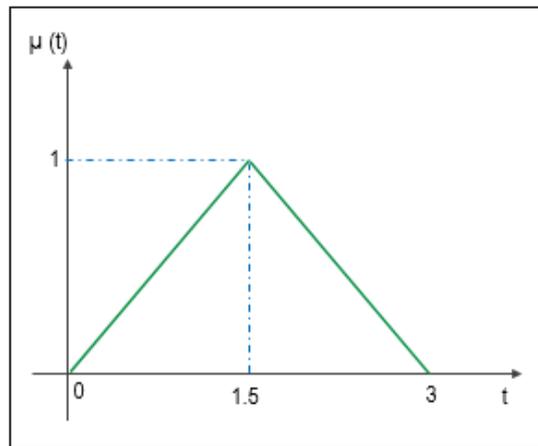


Figura 4.4 Función de Pertenencia del Retorno de un Cartera $\xi = (0, 1.5, 3)$

Fuente: Huang (2010)

Haciendo uso de la medida de posibilidad, se puede obtener que $\text{Pos}\{\xi \geq 1.5\} = 1$, lo que parece implicar que el rendimiento de la cartera no será menor que 1.5. Sin embargo, utilizando de nuevo la medida de posibilidad, se puede obtener también que $\text{Pos}\{\xi < 1.5\} = 1$, lo que parece implicar que el rendimiento de la cartera menor que 1.5 también ocurrirá con seguridad. La ley de la contradicción indica que una proposición no puede ser al mismo tiempo verdadera y falsa, y la ley del medio excluido dice que una

proposición debe ser verdadera o falsa. Ante esta situación, el juicio basado en la medida de posibilidad no es coherente con la ley de la contradicción y la ley del medio excluido.

Ahora, se hará uso de la medida de credibilidad para calcular el nivel de ocurrencia de un evento difuso. A partir del teorema de inversión de credibilidad, la medida de credibilidad de una variable difusa triangular $\xi(r_1, r_2, r_3)$ es:

$$\text{Cr}(\xi \leq t) = \begin{cases} 1, & \text{Si } r_3 \leq t, \\ \frac{r_3 - 2r_2 + t}{2(r_3 - r_2)}, & \text{Si } r_2 \leq t \leq r_3, \\ \frac{t - r_1}{2(r_2 - r_1)}, & \text{Si } r_1 \leq t \leq r_2, \\ 0, & \text{En otro caso.} \end{cases} \quad 4.14$$

Para un retorno de cartera triangular $\xi = (0, 1.5, 3)$, de acuerdo con la ecuación 4.14., se tiene que $\text{Cr}\{\xi \geq 1.5\} = 0.5$, lo que significa que hay solo un 50% de posibilidad de que el rendimiento de la cartera no sea menor que 1.5. Con base a la ecuación 4.14., se sabe que $\text{Cr}\{\xi < 1.5\} = 0.5$, lo que significa que hay solo un 50% de posibilidad de que el rendimiento de la cartera sea inferior que 1.5. Como se puede apreciar, el resultado es consistente a cualquier juicio y no produce confusión.

4.3.8 Valor Esperado de una Variable Difusa

En la literatura, existen varias formas de definir un operador de valor esperado para una variable difusa (Campos y Verdegay, 1989; Dubois y Prade, 1987b; Heilpern, 1992; Yager, 1981). No obstante, la definición más general de operador de valor esperado fue dada por B. Liu y Liu (2002), cuya expresión tiene una ventaja en términos de aplicabilidad, es decir, es aplicable no solo a variables difusas continuas sino también a variables difusas discretas.

Definición 4.13 Valor Esperado

Sea ξ una variable difusa con distribución de credibilidad $\Phi(x) = \text{Cr}\{\xi \leq x\}$. El valor esperado de ξ se define por:

$$E(\xi) = \int_0^{+\infty} \text{Cr}\{\xi \geq x\}dx - \int_{-\infty}^0 \text{Cr}\{\xi \leq x\}dx. \quad 4.15$$

cuando al menos una de estas dos integrales es finita.

4.3.8.1 Valor Esperado de un Número Difuso L-R

Sea ξ una variable difusa L-R $(a, b, c, d)_{\pi, \rho}$. A partir del teorema de la inversión de credibilidad se tiene que:

$$\text{Cr}\{\xi \leq x\} = \begin{cases} 0, & \text{Si } x \leq a, \\ \frac{1}{2} \left(1 - \left(\frac{b-x}{b-a} \right)^\pi \right), & \text{Si } a < x < b, \\ \frac{1}{2}, & \text{Si } b \leq x \leq c, \\ \frac{1}{2} \left(1 + \left(\frac{x-c}{d-c} \right)^\rho \right), & \text{Si } c < x < d, \\ 1, & \text{Si } d \leq x. \end{cases} \quad 4.9$$

y,

$$\text{Cr}\{\xi > x\} = \begin{cases} 1, & \text{Si } x \leq a, \\ \frac{1}{2} \left(1 + \left(\frac{b-x}{b-a} \right)^\pi \right), & \text{Si } a < x < b, \\ \frac{1}{2}, & \text{Si } b \leq x \leq c, \\ \frac{1}{2} \left(1 - \left(\frac{x-c}{d-c} \right)^\rho \right), & \text{Si } c < x < d, \\ 0, & \text{Si } d \leq x. \end{cases} \quad 4.10$$

La expresión *crisp* para determinar valor esperado credibilístico de un número difuso L-R con funciones de referencia tipo potencia se deriva usando la ecuación 4.15 (Jalota *et al.*, 2017b):

i) Si $0 \leq a < b < c < d$, $\text{Cr}\{\xi \leq x\} = 0$, entonces

$$\begin{aligned}
 E(\xi) &= \int_0^a \text{Cr}\{\xi \geq x\}dx + \int_a^b \text{Cr}\{\xi \geq x\}dx \\
 &+ \int_b^c \text{Cr}\{\xi \geq x\}dx + \int_c^d \text{Cr}\{\xi \geq x\}dx \\
 &+ \int_d^{+\infty} \text{Cr}\{\xi \geq x\}dx + \int_{-\infty}^0 \text{Cr}\{\xi \leq x\}dx \\
 &= a + \frac{1}{2}(b - c) + \frac{b - a}{2(\pi + 1)} \\
 &+ \frac{1}{2}(c - b) + \frac{1}{2}(d - c) - \frac{d - c}{2(\rho + 1)} \\
 &= \frac{1}{2}(a) + \frac{1}{2}(d) + \frac{b - a}{2(\pi + 1)} - \frac{d - c}{2(\rho + 1)}.
 \end{aligned}$$

ii) Si $a < 0 \leq b < c < d$, entonces

$$\begin{aligned}
 E(\xi) &= \int_0^b \text{Cr}\{\xi \geq x\}dx + \int_b^c \text{Cr}\{\xi \geq x\}dx \\
 &+ \int_c^d \text{Cr}\{\xi \geq x\}dx + \int_d^{+\infty} \text{Cr}\{\xi \geq x\}dx \\
 &- \int_{-\infty}^a \text{Cr}\{\xi \leq x\}dx - \int_a^0 \text{Cr}\{\xi \leq x\}dx \\
 &= \int_0^b \frac{1}{2} \left(1 + \left(\frac{b-x}{b-a} \right)^\pi \right) dx + \int_b^c \frac{1}{2} dx \\
 &+ \int_c^d \frac{1}{2} \left(1 - \left(\frac{x-c}{d-c} \right)^\rho \right) dx \\
 &- \int_a^0 \frac{1}{2} \left(1 - \left(\frac{b-x}{b-a} \right)^\pi \right) dx \\
 &= \frac{1}{2}(a) + \frac{1}{2}(d) + \frac{b - a}{2(\pi + 1)} - \frac{d - c}{2(\rho + 1)}.
 \end{aligned}$$

En una evaluación de los casos restantes, es decir, cuando $a < b < 0 \leq c < d$, $a < b < c < 0 \leq d$, y, $a < b < c < d < 0$, se obtiene una expresión similar para el valor esperado de un número difuso L-R en un entorno credibilístico. De esto modo:

$$E(\xi) = \frac{1}{2}(a) + \frac{1}{2}(d) + \frac{b - a}{2(\pi + 1)} - \frac{d - c}{2(\rho + 1)}. \tag{4.16}$$

La fórmula 4.16 puede ser reescrita como:

$$\begin{aligned}
 E(\xi) &= \frac{1}{2} \left[a + d + \frac{(b-a)}{(\pi+1)} - \frac{(d-c)}{(\rho+1)} \right] \\
 &= \frac{1}{2} \left[\frac{\pi(a)}{\pi+1} + \frac{b}{\pi+1} + \frac{\rho(d)}{\rho+1} + \frac{c}{\rho+1} \right] \\
 &= \frac{1}{2} \left[\frac{\pi(a-b)}{\pi+1} + \frac{b(\pi+1)}{\pi+1} + \frac{\rho(d-c)}{\rho+1} + \frac{c(\rho+1)}{\rho+1} \right] \\
 &= \frac{1}{2} \left[b + c + \frac{\rho(d-c)}{\rho+1} - \frac{\pi(b-a)}{\pi+1} \right].
 \end{aligned}$$

La anterior expresión es la misma dada por León y Vercher (2004). Sobre la base de las anteriores consideraciones, el valor esperado credibilístico de una variable difusa L-R $[\xi = (a, b, c, d)_{\pi, \rho}]$ con funciones de referencia tipo potencia se puede obtener por cualquiera de las expresiones *crisp* señaladas en las fórmulas 4.16 o 4.17.

$$E(\xi) = \frac{1}{2} \left[b + c + \frac{\rho(d-c)}{\rho+1} - \frac{\pi(b-a)}{\pi+1} \right]. \quad 4.17$$

Teorema 4.7 (Y.K. Liu y Liu, 2003). Sea ξ_1 y ξ_2 variables independientes con valores esperados finitos, entonces para cualquier número a_1 y a_2 , se tiene

$$E[a_1\xi_1 + a_2\xi_2] = a_1E[\xi_1] + a_2E[\xi_2].$$

4.3.8.2 Valor Esperado de Otras Variables Difusas

Definición 4.14 (B. Liu, 2007). Sea ξ (a, b, c) una variable difusa triangular, entonces, el valor esperado de ξ es determinado por

$$E[\xi] = \frac{a + 2b + c}{4}. \quad 4.18$$

Definición 4.15 (B. Liu, 2007). Sea ξ (a, b, c, d) una variable difusa trapezoidal, entonces, el valor esperado de ξ es definido por

$$E[\xi] = \frac{a + b + c + d}{4}. \quad 4.19$$

4.3.9 Varianza de una Variable Difusa

La varianza de una variable difusa proporciona una medida de la variación o dispersión de una distribución alrededor de su valor esperado. Un valor pequeño de la varianza indica que la variable difusa está muy concentrada alrededor de su valor esperado, mientras que un valor grande de varianza indica que la variable difusa tiene una dispersión amplia alrededor de su valor esperado.

Definición 4.16 Varianza (B. Liu y Liu, 2002).

Sea ξ una variable difusa con valor esperado finito $e = E[\xi]$. Entonces, la varianza de ξ se establece a partir de la siguiente expresión matemática

$$V[\xi] = E[(\xi - e)^2]. \quad 4.20$$

4.3.9.1 Varianza un Número Difuso L-R

La expresión *crisp* para determinar la varianza credibilística de un número difuso L-R $[\xi = (a, b, c, d)_{\pi, \rho}]$ con funciones de referencia de la familia de potencias, se deriva usando la ecuación 4.15 (Jalota *et al.*, 2017b):

$$\begin{aligned} V[\xi] &= \int_0^{\infty} \text{Cr}\{(\xi - e)^2 \geq x\} dx \\ &= \int_0^{\infty} \text{Cr}\{(\xi \leq e - \sqrt{x}) \cup (\xi \geq e + \sqrt{x})\} dx. \end{aligned}$$

$$V[\xi] = \begin{cases} \int_{-\infty}^e 2(e-x)\text{Cr}\{\xi \leq x\}dx, & \text{Si } \text{Cr}\{\xi \leq e - \sqrt{x}\} \geq \text{Cr}\{\xi \geq e + \sqrt{x}\}, \\ \int_e^{\infty} 2(x-e)\text{Cr}\{\xi \geq x\}dx, & \text{Si } \text{Cr}\{\xi \leq e - \sqrt{x}\} < \text{Cr}\{\xi \geq e + \sqrt{x}\}. \end{cases}$$

i) Si $a < e \leq b$

$$\begin{aligned} V[\xi] &= \int_e^{\infty} 2(x-e)\text{Cr}\{\xi \geq x\}dx \\ &= \int_e^b 2(x-e)\text{Cr}\{\xi \geq x\}dx \\ &\quad + \int_b^c 2(x-e)\text{Cr}\{\xi \geq x\}dx \\ &\quad + \int_c^d 2(x-e)\text{Cr}\{\xi \geq x\}dx \\ &\quad + \int_d^{\infty} 2(x-e)\text{Cr}\{\xi \geq x\}dx \\ &= \frac{(b-e)^{\pi+2}}{(b-a)^{\pi}(\pi+1)(\pi+2)} - \frac{(d-e)(d-c)}{\rho+1} \\ &\quad + \frac{(d-c)^2}{(\rho+1)(\rho+2)} - \frac{(d-e)^2}{2}. \end{aligned}$$

ii) Si $b < e \leq c$

(a) Si $|b-e| \geq |c-e|$

$$\begin{aligned} V[\xi] &= \int_{-\infty}^e 2(e-x)\text{Cr}\{\xi \leq x\}dx \\ &= \int_{-\infty}^a 2(e-x)\text{Cr}\{\xi \leq x\}dx \\ &\quad + \int_a^b 2(e-x)\text{Cr}\{\xi \leq x\}dx \\ &\quad + \int_b^e 2(e-x)\text{Cr}\{\xi \leq x\}dx \\ &= \frac{(e-a)^2}{2} - \frac{(e-a)(b-a)}{\pi+1} + \frac{(b-a)^2}{(\pi+1)(\pi+2)}. \end{aligned}$$

(b) Si $|b-e| < |c-e|$

$$\begin{aligned}
 V[\xi] &= \int_e^\infty 2(x - e)Cr\{\xi \geq x\}dx \\
 &= \int_e^c 2(x - e)Cr\{\xi \geq x\}dx \\
 &\quad + \int_c^d 2(x - e)Cr\{\xi \geq x\}dx \\
 &\quad + \int_d^\infty 2(x - e)Cr\{\xi \geq x\}dx \\
 &= \frac{(d - e)^2}{2} - \frac{(d - e)(d - c)}{\rho + 1} + \frac{(d - c)^2}{(\rho + 1)(\rho + 2)}.
 \end{aligned}$$

iii) Si $c < e \leq d$

$$\begin{aligned}
 V[\xi] &= \int_{-\infty}^e 2(e - x)Cr\{\xi \leq x\}dx \\
 &= \int_{-\infty}^a 2(e - x)Cr\{\xi \leq x\}dx \\
 &\quad + \int_a^b 2(e - x)Cr\{\xi \leq x\}dx \\
 &\quad + \int_a^b 2(e - x)Cr\{\xi \leq x\}dx \\
 &\quad + \int_c^e 2(e - x)Cr\{\xi \leq x\}dx \\
 &= \frac{(e - a)^2}{2} - \frac{(e - a)(b - a)}{\pi + 1} + \frac{(b - a)^2}{(\pi + 1)(\pi + 2)} \\
 &\quad + \frac{(e - c)^{\rho+2}}{(d - c)^\rho(\rho + 1)(\rho + 2)}
 \end{aligned}$$

Es decir,

$$V[\xi] = \begin{cases} \frac{(e - a)^2}{2} - \frac{(e - a)(b - a)}{\pi + 1} + \frac{(b - a)^2}{(\pi + 1)(\pi + 2)} + \frac{(e - c)^{\rho+2}}{(d - c)^\rho(\rho + 1)(\rho + 2)}, & \text{Si } c < e \leq d, \\ \frac{(e - a)^2}{2} - \frac{(e - a)(b - a)}{\pi + 1} + \frac{(b - a)^2}{(\pi + 1)(\pi + 2)}, & \text{Si } b < e \leq c; \text{ y Si } \\ & |b - e| \geq |c - e|, \\ \frac{(d - e)^2}{2} - \frac{(d - e)(d - c)}{\rho + 1} + \frac{(d - c)^2}{(\rho + 1)(\rho + 2)}, & \text{Si } b < e \leq c; \text{ y Si } \\ & |b - e| < |c - e|, \\ \frac{(b - e)^{\pi+2}}{(b - a)^2(\pi + 1)(\pi + 2)} + \frac{(d - e)(d - c)}{\rho + 1} + \frac{(d - c)^2}{(\rho + 1)(\rho + 2)} + \frac{(d - e)^2}{2}, & \text{Si } a < e \leq b. \end{cases} \quad 4.21$$

4.3.9.2 Varianza de Otras Variables Difusas

Definición 4.17 (Y. Chen, Liu, y Chen, 2006). Sea ξ (a, b, c) una variable difusa triangular, entonces, la varianza de ξ es

$$V[\xi] = \begin{cases} \frac{33\alpha^3 + 11\alpha\beta^2 + 21\alpha^2\beta - \beta^3}{384\alpha}, & \text{Si } \alpha > \beta, \\ \frac{\alpha^2}{6}, & \text{Si } \alpha = \beta, \\ \frac{33\beta^3 + 11\alpha^2\beta + 21\alpha\beta^2 - \alpha^3}{384\beta}, & \text{Si } \alpha < \beta. \end{cases} \quad 4.22$$

Donde $\alpha = (b - a)$, $\beta = (c - b)$, y, $e = E[\xi]$. Además, nótese que cuando $\alpha = \beta$, la variable difusa triangular es simétrica y su valor esperado está dado por

$$E[\xi] = b. \quad 4.23$$

Definición 4.18 (Y. Chen *et al.*, 2006). Sea ξ (a, b, c, d) una variable difusa trapezoidal, entonces, la varianza de ξ es

$$V[\xi] = \begin{cases} \frac{3(c - b + \beta)^2 + \beta^2}{24}, & \text{Si } \alpha = \beta, \\ \frac{1}{6} \left[\frac{(c - e)^3}{\beta} - \frac{(b - \alpha - e)^3}{\alpha} + \frac{(\alpha c + \beta b - e(\alpha + \beta))^3}{\alpha\beta(\alpha - \beta)^2} \right], & \text{Si } \alpha > \beta; \text{ Sí } b - e < 0, \\ \frac{1}{6} \left[\frac{(b - e)^3}{\alpha} - \frac{(c - e)^3}{\beta} - \frac{(b - \alpha - e)^3}{\alpha} + \frac{(\alpha c + \beta b - e(\alpha + \beta))^3}{\alpha\beta(\alpha - \beta)^2} \right], & \text{Si } \alpha > \beta; \text{ Sí } b - e \geq 0, \\ \frac{1}{6} \left[\frac{(b - e)^3}{\alpha} + \frac{(c + \beta - e)^3}{\beta} - \frac{(\alpha c + \beta b - e(\alpha + \beta))^3}{\alpha\beta(\alpha - \beta)^2} \right], & \text{Si } \alpha < \beta; \text{ Sí } c - e > 0, \\ \frac{1}{6} \left[\frac{(b - e)^3}{\alpha} - \frac{(c - \beta - e)^3}{\beta} - \frac{(c - e)^3}{\beta} - \frac{(\alpha c + \beta b - e(\alpha + \beta))^3}{\alpha\beta(\alpha - \beta)^2} \right], & \text{Si } \alpha < \beta; \text{ Sí } c - e \leq 0. \end{cases} \quad 4.24$$

Donde $\alpha = (b - a)$, $\beta = (d - c)$, y, $e = E[\xi]$. Además, obsérvese que cuando $\alpha = \beta$, la variable difusa trapezoidal es simétrica y su valor esperado está dado por

$$E[\xi] = \frac{(a + d)}{2}. \quad 4.25$$

4.3.10 Semivarianza de una Variable Difusa

Definición 4.19 (B. Liu y Liu, 2002). Sea ξ una variable difusa con valor esperado finito $e = E[\xi]$. Entonces, la semivarianza de ξ es definida por

$$SV[\xi] = E[(\xi - e)^-]^2. \quad 4.26$$

Donde,

$$[\xi - e]^- = \begin{cases} \xi - e, & \text{Sí } \xi \leq e, \\ 0, & \text{Sí } \xi > e. \end{cases}$$

Teorema 4.8 (Huang, 2008a). Sea ξ una variable difusa, $SV[\xi]$ y $V[\xi]$ la semivarianza y varianza de ξ , respectivamente. Entonces, $0 \leq SV[\xi] \leq V[\xi]$

Demostración. Sea e el valor esperado de una variable difusa ξ . La no-negatividad de la varianza y la semivarianza es clara. Para cualquier número real, se tiene

$$\{\theta \mid [\xi(\theta) - e]^2 \geq r\} \supset \{\theta \mid [(\xi(\theta) - e)^-]^2 \geq r\},$$

lo cual implica que

$$Cr\{[\xi - e]^2 \geq r\} \geq Cr\{[(\xi - e)^-]^2 \geq r\}, \quad \forall r.$$

debido a que la medida de credibilidad satisface el axioma de monotonía. De la definición de varianza y semivarianza se deduce que

$$V[\xi] = \int_0^\infty Cr\{[\xi - e]^2 \geq r\} dr \geq \int_0^\infty Cr\{[(\xi - e)^-]^2 \geq r\} dr = SV[\xi].$$

Teorema 4.9 (Huang, 2008a). Sea ξ una variable difusa con función de pertenencia simétrica, entonces $SV[\xi] = V[\xi]$.

Demostración. Sea ξ una variable difusa con función de pertenencia simétrica respecto a su valor esperado e . De la definición de varianza, se tiene

$$V[\xi] = E[(\xi - e)^2] = \int_0^{\infty} \text{Cr}\{(\xi - e)^2 \geq r\} dr.$$

dado que la función de pertenencia de ξ es simétrica respecto a e , se tiene

$$\text{Cr}\{(\xi - e)^2 \geq r\} = \text{Cr}\{[(\xi - e)^-]^2 \geq r\}, \quad \forall r.$$

por lo tanto,

$$V[\xi] = \int_0^{\infty} \text{Cr}\{(\xi - e)^2 \geq r\} dr = \int_0^{\infty} \text{Cr}\{[(\xi - e)^-]^2 \geq r\} dr = SV[\xi].$$

Observación 4.5 (Huang, 2010). El teorema 4.9 indica que cuando la función de pertenencia del retorno de la cartera es simétrica, el valor de la varianza y de la semivarianza del rendimiento de la cartera difusa serán los mismos. No obstante, cuando la función de pertenencia del retorno de la cartera difusa es asimétrica, el teorema 4.8 indica que el valor de la varianza y la semivarianza del rendimiento de la cartera difusa serán diferentes.

4.3.10.1 Semivarianza de un Número Difuso L-R

La expresión *crisp* para determinar la semivarianza credibilística de un número difuso L-R $[\xi = (a, b, c, d)_{\pi, \rho}]$ con funciones de referencia de la familia de potencias se deriva usando la ecuación 4.15 (Jalota *et al.*, 2017b):

$$SV[\xi] = E[(\xi - e)^-]^2$$

$$\begin{aligned}
 SV(\xi) &= \int_0^{\infty} \text{Cr}\{([\xi - e]^-)^2 \geq x\} dx \\
 &= \int_0^{\infty} \text{Cr}\{\xi \leq e - \sqrt{x}\} dx \\
 &= \int_{-\infty}^e 2(e - x) \text{Cr}\{\xi \leq x\} dx.
 \end{aligned}$$

i) Si $a < e \leq b$

$$\begin{aligned}
 SV[\xi] &= \int_{-\infty}^a 2(e - x) \text{Cr}\{\xi \leq x\} dx \\
 &\quad + \int_a^e 2(e - x) \text{Cr}\{\xi \leq x\} dx \\
 &= \frac{(e - a)^2}{2} - \frac{(e - a)(b - a)}{\pi + 1} \\
 &\quad - \frac{(b - e)^{\pi+2}}{(b - a)^{\pi}(\pi + 1)(\pi + 2)} + \frac{(b - a)^2}{(\pi + 1)(\pi + 2)}.
 \end{aligned}$$

ii) Si $b < e \leq c$

$$\begin{aligned}
 SV[\xi] &= \int_{-\infty}^a 2(e - x) \text{Cr}\{\xi \leq x\} dx \\
 &\quad + \int_a^b 2(e - x) \text{Cr}\{\xi \leq x\} dx \\
 &\quad + \int_b^e 2(e - x) \text{Cr}\{\xi \leq x\} dx \\
 &= \frac{(e - a)^2}{2} - \frac{(e - a)(b - a)}{\pi + 1} \\
 &\quad + \frac{(b - a)^2}{(\pi + 1)(\pi + 2)}.
 \end{aligned}$$

ii) Si $c < e \leq d$

$$\begin{aligned}
 SV[\xi] &= \int_{-\infty}^a 2(e - x) \text{Cr}\{\xi \leq x\} dx \\
 &\quad + \int_a^b 2(e - x) \text{Cr}\{\xi \leq x\} dx \\
 &\quad + \int_c^e 2(e - x) \text{Cr}\{\xi \leq x\} dx \\
 &= \frac{(e - a)^2}{2} - \frac{(e - a)(b - a)}{\pi + 1} \\
 &\quad + \frac{(b - a)^2}{(\pi + 1)(\pi + 2)} + \frac{(e - c)^{\rho+2}}{(d - c)^{\rho}(\rho + 1)(\rho + 2)}.
 \end{aligned}$$

Es decir,

$$SV[\xi] = \begin{cases} \frac{(e-a)^2}{2} - \frac{(e-a)(b-a)}{\pi+1} + \frac{(b-a)^2}{(\pi+1)(\pi+2)} + \frac{(e-c)^{\rho+2}}{(d-c)^\rho(\rho+1)(\rho+2)}, & \text{Si } c < e \leq d, \\ \frac{(e-a)^2}{2} - \frac{(e-a)(b-a)}{\pi+1} + \frac{(b-a)^2}{(\pi+1)(\pi+2)}, & \text{Si } b < e \leq c, \\ \frac{(e-a)^2}{2} - \frac{(e-a)(b-a)}{\pi+1} - \frac{(b-e)^{\pi+2}}{(b-a)^\pi(\pi+1)(\pi+2)} + \frac{(b-a)^2}{(\pi+1)(\pi+2)}, & \text{Si } a < e \leq b, \\ 0 & \text{En otro caso.} \end{cases} \quad 4.27$$

4.3.10.2 Semivarianza de Otras Variables Difusas

Definición 4.20 (Huang, 2010). Sea ξ (a, b, c) una variable difusa triangular, entonces, la semivarianza de ξ es

$$SV[\xi] = \begin{cases} \frac{(e+a)(e^2-a^2)}{2(b-a)} - \frac{e^3-a^3}{3(b-a)} - \frac{ae(e-a)}{b-a}, & \text{Si } b-a > c-b \\ \frac{3eb+ab-3ae+a^2+2b^2}{6} + \frac{e^3-4b^3+3ce^2-6be^2+9b^2e+3cb^2-6cbe}{6(c-b)}, & \text{Si } b-a < c-b, \end{cases} \quad 4.28$$

Donde $e = E[\xi]$.

Definición 4.21 (Qian y Yin, 2014). Sea ξ (a, b, c, d) una variable difusa trapezoidal, entonces, la semivarianza de ξ es

$$SV[\xi] = \begin{cases} \frac{(e-a)^3}{6(b-a)}, & \text{Sí } e < b, \\ \frac{(b-a)(3e-2b-a)+3(e-b)^2}{6}, & \text{Sí } b \leq e \leq c, \\ \frac{(b-a)(3e-2b-a)+3(c-b)(2e-b-c)}{6} + \frac{(c-e)^2(3d-4c+e)}{6(d-d)}, & \text{Sí } e > c. \end{cases} \quad 4.29$$

Donde $e = E[\xi]$.

4.4 Resumen y Conclusiones

Las expectativas de los inversionistas con respecto a los parámetros financieros sobre la base de los cuales se realiza el proceso de selección de carteras están rodeado de vaguedad

y ambigüedad. Construir carteras satisfactorias sobre la base de estas expresiones vagas y ambiguas plantea un desafío metodológico en la investigación actual que no puede enfrentarse usando números *crisp*. Ante esta situación, a partir de la década de los noventa, varios investigadores han estimado los retornos de los activos utilizando la teoría de conjuntos difusos. Esta teoría ha permitido no solo captura la vaguedad y la incertidumbre existentes en los mercados financieros, sino que también ha proporcionado una flexibilidad en la toma de decisiones integrando las preferencias subjetivas de los inversionistas y el conocimiento de los expertos.

Como se ha visto, en los modelos difusos de selección de carteras, la medida de posibilidad, extensamente utilizada para representar la tasa de rendimiento de los activos, es inconsistente con la ley del medio excluido y la ley de contradicción. Para solventar esta dificultad, la medida de credibilidad, definida por el promedio de las medidas de posibilidad y de necesidad, ha sido utilizada en años recientes para modelar la incertidumbre del rendimiento futuro de los activos.

La aplicación de la lógica difusa va a continuar desempeñando en el futuro un papel fundamental en la modelización y resolución de no solo los problemas de selección de carteras, sino también los problemas de la planificación y la gestión financiera.

Capítulo 5

5 CARACTERIZACIÓN DE LOS MERCADOS DE CAPITALES DE LATINOAMÉRICA

5.1 Introducción

El proceso de apertura y globalización financiera que se dio a partir de la década de los noventa implicó un dinamismo sin precedentes en los mercados de capitales a nivel mundial y en especial en las economías emergentes. Las reformas estructurales y los programas de estabilización económica emprendidos por la mayoría de los países en desarrollo crearon un ambiente favorable para la entrada de capitales foráneos, a lo cual también contribuyó la caída de las tasas de interés de los países desarrollados entre 1989 y 1993, y las menores perspectivas de crecimiento de estos países (Arbeláez, Zuluaga, y Guerra, 2002).

La globalización financiera asociada a la movilidad internacional de capital se ha acelerado en las últimas décadas. El desarrollo de los sistemas financieros y los avances que se han presentado en las tecnologías de la información han conducido a una oferta y una demanda mundial de capital, y la existencia de un mercado global de capitales es un rasgo característico de la economía contemporánea (Olivera, 2004). Esto ha ocasionado una mayor interconexión y un mayor grado de interdependencia entre los mercados, lo cual ha contribuido a la generación de crisis financieras. El colapso global desatado en los años 2007-2008 es un ejemplo claro de la crisis financiera y económica global más severa desde los años de la posguerra, solo comparable a la de la Gran Depresión (Nudelsman, 2013).

En los últimos 20 años una serie de estudios han analizado el efecto de los mercados de capitales sobre el crecimiento económico. Los resultados de estas investigaciones han producido resultados variados y a partir de ellos se podrían dividir estas investigaciones en dos grupos: i) *Estudios que revelan una relación positiva entre el crecimiento económico y el desarrollo de los mercados de capitales*. Bencivenga y Smith (1991), Holmström y Tirole (1998) y Levine (1997) subrayan que los mercados de capitales más líquidos contribuyendo al crecimiento económico y mejoran la eficiencia del mercado proporcionando información oportuna y precisa al inversionista. Devereux y Smith (1994), Obstfeld (1992, 1993), y Saint-Paul (1992) encontraron que la reducción del riesgo a través de la diversificación global podría proporcionar más oportunidades para hacer inversiones diversificadas a nivel internacional, aumentando de este modo el crecimiento de largo plazo. Caporale, Howells y Soliman (2004), y Mishkin (2001) señalan que un mercado de capitales bien organizado y administrado genera

oportunidades de inversión a partir del financiamiento de proyectos productivos que alientan la actividad económica, movilizan el ahorro doméstico, asignan de manera más eficiente el capital, ayudan a diversificar el riesgo, y a facilitar el intercambio de bienes y servicios. Adjasi y Biekpe (2006) evidenciaron un impacto positivo considerable del desarrollo del mercado de capitales sobre el crecimiento económico en los países de las economías de ingresos medios altos. Sus conclusiones fueron fortalecidas por Bahadur y Neupane (2006), quienes concluyeron que las fluctuaciones de los mercados de capitales ayudan a predecir el crecimiento futuro de una economía. ii) *Estudios que revelan una relación negativa entre el crecimiento económico y el desarrollo de los mercados de capitales.* Devereux y Smith (1994); Mayer (1988), Morck, Shleifer y Vishny (1990); Morck, Shleifer, Vishny, Shapiro y Poterba, (1990) y Stiglitz (1993) afirman que los mercados de capitales tienen un efecto negativo sobre el crecimiento económico debido a que éstos promueven la información asimétrica sobre las empresas y contribuyen a la reducción del ahorro. Rancièrè, Tornell y Westermann (2008) señalan que existe una correlación positiva entre el desarrollo de los mercados financieros y de capitales y la probabilidad de una crisis, es decir, mientras más desarrollado estén estos mercados, mayor será la probabilidad de una crisis.

Nótese que existen estudios a favor y en contra respecto al desarrollado del mercado de capitales y su efecto en el crecimiento económico de un país. En cualquier caso, no hay discusión en cuanto a que los mercados de capitales tienen gran relevancia sobre el binomio rentabilidad-riesgo y, por ende, en la capacidad de la diversificación de una cartera.

El problema de selección de carteras pretende determinar una cartera satisfactoria que cumpla el deseo del inversionista en cuanto a la utilidad que desea asegurar y al riesgo que está dispuesto a aceptar para conseguirla. En este propósito, este problema pretende encontrar las proporciones óptimas del capital que ha de invertirse en cada uno de los activos buscando un cierto equilibrio entre la maximización del rendimiento y la minimización del riesgo de la inversión. En el marco de esta apreciación, un aspecto importante para lograr la utilidad que se pretende alcanzar es el de conocer las características del mercado en el cual se realizará el proceso de inversión, ya que algunos aspectos como la liquidez, la concentración, la volatilidad de los tipos de cambios, entre otros, podrían afectar la utilidad que se pretende alcanzar. Por lo anterior, este capítulo tiene como meta analizar la evolución de los mercados de capitales de Latinoamérica a lo largo de los últimos 16 años, lo cual permitirá efectuar un inventario del estado actual de éstos mercados y su efecto en la toma de decisiones de cartera.

El resto del capítulo está organizado como sigue: La sección 5.2 analiza los indicadores de tamaño, liquidez y concentración de los mercados accionarios latinoamericanos, realizando una comparación con los mercados internacionales de algunas economías desarrolladas y emergentes. En las secciones 5.3 y 5.4 se examina la volatilidad y la correlación de los precios de las acciones y de los tipos de cambio de los mercados accionarios de América Latina, Estados Unidos y Europa durante el periodo 2002-2016. La sección 5.5 se enfoca al análisis del impacto del riesgo cambiario sobre la rentabilidad de inversión en los índices bursátiles latinoamericanos, desde el punto de vista de 6 inversionistas ubicados en diferentes regiones de América. La sección 5.6 examina el riesgo país de los 6 mercados de capitales seleccionados de Latinoamérica en los años 2000-2016. Finalmente la sección 5.7 presenta las conclusiones del capítulo.

5.2 Análisis del Tamaño, Liquidez y Concentración

En la literatura económica las medidas más utilizadas para medir el desarrollo de un mercado accionario son los indicadores de tamaño, liquidez y concentración. Un mayor tamaño de mercado se encuentra correlacionado positivamente con la habilidad de éste para movilizar y diversificar el riesgo, un mercado más líquido permite a los agentes que se desenvuelven en él realizar más transacciones y deshacer sus posiciones con menores costos (en tiempo y dinero) y por tanto permite realizar operaciones de una forma más eficiente; por último, un mercado menos concentrado es mejor por cuanto se hacen menos probables los conflictos de intereses entre grandes y pequeños poseedores de acciones, y se imponen fuerzas competitivas que permiten alcanzar puntos óptimos en su interior (Demirgüç-Kunt y Levine, 1996 citado en Gil, 2007). Los principales hallazgos respecto al desarrollo de los mercados accionarios de Argentina, Brasil, Chile, Colombia, México y Perú y su comparación con algunos otros mercados internacionales de economías desarrolladas y emergentes han sido resumidos en la tabla 5.1.

5.2.1 Tamaño del Mercado

El tamaño del mercado accionario se puede medir con la ayuda de dos indicadores: la capitalización relativa del mercado²⁴ y el número de firmas registradas en bolsa. Estas medidas de tamaño son complementarias, es decir, la primera al ser una medida relativa es útil para hacer comparaciones internacionales, la segunda al ser una medida absoluta permite realizar seguimiento a la evolución del mercado en el tiempo (Gil, 2007). Así mismo, debido a que la primera medida puede reflejar fenómenos especulativos al

²⁴ La capitalización relativa del mercado es igual al número total de acciones en circulación multiplicado por su valor en bolsa, dividido entre el Producto Interno Bruto (PIB) del periodo.

involucrar en su construcción el precio de mercado, el análisis conjunto resulta fundamental (Uribe, 2007).

En la tabla 5.1 se evidencia que en términos relativos los mercados accionarios de Chile, México, Argentina y Perú son los más grandes de Latinoamérica, con una capitalización relativa de mercado promedio de 85.44%, 74.44%, 61.04% y 57.59%, respectivamente, durante el periodo 2014-2016²⁵. No obstante, ninguno de los seis países latinoamericanos supera el promedio presentado por determinadas economías desarrolladas como Canadá (117.6%), Japón (101.9%), Estados Unidos (NYSE) (105.1%) y Australia (93.6%), y algunas economías emergentes como Hong Kong (China) (1044.4%) y Sudáfrica (283.15%), en las cuales la capitalización bursátil de sus mercados accionarios representa en promedio más del 100% del PIB. Es de especial interés el caso del mercado accionario de Hong Kong (China), que en promedio durante los años 2014-2016 ha superado 10 veces el valor de su PIB.

Con el propósito de observar y analizar la tendencia del comportamiento histórico de la capitalización bursátil de los seis mercados accionarios de Latinoamérica, se toma como base 100 para el primer año (2000) y luego se determinan los cambios en el valor de la capitalización periodo a periodo. En la figura 5.1 se puede apreciar la notable evolución de la capitalización bursátil total en Colombia y Perú, mercados que han registrado durante el período 2000-2016 variaciones aproximadas del 1500% y 1150%, respectivamente.

²⁵ El análisis del tamaño, liquidez y concentración se realizará en una primera instancia para el periodo 2014-2016 para los 6 mercados accionarios de América Latina seleccionados, y se comparará con la indicadores de algunos otros mercados internacionales de economías desarrolladas y emergentes. Posteriormente, la evolución de los mercados de capitales durante el periodo 2010-2016 sólo se realizará a los mercados accionarios de Argentina, Brasil, Chile, Colombia, México y Perú.

Tabla 5.1 Medidas de Tamaño, Liquidez y Concentración 2014-2016

País		Tamaño						Liquidez						Concentración					
		Capitalización del Mercado/ PIB			Firmas Registradas en Bolsa			Volumen Transado/ PIB			Volumen Transado/ Capitalización del Mercado			10 sociedades domesticas de mayor capitalización/ Capitalización del Mercado			10 sociedades domesticas más negociadas/ Volumen Transado		
		2014	2015	2016	2014	2015	2016	2014	2015	2016	2014	2015	2016	2014	2015	2016	2014	2015	2016
Latinoamérica	Argentina	87.4%	43.5%	52.2%	101	99	99	0.9%	0.9%	0.9%	1.1%	2.0%	1.6%	72.4%	63.3%	57.4%	83.4%	82.0%	63.2%
	Brasil	34.4%	26.6%	42.4%	369	359	349	23.9%	27.0%	29.3%	69.5%	101.8%	69.2%	50.8%	51.5%	54.9%	58.6%	45.6%	40.2%
	Chile	90.6%	79.8%	85.9%	307	310	298	12.9%	9.0%	10.1%	14.2%	11.3%	11.7%	45.1%	45.9%	44.3%	49.7%	55.3%	48.4%
	Colombia	40.5%	30.1%	36.7%	74	73	70	6.6%	5.0%	4.9%	16.2%	16.6%	13.4%	73.9%	71.0%	71.5%	92.5%	86.1%	68.8%
	México	64.1%	78.5%	80.7%	145	143	144	12.0%	9.6%	10.6%	18.8%	12.2%	13.1%	52.1%	55.5%	54.1%	59.5%	61.9%	58.7%
	Perú	60.3%	47.9%	64.6%	235	278	264	2.3%	1.3%	1.6%	3.9%	2.7%	2.5%	57.3%	55.4%	58.5%	58.2%	53.7%	65.5%
Mercados Internacionales de Comparación	Australia	88.3%	87.2%	105.3%	2,073	2,108	2,095	55.3%	59.4%	68.1%	62.6%	68.1%	64.6%	47.7%	44.3%	40.8%	37.6%	35.0%	31.1%
	Bombay (India)	76.6%	70.1%	69.2%	5,542	5,836	5,821	6.0%	5.8%	5.0%	7.9%	8.3%	7.2%	28.0%	N.D.	N.D.	18.2%	N.D.	N.D.
	Canadá	116.8%	105.8%	130.3%	3,761	3,559	3,419	78.7%	76.1%	76.5%	67.4%	71.9%	58.7%	27.4%	28.1%	31.5%	17.2%	21.1%	25.5%
	Corea	85.9%	86.8%	88.9%	1,864	1,961	2,059	95.7%	139.4%	118.0%	111.4%	160.6%	132.7%	32.6%	28.8%	32.8%	17.4%	13.2%	13.0%
	España	72.2%	63.6%	57.2%	3,452	3,651	3,506	80.0%	83.6%	55.6%	110.8%	131.5%	97.2%	N.D.	N.D.	N.D.	N.D.	N.D.	N.D.
	Filipinas	92.0%	77.2%	78.6%	263	265	265	14.9%	13.5%	12.3%	16.2%	17.5%	15.6%	39.7%	42.4%	40.8%	45.8%	45.3%	44.7%
	Hong Kong (China)	1109.3%	1028.8%	995.0%	1,752	1,973	1,866	521.8%	687.1%	420.6%	47.0%	66.8%	42.3%	33.5%	33.1%	34.4%	26.8%	26.5%	25.4%
	Indonesia	47.4%	41.9%	45.7%	506	521	537	10.6%	9.0%	9.9%	22.4%	21.4%	21.6%	45.2%	48.7%	47.5%	39.6%	52.1%	40.9%
	Japón	90.3%	115.0%	100.3%	3,470	3,513	3,541	112.4%	126.5%	113.9%	124.5%	109.9%	113.5%	16.4%	16.2%	15.6%	15.4%	15.0%	12.8%
	Mumbai (India)	74.7%	68.7%	68.0%	1,708	1,794	1,840	31.0%	32.0%	30.6%	41.5%	46.6%	45.0%	28.0%	43.4%	45.9%	18.2%	52.8%	56.0%
	Nasdaq (USA)	40.1%	40.4%	41.9%	2,782	2,859	2,897	70.4%	69.4%	59.6%	175.3%	171.9%	142.3%	35.5%	39.1%	32.0%	43.1%	44.3%	11.6%
	NYSE Group (USA)	111.3%	98.6%	105.4%	2,466	2,424	2,307	91.2%	96.9%	93.3%	82.0%	98.3%	88.5%	14.3%	14.6%	14.8%	15.2%	14.1%	N.D.
	Rusia	18.7%	34.6%	48.5%	257	254	245	11.7%	10.2%	9.9%	62.8%	29.4%	20.4%	61.1%	60.5%	59.7%	84.3%	83.4%	71.3%
	Shanghái (China)	37.5%	38.4%	36.6%	995	1,081	1,182	58.1%	191.7%	67.1%	154.8%	498.9%	183.2%	31.2%	23.3%	23.4%	0.2%	0.0%	6.1%
	Sudáfrica	266.2%	260.6%	322.7%	380	382	376	98.4%	114.1%	127.3%	37.0%	43.8%	39.4%	24.7%	24.0%	20.5%	41.6%	40.6%	38.0%
Turquía	23.5%	18.2%	20.0%	227	393	381	42.2%	43.1%	38.2%	179.6%	236.5%	190.7%	52.8%	39.2%	39.5%	48.1%	58.4%	58.6%	

Fuente: Elaboración propia a partir de la Información Estadística de la Federación Iberoamericana de Bolsas (FIAB), la Federación Mundial de Bolsas (WFE) y el Banco Mundial.

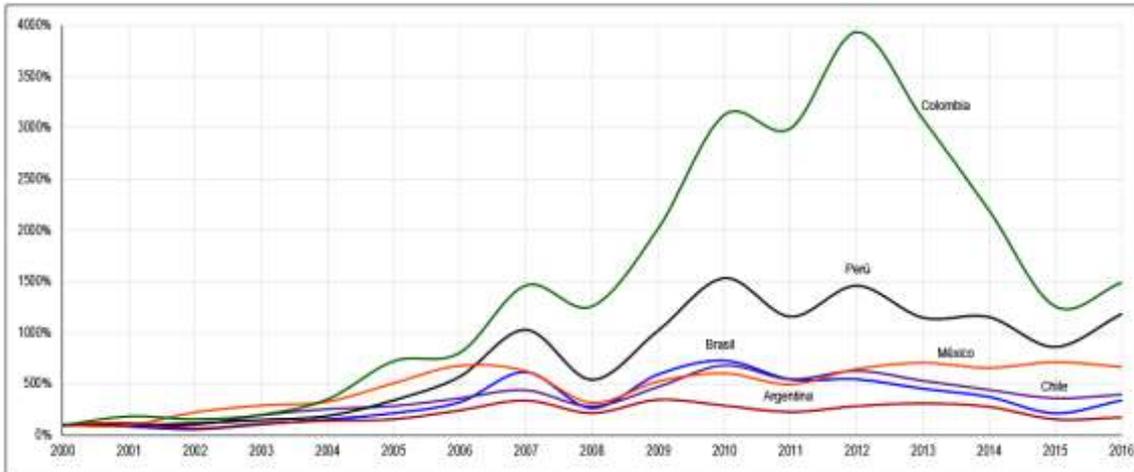


Figura 5.1 Tendencia de la Tasa de Crecimiento Anual de la Capitalización Bursátil de Latinoamérica 2000-2016

Fuente: Elaboración propia a partir de la Información Estadística de la FIAB

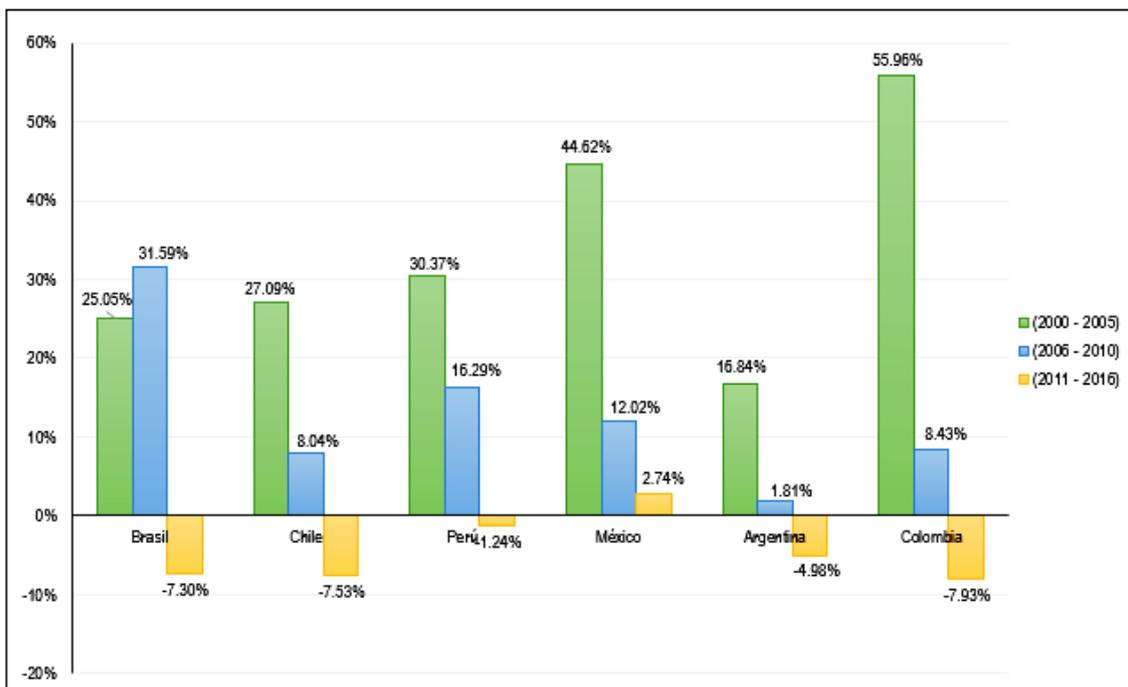


Figura 5.2 Tasa de Crecimiento Promedio Anual de la Capitalización Bursátil de Latinoamérica 2000-2016

Fuente: Elaboración propia a partir de la Información Estadística de la FIAB

Al analizar la tasa promedio de crecimiento anual de la capitalización bursátil durante los periodos 2000-2005, 2006-2010 y 2011-2016 (ver figura 5.2), se observa que

en los primeros cinco años de la década de los 2000, Colombia estaba entre los países que tuvieron las mayores tasas de crecimiento promedio de capitalización del mercado, representada en un 55.96% anual, cuando el promedio de la región era del 33,32%. En contraste, entre 2006 y 2010 la tasa promedio anual de crecimiento de la capitalización bursátil latinoamericana cayó hasta un 13,03%. Argentina presentó el peor desempeño de la muestra y cerró con una tasa promedio de crecimiento de 1.81%. Durante los primeros 6 años de la década del 2010, los mercados bursátiles han caído en promedio un 4.37% y Colombia presentó el peor desempeño entre los 6 países analizados, con una tasa de crecimiento promedio anual de la capitalización bursátil de -7.93%.

Prosiguiendo el análisis, es conveniente señalar que durante el periodo 2000-2016 los mercados financieros internacionales estuvieron sujetos a un entorno económico complejo e inestable. La crisis de las puntocom (2000), los atentados del 11-S en Nueva York (2001), la crisis de deuda en Argentina (2001), la gran recesión (2007), la crisis de deuda en Europa (2009), la desaceleración en las principales economías asiáticas (2012), los choques macroeconómicos provenientes del cambio en el paradigma de la política monetaria de La Reserva Federal de Estados Unidos (2013) y la caída de los precios del barril del petróleo (2014), entre otros, han sido las principales fuerzas que han caracterizado el contexto de los mercados financieros internacionales y han afectado por ende los mercados de los países analizados.

Un indicador usualmente mencionado a la hora de considerar la relevancia económica de los mercados accionarios es el índice de capitalización relativa del mercado. La figura 5.3 muestra que el mercado latinoamericano de mayor tamaño durante

el periodo 2000-2016 ha sido el chileno, donde la velocidad en el incremento de la capitalización bursátil ha superado en promedio la evolución positiva del PIB (111.16%). En contraste, el mercado accionario de Colombia ha sido en promedio el de menor tamaño (38.70%), lo cual corrobora lo señalado previamente. Por otra parte, la figura 5.3 evidencia que los mercados accionarios más afectados por la gran recesión del 2007 y, por ende, los más integrados a nivel internacional, fueron Argentina, Chile, Brasil y Perú, los cuales tuvieron un mayor aumento en el indicador antes del 2007 y, como consecuencia, una mayor caída posterior. Por su parte, el tamaño del mercado accionario colombiano prácticamente no fue reducido por la crisis. Uno de los puntos que llama la atención es que durante el periodo 2000-2016 los 6 mercados accionarios más grandes de América Latina presentaron un crecimiento notable, no obstante, al finalizar el año 2016, el tamaño de estos mercados es muy similar a lo presentado en los primeros años de la década de los 2000.

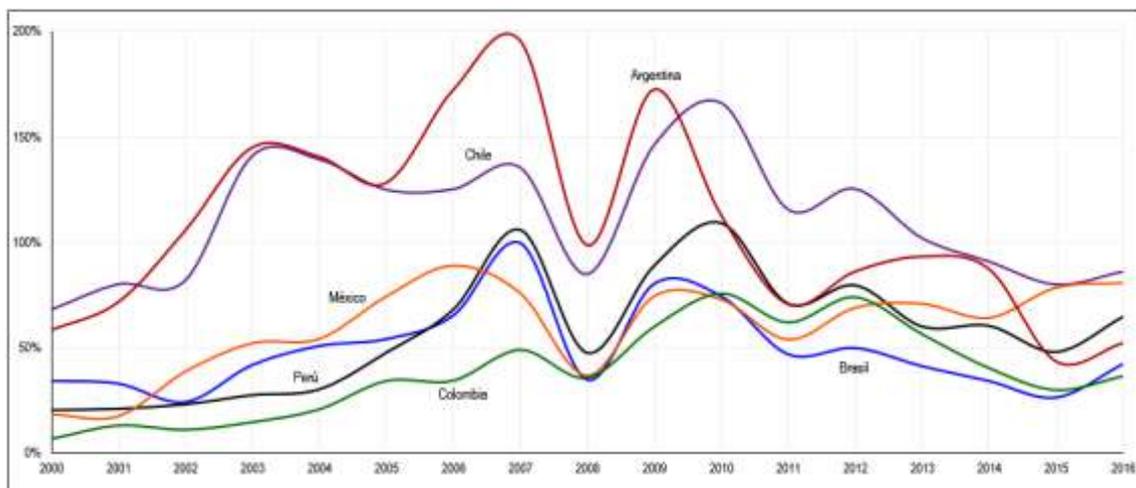


Figura 5.3 Capitalización Relativa Promedio de Latinoamérica 2000-2016

Fuente: Elaboración propia a partir de la Información Estadística de la FIAB y el Banco Mundial

Un indicador complementario de la capitalización relativa del mercado es el número de firmas inscritas en bolsa. En este propósito, al retomar la tabla 5.1 se evidencia que los mercados accionarios más grandes de Latinoamérica son Brasil y Chile, países que en el periodo 2014-2016 tuvieron en promedio 359 y 305 firmas listadas en bolsa, respectivamente. Por el contrario, las plazas accionarias más pequeñas de esta región son Argentina y Colombia, con un promedio de 100 y 72 firmas registradas en bolsa, de forma respectiva, durante el periodo indicado. Adicionalmente, al realizar una comparativa con los mercados internacionales de la muestra seleccionada, se observa que las plazas bursátiles de Bombay y Mumbai de la India suman en promedio 7514 firmas, lo cual lo ubica como el país con más firmas registradas en bolsa, seguido por Estados Unidos, Canadá, España y Japón con 5245, 3580, 3536 y 3508 firmas, respectivamente, en el periodo de tiempo estudiado.

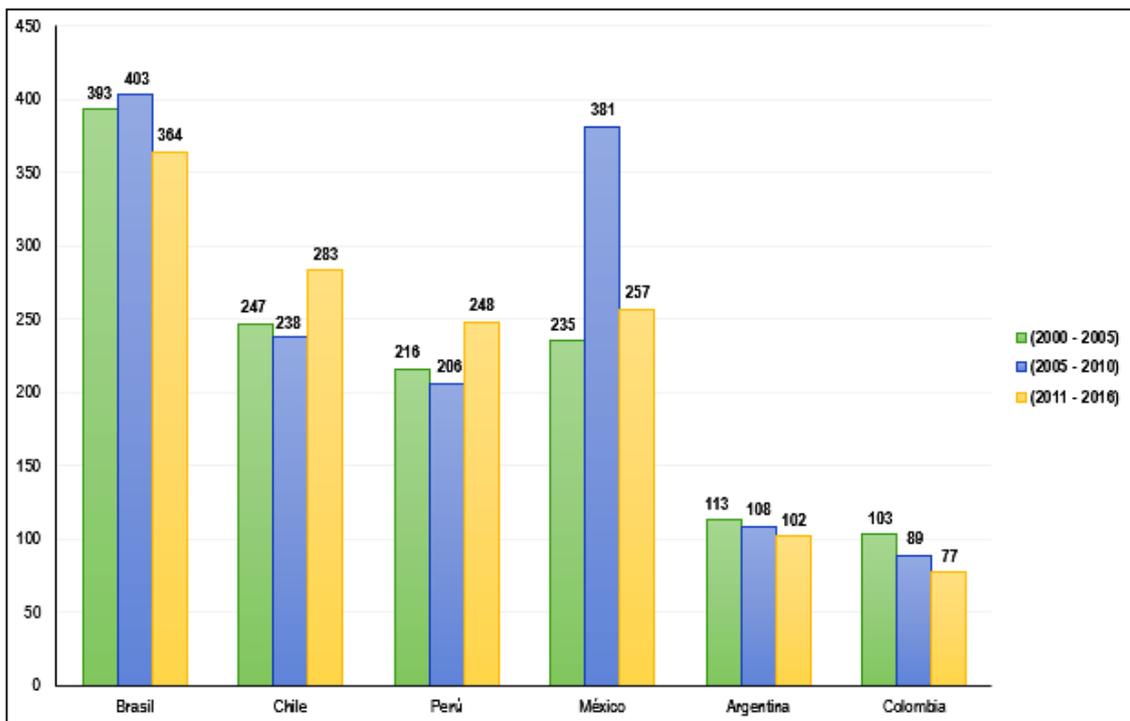


Figura 5.4 Número de Firmas Registradas en Bolsa de Latinoamérica 2000-2016

Fuente: Elaboración propia a partir de la Información Estadística de la FIAB

La figura 5.4 permite contextualizar que durante el periodo 2000-2016, el número de firmas registradas en bolsa de cada país se ha mantenido relativamente constante, a excepción de México, que durante el periodo 2000-2006 y 2007-2014 vio crecer el número de empresas cotizadas, pasando de un promedio de 235 a 381 firmas listadas. No obstante, durante los años 2011-2016 el número de firmas se ubicó en un promedio de 257. Además, el número de firmas cotizadas no se vio afectado en absoluto por la pasada crisis financiera en ninguno de los mercados bursátiles de América Latina analizados.

5.2.2 Liquidez de Mercado

En términos generales la liquidez mide la facilidad para comprar y vender títulos en el mercado. En este orden de ideas, la baja liquidez está asociada con altos costos de transacción y, en consecuencia, con ausencia de mecanismos eficientes de movilidad de capital y dificultad para deshacer las inversiones realizadas. Los costos de transacción son cruciales para la determinación de la eficiencia, la liquidez y la rentabilidad del mercado accionario. Un mercado de acciones líquido es aquel que es capaz de movilizar grandes volúmenes y absorber adecuadamente el flujo de transacciones que esto implica, asegurando que no se produzcan cambios bruscos en los precios cuando se presentan variaciones leves en la oferta y demanda de las acciones que en él se negocian (Arbeláez *et al.*, 2002).

Para este estudio se han construido dos medidas de liquidez, la razón volumen transado sobre el PIB y la tasa de rotación, que corresponde al volumen transado sobre la capitalización del mercado. De nuevo se trata de dos medidas complementarios, es decir, la primera es un indicador amplio de liquidez, y la segunda se relaciona tradicionalmente con bajos costos de transacción en el mercado bursátil (Demirgüç-Kunt y Levine, 1996).

Retomando de nuevo la tabla 5.1 se muestra que el mercado más líquido de Latinoamérica al cierre del año 2016, medido por la razón volumen transado sobre el PIB es el mercado de Brasil (26.74%). No obstante, si tenemos en cuenta los mercados internacionales de comparación, se evidencia que los mercados accionarios de esta región de América son en su mayoría ilíquidos. Llama la atención la liquidez de los mercados accionarios de economías como Hong Kong (China) (420.6%), Sudáfrica (127.3%) y Corea (118.0%) que superan a los mercados de economías desarrolladas como Canadá (76.5%), Australia (68.1%) y Estados Unidos (Nasdaq) (59.6%). Así mismo, la tasa de rotación (*i.e.* volumen transado sobre capitalización del mercado), reafirma no solo que el mercado accionario de Brasil es el más líquido de América Latina, sino también lo expuesto anteriormente, respecto a la iliquidez de los demás mercados bursátiles de Latinoamérica, y la excelente liquidez que presentan algunos mercados emergentes y las economías desarrolladas.

Respecto a la dinámica de los mercados accionarios, la figura 5.5 permite contextualizar la notable evolución de la Bolsa de Valores de Colombia, cuyos montos anuales negociados en acciones, expresados en dólares, crecieron un 6774% entre 2000 y 2012, y un 2299% entre 2000 y 2016. Así mismo, las plazas bursátiles de Brasil, Chile, México y Perú crecieron el 614%, 335%, 170% y 133%, respectivamente, a lo largo del periodo 2000-2016. En contraste, el volumen anual operado en acciones de Argentina decreció un 13% en el periodo de estudio indicado. Por otra parte, en la figura 5.5 se evidencia que el impacto de la crisis financiera de 2008 fue rápidamente superado, observando niveles de crecimiento en la operatoria anual durante casi todo el tiempo de estudio considerado.

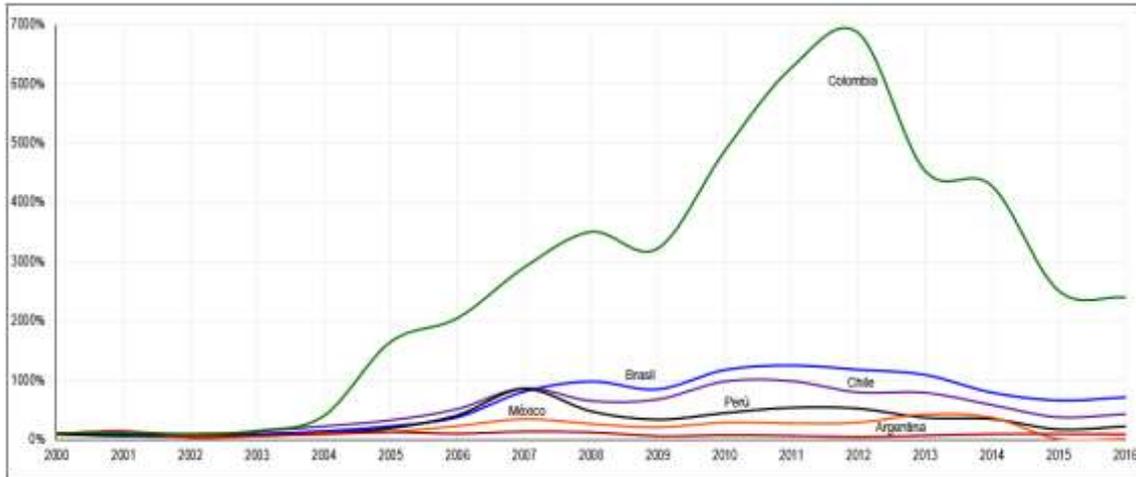


Figura 5.5 Tendencia de la Tasa de Crecimiento Anual del Volumen de Acciones de Latinoamérica 2000-2016

Fuente: Elaboración propia a partir de la Información Estadística de la FIAB

Prosiguiendo el estudio de la liquidez, al evaluar la razón volumen transado sobre el PIB de Latinoamérica entre 2000 y 2016, se observa claramente que el mercado accionario más líquido es el mercado brasileño a lo largo de los 16 años de estudio, seguido por el mercado chileno y mexicano (ver figura 5.6). A finales del año 2007 las plazas accionarias de Brasil y Chile lograron el índice más alto de liquidez, esto es, 42.80% y 28.59%, respectivamente. No obstante, a partir de entonces la liquidez ha registrado una tendencia a disminuir. Adicionalmente, la tasa de rotación (figura 5.7) permite poner en contexto que hasta mediados del año 2001 el mercado más líquido fue el mexicano, seguido en orden descendente por los mercados brasilero y chileno. A partir de ese año, Brasil supera en liquidez a México y logra un aumento progresivo de la misma durante los últimos años de la muestra, logrando el pico más alto de liquidez en el año 2008 (122.19%). Como se puede apreciar, tanto la razón volumen transado sobre el PIB, como la tasa de rotación señalan que el mercado accionario más líquido en América Latina es el brasileño, posición que ha mantenido en gran parte del periodo de tiempo analizado.

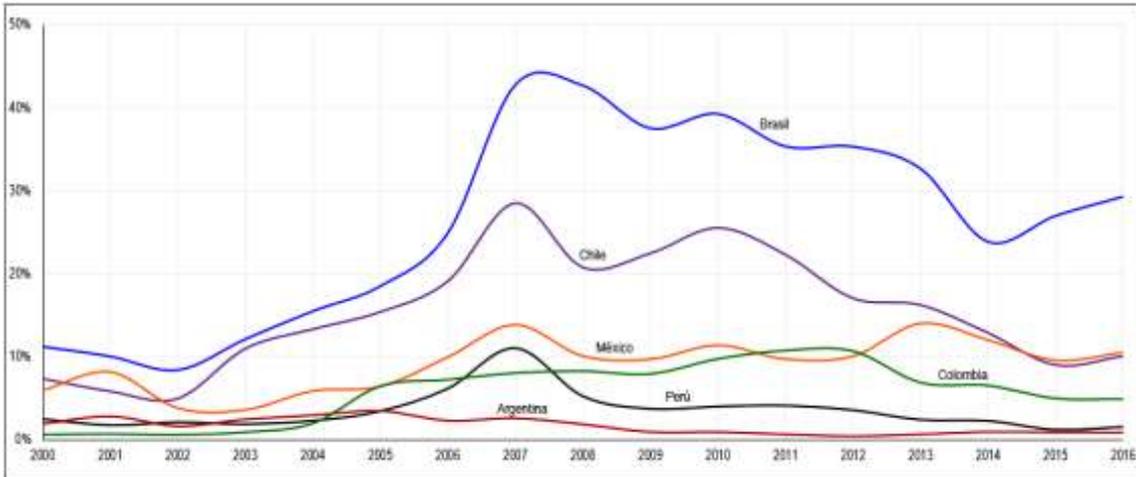


Figura 5.6 Razón Volumen de Negociado en Acciones/PIB de Latinoamérica 2010-2016
Fuente: Elaboración propia a partir de la Información Estadística de la FIAB y Banco Mundial

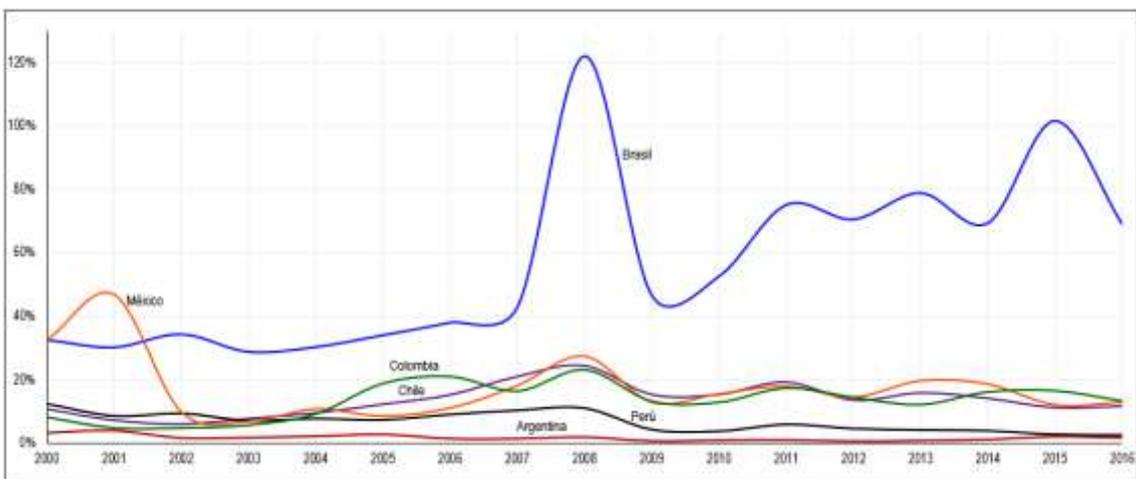


Figura 5.7 Tasa de Rotación de Latinoamérica 2010-2016
Fuente: Elaboración propia a partir de la Información Estadística de la FIAB

5.2.3 Concentración del Mercado

Para este estudio la concentración del mercado accionario se mide a través de dos indicadores: la proporción que representa el monto total de las 10 sociedades domésticas de mayor capitalización contra la capitalización total del mercado y, la proporción que representa el volumen transado por las 10 sociedades domésticas más transadas contra

volumen total transado del mercado. Estos dos indicadores se sitúan entre cero y uno, y entre más se acerque a uno, reflejará mayor grado de concentración.

Retomando la tabla 5.1 se muestra que el mercado más concentrado de Latinoamérica al cierre del año 2016, medido por la razón de las 10 sociedades domésticas de mayor capitalización sobre la capitalización del mercado, es la plaza accionaria de Colombia (72.1%), seguida de Argentina (64.4%) y México (53.9%). Así mismo, si tenemos en cuenta los mercados internacionales de comparación, se evidencia que los mercados accionarios de Latinoamérica son los más concentrados entre la muestra de las 21 economías emergentes y desarrolladas seleccionadas. En esta línea los mercados accionarios menos concentrados son los ubicados en la Bolsa de Nueva York (USA) (14.5%) y en la Bolsa de Tokio (Japón) (16.1%). Así mismo, la razón de las 10 sociedades domésticas más negociadas sobre el volumen transado ratifica no solo que la Bolsa de Valores de Colombia es la más concentrada, sino también lo manifestado anteriormente respecto a la alta concentración de los demás mercados bursátiles de Latinoamérica, en comparación con los mercados internacionales.

Finalmente la tabla 5.2 resume los dos indicadores utilizados en este estudio para medir la concentración de los mercados accionarios de América Latina durante el periodo 2007-2016. En ella se muestra que en promedio la distribución más inequitativa de la oferta de las acciones ha sido en el mercado accionario de Colombia, a lo largo de los 10 años analizados. No obstante, el problema parece no ser inherente únicamente a la Bolsa de Valores de Colombia, sino en general a las bolsas de esta región de América Latina.

Tabla 5.2 Concentración Mercados Accionarios de Latinoamérica 2007-2016

10 sociedades domesticas de mayor capitalización/capitalización del mercado										
País	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016
Argentina	68.16%	74.81%	71.91%	69.91%	70.14%	68.53%	74.11%	72.38%	63.34%	57.41%
Brasil	55.61%	52.46%	54.76%	55.38%	53.13%	52.06%	51.32%	50.81%	51.45%	54.92%
Chile	47.60%	44.16%	48.12%	46.65%	45.03%	43.85%	45.73%	45.11%	45.89%	44.32%
Colombia	73.46%	74.08%	74.48%	79.31%	79.10%	81.82%	77.80%	73.92%	70.97%	71.54%
México	68.31%	69.45%	63.11%	66.06%	65.87%	58.87%	55.65%	52.14%	55.55%	54.07%
Perú	62.89%	62.95%	65.79%	64.30%	61.60%	58.93%	55.82%	57.34%	55.43%	58.45%

10 sociedades domesticas más negociadas/volumen transado										
País	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016
Argentina	68.09%	70.25%	69.83%	70.24%	71.05%	83.42%	80.05%	83.39%	82.02%	63.25%
Brasil	40.56%	49.61%	55.51%	50.34%	47.71%	38.78%	42.85%	58.59%	45.58%	40.19%
Chile	46.37%	59.22%	58.65%	51.55%	50.80%	56.30%	51.08%	49.69%	55.25%	48.38%
Colombia	74.63%	81.23%	77.55%	86.17%	95.57%	88.27%	76.57%	92.50%	86.08%	68.81%
México	59.26%	72.63%	72.45%	66.38%	71.90%	66.91%	58.70%	59.51%	61.89%	58.74%
Perú	52.76%	47.90%	47.96%	56.69%	55.69%	59.74%	58.49%	58.24%	53.74%	65.52%

Fuente: Elaboración propia a partir de la Información Estadística de la FIAB

5.3 Análisis de Volatilidad de los Precios de las Acciones y de los Tipos de Cambio

La volatilidad del mercado accionario se relaciona con el comportamiento de los precios de los activos, específicamente con la frecuencia y la magnitud del movimiento de los mismos. Su efecto sobre el mercado es negativo, en la medida en que las variaciones en el corto plazo no reflejan en forma correcta los valores de equilibrio del activo financiero. En este sentido, la volatilidad del mercado está relacionada con el nivel de riesgo y depende de los sistemas de transacción utilizados, por cuanto éstos tienen como una de sus funciones principales la de acercar los precios de las acciones a los niveles de equilibrio. De esta manera, la volatilidad de los precios y de los rendimientos de los activos transados se asocia con la ineficiencia del mercado, pues es un signo de que el mercado toma mucho tiempo para incorporar en los precios la nueva información

disponible (Arbeláez *et al.*, 2002). Por otro lado, en los mercados globalizados la volatilidad depende tanto de factores relacionados con los mercados domésticos como de la situación internacional.

Una manera simplificada de medir la volatilidad y por tanto de percibir el riesgo del mercado accionario es evaluar la varianza de los rendimientos de los índices bursátiles (*i.e.* su desviación estándar). Este indicador refleja cuán estable es el rendimiento en el tiempo y con qué nivel de frecuencia varía. Otro análisis interesante, y que será el que se desarrollará en este trabajo, consiste en comparar el binomio rentabilidad-riesgo de diferentes índices bursátiles internacionales. Este estudio es más completo que el simple cálculo de la volatilidad, pues incorpora al análisis información relativa a la rentabilidad obtenida.

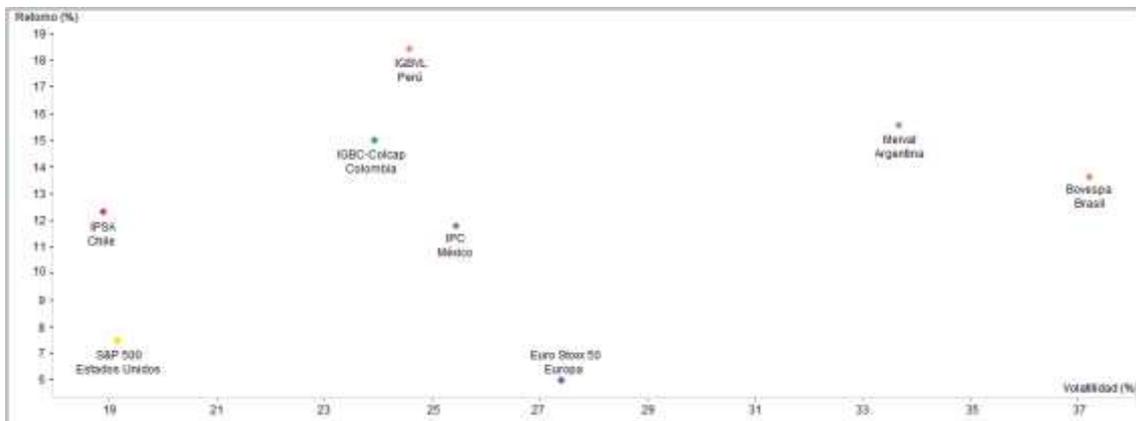


Figura 5.8 Dominancia Índices Bursátiles de Latinoamérica, Estados Unidos y Europa
2002-2016

Fuente: Economatica®

La figura 5.8 presenta el gráfico de dominancia, en el cual se hace una comparativa del riesgo y la rentabilidad de los índices bursátiles de los mercados accionarios de México (IPC), Brasil (BOVESPA), Chile (IPSA), Colombia (IGBC-COLCAP), Perú

(IGBVL), Argentina (MERVAL), Estados Unidos (S&P500) y Europa (EURO STOXX 50) para el periodo de julio de 2002 a diciembre de 2016. Se encuentra que el mercado accionario que ofrece la mayor rentabilidad promedio anual esperada es el peruano (18.44%), con un nivel de riesgo medio en comparación con los demás mercados analizados. El mercado accionario que ofrece menor riesgo es el chileno (18.89%), que además supera en rentabilidad al mercado mexicano, americano y europeo, lo cual lo hace un índice dominante y atractivo para un inversionista que desee minimizar el riesgo frente a un nivel dado de rentabilidad. Por otro lado, resulta conveniente resaltar las elevadas rentabilidades obtenidas en todos los mercados analizados, siempre positivas y cercanos a un promedio anual del 12.52%.

La figura 5.9 contextualiza el comportamiento de la volatilidad de cada uno de los índices seleccionados. Como se puede apreciar, en el caso de América Latina, la coyuntura marcadamente favorable del período 2003-2007, basada en una combinación inusual de bonanza financiera, alza de precios de los productos básicos y un alto nivel elevado de remesas de los trabajadores migrantes (Ocampo, 2009), permitieron que durante este periodo, los mercados accionarios de estas economías presentaran un mejor comportamiento con respecto al mercado europeo y americano. Así mismo, se evidencia que en general la mayoría de los índices presentaron una tendencia bajista durante el año 2008, periodo caracterizado por una alta volatilidad e incertidumbre mundial generada por la crisis financiera internacional que afectó particularmente a los Estados Unidos y a Europa. Sin embargo, durante los años 2009 y 2010 los índices presentaron una tendencia alcista influidos por el optimismo y las expectativas de los inversores con respecto a las altas tasas de intereses de las economías de los países emergentes. A lo largo del año

2011, los índices nuevamente presentaron una tendencia bajista, marcada principalmente por la crisis de deuda que afectó a varios países de la Unión Europea, particularmente a Grecia, Portugal, Italia y España, los temores de una recesión en la zona Euro y la desaceleración del crecimiento de las economías asiáticas, particularmente la de China. Para finales del año 2016, el mercado accionario de Perú presentó el mejor comportamiento a lo largo de los catorce años seleccionados, seguido por los mercados de Argentina y Colombia.



Figura 5.9 Tendencia de la Tasa de Crecimiento Semanal de los Índices Bursátiles de Latinoamérica, Estados Unidos y Europa 2002-2016

Fuente: Economatica®

En la actualidad la selección de carteras está enfrentando un ambiente de inversión dinámico en el que predomina no solo la oferta de productos financieros más sofisticados, sino también la posibilidad de invertir más allá del mercado doméstico. Los mercados accionarios de las economías emergentes se han vuelto cada vez más atractivos para los inversionistas de los países desarrollados, especialmente durante las últimas tres décadas. Incluir los mercados emergentes reduce el riesgo de la cartera debido a las correlaciones aparentemente bajas entre las económicas emergentes y desarrolladas (Durai y Bhaduri,

2011; Grubel, 1968; Lessard, 1974; Levy y Sarnat, 1970). No obstante, la inversión internacional de cartera trae consigo una fuente adicional de riesgo a causa de las fluctuaciones propias de la moneda. La interacción entre el riesgo de tipo de cambio y los precios de las acciones es fundamental cuando se evalúa el riesgo de invertir en los mercados emergentes. Los beneficios de la diversificación internacional se reducen considerablemente durante períodos de volatilidad de los tipos de cambio. Por lo tanto, los inversionistas internacionales requieren una compensación adecuada para soportar el riesgo de tipo de cambio que se espera en los mercados.

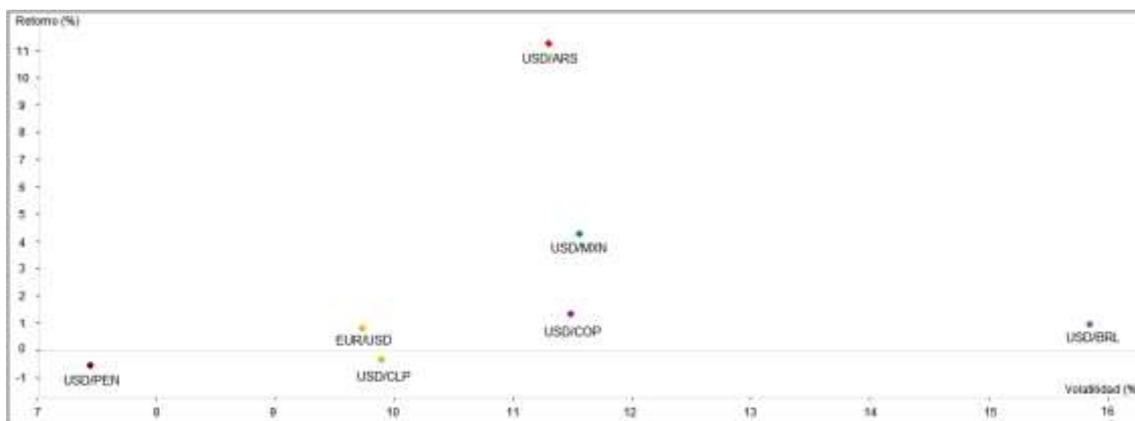


Figura 5.10 Dominancia Tipos de Cambio de Latinoamérica, Estados Unidos y Europa 2002-2016

Fuente: Economática®

Después de las consideraciones anteriores, la figura 5.10 presenta el gráfico de dominancia de los tipos de cambio del Peso mexicano (USD/MXN), Real brasileño (USD/BRL), Peso chileno (USD/CLP), Peso colombiano (USD/COP), Nuevo Sol peruano (USD/PEN), Peso argentino (USD/ARS), y Euro (EUR/USD) durante el periodo de Enero de 2002 a Diciembre de 2016 frente al Dólar estadounidense. Se encuentra que el Peso argentino es la moneda que ha presentado el nivel mal alto de depreciación, con un 11.27% promedio anual, por consiguiente es la moneda menos rentable de la muestra

seleccionada, con un nivel de volatilidad bajo en comparación con los demás tipos de cambio. Este mismo comportamiento lo presentó el Peso mexicano, el cual durante los 14 años considerados, se depreció en promedio un 4.26% anual. En contraste, el Nuevo Sol peruano y el Peso chileno son las moneda más apreciadas, esto es, con un promedio semanal de 0.56% y 0.33%, respectivamente, lo que las convierte en las divisas más rentables de las 7 monedas analizadas.



Figura 5.11 Tendencia de los Tipos de Cambio de Latinoamérica, Estados Unidos y Europa 2002-2016

Fuente: Economatica®

La figura 5.11 presenta el gráfico de crecimiento (base 100) del Euro y las principales monedas de América Latina respecto al Dólar estadounidense. Se observa que el Peso mexicano y el Euro se depreciaron con respecto al Dólar estadounidense a lo largo de los 14 años analizados. Además, es interesante ver el comportamiento reflejado por el Peso argentino, el cual a partir del año 2008 ha presentado una depreciación exponencial, como consecuencia de las políticas financieras que desarrolló el gobierno de la presidenta Cristina Kirchner para mitigar los efectos de la crisis financiera internacional del año 2007-2011. Por otra parte, al analizar el comportamiento de los demás tipos de cambio se

observa que el Peso colombiano, el Peso chileno, el Nuevo Sol peruano y el Real brasileño se apreciaron durante una gran parte del periodo 2002-2016 a causa del incremento de las exportaciones de materias primas, el creciente flujo de recursos de inversión extranjera directa (IED), el aumento de las remesas del extranjero, entre otros. No obstante, durante los dos últimos años, esto es 2015-2016, el Peso colombiano y el Real brasileño han presentado una tendencia a depreciarse con respecto al Dólar americano.

Nótese que las figuras 5.9 y 5.11 ponen de manifiesto que en algunos momentos, como durante el año 2008, los mercados de los diferentes países se mueven en la misma dirección. Por otro lado, la fuerza de las tendencias y la volatilidad, tal y como se ha descrito anteriormente, es mucho más acusada en los mercados latinoamericanos que el de Estados Unidos o el de Europa, y esto es así a lo largo de todo el periodo analizado. Para comprobar hasta qué punto los mercados se mueven de forma acompasada y analizar el grado de integración de los mismos, es necesario realizar un análisis de correlación.

5.4 Análisis de Correlación de los Precios de las Acciones y de los Tipos de Cambio

La creciente integración financiera internacional requiere ser analizada, ya que en la medida en que exista integración financiera de los mercados accionarios, los retornos de los países se vuelven más correlacionados, es decir, tienden a reaccionar en conjunto a unos mismos factores micro y macroeconómicos, lo que va a disminuir los beneficios de la diversificación de carteras conformadas por activos ubicados en dichos mercados. La tabla 5.3 muestra la matriz de correlaciones de los 8 índices bursátiles seleccionados durante el periodo 2002-2016. Como se puede observar, no hay correlaciones negativas, pero tampoco hay relaciones perfectamente positivas entre los diferentes índices. La más

alta es 0.8501 entre Estados Unidos y Europa, y la menos positiva está entre Colombia y Argentina con 0.4245. Lo anterior, lleva a concluir que durante el periodo indicado, los mercados bursátiles con un grado de correlación alta (mayor integración financiera) fueron el americano y europeo (0.8501), seguidos por el mexicano y el americano (0.7470), y por último el europeo y el mexicano (0.7314). Adicionalmente, las economías con un grado de covariación moderado fueron el chileno y el europeo (0.4712), el americano y el colombiano (0.4459) y el argentino y el colombiano (0.4245), lo cual sustenta el hecho de que a pesar de que estos mercados muestran covariaciones positivas, la correlación moderada entre ellos, respecto a los demás mercados seleccionados, permite hacer una diversificación del riesgo, aunque ésta no sea la más eficiente.

Tabla 5.3 Matriz de Correlación de los Índices Bursátiles de Latinoamérica, Estados Unidos y Europa 2002-2016

	País	Euro Stoxx 50	IGBC-COLCAP	Bovespa	IGBVL	IPC	IPSA	Merval	S&P 500
Euro Stoxx 50	EUR	1.0000							
IGBC-COLCAP	CO	0.5047	1.0000						
Bovespa	BR	0.6133	0.6028	1.0000					
IGBVL	PE	0.4712	0.4804	0.5772	1.0000				
IPC	MX	0.7314	0.6046	0.6802	0.5887	1.0000			
IPSA	CL	0.5557	0.5395	0.6905	0.5360	0.6376	1.0000		
Merval	AR	0.5575	0.4245	0.5536	0.4873	0.5875	0.5115	1.0000	
S&P 500	US	0.8501	0.4459	0.6384	0.4875	0.7470	0.5486	0.4838	1.0000

Fuente: Elaboración propia a partir de la Información de Economatica®

Prosiguiendo el análisis, la tabla 5.4 presenta la matriz de correlaciones de las principales monedas latinoamericanas y el Euro en función del Dólar estadounidense durante el periodo de 2002-2016. En comparación al análisis de correlación de los índices bursátiles, se evidencia que algunos pares de monedas sí presentan correlaciones negativas. Los tipos de cambio que registran el mayor grado de correlación son el

USD/BRL y el USD/COP (0.5745), USD/CLP y USD/MXN (0.5675); y los de menor grado de covariación son USD/COP y USD/ARS (0.1253), USD/CLP y USD/ARS (0.1049), lo que indica que durante los 14 años analizados estos dos últimos pares de tipos de cambio presentaron un comportamiento más bien dispar. En contraste, los tipos de cambio que experimentaron una correlación negativa son USD/CLP y EUR/USD (-0.4678), USD/MXN y EUR/USD (-0.4515), y, USD/COP y EUR/USD (-0.3520). Llama la atención que todos los tipos de cambio de América Latina registraron una correlación negativa con el tipo de cambio EUR/USD, lo cual evidencia que estos tipos de cambio tienden a moverse en sentidos opuestos en el largo plazo.

Tabla 5.4 Matriz de Correlación de los Tipos de Cambio de Latinoamérica, Estados Unidos y Europa 2002-2016

	USD/ARS	USD/MXN	USD/COP	USD/BRL	EUR/USD	USD/CLP	USD/PEN
USD/ARS	1.0000						
USD/MXN	0.2129	1.0000					
USD/COP	0.1253	0.5278	1.0000				
USD/BRL	0.1734	0.5337	0.5745	1.0000			
EUR/USD	-0.0225	-0.4515	-0.3520	-0.3363	1.0000		
USD/CLP	0.1049	0.5675	0.4805	0.4837	-0.4678	1.0000	
USD/PEN	0.1652	0.4410	0.5215	0.3438	-0.3113	0.3955	1.0000

Fuente: Elaboración propia a partir de la Información de Economatica®

5.5 Impacto del Riesgo cambiario sobre la Rentabilidad de Carteras de Inversión en los Índices Bursátiles Latinoamericanos para un Inversionista de Estados Unidos y 5 inversionistas de América Latina

Invertir a nivel internacional ofrece una mayor diversificación que hacerlo a nivel nacional. Sin embargo, es importante analizar si la inversión en activos internacionales, y las fluctuaciones de sus propias monedas, permitirá la posibilidad de estructurar carteras

diversificadas que permitan no solo maximizar el retorno esperado, sino también minimizar el riesgo. Por lo anterior, para analizar el impacto del riesgo cambiario sobre la rentabilidad de una cartera que invierte en los índices bursátiles latinoamericanos, se trabaja bajo el supuesto de que inversores de Estados Unidos, Argentina, Brasil, Chile, Colombia, México y Perú, el 01 de Enero 2002 disponía de 100.000 USD los cuales los convierte en moneda local y los invierten de forma equiponderada en los índices accionarios de México (IPC), Brasil (BOVESPA), Chile (IPSA), Colombia (IGBC-COLCAP), Perú (IGBVL) y Argentina (MERVAL) durante un periodo de 14 años.

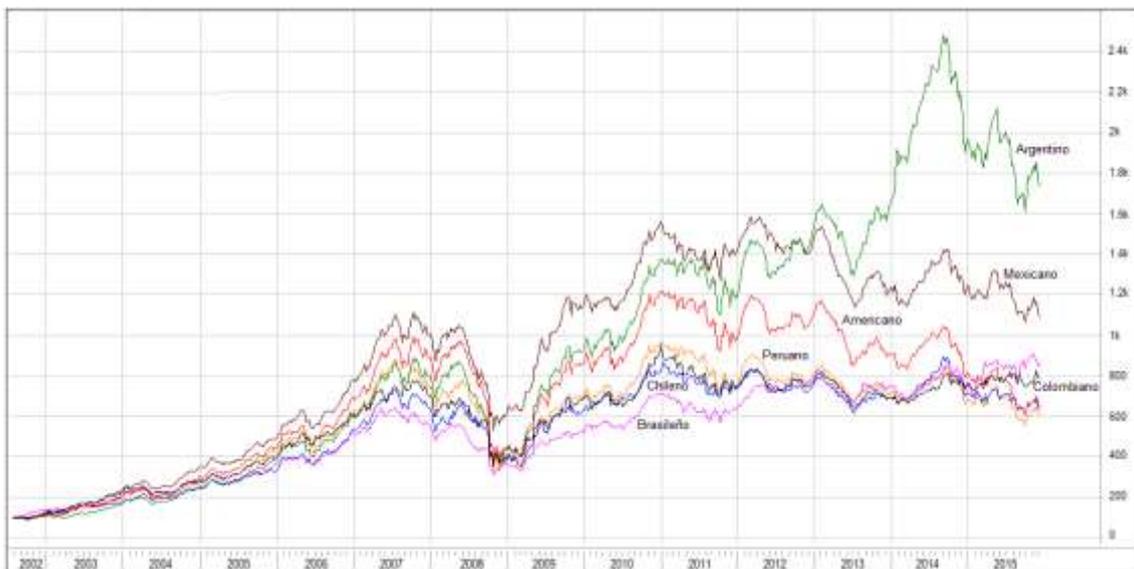


Figura 5.12 Comportamiento de la Rentabilidad Nominal de una Cartera que Invierte en los Índices Accionarios de Latinoamérica para un Inversor de Estados Unidos, Argentina, Brasil, Chile, Colombia, México y Perú 2002-2015

Fuente: Economatica®

La figura 5.12 contextualiza el comportamiento de la rentabilidad nominal de las carteras enunciados en el párrafo anterior. En ella se observaba que hasta el año 2012 el inversionista mexicano presentó el mejor desempeño en cuanto a la rentabilidad nominal de la inversión, seguido en orden descendente por el argentino, americano y peruano. A

partir de ese año, el inversionista argentino supera en rentabilidad al inversionista mexicano y logra finalizar el año 2015 con una rentabilidad cercana a 1800% durante los 14 años de la inversión. En contraste, se percibe que el inversionista brasileño presenta el menor desempeño de los rendimientos nominales en la gran mayoría de los años analizados.

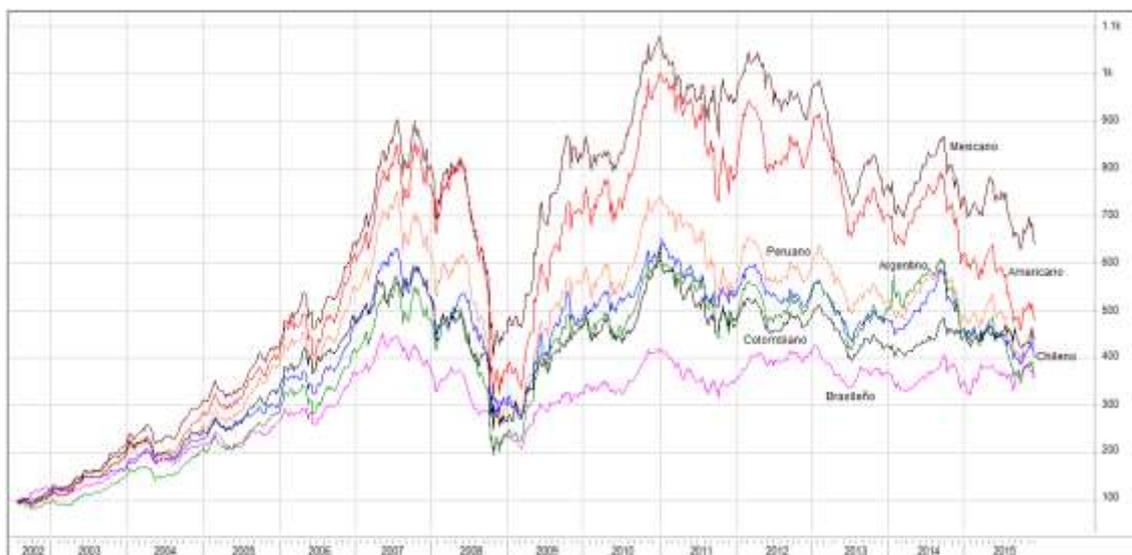


Figura 5.13 Comportamiento de la Rentabilidad Real de una Cartera que Invierte en los Índices Accionarios de Latinoamérica para un Inversor de Estados Unidos, Argentina, Brasil, Chile, Colombia, México y Perú 2002-2015

Fuente: Economática®

Por su parte, la figura 5.13 permite analizar la evolución de la rentabilidad real de las carteras indicadas. En comparación al análisis previamente realizado, se evidencia que la rentabilidad real del inversionista argentino, pasa a ser una de las más bajas de la muestra. Esto se debe a que durante el periodo 2002-2015 la inflación de país austral se ubicó en un promedio anual del 20.80%, causando un aumento de incertidumbre, lo cual afecta negativamente la rentabilidad esperada de la inversión y por lo tanto el crecimiento en el largo plazo. Adicionalmente, la figura 5.13 permite inferir que el inversionista que

presentó el mejor desempeño en cuanto a la rentabilidad en términos de la cantidad de bienes y servicios que se pueden adquirir (poder adquisitivo), fue el mexicano, seguido del americano y el peruano. Igualmente, se evidencia, que desde el punto de vista de la evolución de la rentabilidad nominal y real, el inversionista brasileño presenta el más bajo desempeño a lo largo de los 14 años considerados.

5.6 Análisis del Riesgo Soberano

El riesgo país se refiere a los riesgos económicos, políticos y sociales que los inversionistas extranjeros afrontan al realizar una inversión en un determinado país (Gullu y Kilic, 2017). Una de las medidas más importantes del riesgo de inversión en las economías emergentes es el *spread* de riesgo soberano, denominado EMBI (*Emerging Market Bond Index*). El EMBI mide el diferencial de los retornos de la deuda pública denominada en dólares estadounidenses de un país emergente con respecto a la rentabilidad de la deuda pública de Estados Unidos²⁶. Dado que el precio de los activos locales está estrechamente relacionado con el precio de los bonos soberanos, el EMBI es la medida que los inversionistas extranjeros analizan al determinar el desempeño de las economías emergentes y por ende las oportunidades de inversión en estos países.

La figura 5.14 presenta la tendencia del EMBIG (*Emerging Markets Bond Index Global*) de Argentina, Brasil, Chile, Colombia, México y Perú, durante el periodo 2000-2016. Como se puede apreciar, Argentina es el país que ha presentado la mayor

²⁶ El diferencial del EMBI fue introducido por J.P. Morgan en 1992 incluye los Bonos Brady denominados en dólares y otros bonos soberanos reestructurados similares. No obstante, el EMBI fue transformado en EMBI+ (*Emerging Markets Bond Index Plus*) y EMBIG (*Emerging Markets Bond Index Global*) para incluir préstamos, eurobonos, préstamos negociables, e instrumentos denominados en moneda local emitidos por soberanos o entidades cuasi soberanas (J.P.Morgan, 1995, 1999). Este estudio se enfoca al análisis del EMBIG de los mercados emergentes de Latinoamérica.

volatilidad de la prima de riesgo, con un máximo de 6487 puntos básicos en Julio de 2002 (ver tabla 5.5) como consecuencia de la crisis que se produjo en este país durante los años 2001-2002, la cual ocasionó que al finalizar el 2002 el país tuviera una inflación de 30.55%, una caída del PIB de -10.89% y una depreciación del Peso argentino de 137.6%. En segundo lugar se encuentra Brasil con un máximo de 2057 puntos básicos en octubre de 2002, a causa del riesgo de *default* por la elevada exposición financiera en dólares estadounidenses a mediados de 2002. Colombia aparece en tercer lugar con una prima de riesgo máxima de 986 puntos básicos en septiembre de 2002, producto del déficit fiscal estructural y la situación de inseguridad que enfrentaba el país en este periodo.

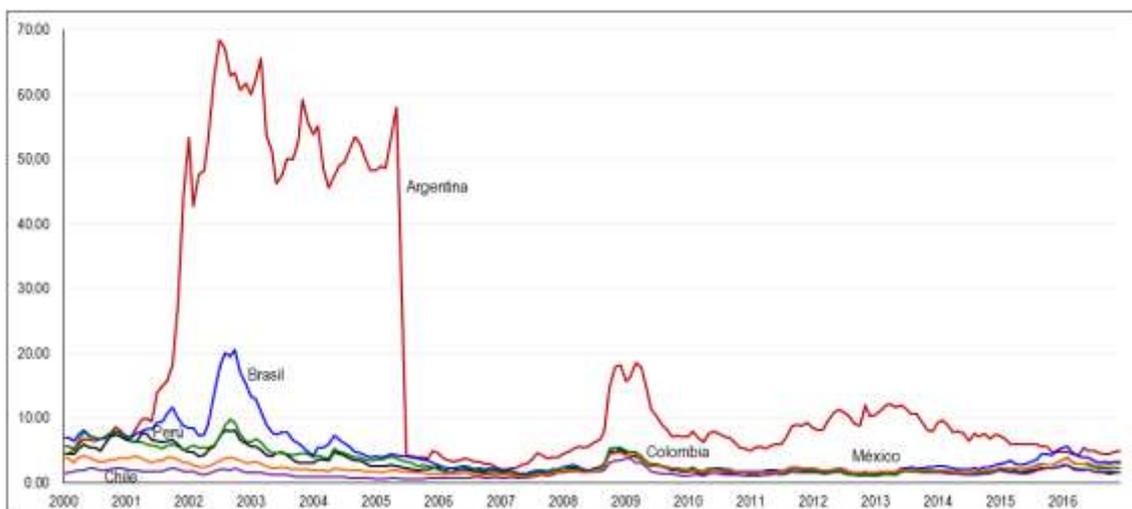


Figura 5.14 Tendencia del EMBIG de Latinoamérica 2000-2016

Fuente: Elaboración propia a partir de la Información Estadística del Banco Central de Reserva del Perú

De manera semejante, la figura 5.14 y la tabla 5.5 permiten contextualizar que el país que ha presentado la menor prima de riesgo durante los 16 años de estudio ha sido Chile, el cual ha exhibido un promedio del EMBIG de 150 puntos básicos, seguido por México y Perú, con un promedio de 233 y 294 puntos básicos, respectivamente. No

obstante, en los dos últimos años de estudio, esto es, 2015-2016, el EMBIG de los países de América Latina seleccionados ha presentado una tendencia al alza.

Tabla 5.5 EMBIG de Latinoamérica 2000-2016

País	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008
Argentina	668	1,560	5,774	5,456	5,047	2,587	343	320	860
Brasil	727	888	1,376	839	538	394	233	180	301
Chile	197	192	177	126	83	65	80	101	213
Colombia	668	595	685	508	417	323	194	161	305
México	367	364	317	246	193	167	136	126	255
Perú	568	651	611	429	364	239	186	138	273

País	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016
Argentina	1,198	689	686	988	1,067	787	590	476
Brasil	306	202	195	183	209	235	361	395
Chile	218	129	139	151	154	143	186	201
Colombia	329	189	168	148	158	167	250	279
México	301	187	186	188	189	183	251	304
Perú	292	172	191	157	159	162	201	200

País	Min	Max	Promedio	Volatilidad ¹
Argentina	203	6,847	1,711	1,922
Brasil	143	2,057	445	356
Chile	55	383	150	59
Colombia	108	986	326	193
México	98	463	233	85
Perú	104	816	294	179

¹ Medida como la desviación estándar mensual.

Fuente: Elaboración propia a partir de la Información Estadística del Banco Central de Reserva del Perú

Por otra parte, los co-movimientos en las primas de riesgo de Argentina, Brasil, Chile, Colombia, México y Perú se confirman cuando se analizan las correlaciones entre estas variables²⁷. La tabla 5.6 permite analizar la matriz de correlación para el periodo 2000-2016. Como se ilustra, los países que cuentan con un grado de correlación fuerte

²⁷ Los términos co-movimiento y correlación están enlazados. El primero en este caso se refieren, a que las primas de riesgo de los países latinoamericanos tienen tendencia a moverse en la misma dirección, mientras que el segundo cuantifica el grado de interrelación (positiva, negativa o nula) entre el EMBIG de los países. De esta manera, una correlación positiva es consistente con un co-movimiento de las variables macroeconómicas que impactan la prima de riesgo de los bonos de un país emergente (Cadena, 2004).

son Colombia y Perú (0.9625), Brasil y Colombia (0.8877), Brasil y Perú (0.8828), lo cual sustenta el hecho de que las primas de riesgo de estos países de América Latina tienden a moverse de manera similar, lo que podría conllevar co-movimientos fuertes en periodos de crisis (Cadena, 2004). Por su parte, los países con un grado de correlación débil son Argentina y México (0.1884), Brasil y Chile (0.2910), y, Chile y Colombia (0.3991). Es de especial interés el caso del EMBIG de Argentina y Chile, cuyas correlaciones han sido negativas (-0.1128) en el tiempo que se ha tomado para realizar el análisis.

Tabla 5.6 Matriz de Correlación de los EMBIG de Latinoamérica 2000-2016

	Argentina	Brasil	Chile	Colombia	México	Perú
Argentina	1.0000					
Brasil	0.6756	1.0000				
Chile	-0.1128	0.2910	1.0000			
Colombia	0.5709	0.8877	0.3991	1.0000		
México	0.1884	0.6421	0.8144	0.7783	1.0000	
Perú	0.5162	0.8828	0.4142	0.9625	0.7759	1.0000

Fuente: Elaboración propia a partir de la Información Estadística del Banco Central de Reserva del Perú

Prosiguiendo el estudio del riesgo soberano, un importante aspecto que complementa el análisis del EMBIG es la calificación crediticia emitida por las principales agencias internacionales de calificación de riesgo: *Fitch Rating*, *Moody's Corporation* y *Standard & Poor's*. La calificación crediticia soberana proporciona una evaluación de la probabilidad de incumplimiento de la deuda de un país y asigna a éste un grado de inversión o un grado especulativo. Por lo tanto, es un indicador importante en el proceso de decisión de inversión activa en la formación de carteras internacionales debido a que los cambios en las calificaciones de rebaja (mejoramiento) de la deuda

soberana por debajo (por encima) del grado de inversión, aceleran el *rally* o la recesión de los mercados de capital (Sensoy, Eraslan, y Erturk, 2016).

Tabla 5.7 Calificación Deuda Soberana Largo Plazo Moneda Extranjera de Latinoamérica 2000-2016

País	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008
Argentina	BB-	SD ↓	SD	SD	SD	B- ↑	B+ ↑	B+	B- ↓
Brasil	B+	BB- ↑	B+ ↓	B+	BB- ↑	BB-	BB ↑	BB+ ↑	BBB- ↑
Chile	A-	A-	A-	A-	A	A	A	A+ ↑	A+
Colombia	BB	BB	BB	BB	BB	BB	BB	BB+ ↑	BB+
México	BB+	BB+	BBB- ↑	BBB-	BBB-	BBB ↑	BBB	BBB+ ↑	BBB+
Perú	BB-	BB-	BB-	BB-	BB ↑	BB	BB+ ↑	BB+	BBB- ↑

País	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016
Argentina	B-	B ↑	B	B- ↓	CCC+ ↓	SD ↓	SD	B- ↑
Brasil	BBB-	BBB-	BBB ↑	BBB	BBB- ↓	BBB-	BB+ ↓	BB ↓
Chile	A+	A+	A+	AA- ↑	AA-	AA-	AA-	A+ ↓
Colombia	BB+	BB+	BBB- ↑	BBB-	BBB ↑	BBB	BBB	BBB
México	BBB ↓	BBB	BBB	BBB	BBB+ ↑	BBB+	BBB+	BBB+
Perú	BBB-	BBB-	BBB ↑	BBB	BBB+ ↑	BBB+	BBB+	BBB+

Fuente: Cálculos propios con base en Información Estadística de *Standard & Poor's*

La tabla 5.7 presenta en resumen la calificación de la deuda soberana de largo plazo denominadas en moneda extranjera de Latinoamérica para el periodo 2000-2016 emitidas por *Standard & Poor's*. En ella se muestra que en el caso de Argentina y Brasil se ha reducido la calificación en 5 y 4 ocasiones, respectivamente, a lo largo de los 16 años analizados. En contraste, Perú es el único país que no ha visto reducir su calificación crediticia soberana durante el periodo de tiempo seleccionado. Las únicas economías emergentes latinoamericanas que a diciembre de 2016 poseían el grado de inversión eran Chile, único país que ha ostentado el *rating* en grado de inversión durante 2000-2016; México, Perú y Colombia, economías que volvieron al club de países con grado de inversión en los años 2002, 2008 y 2011, respectivamente. Por su parte, los países que diciembre de 2016 no estaban en esta categoría de clasificación eran Brasil, país que la

obtuvo de nuevo en 2008, pero la perdió en 2015, y Argentina, único país que no ha sido parte de los países con grado de inversión en los 16 años de estudio, pues siempre ha estado en el grupo de economías de grado especulativo.

5.6.1 El Problema de Selección de Carteras en Latinoamérica

Una vez realizada la caracterización de los mercados de capitales de Latinoamérica se evidencia que en su gran mayoría estos mercados son muy pequeños, concentrados e ilíquidos. Frente a la situación descrita, F. García, González-Bueno y Oliver (2015) analizaron la aplicación del modelo de media varianza en el mercado accionario colombiano y subrayaron las dificultades que enfrenta un inversionista al implementar la teoría de selección de carteras. Los autores concluyeron que para resolver los problemas de baja liquidez y la falta de alternativas de inversión en la bolsa de valores colombiana, los inversionistas del país deben tener en cuenta otros mercados en el exterior y ampliar de esta forma la gama de compañías para incluirlas en sus carteras.

El Mercado Integrado Latinoamericano MILA es el resultado del acuerdo firmado entre la Bolsa de Comercio de Santiago, la Bolsa de Valores de Colombia y la Bolsa de Valores de Lima, las cuales, en el año 2009 iniciaron el proceso de creación de un mercado regional para la negociación de títulos de renta variable de los tres países. El 30 de mayo de 2011 el mercado MILA entró en operación y en junio de 2014 la Bolsa Mexicana de Valores se incorporó, realizando la primera transacción con este mercado el 02 de diciembre de 2014.

A diciembre de 2016, el Mercado MILA se ubicó como el primer mercado por número de compañías listadas en bolsa y como el segundo mercado en tamaño de capitalización bursátil y volumen de negociación en América Latina. Entre los beneficios que esta integración ofrece a los inversionistas de la región se encuentran el acceso a mayores alternativas de instrumentos de inversión y, por ende, mayores posibilidades de diversificación al poder invertir en nuevas compañías, sectores y países. Dadas las condiciones que anteceden, esta tesis doctoral asumirá la toma de decisiones de inversión en el Mercado Integrado Latinoamericano (MILA), aplicando un modelo credibilístico multiobjetivo de media-semivarianza-liquidez que pretenda maximizar el rendimiento y la liquidez esperada, al tiempo que se minimiza el riesgo de la inversión.

5.7 Conclusiones

A partir de la década de los noventa, América Latina se vio embarcada en un proceso de globalización y liberalización financiera que implicó un mayor dinamismo en sus mercados de capitales. No obstante, el análisis de la evolución de los mercados accionarios de Latinoamérica durante el periodo 2000-2016 muestra que las expectativas generadas por las reformas emprendidas por los gobiernos de estos países para incentivar el desarrollo doméstico de sus mercados de capitales no se han cumplido como se esperaba.

Un análisis del tamaño del mercado evidencia que desde el punto de vista del índice de capitalización relativa, los mercados accionarios de Chile y México son los más grandes de Latinoamérica para el periodo 2014-2016. No obstante, ninguno de los países de Latinoamérica supera el promedio presentado por determinadas economías

desarrolladas y algunas economías emergentes. Así mismo, el análisis del número de firmas registradas en bolsa señala que para el periodo 2014-2016 los mercados accionarios de Latinoamérica más grandes son Brasil y Chile y los más pequeños son Argentina y Colombia. Empero, a pesar de que este indicador se ha mantenido constante en el periodo comprendido entre los años 2000 y 2016 es eclipsado el por tamaño de mercado de algunas economías emergentes de Asia cuando se realiza una comparativa con el promedio presentado en estos países entre 2014 y 2016.

El examen de la liquidez reveló que el mercado más líquido de Latinoamérica es el brasileño, posición que ha mantenido a lo largo de los 16 años considerados. Sin embargo, los mercados accionarios de esta región de América son ilíquidos si se comparan con la razón volumen transado sobre el PIB y la tasa de rotación presentada en los demás de la muestra seleccionada. Por su parte, el estudio de la concentración del mercado mostró que en promedio la distribución más inequitativa de la oferta de las acciones ha sido en la plaza accionaria de Colombia a lo largo del periodo 2007-2016.

En el orden de las ideas anteriores, el análisis de la volatilidad para el periodo 2002-2016 medido por el binomio rentabilidad-riesgo reveló que el mercado accionario de Perú ofrece la mayor rentabilidad esperada. Por su parte, el mercado accionario que ofrece menor riesgo es el chileno, país que supera en rentabilidad al mercado mexicano, americano y europeo. En cuanto a la volatilidad de los tipos de cambio el estudio mostró que durante el periodo considerado el Peso Argentino y el Peso mexicano fueron las monedas más depreciadas y el Nuevo Sol peruano y el Peso chileno las monedas más apreciadas.

El coeficiente de correlación reveló que entre los años 2002 y 2016, los mercados bursátiles que presentaron el mayor grado de integración financiera fueron en su orden, el americano y europeo, el mexicano y americano y por último el europeo y mexicano. Respecto a la correlación de los tipos de cambio, el estudio evidenció que los tipos de cambio que registran el mayor grado de correlación fueron el USD/BRL y el USD/COP, el USD/CLP y USD/MXN. No obstante, llama la atención que todos los tipos de cambio de América Latina registraron una correlación negativa con el tipo de cambio EUR/USD lo cual evidencia que estos tipos de cambio tienden a moverse en sentidos opuestos en el largo plazo.

Al analizar el impacto del riesgo cambiario sobre la rentabilidad de carteras globales de inversión en los índices bursátiles latinoamericanos, se evidencia que a lo largo del periodo analizado, esto es, del 02 de enero de 2002 al 31 de diciembre de 2015, el inversionista mexicano presenta el mejor desempeño en cuanto a los rendimientos nominales de las carteras hasta el año 2012, periodo a partir del cual es superado por el inversionista argentino. No obstante, al examinar la evolución de las carteras desde el punto de vista de la rentabilidad real, se evidencia que el inversionista argentino pasó a ser uno de los de más bajo desempeño debido a los altos niveles de inflación que se presentaron en dicho país en el tiempo considerado. Con base a los razonamientos que se han planteado, se evidencia que el inversionista que desee aprovechar los beneficios de la diversificación internacional debe examinar si la inversión en activos globales y las fluctuaciones de sus propias monedas le proporcionará la posibilidad de estructurar carteras con activos que cumplan el rol de refugios de valor y el rol de instrumentos de cobertura.

Finalmente, el estudio del riesgo soberano durante los años 2000-2016 permitió apreciar que Argentina es el país que ha presentado el mayor promedio y volatilidad en la prima de riesgo, medida a través del *Emerging Markets Bond Index Global* (EMBIG). En contraste, el promedio más bajo del riesgo soberano lo presentó Chile, el cual es ratificado con el análisis de la calificación crediticia emitida por la Agencia Calificadora de Riesgo *Standard & Poor's*, entidad que ha mantenido el rating de grado de inversión a Chile durante el periodo en consideración. A Diciembre de 2016, México, Perú y Colombia, también estaba incluidas en este selectivo grupo. No obstante, para el mismo periodo, Brasil y Argentina estaban incluidas en el grupo de grado especulativo.

Capítulo 6

6 MODELO CREDIBILÍSTICO MULTI-OBJETIVO DE MEDIA-SEMIVARIANZA-LIQUIDEZ PARA LA SELECCIÓN DE CARTERAS

6.1 Introducción

Desde el punto de vista financiero, una cartera es la combinación de más de una acción, bono, *commodity*, inversión en propiedad raíz, equivalentes de efectivo u otro activo tenido por un inversionista individual o institucional, con el propósito de reducir el riesgo vía diversificación (Downes, 2014). A partir de la anterior definición, es claro que en los mercados financieros existe una gran variedad de clases de activos e instrumentos financieros en los cuales un inversionista puede invertir su riqueza. No obstante, estos activos e instrumentos financieros tienen diferentes niveles de riesgo e, igualmente, los inversionistas tienen su propia actitud frente al riesgo. Dada una amplia gama de activos

financieros con diferentes características, la esencia del problema de selección de carteras es encontrar una combinación de activos que cumplan las expectativas de rentabilidad y riesgo de un inversionista.

En concordancia con la revisión de la literatura que se encuentra en los capítulos 2, 3 y 4, a continuación se plantea un modelo credibilístico multiobjetivo de media-semivarianza-liquidez para generar carteras eficientes que incorporen las preferencias del inversor y las condiciones del mercado. La meta de este capítulo es formular el modelo matemático de selección de carteras que permita aplicar y resolver por primera vez la toma de decisiones de inversión en el Mercado Integrado Latinoamericano (MILA), que integra los mercados bursátiles de Chile, Colombia, México y Perú²⁸.

El resto del capítulo está organizado de la siguiente manera: La sección 6.2 realiza una descripción del problema e introduce la notación y las variables que se utilizarán para formular el modelo matemático. La sección 6.3 y 6.4 presentan las funciones objetivo y las restricciones del problema de optimización multiobjetivo. Por último, la sección 6.5 define el problema de decisión del modelo credibilístico multiobjetivo de media-semivarianza-liquidez para la selección de carteras.

6.2 Descripción del Problema

El modelo credibilístico multiobjetivo de media-semivarianza-liquidez pretende resolver el siguiente problema: Un inversionista el 02 de enero de 2016 desea seleccionar una

²⁸ El Mercado Integrado Latinoamericano MILA es el resultado del acuerdo firmado entre la Bolsa de Comercio de Santiago, la Bolsa de Valores de Colombia y la Bolsa de Valores de Lima, las cuales, en el año 2009 iniciaron el proceso de creación de un mercado regional para la negociación de títulos de renta variable de los tres países. El 30 de mayo de 2011 el mercado MILA entro en operación, y en junio de 2014, la Bolsa Mexicana de Valores se incorporó, realizando la primera transacción con este mercado el 02 de diciembre de 2014.

cartera en el mercado MILA, en la cual va invertir toda su riqueza en n acciones que ofrecen retornos difusos, de modo que se maximice el rendimiento y la liquidez esperada, al tiempo que se minimice el riesgo de dicha inversión. Así mismo, con el ánimo de mejorar el desempeño de la cartera y generar mejores resultados en un periodo de 22 meses, se asume que el inversionista realizará tres rebalances o recomposiciones de la cartera, en función del comportamiento del precio y la liquidez de las acciones que se transan en este mercado, en cada una de las siguientes fechas: 01 de julio de 2016, 02 de enero de 2017, y, 03 de julio de 2017.

6.2.1 Notación

Una vez realizada descripción del problema que pretende resolver el modelo credibilístico multiobjetivo de media-semivarianza-liquidez, se procede a describir la notación que se utilizará para formular el modelo matemático:

ξ_{r_i} = Tasa de retorno difusa del i -ésimo activo representada por un número difuso L-R con funciones de referencia de la familia de potencias, $\xi_{r_i} = (a_{r_i}, b_{r_i}, c_{r_i}, d_{r_i})_{\pi_{r_i}, \rho_{r_i}}$,

ξ_{l_i} = Liquidez difusa del i -ésimo activo representada por un número difuso L-R con funciones de referencia tipo potencia, $\xi_{l_i} = (a_{l_i}, b_{l_i}, c_{l_i}, d_{l_i})_{\pi_{l_i}, \rho_{l_i}}$,

ξ_{r_p} = Tasa de retorno difusa de la cartera representada por un número difuso L-R de la familia de potencias, $\xi_{r_p} = (a_{r_p}, b_{r_p}, c_{r_p}, d_{r_p})_{\pi_{r_p}, \rho_{r_p}}$,

e = Retorno esperado de la cartera,

u_i = Máxima fracción del capital que puede ser invertida en el i -ésimo activo,

l_i : Mínima fracción del capital que puede ser invertida en el i -ésimo activo,

k = Número de activos deseados en la cartera.

6.2.2 Variables de Decisión

Las variables de decisión, estos es, las incógnitas (o decisiones) que deben determinarse resolviendo el modelo credibilístico multiobjetivo se definen a continuación:

ω_i = Proporción del total del capital invertido en el i -ésimo activo,

y_i = Variable binaria que indica si el i -ésimo activo está contenido en la cartera. Toma el valor de 1 si el i -ésimo activo está incluido en la cartera, y el valor de 0 en otros casos.

6.3 Funciones Objetivo

6.3.1 Rentabilidad

Considerando que en los mercados financieros existen varios factores no probabilísticos que afectan los retornos de los activos, esta investigación asume que un inversionista asigna su capital entre n activos riesgosos que ofrecen retornos difusos. Sobre la base de la consideración anterior, el retorno del i -ésimo activo se representa por un número difuso de tipo L-R, con funciones de referencia de la familia de potencias [i.e. $\xi_{r_i} = (a_{r_i}, b_{r_i}, c_{r_i}, d_{r_i})_{\pi_{r_i}, \rho_{r_i}}$, $i = 1, 2, \dots, n$; $t = 1, 2, \dots, T$], cuyos α -cortes de nivel son $[\xi_{r_i}]^\alpha = [\{b_{r_i} - (b_{r_i} - a_{r_i})\}(1 - \alpha), \{c_{r_i} - (d_{r_i} - c_{r_i})\}(1 - \alpha)]$, para $\alpha \in [0, 1]$.

En la literatura existen varios métodos para construir las funciones de pertenencia de una variable difusa basados en heurística, métodos híbridos, algoritmos de agrupación

difusa, redes neuronales, algoritmos genéticos (AGs), entropía e índices Kappa difusos (Cintra, Camargo, y Monard, 2008). No obstante, no existen reglas simples, directrices o incluso un consenso entre la comunidad científica sobre cuál es el mejor método a utilizar, ya que la definición del enfoque para determinar la función de pertenencia difusa está estrechamente relacionada con el dominio de aplicación (Cintra *et al.*, 2008).

En el marco de las observaciones anteriores, la estimación de los parámetros que definen la función de pertenencia del número difuso de tipo L-R se obtiene a partir de los percentiles muestrales. En otras palabras, la estimación del núcleo, el soporte y los parámetros de forma que caracterizan la tasa de retorno difusa esperada del i -ésimo activo se obtienen a partir de los percentiles muestrales de sus rendimientos históricos. Este método de estimación ha sido utilizado ampliamente por varios autores para cuantificar la incertidumbre asociada al rendimiento futuro de los activos financieros o de una cartera dada, y ha contribuido a la generación de carteras eficientes en un entorno de optimización bi-objetivo y tri-objetivo (Bermúdez *et al.*, 2012; Bermudez, Segura, y Vercher, 2007; Bermúdez y Vercher, 2012; Saborido *et al.*, 2016; Vercher, 2008, 2015, Vercher y Bermúdez, 2012, 2013, 2015; Vercher *et al.*, 2007; Yue y Wang, 2017). A continuación se presenta el procedimiento para determinar los parámetros que caracterizan la tasa de retorno difusa esperada del i -ésimo activo:

- i) El soporte de ξ_{r_i} , estos es, el intervalo $[a_{r_i}, d_{r_i}]$, es dado por el percentil 3th y 97th, de forma respectiva.
- ii) El núcleo de ξ_{r_i} , es decir, el intervalo $[b_{r_i}, c_{r_i}]$, es dado por el percentil 45th y 55th, respectivamente.

iii) Los parámetros de forma π_{r_i} y ρ_{r_i} , son obtenidos de tal forma que los cuartiles difusos y empíricos coincidan (Vercher y Bermúdez, 2015), en otras palabras, $\pi_{r_i} = \frac{\text{Ln } 0.5}{\text{Ln } s}$ donde $s = \frac{b_{r_i} - \text{Percentil } 25\text{th}}{b_{r_i} - a_{r_i}}$; y, $\rho_{r_i} = \frac{\text{Ln } 0.5}{\text{Ln } h}$, donde $h = \frac{\text{Percentil } 75\text{th} - c_{r_i}}{d_{r_i} - c_{r_i}}$. El valor de estos parámetros también podrían ser proporcionado por la experiencia y el juicio de los expertos en el mercado.

La figura 6.1 resume el procedimiento para estimar el núcleo, el soporte y los parámetros de forma que caracterizan la tasa de retorno difusa esperada del i -ésimo activo, tal y como se presentó en el párrafo anterior.

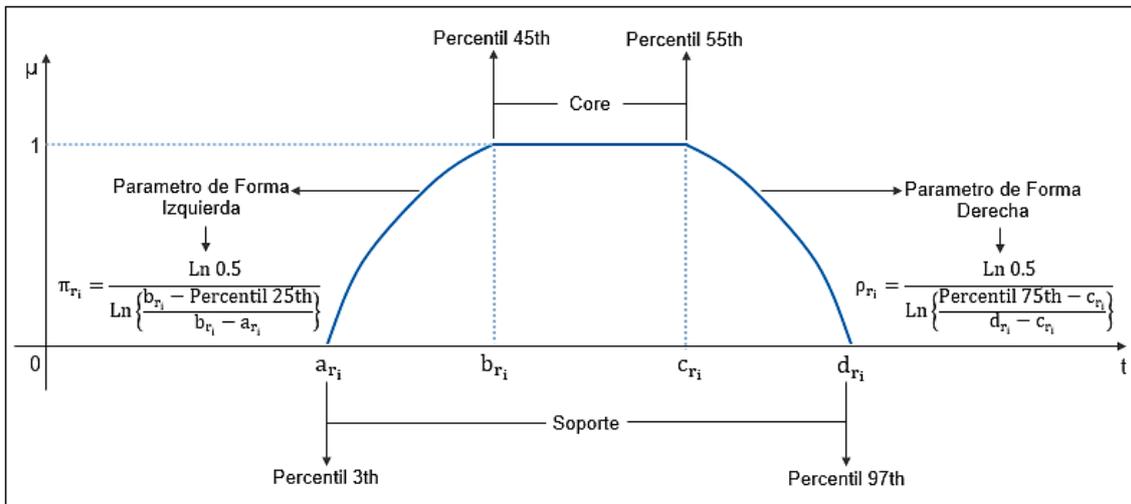


Figura 6.1 Estimación Núcleo, Soporte y Parámetros de Forma del i -ésimo Activo

Fuente: Elaboración propia

Para poder aplicar las reglas de composición de los números difusos de tipo L-R, se asume que todas las funciones de referencia que modelizan los rendimientos de cada uno de los activos tienen la misma forma, siendo $L=R$ para $t = 1, 2, \dots, T$. (Dubois y Prade, 1987a). Una vez manifestada la anterior asunción, la siguiente combinación lineal

expresa el rendimiento difuso esperado de la cartera (Bermúdez, Segura, y Vercher, 2007; Vercher *et al.*, 2007):

$$\text{Max } \mathcal{F}_1(\omega_i) = E \left[\sum_{i=1}^n \omega_i \xi_{r_i} \right] = E \left[\left(\sum_{i=1}^n a_{r_i} \omega_i, \sum_{i=1}^n b_{r_i} \omega_i, \sum_{i=1}^n c_{r_i} \omega_i, \sum_{i=1}^n d_{r_i} \omega_i, \right)_{LR} \right].$$

Nótese que el retorno esperado de la cartera es una combinación lineal convexa de los rendimientos difusos de los activos individuales. Además, para este modelo no es necesario determinar la distribución de credibilidad conjunta de los rendimientos (Bermúdez y Vercher, 2012; Vercher y Bermúdez, 2012).

6.3.2 Riesgo

El riesgo de cartera se calcula utilizando la medida de semivarianza, en la cual las desviaciones *downside* del retorno simulado del rendimiento esperado contribuyen al riesgo. La semivarianza de la cartera se expresa como:

$$\text{Min } \mathcal{F}_2(\omega_i) = E \left[\left[\sum_{i=1}^n \omega_i \xi_{r_i} - E \left[\sum_{i=1}^n \omega_i \xi_{r_i} \right] \right]^- \right]^2.$$

6.3.3 Liquidez

La liquidez es uno de los aspectos más importantes que preocupan a los decisores en el problema de selección de carteras. Ésta ha sido medida como el grado de probabilidad de convertir una inversión en dinero efectivo sin pérdida significativa de su valor (Arenas-Parra *et al.*, 2001; Fang, Lai, y Wang, 2006; Gupta *et al.*, 2011; Gupta, Mehlawat, y

Mittal, 2012; Gupta *et al.*, 2008; Gupta, Mehlawat, y Saxena, 2010; Gupta, Mittal, *et al.*, 2013; Y.J. Liu, Zhang, y Zhang, 2013). Generalmente, los inversores prefieren carteras que no solo puedan ser liquidadas a valores esperados más altos, sino también carteras con valores de liquidación más seguros. En este estudio, la liquidez del i -ésimo activo se identifica por su indicador de liquidez de bolsa, definido de la siguiente manera:

$$\text{Liquidez} = \frac{\text{Número de días en que hubo por lo menos una compraventa con la acción dentro del periodo escogido}}{\text{Número total de días del periodo escogido}} \left(\left(\frac{\text{Número de compraventas con la acción dentro del periodo escogido}}{\text{Número de compraventas con todas las acciones dentro del periodo escogido}} \right) \left(\frac{\text{Volumen de dinero con la acción dentro del periodo escogido}}{\text{Volumen de dinero con todas las acciones dentro del periodo escogido}} \right) \right). \quad 6.1.$$

Debido a la información incompleta, los índices de liquidez en bolsa son solo estimaciones vagas. En este estudio se asume que el índice de liquidez en bolsa es un número difuso. Bajo esta consideración, el índice de liquidez en bolsa del i -ésimo activo se representa por un número difuso L-R con funciones de referencia de la familia de potencias [i.e. $\xi_{l_i} = (a_{l_i}, b_{l_i}, c_{l_i}, d_{l_i}) \pi_{l_i, l_{r_i}}$, $i = 1, 2, \dots, n$; $t = 1, 2, \dots, T$], cuyos α -cortes de nivel son $[\xi_{r_i}]^\alpha = [\{b_{l_i} - (b_{l_i} - a_{l_i})\}(1 - \alpha), \{c_{l_i} - (d_{l_i} - c_{l_i})\}(1 - \alpha)]$, para $\alpha \in [0,1]$. La estimación del núcleo, el soporte y los parámetros de forma que caracterizan la liquidez difusa esperada del i -ésimo activo se obtienen a partir de los percentiles muestrales de su liquidez histórica, tal y como fue presentado en la sección 6.3.1.

Asumiendo que todas las funciones de referencia que modelizan la liquidez de cada uno de los activos tienen la misma forma, siendo $L=R$ para $t = 1, 2, \dots, T$, la siguiente combinación lineal expresa la liquidez difusa esperada de la cartera:

$$\text{Max } \mathcal{F}_3(\omega_i) = E \left[\sum_{i=1}^n \omega_i \xi_{i_i} \right] = E \left[\left(\sum_{i=1}^n a_{i_i} \omega_i, \sum_{i=1}^n b_{i_i} \omega_i, \sum_{i=1}^n c_{i_i} \omega_i, \sum_{i=1}^n d_{i_i} \omega_i, \right)_{LR} \right].$$

6.4 Restricciones

6.4.1 Presupuesto de Capital

Asegura que el presupuesto disponible sea utilizado completamente.

$$\sum_{i=1}^n \omega_i = 1, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

6.4.2 Ventas en Corto

Garantiza que no se aceptan posiciones cortas de activos.

$$\omega_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

6.4.3 Cota Máxima de Participación de un Activo en la Cartera

Máxima fracción del presupuesto que puede ser invertida en un activo.

$$\omega_i \leq u_i y_i, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

6.4.4 Cota Mínima de Participación de un Activo en la Cartera

Mínima fracción del presupuesto que puede ser invertida en un activo.

$$\omega_i \geq l_i y_i, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Las restricciones de cota mínima y máxima de participación de un activo en la cartera (donde $0 \leq l_i$, $u_i \leq 1$, $l_i \leq u_i$, $\forall i$) se incluyen para evitar un gran número de inversiones muy pequeñas (*i.e.* garantizado por la cota mínima de participación) y asegurar una diversificación suficiente de las inversiones (*i.e.* garantizado por la cota máxima de participación) (Gupta, Inuiguchi, *et al.*, 2013; Gupta, Mittal, *et al.*, 2013).

6.4.5 Cardinalidad

Buscar reducir los costos de transacción y asegurar un cierto grado de diversificación limitando el número de activos (k) en una cartera.

$$\sum_{i=1}^n y_i = k,$$
$$y_i \in \{0,1\}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Donde k , es el número de activos deseados en la cartera.

6.5 El Problema de Decisión

A partir de los supuestos expuestos en las secciones anteriores, la formulación matemática del modelo credibilístico multiobjetivo de media-semivarianza-liquidez que esta investigación se propone resolver es la siguiente:

$$\text{Max } \mathcal{F}_3(\omega_i) = E \left[\sum_{i=1}^n \omega_i \xi_{l_i} \right]$$
$$\text{Min } \mathcal{F}_2(\omega_i) = E \left[\left[\sum_{i=1}^n \omega_i \xi_{r_i} - E \left[\sum_{i=1}^n \omega_i \xi_{r_i} \right] \right]^2 \right]$$

$$\begin{aligned} \text{Max } \mathcal{F}_3(\omega_i) &= E \left[\sum_{i=1}^n \omega_i \xi_i \right] \\ \text{Sujeto a } &\begin{cases} \sum_{i=1}^n \omega_i = 1, & i = 1, 2, \dots, n, \\ \omega_i \geq 0, & i = 1, 2, \dots, n, \\ \omega_i \leq u_i y_i, & i = 1, 2, \dots, n, \\ \omega_i \geq l_i y_i, & i = 1, 2, \dots, n, \\ \sum_{i=1}^n y_i = k \\ y_i \in \{0,1\}, & i = 1, 2, \dots, n. \end{cases} \end{aligned}$$

Obsérvese que la proporción del total del capital invertido en el i -ésimo activo (*i.e.* ω_i) son las variables de decisión. En un sentido general, se dice que una cartera P es una cartera factible para el modelo credibilístico multiobjetivo de media-semivarianza-liquidez si cumple con las restricciones antes mencionadas. Una cartera factible P se dice que es una solución eficiente o Pareto óptima si no existe otra cartera factible P' tales que $P_{\mathcal{F}_1(\omega_i)} \geq P'_{\mathcal{F}_1(\omega_i)}$, $P_{\mathcal{F}_2(\omega_i)} \leq P'_{\mathcal{F}_2(\omega_i)}$ y $P_{\mathcal{F}_3(\omega_i)} \geq P'_{\mathcal{F}_3(\omega_i)}$ con al menos una desigualdad estricta. El conjunto de soluciones eficientes es el conjunto óptimo de Pareto (en el espacio de decisión) y sus valores de función objetivo correspondientes constituyen la frontera eficiente o frente óptimo de Pareto (en el espacio de objetivo factible), cuyas soluciones se dice que son no-dominadas.

Capítulo 7

7 SOLUCIÓN METODOLÓGICA

7.1 Introducción

Los modelos multiobjetivo para la selección de carteras permiten evaluar una situación más realista en la que concurren varios objetivos en conflicto en la decisión de asignación o reparto de activos, proporcionando flexibilidad y un amplio conjunto de opciones para el decisor: el conjunto óptimo de Pareto, cuyos elementos son llamados soluciones eficientes (Vercher y Bermúdez, 2012). En el capítulo anterior se formuló un modelo multiobjetivo credibilístico para la selección de carteras, donde se consideran tres funciones objetivo que maximizan el rendimiento y la liquidez esperada, al tiempo que minimizan el riesgo de la inversión. En el marco de la consideración anterior, el presente capítulo está organizado de la siguiente manera. Las secciones 7.2 y 7.3 describen la población y los criterios usados para la selección de las muestras que van a ser estudiadas. En las secciones 7.4, 7.5 y 7.6 se expresan las metodologías para definir la tasa de

rendimiento y la liquidez esperada de los activos seleccionados, así como la rentabilidad esperada de la tasa libre de riesgo. Las secciones 7.7, 7.8 y 7.9 exponen el método para determinar tanto el rendimiento y la liquidez esperada como el riesgo de la cartera. En la sección 7.10 se presentan las condiciones de diversificación que se asumirán en el modelo credibilístico multiobjetivo de media-semivarianza-liquidez para la selección de carteras. Finalmente, la sección 7.11 describe el proceso para resolver el problema de optimización multiobjetivo (MOPs) vía NSGAII e ilustra el flujo de la información del modelo propuesto en esta tesis doctoral.

7.2 Base de Datos

Las variables dependientes en el modelo credibilístico multiobjetivo propuesto en esta investigación son los precios de cierre semanal ajustado y la liquidez en bolsa²⁹. La población elegida como objeto de análisis son las compañías que se encuentran listadas en el Mercado Integrado Latinoamericano MILA, tal y como se exhibe en la figura 7.1.

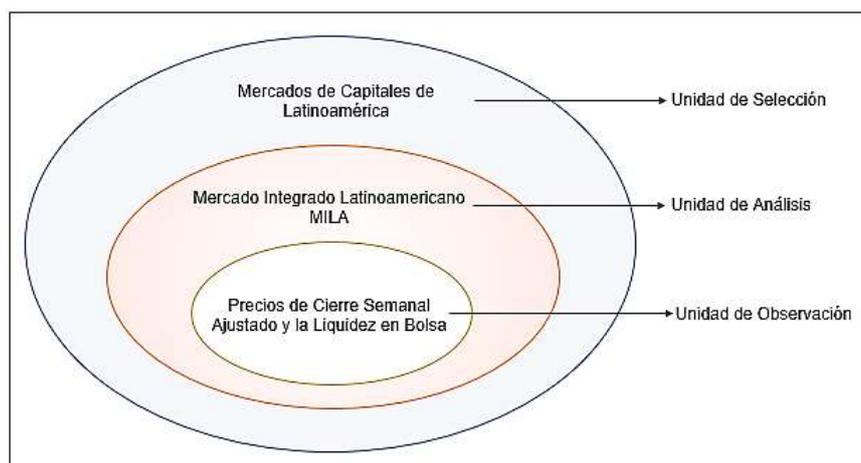


Figura 7.1 Determinación de la Población Objeto de Estudio

Fuente: Elaboración propia

²⁹ La información estadística semanal de los precios de cierre ajustados del índice de liquidez en bolsa de las acciones listadas en el Mercado MILA, se obtuvieron del Software Economatica®.

En correspondencia con lo anterior, el Informe Estadístico Mensual de la Federación Iberoamericana de Bolsas (FIAB) señala que el número de firmas registradas en bolsa en el mercado MILA a junio de 2017 sumaba un total de 768 compañías (ver tabla 7.1).

Tabla 7.1 Número de Compañías Listadas en el Mercado MILA a Junio 2017

Mercado Accionario	Compañías
Bolsa de Comercio de Santiago	297
Bolsa de Valores de Colombia	69
Bolsa Mexicana de Valores	146
Bolsa de Valores de Lima	256
	768

Fuente: Elaboración propia a partir de la Información Estadística de la FIAB

7.3 Tamaño de la Muestra

La selección de los elementos muestrales que van a ser estudiados y sobre los cuales se pretende aplicar el modelo credibilístico multiobjetivo de media-semivarianza-liquidez se realiza teniendo presente las siguientes consideraciones:

- i) Se selecciona exclusivamente las compañías que a lo largo del periodos de estudio, estos es, periodo I (03/06/2011 a 25/12/2015), periodo II (13/01/2012 a 24/06/2016), periodo III (13/07/2012 a 30/12/2016) y periodo IV (11/01/2013 a 30/06/2017), tuvieron una presencia en bolsa equivalente al 100%. En otras palabras, las compañías que no hayan cotizado a lo largo de cada uno de los periodos considerados, se excluirán y no serán tenidas en cuenta.
- ii) Según se ha citado, los inversores prefieren carteras que no solo puedan ser liquidadas a valores esperados más altos, sino también carteras con valores de liquidación más

seguros, es decir, carteras más líquidas. En el marco de esta apreciación, se incluirán las compañías que durante el periodo de estudio presentaron un volumen promedio mensual de negociación superior al volumen promedio mensual operado en cada uno de los mercados accionarios a los que pertenecen. .

iii) En la exposición del problema de la selección de carteras hay dos suposiciones implícitas: la insaciabilidad y la aversión al riesgo. La primera supone que cuando un inversionista tiene que elegir entre dos carteras similares, siempre escogerá la que tenga el rendimiento esperado más alto. En otras palabras, *“los inversionistas siempre prefieren los niveles más altos de riqueza terminal y no los niveles más bajos. Después de todo, los niveles más altos de riqueza terminal le permiten dedicar más dinero a gastos en el futuro más distante”* (Gordon *et al.*, 2003, p.120). Sobre la base de estos razonamientos, esta investigación solo incluirá las empresas que durante el período de estudio presentaron una rentabilidad promedio positiva.

Una vez aplicado los 3 criterios de selección indicados, los elementos muestrales de esta tesis doctoral se presentan en la tablas 7.2, 7.3, 7.4 y 7.5.

Tabla 7.2 Compañías del Mercado MILA que Durante el Periodo de Junio 2011 a Diciembre 2015 Cumplen con los Tres Criterios de Selección: i) Presencia en Bolsa, ii) Volumen de Negociación, y iii) Rentabilidad Promedio Positiva

No.	Compañía	Inicial	País
1	Banco Davivienda S.A.	C_Dav	Colombia
2	Bancolombia S.A.	C_Bco	
3	Corporación Financiera Colombiana S.A.	C_Cfc	
4	Alfa, S.A.B. de C.V.	M_Alf	México
5	Alsea, S.A.B. de C.V.	M_Als	
6	Arca Continental, S.A.B. de C.V.	M_Arc	

No.	Compañía	Inicial	País
7	Grupo Aeroportuario del Sureste, S.A.B. de C.V.	M_Sur	México
8	Grupo Bimbo, S.A.B. de C.V.	M_Bim	
9	Bolsa Mexicana de Valores, S.A.B. de C.V.	M_Bmv	
10	Cemex, S.A.B. de C.V.	M_Cem	
11	Coca-Cola Femsá, S.A.B. de C.V.	M_C-C	
12	Fomento Económico Mexicano, S.A.B. de C.V.	M_Fem	
13	Grupo Carso, S.A.B de C.V.	M_Car	
14	Genera, S.A.B de C.V.	M_Gen	
15	Grupo Financiero Banorte, S.A.B de C.V.	M_Ban	
16	Grupo México, S.A.B. de C.V.	M_Mex	
17	Grupo Aeroportuario del Pacífico, S.A.B. de C.V.	M_Aer	
18	Grupo Industrial Maseca, S.A.B. de C.V.	M_Mas	
19	Kimberly Clark de México, S.A.B. de C.V.	M_Kim	
20	El Puerto de Liverpool, S.A.B. de C.V.	M_Liv	
21	Grupo Televisa, S.A.B. de C.V.	M_Tel	
22	AES Gener S.A.	C_Gen	Chile
23	Aguas Andinas S.A.	C_Agu	
24	Banco de Chile S.A.	C_Bch	
25	Banco de Crédito e Inversiones S.A.	C_Bci	
26	Banco Itau Chile S.A.	C_Ita	
27	Compañía Cervecerías Unidas S.A.	C_Cer	
28	Enel Generación Chile S.A.	C_Enl	
29	SM-Chile S.A.	C_Smc	

Fuente: Elaboración propia

La tabla 7.2 muestra que el modelo credibilístico para la selección de la cartera I será aplicado a una muestra de 29 acciones (3 colombianas, 18 mexicanas y 8 chilenas).

Tabla 7.3 Compañías del Mercado MILA, que Durante el Periodo de Enero 2012 a Junio 2015, Cumplen con los Tres Criterios de Selección: i) Presencia en Bolsa, ii) Volumen de Negociación, y iii) Rentabilidad Promedio Positiva

No.	Compañía	Inicial	País
1	Banco Davivienda S.A.	C_Dav	Colombia
2	Corporación Financiera Colombiana S.A.	C_Cfc	
3	Alfa, S.A.B. de C.V.	M_Alf	México
4	Alsea, S.A.B. de C.V.	M_Als	
5	Arca Continental, S.A.B. de C.V.	M_Arc	

No.	Compañía	Inicial	País	
6	Grupo Aeroportuario del Sureste, S.A.B. de C.V.	M_Sur	Mexico	
7	Grupo Bimbo, S.A.B. de C.V.	M_Bim		
8	Bolsa Mexicana de Valores, S.A.B. de C.V.	M_Bmv		
9	Cemex, S.A.B. de C.V.	M_Cem		
10	Grupo Comercial Chedraui, S.A.B. de C.V.	M_Che		
11	Coca-Cola Femsa, S.A.B. de C.V.	M_C-C		
12	Fomento Económico Mexicano, S.A.B. de C.V.	M_Fem		
13	Grupo Carso, S.A.B de C.V.	M_Car		
14	Genera, S.A.B de C.V.	M_Gen		
15	Grupo Financiero Banorte, S.A.B de C.V.	M_Ban		
16	Grupo Financiero Inbursa, S.A.B de C.V.	M_Inb		
17	Grupo México, S.A.B. de C.V.	M_Mex		
18	Grupo Aeroportuario del Pacífico, S.A.B. de C.V.	M_Aer		
19	Grupo Industrial Maseca, S.A.B. de C.V.	M_Gru		
20	Kimberly Clark de México S.A.B de C.V.	M_Kim		
21	El Puerto de Liverpool, S.A.B. de C.V.	M_Liv		
22	OHL México, S.A.B. de C.V.	M_Ohl		
23	Grupo Televisa, S.A.B. de C.V.	M_Tel		
24	Wal-Mart de México, S.A.B. de C.V.	M_Wal		
25	AES Gener S.A.	C_Gen		Chile
26	Aguas Andinas S.A.	C_Agu		
27	Banco de Chile S.A.	C_Bch		
28	Banco de Crédito e Inversiones S.A.	C_Bci		
29	Banco Itau Chile S.A.	C_Ita		
30	Colbún S.A.	C_Col		
31	Compañía Cervecerías Unidas S.A.	C_Cer		
32	Embotelladora Andina S.A.	C_Emb		
33	Enel Américas S.A.	C_Ena		
34	Enel Generación Chile S.A.	C_Enl		
35	S.A.C.I. Falabella S.A.	C_Fal		

Fuente: Elaboración propia

Por su parte, la tabla 7.3 presenta los elementos muestrales para la selección de la cartera II, estos es, 35 acciones (2 compañías listadas en la Bolsa de Valores de Colombia, 22 en la Bolsa de Valores de México y 11 en la Bolsa de Valores de Chile).

Tabla 7.4 Compañías del Mercado MILA que Durante el Periodo de Junio 2012 a Diciembre 2016 Cumplen con los Tres Criterios de Selección: i) Presencia en Bolsa, ii) Volumen de Negociación, y iii) Rentabilidad Promedio Positiva

No.	Compañía	Inicial	País
1	Banco Davivienda S.A.	C_Dav	Colombia
2	Alfa, S.A.B. de C.V.	M_Alf	México
3	Asea, S.A.B. de C.V.	M_Als	
4	Arca Continental, S.A.B. de C.V.	M_Arc	
5	Grupo Aeroportuario del Sureste, S.A.B. de C.V.	M_Sur	
6	Grupo Bimbo, S.A.B. de C.V.	M_Bim	
7	Bolsa Mexicana de Valores, S.A.B. de C.V.	M_Bmv	
8	Cemex, S.A.B. de C.V.	M_Cem	
9	Fomento Económico Mexicano, S.A.B. de C.V.	M_Fem	
10	Grupo Carso, S.A.B de C.V.	M_Car	
11	Gentera, S.A.B de C.V.	M_Gen	
12	Grupo Financiero Banorte, S.A.B de C.V.	M_Ban	
13	Grupo México, S.A.B. de C.V.	M_Mex	
14	Grupo Aeroportuario del Pacífico, S.A.B. de C.V.	M_Aer	
15	Grupo Industrial Maseca, S.A.B. de C.V.	M_Gru	
16	Kimberly Clark de México S.A.B de C.V.	M_Kim	
17	El Puerto de Liverpool, S.A.B. de C.V.	M_Liv	
18	OHL México, S.A.B. de C.V.	M_Ohl	
19	Grupo Televisa, S.A.B. de C.V.	M_Tel	
20	Aguas Andinas S.A.	C_Agu	
21	Banco de Chile S.A.	C_Bch	
22	Banco de Crédito e Inversiones S.A.	C_Bci	
23	Banco Itau Chile S.A.	C_Ita	
24	Banco Santander Chile S.A.	C_San	
25	Compañía Cervecerías Unidas S.A.	C_Cer	
26	Enel Generación Chile S.A.	C_Enl	
27	S.A.C.I. Falabella S.A.	C_Fal	
28	SM-Chile S.A.	C_Smc	

Fuente: Elaboración propia

Durante el periodo de junio de 2012 a diciembre de 2016, solo 28 compañías del mercado MILA cumplieron los criterios de selección previamente indicados. En este orden de ideas, la muestra para la selección de la cartera III, está conformada por 1

compañía del mercado accionario colombiano, 18 del mexicano y 9 del chileno (ver tabla 7.4.).

Tabla 7.5 Compañías del Mercado MILA que Durante el Periodo de Enero 2013 a Junio 2017 Cumplen con los Tres Criterios de Selección: i) Presencia en Bolsa, ii) Volumen de Negociación, y iii) Rentabilidad Promedio Positiva

No.	Compañía	Inicial	País
1	Banco Davivienda S.A.	C_Dav	Colombia
2	Alsea, S.A.B. de C.V.	M_Als	México
3	Arca Continental, S.A.B. de C.V.	M_Arc	
4	Grupo Aeroportuario del Sureste, S.A.B. de C.V.	M_Sur	
5	Grupo Bimbo, S.A.B. de C.V.	M_Bim	
6	Bolsa Mexicana de Valores, S.A.B. de C.V.	M_Bmv	
7	Cemex, S.A.B. de C.V.	M_Cem	
8	Grupo Elektra, S.A.B. de C.V.	M_Ele	
9	Fomento Económico Mexicano, S.A.B. de C.V.	M_Fem	
10	Grupo Carso, S.A.B de C.V.	M_Car	
11	Genera, S.A.B de C.V.	M_Gen	
12	Grupo Financiero Banorte, S.A.B de C.V.	M_Ban	
13	Grupo México, S.A.B. de C.V.	M_Mex	
14	Grupo Aeroportuario del Pacífico, S.A.B. de C.V.	M_Aer	
15	Grupo Industrial Maseca, S.A.B. de C.V.	M_Gru	
16	Kimberly Clark de México S.A.B de C.V.	M_Kim	
17	Grupo Televisa, S.A.B. de C.V.	M_Tel	
18	Aguas Andinas S.A.	C_Agu	
19	Banco de Chile S.A.	C_Bch	
20	Banco de Crédito e Inversiones S.A.	C_Bci	
21	Banco Itau Chile S.A.	C_Ita	
22	Banco Santander Chile S.A.	C_San	
23	Compañía Cervecerías Unidas S.A.	C_Cer	
24	Enel Américas S.A.	C_Ena	
25	Enel Generación Chile S.A.	C_Enl	
26	Ripley Corp S.A.	C_Rip	
27	SM-Chile S.A.	C_Smc	

Fuente: Elaboración propia

Finalmente, la tabla 7.5 ilustra las compañías que conforman la muestra para la selección de la cartera IV, esto es, 27 acciones, 1 de Colombia, 16 de México y 10 de Chile.

Uno de los puntos que llama la atención al observar los diferentes elementos muestrales presentados es la poca participación del mercado accionario colombiano y la nula participación del mercado de acciones de Perú. Esto se debe a que no cumplieron el segundo criterio de selección a causa de los bajos niveles de liquidez presentados durante el periodo de tiempo bajo consideración, el cual es ratificado en la caracterización de la liquidez que se realizó a estas plazas bursátiles en el capítulo 5.

7.4 Retorno Esperado *Crisp* Credibilístico del *i*-ésimo Activo

Bajo el supuesto de que el inversionista ha seleccionado n activos diferentes, la tasa de retorno difusa esperada del i -ésimo activo se determina como sigue:

Paso 1. Establecer la muestra de los rendimientos del i -ésimo activo r_{i_t} , a través de la expresión matemática $r_{i_t} = (p_{i_t} - p_{i_{t-1}}) / (p_{i_{t-1}})$; $i = 1, 2, \dots, n$; $t = 1, 2, \dots, T$, donde p_{i_t} es el precio de cierre ajustado³⁰ del i -ésimo activo el viernes de la semana t .

Paso 2. Modelar la imprecisión e incertidumbre del rendimiento futuro del i -ésimo activo, vía definición de la función de pertenencia del número difuso L-R con funciones de referencia de la familia de potencias ξ_{r_i} , usando los percentiles muestrales de los datos en

³⁰ Precio ajustado por dividendos en efectivo, dividendo en acciones, desdoblamiento (split), reducción de capital, agrupamiento (implit), suscripción y escisión.

la columna de los retornos $\{r_{ti}\}_{t=1}^T$, tal y como fue señalado en el capítulo anterior (ver sección 6.3.1).

Paso 3. Determinar el intervalo esperado, esto es, el retorno esperado *crisp* credibilístico del *i*-ésimo activo, $\xi_{r_i} = (a_{r_i}, b_{r_i}, c_{r_i}, d_{r_i})_{\pi_{r_i}, \rho_{r_i}}$, utilizando la expresión matemática

$$E(\xi_{r_i}) = \frac{1}{2} \left[b_{r_i} + c_{r_i} + \frac{\rho_{r_i}(d_{r_i} - c_{r_i})}{\rho_{r_i} + 1} - \frac{\pi_{r_i}(b_{r_i} - a_{r_i})}{\pi_{r_i} + 1} \right], \text{ donde } a_{r_i}, b_{r_i}, c_{r_i}, d_{r_i}, \pi_{r_i} \text{ y } \rho_{r_i} \text{ son los parámetros de } \xi_{r_i}.$$

7.5 Liquidez Esperada *Crisp* Credibilística del *i*-ésimo Activo

La liquidez difusa esperada del *i*-ésimo activo se determina a partir del siguiente procedimiento:

Paso 1. Definir la muestra del índice de liquidez en bolsa semanal del *i*-ésimo activo l_{it} .

Paso 2. Cuantificar la incertidumbre de la liquidez futura del *i*-ésimo activo, a través de la definición de la función de pertenencia del número difuso L-R con funciones de referencia tipo potencia ξ_{l_i} , utilizando los percentiles muestrales de los datos en la columna de la liquidez $\{l_{ti}\}_{t=1}^T$, según lo señalado en el capítulo sexto (ver sección 6.3.3).

Paso 3. Determinar el valor medio esperado, en otros palabras, la liquidez esperada *crisp* credibilística del *i*-ésimo activo, $\xi_{l_i} = (a_{l_i}, b_{l_i}, c_{l_i}, d_{l_i})_{\pi_{l_i}, \rho_{l_i}}$ vía

$$E(\xi_{l_i}) = \frac{1}{2} \left[b_{l_i} + c_{l_i} + \frac{\rho_{l_i}(d_{l_i} - c_{l_i})}{\rho_{l_i} + 1} - \frac{\pi_{l_i}(b_{l_i} - a_{l_i})}{\pi_{l_i} + 1} \right], \text{ donde } a_{l_i}, b_{l_i}, c_{l_i}, d_{l_i}, \pi_{l_i} \text{ y } \rho_{l_i}, \text{ son los parámetros de } \xi_{l_i}.$$

7.6 Tasa Libre de Riesgo Esperada *Crisp* Credibilística

Entre las medias de *performance* de las carteras se encuentra el ratio de Sortino, que permite medir la prima de rentabilidad por unidad de riesgo soportado de una cartera. El ratio de Sortino es una modificación del ratio de Sharpe y se fundamenta en el supuesto de que el objetivo de los inversionistas es el de minimizar la volatilidad proveniente de los retornos negativos (*i.e.* volatilidad no deseada). Bajo este contexto, el ratio de Sortino en un entorno credibilístico se determina a partir de la siguiente formula:

$$\text{Ratio de Sortino} = \frac{E(\xi_p) - E(\xi_{Rf})}{SV(\xi_p)}. \quad 7.1$$

Donde:

$E(\xi_p)$ = Retorno difuso esperado de la cartera

$E(\xi_{Rf})$ = Rentabilidad objetivo o tasa de rentabilidad requerida

$SV(\xi_p)$ = Semivarianza esperada de la cartera

En atención a lo anteriormente expuesto, la tasa de retorno objetivo a utilizar en la aplicación del ratio credibilístico de Sortino, para determinar la cartera óptima en el frente óptimo de Pareto (*i.e.* frontera eficiente), es la rentabilidad de los bonos del gobierno de Estados Unidos, que es definida por la tasa de madurez constante de 6 meses (*6-Month Treasury Constant Maturity Rate*³¹). A continuación se presenta el procedimiento para determinar esta tasa de rentabilidad bajo un entorno de decisión difusa:

Paso 1. Determinar la muestra de la tasa semanal de madurez constante de 6 meses de los bonos del gobierno americano.

³¹ La información de la tasa de madurez constante de 6 meses de los bonos americanos, se obtuvo del repositorio de datos históricos del Banco de la Reserva Federal de San Luis (Estados Unidos) (*Federal Reserve Bank of St. Louis*).

Paso 2. Modelizar la incertidumbre de la tasa semanal de madurez constante de 6 meses, vía definición de la función de pertenencia del número difuso L-R con funciones de referencia de la familia de potencias ξ_i , utilizando los percentiles muestrales de los datos en la columna de la rentabilidad $\{Rf_t\}_{t=1}^T$, tal y como se ha realizado en el caso de las variables difusas de la rentabilidad y la liquidez del i -ésimo activo.

Paso 3. Definir el intervalo esperado de la tasa semanal de madurez constante de 1 año,

$$\xi_{Rf} = (a_{Rf}, b_{Rf}, c_{Rf}, d_{Rf})_{\pi_{Rf}, \rho_{Rf}}, \text{ vía } E(\xi_{Rf}) = \frac{1}{2} \left[b_{Rf} + c_{Rf} + \frac{\rho_{Rf}(d_{Rf} - c_{Rf})}{\rho_{Rf} + 1} - \frac{\pi_{Rf}(b_{Rf} - a_{Rf})}{\pi_{Rf} + 1} \right],$$

donde $a_{Rf}, b_{Rf}, c_{Rf}, d_{Rf}, \pi_{Rf}$ y ρ_{Rf} son los parámetros de ξ_{Rf} .

7.7 Rentabilidad Esperada de la Cartera

Una vez definido el retorno esperado *crisp* credibilístico del i -ésimo activo, la rentabilidad esperada de la cartera, es decir, la función objetivo $\mathcal{F}_1(\omega_i)$ presentada en el capítulo anterior, se convierte en la siguiente función objetivo *crisp*:

$$\text{Max } \mathcal{F}_1(\omega_i) = \sum_{i=1}^n \left[\left[\frac{1}{2} \left[b_{r_i} + c_{r_i} + \frac{(d_{r_i} - c_{r_i})\rho_{r_i}}{\rho_{r_i} + 1} - \frac{(b_{r_i} - a_{r_i})\pi_{r_i}}{\pi_{r_i} + 1} \right] \right] \omega_i \right].$$

$$\text{Max } \mathcal{F}_1(\omega_i) = \sum_{i=1}^n \left[[E(\xi_{r_i})] \omega_i \right].$$

7.8 Riesgo de la Cartera

La función objetivo $\mathcal{F}_2(\omega_i)$ señalada en el capítulo 6 para determinar el riesgo de la cartera es sustituida por la siguiente función objetivo *crisp*:

$$\text{Min } \mathcal{F}_2(\omega_i) = \begin{cases} \frac{(e - a_{r_p})^2}{2} - \frac{(e - a_{r_p})(b_{r_p} - a_{r_p})}{\pi_{r_p} + 1} + \frac{(b_{r_p} - a_{r_p})^2}{(\pi_{r_p} + 1)(\pi_{r_p} + 2)} + \frac{(e - c_{r_p})^{\rho_{r_p} + 2}}{(d_{r_p} - c_{r_p})^{\rho_{r_p}} (\rho_{r_p} + 1)(\rho_{r_p} + 2)}, & \text{If } c_{r_p} < e \leq d_{r_p} \\ \frac{(e - a_{r_p})^2}{2} - \frac{(e - a_{r_p})(b_{r_p} - a_{r_p})}{\pi_{r_p} + 1} + \frac{(b_{r_p} - a_{r_p})^2}{(\pi_{r_p} + 1)(\pi_{r_p} + 2)}, & \text{If } b_{r_p} < e \leq c_{r_p} \\ \frac{(e - a_{r_p})^2}{2} - \frac{(e - a_{r_p})(b_{r_p} - a_{r_p})}{\pi_{r_p} + 1} - \frac{(b_{r_p} - e)^{\pi_{r_p} + 2}}{(b_{r_p} - a_{r_p})^{\pi_{r_p}} (\pi_{r_p} + 1)(\pi_{r_p} + 2)} + \frac{(b_{r_p} - a_{r_p})^2}{(\pi_{r_p} + 1)(\pi_{r_p} + 2)}, & \text{If } a_{r_p} < e \leq b_{r_p} \\ 0 & \text{En otro caso.} \end{cases}$$

Nótese que la anterior función objetivo depende de las variables a_{r_p} , b_{r_p} , c_{r_p} , d_{r_p} , π_{r_p} y ρ_{r_p} , que corresponden a los parámetros de la tasa de retorno difusa de la cartera, representada por un número difuso L-R con funciones de referencia de la familia de potencias, $\xi_{r_p} = (a_{r_p}, b_{r_p}, c_{r_p}, d_{r_p})_{\pi_{r_p}, \rho_{r_p}}$.

Asumiendo que todas las funciones de referencia de cada uno de los activos tienen la misma forma, siendo L=R para cada $t = 1, 2, \dots, T$, los parámetros que modelizan la imprecisión e incertidumbre del rendimiento esperado de la cartera, se determinan a partir del siguiente procedimiento, el cual se fundamentan en el principio de extensión de Zadeh (ver teorema 4.1), expuesto en el capítulo 4:

Paso 1: Utilizar la expresión 4.3, esto es, $\lambda \tilde{A} = (\lambda a_1, \lambda b_1, \lambda c_1, \lambda d_1)_{LR}$, asignando a λ la proporción del total del capital invertido en el i -ésimo activo, es decir, ω_i .

$$\xi_{r_1} = (\omega_1 a_{r_1}, \omega_1 b_{r_1}, \omega_1 c_{r_1}, \omega_1 d_{r_1})_{\omega_1 \pi_{r_1}, \omega_1 \rho_{r_1}},$$

$$\xi_{r_2} = (\omega_2 a_{r_2}, \omega_2 b_{r_2}, \omega_2 c_{r_2}, \omega_2 d_{r_2})_{\omega_2 \pi_{r_2}, \omega_2 \rho_{r_2}},$$

...

$$\xi_{r_n} = (\omega_n a_{r_n}, \omega_n b_{r_n}, \omega_n c_{r_n}, \omega_n d_{r_n})_{\omega_n \pi_{r_n}, \omega_n \rho_{r_n}}.$$

Paso 2: Utilizar la expresión 4.2, es decir, $\tilde{A} + \tilde{B} = (a_1 + a_2, b_1 + b_2, c_1 + c_2, d_1 + d_2)_{LR}$ para determinar los parámetros a_{r_p} , b_{r_p} , c_{r_p} , d_{r_p} , π_{r_p} y ρ_{r_p} de la tasa de retorno difusa de la cartera.

$$\xi_{r_p} = \left([\omega_1 a_{r_1} + \omega_2 a_{r_2}, \dots, + \omega_n a_{r_n}], [\omega_1 b_{r_1} + \omega_2 b_{r_2}, \dots, + \omega_n b_{r_n}], [\omega_1 c_{r_1} + \omega_2 c_{r_2}, \dots, + \omega_n c_{r_n}], \right. \\ \left. [\omega_1 d_{r_1} + \omega_2 d_{r_2}, \dots, + \omega_n d_{r_n}] \right)_{[\omega_1 \pi_{r_1} + \omega_2 \pi_{r_2}, \dots, + \omega_n \pi_{r_n}] [\omega_1 \rho_{r_1} + \omega_2 \rho_{r_2}, \dots, + \omega_n \rho_{r_n}]}$$

7.9 Liquidez Esperada de la Cartera

Una vez determinada la liquidez esperada *crisp* credibilística del *i*-ésimo activo, la liquidez esperada de la cartera, en otras palabras, la función objetivo $\mathcal{F}_3(\omega_i)$ presentada en el capítulo anterior, se convierte en la siguiente función objetivo *crisp*:

$$\text{Max } \mathcal{F}_3(\omega_i) = \sum_{i=1}^n \left[\left[\frac{1}{2} \left[b_{l_i} + c_{l_i} + \frac{(d_{l_i} - c_{l_i})\rho_{l_i}}{\rho_{l_i} + 1} - \frac{(b_{l_i} - a_{l_i})\pi_{l_i}}{\pi_{l_i} + 1} \right] \right] \omega_i \right] \\ \text{Max } \mathcal{F}_3(\omega_i) = \sum_{i=1}^n [E(\xi_{l_i})] \omega_i$$

7.10 Restricciones

En el modelo credibilístico multiobjetivo de media-semivarianza-liquidez para la selección de carteras se asumen las siguientes condiciones de diversificación:

- i) Cota Máxima de Participación de un Activo en la Cartera: $u_i = 0,3$ para cada $i = 1, 2, \dots, n$

ii) Cota Mínima de Participación de un Activo en la Cartera: $l_i = 0.0$, para cada $i = 1, 2, \dots, n$

iii) Cardinalidad: En lo que concierne a esta restricción, es importante señalar que no es recomendable tener un número pequeño o un gran número de activos en la cartera para lograr la diversificación. Generalmente, la diversificación de cartera para un inversionista dado, se encuentra en un rango estrecho de 3 a 10 activos (Gupta, Mehlawat, Inuiguchi, y Chandra, 2014c). Por lo anterior, siguiendo esta recomendación, se considera hasta 10 activos para una cartera admisible, es decir, $k = 10$.

7.11 *Non-dominated Sorting Genetic Algorithm (NSGAI)*

En el modelo propuesto las funciones objetivo *crisp* dependen tanto de las características como de la media de los números difusos L-R que representan los retornos y la liquidez de cada activo. Así mismo, la introducción de restricciones realistas convierte el modelo de un problema de optimización cuadrática clásica (*classical quadratic optimization problem*) a un problema de programación cuadrática de enteros mixtos (*quadratic mixed-integer problem*) que es *NP-hard* (Moral-Escudero, Ruiz-Torrubiano, y Suarez, 2006). Para superar este inconveniente, el modelo propuesto en esta tesis doctoral se resolverá aplicando el *Non-dominated Sorting Genetic Algorithm (NSGAI)*, MOEA que ha sido utilizado con éxito en la generación de soluciones eficientes en varios modelos multiobjetivo de selección de carteras (Liagkouras y Metaxiotis, 2015).

Teniendo en cuenta la anterior consideración, el proceso para resolver el problema de optimización multiobjetivo (MOPs) vía NSGAI se ilustra en la figura 7.1.

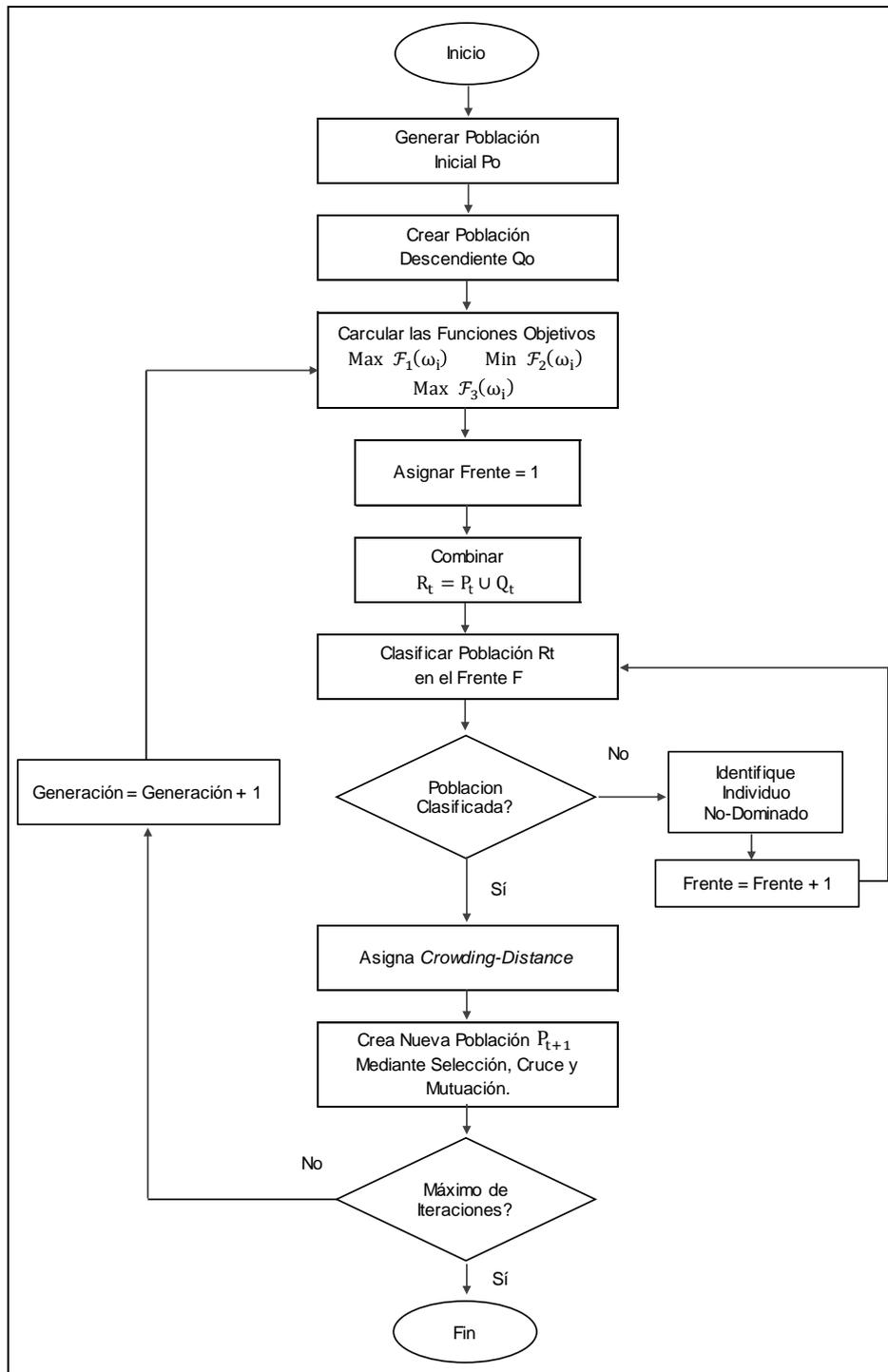


Ilustración 7.1 Diagrama de Flujo del NSGA-II

Fuente: Elaboración propia

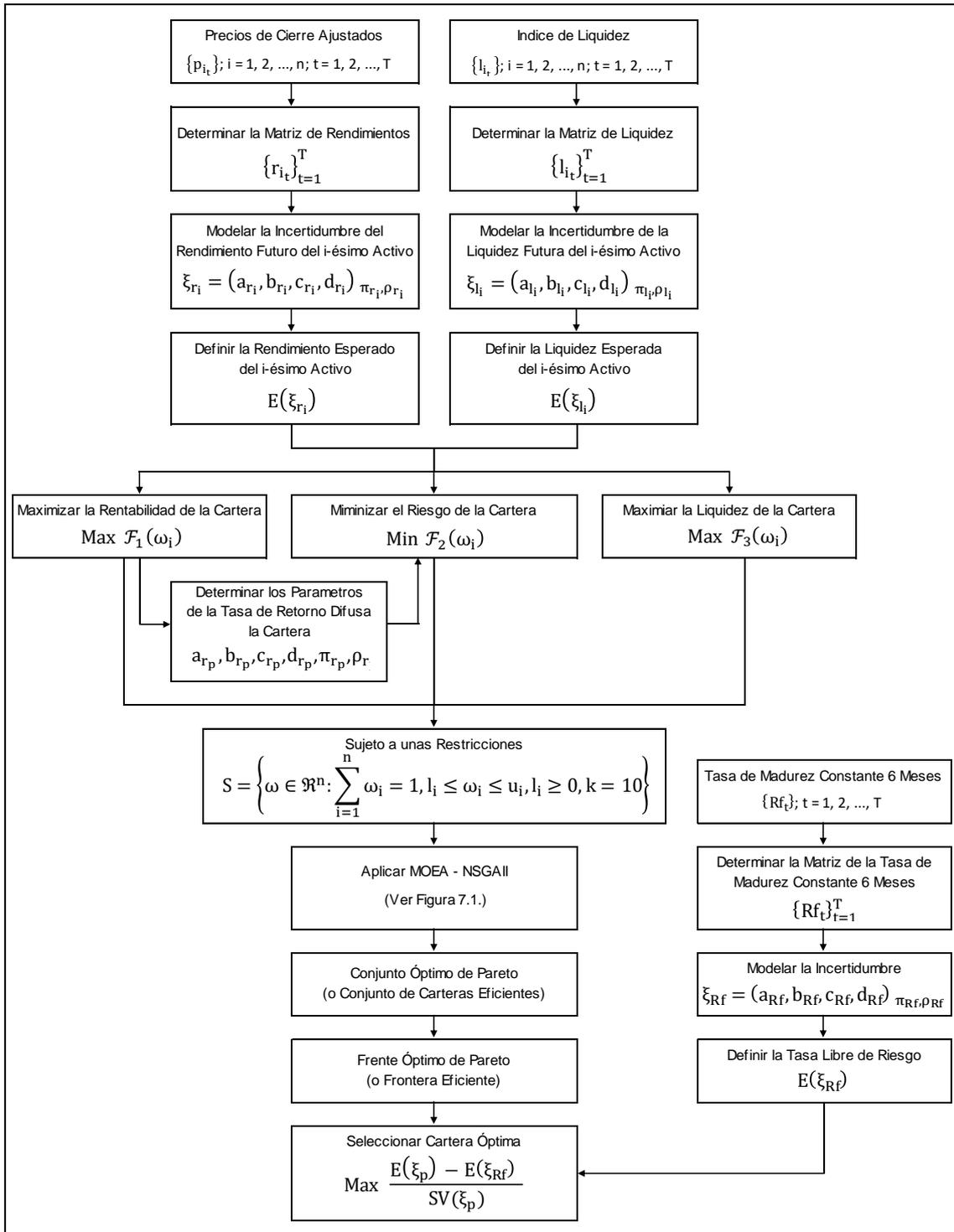


Figura 7.2 Flujo de la Información del Modelo Credibilístico Multiobjetivo de Media-Semivarianza-Liquidez para la Selección de Carteras

Fuente: Elaboración propia

La figura 7.1 ilustra el flujo que sigue la información para establecer una política de inversión bajo el modelo credibilístico multiobjetivo de media-semivarianza-liquidez para la selección de carteras, ligado a un perfil de inversionista determinado, es decir, las preferencias del inversionista (la cardinalidad y la cotas mínima y máxima de participación de un activo en la cartera) y donde las condiciones del mercado son utilizadas para definir las funciones objetivo y las restricciones del problema.

7.11.1 Parámetros NSGAI

La tabla 7.2 muestra los valores de los principales parámetros utilizados en la configuración del MOEA NSGAI para resolver el modelo credibilístico multiobjetivo de media-semivarianza-liquidez para la selección de carteras utilizando lenguaje R (<http://www.r-project.org/>).

Tabla 7.6 Parámetros principales del Algoritmo NSGAI

Parámetro		Valor
Tamaño de la Población	N_{POP}	400
Índice de Distribución de Cruce	η_C	10
Probabilidad de Cruce	P_C	0.9
Índice de Distribución de Mutación	η_M	50
Probabilidad de Mutación	P_M	0.01
Número Máximo de Generaciones	N_{ITER}	500

Fuente: Elaboración propia

Capítulo 8

8 RESULTADOS EXPERIMENTALES

8.1 Introducción

En los capítulos previos se realizó una exposición de los antecedentes, las motivaciones y los objetivos de la presente investigación, que condujo a realizar una revisión sistemática de la literatura de la optimización de carteras, los algoritmos evolutivos multiobjetivo y la teoría de la credibilidad, la cual contribuyó a plantear un modelo credibilístico de tres objetivos para generar carteras eficientes que incorporen las preferencias del inversor y las condiciones del mercado. A este respecto, el presente capítulo tiene como meta exponer los resultados experimentales del modelo propuesto, asumiendo la toma de decisiones de inversión en el mercado MILA. Para llevar a cabo este propósito, el capítulo se organiza en 3 secciones como sigue: las secciones 8.2 y 8.3 presentan los retornos y la liquidez difusa de los activos seleccionados y la sección 8.4 se centra en demostrar la efectividad y eficiencia del modelo en las aplicaciones prácticas.

8.2 Retorno Esperado *Crisp* Credibilístico del *i*-ésimo Activo

Las tablas 8.1 a 8.4 presentan los parámetros que definen la función de pertenencia de los retornos difusos de tipo L-R y sus respectivos valores esperados. En concordancia con lo indicado en el capítulo anterior, estas compañías representan los elementos muestrales que durante los periodo I (03/06/2011 a 25/12/2015), periodo II (13/01/2012 a 24/06/2016), periodo III (13/07/2012 a 30/12/2016) y periodo IV (11/01/2013 a 30/06/2017) cumplieron con los tres criterios de selección indicados, esto es, presencia en bolsa, volumen de negociación y rentabilidad promedio positiva.

Tabla 8.1 Retornos Difusos Esperados (Periodo I)

Activo		Retorno	Valor Medio <i>Crisp</i> Credibilístico
		$\xi_{r_i} = (a_{r_i}, b_{r_i}, c_{r_i}, d_{r_i}) \pi_{r_i, \theta_{r_i}}$	
Colombia	C_Dav	(-0.06563, -0.00409, 0.00547, 0.06565) $L_{0.52243}R_{0.44550}$	-0.000597
	C_Bco	(-0.08206, -0.00327, 0.00455, 0.06183) $L_{0.44442}R_{0.48893}$	-0.002076
	C_Cfc	(-0.05837, -0.00013, 0.00472, 0.05250) $L_{0.56591}R_{0.045974}$	-0.000703
México	M_Alf	(-0.07862, -0.00397, 0.00434, 0.09799) $L_{0.62926}R_{0.46993}$	0.000740
	M_Als	(-0.07891, 0.00167, 0.01302, 0.09301) $L_{0.48751}R_{0.50776}$	0.007611
	M_Arc	(-0.06550, -0.00409, 0.00241, 0.07315) $L_{0.49951}R_{0.57142}$	0.001791
	M_Sur	(-0.06155, 0.00249, 0.00907, 0.07653) $L_{0.66725}R_{0.51298}$	0.004403
	M_Bim	(-0.07114, -0.00197, 0.00579, 0.08474) $L_{0.54195}R_{0.52523}$	0.003348
	M_Bmv	(-0.08642, -0.00355, 0.00646, 0.08604) $L_{0.53855}R_{0.43870}$	-0.000917
	M_Cem	(-0.11207, -0.00194, 0.00629, 0.10866) $L_{0.52320}R_{0.52155}$	0.000806
	M_C-C	(-0.07077, -0.00355, 0.00648, 0.06321) $L_{0.47566}R_{0.63197}$	0.001613
	M_Fem	(-0.06426, 0.00018, 0.00717, 0.06823) $L_{0.63239}R_{0.50229}$	0.001401
	M_Car	(-0.08142, -0.00105, 0.00605, 0.08889) $L_{0.50132}R_{0.49297}$	0.002760
	M_Gen	(-0.09610, -0.00336, 0.00596, 0.08619) $L_{0.45964}R_{0.63966}$	0.002348
	M_Ban	(-0.08624, -0.00779, 0.00423, 0.09266) $L_{0.46855}R_{0.58885}$	0.002094
	M_Mex	(-0.08441, -0.00368, 0.00737, 0.08382) $L_{0.64722}R_{0.49659}$	-0.001333
	M_Aer	(-0.05605, -0.00181, 0.00663, 0.08016) $L_{0.61356}R_{0.53535}$	0.004919
	M_Mas	(-0.06769, 0.00158, 0.01217, 0.08745) $L_{0.53070}R_{0.57264}$	0.008572
M_Kim	(-0.07189, -0.00102, 0.00697, 0.07995) $L_{0.65163}R_{0.55270}$	0.001981	
M_Liv	(-0.05932, -0.00004, 0.00711, 0.07472) $L_{0.59170}R_{0.43567}$	0.002775	
M_Tel	(-0.07145, -0.00108, 0.00768, 0.06401) $L_{0.52438}R_{0.57310}$	0.001456	

Activo		Retorno	
		$\xi_{r_i} = (a_{r_i}, b_{r_i}, c_{r_i}, d_{r_i}) \pi_{r_i, \rho_{r_i}}$	Valor Medio <i>Crisp</i> Credibilístico
Chile	C_Gen	$(-0.05726, -0.00447, 0.00306, 0.06548)L_{0.55931}R_{0.54310}$	0.000812
	C_Agu	$(-0.04633, -0.00194, 0.00276, 0.05853)L_{0.53680}R_{0.49413}$	0.001879
	C_Bch	$(-0.04980, -0.00233, 0.00206, 0.04733)L_{0.50957}R_{0.57071}$	0.000077
	C_Bci	$(-0.06457, -0.00668, 0.00129, 0.08281)L_{0.59895}R_{0.49487}$	-0.000042
	C_Ita	$(-0.07181, -0.00689, 0.00091, 0.08026)L_{0.44879}R_{0.46717}$	-0.000413
	C_Cer	$(-0.06371, -0.00334, 0.00265, 0.07772)L_{0.59105}R_{0.46957}$	0.000436
	C_Enl	$(-0.06730, -0.00372, 0.00396, 0.06537)L_{0.49137}R_{0.47871}$	-0.000411
	C_Smc	$(-0.05243, -0.00304, 0.00226, 0.05724)L_{0.56215}R_{0.48733}$	-0.000270

Fuente: Elaboración propia a partir de Información de Economatica®

Tabla 8.2 Retornos Difusos Esperados (Periodo II)

Activo		Retorno	
		$\xi_{r_i} = (a_{r_i}, b_{r_i}, c_{r_i}, d_{r_i}) \pi_{r_i, \rho_{r_i}}$	Valor Medio <i>Crisp</i> Credibilístico
Colombia	C_Dav	$(-0.06604, -0.00022, 0.00689, 0.06645)L_{0.53583}R_{0.43561}$	0.000890
	C_Cfc	$(-0.05884, -0.00231, 0.00445, 0.05578)L_{0.52436}R_{0.46175}$	-0.000546
México	M_Alf	$(-0.07547, -0.00643, 0.00346, 0.09873)L_{0.57131}R_{0.44623}$	0.000662
	M_Als	$(-0.07223, 0.00171, 0.01101, 0.07840)L_{0.46923}R_{0.60486}$	0.007249
	M_Arc	$(-0.06029, -0.00282, 0.00442, 0.06960)L_{0.51854}R_{0.56402}$	0.002741
	M_Sur	$(-0.05955, 0.00302, 0.00904, 0.07273)L_{0.67013}R_{0.54842}$	0.004755
	M_Bim	$(-0.06502, -0.00225, 0.00401, 0.08151)L_{0.54853}R_{0.56482}$	0.003751
	M_Bmv	$(-0.08591, -0.00236, 0.00789, 0.09114)L_{0.52893}R_{0.41207}$	0.000461
	M_Cem	$(-0.10237, 0.00172, 0.00853, 0.10923)L_{0.52058}R_{0.50981}$	0.004309
	M_Che	$(-0.06902, -0.00264, 0.00411, 0.09050)L_{0.61644}R_{0.45618}$	0.001611
	M_C-C	$(-0.06818, -0.00414, 0.00624, 0.06249)L_{0.48252}R_{0.60772}$	0.001258
	M_Fem	$(-0.06138, 0.00044, 0.00699, 0.06632)L_{0.66500}R_{0.49015}$	0.001126
	M_Car	$(-0.07147, -0.00174, 0.00609, 0.08780)L_{0.50605}R_{0.47824}$	0.003678
	M_Gen	$(-0.07835, -0.00333, 0.00588, 0.08220)L_{0.53013}R_{0.66755}$	0.003555
	M_Ban	$(-0.07679, -0.00575, 0.00474, 0.08986)L_{0.51356}R_{0.56049}$	0.002729
	M_Inb	$(-0.06776, -0.00706, 0.00183, 0.07818)L_{0.54514}R_{0.64801}$	0.001687
	M_Mex	$(-0.08084, -0.00400, 0.00658, 0.08467)L_{0.61905}R_{0.48968}$	-0.000563
	M_Aer	$(-0.05639, -0.00149, 0.00921, 0.08145)L_{0.58200}R_{0.54002}$	0.006428
	M_Gru	$(-0.05718, 0.00100, 0.01093, 0.08217)L_{0.61028}R_{0.60006}$	0.008296
	M_Kim	$(-0.06767, -0.00176, 0.00696, 0.07483)L_{0.70901}R_{0.59507}$	0.001588
	M_Liv	$(-0.06792, -0.00021, 0.00713, 0.07582)L_{0.53536}R_{0.42992}$	0.001981
	M_Ohl	$(-0.10675, -0.00802, 0.00260, 0.11827)L_{0.48858}R_{0.54453}$	0.001478
M_Tel	$(-0.06590, -0.00195, 0.00578, 0.06425)L_{0.52092}R_{0.58652}$	0.001770	
M_Wal	$(-0.06689, -0.00698, 0.00280, 0.07020)L_{0.47633}R_{0.63778}$	0.001367	
Chile	C_Gen	$(-0.05532, -0.00261, 0.00340, 0.06039)L_{0.57040}R_{0.54477}$	0.000873
	C_Agu	$(-0.04317, -0.00175, 0.00306, 0.05078)L_{0.56358}R_{0.54611}$	0.001617

Activo		Retorno	
		$\xi_{r_i} = (a_{r_i}, b_{r_i}, c_{r_i}, d_{r_i})_{\pi_{r_i}, \rho_{r_i}}$	Valor Medio <i>Crisp</i> Credibilístico
Chile	C_Bch	$(-0.04274, -0.00193, 0.00205, 0.03971)_{L_{0.58103} R_{0.65132}}$	-0.000014
	C_Bci	$(-0.05918, -0.00525, 0.00170, 0.07124)_{L_{0.61875} R_{0.49264}}$	-0.000608
	C_Ita	$(-0.05658, -0.00649, 0.00098, 0.07578)_{L_{0.54193} R_{0.50157}}$	0.000933
	C_Col	$(-0.04413, -0.00445, 0.00332, 0.06020)_{L_{0.67515} R_{0.45621}}$	0.000351
	C_Cer	$(-0.06416, -0.00366, 0.00274, 0.07764)_{L_{0.56077} R_{0.47132}}$	0.000666
	C_Emb	$(-0.08584, -0.00451, 0.00437, 0.08531)_{L_{0.47943} R_{0.45030}}$	-0.000682
	C_Ena	$(-0.06361, -0.00355, 0.00262, 0.06456)_{L_{0.54274} R_{0.54846}}$	-0.000058
	C_Enl	$(-0.05525, -0.00322, 0.00512, 0.06582)_{L_{0.57824} R_{0.44555}}$	0.000774
C_Fal	$(-0.05775, -0.00321, 0.00486, 0.06101)_{L_{0.64791} R_{0.64866}}$	0.001149	

Fuente: Elaboración propia a partir de Información de Economatica®

Tabla 8.3 Retornos Difusos Esperados (Periodo III)

Activo		Retorno	
		$\xi_{r_i} = (a_{r_i}, b_{r_i}, c_{r_i}, d_{r_i})_{\pi_{r_i}, \rho_{r_i}}$	Valor Medio <i>Crisp</i> Credibilístico
Colombia	C_Dav	$(-0.06588, -0.00124, 0.00585, 0.06799)_{L_{0.55187} R_{0.45258}}$	0.000494
México	M_Alf	$(-0.07538, -0.00811, 0.00080, 0.08903)_{L_{0.59226} R_{0.51197}}$	-0.001228
	M_Als	$(-0.07660, -0.00035, 0.00763, 0.07731)_{L_{0.41540} R_{0.61912}}$	0.005775
	M_Arc	$(-0.06307, -0.00413, 0.00236, 0.06957)_{L_{0.52885} R_{0.56318}}$	0.001027
	M_Sur	$(-0.06192, 0.00140, 0.00855, 0.07613)_{L_{0.66947} R_{0.53304}}$	0.004030
	M_Bim	$(-0.06489, -0.00497, 0.00308, 0.07995)_{L_{0.66251} R_{0.59304}}$	0.001424
	M_Bmv	$(-0.08656, -0.00382, 0.00617, 0.09588)_{L_{0.51252} R_{0.41127}}$	0.000229
	M_Cem	$(-0.10083, 0.00202, 0.00905, 0.10918)_{L_{0.51386} R_{0.48134}}$	0.004348
	M_Fem	$(-0.06533, -0.00288, 0.00679, 0.06625)_{L_{0.62957} R_{0.50801}}$	-0.000093
	M_Car	$(-0.07057, -0.00209, 0.00598, 0.08143)_{L_{0.53244} R_{0.49154}}$	0.002481
	M_Gen	$(-0.07502, -0.00295, 0.00790, 0.08201)_{L_{0.55454} R_{0.63240}}$	0.003979
	M_Ban	$(-0.07976, -0.00618, 0.00150, 0.08977)_{L_{0.54991} R_{0.55208}}$	0.000305
	M_Mex	$(-0.08081, -0.00377, 0.00652, 0.08585)_{L_{0.62216} R_{0.51464}}$	0.000077
	M_Aer	$(-0.07431, -0.00161, 0.00705, 0.08786)_{L_{0.49759} R_{0.55407}}$	0.005046
	M_Gru	$(-0.05695, 0.00124, 0.00994, 0.07793)_{L_{0.61593} R_{0.54082}}$	0.006430
	M_Kim	$(-0.07150, -0.00059, 0.00701, 0.07464)_{L_{0.69637} R_{0.57706}}$	0.001029
	M_Liv	$(-0.07871, 0.00021, 0.00676, 0.07567)_{L_{0.49891} R_{0.43794}}$	0.000844
	M_Ohl	$(-0.10659, -0.00825, 0.00268, 0.12421)_{L_{0.54028} R_{0.49531}}$	0.000097
M_Tel	$(-0.06721, -0.00265, 0.00578, 0.06136)_{L_{0.56210} R_{0.61318}}$	0.000511	
Chile	C_Agu	$(-0.04457, -0.00071, 0.00335, 0.05082)_{L_{0.60711} R_{0.56262}}$	0.001581
	C_Bch	$(-0.04234, -0.00192, 0.00288, 0.04237)_{L_{0.63631} R_{0.64826}}$	0.000388
	C_Bci	$(-0.05589, -0.00497, 0.00282, 0.07122)_{L_{0.66614} R_{0.47447}}$	-0.000248
	C_Ita	$(-0.05648, -0.00818, 0.00057, 0.07564)_{L_{0.54355} R_{0.51038}}$	0.000374
	C_San	$(-0.05240, -0.00705, 0.00046, 0.06340)_{L_{0.59022} R_{0.54591}}$	-0.000598
C_Cer	$(-0.06413, -0.00400, 0.00340, 0.06890)_{L_{0.58475} R_{0.53628}}$	0.000037	

Activo		Retorno	
		$\xi_{r_i} = (a_{r_i}, b_{r_i}, c_{r_i}, d_{r_i}) \pi_{r_i, \rho_{r_i}}$	Valor Medio <i>Crisp</i> Credibilístico
Chile	C_Enl	(-0.06052, -0.00438, 0.00398, 0.06558) $L_{0.60719}R_{0.45496}$	-0.001175
	C_Fal	(-0.05508, -0.00486, 0.00414, 0.05822) $L_{0.65640}R_{0.70027}$	0.000824
	C_Smc	(-0.03663, -0.00288, 0.00216, 0.04679) $L_{0.55744}R_{0.49331}$	0.000970

Fuente: Elaboración propia a partir de Información de Economatica®

Tabla 8.4 Retornos Difusos Esperados (Periodo IV)

Activo		Retorno	
		$\xi_{r_i} = (a_{r_i}, b_{r_i}, c_{r_i}, d_{r_i}) \pi_{r_i, \rho_{r_i}}$	Valor Medio <i>Crisp</i> Credibilístico
Colombia	C_Dav	(-0.06588, -0.00327, 0.00651, 0.07119) $L_{0.55498}R_{0.46990}$	0.000784
México	M_Als	(-0.07660, -0.00057, 0.00708, 0.08338) $L_{0.46772}R_{0.54086}$	0.004533
	M_Arc	(-0.06160, -0.00352, 0.00305, 0.06798) $L_{0.58382}R_{0.60015}$	0.001233
	M_Sur	(-0.06192, 0.00243, 0.00912, 0.06635) $L_{0.65674}R_{0.58703}$	0.003605
	M_Bim	(-0.06441, -0.00623, 0.00308, 0.07995) $L_{0.62169}R_{0.58953}$	0.001527
	M_Bmv	(-0.08656, -0.00285, 0.00798, 0.07427) $L_{0.53057}R_{0.53825}$	-0.000347
	M_Cem	(-0.10083, -0.00174, 0.00557, 0.10918) $L_{0.47543}R_{0.48282}$	0.002818
	M_Ele	(-0.11285, -0.00707, -0.00022, 0.14115) $L_{0.44946}R_{0.41098}$	0.000542
	M_Fem	(-0.06533, -0.00246, 0.00705, 0.06625) $L_{0.58631}R_{0.52955}$	0.000925
	M_Car	(-0.07131, -0.00244, 0.00533, 0.07551) $L_{0.52995}R_{0.50239}$	0.001251
	M_Gen	(-0.07492, -0.00335, 0.00603, 0.08810) $L_{0.55193}R_{0.51449}$	0.002554
	M_Ban	(-0.07976, -0.00528, 0.00150, 0.08977) $L_{0.51450}R_{0.53759}$	0.000889
	M_Mex	(-0.08081, -0.00393, 0.00607, 0.08565) $L_{0.61978}R_{0.51008}$	-0.000198
	M_Aer	(-0.07431, -0.00161, 0.00952, 0.08139) $L_{0.51219}R_{0.58878}$	0.004961
	M_Gru	(-0.05695, 0.00084, 0.00906, 0.07863) $L_{0.60812}R_{0.47361}$	0.005200
	M_Kim	(-0.07200, -0.00277, 0.00633, 0.07198) $L_{0.65503}R_{0.58183}$	0.000155
M_Tel	(-0.06721, -0.00318, 0.00425, 0.06694) $L_{0.63964}R_{0.57973}$	-0.000452	
Chile	C_Agu	(-0.04457, -0.00071, 0.00310, 0.05284) $L_{0.67864}R_{0.54853}$	0.001138
	C_Bch	(-0.04234, -0.00180, 0.00277, 0.04292) $L_{0.64869}R_{0.65124}$	0.000429
	C_Bci	(-0.05914, -0.00489, 0.00205, 0.07198) $L_{0.59242}R_{0.47556}$	-0.000241
	C_Ita	(-0.05442, -0.00905, 0.00126, 0.07564) $L_{0.55322}R_{0.53637}$	0.000188
	C_San	(-0.05236, -0.00485, 0.00098, 0.06340) $L_{0.61817}R_{0.52562}$	-0.000255
	C_Cer	(-0.06413, -0.00359, 0.00359, 0.06890) $L_{0.55960}R_{0.51080}$	0.000178
	C_Ena	(-0.06352, -0.00453, 0.00479, 0.06369) $L_{0.52400}R_{0.51672}$	0.000021
	C_Enl	(-0.05952, -0.00364, 0.00476, 0.06560) $L_{0.63221}R_{0.45726}$	-0.000718
	C_Rip	(-0.07441, -0.00682, 0.00353, 0.08177) $L_{0.46371}R_{0.42147}$	-0.000751
	C_Smc	(-0.03663, -0.00149, 0.00325, 0.04698) $L_{0.54692}R_{0.44737}$	0.001426

Fuente: Elaboración propia a partir de Información de Economatica®

Al analizar la modelización de la incertidumbre e imprecisión del rendimiento futuro de cada uno de los activos, llama la atención que en las diferentes muestras señaladas algunas compañías presentan un retorno difuso semanal esperado negativo, a pesar de que cumplieron el criterio de selección de poseer un rendimiento promedio histórico positivo en cada uno de los periodos de tiempo considerados. Esta es una clara evidencia de que los retornos de los activos financieros vía teoría de la probabilidad siempre diferirán de los modelados a partir de la teoría de conjuntos difusos. Por otra parte, en cada una de las tablas presentadas se observa que las acciones de las compañías del Grupo Industrial Maseca (M-Gru), de Alsea (M-Als), del Grupo Aeroportuario del Pacífico (M-Aer) y del Grupo Aeroportuario del Sureste (M-Sur), lideran los mayores rendimientos difusos semanales esperados. Estos resultados se deben al comportamiento que han tenido estas compañías mexicanas a lo largo del periodo estipulado (ver figura 8.1).

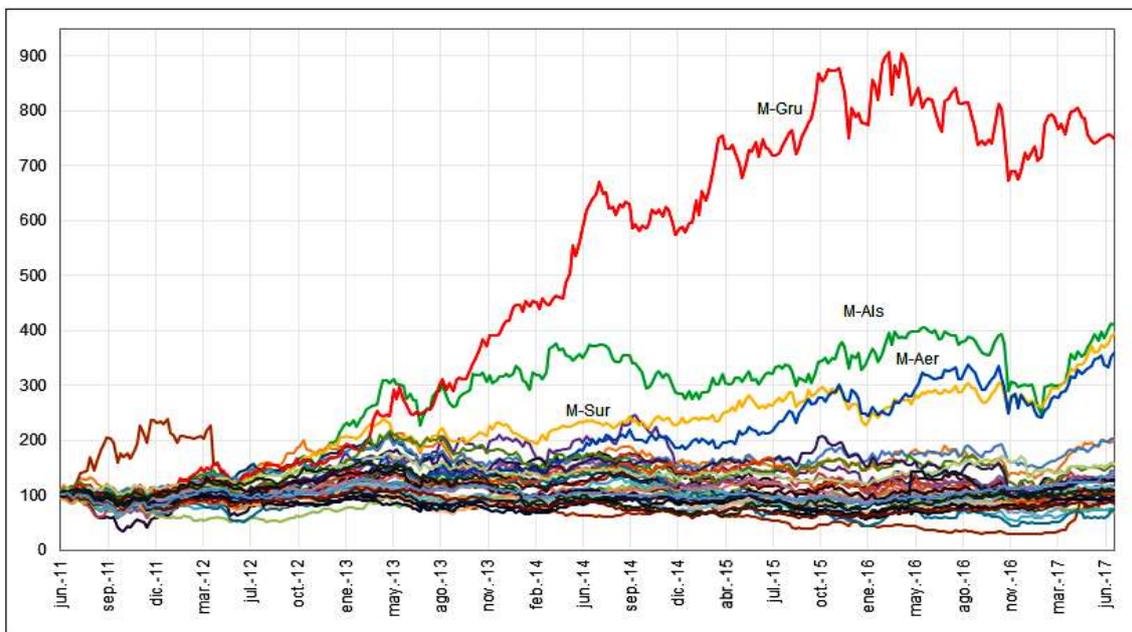


Figura 8.1 Tendencia de la Tasa de Crecimiento Semanal de los Activos Seleccionados
Jun 2011-Jun 2017

Fuente: Elaboración propia a partir de Información de Economatica®

8.3 Liquidez Esperada *Crisp* Credibilística del i-ésimo Activo

Los parámetros que definen la función de pertenencia de la liquidez difusa de tipo L-R y su respectivo valor esperado correspondiente a cada una de las acciones seleccionadas se ilustran en las tablas 8.5 a 8.8.

Tabla 8.5 Liquidez Difusa Esperada (Periodo I)

Activo		Liquidez	
		$\xi_i = (a_i, b_i, c_i, d_i)_{\pi_i, \rho_i}$	Valor Medio <i>Crisp</i> Credibilístico
Colombia	C_Dav	(0.01291,0.02715,0.02912,0.06874)L _{0.62085} R _{0.36660}	0.030722
	C_Bco	(0.04013,0.08476,0.09240,0.19457)L _{0.91198} R _{0.41446}	0.092907
	C_Cfc	(0.00751,0.01740,0.01861,0.03363)L _{0.77838} R _{0.54319}	0.018482
México	M_Alf	(0.01364,0.03709,0.04012,0.06481)L _{0.78597} R _{0.48410}	0.037472
	M_Als	(0.00168,0.01045,0.01238,0.02947)L _{1.35871} R _{0.48594}	0.011686
	M_Arc	(0.00710,0.01581,0.01708,0.02538)L _{0.73018} R _{0.75733}	0.016395
	M_Sur	(0.00323,0.01000,0.01119,0.02628)L _{0.87060} R _{0.46760}	0.011421
	M_Bim	(0.00944,0.01572,0.01665,0.02559)L _{0.71114} R _{0.47475}	0.016319
	M_Bmv	(0.00465,0.00879,0.00976,0.01652)L _{0.84905} R _{0.52747}	0.009491
	M_Cem	(0.03596,0.05853,0.06173,0.09610)L _{0.88493} R _{0.49827}	0.060546
	M_C-C	(0.00363,0.01463,0.01568,0.02662)L _{0.62527} R _{0.40619}	0.014618
	M_Fem	(0.02007,0.03671,0.03954,0.05317)L _{0.56785} R _{0.50087}	0.037388
	M_Car	(0.00224,0.00619,0.00671,0.01224)L _{0.64051} R _{0.48743}	0.006586
	M_Gen	(0.00652,0.01603,0.01780,0.02964)L _{0.63278} R _{0.57994}	0.017247
	M_Ban	(0.02632,0.05827,0.06189,0.09972)L _{0.75832} R _{0.52887}	0.059734
	M_Mex	(0.03861,0.05606,0.05886,0.08984)L _{0.59576} R _{0.45777}	0.059066
	M_Aer	(0.00445,0.01091,0.01264,0.02696)L _{0.69365} R _{0.51466}	0.012885
	M_Mas	(0.00340,0.01333,0.01706,0.03893)L _{1.58962} R _{0.69049}	0.016613
M_Kim	(0.00824,0.02193,0.02388,0.03615)L _{1.20490} R _{0.65311}	0.021585	
M_Liv	(0.00300,0.00812,0.00882,0.01954)L _{1.01010} R _{0.37608}	0.008648	
M_Tel	(0.02128,0.03348,0.03586,0.05167)L _{0.65427} R _{0.60188}	0.035228	
Chile	C_Gen	(0.00966,0.01667,0.01828,0.03466)L _{0.79394} R _{0.41382}	0.018320
	C_Agu	(0.01073,0.02375,0.02689,0.04934)L _{0.72299} R _{0.54948}	0.026568
	C_Bch	(0.02168,0.03806,0.04311,0.09364)L _{0.85247} R _{0.42108}	0.044302
	C_Bci	(0.00920,0.01720,0.01900,0.03361)L _{0.71870} R _{0.52764}	0.018951
	C_Ita	(0.00914,0.02256,0.02687,0.06516)L _{0.91444} R _{0.53595}	0.028187
	C_Cer	(0.00875,0.01817,0.02043,0.04436)L _{0.53978} R _{0.40792}	0.021116
	C_Enl	(0.02641,0.05480,0.06132,0.10541)L _{0.66403} R _{0.51610}	0.059899
C_Smc	(0.00408,0.00770,0.00881,0.02005)L _{0.96621} R _{0.44606}	0.009100	

Fuente: Elaboración propia a partir de Información de Economatica®

Tabla 8.6 Liquidez Difusa Esperada (Periodo II)

Activo		Liquidez	
		$\xi_i = (a_i, b_i, c_i, d_i)_{\pi_i, \rho_i}$	Valor Medio <i>Crisp</i> Credibilístico
Colombia	C_Dav	(0.01676,0.02733,0.02915,0.06643) $L_{0.75475}R_{0.39719}$	0.031266
	C_Cfc	(0.00927,0.01779,0.01959,0.03447) $L_{0.86215}R_{0.47835}$	0.019122
México	M_Alf	(0.01555,0.03864,0.04115,0.06489) $L_{0.45775}R_{0.44413}$	0.039917
	M_Als	(0.00307,0.01285,0.01461,0.03078) $L_{0.70361}R_{0.41616}$	0.014088
	M_Arc	(0.00714,0.01697,0.01837,0.02547) $L_{0.51428}R_{0.74403}$	0.017517
	M_Sur	(0.00447,0.01159,0.01319,0.02689) $L_{0.63779}R_{0.85407}$	0.014160
	M_Bim	(0.01020,0.01654,0.01738,0.02683) $L_{0.80284}R_{0.51043}$	0.017146
	M_Bmv	(0.00493,0.00924,0.01002,0.01654) $L_{0.84795}R_{0.53646}$	0.009778
	M_Cem	(0.04095,0.06103,0.06490,0.09622) $L_{0.66459}R_{0.51391}$	0.064273
	M_Che	(0.00255,0.00510,0.00578,0.01076) $L_{0.79233}R_{0.60969}$	0.005819
	M_C-C	(0.00489,0.01550,0.01618,0.02665) $L_{0.43573}R_{0.40665}$	0.015744
	M_Fem	(0.02425,0.03867,0.04104,0.05361) $L_{0.58848}R_{0.66503}$	0.039693
	M_Car	(0.00227,0.00638,0.00687,0.01218) $L_{0.45999}R_{0.47381}$	0.006829
	M_Gen	(0.00679,0.01751,0.01865,0.02966) $L_{0.49270}R_{0.55915}$	0.018285
	M_Ban	(0.03254,0.06007,0.06320,0.09999) $L_{0.54734}R_{0.52531}$	0.063101
	M_Inb	(0.00502,0.02010,0.02157,0.03826) $L_{0.53719}R_{0.43258}$	0.020718
	M_Mex	(0.03855,0.05448,0.05771,0.08625) $L_{0.62368}R_{0.47916}$	0.057659
	M_Aer	(0.00468,0.01319,0.01458,0.02822) $L_{0.72741}R_{0.56526}$	0.014556
	M_Gru	(0.00431,0.01781,0.02225,0.04902) $L_{1.10525}R_{0.48857}$	0.020879
	M_Kim	(0.00991,0.02338,0.02566,0.03844) $L_{0.51557}R_{0.50756}$	0.024381
	M_Liv	(0.00398,0.00883,0.00943,0.02105) $L_{0.57001}R_{0.39901}$	0.009908
	M_Ohl	(0.00458,0.01477,0.01678,0.04047) $L_{0.69965}R_{0.38008}$	0.016941
M_Tel	(0.02243,0.03449,0.03623,0.05173) $L_{0.65952}R_{0.58574}$	0.035825	
M_Wal	(0.05156,0.07539,0.08147,0.12196) $L_{0.56354}R_{0.46976}$	0.080603	
Chile	C_Gen	(0.01046,0.01772,0.01877,0.03500) $L_{0.81017}R_{0.41645}$	0.019007
	C_Agu	(0.01294,0.02655,0.02951,0.05365) $L_{0.74697}R_{0.48403}$	0.029058
	C_Bch	(0.02249,0.04127,0.04635,0.08209) $L_{0.77833}R_{0.46945}$	0.045408
	C_Bci	(0.01035,0.01806,0.02030,0.03974) $L_{0.87036}R_{0.45403}$	0.020419
	C_Ita	(0.00975,0.02602,0.03061,0.06670) $L_{0.70501}R_{0.53525}$	0.031240
	C_Col	(0.00896,0.01941,0.02176,0.04000) $L_{0.75252}R_{0.62990}$	0.021865
	C_Cer	(0.01037,0.02015,0.02174,0.04465) $L_{0.72369}R_{0.52850}$	0.022852
	C_Emb	(0.00616,0.01341,0.01503,0.03519) $L_{0.66294}R_{0.49792}$	0.016127
	C_Ena	(0.02985,0.06152,0.06677,0.10544) $L_{0.67812}R_{0.46247}$	0.063858
	C_Enl	(0.03178,0.05100,0.05501,0.08903) $L_{0.77053}R_{0.46766}$	0.054244
C_Fal	(0.03699,0.06187,0.06616,0.12382) $L_{0.61600}R_{0.40776}$	0.067624	

Fuente: Elaboración propia a partir de Información de Economatica®

Tabla 8.7 Liquidez Difusa Esperada (Periodo III)

Activo		Liquidez	
		$\xi_i = (a_i, b_i, c_i, d_i)_{\pi_i, \rho_i}$	Valor Medio Crisp Credibilístico
Colombia	C_Dav	(0.01718,0.02842,0.03097,0.06911) $L_{0.65830}R_{0.42059}$	0.033112
México	M_Alf	(0.02843,0.03967,0.04163,0.06486) $L_{0.63198}R_{0.42589}$	0.041944
	M_Als	(0.00444,0.01450,0.01582,0.03207) $L_{0.62593}R_{0.38400}$	0.015477
	M_Arc	(0.01065,0.01797,0.01921,0.02648) $L_{0.58674}R_{0.69850}$	0.018735
	M_Sur	(0.00690,0.01330,0.01619,0.02694) $L_{0.89778}R_{0.74756}$	0.015531
	M_Bim	(0.01208,0.01730,0.01853,0.02817) $L_{0.58796}R_{0.50187}$	0.018559
	M_Bmv	(0.00493,0.00939,0.01004,0.01749) $L_{0.77516}R_{0.56510}$	0.010085
	M_Cem	(0.04549,0.06461,0.06697,0.09701) $L_{0.61518}R_{0.53372}$	0.067374
	M_Fem	(0.02753,0.04033,0.04190,0.05506) $L_{0.68041}R_{0.60141}$	0.040994
	M_Car	(0.00380,0.00675,0.00717,0.01218) $L_{0.52196}R_{0.48177}$	0.007269
	M_Gen	(0.00835,0.01799,0.01896,0.02965) $L_{0.48613}R_{0.54731}$	0.018790
	M_Ban	(0.04234,0.06100,0.06456,0.09996) $L_{0.65305}R_{0.52956}$	0.065222
	M_Mex	(0.04033,0.05604,0.05912,0.08711) $L_{0.64124}R_{0.45153}$	0.058865
	M_Aer	(0.00698,0.01459,0.01610,0.02819) $L_{0.76884}R_{0.70414}$	0.016188
	M_Gru	(0.00617,0.02262,0.02601,0.04936) $L_{0.96333}R_{0.46047}$	0.023958
	M_Kim	(0.01477,0.02486,0.02618,0.03883) $L_{0.59113}R_{0.49153}$	0.025731
	M_Liv	(0.00485,0.00944,0.01034,0.02220) $L_{0.47980}R_{0.43124}$	0.010932
M_Ohl	(0.00606,0.01566,0.01717,0.04045) $L_{0.55511}R_{0.36738}$	0.017829	
M_Tel	(0.02407,0.03452,0.03637,0.05142) $L_{0.69295}R_{0.57594}$	0.036057	
Chile	C_Agu	(0.01374,0.02816,0.03170,0.05405) $L_{0.68360}R_{0.46910}$	0.030571
	C_Bch	(0.02292,0.04234,0.04665,0.08188) $L_{0.68663}R_{0.45949}$	0.046086
	C_Bci	(0.01067,0.01953,0.02114,0.03973) $L_{0.73435}R_{0.43927}$	0.021297
	C_Ita	(0.01067,0.02720,0.03084,0.06782) $L_{0.67528}R_{0.52241}$	0.032035
	C_San	(0.02150,0.04075,0.04451,0.07230) $L_{0.65872}R_{0.56269}$	0.043809
	C_Cer	(0.01161,0.02167,0.02424,0.05419) $L_{0.70742}R_{0.45560}$	0.025558
	C_Enl	(0.02578,0.04943,0.05322,0.08894) $L_{0.70011}R_{0.50172}$	0.052424
	C_Fal	(0.03706,0.06218,0.06728,0.13703) $L_{0.57127}R_{0.38929}$	0.069937
C_Smc	(0.00381,0.00381,0.00844,0.01996) $L_{0.92162}R_{0.40015}$	0.008753	

Fuente: Elaboración propia a partir de Información de Economatica®

Tabla 8.8 Liquidez Difusa Esperada (Cartera IV)

Activo		Liquidez	
		$\xi_i = (a_i, b_i, c_i, d_i)_{\pi_i, \rho_i}$	Valor Medio Crisp Credibilístico
Colombia	C_Dav	(0.01710,0.02908,0.03125,0.06911) $L_{0.66463}R_{0.40580}$	0.033237
México	M_Als	(0.00859,0.01509,0.01648,0.03231) $L_{0.81464}R_{0.40763}$	0.016619
	M_Arc	(0.01159,0.01882,0.02034,0.03212) $L_{0.58552}R_{0.41527}$	0.019975
	M_Sur	(0.00732,0.01555,0.01833,0.01833) $L_{1.12772}R_{0.67313}$	0.016606

Activo		Liquidez	
		$\xi_i = (a_i, b_i, c_i, d_i)_{\pi_i, \rho_i}$	Valor Medio <i>Crisp</i> Credibilístico
México	M_Bim	(0.01223,0.01730,0.01850,0.03057) $L_{0.61864}R_{0.47140}$	0.018864
	M_Bmv	(0.00493,0.00912,0.00982,0.01749) $L_{0.01749}R_{0.53382}$	0.009798
	M_Cem	(0.04710,0.06529,0.06874,0.09701) $L_{0.66144}R_{0.47818}$	0.067966
	M_Ele	(0.00475,0.01090,0.01185,0.02066) $L_{0.71767}R_{0.48842}$	0.011535
	M_Fem	(0.03044,0.04115,0.04216,0.06049) $L_{0.90206}R_{0.47753}$	0.042076
	M_Car	(0.00458,0.00695,0.00741,0.01643) $L_{0.59427}R_{0.35113}$	0.007909
	M_Gen	(0.01166,0.01800,0.01898,0.02960) $L_{0.62752}R_{0.54685}$	0.019148
	M_Ban	(0.04579,0.06181,0.06560,0.09827) $L_{0.74706}R_{0.52030}$	0.065870
	M_Mex	(0.04052,0.05699,0.05980,0.08622) $L_{0.56339}R_{0.46017}$	0.059590
	M_Aer	(0.00859,0.01596,0.01753,0.03040) $L_{0.73022}R_{0.58701}$	0.017571
	M_Gru	(0.00956,0.02635,0.02881,0.04936) $L_{0.95289}R_{0.55906}$	0.027165
	M_Kim	(0.01676,0.02529,0.02644,0.03883) $L_{0.62081}R_{0.51898}$	0.026350
M_Tel	(0.02187,0.03401,0.03578,0.05142) $L_{0.66943}R_{0.56224}$	0.035277	
Chile	C_Agu	(0.01548,0.03034,0.03275,0.05442) $L_{0.70776}R_{0.50281}$	0.032091
	C_Bch	(0.02633,0.04343,0.04674,0.08188) $L_{0.72701}R_{0.45651}$	0.046994
	C_Bci	(0.01173,0.02082,0.02201,0.03983) $L_{0.69715}R_{0.48924}$	0.022472
	C_Ita	(0.01245,0.03003,0.03408,0.06782) $L_{0.68234}R_{0.43185}$	0.033577
	C_San	(0.02363,0.03998,0.04328,0.07230) $L_{0.70518}R_{0.51107}$	0.043155
	C_Cer	(0.01161,0.02256,0.02478,0.05419) $L_{0.60781}R_{0.45019}$	0.026166
	C_Ena	(0.03443,0.06402,0.06777,0.09949) $L_{0.66878}R_{0.50353}$	0.065276
	C_Enl	(0.02258,0.04696,0.05235,0.08714) $L_{0.71484}R_{0.50060}$	0.050379
	C_Rip	(0.00278,0.00819,0.00930,0.02740) $L_{0.82936}R_{0.40100}$	0.010112
C_Smc	(0.00375,0.00727,0.00803,0.01822) $L_{1.00673}R_{0.35557}$	0.008106	

Fuente: Elaboración propia a partir de Información de Economática®

Al examinar el valor medio *crisp* credibilístico, a saber, la liquidez semanal esperada de las 4 muestras seleccionadas, se percibe que dos compañías mexicanas, Grupo Carso (M-Car) y Bolsa Mexicana de Valores (M-Bmv), y una compañía chilena, SM-Chile (C-Smc), son las acciones que exhiben el criterio de liquidez esperado más alto.

En oposición a lo anterior, las compañías con los menores valores medios *crisp* credibilístico de liquidez, son las mexicanas Grupo Financiero Banorte (M-Ban) y Cemex (M-Cem).

8.4 Asignación Óptima de Activos

El modelo credibilístico multiobjetivo de media-semivarianza-liquidez pretende resolver el problema en el cual un inversionista imaginario el 02 de enero de 2016, deseaba seleccionar una cartera en el mercado MILA en la cual va invertir toda su riqueza en acciones que ofrecen retornos difusos, de modo que se maximice el rendimiento y la liquidez esperada, al tiempo que se minimice el riesgo de dicha inversión. Así mismo, con el ánimo de mejorar el desempeño de la cartera y generar mejores resultados en un periodo de 22 meses, se asume realiza tres rebalances de la cartera en función del comportamiento del precio y la liquidez de las acciones que se transan en este mercado, en cada una de las siguientes fechas: 01 de julio de 2016, 02 de enero de 2017, y, 03 de julio de 2017.

En atención a lo anteriormente expuesto, la asignación óptima de activos (*i.e.* la solución eficiente) de las cuatro carteras óptimas que se utilizaran para realizar la estrategia de rebalanceo, se construirán utilizando los datos previamente presentados de la rentabilidad y liquidez esperada, y la información suministrada en el capítulo de la solución metodológica, esto es, $u_i = 0.3$, $l_i = 0.0$, $K = 10$.

8.4.1 Cartera I

Número de activos: 29, es decir, $i = 1, 2, \dots, 29$.

$$\begin{aligned} \text{Max } \mathcal{F}_1(\omega_i) = & -0.000597\omega_1 - 0.002076\omega_2 - 0.000703\omega_3 + 0.000740\omega_4 \\ & + 0.007611\omega_5 + 0.001791\omega_6 + 0.004403\omega_7 + 0.003348\omega_8 \\ & -0.000917\omega_9 + 0.000806\omega_{10}, \dots, -0.000270\omega_{29}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Min } \mathcal{F}_2(\omega_i) = & E[[-0.000597\omega_1 - 0.002076\omega_2 - 0.000703\omega_3 + 0.000740\omega_4 \\ & + 0.007611\omega_5 + 0.001791\omega_6 + 0.004403\omega_7 + 0.003348\omega_8 \\ & - 0.000917\omega_9 + 0.000806\omega_{10}, \dots, -0.000270\omega_{29} - E[-0.000597\omega_1 \\ & - 0.002076\omega_2 - 0.000703\omega_3 + 0.000740\omega_4 + 0.007611\omega_5 \\ & + 0.001791\omega_6 + 0.004403\omega_7 + 0.003348\omega_8 - 0.000917\omega_9 \\ & + 0.000806\omega_{10}, \dots, -0.000270\omega_{29}]^{-2}], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Max } \mathcal{F}_3(\omega_i) = & 0.030722\omega_1 + 0.0929076\omega_2 + 0.018482\omega_3 + 0.037472\omega_4 \\ & + 0.011686\omega_5 + 0.016395\omega_6 + 0.011421\omega_7 + 0.016319\omega_8 \\ & + 0.009491\omega_9 + 0.060546\omega_{10}, \dots, +0.009100\omega_{29}, \end{aligned}$$

Sujeto a

$$\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \omega_4 + \omega_5 + \omega_6 + \omega_7 + \omega_8 + \omega_9 + \omega_{10}, \dots, \omega_{29} = 1,$$

$$\omega_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, 29,$$

$$\omega_i - 0.3y_i \leq 0, \quad i = 1, 2, \dots, 29,$$

$$\omega_i - 0.0y_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, 29,$$

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6 + y_7 + y_8 + y_9 + y_{10}, \dots, y_{29} = 10,$$

$$y_i \in \{0,1\}, \quad i = 1, 2, \dots, 29,$$

8.4.2 Cartera II

Número de Activos: 35, esto es, $i = 1, 2, \dots, 35$.

$$\begin{aligned} \text{Max } \mathcal{F}_1(\omega_i) = & 0.000890\omega_1 - 0.000546\omega_2 + 0.000662\omega_3 + 0.007249\omega_4 \\ & + 0.002741\omega_5 + 0.004755\omega_6 + 0.003751\omega_7 + 0.000461\omega_8 \\ & + 0.004309\omega_9 + 0.001611\omega_{10}, \dots, +0.001149\omega_{35}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Min } \mathcal{F}_2(\omega_i) = & E[[0.000890\omega_1 - 0.000546\omega_2 + 0.000662\omega_3 + 0.007249\omega_4 \\ & + 0.002741\omega_5 + 0.004755\omega_6 + 0.003751\omega_7 + 0.000461\omega_8 \\ & + 0.004309\omega_9 + 0.001611\omega_{10}, \dots, +0.001149\omega_{35} - E[0.000890\omega_1 \\ & - 0.000546\omega_2 + 0.000662\omega_3 + 0.007249\omega_4 + 0.002741\omega_5 \\ & + 0.004755\omega_6 + 0.003751\omega_7 + 0.000461\omega_8 + 0.004309\omega_9 \\ & + 0.001611\omega_{10}, \dots, +0.001149\omega_{35}]^{-2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Max } \mathcal{F}_3(\omega_i) = & 0.031266\omega_1 + 0.019122\omega_2 + 0.039917\omega_3 + 0.014088\omega_4 \\ & + 0.017517\omega_5 + 0.014160\omega_6 + 0.017146\omega_7 + 0.009778\omega_8 \\ & + 0.064273\omega_9 + 0.005819\omega_{10}, \dots, +0.067624\omega_{35}, \end{aligned}$$

Sujeto a

$$\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \omega_4 + \omega_5 + \omega_6 + \omega_7 + \omega_8 + \omega_9 + \omega_{10}, \dots, \omega_{35} = 1,$$

$$\omega_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, 35,$$

$$\omega_i - 0.3y_i \leq 0, \quad i = 1, 2, \dots, 35,$$

$$\omega_i - 0.0y_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, 35,$$

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6 + y_7 + y_8 + y_9 + y_{10}, \dots, y_{35} = 10,$$

$$y_i \in \{0,1\}, \quad i = 1, 2, \dots, 35,$$

8.4.3 Cartera III

Número de Activos: 28, es decir, $i = 1, 2, \dots, 28$.

$$\begin{aligned} \text{Max } \mathcal{F}_1(\omega_i) = & 0.000494\omega_1 - 0.001228\omega_2 + 0.005775\omega_3 + 0.001027\omega_4 \\ & + 0.004030\omega_5 + 0.001424\omega_6 + 0.000229\omega_7 + 0.004348\omega_8 \\ & - 0.000093\omega_9 + 0.002481\omega_{10}, \dots, +0.000970\omega_{28}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Min } \mathcal{F}_2(\omega_i) = & E[[0.000494\omega_1 - 0.001228\omega_2 + 0.005775\omega_3 + 0.001027\omega_4 \\ & + 0.004030\omega_5 + 0.001424\omega_6 + 0.000229\omega_7 + 0.004348\omega_8 \\ & - 0.000093\omega_9 + 0.002481\omega_{10}, \dots, + 0.001149\omega_{35} - E[0.000494\omega_1 \\ & - 0.001228\omega_2 + 0.005775\omega_3 + 0.001027\omega_4 + 0.004030\omega_5 \\ & + 0.001424\omega_6 + 0.000229\omega_7 + 0.004348\omega_8 - 0.000093\omega_9 \\ & + 0.002481\omega_{10}, \dots, + 0.000970\omega_{28}]^-]^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Max } \mathcal{F}_3(\omega_i) = & 0.033112\omega_1 + 0.041944\omega_2 + 0.015477\omega_3 + 0.018735\omega_4 \\ & + 0.015531\omega_5 + 0.018559\omega_6 + 0.010085\omega_7 + 0.067374\omega_8 \\ & + 0.040994\omega_9 + 0.007269\omega_{10}, \dots, + 0.008753\omega_{28}, \end{aligned}$$

Sujeto a

$$\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \omega_4 + \omega_5 + \omega_6 + \omega_7 + \omega_8 + \omega_9 + \omega_{10}, \dots, \omega_{28} = 1,$$

$$\omega_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, 28,$$

$$\omega_i - 0.3y_i \leq 0, \quad i = 1, 2, \dots, 28,$$

$$\omega_i - 0.0y_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, 28,$$

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6 + y_7 + y_8 + y_9 + y_{10}, \dots, y_{28} = 10,$$

$$y_i \in \{0,1\}, \quad i = 1, 2, \dots, 28,$$

8.4.4 Cartera IV

Número de Activos: 27, esto es, $i = 1, 2, \dots, 27$.

$$\begin{aligned} \text{Max } \mathcal{F}_1(\omega_i) = & 0.000784\omega_1 + 0.004533\omega_2 + 0.001233\omega_3 + 0.003605\omega_4 \\ & + 0.001527\omega_5 - 0.000347\omega_6 + 0.002818\omega_7 + 0.000542\omega_8 \\ & + 0.000925\omega_9 + 0.001251\omega_{10}, \dots, + 0.001426\omega_{27}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Min } \mathcal{F}_2(\omega_i) = & E[[0.000784\omega_1 + 0.004533\omega_2 + 0.001233\omega_3 + 0.003605\omega_4 \\ & + 0.001527\omega_5 - 0.000347\omega_6 + 0.002818\omega_7 + 0.000542\omega_8 \\ & + 0.000925\omega_9 + 0.001251\omega_{10}, \dots, + 0.001426\omega_{35} - E[0.000784\omega_1 \\ & + 0.004533\omega_2 + 0.001233\omega_3 + 0.003605\omega_4 + 0.001527\omega_5 \\ & - 0.000347\omega_6 + 0.002818\omega_7 + 0.000542\omega_8 + 0.000925\omega_9 \\ & + 0.001251\omega_{10}, \dots, + 0.001426\omega_{27}]^{-2}], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Max } \mathcal{F}_3(\omega_i) = & 0.033237\omega_1 + 0.016619\omega_2 + 0.019975\omega_3 + 0.016606\omega_4 \\ & + 0.018864\omega_5 + 0.009798\omega_6 + 0.067966\omega_7 + 0.011535\omega_8 \\ & + 0.042076\omega_9 + 0.007909\omega_{10}, \dots, + 0.008106\omega_{27}, \end{aligned}$$

Sujeto a

$$\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \omega_4 + \omega_5 + \omega_6 + \omega_7 + \omega_8 + \omega_9 + \omega_{10}, \dots, \omega_{27} = 1,$$

$$\omega_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, 27,$$

$$\omega_i - 0.3y_i \leq 0, \quad i = 1, 2, \dots, 27,$$

$$\omega_i - 0.0y_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, 27,$$

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6 + y_7 + y_8 + y_9 + y_{10}, \dots, y_{27} = 10,$$

$$y_i \in \{0,1\}, \quad i = 1, 2, \dots, 27,$$

Los cuatro anteriores modelos credibilísticos multiobjetivo para la selección de las carteras óptimas se resuelven aplicando el algoritmo NSGAII vía uso de lenguaje R (<http://www.r-project.org/>).

8.4.5 Fronteras Óptimas de Pareto

La figura 8.2 muestra una representación tridimensional de los cuatro frentes óptimos de Pareto (o fronteras eficientes) generados en una única ejecución del algoritmo NSGAII para los cuatro modelos previamente formulados. El grupo de puntos representa el conjunto de soluciones no-dominadas (o carteras eficientes) para las cuales las funciones objetivo de rentabilidad-riesgo-liquidez no pueden ser mejoradas simultáneamente por ninguna otra solución. Nótese que estas carteras eficientes están ampliamente distribuidas en el espacio de soluciones, lo cual proporciona al tomador de decisiones una imagen real de los *trade-offs* (o mejores compromisos) entre los tres criterios seleccionados.

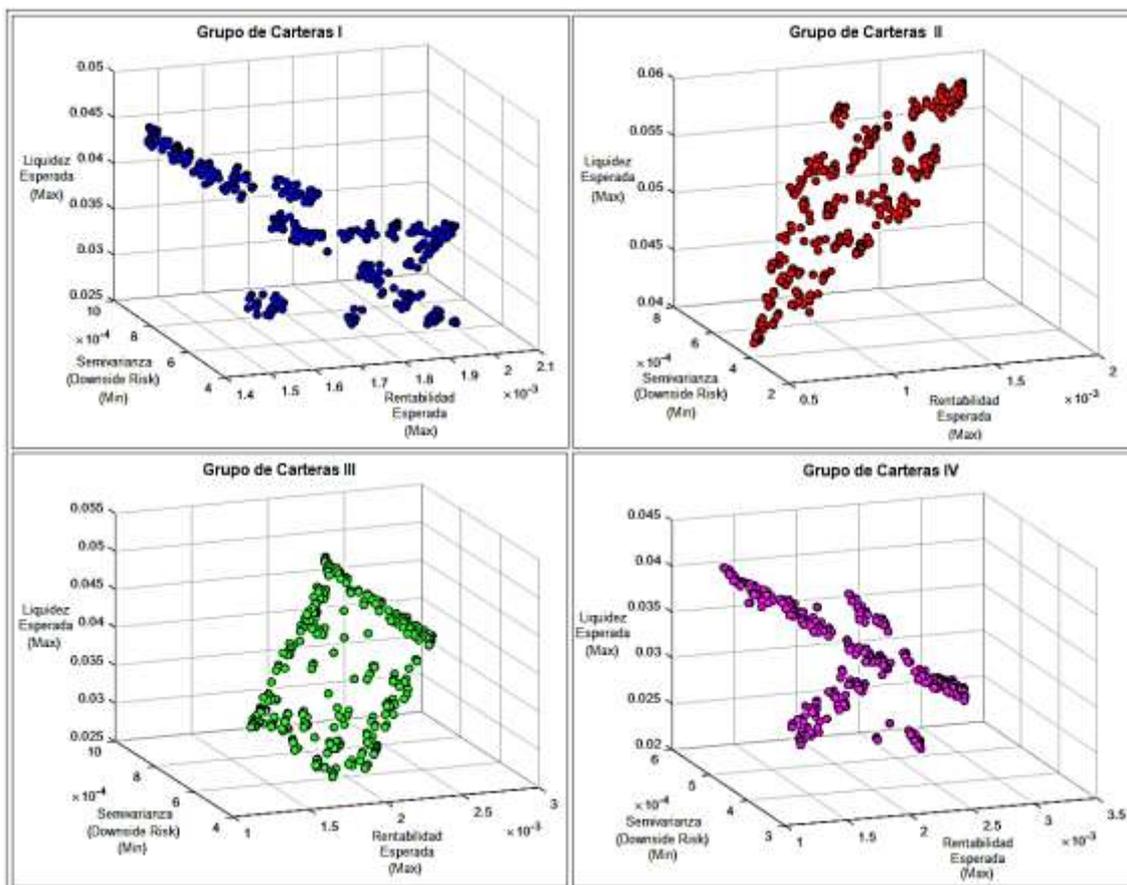


Figura 8.2 Fronteras Óptimas de Pareto del Modelo Credibilístico Multiobjetivo de Media-Semivarianza-Liquidez (Carteras I-IV)

Fuente: Elaboración propia

Análogamente, para esta misma ejecución del algoritmo NSGAI, cada par de funciones han sido representadas en gráficos bidimensionales en las figuras 8.3 a 8.5, las cuales muestran los valores de las funciones objetivo correspondientes a todas las soluciones generadas por el algoritmo propuesto. Cabe señalar que al visualizar la cobertura bi-objetivo del frente óptimo de Pareto, se percibe que todos ellos reportan buenos resultados, es decir, la población se distribuye de manera razonablemente uniforme sobre el frente.

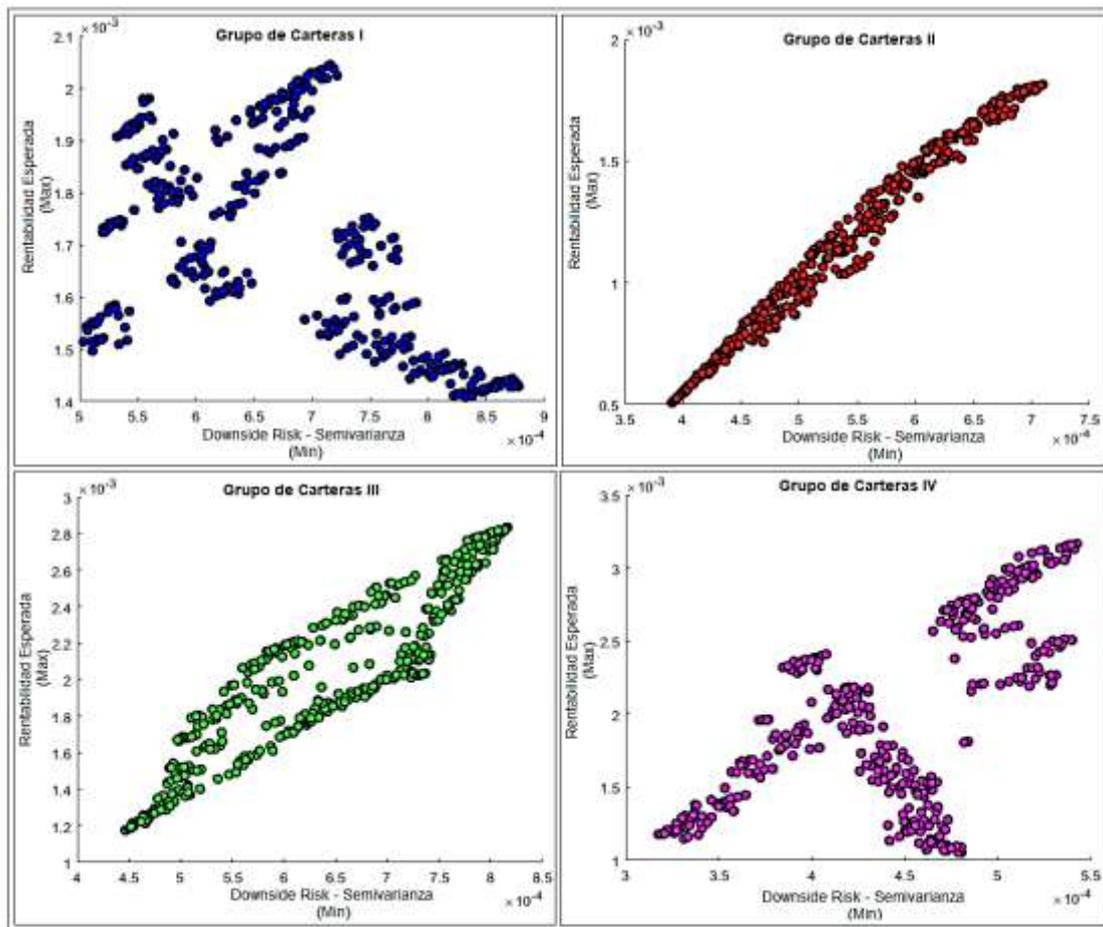


Figura 8.3 *Downside Risk* y Rentabilidad Esperada Correspondientes al Modelo Credibilístico Multiobjetivo de Media-Semivarianza-Liquidez (Carteras I-IV)

Fuente: Elaboración propia

Prosiguiendo el análisis, es conveniente estudiar qué tipo de soluciones se han obtenido a causa de la introducción de la liquidez como criterio de decisión. En el orden

de ideas anterior, el grupo de soluciones de las carteras I y IV de la figura 8.3 permite contextualizar y distinguir claramente dos subconjuntos diferentes de carteras de soluciones no-dominadas. Nótese que en el grupo de carteras I, los inversores con menor aversión al riesgo obtienen carteras no-dominadas con mayor rendimiento esperado, pero el comportamiento de este subconjunto del frente óptimo de Pareto es claramente un poco más disperso que los asociados con carteras para inversores conservadores o agresivos. Por su parte las soluciones de las carteras II y III se ubican en un solo grupo de carteras de soluciones no-dominadas y muestran un comportamiento más acorde a la relación positiva que se presenta entre el riesgo y la rentabilidad (*i.e.* a mayor riesgo, mayor rentabilidad).

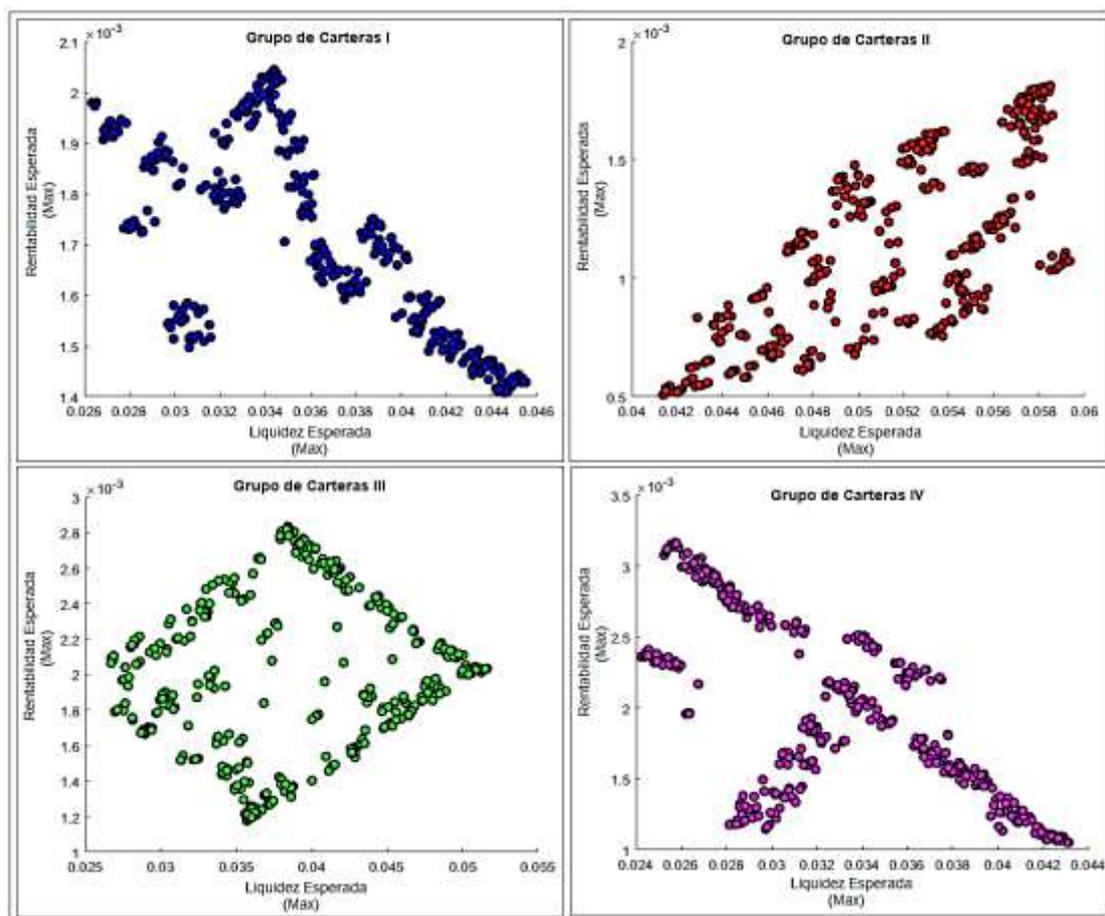


Figura 8.4 Liquidez y Rentabilidad Esperada Correspondientes al Modelo Credibilístico Multiobjetivo de Media-Semivarianza-Liquidez (Carteras I-IV)

Fuente: Elaboración propia

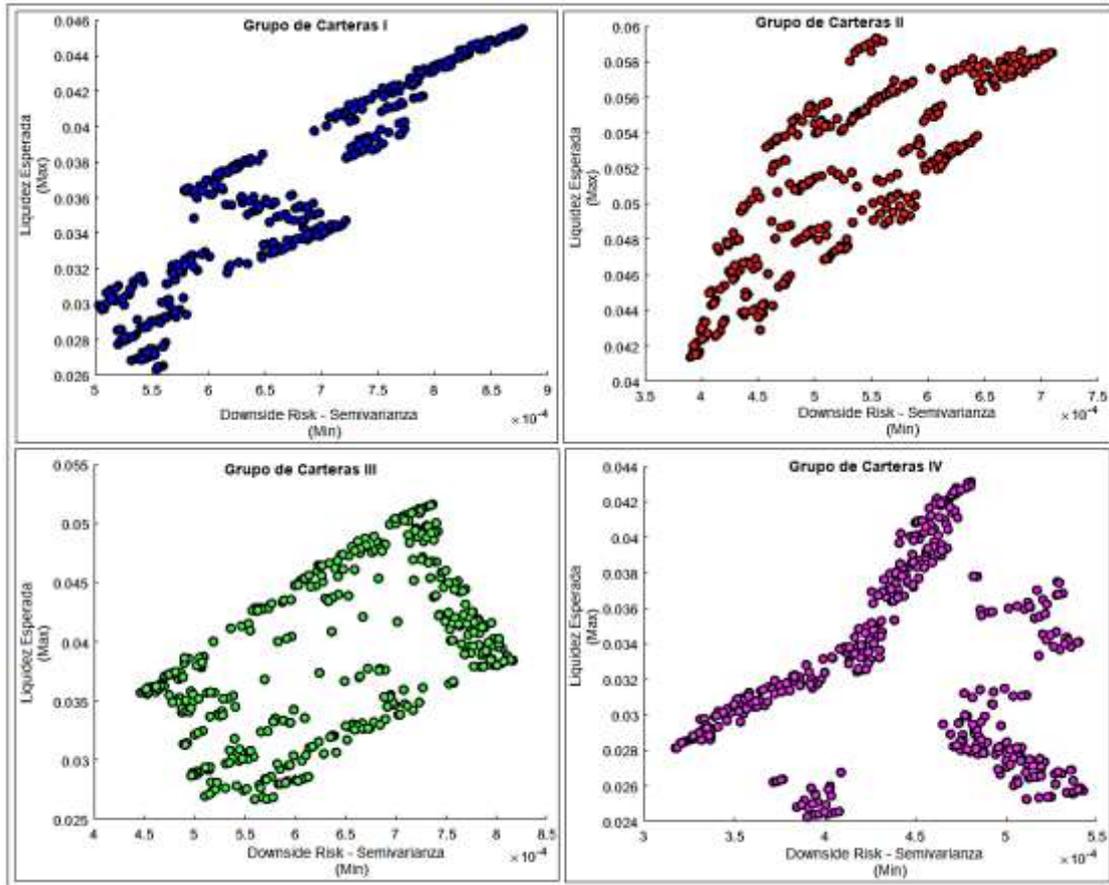


Figura 8.5 *Downside Risk* y Liquidez Esperada Correspondientes al Modelo Credibilístico Multiobjetivo de Media-Semivarianza-Liquidez (Carteras I-IV)

Fuente: Elaboración propia

El grupo de soluciones de las carteras I y IV de la figura 8.4 muestran que las carteras no-dominadas que tienen valores de liquidez más bajos logran valores de rentabilidad más altos, lo cual es coherente con las estrategias de liquidez que se adoptan en las decisiones de cartera, ya que cuanto más difícil resulte para un inversionista convertir la cartera que posee en efectivo, mayor será la rentabilidad que exija a ésta. No obstante, este mismo comportamiento no se presenta con el grupo de soluciones de las carteras eficientes II y III, las cuales muestran resultados totalmente diferentes a los anteriormente mencionados. Para finalizar este apartado, el grupo de soluciones no-dominadas de las carteras I a IV de la figura 8.5 muestra que algunas carteras no-

dominadas que tienen valores de riesgo *downside* más bajos logran de igual modo valores más bajos de liquidez. Sin embargo, este resultado difiere de la relación negativa que se presenta entre el riesgo y la liquidez, es decir, a menor riesgo mayor liquidez. La causa de los resultados anteriores y de los presentados con algunas carteras eficientes en el binomio liquidez-rentabilidad obedece a que el modelo es un problema de toma de decisiones que implica la optimización simultánea de tres objetivos en conflicto y, por lo tanto, la mejora de un objetivo conllevará al deterioro de otro/s.

8.4.6 Selección de las Carteras Óptimas

En cualquier situación de inversión práctica, un inversionista necesita seleccionar la cartera óptima para fines de inversión. En correspondencia con la afirmación anterior, la cartera óptima se determina utilizando la noción del ratio de Sortino, que mide la prima de rentabilidad por unidad de riesgo soportado de una cartera dada.

La tabla 8.9 presenta los parámetros que definen la función de pertenencia de la rentabilidad objetivo difusa de tipo L-R y su respectivo valor esperado para la cartera I, II, III y IV.

Tabla 8.9 Rentabilidad Objetivo Difusa Esperada (Cartera I-IV)

Cartera	Tasa de Madurez Constante de 6 Meses de los Bonos Americanos	
	$\xi_{Rf} = (a_{Rf}, b_{Rf}, c_{Rf}, d_{Rf})_{\pi_{Rf}, \rho_{Rf}}$	Valor Medio <i>Crisp</i> Credibilístico
Cartera I	$(0.00040, 0.00080, 0.00090, 0.00277)_{L_{1.00000} R_{0.44913}}$	0.001040
Cartera II	$(0.00050, 0.00090, 0.00110, 0.00470)_{L_{0.99641} R_{0.27891}}$	0.001293
Cartera III	$(0.00050, 0.00100, 0.00120, 0.00509)_{L_{1.35692} R_{0.59988}}$	0.001685
Cartera IV	$(0.00050, 0.00100, 0.00120, 0.01020)_{L_{1.35692} R_{0.67060}}$	0.002762

Fuente: Elaboración propia a partir de Información Estadística de
Federal Reserve Bank of St. Louis

Una vez definidos los valores medios *crisp* credibilísticos de la rentabilidad objetivo, se procede a determinar las carteras óptimas vía análisis de dos elementos básicos que las integran, esto es, la rentabilidad y el riesgo. Al maximizar el ratio credibilístico de Sortino, se maximiza la rentabilidad ajustada al riesgo de la cartera y se obtienen los pesos de inversión óptimos de una cartera de diez acciones (ver figura 8.6). Obsérvese que los pesos óptimos de las carteras seleccionadas muestran una mayor proporción de inversión en el mercado accionario mexicano: Cartera I [México: 60.85% - Chile: 39.15%], Cartera II [México: 69.30% - Chile: 30.70%], Cartera III [México: 84.77% - Chile: 15.23%] y Cartera IV [México: 74.87% - Chile: 25.13%].

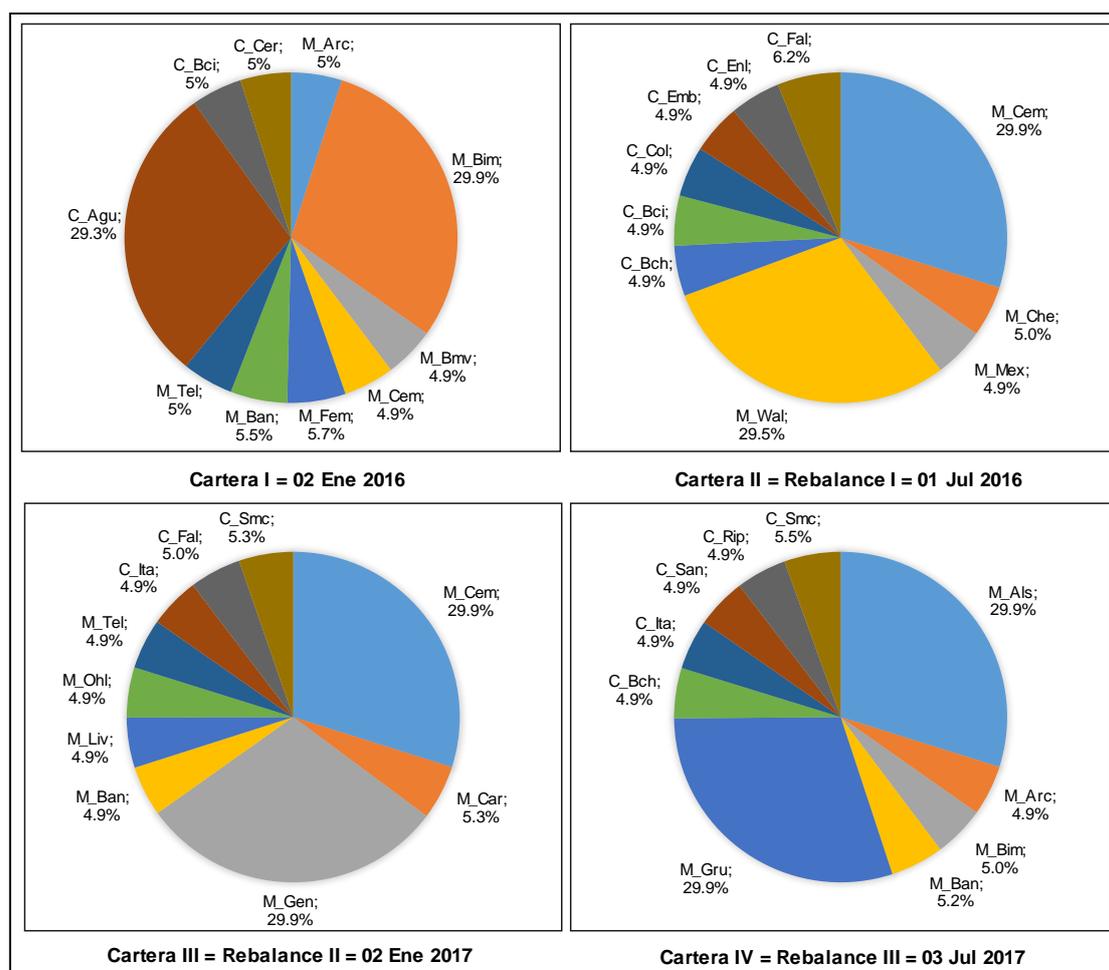


Figura 8.6 Asignación Óptima de los Activos de las (Carteras I-IV)

Fuente: Elaboración propia

Por su parte, la tabla 8.10 y la figura 8.7 presentan los retornos difusos esperados de las carteras óptimas I a IV y sus respectivas funciones de pertenencia. Como se puede apreciar, existe una desigualdad en la amplitud izquierda y derecha de estos números difusos de tipo L-R, es decir, $(b - a) \neq (d - c)$, lo cual evidencia la asimetría existente en las funciones de pertenencia de los 10 activos que conforman cada una de las carteras óptimas y, por lo tanto, la elección de la medida de riesgo *downside*, esto es, la semivarianza, fue la decisión más apropiada para medir el riesgo de la cartera.

Tabla 8.10 Rentabilidad Difusa Esperada (Carteras I-IV)

Cartera	Rentabilidad Esperada	
	$\xi_{r_p} = (a_{r_p}, b_{r_p}, c_{r_p}, d_{r_p})_{\pi_{r_p}, \rho_{r_p}}$	Valor Medio Crisp Credibilístico
Cartera I	$(-0.06614, -0.00260, 0.00450, 0.07577)_{L_{0.54269}R_{0.51432}}$	0.001879
Cartera II	$(-0.07540, -0.00302, 0.00502, 0.08160)_{L_{0.54111}R_{0.54992}}$	0.001877
Cartera III	$(-0.08014, -0.00202, 0.00656, 0.08786)_{L_{0.54263}R_{0.54860}}$	0.002933
Cartera IV	$(-0.06328, -0.00186, 0.00568, 0.07593)_{L_{0.55015}R_{0.51942}}$	0.003018

Fuente: Elaboración propia

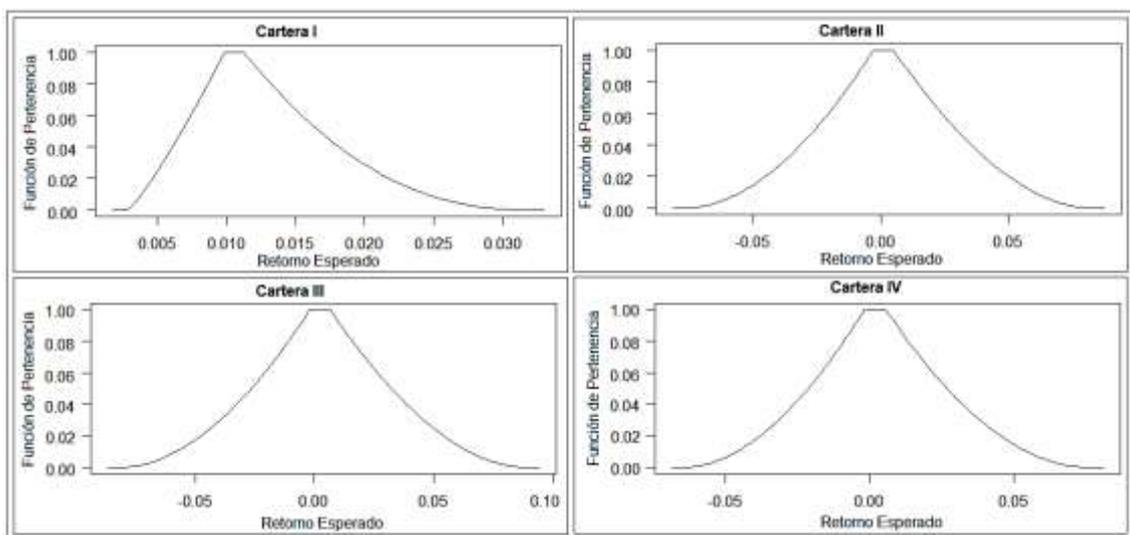


Figura 8.7 Funciones de Pertenencia Rentabilidad Difusa Esperada (Carteras I-IV)

Fuente: Elaboración propia

La figura 8.8 muestra las distribuciones de credibilidad de la rentabilidad difusa esperada de las carteras óptimas. Haciendo uso de la medida de credibilidad se puede determinar el nivel de ocurrencia de esta rentabilidad en un evento dado. A partir del teorema de inversión de credibilidad, la medida de credibilidad de una variable difusa de tipo L-R $[\xi = (a, b, c, d)_{\pi, \rho}]$ es (ver sección 4.3.4.1):

$$Cr\{\xi \leq x\} = \begin{cases} 0, & \text{Si } x \leq a, \\ \frac{1}{2} \left(1 - \left(\frac{b-x}{b-a} \right)^\pi \right), & \text{Si } a < x < b, \\ \frac{1}{2}, & \text{Si } b \leq x \leq c, \\ \frac{1}{2} \left(1 + \left(\frac{x-c}{d-c} \right)^\rho \right), & \text{Si } c < x < d, \\ 1, & \text{Si } d \leq x. \end{cases} \quad 4.9.$$

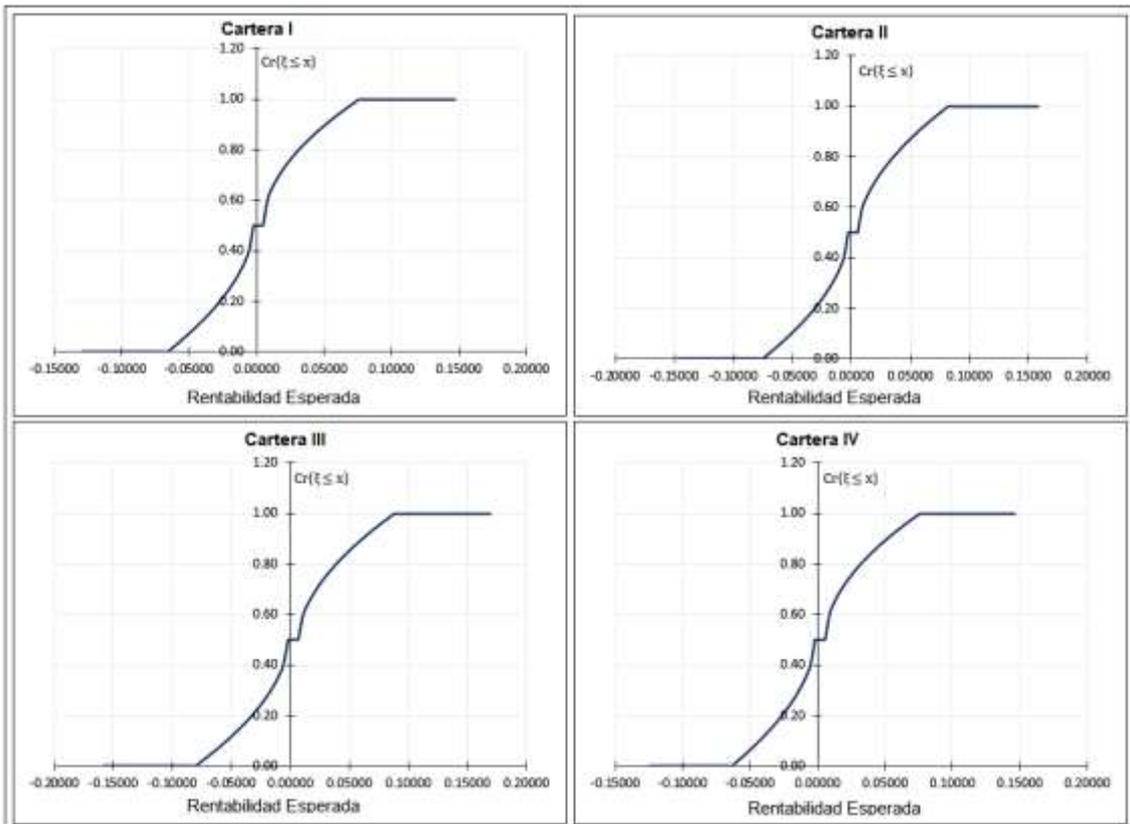


Figura 8.8 Distribuciones de Credibilidad Rentabilidad Difusa Esperada (Carteras I-IV)

Fuente: Elaboración propia

Para el retorno esperado de la cartera óptima I, en otras palabras, $\xi_{r_p} = (-0.06614, -0.00260, 0.00450, 0.07577)_{L_{0.54269}R_{0.51432}}$, y de acuerdo con la ecuación 4.9 se tiene que $Cr\{\xi \leq 0.001879\} = 0.5$, lo que significa que hay solo un 50% de posibilidad de que el rendimiento de la cartera sea menor o igual que el rendimiento esperado, esto es, 0.001879. Dado que la medida de credibilidad tiene la propiedad de auto-dualidad, es decir, $Cr\{\xi \leq x\} + Cr\{\xi > x\} = 1$, cuando se conoce el valor de $Cr\{\xi \leq x\}$, es fácil conocer el valor de $Cr\{\xi > x\}$. En el marco de la observación anterior, se tiene que $Cr\{\xi > x\} = 1 - Cr\{\xi \leq 0.001879\} = 0.5$, lo cual indica que existe un 50% de posibilidad de que el rendimiento de la cartera sea mayor al rendimiento esperado.

Análogamente, la figura 8.9 y 8.10 y la tabla 8.11 presentan la liquidez difusa esperada de las carteras I, II, III y IV y sus respectivas funciones de pertenencia y distribuciones de credibilidad.

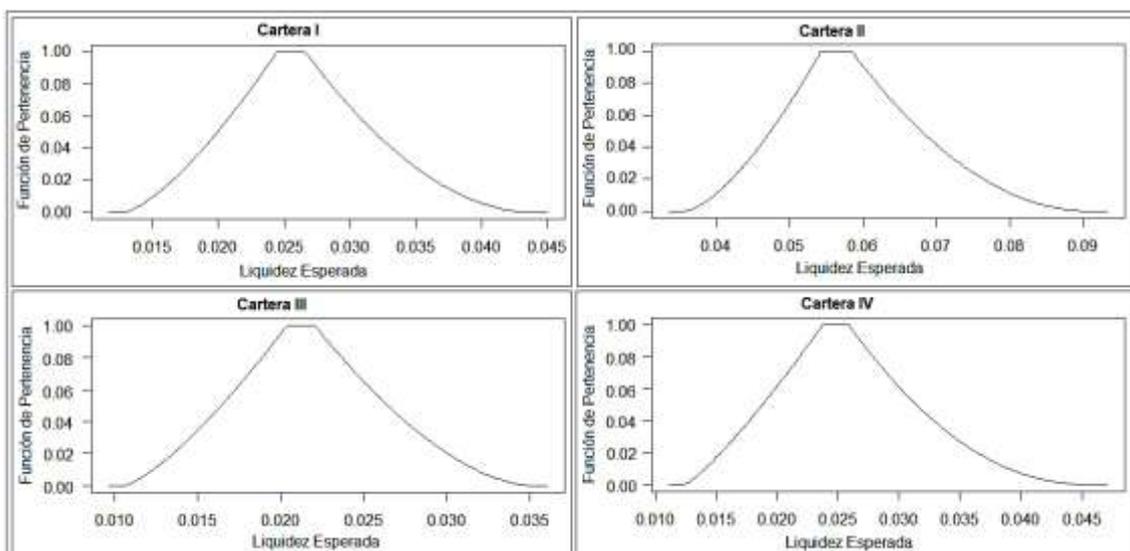


Figura 8.9 Funciones de Pertenencia Liquidez Difusa Esperada (Carteras I-IV)

Fuente: Elaboración propia

Tabla 8.11 Liquidez Difusa Esperada (Carteras I-IV)

Cartera	Rentabilidad Esperada	
	$\xi_{lp} = (a_{lp}, b_{lp}, c_{lp}, d_{lp}) \pi_{lp}, \rho_{lp}$	Valor Medio <i>Crisp</i> Credibilístico
Cartera I	$(0.01286, 0.02447, 0.02661, 0.04384) L_{0.71453} R_{0.52445}$	0.026082
Cartera II	$(0.03568, 0.05428, 0.05844, 0.09122) L_{0.66121} R_{0.49489}$	0.058085
Cartera III	$(0.01056, 0.02037, 0.02204, 0.03512) L_{0.75103} R_{0.58917}$	0.021527
Cartera IV	$(0.01239, 0.02376, 0.02586, 0.04586) L_{0.82649} R_{0.46779}$	0.025422

Fuente: Elaboración propia

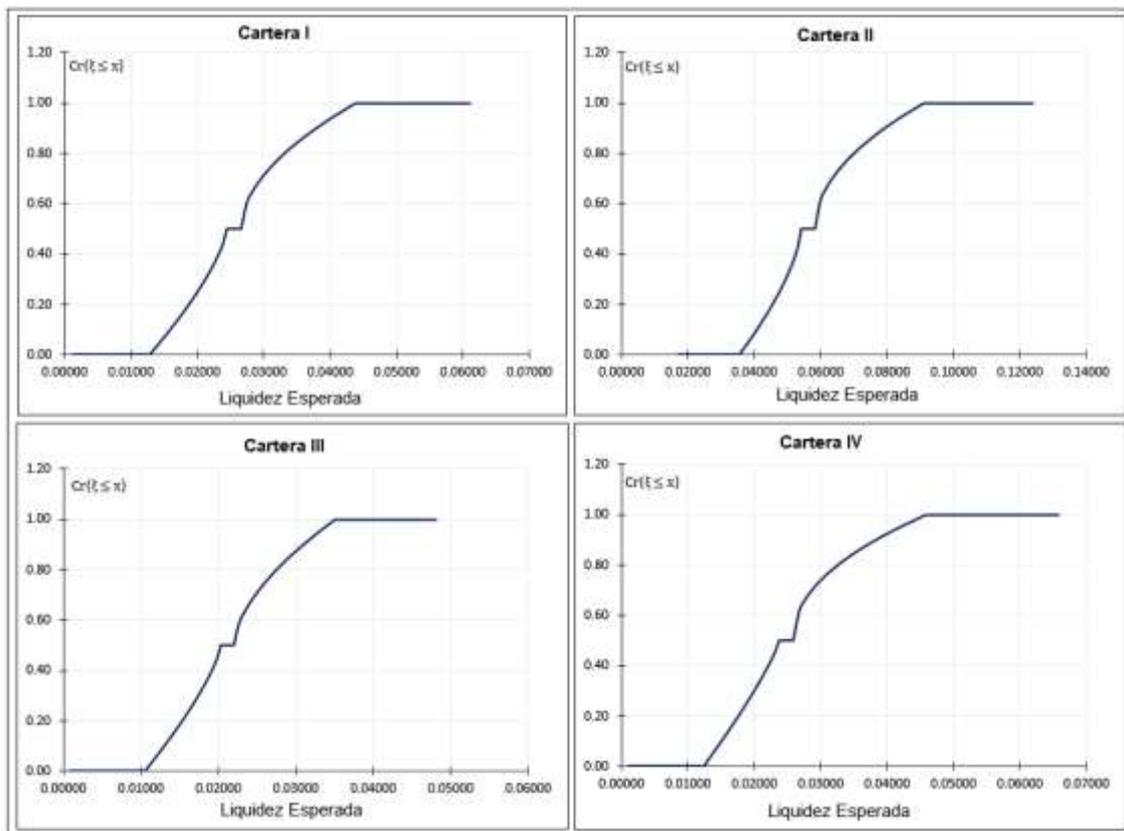


Figura 8.10 Distribuciones de Credibilidad Liquidez Difusa Esperada (Carteras I-IV)

Fuente: Elaboración propia

8.4.7 Rebalanceo de Carteras

Una vez seleccionadas las carteras óptimas del modelo *crisp* tri-objetivo propuesto se procede a analizar la estrategia de rebalanceo planteada. En este propósito, la figura 8.11 presenta la evolución de la estrategia de rebalanceo durante el periodo de enero de 2016

a octubre de 2017. Obsérvese que la estrategia de recomponer la cartera en 4 ocasiones durante el periodo de tiempo considerado conlleva a obtener mejores resultados frente a los que se hubiesen obtenido en una estrategia de no rebalanceo.



Figura 8.11 Tendencia del Comportamiento de la Cartera Rebalanceada Frente a Cartera Sin Rebalancear Enero 2016-October 2017

Fuente: Economatica®

En virtud de un análisis en un escenario más práctico, es oportuno estudiar el comportamiento de la estrategia de rebalanceo resultante del modelo credibilístico propuesto y contrastarlo con el desempeño de una alternativa de inversión existente en el mercado. En la Bolsa de Valores de México actualmente está listado el ETF MILA TRC, el cual se ha convertido en el principal vehículo de inversión de las Administradoras de Fondos de Pensiones de Chile y México. En el marco de las consideraciones anteriores, la figura 8.12 ilustra la tendencia del comportamiento de la cartera rebalanceada frente al ETF MILATRC durante el periodo de marzo de 2016 a octubre de 2017. Llama la atención que a pesar de que las dos tuvieron un desempeño muy diferente durante los 19

meses, ambas finalizan a octubre de 2017 con una rentabilidad final muy similar y cercana al 21% en el periodo de tiempo indicado.



Figura 8.12 Tendencia del Comportamiento de la Cartera Rebalanceada Frente al ETF MILATRC Marzo 2016-Octubre 2017

Fuente: Economatica®

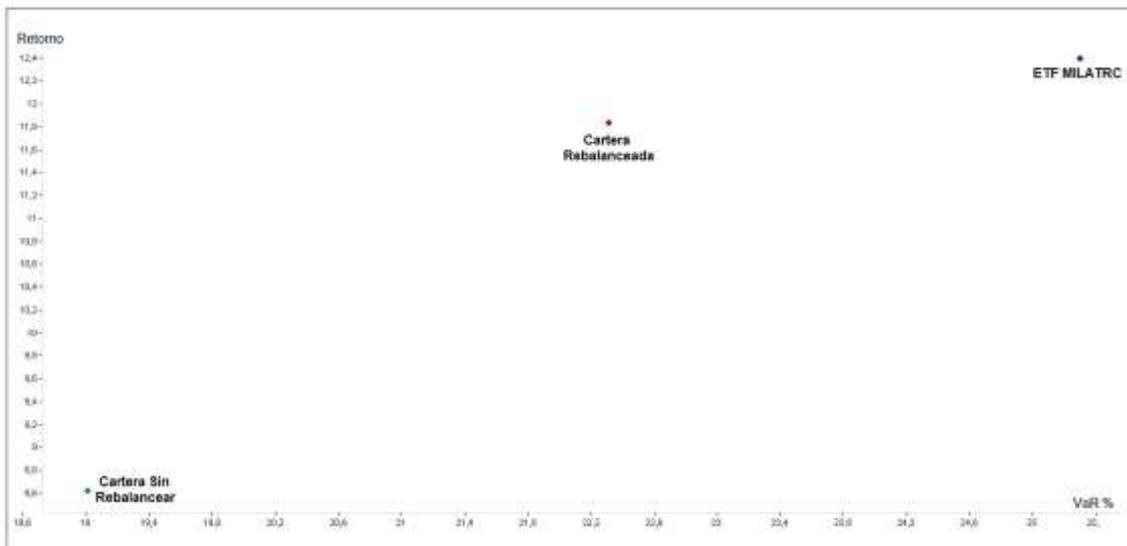


Figura 8.13 Dominancia Carteras Óptimas Frente al ETF MILATRC Marzo 2016-Octubre 2017

Fuente: Economatica®

No obstante, al analizar el binomio VaR-Rentabilidad (figura 8.13), se aprecia que el ETF MILATRC presenta un riesgo de mercado más alto (25,33% anual) en comparación al riesgo de mercado que presentó la cartera balanceada (22,34% anual). Nótese que los resultados en cuanto a VaR-Rentabilidad de la cartera rebalanceada se ubican en medio de los presentados por la cartera sin rebalancear y el ETF MILATRC.



Figura 8.14 Efecto del Tipo de Cambio en la Rentabilidad de la Cartera Rebalanceada para un Inversionista de Chile, Colombia, México y Perú Enero 2016-Octubre 2017.

Fuente: Economatica®

El Mercado Integrado Latinoamericano (MILA) es un acuerdo de integración en el cual los inversionistas de Chile, Colombia, México y Perú pueden adquirir títulos de renta variable de los 4 países indicados. En el orden de la consideración anterior, la figura 8.14 analiza los resultados que habría tenido un inversionista de esta región de América si hubiese invertido en la estrategia de rebalanceo resultante del modelo credibilístico multiobjetivo de media-semivarianza-liquidez. Cómo puede observarse, el mejor

resultado lo habría el inversionista mexicano, seguido por el colombiano, el peruano y el chileno. Cabe agregar que los notables resultados del comportamiento del inversionista de México obedecen a que las carteras óptimas resultantes han tenido en promedio más del 60% de participación en este país.

Finalmente, es de vital importancia señalar que el procedimiento propuesto en esta tesis doctoral puede ser utilizado para establecer una estrategia de inversión alternativa y está diseñado para cuantificar la incertidumbre asociada al rendimiento y liquidez futura de la inversión. En atención a lo anteriormente expuesto, se concluye que el modelo propuesto proporciona al tomador de decisiones una forma efectiva y factible de resolver el problema de selección de cartera.

Capítulo 9

9 CONCLUSIONES Y DESARROLLOS FUTUROS

Este último capítulo cierra esta tesis doctoral, presentando las principales conclusiones de la revisión de la literatura, la investigación empírica y las futuras líneas de investigación que, sustentadas en el modelo propuesto y desarrollado, se prevén puedan surgir a partir de esta investigación.

9.1 Conclusiones de la Revisión de la Literatura

Tras lo expuesto en los capítulos 2, 3 y 4, esta sección presenta las conclusiones de la revisión de la literatura. No obstante, si bien cada capítulo incluye un apartado con las conclusiones referentes a cada uno, este apartado expone las conclusiones generales de cada uno de los capítulos indicados:

9.1.1 Optimización de Carteras

Markowitz introdujo el marco de referencia de la optimización de cartera basado en un contexto bi-criterio de retorno-riesgo (media-varianza), cuyos principios continúan siendo el núcleo de varios enfoques modernos para la asignación de activos, análisis de inversiones, gestión de riesgos, presupuestos de capital y toma de decisiones bajo incertidumbre. No obstante, a medida que ha aumentado la vulnerabilidad e incertidumbre en los entornos empresariales y financieros globalizados, el marco introducido por Markowitz ha mostrado la necesidad de ser mejorado y, como consecuencia, se ha producido una creciente complejidad en los modelos que abordan el problema de selección de carteras, los cuales han incorporado nuevas medidas de riesgo (semivarianza, desviación absoluta, valor en riesgo VaR, valor en riesgo condicional CVaR, entre otras), y factores que permiten modelizar las preferencias del inversionista y/o de los mercados financieros (costo de transacciones, restricciones de cardinalidad, restricción de cota mínima y máxima de participación de un activo en la cartera, entre otros).

9.1.2 MOEAs en Optimización de Carteras

La revisión de los artículos más relevantes de la aplicación de los algoritmos evolutivos multiobjetivo (MOEAs) en el problema de optimización de carteras, evidencia que las principales líneas de investigación en este campo de la industria financiera se han enfocado a: i) El desarrollo de modelos que, además de las formulaciones clásicas, incluyen características más realistas, indicadas en el párrafo anterior; ii) La adaptación del modo de trabajo de los MOEAs a estos nuevos modelos, aprovechando su capacidad

para producir un conjunto de soluciones no-dominadas en una sola ejecución, y tratar las formulaciones complejas de los problemas que aparecen en este ámbito de aplicación.

9.1.3 Teoría de la Credibilidad

Debido a la información vaga y ambigua presente en los mercados financieros, la teoría de conjuntos difusos ha sido utilizada en el problema de selección de carteras para integrar información cualitativa y cuantitativa, las preferencias subjetivas de los inversionistas y el conocimiento experto. Bajo esta perspectiva, la medida de credibilidad, al ser una medida auto-dual y poseer la ventaja de consistencia con la ley de medio excluido y la ley de contradicción, ha jugado un papel fundamental para cuantificar la incertidumbre del rendimiento futuro de los activos financieros en los modelos de optimización de cartera bajo un entorno de decisión difusa.

9.2 Conclusiones de la Investigación Empírica

9.2.1 Caracterización de los Mercados de Capitales de Latinoamérica

El capítulo 5 expone los resultados de la caracterización de los mercados de capitales de Latinoamérica. Empero, si bien esta parte de la tesis presenta las conclusiones referentes a los resultados de este capítulo, este apartado expone la conclusión general del cumplimiento de este objetivo específico:

A partir de la década de los noventa, América Latina se vio embarcada en un proceso de globalización y liberalización financiera que implicó un dinamismo en sus mercados de capitales. No obstante, un análisis de la evolución de estos mercados durante el periodo 2000-2016 muestra que son pequeños, ilíquidos y concentrados, ubicándolos

como una réplica en menor escala de los mercados de capitales de los países desarrollados y algunas economías emergentes. Dadas las condiciones que anteceden, se evidencia que las expectativas generadas por las reformas emprendidas por los gobiernos de estos países para incentivar el desarrollo doméstico de sus mercados de capitales no se han alcanzado como se esperaba.

Frente a la situación descrita, las futuras políticas de desarrollo del mercado de capitales de América Latina deben tener en cuenta no sólo las características intrínsecas de los economías en vía de desarrollo (*i.e.* mercados pequeños e ilíquidos, falta de diversificación del riesgo, presencia de monedas débiles y prevalencia del riesgo sistemático), sino también la forma en que estas características limitan el alcance del desarrollo de mercados de capitales profundos.

9.2.2 Modelo Credibilístico Multiobjetivo de Media-Semivarianza-Liquidez para la Selección de carteras

Esta tesis doctoral tuvo como fin optimizar carteras multiobjetivo a la luz de la teoría de la credibilidad. Con el fin de cumplir con este propósito, se propuso un novedoso modelo difuso de optimización denominado “Modelo Credibilístico Multiobjetivo de Media-Semivarianza-Liquidez para la Selección de Carteras”. La incertidumbre de la liquidez y el rendimiento futuro de cada activo se modeló por medio de números difusos L-R con funciones de referencia tipo potencia, donde sus funciones de pertenencia se obtuvieron a partir de los percentiles muestrales de sus rendimientos históricos y del índice de liquidez en bolsa, respectivamente. Con el objetivo de conseguir un modelo más realista se consideró la restricción de cardinalidad que limita el número de activos que participan en las carteras y las restricciones de cotas superiores e inferiores que permiten

combinaciones de activos que respetan las preferencias del inversor. La introducción de restricciones realistas convirtió el modelo en un problema de programación cuadrática de enteros mixtos (*quadratic mixed-integer problem*) que fue resuelto aplicando el *Non-dominated Sorting Genetic Algorithm* (NSGAI).

La demostración de la efectividad y eficiencia del modelo en aplicaciones prácticas, se realizó para un inversionista imaginario que asume la toma de decisiones de inversión en el Mercado Integrado Latinoamericano (MILA), que integra los mercados bursátiles de Chile, Colombia, México y Perú.

Los resultados de los experimentos numéricos establecieron que el modelo propuesto proporciona conjuntos de carteras no-dominadas ampliamente distribuidas en el frente de Pareto, lo cual proporciona al tomador de decisiones una imagen real de los *trade-offs* (o mejores compromisos) entre los tres criterios seleccionados. Además, al maximizar el índice de Sortino por primera vez en un entorno de credibilidad, se seleccionó los pesos de inversión óptimos de una estrategia de rebalanceo correspondiente a 4 carteras de diez acciones. En virtud de un análisis en un escenario más práctico, el desempeño de esta estrategia de rebalanceo fue contrastado con el comportamiento del ETF MILA TRC durante el periodo de marzo de 2016 a octubre de 2017, mostrando que la cartera rebalanceada ofrece una mejor alternativa en cuanto a la rentabilidad y riesgo del mercado, medida por el VaR.

El procedimiento propuesto en esta tesis doctoral puede ser utilizado para establecer una estrategia de inversión alternativa y está diseñado para cuantificar la incertidumbre asociada al rendimiento y la liquidez futura de la inversión. En atención a lo anteriormente

expuesto, se concluye que el modelo propuesto proporciona al tomador de decisiones una forma efectiva y factible de resolver el problema de selección de cartera.

9.3 Futuras Líneas de Investigación

Esta tesis doctoral desarrolló un modelo de optimización empleando un método distintivo de medición del riesgo-retorno-liquidez, que puede proveer a los inversionistas una información más completa y útil durante el proceso de toma de decisiones. Empero, para cualquier línea futura de investigación, hay algunos aspectos que no han logrado incluirse en el alcance de esta tesis doctoral, los cuales serían dignos de ser investigados en trabajos futuros:

i) Técnica de Estimación Sofisticada de la Rentabilidad y el Riesgo: Esta investigación empleó una técnica de estimación novedosa de la rentabilidad y el riesgo para la selección de carteras, combinando métodos financieros y la teoría de conjuntos difusos. No obstante, podría haber formas más efectivas para modelar el rendimiento futuro y evaluar el riesgo potencial en un entorno económico de alta incertidumbre y sujeto a continuos cambios.

ii) Costos de Transacción: Esta tesis consideró 3 restricciones realistas (cardinalidad, cota mínima y cuota máxima de participación de un activo en la cartera). Sin embargo, en los mercados financieros, la compra y venta de activos acarrea el pago de comisiones de corretaje e impuestos a los inversionistas. Por lo anterior, desde un punto de vista más práctico, el modelo de optimización de cartera podría extenderse incorporando como restricción los costos de transacción.

iii) Optimización de Carteras Multiperiodo: El problema de optimización multiobjetivo de esta investigación evalúa la rentabilidad-riesgo-liquidez de la cartera en un solo periodo de tiempo. No obstante, en las condiciones cambiantes del mercado, el marco de un solo periodo adolece de una estrategia miope cuando se aplica repetidamente en varios periodos posteriores, debido a que asume que la rentabilidad de un activo en cada periodo de inversión es independiente. En este orden de ideas, sería interesante ampliar el modelo a un problema de selección de carteras multiperiodo y de optimización dinámica.

iv) Análisis de sensibilidad: En futuros trabajos, se podría aplicar un análisis de sensibilidad para evaluar qué restricciones son más importantes, así como también, que activos financieros influyen más en el impacto del desempeño global de la cartera.

REFERENCIAS

- Acerbi, C., & Tasche, D. (2002). On the coherence of expected shortfall. *Journal of Banking & Finance*, 26(7), 1487–1503.
- Adjasi, C. K. D., & Biekpe, N. B. (2006). Stock Market Development and Economic Growth: The Case of Selected African Countries. *African Development Review*, 18(1), 144–161.
- Akian, M., Menaldi, J. L., & Sulem, A. (1996). On an Investment-Consumption Model with Transaction Costs. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 34(1), 329–364.
- Alonso, J. C., & Berggrun, L. (2015). *Introduccion al analisis de riesgo financiero* (3rd ed.). Eco Ediciones.
- Anagnostopoulos, K. P., & Mamanis, G. (2010). A portfolio optimization model with three objectives and discrete variables. *Computers & Operations Research*, 37(7), 1285–1297.
- Anagnostopoulos, K. P., & Mamanis, G. (2011a). Multiobjective evolutionary algorithms for complex portfolio optimization problems. *Computational Management Science*, 8(3), 259–279.
- Anagnostopoulos, K. P., & Mamanis, G. (2011b). The mean–variance cardinality constrained portfolio optimization problem: An experimental evaluation of five multiobjective evolutionary algorithms. *Expert Systems with Applications*.
- Andriosopoulos, K., & Nomikos, N. (2014). Performance replication of the Spot Energy Index with optimal equity portfolio selection: Evidence from the UK, US and Brazilian markets. *European Journal of Operational Research*, 234(2), 571–582.
- Arbeláez, M. A., Zuluaga, S., & Guerra, M. L. (2002). *El mercado de capitales colombiano en los noventa y las firmas comisionistas de bolsa*. Bogota: Alfaomega-Fedesarrollo.
- Arenas-Parra, M., Bilbao-Terol, A., & Rodríguez-Uría, M. V. (2001). A fuzzy goal programming approach to portfolio selection. *European Journal of Operational Research*, 133(2), 287–297.

- Armanianzas, R., & Lozano, J. A. (2015). A Multiobjective Approach to the Portfolio Optimization Problem. In *2005 IEEE Congress on Evolutionary Computation* (Vol. 2, pp. 1388–1395). Edinburgh, Scotland, UK: IEEE.
- Arnone, S., Loraschi, A., & Tettamanzi, A. (1993). A genetic approach to portfolio selection. *Neural Network World - International Journal on Neural and Mass - Parallel Computing and Information Systems*, 3(6), 597–604.
- Artzner, P., Delbaen, F., Eber, J. M., & Heath, D. (1999). Coherent Measures of Risk. *Mathematical Finance*, 9(3), 203–228.
- Arzac, E. R., & Bawa, V. S. (1977). Portfolio choice and equilibrium in capital markets with safety-first investors. *Journal of Financial Economics*, 4(3), 277–288.
- Azmi, R. (2013). *Investment Portfolio Selection Using Goal Programming: An Approach to Making Investment Decisions*. Newcastle: Cambridge Scholars Publishing.
- Azmi, R., & Tamiz, M. (2010). A Review of Goal Programming for Portfolio Selection. In Jones D., Tamiz M., & Ries J. (Eds.), *Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems* (pp. 15–33). Springer, Berlin, Heidelberg.
- Babaei, S., Sepehri, M. M., & Babaei, E. (2015). Multi-objective portfolio optimization considering the dependence structure of asset returns. *European Journal of Operational Research*, 244(2), 525–539.
- Bäck, T., Fogel, D. B., & Michalewics, Z. (1997). *Handbook of evolutionary computation*. Oxford: Oxford University Press.
- Bäck, T., & Schwefel, H. P. (1993). An Overview of Evolutionary Algorithms for Parameter Optimization. *Evolutionary Computation*, 1(1), 1–23.
- Bahadur, S., & Neupane, S. (2006). Stock market and economic development: a causality test. *The Journal of Nepalese Business Studies*, 3(1), 36–44.
- Banco Central de la Reserva del Perú. (2017). Estadísticas Mercado de Capitales. Retrieved September 15, 2017, from <http://www.bcrp.gob.pe/estadisticas/cuadros-de-la-nota-semanal.html>
- Barak, S., Abessi, M., & Modarres, M. (2013). Fuzzy turnover rate chance constraints portfolio model. *European Journal of Operational Research*, 228(1), 141–147.
- Bawa, V. S. (1975). Optimal rules for ordering uncertain prospects. *Journal of Financial Economics*, 2(1), 95–121.

- Bawa, V. S. (1976). Admissible Portfolio for All Individuals. *The Journal of Finance*, 31(4), 1169–1183.
- Bawa, V. S., & Lindenberg, E. B. (1977). Capital market equilibrium in a mean-lower partial moment framework. *Journal of Financial Economics*, 5(2), 189–200.
- Bencivenga, V. R., & Smith, B. D. (1991). Financial Intermediation and Endogenous Growth. *The Review of Economic Studies*, 58(2), 195.
- Bermúdez, J. D., Segura, J. V., & Vercher, E. (2007). Modelos borrosos de optimización para la selección de carteras basados en intervalos de medias. In *Cuadernos del CIMBAGE - XII Congreso Internacional de la Sociedad de Gestión y Economía Fuzzy (SIGEF)* (p. 27–36 paginas). Bahía Blanca (Argentina).
- Bermúdez, J. D., Segura, J. V., & Vercher, E. (2012). A multi-objective genetic algorithm for cardinality constrained fuzzy portfolio selection. *Fuzzy Sets and Systems*, 188(1), 16–26.
- Bermudez, J. D., Segura, J. V., & Vercher, E. (2007). A fuzzy ranking strategy for portfolio selection applied to the Spanish stock market. In *2007 IEEE International Fuzzy Systems Conference* (pp. 1–4). IEEE.
- Bermúdez, J. D., & Vercher, E. (2012). Selección de carteras mediante un algoritmo evolutivo con múltiples objetivos. In *VIII Congreso Español sobre Metaheurística, Algoritmos Evolutivos y Bioinspirados (MAEB 2012)* (pp. 383–389). Albacete (España).
- Bhalla, V. K. (2008). *Investment management: security analysis and portfolio management* (19th ed.). New Delhi: Chand.
- Boudt, K., Lu, W., & Peeters, B. (2015). Higher order comoments of multifactor models and asset allocation. *Finance Research Letters*, 13, 225–233.
- Branke, J., Scheckenbach, B., Stein, M., Deb, K., & Schmeck, H. (2009). Portfolio optimization with an envelope-based multi-objective evolutionary algorithm. *European Journal of Operational Research*, 199(3), 684–693.
- Brooks, C. (2002). *Introductory econometrics for finance*. Cambridge University Press.
- Brown, D. B., & Smith, J. E. (2011). Dynamic Portfolio Optimization with Transaction Costs: Heuristics and Dual Bounds. *Management Science*, 57(10), 1752–1770.
- Cadena, X. (2004). *Los determinantes de la prima de riesgo país colombiana* (Coyuntura Economica).

- Calvo, C., Ivorra, C., & Liern, V. (2015). Soft Computing Techniques for Portfolio Selection: Combining SRI with Mean-Variance Goals. In E. Ballesterro & A. Pérez-Gladish, B. Garcia-Bernabeu (Eds.), *Socially Responsible Investment. International Series in Operations Research & Management Science*, vol 219 (pp. 283–301). Springer, Cham.
- Calvo, C., Ivorra, C., & Liern, V. (2016). Fuzzy Portfolio Selection Including Cardinality Constraints and Integer Conditions. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 170(1), 343–355.
- Campbell, J. Y., Lettau, M., Malkiel, B. G., & Xu, Y. (2001). Have Individual Stocks Become More Volatile? An Empirical Exploration of Idiosyncratic Risk. *The Journal of Finance*, 56(1), 1–43.
- Campos, L., & Verdegay, J. L. (1989). Linear programming problems and ranking of fuzzy numbers. *Fuzzy Sets and Systems*, 32(1), 1–11.
- Caporale, G. M., Howells P., G. A., & Soliman, A. M. (2004). Stock market development and economic growth: the causal linkage. *Journal of Economic Development*, 29(1), 33–50.
- Carlsson, C., Fullér, R., & Majlender, P. (2002). A possibilistic approach to selecting portfolios with highest utility score. *Fuzzy Sets and Systems*, 131(1), 13–21.
- Castillo, M. G., & Coello, C. A. (2007). Applications of multi-objective evolutionary algorithms in economics and finance: A survey. In *2007 IEEE Congress on Evolutionary Computation* (pp. 532–539). IEEE.
- Cesarone, F., Scozzari, A., & Tardella, F. (2013). A new method for mean-variance portfolio optimization with cardinality constraints. *Annals of Operations Research*, 205(1), 213–234.
- Chang, T. J., Meade, N., Beasley, J. E., & Sharaiha, Y. M. (2000). Heuristics for cardinality constrained portfolio optimisation. *Computers & Operations Research*, 27(13), 1271–1302.
- Chang, T. J., Yang, S. C., & Chang, K. J. (2009). Portfolio optimization problems in different risk measures using genetic algorithm. *Expert Systems with Applications*, 36(7), 10529–10537.
- Chapados, N. (2011). *Portfolio choice problems: an introductory survey of single and multiperiod models*. Springer.
- Chen, J. E., & Otto, K. N. (1995). Constructing membership functions using interpolation and measurement theory. *Fuzzy Sets and Systems*, 73(3), 313–327.
- Chen, J. M. (2016). *Postmodern Portfolio Theory*. New York: Palgrave Macmillan US.

- Chen, Y., Liu, Y. K., & Chen, J. (2006). Fuzzy Portfolio Selection Problems Based on Credibility Theory. In Yeung D.S., Liu Z.Q., Wang X.Z., & Yan H. (Eds.), *Advances in Machine Learning and Cybernetics. Lecture Notes in Computer Science* (Vol 3930, pp. 377–386). Springer, Berlin, Heidelberg.
- Chen, Y., & Wang, X. (2015). A hybrid stock trading system using genetic network programming and mean conditional value-at-risk. *European Journal of Operational Research*, 240(3), 861–871.
- Chiam, S. C., Al Mamun, A., & Low, Y. L. (2007). A realistic approach to evolutionary multiobjective portfolio optimization. In *2007 IEEE Congress on Evolutionary Computation* (pp. 204–211). IEEE.
- Chiam, S. C., Tan, K. C., & Al Mamun, A. (2008). Evolutionary multi-objective portfolio optimization in practical context. *International Journal of Automation and Computing*, 5(1), 67–80.
- Choobineh, F., & Branting, D. (1986). A simple approximation for semivariance. *European Journal of Operational Research*, 27(3), 364–370.
- Chunhachinda, P., Dandapani, K., Hamid, S., & Prakash, A. J. (1997). Portfolio selection and skewness: Evidence from international stock markets. *Journal of Banking & Finance*, 21(2), 143–167.
- Cintra, M. E., Camargo, H. A., & Monard, M. C. (2008). A study on techniques for the automatic generation. In *Congresso da Academia Trinacional de Ciências (C3N)* (Vol. 1, pp. 1–10).
- Clempner, J. (2014). Mono-Objective Function Analysis Using an Optimization Approach. *IEEE Latin America Transactions*, 12(2), 300–305.
- Coello, C. A. (1999). A Comprehensive Survey of Evolutionary-Based Multiobjective Optimization Techniques. *Knowledge and Information Systems*, 1(3), 269–308.
- Coello, C. A. (2006). Evolutionary multi-objective optimization: a historical view of the field. *IEEE Computational Intelligence Magazine*, 1(1), 28–36.
- Coello, C. A., Lamont, G. B., & Van, D. A. (2007). *Evolutionary algorithms for solving multi-objective problems* (2nd ed.). Springer.
- Corazza, M., Fasano, G., & Gusso, R. (2013). Particle Swarm Optimization with non-smooth penalty reformulation, for a complex portfolio selection problem. *Applied Mathematics and Computation*, 224, 611–624.

- Corne, D., Knowles, J., & Oates, M. (2000). The Pareto envelope-based selection algorithm for multiobjective optimization. In *Parallel Problem Solving from Nature VI Conference* (pp. 839–848). Springer.
- Cottin, C., & Döhler, S. (2009). *Risikoanalyse : Modellierung, Beurteilung und Management von Risiken mit Praxisbeispielen*. Vieweg + Teubner.
- Crama, Y., & Schyns, M. (2003). Simulated annealing for complex portfolio selection problems. *European Journal of Operational Research*, 150(3), 546–571.
- Crossley, W. A., & Williams, E. A. (2000). Simulated annealing and genetic algorithm approaches for discontinuous coverage satellite constellation design. *Journal Engineering Optimization*, 32(3), 353–371.
- Cura, T. (2009). Particle swarm optimization approach to portfolio optimization. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 10(4), 2396–2406.
- Danthine, J. P., & Donaldson, J. B. (2005). *Intermediate financial theory*. Elsevier.
- Darwin, C. (1859). *The Origin of Species: By Means of Natural Selection or the Preservation of Favoured Races in the Struggle for Life*. Murray, London (Reissue ed).
- Davis, M. H. A., & Norman, A. R. (1990). Portfolio Selection with Transaction Costs. *Mathematics of Operations Research*, 15(4), 676–713.
- De Cooman, G. (1997). Possibility theory I–III. *International Journal of General System*, 25, 291–371.
- Deb, K. (2001). *Multi-objective optimization using evolutionary algorithms*. John Wiley & Sons.
- Deb, K. (2012). *Optimization for engineering design: algorithms and examples* (2nd ed.). Prentice Hall of India.
- Deb, K., Agrawal, K., Pratap, A., & Meyarivan, T. (2002). A Fast Elitist Non-dominated Sorting Genetic Algorithm for Multi-objective Optimization: NSGA-II. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 6(2), 182–197.
- Deb, K., Agrawal, S., Pratap, A., & Meyarivan, T. (2000). A Fast Elitist Non-dominated Sorting Genetic Algorithm for Multi-objective Optimization: NSGA-II. In Schoenauer M. et al. (Ed.), *Parallel Problem Solving from Nature PPSN VI. PPSN 2000. Lecture Notes in Computer Science* (Vol. 1917, pp. 849–858). Springer, Berlin, Heidelberg.
- DeLlano-Paz, F. (2015). *Un modelo para la selección de carteras eficientes de activos energéticos en el marco de la Unión Europea (Ph.D. dissertation)*. Universidade da Coruña.

- Demirgüç-Kunt, A., & Levine, R. (1996). Stock Market Development and Financial Intermediaries: Stylized Facts. *World Bank Economic Review*, 10(2), 291–321.
- Deng, G. F., Lin, W. T., & Lo, C. C. (2012). Markowitz-based portfolio selection with cardinality constraints using improved particle swarm optimization. *Expert Systems with Applications*, 39(4), 4558–4566.
- Devereux, M. B., & Smith, G. W. (1994). International Risk Sharing and Economic Growth. *International Economic Review*, 35(3), 535.
- Dowd, K. (2002). *Measuring market risk*. John Wiley & Sons.
- Dowd, K. (2005). *Measuring market risk*. John Wiley & Sons.
- Downes, J. (2014). *Dictionary of finance and investment terms* (9th ed.). New York: Barrons Educational Serie.
- Dubois, D. J. (1980). *Fuzzy sets and systems: theory and applications* (Vol 144). New York: Academic Press.
- Dubois, D. J., & Prade, H. (1985). A note on measures of specificity for fuzzy sets. *International Journal of General Systems*, 10(4), 279–283.
- Dubois, D. J., & Prade, H. (1987a). Fuzzy numbers: an overview. In J. Bezdek (Ed.), *Analysis of Fuzzy Information* (pp. 3–39). Boca Raton: CRC Press.
- Dubois, D. J., & Prade, H. (1987b). The mean value of a fuzzy number. *Fuzzy Sets and Systems*, 24(3), 279–300.
- Dubois, D. J., & Prade, H. (1988). *Possibility theory: An approach to computerized processing of uncertainty*. New York: Plenum.
- Dumas, B., & Luciano, E. (1991). An Exact Solution to a Dynamic Portfolio Choice Problem under Transactions Costs. *The Journal of Finance*, 46(2), 577–595.
- Durai, S. R. S., & Bhaduri, S. N. (2011). Correlation dynamics in equity markets: evidence from India. *Research in International Business and Finance*, 25(1), 64–74.
- Duran, F. C., Cotta, C., & Fernández, A. J. (2009). Algoritmos Evolutivos Multiobjetivo para Selección de Carteras de Inversión con Restricciones de Cardinalidad. In A. Enrique, F. Chicano, F. Luna, & G. Luque (Eds.), *VI Congreso Español sobre Metaheurísticas, Algoritmos Evolutivos y Bioinspirados - MAEB'09* (pp. 223–230). Malaga: Universidad de Málaga.
- Edgeworth, F. Y. (1881). *Mathematical Psychics: An Essay on the Application of Mathematics to the Moral Sciences*. London: C. Kegan Paul & Co.

- Ehrgott, M., Klamroth, K., & Schwehm, C. (2004). An MCDM approach to portfolio optimization. *European Journal of Operational Research*, 155(3), 752–770.
- Estrada, J. (2004). The cost of equity of internet stocks: a downside risk approach. *The European Journal of Finance*, 10(4), 239–254.
- Evans, J. L., & Archer, S. H. (1968). Diversification and the Reduction of Dispersion: An Empirical Analysis. *The Journal of Finance*, 23(5), 761.
- Fabozzi, F. J., Focardi, S. M., & Kolm, P. N. (2006). *Financial modeling of the equity market: from CAPM to cointegration*. Wiley.
- Fabozzi, F. J., Focardi, S. M., & Kolm, P. N. (2010). *Quantitative equity investing: techniques and strategies*. John Wiley.
- Fabozzi, F. J., Gupta, F., & Markowitz, H. M. (2002). The Legacy of Modern Portfolio Theory. *The Journal of Investing*, 11(3), 7–22.
- Fabozzi, F. J., Kolm, P. N., Pachamanova, D. A., & Focardi, S. M. (2007). *Robust portfolio optimization and management*. John Wiley.
- Fama, E. F. (1965a). Portfolio Analysis in a Stable Paretian Market. *Management Science*, 11(3), 404–419.
- Fama, E. F. (1965b). The Behavior of Stock-Market Prices. *The Journal of Business*, 38(1), 34–105.
- Fang, Y., Lai, K. K., & Wang, S. Y. (2006). Portfolio rebalancing model with transaction costs based on fuzzy decision theory. *European Journal of Operational Research*, 175(2), 879–893.
- Federación Iberoamericana de Bolsas. (2017). Anuarios Estadísticos. Retrieved September 15, 2017, from http://www.fiabnet.org/es/categoria.asp?id_categoria=50
- Fernández, A., & Gómez, S. (2007). Portfolio selection using neural networks. *Computers & Operations Research*, 34(4), 1177–1191.
- Fishburn, P. C. (1970). *Utility theory for decision making*. Wiley.
- Fishburn, P. C. (1977). Mean-Risk Analysis with Risk Associated with Below-Target Returns. *The American Economic Review*, 67(2), 116–126.
- Fogel, L. J., Owens, A. J., & Walsh, M. J. (1966). *Artificial Intelligence Through Simulated Evolution*. New York: Wiley.

- Fonseca, C., & Fleming, P. (1993). Genetic Algorithms for Multiobjective Optimization: Formulation Discussion and Generalization. In *Fifth International Conference on Genetic Algorithms* (pp. 416–423). Morgan Kaufmann.
- Fu, T., Chung, C., & Chung, F. (2013). Adopting genetic algorithms for technical analysis and portfolio management. *Computers & Mathematics with Applications*, 66(10), 1743–1757.
- Gaivoronski, A. A., & Pflug, G. C. (2005). Value-at-risk in Portfolio Optimization: Properties and Computational Approach. *Journal of Risk*, 7(2), 1–31.
- García-García, M., Nogueira-Collazo, M., Cotta, C., Fernández-Leiva, A., & Merelo-Guervós, J. (2015). Implementación de algoritmos meméticos con capacidad de auto-generación sobre CouchBD. In F. Chávez, R. M. Luque-Baena, F. Luna, & F. Fernández (Eds.), *X Congreso Español de Metaheurísticas, Algoritmos Evolutivos y Bioinspirados - MAEB 2015* (pp. 189–195). Mérida-Almendralejo: Universidad de Extremadura.
- García-Rodríguez, S. (2012). *Application of multiobjective evolutionary techniques for robust portfolio optimization (Ph.D. dissertation)*. Universidad Carlos III de Madrid.
- García, F., González-Bueno, J., & Oliver, J. (2015). Mean-variance investment strategy applied in emerging financial markets: Evidence from the Colombian stock market. *Intellectual Economics*, 9(1), 22–29.
- García, J., Sánchez, M. Á., & Trinidad, J. E. (1998). El principio primero la seguridad de Roy y su derivación hasta el modelo de Markowitz. *Cuadernos Aragoneses de Economía, ISSN 0211-0865, Vol. 8, Nº 2, 1998, Págs. 423-429*, 8(2), 423–429.
- Gaspero, L. D., Tollo, G. D., Roli, A., & Schaerf, A. (2011). Hybrid metaheuristics for constrained portfolio selection problems. *Quantitative Finance*, 11(10), 1473–1487.
- Gil, J. M. (2007). *Caracterización del mercado accionario colombiano, 2001-2006: un análisis comparativo* (Borradores de Economía No. 457). Bogotá.
- Glover, F., & Laguna, M. (1997). *Tabu Search* (Kluwer Academic Publishers). Boston, Massachusetts.
- Goh, C. K., & Tan, K. C. (2009). *Evolutionary multi-objective optimization in uncertain environments: issues and algorithms* (1st ed.). Springer-Verlag.
- Goldberg, D. E. (1989). *Genetic algorithms in search, optimization, and machine learning*. Addison-Wesley.
- Golmakani, H. R., & Fazel, M. (2011). Constrained Portfolio Selection using Particle Swarm Optimization. *Expert Systems with Applications*, 38(7), 8327–8335.

- Gordon, A. (2009). From Markowitz to modern risk management. *The European Journal of Finance*, 15(5–6), 451–461.
- Gordon, A., & Baptista, A. (2002). Economic implications of using a mean-VaR model for portfolio selection: A comparison with mean-variance analysis. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 26(7–8), 1159–1193.
- Gordon, A., Sharpe, W., & Bailey, J. (2003). *Fundamentos de inversiones: teoría y práctica* (3rd ed.). Pearson Educación.
- Graham, B., & Dodd, D. L. (1934). *Security analysis*. Londres: McGraw-Hill.
- Grootveld, H., & Hallerbach, W. (1999). Variance vs downside risk: Is there really that much difference? *European Journal of Operational Research*, 114(2), 304–319.
- Grubel, H. G. (1968). Internationally Diversified Portfolios: Welfare Gains and Capital Flows. *The American Economic Review*, 58(5), 1299–1314.
- Gullu, I., & Kilic, N. O. (2017). An Evaluation on the Attractiveness of Turkish Economy in Terms of Foreign Direct Investments. *European Journal of Sustainable Development Research*, 2(1), 70–79.
- Gupta, P., Inuiguchi, M., & Mehlawat, M. K. (2011). A hybrid approach for constructing suitable and optimal portfolios. *Expert Systems with Applications*, 38(5), 5620–5632.
- Gupta, P., Inuiguchi, M., Mehlawat, M. K., & Mittal, G. (2013). Multiobjective credibilistic portfolio selection model with fuzzy chance-constraints. *Information Sciences*, 229, 1–17.
- Gupta, P., Mehlawat, M. K., Inuiguchi, M., & Chandra, S. (2014a). Portfolio Optimization: An Overview. In *Fuzzy Portfolio Optimization. Studies in Fuzziness and Soft Computing* (Vol 316, pp. 1–31). Springer-Verlag Berlin Heidelberg.
- Gupta, P., Mehlawat, M. K., Inuiguchi, M., & Chandra, S. (2014b). Portfolio Optimization Using Credibility. In *Fuzzy Portfolio Optimization. Studies in Fuzziness and Soft Computing* (Vol 316, pp. 127–160). Springer-Verlag Berlin Heidelberg.
- Gupta, P., Mehlawat, M. K., Inuiguchi, M., & Chandra, S. (2014c). Portfolio Optimization with Interval Coefficients. In *Fuzzy Portfolio Optimization. Studies in Fuzziness and Soft Computing* (Vol 316, pp. 33–59). Berlin: Springer, Berlin, Heidelberg.
- Gupta, P., Mehlawat, M. K., & Mittal, G. (2012). Asset portfolio optimization using support vector machines and real-coded genetic algorithm. *Journal of Global Optimization*, 53(2), 297–315.

- Gupta, P., Mehlawat, M. K., & Saxena, A. (2008). Asset portfolio optimization using fuzzy mathematical programming. *Information Sciences*, 178(6), 1734–1755.
- Gupta, P., Mehlawat, M. K., & Saxena, A. (2010). A hybrid approach to asset allocation with simultaneous consideration of suitability and optimality. *Information Sciences*, 180(11), 2264–2285.
- Gupta, P., Mittal, G., & Mehlawat, M. K. (2013). Expected value multiobjective portfolio rebalancing model with fuzzy parameters. *Insurance: Mathematics and Economics*, 52(2), 190–203.
- Hallerbach, W., & Spronk, J. (2002). A multidimensional framework for financial-economic decisions. *Journal of Multi-Criteria Decision Analysis*, 11(3), 111–124.
- Hanisch, J. (2006). *Risikomessung mit dem Conditional Value-at-Risk (Ph.D. dissertation)*. Kovač.
- Harlow, W. V., & Rao, R. K. S. (1989). Asset Pricing in a Generalized Mean-Lower Partial Moment Framework: Theory and Evidence. *The Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 24(3), 285–311.
- Heilpern, S. (1992). The expected value of a fuzzy number. *Fuzzy Sets and Systems*, 47(1), 81–86.
- Holland, J. H. (1975). *Adaptation in natural and artificial systems: an introductory analysis with applications to biology, control, and artificial intelligence*. Re-issued by MIT Press (1992). University of Michigan Press.
- Holmström, B., & Tirole, J. (1998). Private and Public Supply of Liquidity. *Journal of Political Economy*, 106(1), 1–40.
- Hong, T. P., & Chen, J. B. (1999). Finding relevant attributes and membership functions. *Fuzzy Sets and Systems*, 103(3), 389–404.
- Horn, J. R., Nafpliotis, N., & Goldberg, D. (1993). *Multiobjective optimization using the niched pareto genetic algorithm. Technical Report IlliGAL Report 93005*. Urbana-Champaign.
- Huang, X. (2006). Fuzzy chance-constrained portfolio selection. *Applied Mathematics and Computation*, 177(2), 500–507.
- Huang, X. (2007). Portfolio selection with fuzzy returns. *Journal of Intelligent & Fuzzy Systems*, 18(4), 383–390.
- Huang, X. (2008a). Mean-semivariance models for fuzzy portfolio selection. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 217(1), 1–8.

- Huang, X. (2008b). Risk curve and fuzzy portfolio selection. *Computers & Mathematics with Applications*, 55(6), 1102–1112.
- Huang, X. (2009). A review of credibilistic portfolio selection. *Fuzzy Optimization and Decision Making*, 8(3), 263–281.
- Huang, X. (2010). *Portfolio Analysis, From Probabilistic to Credibilistic and Uncertain Approaches* (Vol. 250). Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg.
- Huang, X., & Qiao, L. (2012). A risk index model for multi-period uncertain portfolio selection. *Information Sciences*, 217, 108–116.
- Inuiguchi, M., Ichihashi, H., & Tanaka, H. (1990). Fuzzy Programming: A Survey of Recent Developments. In R. Slowinski & J. Teghem (Eds.), *Stochastic Versus Fuzzy Approaches to Multiobjective Mathematical Programming under Uncertainty* (Vol 6, pp. 45–68). Dordrecht: Springer, Dordrecht.
- Ito, K., Akagi, S., & Nishikawa, M. (1983). A Multiobjective Optimization Approach to a Design Problem of Heat Insulation for Thermal Distribution Piping Network Systems. *Journal of Mechanisms Transmissions and Automation in Design*, 105(2), 206.
- J.P.Morgan. (1995). *Introducing the Emerging Markets Bond Index Plus (EMBI+)*. *Methodology Brief*.
- J.P.Morgan. (1996). *Riskmetrics technical document* (4th ed.). New York: Morgan Guaranty Trust Company of New York.
- J.P.Morgan. (1999). *Introducing the JP Morgan Emerging Markets Bond Index Global (EMBI Global)*. *Methodology Brief*.
- Jain, C., Jain, P., & McInish, T. H. (2012). Short Selling: The Impact of SEC Rule 201 of 2010. *Financial Review*, 47(1), 37–64.
- Jalota, H., Thakur, M., & Mittal, G. (2017a). A credibilistic decision support system for portfolio optimization. *Applied Soft Computing*, 59, 512–528.
- Jalota, H., Thakur, M., & Mittal, G. (2017b). Modelling and constructing membership function for uncertain portfolio parameters: A credibilistic framework. *Expert Systems with Applications*, 71, 40–56.
- Jansen, D. W., Koedijk, K. G., & De-Vries, C. G. (2000). Portfolio selection with limited downside risk. *Journal of Empirical Finance*, 7(3–4), 247–269.
- Jin, H., Markowitz, H., & Yu Zhou, X. (2006). A note of semivariance. *Mathematical Finance*, 16(1), 53–61.

- Jorion, P. (2003). *Financial risk manager handbook* (2nd ed.). New Jersey: Wiley.
- Joro, T., & Na, P. (2006). Portfolio performance evaluation in a mean-variance-skewness framework. *European Journal of Operational Research*, 175(1), 446–461.
- Kanthababu, M. (2013). Multi-Objective Optimization of Manufacturing Processes Using Evolutionary Algorithms. In Information Resources Management Association (Ed.), *Industrial engineering : concepts, methodologies, tools, and applications* (p. 25). Hershey, Pensilvania: Engineering Science Reference.
- Kaplan, P. D., & Alldredge, R. H. (1997). Semivariance in Risk-Based Index Construction. *The Journal of Investing*, 6(2), 82–87.
- Kaufmann, A., & Gupta, M. M. (1985). *Introduction to fuzzy arithmetic: theory and applications*. Van Nostrand Reinhold Co.
- Kim, W. C., Fabozzi, F. J., Cheridito, P., & Fox, C. (2014). Controlling portfolio skewness and kurtosis without directly optimizing third and fourth moments. *Economics Letters*, 122(2), 154–158.
- Kim, Y. S., Giacometti, R., Rachev, S. T., Fabozzi, F. J., & Mignacca, D. (2012). Measuring financial risk and portfolio optimization with a non-Gaussian multivariate model. *Annals of Operations Research*, 201(1), 325–343.
- Kirkpatrick, S., Gelatt, C. D., & Vecchi, M. P. (1983). Optimization by simulated annealing. *Science*, 220(4598), 671–680.
- Klir, G. J., & Yuan, B. (1995). *Fuzzy sets and fuzzy logic: theory and applications*. New Jersey: Prentice-Hall.
- Knowles, J., & Corne, D. (1999). The pareto archived evolution strategy: A new baseline algorithm for pareto multiobjective optimisation. In *IEEE Cong. Evol. Comput* (pp. 98–105). Piscataway, NJ: IEEE Press.
- Kolm, P. N., Tütüncü, R., & Fabozzi, F. J. (2014). 60 Years of portfolio optimization: Practical challenges and current trends. *European Journal of Operational Research*, 234(2), 356–371.
- Konak, A., Coit, D. W., & Smith, A. E. (2006). Multi-objective optimization using genetic algorithms: A tutorial. *Reliability Engineering & System Safety*, 91(9), 992–1007.
- Konno, H. (1988). *Portfolio optimization using L1 risk measure* (IHSS Repor). Institute of Human and Social Sciences, Tokyo Institute of Technology.
- Konno, H. (1990). Piecewise linear risk functions and portfolio optimization. *Journal of the Operations Research Society of Japan*, 33(2), 139–156.

- Konno, H. (2003). Portfolio optimization of small fund using mean-absolute deviation model. *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, 6(4), 403–418.
- Konno, H., & Koshizuka, T. (2005). Mean-absolute deviation model. *IIE Transactions*, 37(10), 893–900.
- Konno, H., & Yamazaki, H. (1991). Mean-Absolute Deviation Portfolio Optimization Model and Its Applications to Tokyo Stock Market. *Management Science*, 37(5), 519–531.
- Koza, J. R. (1992). *Genetic programming: on the programming of computers by means of natural selection*. Cambridge: MIT Press.
- Kumar, N. V., & Ganesh, L. S. (1996). An empirical analysis of the use of the Analytic Hierarchy Process for estimating membership values in a fuzzy set. *Fuzzy Sets and Systems*, 82(1), 1–16.
- Lacagnina, V., & Pecorella, A. (2006). A stochastic soft constraints fuzzy model for a portfolio selection problem. *Fuzzy Sets and Systems*, 157(10), 1317–1327.
- León, T., Liern, V., & Vercher, E. (2002). Viability of infeasible portfolio selection problems: A fuzzy approach. *European Journal of Operational Research*, 139(1), 178–189.
- León, T., & Vercher, E. (2004). Solving a class of fuzzy linear programs by using semi-infinite programming techniques. *Fuzzy Sets and Systems*, 146(2), 235–252.
- Lessard, D. R. (1974). World, national, and industry factors in equity returns. *The Journal of Finance*, 29(2), 379–391.
- Levine, R. (1997). Financial Development and Economic Growth: Views and Agenda. *Journal of Economic Literature*, 35(2), 688–726.
- Levy, H., & Sarnat, M. (1970). International Diversification of Investment Portfolios. *The American Economic Review*, 60(4), 668–675.
- Li, J., & Xu, J. (2013). Multi-objective portfolio selection model with fuzzy random returns and a compromise approach-based genetic algorithm. *Information Sciences*, 220, 507–521.
- Li, X., & Liu, B. (2006). The independence of fuzzy variables with applications. *International Journal of Natural Sciences & Technology*, 1(1), 95–100.
- Li, X., & Qin, Z. (2014). Interval portfolio selection models within the framework of uncertainty theory. *Economic Modelling*, 41, 338–344.
- Li, X., Qin, Z., & Kar, S. (2010). Mean-variance-skewness model for portfolio selection with fuzzy returns. *European Journal of Operational Research*, 202(1), 239–247.

- Li, X., Zhang, Y., Wong, H. S., & Qin, Z. (2009). A hybrid intelligent algorithm for portfolio selection problem with fuzzy returns. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 233(2), 264–278.
- Liagkouras, K., & Metaxiotis, K. (2013). The Constrained Mean-Semivariance Portfolio Optimization Problem with the Support of a Novel Multiobjective Evolutionary Algorithm. *Journal of Software Engineering and Applications*, 6(7), 22–29.
- Liagkouras, K., & Metaxiotis, K. (2014). A new Probe Guided Mutation operator and its application for solving the cardinality constrained portfolio optimization problem. *Expert Systems with Applications*, 41(14), 6274–6290.
- Liagkouras, K., & Metaxiotis, K. (2015). Efficient Portfolio Construction with the Use of Multiobjective Evolutionary Algorithms: Best Practices and Performance Metrics. *International Journal of Information Technology & Decision Making*, 14(3), 535–564.
- Liagkouras, K., & Metaxiotis, K. (2017). Examining the effect of different configuration issues of the multiobjective evolutionary algorithms on the efficient frontier formulation for the constrained portfolio optimization problem. *Journal of the Operational Research Society*, 1–23.
- Lin, D., Wang, S., & Yan, H. (2001). *A multiobjective genetic algorithm for portfolio selection problem*. Beijing, China.
- Liu, B. (2002a). *Theory and Practice of Uncertain Programming* (2nd ed., Vol. 239). Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg.
- Liu, B. (2002b). Toward Fuzzy Optimization without Mathematical Ambiguity. *Fuzzy Optimization and Decision Making*, 1(1), 43–63.
- Liu, B. (2004). *Uncertainty theory: an introduction to its axiomatic foundations* (Vol 154). Springer-Verlag Berlin Heidelberg.
- Liu, B. (2007). *Uncertainty Theory an Introduction to its Axiomatic Foundations* (2nd ed.). Springer-Verlag Berlin Heidelberg.
- Liu, B., & Liu, Y. K. (2002). Expected value of fuzzy variable and fuzzy expected value models. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 10(4), 445–450.
- Liu, Y. J., Zhang, W. G., & Zhang, P. (2013). A multi-period portfolio selection optimization model by using interval analysis. *Economic Modelling*, 33, 113–119.
- Liu, Y. J., Zhang, W. G., & Zhao, X. J. (2016). Fuzzy multi-period portfolio selection model with discounted transaction costs. *Soft Computing*, 1–17.

- Liu, Y. K., & Gao, J. (2007). The independence of fuzzy variables with applications to fuzzy random optimization. *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems*, 15(supp02), 1–20.
- Liu, Y. K., & Liu, B. (2003). Expected Value Operator of Random Fuzzy Variable and Random Fuzzy Expected Value Models. *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems*, 11(2), 195–215.
- Lobo, M. S., Fazel, M., & Boyd, S. (2007). Portfolio optimization with linear and fixed transaction costs. *Annals of Operations Research*, 152(1), 341–365.
- Lwin, K. T. (2015). *Evolutionary approaches for portfolio optimization (Ph.D. dissertation)*. University of Nottingham.
- Lwin, K. T., Qu, R., & MacCarthy, B. L. (2017). Mean-VaR portfolio optimization: A nonparametric approach. *European Journal of Operational Research*, 260(2), 751–766.
- Malkiel, B. G. (2002). How Much Diversification Is Enough? In *AIMR seminar “The Future of Equity Portfolio Construction”* (pp. 18–28). Virginia: AIMR (CFA Institute).
- Mandelbrot, B. (1963a). New Methods in Statistical Economics. *Journal of Political Economy*, 71(5), 421–440.
- Mandelbrot, B. (1963b). The Variation of Certain Speculative Prices. *The Journal of Business*, 36(4), 394–419.
- Manzana, V. A. (2009). Teorías sobre coberturas con contratos de futuro. *Cuadernos de Economía*, 28(50), 157–190.
- Mao, J. C. T. (1970). Models of Capital Budgeting, E-V Vs E-S. *The Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 4(5), 657–675.
- Mao, J. C. T., & Brewster, J. F. (1970). An E-Sh Model of Capital Budgeting. *The Engineering Economist*, 15(2), 103–121.
- Maringer, D., & Kellerer, H. (2003). Optimization of cardinality constrained portfolios with a hybrid local search algorithm. *OR Spectrum*, 25(4), 481–495.
- Markowitz, H. (1952). Portfolio Selection. *The Journal of Finance*, 7(1), 77–91.
- Markowitz, H. (1959). *Portfolio selection: efficient diversification of investments*. New York: Jhon Wiley & Sons, Inc.
- Markowitz, H. (1991). Foundations of Portfolio Theory. *The Journal of Finance*, 46(2), 469–477.

- Markowitz, H., Todd, P., Xu, G., & Yamane, Y. (1993). Computation of mean-semivariance efficient sets by the Critical Line Algorithm. *Annals of Operations Research*, 45(1), 307–317.
- Mascareñas, J. (2015). *Gestión de Carteras I: Selección de Carteras (Portfolio Management I: Portfolio Selection)*. Monografías de Juan Mascareñas sobre Finanzas Corporativas. Madrid.
- Mashayekhi, Z., & Omrani, H. (2016). An integrated multi-objective Markowitz–DEA cross-efficiency model with fuzzy returns for portfolio selection problem. *Applied Soft Computing*, 38, 1–9.
- Maulik, U., Bandyopadhyay, S., & Mukhopadhyay, A. (2011). *Multiobjective genetic algorithms for clustering: applications in data mining and bioinformatics* (1st ed.). Springer-Verlag Berlin Heidelberg.
- Mayer, C. (1988). New issues in corporate finance. *European Economic Review*, 32(5), 1167–1183.
- McNeil, A. J., Frey, R., & Embrechts, P. (2005). *Quantitative risk management: concepts, techniques and tools*. Princeton University Press.
- Medaglia, A. L., Fang, S. C., Nuttle, H. L. W., & Wilson, J. R. (2002). An efficient and flexible mechanism for constructing membership functions. *European Journal of Operational Research*, 139(1), 84–95.
- Mehlawat, M. K. (2016). Credibilistic mean-entropy models for multi-period portfolio selection with multi-choice aspiration levels. *Information Sciences*, 345, 9–26.
- Metaxiotis, K., & Liagkouras, K. (2012). Multiobjective Evolutionary Algorithms for Portfolio Management: A comprehensive literature review. *Expert Systems with Applications*, 39(14), 11685–11698.
- Michalewicz, Z., & Nazhiyath, G. (1995). Genocop III: A co-evolutionary algorithm for numerical optimization problems with nonlinear constraints. In D. B. Fogel (Ed.), *The Second IEEE International Conference on Evolutionary Computation* (pp. 647–651). Piscataway, New Jersey: IEEE Press.
- Michaud, R. O. (1989). The Markowitz Optimization Enigma: Is “Optimized” Optimal? *Financial Analysts Journal*, 45(1), 31–42.
- Mishkin, F. S. (2001). *The economics of money, banking, and financial markets* (6th ed.). New York: Addison Wesley Longman.

- Mittnik, S., Rachev, S., & Schwartz, E. (2002). Value-at-risk and asset allocation with stable return distributions. *AStA Advances in Statistical Analysis*, 86(1), 53–68.
- Moral-Escudero, R., Ruiz-Torrubiano, R., & Suarez, A. (2006). Selection of Optimal Investment Portfolios with Cardinality Constraints. In *2006 IEEE International Conference on Evolutionary Computation* (pp. 2382–2388). Vancouver, BC, Canada: IEEE.
- Morck, R., Shleifer, A., & Vishny, R. (1990). Do Managerial Objectives Drive Bad Acquisitions? *The Journal of Finance*, 45(1), 31–48.
- Morck, R., Shleifer, A., Vishny, R. W., Shapiro, M., & Poterba, J. M. (1990). The Stock Market and Investment: Is the Market a Sideshow? *Brookings Papers on Economic Activity*, 1990(2), 157.
- Moscoso, J. A. (2014). *Distribuciones de probabilidad alternativas para la gestión de riesgo en mercados financieros (Ph.D. dissertation)*. Universitat de Valencia.
- Mousavi, S., Esfahanipour, A., & Zarandi, M. H. F. (2014). A novel approach to dynamic portfolio trading system using multitree genetic programming. *Knowledge-Based Systems*, 66, 68–81.
- Nahmias, S. (1978). Fuzzy variables. *Fuzzy Sets and Systems*, 1(2), 97–110.
- Nudelsman, S. (2013). Implicaciones de la crisis financiera y económica global en América Latina. *Problemas Del Desarrollo*, 44(175), 125–146.
- Obstfeld, M. (1992). *Risk-Taking, Global Diversification, and Growth* (No. 4093). Cambridge, MA.
- Obstfeld, M. (1993). *Are Industrial-Country Consumption Risks Globally Diversified?* (No. 4308). Cambridge, MA.
- Ocampo, J. A. (2009). Impactos de la crisis financiera mundial sobre América Latina. *Revista Cepal*, 97, 9–32.
- Oksendal, B., & Sulem, A. (2002). Optimal Consumption and Portfolio with Both Fixed and Proportional Transaction Costs. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 40(6), 1765–1790.
- Olivera, J. H. G. (2004). Globalización, crecimiento económico y bienes públicos. *Anales Academia Nacional de Derecho Y Ciencias Sociales de Buenos Aires*, Año XLIX(Número 42), 309–313.

- Ortobelli, S., Rachev, S. T., Stoyanov, S., Fabozzi, F. J., & Biglova, A. (2005). The proper use of risk measures in portfolio theory. *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, 8(8), 1107–1133.
- Oszyczka, A. (1985). Multicriteria optimization for engineering design. In J. Gero (Ed.), *Design Optimization, Volume 1* (pp. 193–227). Sidney: Academic Press.
- Pareto, V. (1896). *Cours d'économie politique*. (F. Rouge, Ed.) (Volumen I). Lausanne.
- Ponsich, A., Jaimes, A., & Coello, C. A. (2013). A Survey on Multiobjective Evolutionary Algorithms for the Solution of the Portfolio Optimization Problem and Other Finance and Economics Applications. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 17(3), 321–344.
- Qian, W., & Yin, M. (2014). Portfolio Selection Based on Distance between Fuzzy Variables. *Mathematical Problems in Engineering*, 2014, 1–12.
- Qin, Z. (2016). Preliminaries. In *Uncertain Portfolio Optimization* (pp. 1–28). Springer Singapore.
- Qin, Z. (2017). Random fuzzy mean-absolute deviation models for portfolio optimization problem with hybrid uncertainty. *Applied Soft Computing*, 56, 597–603.
- Qin, Z., Li, X., & Ji, X. (2009). Portfolio selection based on fuzzy cross-entropy. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 228(1), 139–149.
- Quintero, L. V., & Coello, C. A. (2006). Introduction to Evolutionary Computation and some of its Applications in Economics and Finance. *Revista de Métodos Cuantitativos Para La Economía Y La Empresa*, 2, 3–26.
- R Development Core Team (2012). R: A language and environment for statistical computing. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria. ISBN 3-900051-07-0, URL <http://www.Rproject.org/>.
- Ramírez-Sánchez, J. C. (2004). Usos y Limitaciones de los Procesos Estocásticos en el Tratamiento de Distribuciones de Rendimientos con Colas Gordas. *Revista de Análisis Económico*, 19(1), 51–76.
- Rancière, R., Tornell, A., & Westermann, F. (2008). Systemic Crises and Growth. *Quarterly Journal of Economics*, 123(1), 359–406.
- Real Academia Española. (2014). *Diccionario de la lengua española*. (Espasa Calpe, Ed.) (23rd ed.). Madrid: Asociación de Academias de la Lengua Española.

- Rechenberg, I. (1973). *Evolutionsstrategie: Optimierung technischer Systeme nach Prinzipien der biologischen Evolution*. Stuttgart: Frommann-Holzboog.
- Rockafellar, R. T., & Uryasev, S. (2000). Optimization of conditional value-at-risk. *Journal of Risk*, 2(3), 21–41.
- Rockafellar, R. T., & Uryasev, S. (2002). Conditional value-at-risk for general loss distributions. *Journal of Banking & Finance*, 26(7), 1443–1471.
- Rom, B. M., & Ferguson, K. W. (1994). Post-Modern Portfolio Theory Comes of Age. *The Journal of Investing*, 3(3), 11–17.
- Romero-Zaliz, R. (2005). *Reconocimiento de perfiles de regulación genética mediante algoritmos evolutivos multiobjeto (Ph.D. dissertation)*. Universidad de Granada.
- Rosenberg, R. S. (1960). *Simulation of genetic populations with biochemical properties (Ph.D. dissertation)*. University of Michigan.
- Roy, A. D. (1952). Safety First and the Holding of Assets. *Econometrica*, 20(3), 431–449.
- Saborido, R., Ruiz, A. B., Bermúdez, J. D., Vercher, E., & Luque, M. (2016). Evolutionary multi-objective optimization algorithms for fuzzy portfolio selection. *Applied Soft Computing*, 39, 48–63.
- Saint-Paul, G. (1992). Technological choice, financial markets and economic development. *European Economic Review*, 36(4), 763–781.
- Schaerf, A. (2002). Local Search Techniques for Constrained Portfolio Selection Problems. *Computational Economics*, 20(3), 177–190.
- Schaffer, J. D. (1984). *Multiple objective optimization with vector evaluated (Ph.D. dissertation)*. Vanderbilt University.
- Schaffer, J. D. (1985). Multiple objective optimization with vector evaluated genetic algorithm. In *First International Conference on Genetic Algorithms* (pp. 93–100). Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum.
- Schaffer, J. D., & Grefenstette, J. J. (1985). Multi-Objective Learning via Genetic Algorithms. In *9th International Joint Conference on Artificial Intelligence (IJCAI-85)* (pp. 593–505). Los Angeles, California.
- Schlottmann, F., & Seese, D. (2004). Financial applications of multi-objective evolutionary algorithms: Recent developments and future research directions. In C. A. Coello & G. B. Lamont (Eds.), *Applications of Multi-Objective Evolutionary Algorithms. Advances in Natural Computation* (Volumen 1, pp. 627–652). Singapore: World Scientific.

- Scutellà, M. G., & Recchia, R. (2013). Robust portfolio asset allocation and risk measures. *Annals of Operations Research*, 204(1), 145–169.
- Sensoy, A., Eraslan, V., & Erturk, M. (2016). Do sovereign rating announcements have an impact on regional stock market co-movements? The case of Central and Eastern Europe. *Economic Systems*, 40(4), 552–567.
- Sharpe, W. F. (1963). A Simplified Model for Portfolio Analysis. *Management Science*, 9(2), 277–293.
- Sharpe, W. F. (1966). Mutual Fund Performance. *The Journal of Business*, 39(1), 119–138.
- Sharpe, W. F. (1994). The Sharpe Ratio. *The Journal of Portfolio Management*, 21(1), 49–58.
- Shefrin, H., & Statman, M. (2000). Behavioral Portfolio Theory. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 35(2), 127–151.
- Shin, S. Y., Lee, I. H., Kim, D., & Zhang, B. T. (2005). Multiobjective Evolutionary Optimization of DNA Sequences for Reliable DNA Computing. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 9(2), 143–158.
- Shoaf, J., & Foster, J. (1996). A Genetic Algorithm Solution to the Efficient Set Problem: A Technique for Portfolio Selection Based on the Markowitz Model. In *Proceedings of the Decision Sciences Institute Annual* (pp. 571–573). Orlando, Florida.
- Shreve, S. E., & Soner, H. M. (1994). Optimal Investment and Consumption with Transaction Costs. *The Annals of Applied Probability*, 4(3), 609–692.
- Simaan, Y. (1997). Estimation Risk in Portfolio Selection: The Mean Variance Model versus the Mean Absolute Deviation Model. *Management Science*, 43(10), 1437–1446.
- Skolpadungket, P., Dahal, K., & Harnpornchai, N. (2007). Portfolio optimization using multi-objective genetic algorithms. In *2007 IEEE Congress on Evolutionary Computation* (pp. 516–523). IEEE.
- Smimou, K. (2014). International portfolio choice and political instability risk: A multi-objective approach. *European Journal of Operational Research*, 234(2), 546–560.
- Sortino, F. A., & Forsey, H. J. (1996). On the Use and Misuse of Downside Risk. *The Journal of Portfolio Management*, 22(2), 35–42.
- Sortino, F. A., & Price, L. N. (1994). Performance Measurement in a Downside Risk Framework. *The Journal of Investing*, 3(3), 59–64.
- Sortino, F. A., & Van Der Meer, R. (1991). Downside risk. *The Journal of Portfolio Management*, 17(4), 27–31.

- Speranza, M. (1993). Linear programming models for portfolio optimization. *Finance*, 14, 107–123.
- Srinivas, N., & Deb, K. (1994). Multiobjective Optimization Using Nondominated Sorting in Genetic Algorithms. *Evolutionary Computation*, 2(3), 221–248.
- Stadler, W. (1988). Fundamentals of Multicriteria Optimization. In W. Stadler (Ed.), *Multicriteria Optimization in Engineering and in the Sciences* (pp. 1–25). New York: Springer US.
- Standard & Poor's. (2017). Credit Rating History. Retrieved September 15, 2017, from https://www.standardandpoors.com/en_US/web/guest/regulatory/ratingshistory
- Stiglitz, J. E. (1993). The Role of the State in Financial Markets. *The World Bank Economic Review*, 7(suppl 1), 19–52.
- Subbu, R., Bonissone, P. P., Eklund, N., Bollapragada, S., & Chalermkraivuth, K. (2005). Multiobjective Financial Portfolio Design: A Hybrid Evolutionary Approach. In *2005 IEEE Congress on Evolutionary Computation* (Vol. 2, pp. 1722–1729). IEEE.
- Suksonghong, K., Boonlong, K., & Goh, K. L. (2014). Multi-objective genetic algorithms for solving portfolio optimization problems in the electricity market. *International Journal of Electrical Power & Energy Systems*, 58, 150–159.
- Swain, S. C., Panda, S., & Mahapatra, S. (2016). A multi-criteria optimization technique for SSSC based power oscillation damping controller design. *Ain Shams Engineering Journal*, 7(2), 553–565.
- Tanaka, H., & Guo, P. (1999). Portfolio selection based on upper and lower exponential possibility distributions. *European Journal of Operational Research*, 114(1), 115–126.
- Triantaphyllou, E., & Mann, S. H. (1990). An evaluation of the Eigenvalue approach for determining the membership values in fuzzy sets. *Fuzzy Sets and Systems*, 35(3), 295–301.
- Unger, A., & Poddig, T. (2014). *The use of risk budgets in portfolio optimization*. Friedrichsdorf: Springer Gabl.
- Uribe, J. M. (2007). *Indicadores básicos de desarrollo del mercado accionario colombiano* (Temas de Estabilidad Financiera No. 28). Bogota.
- Useche-Arévalo, A. J. (2015). Construcción de portafolios de inversión desde las finanzas del comportamiento: una revisión crítica. *Cuadernos de Administración*, 28(51), 11–43.
- Vardharaj, R., Fabozzi, F. J., & Jones, F. J. (2004). Determinants of Tracking Error for Equity Portfolios. *The Journal of Investing*, 13(2), 37–47.

- Vedarajan, G., Chan, L. C., & Goldberg, D. E. (1997). Investment portfolio optimization using genetic algorithms. In J. R. Koza (Ed.), *Late breaking papers at the genetic programming 1997 conference* (pp. 255–263). California: Stanford University.
- Vercher, E. (2008). Portfolios with fuzzy returns: Selection strategies based on semi-infinite programming. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 217(2), 381–393.
- Vercher, E. (2015). Soft Computing approaches to portfolio selection. *Boletín de Estadística E Investigación Operativa*, 31(1), 23–46.
- Vercher, E., & Bermúdez, J. D. (2012). Fuzzy Portfolio Selection Models: A Numerical Study. In M. Doumpos, C. Zopounidis, & P. M. Pardalos (Eds.), *Springer Optimization and Its Applications* (Volumen 70, pp. 253–280). Springer, Boston, MA.
- Vercher, E., & Bermúdez, J. D. (2013). A Possibilistic Mean-Downside Risk-Skewness Model for Efficient Portfolio Selection. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 21(3), 585–595.
- Vercher, E., & Bermúdez, J. D. (2015). Portfolio optimization using a credibility mean-absolute semi-deviation model. *Expert Systems with Applications*, 42(20), 7121–7131.
- Vercher, E., Bermúdez, J. D., & Segura, J. V. (2007). Fuzzy portfolio optimization under downside risk measures. *Fuzzy Sets and Systems*, 158(7), 769–782.
- Vijayalakshmi Pai, G. A., & Michel, T. (2009). Evolutionary Optimization of Constrained k-Means Clustered Assets for Diversification in Small Portfolios. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 13(5), 1030–1053.
- Villazón-Terrazas, J. (2015). *Optimización de aperturas mediante técnicas de algoritmos evolutivos (Ph.D. dissertation)*. Universidad Politécnica de Madrid.
- Wang, B., Li, Y., & Watada, J. (2017). Multi-period portfolio selection with dynamic risk/expected-return level under fuzzy random uncertainty. *Information Sciences*, 385, 1–18.
- Wang, B., Wang, S., & Watada, J. (2011). Fuzzy-Portfolio-Selection Models With Value-at-Risk. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 19(4), 758–769.
- Wang, F., Yu, P. L. H., & Cheung, D. W. (2014). Combining technical trading rules using particle swarm optimization. *Expert Systems with Applications*, 41(6), 3016–3026.
- Wang, S., & Zhu, S. (2002). On Fuzzy Portfolio Selection Problems. *Fuzzy Optimization and Decision Making*, 1(4), 361–377.
- Watada, J. (1997). Fuzzy portfolio selection and its applications to decision making. *Tatra Mountains Mathematical Publication*, 13, 219–248.

- Wen, D., & Peng, J. (2009). Credibilistic Risk Optimization Models and Algorithms. In *2009 International Conference on Computational Intelligence and Natural Computing* (pp. 378–381). Wuhan, China: IEEE.
- World Federation of Exchange. (2017). Annual Statistics. Retrieved September 15, 2017, from <https://www.world-exchanges.org/home/index.php/statistics/annual-statistics>
- Yager, R. R. (1981). A procedure for ordering fuzzy subsets of the unit interval. *Information Sciences*, *24*(2), 143–161.
- Yager, R. R. (1992). On the specificity of a possibility distribution. *Fuzzy Sets and Systems*, *50*(3), 279–292.
- Yang, S. C., Lin, T. L., Chang, T. J., & Chang, K.-J. (2011). A semi-variance portfolio selection model for military investment assets. *Expert Systems with Applications*, *38*(3), 2292–2301.
- Yegireddy, N. K., & Panda, S. (2014). Design and performance analysis of PID controller for an AVR system using multi-objective non-dominated shorting genetic algorithm-II. In *2014 International Conference on Smart Electric Grid (ISEG)* (pp. 1–7). IEEE.
- Yue, W., & Wang, Y. (2017). A new fuzzy multi-objective higher order moment portfolio selection model for diversified portfolios. *Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications*, *465*, 124–140.
- Zadeh, L. A. (1965). Fuzzy sets. *Information and Control*, *8*(3), 338–353.
- Zadeh, L. A. (1978). Fuzzy sets as a basis for a theory of possibility. *Fuzzy Sets and Systems*, *1*, 3–28.
- Zhang, P., & Zhang, W. G. (2014). Multiperiod mean absolute deviation fuzzy portfolio selection model with risk control and cardinality constraints. *Fuzzy Sets and Systems*, *255*, 74–91.
- Zhang, W. G., & Nie, Z. K. (2005). On admissible efficient portfolio selection policy. *Applied Mathematics and Computation*, *169*(1), 608–623.
- Zimmermann, H. J. (1985). *Fuzzy set theory and its applications*. Boston: Kluwer Academic Publishers.
- Zitzler, E., Deb, K., & Thiele, L. (2000). Comparison of Multiobjective Evolutionary Algorithms: Empirical Results. *Evolutionary Computation*, *8*(2), 173–195.
- Zitzler, E., Laumanns, M., & Thiele, L. (2001). *SPEA2: Improving the strength Pareto evolutionary algorithm* (Technical Report 103). Switzerland.
- Zitzler, E., & Thiele, L. (1998). *An evolutionary algorithm for multiobjective optimization: The strength pareto approach* (Technical Report 43). Switzerland.

- Zitzler, E., Thiele, L., & Bader, J. (2010). On Set-Based Multiobjective Optimization. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, *14*(1), 58–79.
- Zopounidis, C., Doumpos, M., & Fabozzi, F. J. (2014). Preface to the Special Issue: 60 years following Harry Markowitz's contributions in portfolio theory and operations research. *European Journal of Operational Research*, *234*(2), 343–345.