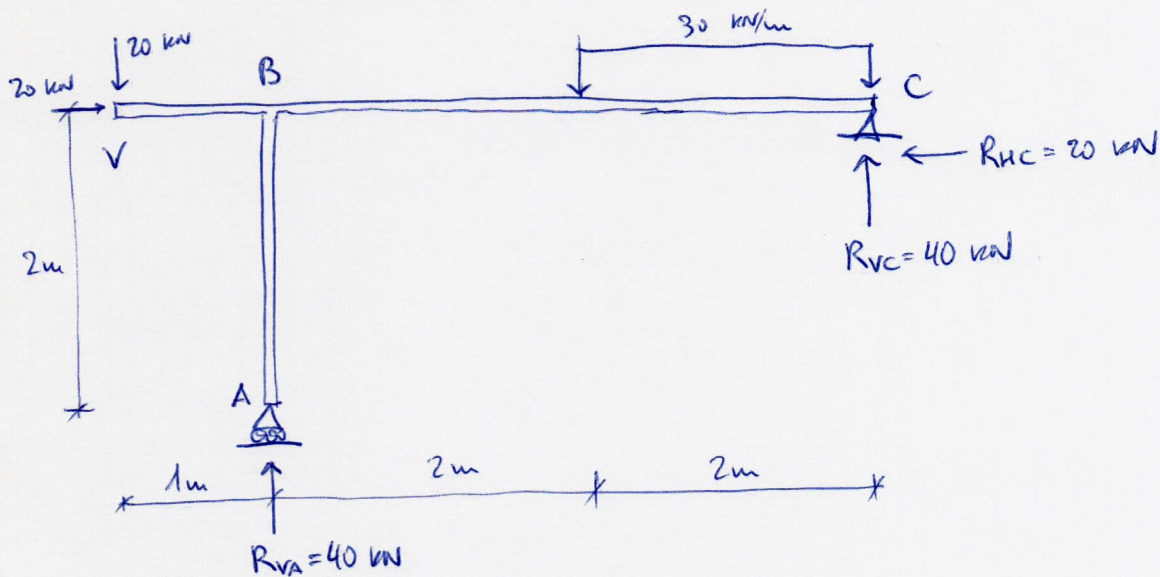


# RESOLUCIÓN PD: SOLICITACIONES



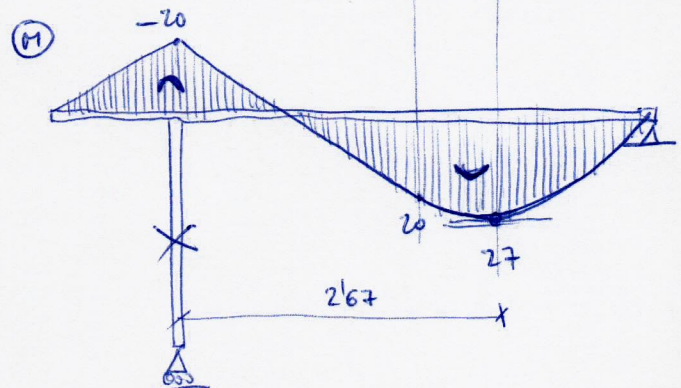
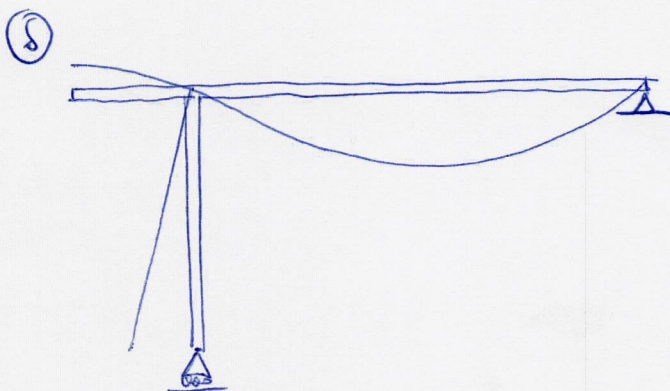
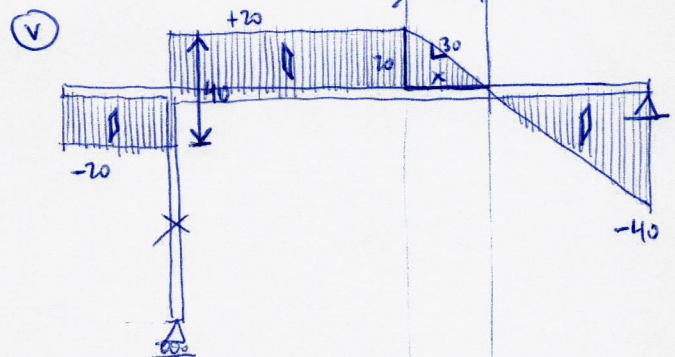
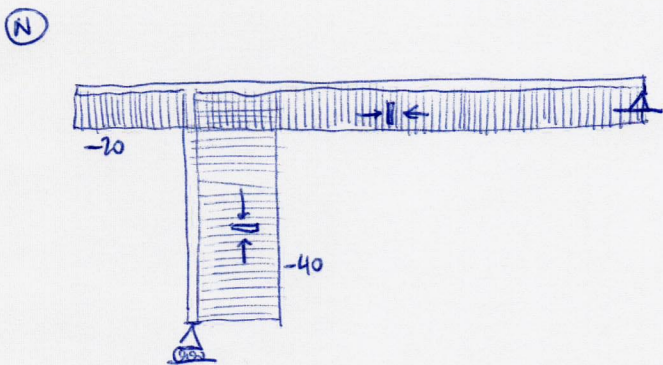
## A. REACCIONES

$$\sum M_C = 0 \Rightarrow 20 \cdot 5 + R_{va} \cdot 4 + 30 \cdot 2 \cdot 1 = 0 \Rightarrow R_{va} = 40 \text{ kN}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow -20 + 40 - 30 \cdot 2 + R_{vc} = 0 \Rightarrow R_{vc} = 40 \text{ kN}$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow 20 - R_{hc} = 0 \Rightarrow R_{hc} = 20 \text{ kN}$$

$$q = 30 = \frac{20}{x} \Rightarrow x = 0.67$$

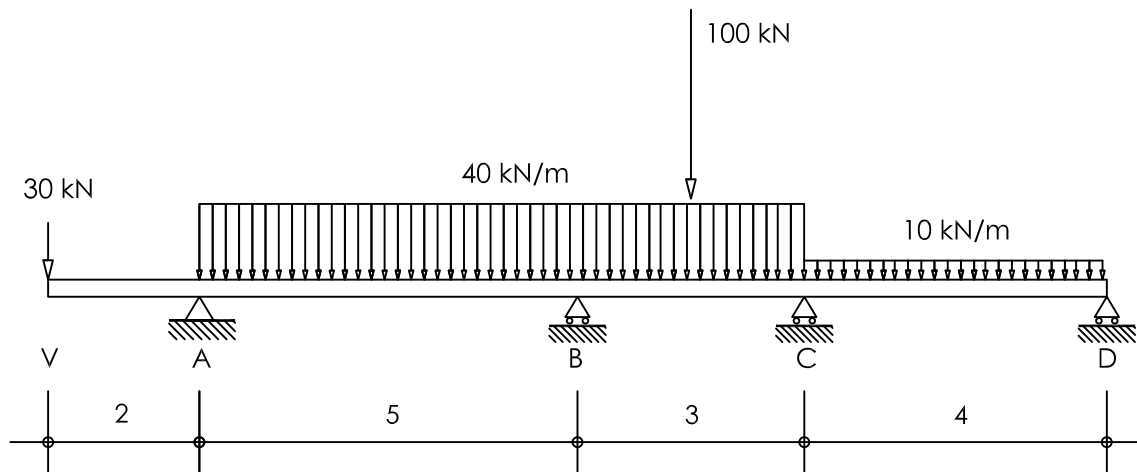


$$M_{max}^+ = -20 \cdot 3.67 + 40 \cdot 2.67 - 30 \cdot \frac{0.67^2}{2} \approx 27$$

## PRÁCTICA 1: MÉTODO DE CROSS

Calcular las solicitaciones de la siguiente estructura por el método de Cross. Seguir el esquema de resolución siguiente:

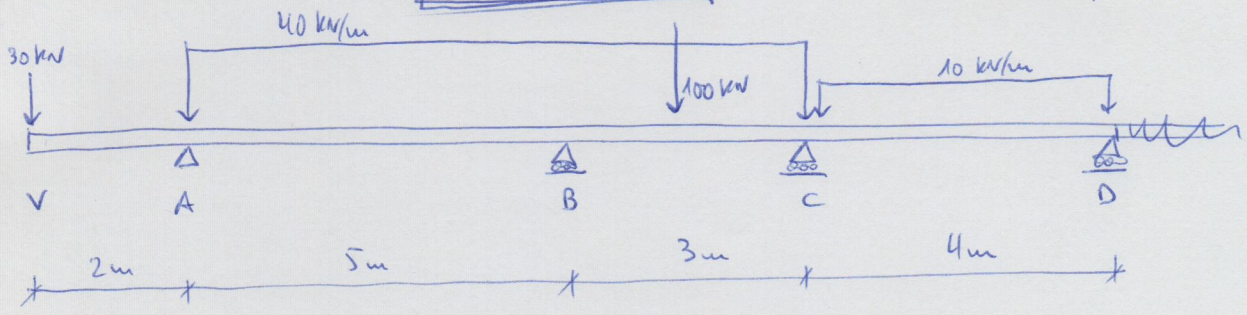
- 1) Identificación del modelo. Verificación de requisitos
- 2) Rigideces de barras
- 3) Coeficientes de reparto
- 4) Coeficientes de transmisión
- 5) Momentos de empotramiento perfecto (usar prontuario)
- 6) Tabla de iteraciones (hasta un desequilibrio menor de 1 kNm)
- 7) Reacciones en extremos de barra
- 8) Reacciones externas
- 9) Solicitaciones



E, I constantes en toda la viga  
Unidades en m.

**P1: CROSS**

$E, I$  const.



1) Cople requisitos

2) Rigideces

$(K_{VA}=0)$      $K_{AB} = \frac{4EI}{5}$      $K_{BC} = \frac{4EI}{3}$      $K_{CD} = \frac{3EI}{4}$   
 $(K_{AV}=0)$      $K_{BA} = \frac{3EI}{5}$      $K_{CB} = \frac{4EI}{3}$      $(K_{DC} = \frac{4EI}{4})$

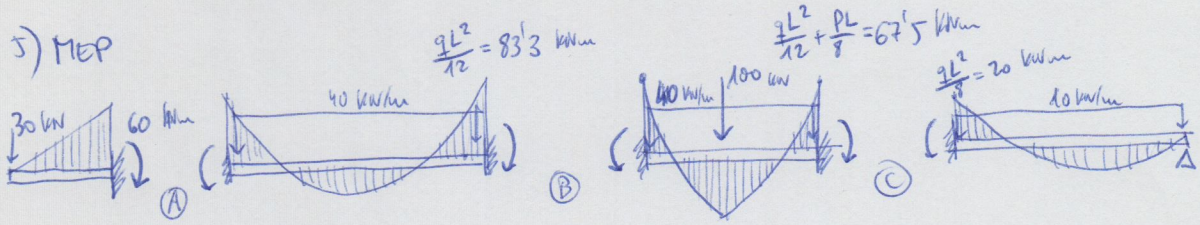
3) Reparto

$C_{AV}=0$ ;  $C_{AB}=1$ ;  
 $C_{BA} = \frac{\frac{3EI}{5}}{\frac{3EI}{5} + \frac{4EI}{3}} = 0.31$ ;  $C_{BC} = 0.69$ ;  $C_{CB} = \frac{\frac{4EI}{3}}{\frac{4EI}{3} + \frac{3EI}{4}} = 0.64$ ;  $C_{CD} = 0.36$ ; ( $C_{DC}=1$ )

4) Transmisión

$t_{AV}=0$ ;  $t_{AB}=0.5$ ;  $t_{BA}=0$ ;  $t_{BC}=0.5$ ;  $t_{CB}=0.5$ ;  $t_{CD}=0$ ;

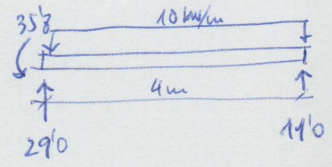
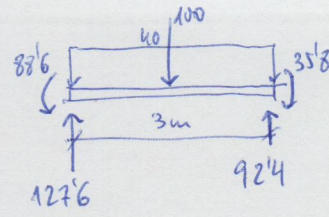
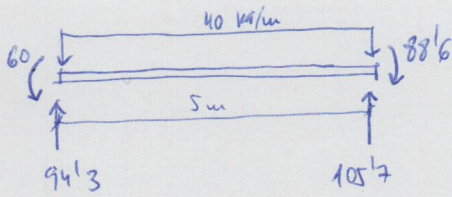
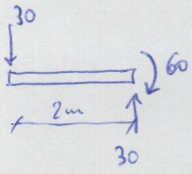
5) MEP



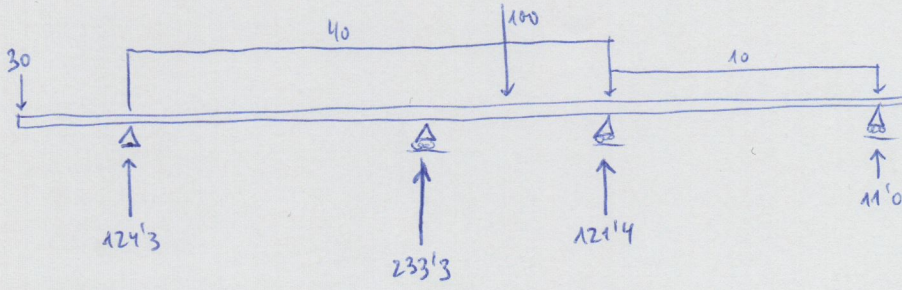
6)

Mudo	A		B		C	
Barra	AV	AB	BA	BC	CB	CD
C	0.0	1.0	0.31	0.69	0.64	0.36
t	0.0	0.5	0.0	0.5	0.5	0.0
MEP	-60	+83.3	-83.3	+67.5	-67.5	+20
Desequilibrio		+23.3		-15.8		-47.5
Liberación						+47.5
Reparto					+30.4	+17.1
Transmisión				+15.2		
Momentos	-60	+83.3	-83.3	+82.7	-37.1	+37.1
Desequilibrio		+23.3		-0.6		0
Liberación		-23.3				
Reparto						
Transmisión			-11.7			
Momentos	-60	+60	-95.0	+82.7	-37.1	+37.1
Desequilibrio		0		-12.3		0
Liberación				+12.3		
Reparto			+3.8	+8.5		
Transmisión					+4.3	
Momentos	-60	+60	-91.2	+91.2	-32.8	+37.1
Desequilibrio					-2.8	+11.3
Liberación						-1.5
Reparto						
Transmisión						
Momentos	-60	+60	-91.2	-1.4	35.6	35.6

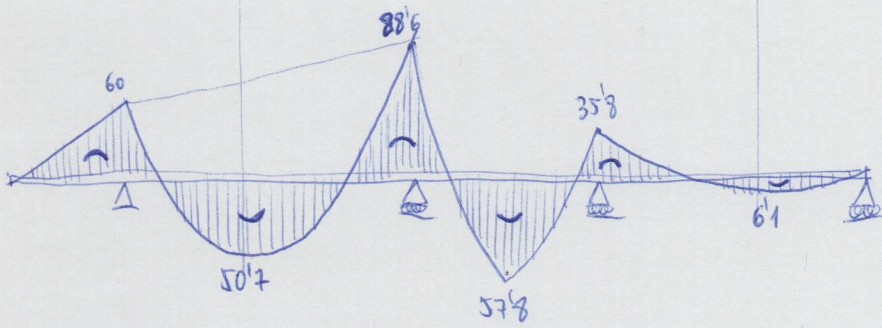
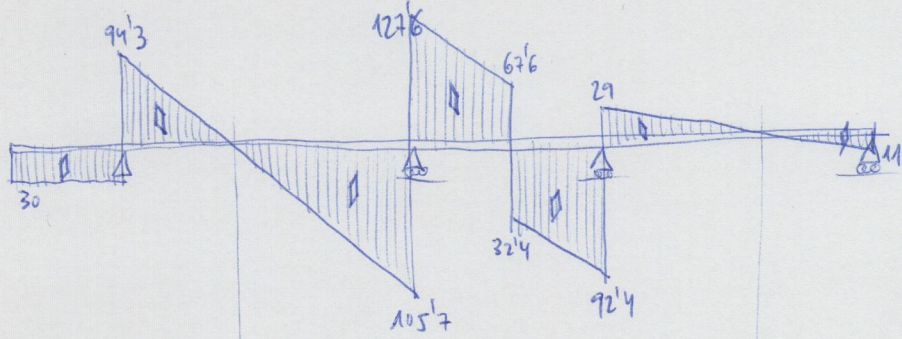
7)



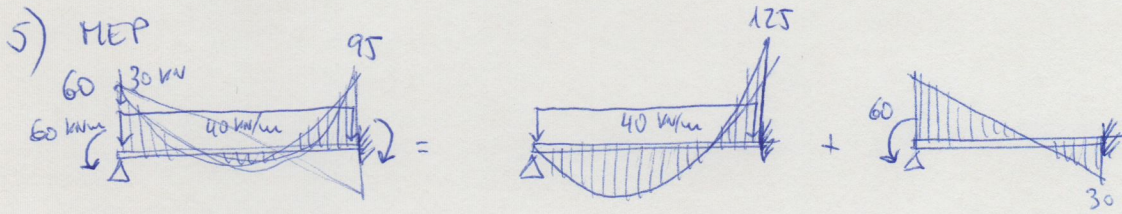
8)



9)



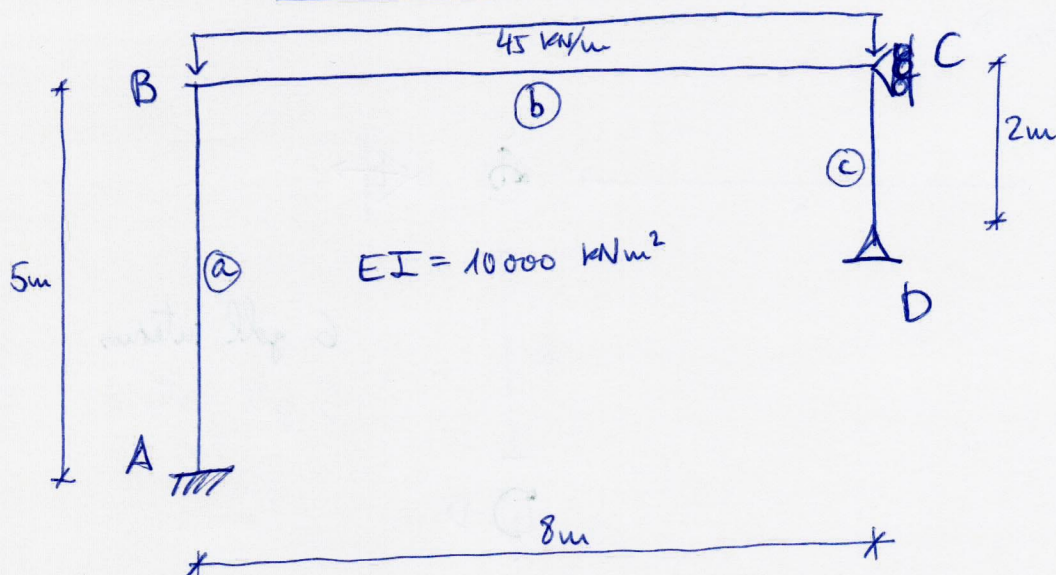
Alternativa, quitando el voladizo:



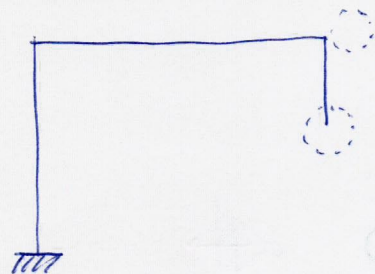
6)

Nudo	B		C	
Barra	BA	BC	CB	CD
c	0'31	0'69	0'64	0'36
t	0'0	0'5	0'5	0'0
MEP	-95	+67'5	-67'5	+20
Desequilibrio	-27'5		-47'5	
Liberación			+47'5	
Reparto			+30'4	+17'1
Transmisión				
Momento	-95	+82'7	-37'1	+37'1
Desequilibrio	-12'3		0	
Liberación	+12'3			
Reparto	+3'8	+8'5		
Transmisión			+4'2	
Momento	-91'2	+91'2	-32'9	+32'1
Desequilibrio	0		+4'2	
Liberación			-4'2	
Reparto			-2'7	-1'5
Momento		-1'3		
Momento	-91'2	+89'9	-35'6	+35'6

# EJERCICIO: MATRICIAL INTRASLACIONAL

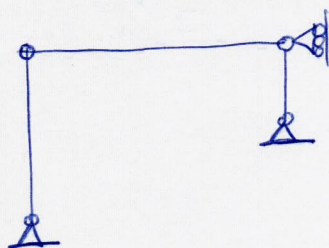


## 1- HIPERESTATICISMO



Puedo eliminar 3 vínculos hasta obtener una estructura isostática. Por tanto, es hiperestática de grado 3

## 2- TRASLACIONALIDAD



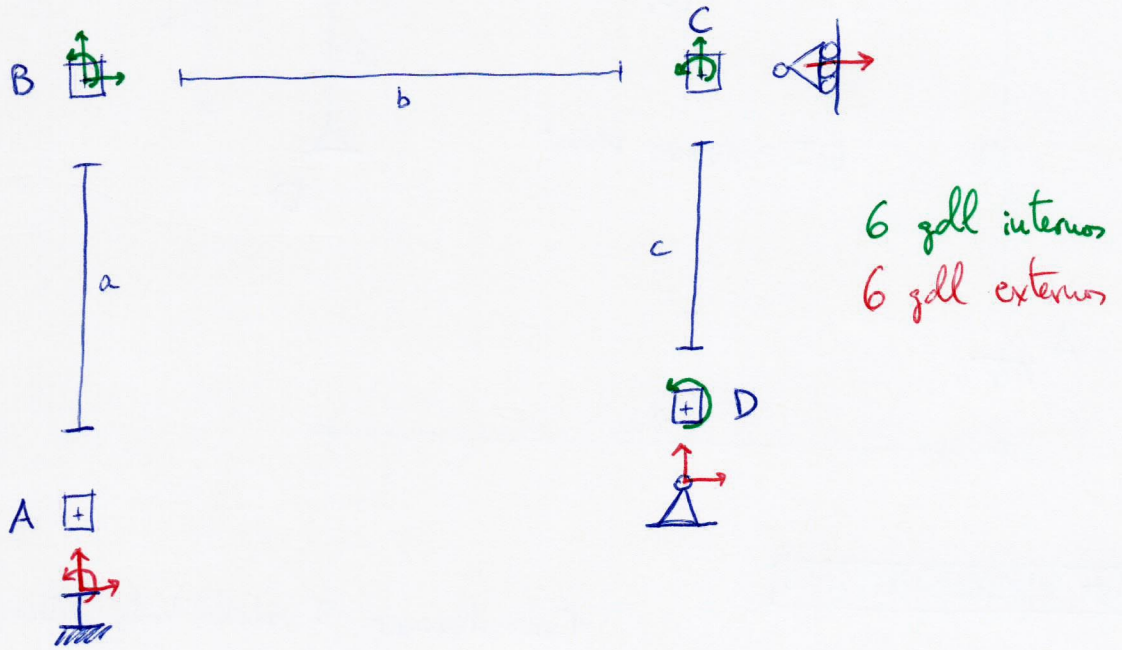
El modelo articulado equivalente es isostático, luego la estructura es intraslacional

## 3- MODELIZACIÓN: GRADOS DE LIBERTAD

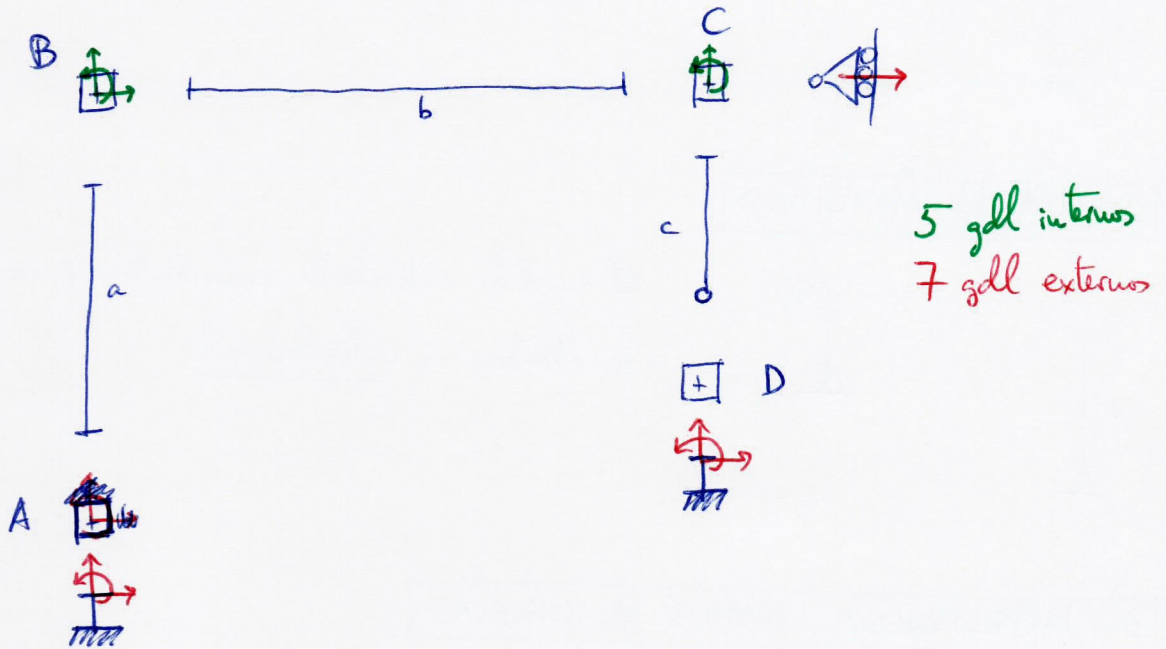
La estructura tiene 4 nudos, luego tiene en total 12 gdl,  
La división entre internos (libres) y externos (coaccionados) depende de la modelización que se elija.

Hay 2 opciones de modelización, dependiendo de si anque la rótula a la barra  $c$  o al apoyo  $D$ :

(I)



(II)

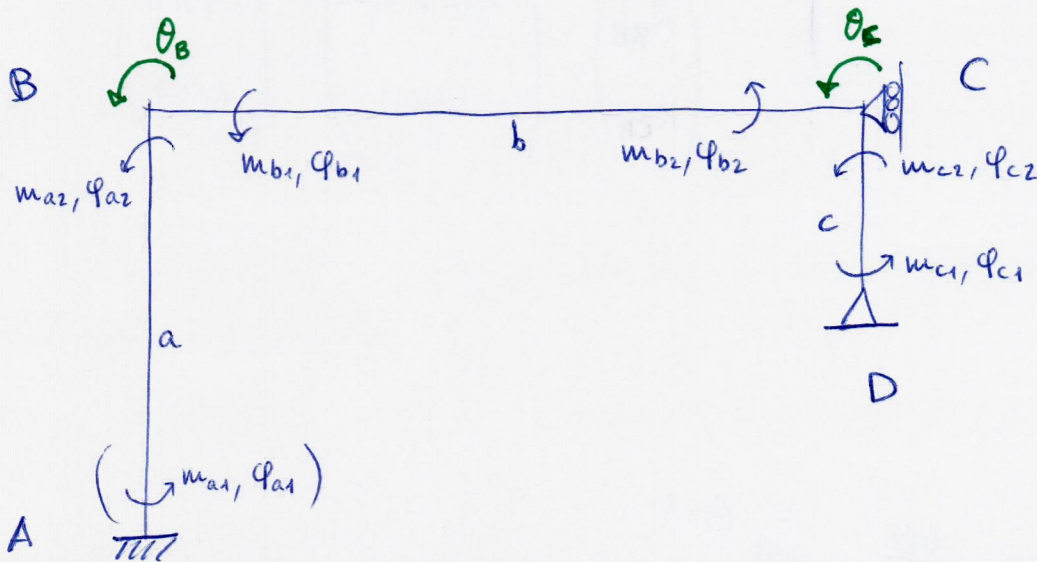


Elegimos la solución II, por tener menos gdl internos

Además, suponemos que las barras son indeformables a axial (despreciable frente a la deformabilidad por flexión).

Por otra parte, vamos a incluir en el análisis sólo los gdl internos; las reacciones las obtendremos más tarde por equilibrio, en lugar de obtenerlas directamente del método matricial.

Queda así el modelo:



Las únicas incógnitas (gdl internos) son los giros  $\theta_B$  y  $\theta_C$ , y por tanto sólo entran en juego los momentos y giros de extremos de barra que confluyen en esos nodos. En el dibujo se representan los momentos ( $\phi$  giros) sobre las barras, no sobre el nodo.

A partir de aquí pueden seguirse dos estrategias de resolución:

- Proceder por momentos unitarios sobre la estructura completa
- Construir la matriz de rigidez a partir de submatrices

Procedemos primero con la 1ª solución.

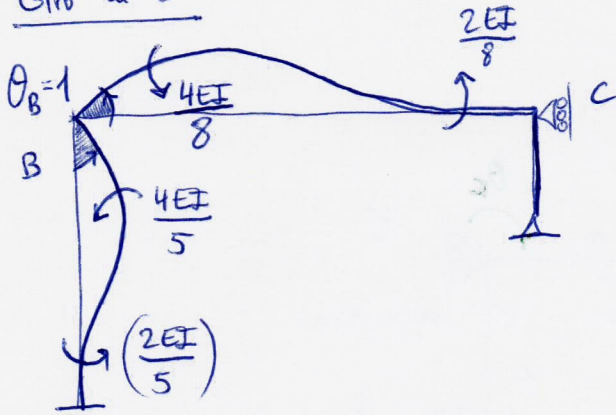


## 5 - CONSTRUCCIÓN DE LA MATRIZ DE RIGIDEZ

Aplicamos giros unitarios sobre los grados de libertad, separadamente, para obtener las columnas de  $(K)$ .

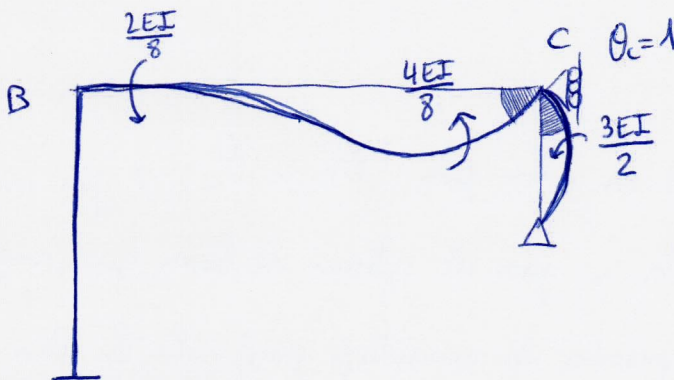
~~Giro en~~

Giro en B:



$$\begin{pmatrix} K_{BB} \\ K_{CB} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4EI}{8} + \frac{4EI}{5} \\ \frac{2EI}{8} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13000 \\ 2500 \end{pmatrix}$$

Giro en C:

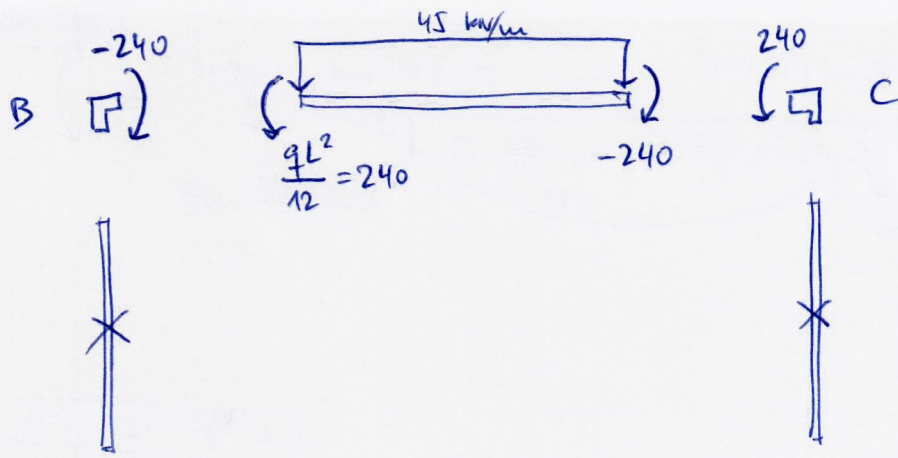


$$\begin{pmatrix} K_{BC} \\ K_{CC} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2EI}{8} \\ \frac{4EI}{8} + \frac{3EI}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2500 \\ 20000 \end{pmatrix}$$

$$(K) = \begin{pmatrix} K_{BB} & K_{BC} \\ K_{CB} & K_{CC} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13000 & 2500 \\ 2500 & 20000 \end{pmatrix}$$

## 6 - MOMENTOS DE EMPOTRAMIENTO PERFECTO

En general, para una estructura translacional, habría que obtener las reacciones de empotramiento perfecto (axil, cortante y momento), no sólo los momentos. Como la estructura es intraslacional y sólo tiene gdl de giros, solamente hacen falta los momentos de empotramiento perfecto:



Equilibrando con los nudos, los momentos transmitidos a los nudos con los opuestos. Construimos así el vector de fuerzas (entendiendo fuerzas en sentido amplio, como fuerzas o momentos) del sistema:

$$\{F\} = \begin{Bmatrix} F_B \\ F_C \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -240 \\ 240 \end{Bmatrix}$$

### 7 - OBTENCIÓN DE GIROS

Se resuelve la ecuación matricial (invertiendo  $(K)$ ) y se obtienen los giros de los nudos (incógnitas)

$$\{\theta\} = \begin{Bmatrix} \theta_B \\ \theta_C \end{Bmatrix}$$

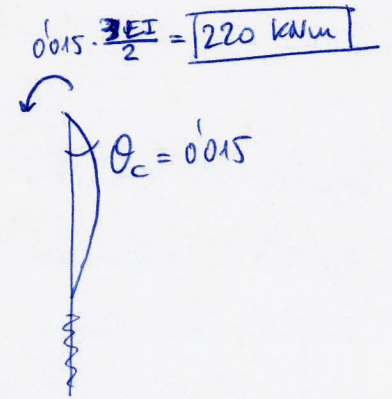
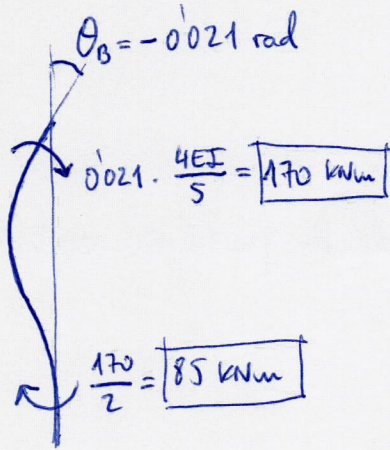
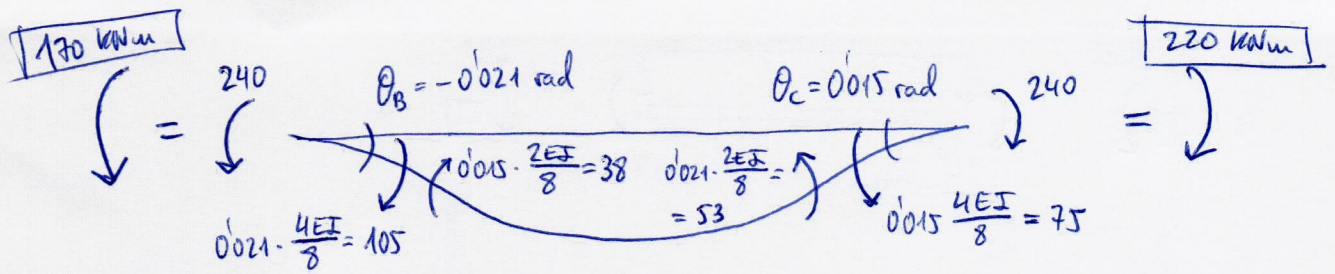
se obtiene  
con excel  
↑

$$\{F\} = (K) \{\theta\} \Rightarrow \{\theta\} = (K)^{-1} \{F\} = \begin{pmatrix} 7'88 \cdot 10^{-5} & -9'85 \cdot 10^{-6} \\ -9'85 \cdot 10^{-6} & 5'12 \cdot 10^{-5} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} -240 \\ 240 \end{Bmatrix} \Rightarrow$$

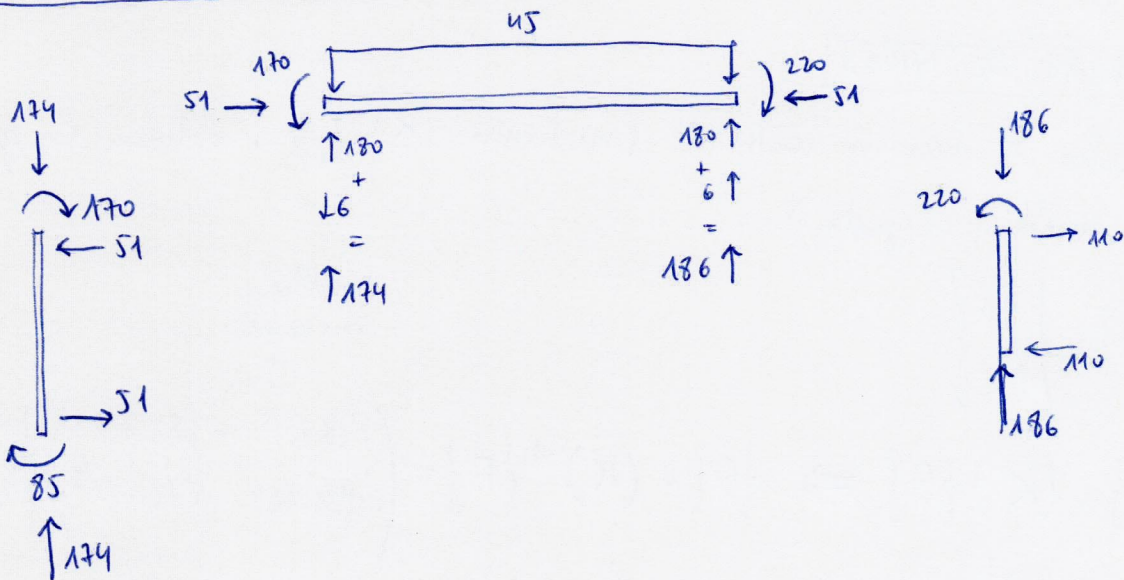
$$\rightarrow \begin{Bmatrix} \theta_B \\ \theta_C \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0'021 \\ 0'015 \end{Bmatrix} \text{ rad.}$$

### 8 - OBTENCIÓN DE MOMENTOS EN EXTREMO DE BARRA

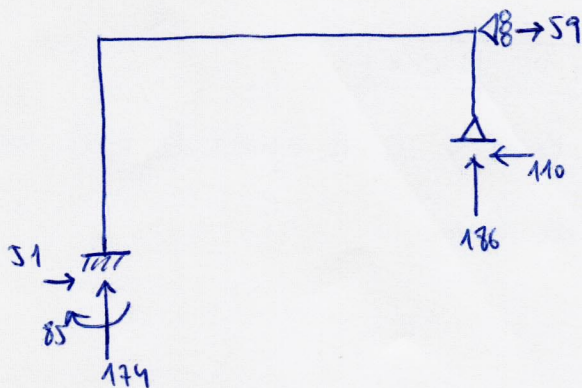
A partir de cada giro de extremo de barra y de la rigidez de cada una, se obtienen los momentos en extremo de barra:



### 9 - REACCIONES EN EXTREMO DE BARRA

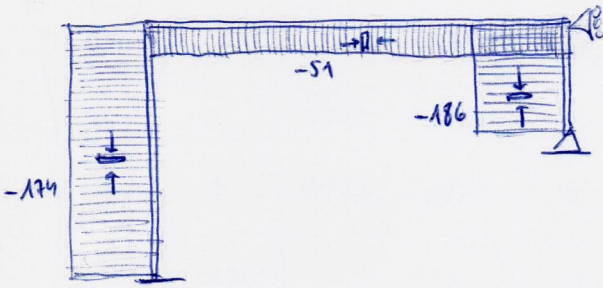


### 10 - REACCIONES DE LA ESTRUCTURA

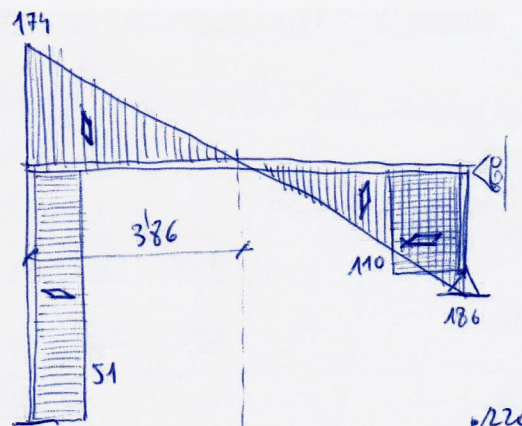


# 11- SOLICITACIONES

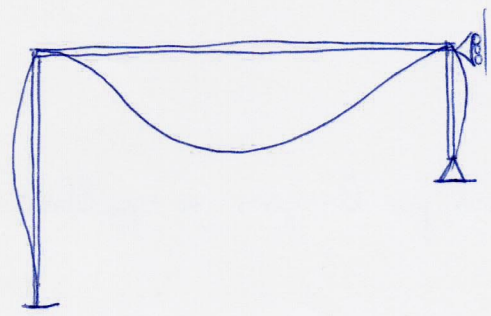
(N)



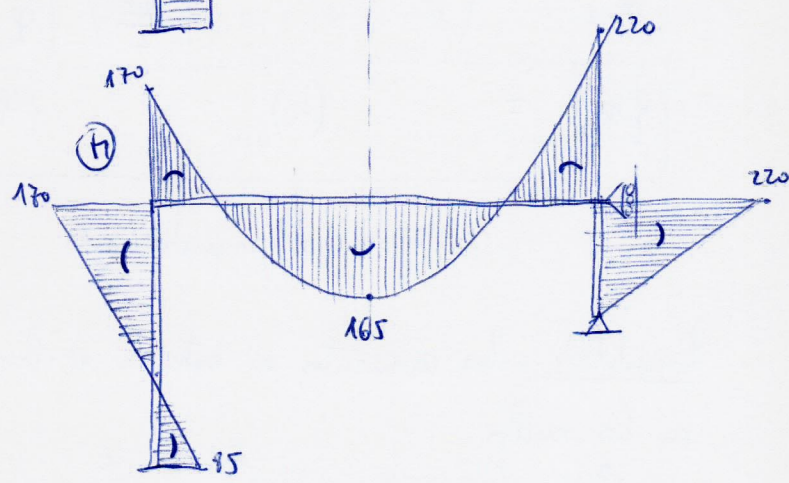
(V)



(δ)



(M)



Seguidamente, se repiten los pasos 5 a 8 siguiendo la 2ª estrategia de resolución (construcción con ~~matrices~~, de manera automatizada)

## 5- CONSTRUCCIÓN DE LA MATRIZ DE RIGIDEZ

Planteamos sucesivamente las ecuaciones de compatibilidad, comportamiento y equilibrio.

Compatibilidad: los giros en los extremos de barra,  $\varphi$ , son iguales a los giros de los nudos,  $\theta$ .

$$\left. \begin{aligned} \varphi_{a2} = \varphi_{b1} = \theta_B \\ \varphi_{b2} = \varphi_{c2} = \theta_C \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{Bmatrix} \varphi_{a2} \\ \varphi_{b1} \\ \varphi_{b2} \\ \varphi_{c2} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_B \\ \theta_C \end{Bmatrix}$$

$$\boxed{\begin{Bmatrix} \varphi \end{Bmatrix}_{4 \times 1} = \underset{\substack{\downarrow \\ \text{Matriz de compatibilidad}}}{(B)}_{4 \times 2} \begin{Bmatrix} \theta \end{Bmatrix}_{2 \times 1}} \quad (1)$$

Matriz de compatibilidad

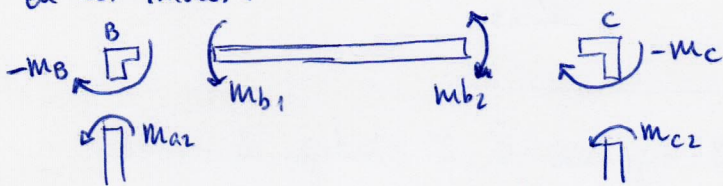
Comportamiento: los momentos en extremos de barra (causado por los giros),  $m$ , se relacionan con dichos giros ( $\varphi$ ) a través de unos coeficientes de rigidez,  $k$ .

$$\begin{Bmatrix} m_{a2} \\ m_{b1} \\ m_{b2} \\ m_{c2} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4EI}{5} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4EI}{8} & \frac{2EI}{8} & 0 \\ 0 & \frac{2EI}{8} & \frac{4EI}{8} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3EI}{2} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \varphi_{a2} \\ \varphi_{b1} \\ \varphi_{b2} \\ \varphi_{c2} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} 8000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5000 & 2500 & 0 \\ 0 & 2500 & 5000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 15000 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \varphi_{a2} \\ \varphi_{b1} \\ \varphi_{b2} \\ \varphi_{c2} \end{Bmatrix}$$

$$\boxed{\{m\}_{4 \times 1} = (k)_{4 \times 4} \{\varphi\}_{4 \times 1}} \quad (2)$$

Matriz de comportamiento

Equilibrio: los momentos en extremos de barra causados por los giros se equilibran en los nudos.



$$\begin{cases} m_B = m_{a2} + m_{b1} \\ m_C = m_{b2} + m_{c2} \end{cases} \Rightarrow \begin{Bmatrix} m_B \\ m_C \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} m_{a2} \\ m_{b1} \\ m_{b2} \\ m_{c2} \end{Bmatrix}$$

$$\boxed{\{m_i\}_{2 \times 1} = (H)_{2 \times 4} \{m\}_{4 \times 1}} \quad (3)$$

Matriz de equilibrio

Importante:

$$(H) = (B)^t$$

Las matrices  $(B)$ ,  $(k)$  y  $(H)$  son las submatrices que generan  $(K)$ , pero esto se demuestra más adelante.

## 6 - MOMENTOS DE EMPOTRAMIENTO PERFECTO

Se define un vector de momentos de empotramiento perfecto,  $\{M\}$ , así:

$$\{M\} = \begin{Bmatrix} \bar{M}_{a2} \\ \bar{M}_{b1} \\ \bar{M}_{b2} \\ \bar{M}_{c2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 240 \\ -240 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

A partir de éste, se define el vector de fuerzas,  $\{F\}$ , como el equilibrio de estos momentos  $\bar{M}$  sobre cada nudo, aplicados sobre el nudo, es decir, cambiado de signo. Para el equilibrio, usamos la matriz de equilibrio (H):

$$\{F\} = -(H)\{M\} = -\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 240 \\ -240 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -240 \\ 240 \end{Bmatrix}$$

## 7 - OBTENCIÓN DE GIROS

En los nudos, los momentos de empotramiento perfecto se equilibran con los momentos resultantes de los giros:  $\{m_i\} + \{M\} = 0$

~~Como~~ Operando con los resultantes sobre el nudo, y considerando que el vector  $\{F\}$  está cambiado de signo, se tiene:

$$\{m_i\} - \{F\} = 0 \Rightarrow \boxed{\{m_i\} = \{F\}} \quad (4)$$

Sustituyendo en (4) las ecuaciones (1), (2) y (3), se tiene:

$$\{F\} = \underbrace{(H)(K)(B)}_{(K)} \{\theta\} \Rightarrow \{F\} = (K)\{\theta\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{\theta\} = (K)^{-1}\{F\} \Rightarrow \dots \Rightarrow \{\theta\} = \begin{Bmatrix} -0.021 \\ 0.015 \end{Bmatrix} \text{ rad.}$$

## 8<sup>o</sup> - OBTENCIÓN DE MOMENTOS EN EXTREMOS DE BARRA

Los momentos finales en la estructura son la suma de los de empotramiento perfecto,  $\bar{M}$ , y los producidos por los giros,  $m$ .

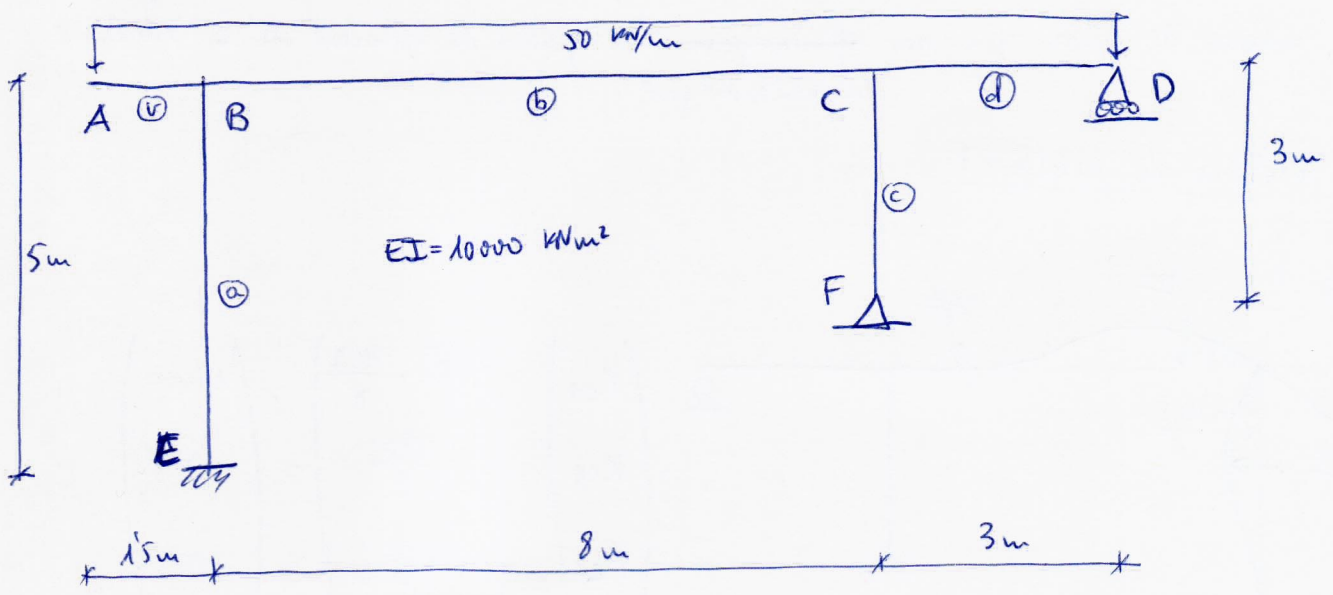
Se define así el vector de momentos solicitación,  $\{M\}$ :

$$\begin{aligned} \{M\} &= \{m\} + \{\bar{M}\} \Rightarrow \begin{Bmatrix} M_{a2} \\ M_{b1} \\ M_{b2} \\ M_{c2} \end{Bmatrix} = (k)(B)\{\theta\} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 240 \\ -240 \\ 0 \end{Bmatrix} = \\ &\quad \begin{matrix} \text{"} \\ (k)\{\varphi\} \\ \text{"} \\ (B)\{\theta\} \end{matrix} \\ &= \begin{Bmatrix} -170 \\ -70 + 240 \\ 20 - 240 \\ 220 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -170 \\ 170 \\ -220 \\ 220 \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

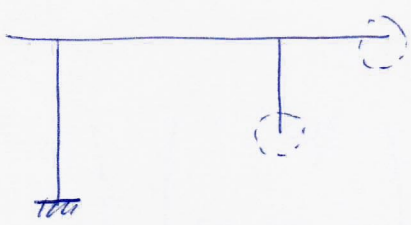
---

Los pasos 9 a 11 son comunes a la estrategia anterior.

# EJERCICIO: MATRICIAL TRASLACIONAL



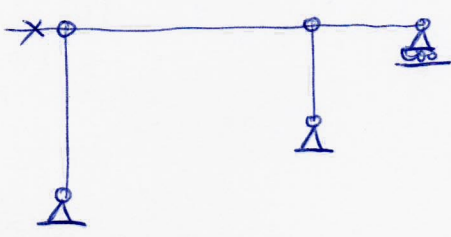
## 1 - HIPERESTATISMO



Puedo eliminar 3 vínculos hasta obtener una estructura instable.

Hiperestática de grado 3

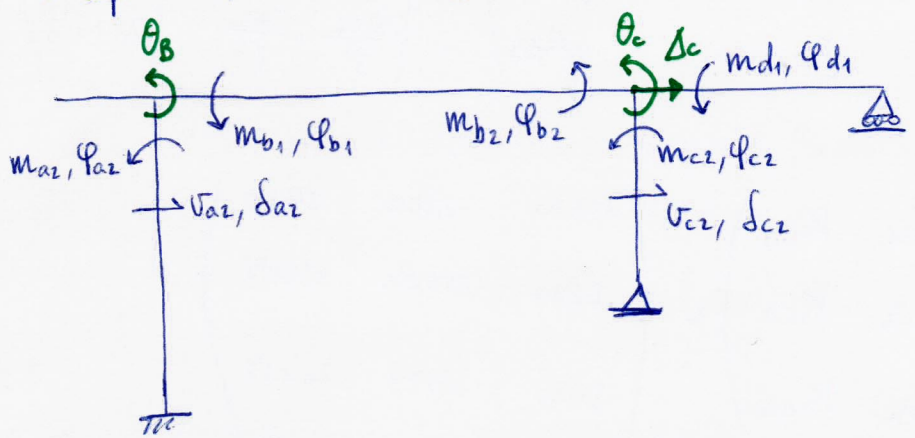
## 2 - TRASLACIONALIDAD



El modelo articulado equivalente es un mecanismo de grado 1, luego la estructura es traslacional

## 3 - MODELIZACIÓN: GRADOS DE LIBERTAD

Asignando la rotula a la barra c en su extremo inferior, y considerando los barras indeformables, resultan 3 gdl libres:



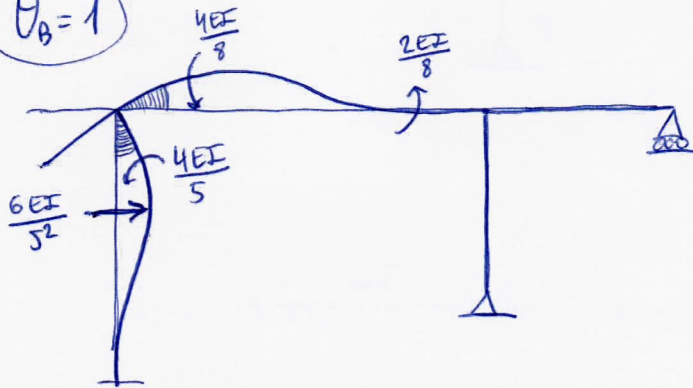
El desplazamiento horizontal se podría haber asignado a cualquiera de los nudos B, C o D, pues la viga es indeformable.



En el dibujo anterior se especifican, con sentido positivo, las solicitaciones y deformaciones en extremos de barra que son eficaces para los grados de libertad de la estructura. movilizados por

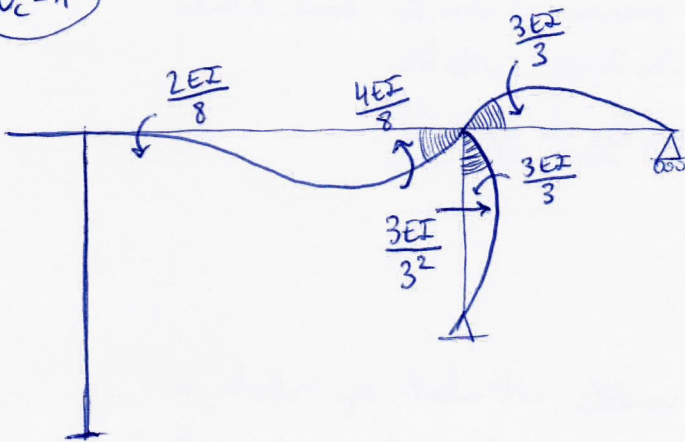
#### 4- MATRIZ DE RIGIDEZ

$\theta_B = 1$



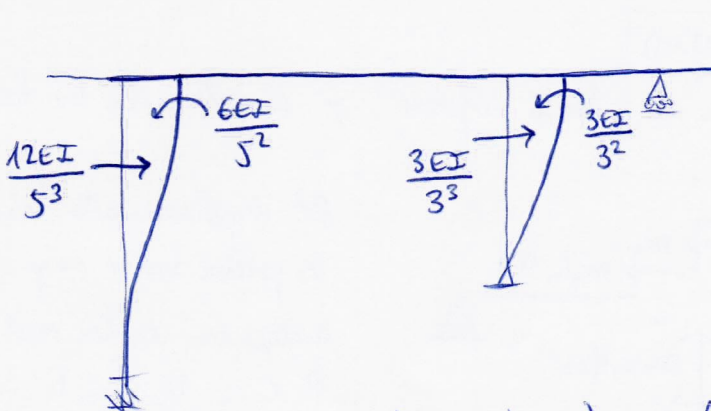
$$\begin{pmatrix} K_{BB} \\ K_{CB} \\ K_{AB} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4EI}{5} + \frac{4EI}{8} \\ \frac{2EI}{8} \\ \frac{6EI}{5^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13000 \\ 2500 \\ 2400 \end{pmatrix}$$

$\theta_C = 1$



$$\begin{pmatrix} K_{BC} \\ K_{CC} \\ K_{AC} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2EI}{8} \\ \frac{4EI}{8} + \frac{3EI}{3} + \frac{3EI}{3} \\ \frac{3EI}{3^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2500 \\ 25000 \\ 3333\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

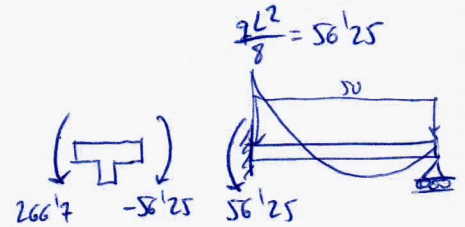
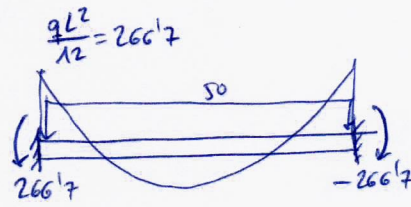
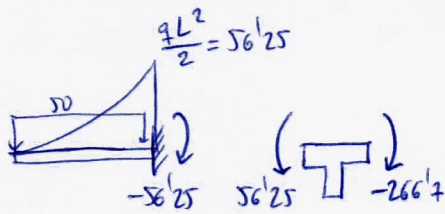
$\Delta_C = 1$



$$\begin{pmatrix} K_{BA} \\ K_{CA} \\ K_{AA} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{6EI}{5^2} \\ \frac{3EI}{3^2} \\ \frac{12EI}{5^3} + \frac{3EI}{3^3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2400 \\ 3333\frac{1}{3} \\ 2071\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$(K) = \begin{pmatrix} K_{BB} & K_{BC} & K_{BA} \\ K_{CB} & K_{CC} & K_{CA} \\ K_{AB} & K_{AC} & K_{AA} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13000 & 2500 & 2400 \\ 2500 & 25000 & 3333\frac{1}{3} \\ 2400 & 3333\frac{1}{3} & 2071\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

## 5 - FUERZAS DE EMPOTRAMIENTO PERFECTO



No hay fuerzas de empotramiento perfectas correspondientes al grado del desplazamiento horizontal



$$\{F\} = \begin{Bmatrix} 56'25 - 266'7 \\ 266'7 - 56'25 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -210'4 \\ 210'4 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

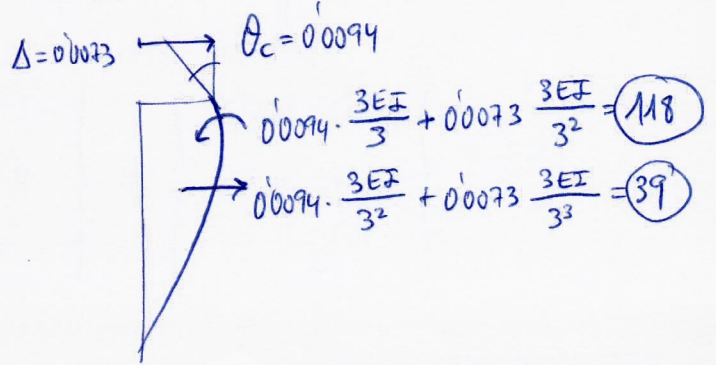
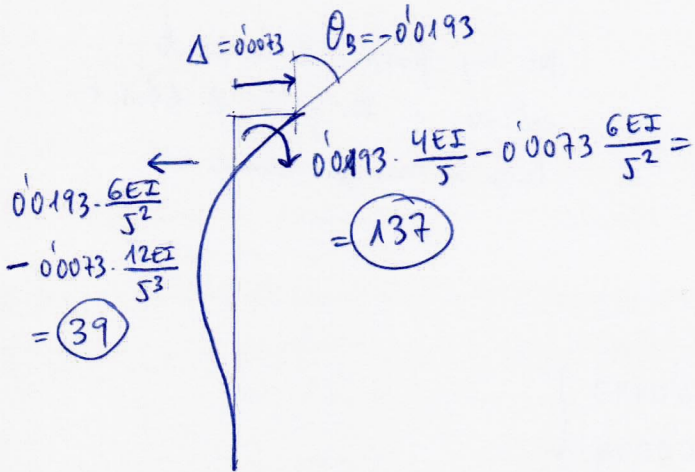
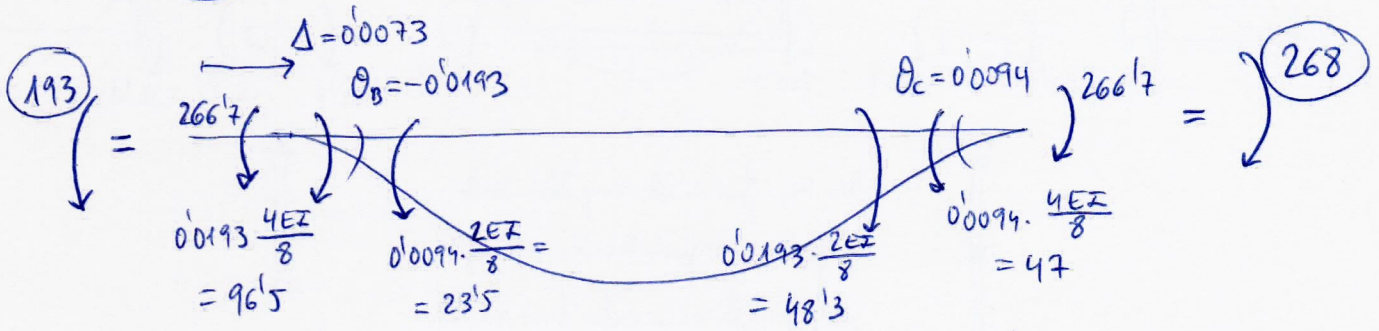
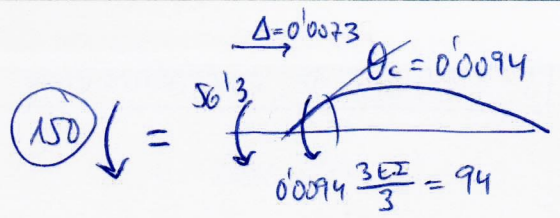
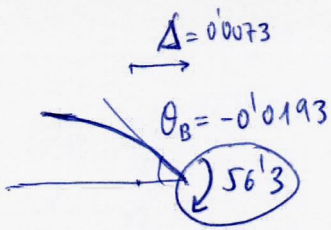
No hay fuerzas directamente aplicadas en los grados de libertad, luego no hay que sumar nada.

## 6 - DESPLAZAMIENTOS

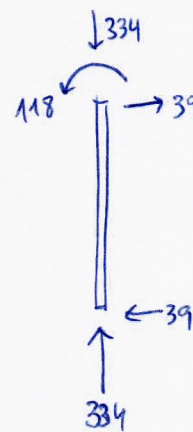
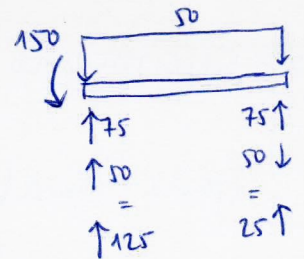
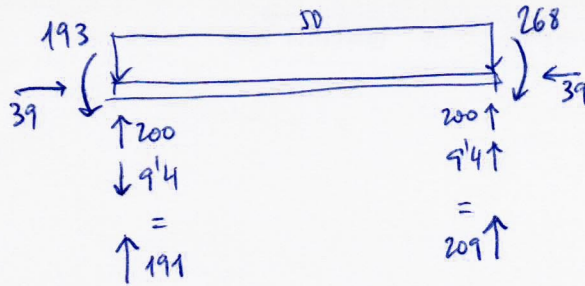
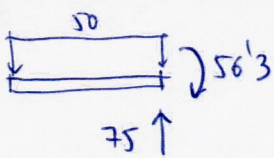
$$\{U\} = \begin{Bmatrix} \theta_B \\ \theta_C \\ \Delta_C \end{Bmatrix} = (K)^{-1} \{F\} = \dots = \begin{Bmatrix} -0'0193 \\ 0'0094 \\ 0'0073 \end{Bmatrix}$$

## 7 - SOLICITACIONES EN EXTREMOS DE BARRA

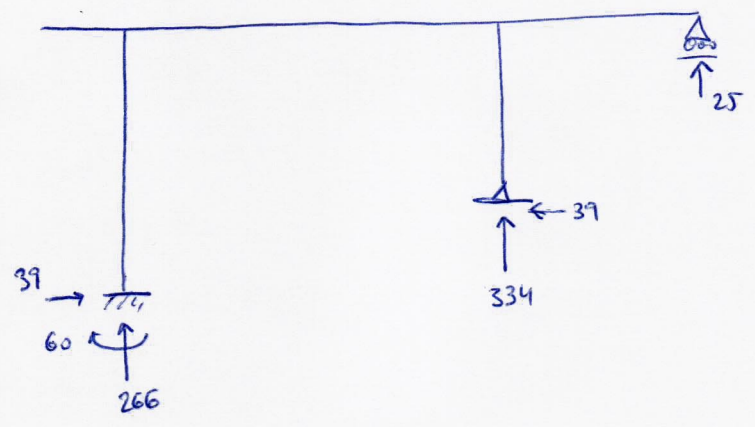
(página siguiente)



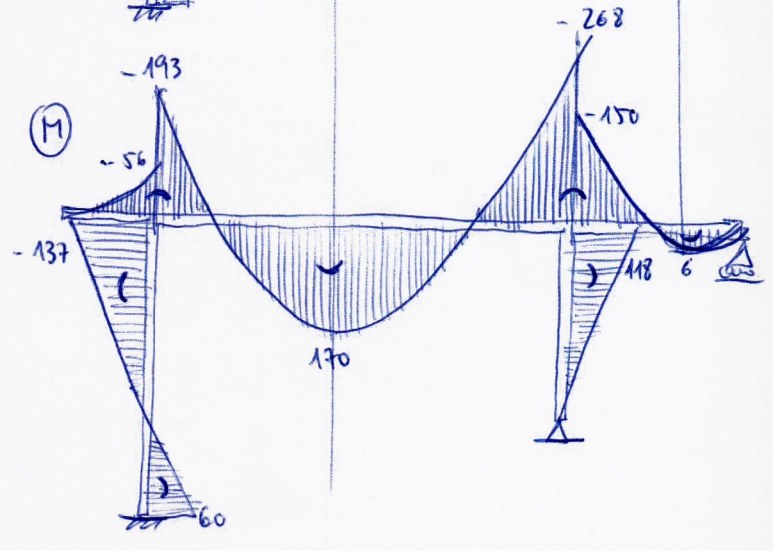
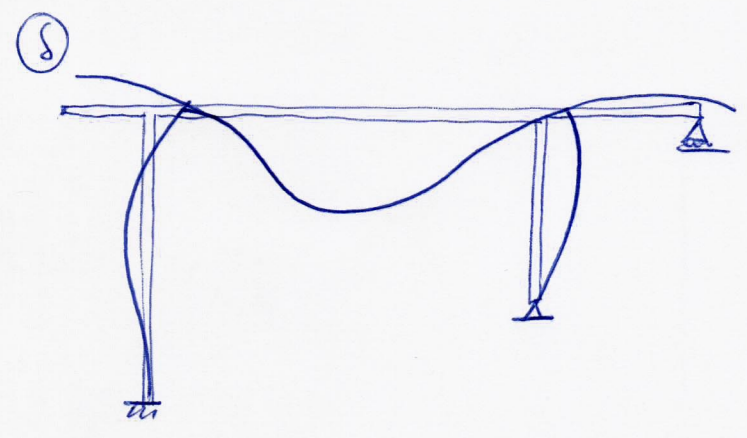
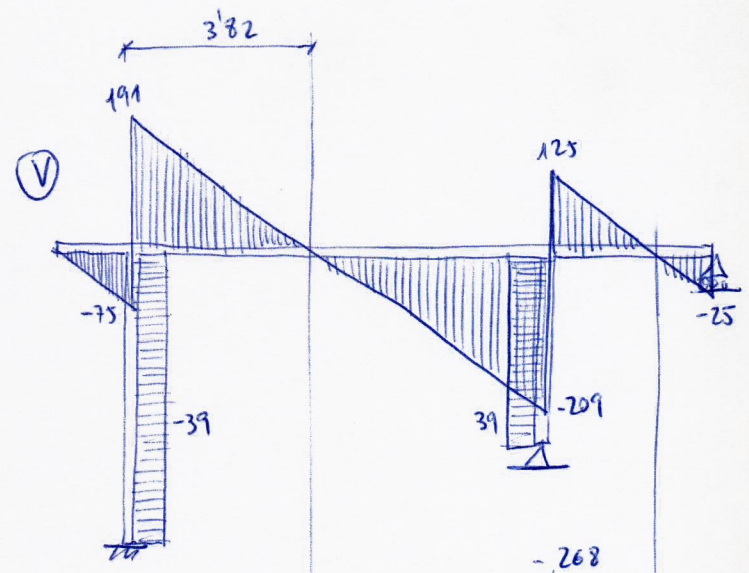
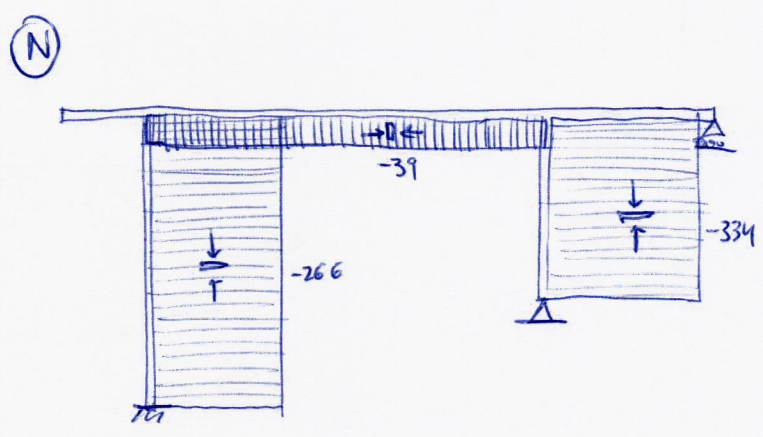
8 - REACCIONES EN EXTREMO DE BARRA



9 - REACCIONES DE LA ESTRUCTURA



10 - SOLICITACIONES



# Método alternativo

## 4' - MATRIZ DE RIGIDEZ

Compatibilidad:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_{a2} &= \varphi_{b1} = \theta_B \\ \varphi_{b2} &= \varphi_{c2} = \varphi_{d1} = \theta_C \\ \delta_{a2} &= \delta_{c2} = \Delta_C \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} \varphi_{a2} \\ \varphi_{b1} \\ \varphi_{b2} \\ \varphi_{c2} \\ \varphi_{d1} \\ \delta_{a2} \\ \delta_{c2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_B \\ \theta_C \\ \Delta_C \end{pmatrix}$$

$$\{u\}_{7 \times 1} = (B)_{7 \times 3} \{U\}_{3 \times 1}$$

Comportamiento:

$$\begin{pmatrix} m_{a2} \\ m_{b1} \\ m_{b2} \\ m_{c2} \\ m_{d1} \\ v_{a2} \\ v_{c2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2400 & 0 \\ 0 & 5000 & 2500 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2500 & 5000 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10000 & 0 & 0 & 3333\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10000 & 0 & 0 \\ 2400 & 0 & 0 & 0 & 0 & 960 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3333\frac{1}{3} & 0 & 0 & 1111\frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_{a2} \\ \varphi_{b1} \\ \varphi_{b2} \\ \varphi_{c2} \\ \varphi_{d1} \\ \delta_{a2} \\ \delta_{c2} \end{pmatrix}$$

$$\{f\}_{7 \times 1} =$$

$$(K)_{7 \times 7}$$

$$\{u\}_{7 \times 1}$$

Equilibrio:

$$m_B = m_{a2} + m_{b1}$$

$$m_C = m_{b2} + m_{c2} + m_{d1}$$

$$v_C = v_{a2} + v_{c2}$$

$$\left. \begin{aligned} m_B \\ m_C \\ v_C \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} m_B \\ m_C \\ v_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_{a2} \\ m_{b1} \\ m_{b2} \\ m_{c2} \\ m_{d1} \\ v_{a2} \\ v_{c2} \end{pmatrix}$$

$$\{f_i\}_{3 \times 1} =$$

$$(H)_{3 \times 7}$$

$$\{f\}_{7 \times 1}$$

$$(H) = (B)^t$$

$$(K) = (H)(k)(B) = \dots = \begin{pmatrix} 13000 & 2500 & 2400 \\ 2500 & 25000 & 3333\frac{1}{3} \\ 2400 & 3333\frac{1}{3} & 2071\bar{7} \end{pmatrix}$$

### 5' - FUERZAS DE EMPOTRAMIENTO PERFECTO

(No se incluye aquí la del voladizo, por haberlo dejado fuera en el cómputo de ~~los~~ extremos de barra momentizados por los grados de libertad. Lo consideramos un momento aplicado sobre el nudo)

$$\{F\} = \begin{pmatrix} 0 & a_2 \\ 266\bar{7} & b_1 \\ -266\bar{7} & b_2 \\ 0 & c_2 \\ 56\frac{1}{3} & d_1 \\ 0 & a_2 \\ 0 & c_2 \end{pmatrix}$$

$$\{F\}_{\text{nudo}} = \begin{pmatrix} 56\frac{1}{3} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \theta_B \\ \theta_C \\ \Delta_C \end{matrix}$$

$$\{F\} = -(H)\{F\} + \{F\}_{\text{nudo}} = \begin{pmatrix} -267 + 56\frac{1}{3} \\ 210 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -210 \\ 210 \\ 0 \end{pmatrix}$$

### 6' - DESPLAZAMIENTOS

Igual que se hizo con el otro método

### 7' - SOLICITACIONES EN EXTREMO DE BARRA

$$\{S\} = \begin{pmatrix} M_{a2} \\ M_{b1} \\ M_{b2} \\ M_{c2} \\ M_{d1} \\ V_{a2} \\ V_{c2} \end{pmatrix} = \{S\} + \{F\} = (K)(B)\{U\} + \{F\} = \begin{pmatrix} -137 \\ -73 \\ -1 \\ 118 \\ 94 \\ -39 \\ 39 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 267 \\ -267 \\ 0 \\ 56 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -137 \\ 193 \\ -268 \\ 118 \\ 150 \\ -39 \\ 39 \end{pmatrix}$$

El resto se sigue como con el otro método.

### PRÁCTICA 3: MÉTODO MATRICIAL DE LAS RIGIDECES

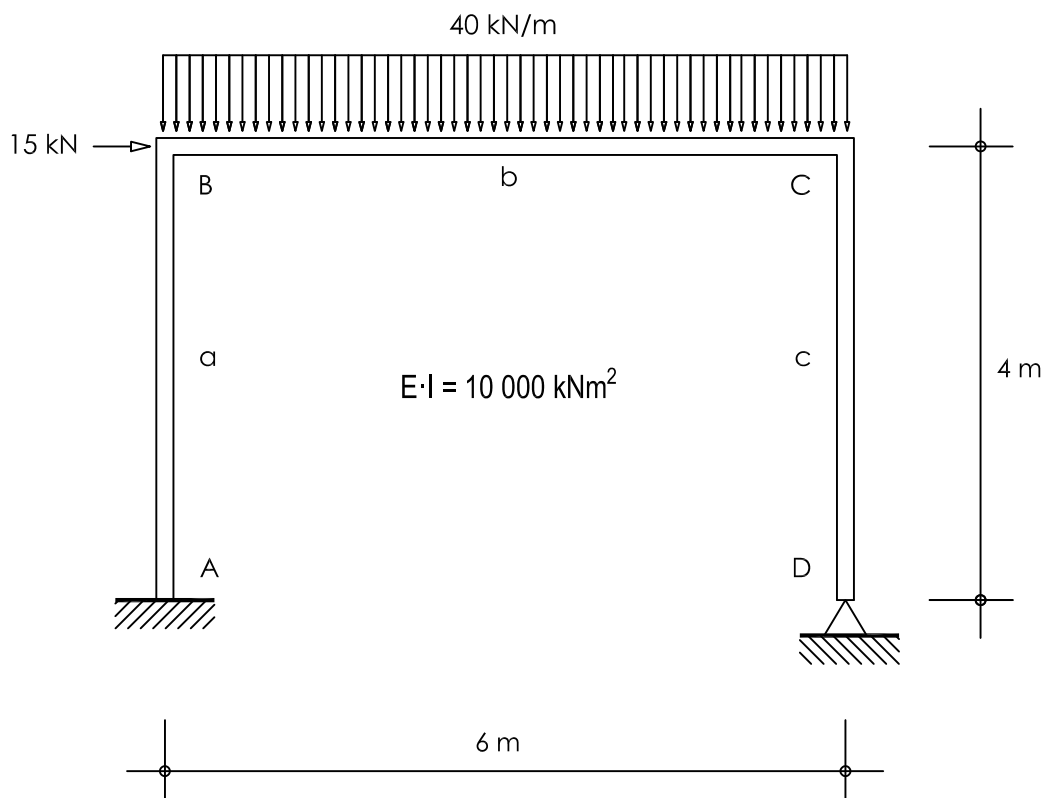
Calcular las solicitaciones de la siguiente estructura por el método matricial de las rigideces, usando las dos estrategias conocidas para hallar la matriz de rigidez (por movimientos unitarios y por producto de matrices).

Seguir el esquema de resolución siguiente:

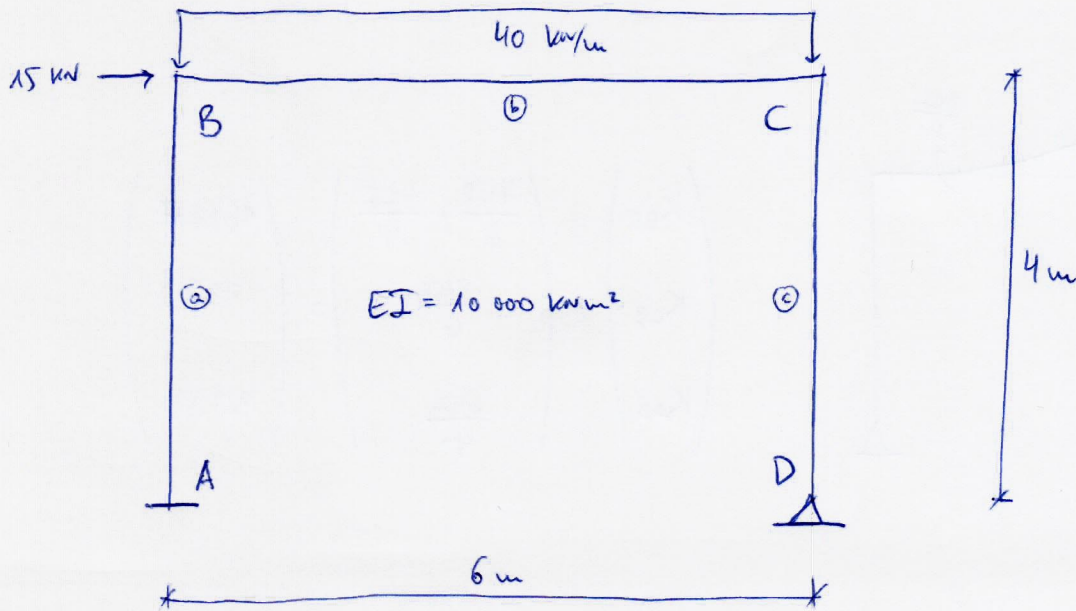
- 1) Grado de hiperestatismo
- 2) Evaluación de la traslacionalidad
- 3) Modelización: grados de libertad
- 4) Cálculo de matriz de rigidez mediante movimientos unitarios
- 5) Fuerzas de empotramiento perfecto y vector de fuerzas en nudos
- 6) Planteamiento de ecuación matricial y obtención de movimientos
- 7) Solicitaciones en extremos de barra (en grados de libertad)
- 8) Reacciones en extremos de barra (el resto)
- 9) Reacciones de la estructura
- 10) Solicitaciones en barras

- 4') Cálculo de matriz de rigidez mediante producto de matrices
- 5') Vector de fuerzas de empotramiento perfecto y vector de fuerzas en nudos
- 7') Vector de solicitaciones en extremos de barra (en grados de libertad)

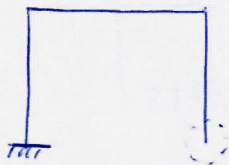
NOTA: En algunos de los pasos es necesario multiplicar o invertir matrices. Se recomienda hacerlo en Excel, y será tarea del alumno hallar el procedimiento.



# P3: MATRICIAL

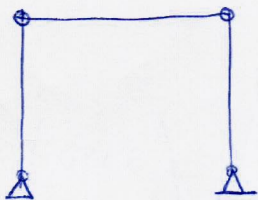


## 1 - HIPERESTATISMO



Puedo eliminar 2 vínculos hasta obtener una estructura isostática.  
Hyperestática de grado 2

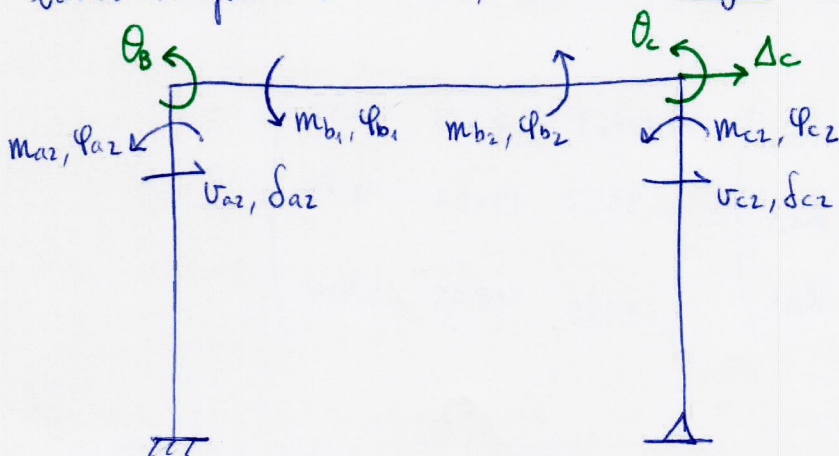
## 2 - TRASLACIONALIDAD



El modelo articulado equivalente es un mecanismo de grado 1, luego la estructura es traslacional

## 3 - MODELIZACIÓN: GRADOS DE LIBERTAD

Anguando la rótula a la barra c en su extremo inferior, y considerando las barras indeformables a axial, resultan 3 gdl libres:

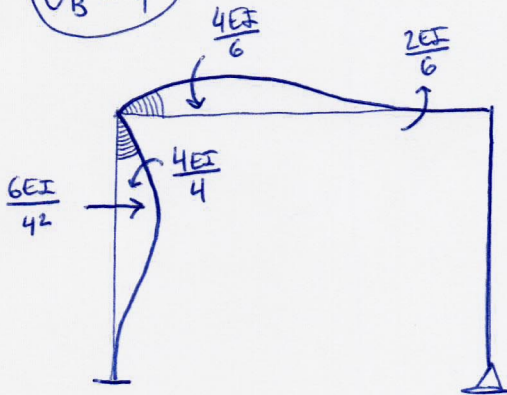


El desplazamiento horizontal se podrá haber originado a cualquiera de los nudos B o C, pues la viga es indeformable.



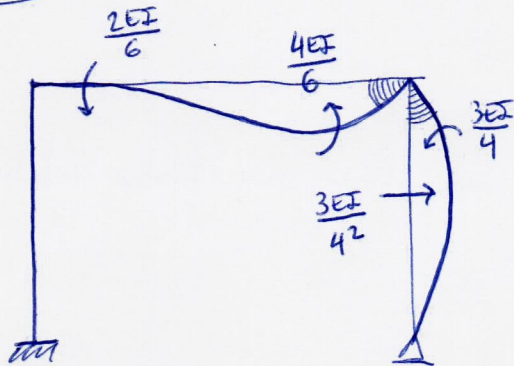
# 4- MATRIZ DE RIGIDEZ

$\theta_B = 1$



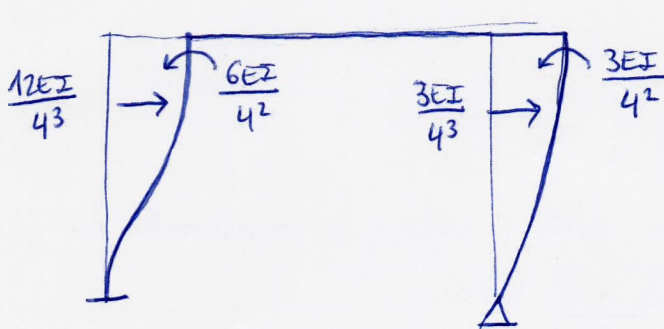
$$\begin{pmatrix} K_{BB} \\ K_{CB} \\ K_{AB} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4EI}{6} + \frac{4EI}{4} \\ \frac{2EI}{6} \\ \frac{6EI}{4^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16667 \\ 3333 \\ 3750 \end{pmatrix}$$

$\theta_C = 1$



$$\begin{pmatrix} K_{BC} \\ K_{CC} \\ K_{AC} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2EI}{6} \\ \frac{4EI}{6} + \frac{3EI}{4} \\ \frac{3EI}{4^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3333 \\ 14167 \\ 1875 \end{pmatrix}$$

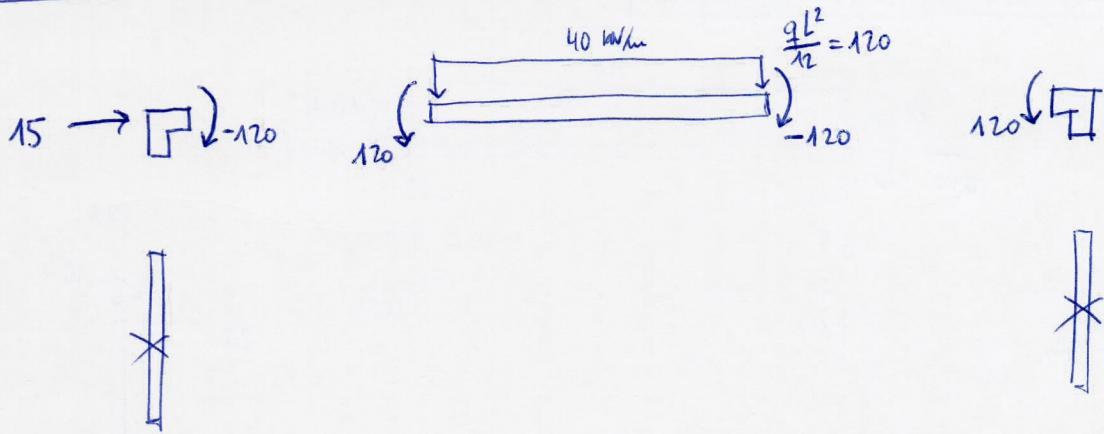
$\Delta_C = 1$



$$\begin{pmatrix} K_{BD} \\ K_{CD} \\ K_{DD} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{6EI}{4^2} \\ \frac{3EI}{4^2} \\ \frac{12EI}{4^3} + \frac{3EI}{4^3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3750 \\ 1875 \\ 2344 \end{pmatrix}$$

$$(K) = \begin{pmatrix} K_{BB} & K_{BC} & K_{BD} \\ K_{CB} & K_{CC} & K_{CD} \\ K_{AB} & K_{AC} & K_{AD} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16667 & 3333 & 3750 \\ 3333 & 14167 & 1875 \\ 3750 & 1875 & 2344 \end{pmatrix}$$

**5- FUERZAS DE EMPOTRAMIENTO PERFECTO**



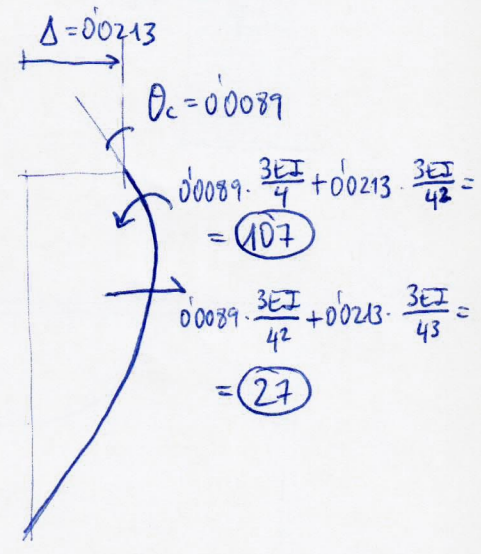
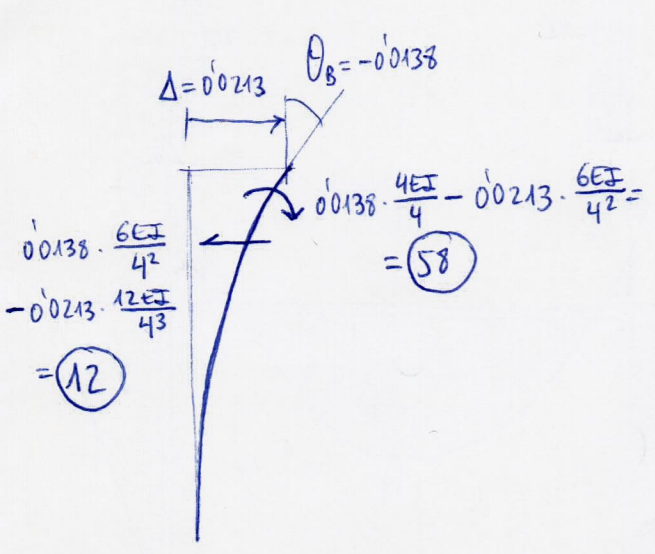
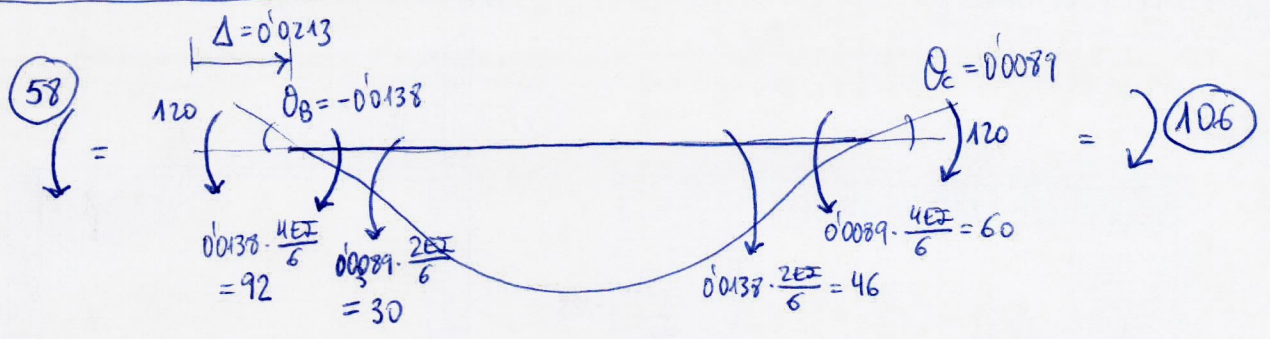
La fuerza externa de 15 kN actúa sobre el grado de libertad  $\Delta_c$

$$\{F\} = \begin{Bmatrix} -120 \\ 120 \\ 15 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_B \\ F_C \\ F_A \end{Bmatrix}$$

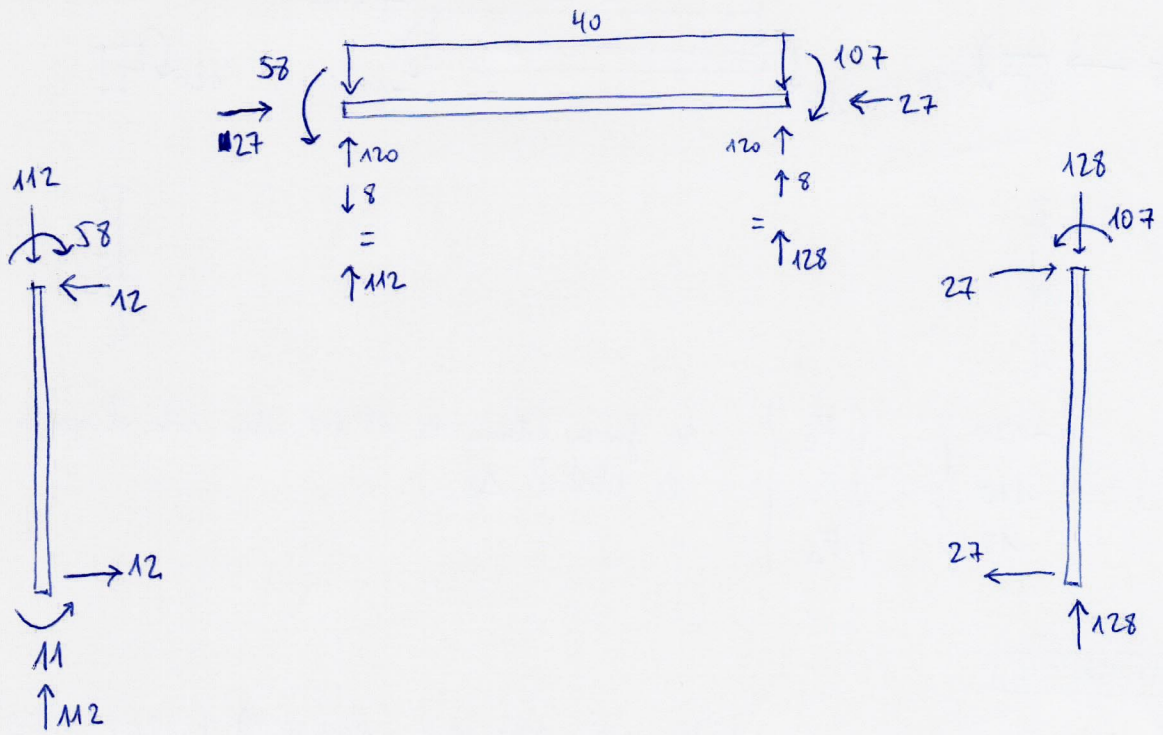
**6- MOVIMIENTOS**

$$\{U\} = \begin{Bmatrix} \theta_B \\ \theta_C \\ \Delta_c \end{Bmatrix} = (K^{-1}) \{F\} = \begin{pmatrix} 9'38 \cdot 10^{-5} & -2'47 \cdot 10^{-6} & -1'48 \cdot 10^{-4} \\ -2'47 \cdot 10^{-6} & 7'90 \cdot 10^{-5} & -5'93 \cdot 10^{-5} \\ -1'48 \cdot 10^{-4} & -5'93 \cdot 10^{-5} & 7'11 \cdot 10^{-4} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} -120 \\ 120 \\ 15 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0'0138 \\ 0'0089 \\ 0'0213 \end{Bmatrix}$$

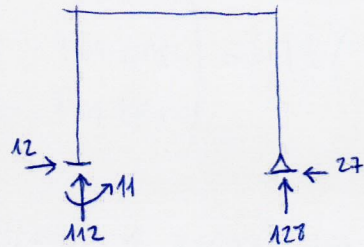
**7- SOLICITACIONES EN LOS GRADOS DE LIBERTAD**



8 - REACCIONES EN EXTREMO DE BARRA

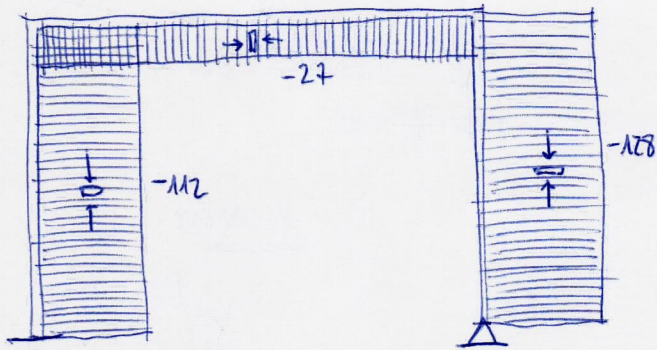


9 - REACCIONES DE LA ESTRUCTURA

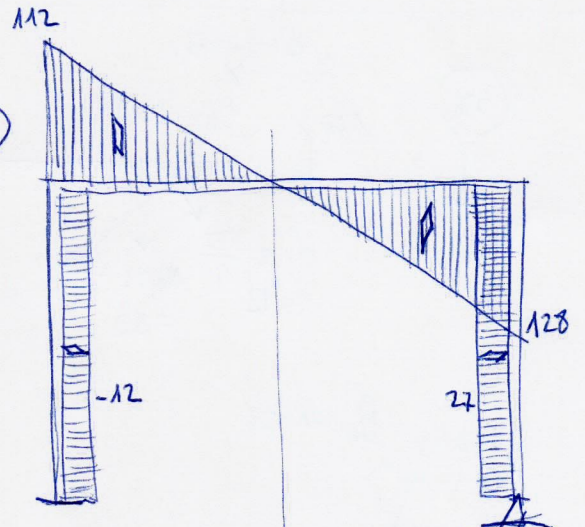


10 - SOLICITACIONES

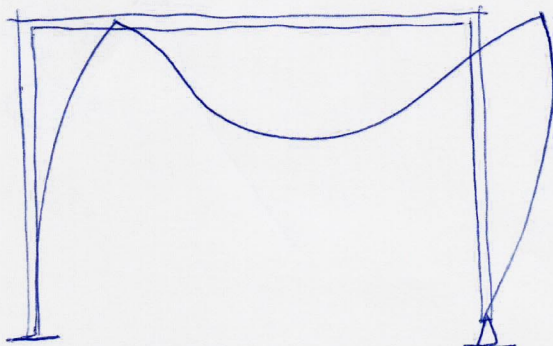
(N)



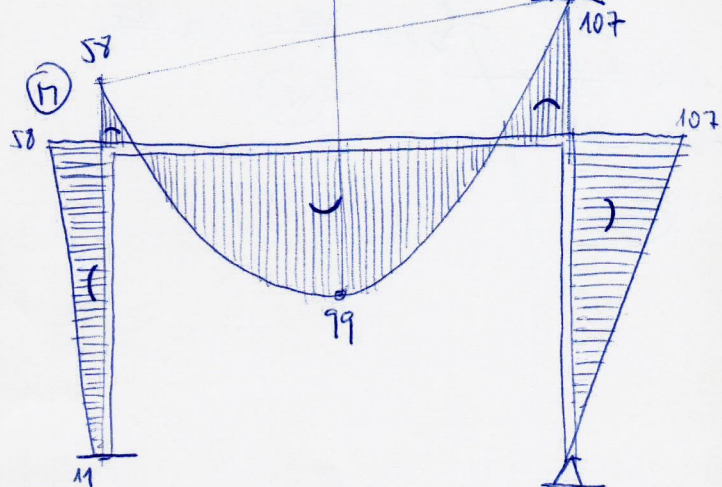
(V)



(S)



(M)



# Método alternativo

## 4-MATRIZ DE RIGIDEZ

### Compatibilidad

$$\left. \begin{aligned} \varphi_{a2} &= \varphi_{b1} = \theta_B \\ \varphi_{b2} &= \varphi_{c2} = \theta_C \\ \delta_{a2} &= \delta_{c2} = \Delta_C \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} \varphi_{a2} \\ \varphi_{b1} \\ \varphi_{b2} \\ \varphi_{c2} \\ \delta_{a2} \\ \delta_{c2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_B \\ \theta_C \\ \Delta_C \end{pmatrix}$$

$$\{u\}_{6 \times 1} = (B)_{6 \times 3} \{U\}_{3 \times 1}$$

### Comportamiento

$$\begin{pmatrix} M_{a2} \\ m_{b1} \\ m_{b2} \\ m_{c2} \\ V_{a2} \\ V_{c2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10000 & 0 & 0 & 0 & 3750 & 0 \\ 0 & 6667 & 3333 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3333 & 6667 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1875}{7500} & 0 & 1875 \\ 3750 & 0 & 0 & 0 & 1875 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1875 & 0 & 469 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_{a2} \\ \varphi_{b1} \\ \varphi_{b2} \\ \varphi_{c2} \\ \delta_{a2} \\ \delta_{c2} \end{pmatrix}$$

$$\{S\}_{6 \times 1} = (K)_{6 \times 6} \{u\}_{6 \times 1}$$

### Equilibrio

$$\left. \begin{aligned} M_B &= M_{a2} + m_{b1} \\ M_C &= m_{b2} + m_{c2} \\ V_C &= V_{a2} + V_{c2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} M_B \\ M_C \\ V_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_{a2} \\ m_{b1} \\ m_{b2} \\ m_{c2} \\ V_{a2} \\ V_{c2} \end{pmatrix}$$

$$\{S_i\}_{3 \times 1} = (H)_{3 \times 6} \{S\}_{6 \times 1} \quad ; \quad (H) = (B)^t$$

$$(K) = (H)(k)(B) = \dots = \begin{pmatrix} 16667 & 3333 & 3750 \\ 3333 & 14167 & 1875 \\ 3750 & 1875 & 2344 \end{pmatrix}$$

### 5' - FUERZAS DE EMPOTRAMIENTO PERFECTO

$$\{F\} = \begin{pmatrix} 0 \\ 120 \\ -120 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} a_2 \\ b_1 \\ b_2 \\ c_2 \\ a_2 \\ c_2 \end{matrix} \quad \{F\}_{\text{mudos}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 15 \end{pmatrix}$$

$$\{F\} = - (H) \{F\} + \{F\}_{\text{mudos}} = \begin{pmatrix} -120 + 0 \\ 120 + 0 \\ 0 + 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -120 \\ 120 \\ 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_B \\ F_C \\ F_D \end{pmatrix}$$

### 6' - MOVIMIENTOS

Análogo a (6)

### 7' - SOLICITACIONES EN EXTREMO DE BARRA

$$\{S\} = \begin{pmatrix} M_{a2} \\ M_{b1} \\ M_{b2} \\ M_{c2} \\ V_{a2} \\ V_{c2} \end{pmatrix} = \{s\} + \{F\} = (k)(B)\{U\} + \{F\} = \begin{pmatrix} -58 \\ -62 \\ 13 \\ 107 \\ -12 \\ 27 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 120 \\ -120 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -58 \\ 58 \\ -107 \\ 107 \\ -12 \\ 27 \end{pmatrix}$$

El resto es análogo al primer método