UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA

Integración doble
Cambio de variables

Apellidos, nombre	Thome Coppo, Néstor
	njthome@mat.upv.es
Departamento	Matemática Aplicada
Centro	Escuela Técnica Superior de
	Ingenieros de Telecomunicación

1. Resumen de las ideas clave

En este artículo se va a presentar la resolución completa de dos problemas tipo del tema de **integración doble**. Se introducen comentarios, cuestiones, observaciones, el análisis previo a la resolución, gráficas, etc. para que la resolución del problema sea interactiva como si se estuviese oyendo la explicación de clase y trabajando en ese momento las propuestas que allí se realizan. Este artículo está estructurado como sigue:

Contenido de este artículo
2. Introducción.
3. Objetivos.
4. Desarrollo.
5. Cierre.

Cuadro 1: Contenido de este artículo

2. Introducción

Es conocido que hay dos procedimientos que generalmente se utilizan para resolver una **integral doble**. Uno de ellos es:

- Resolver la integral directamente en coordenadas cartesianas.

Se utilizará siempre que la integral planteada tenga un integrando sencillo para el cual poder hallar una primitiva y, además, que la región de integración no provoque dificultades en la integrales iteradas.

El otro procedimiento es:

- Resolver la integral en coordenadas polares.

Se utilizará principalmente cuando el integrando posea una función que contiene la expresión $x^2 + y^2$ y/o si la geometría de la región de integración permite ser interpretada como un sector circular (truncado).

El objetivo de este artículo es profundizar en este último caso. Si bien, presentar sólo estas técnicas corresponde a una simplificación del tema (pues hay otros muchos cambios posibles), son las que más ayudarán a resolver la mayoría de las integrales que posteriormente se necesitarán en la Ingeniería.

En el cuadro de la Figura 1 se puede observar un esquema básico de lo expuesto anteriormente, que puede ayudar a la hora de abordar la resolución de una integral doble.

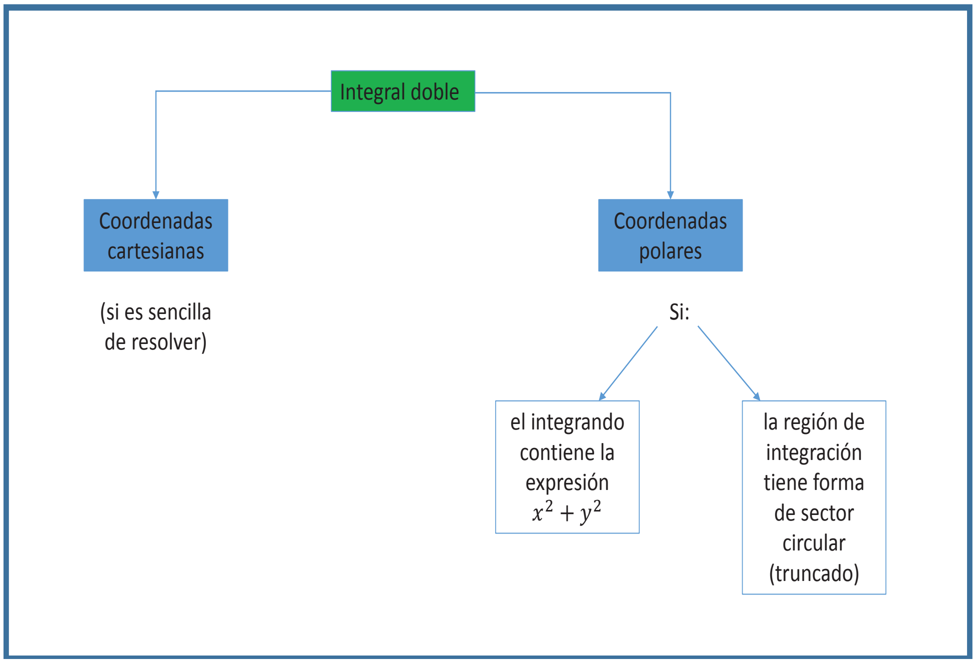

Figura 1: Esquema general para la resolución de una integral doble

3. Objetivos

Una vez que el alumno lea con detenimiento este documento, será capaz de:

- Realizar el cambio de coordenadas cartesianas a coordenadas polares de las ecuaciones que definen tanto las curvas que delimitan la región de integración como las funciones utilizadas en los integrandos.
- Resolver adecuadamente diferentes integrales dobles en los cuales deba realizar el cambio a coordenadas polares para obtener una integral más sencilla de tratar.
- Utilizar integrales dobles en coordenadas polares para su aplicación al cálculo de áreas de regiones planas.

A lo largo del documento el alumno verá que se van planteando algunas cuestiones. Sería interesante que se detuviese a reflexionar sobre las mismas antes de leer la respuesta.

4. Desarrollo

Es conocido que si se tiene que resolver una integral doble de una función f definida sobre una región rectangular con lados paralelos a los ejes coordenados, sus extremos serán constantes, es decir, será una integral del tipo

$$\boxed{\int_a^b \int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x}$$

Por lo tanto, será muy sencilla de resolver siempre que sea posible hallar una primitiva del integrando mediante métodos conocidos.

Sin embargo, ¿qué ocurre si la región de integración es por ejemplo el círculo de ecuación $x^2 + y^2 \leq 1$? En este caso, se debería resolver la integral

$$\boxed{\int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x},$$

que es bastante problable que, en coordenadas cartesianas, sea más complicada o incluso imposible de resolver. Para ello, nos ayudaremos de los cambios de variable.

En este punto sería recomendable repasar el Apartado 2.2.4 titulado Cambio de variable y el subapartado titulado Coordenadas polares, del libro de teoría [1] citado en la Bibliografía.

En la Página Web [2] citada en la Bibliografía, podrás visualizar una **animación** en la que se aprecia claramente **cómo funcionan** las coordenadas polares y algunas **aplicaciones**. Además, puedes practicar a realizar cambios de coordenadas cartesianas a polares y viceversa entrando al objeto de aprendizaje indicado en la Página Web [4] citada en la Bibliografía. Por último, puedes observar las gráficas de algunas curvas entrando al objeto de aprendizaje indicado en la Página Web [5] citada en la Bibliografía.

Ahora se va proceder a desarrollar dos ejemplos con su resolución completa y se harán una serie de comentarios que permitirán comprender los entresijos que suelen encontrarse a la hora de resolver una integral con esta problemática.

Antes de ello, sería instructivo que veas los diferentes ejemplos presentados en el siguiente objeto de aprendizaje. Entrando en el enlace de la Página Web [3] citado en la Bibliografía podrás visualizar la definición de integral doble mediante diferentes funciones que podrás elegir y también podrás variar la cantidad de particiones a realizar sobre cada intervalo de la región de integración. De este modo se aprecian las aproximaciones a los volúmenes correpondientes.

4.1. Ejemplo motivador resuelto

Ejemplo 1 *Se considera la siguiente suma de dos integrales:*

$$I = \int_0^1 \int_1^2 \frac{1}{(x^2+y^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \int_1^2 \int_y^2 \frac{1}{(x^2+y^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Se pide responder:

(a) ¿Es posible intercambiar el orden de integración de modo que I quede expresada en una sola integral? En caso afirmativo, hazlo.

(b) ¿Es sencillo resolver la integral obtenida en coordenadas cartesianas?

(c) Plantea en coordenadas polares la integral obtenida y resuélvela.

Análisis previo a la solución: Para comenzar, nos planteamos y resolveremos las siguientes cuestiones.

Cuestiones:

(1) ¿Es sencillo encontrar una primitiva de la función para resolver la integral interior con respecto a la variable x?

(2) ¿Es posible, a partir de la integral dada, realizar la gráfica de la región de integración?

(3) ¿Es importante el orden en que se presentan los extremos de integración?

Respondamos a cada una de estas cuestiones.

(1) **NO**. Al observar el integrando

$$f(x,y) = \frac{1}{(x^2+y^2)^{3/2}},$$

rápidamente se ve que el cálculo de una primitiva de la función para resolver la integral interior con respecto a la variable x no es sencillo, al menos no es de las integrales inmediatas. Este hecho nos hace plantearnos si un cambio de coordenadas adecuado nos puede ayudar. Antes de realizar el dibujo, ¿se te ocurre algún cambio posible?

(2) **SI**. Siempre es posible realizar la gráfica de la región de integración a partir de la integral.

(3) **SI**. Es claramente decisivo el orden en que se presentan los extremos de integración. Si, por ejemplo, se intercambiasen en una de las integrales, la interpretación del problema como integral bien planteada (extremo inferior de integración menor que extremo superior) carecería de sentido aunque el resultado sólo cambiaría de signo.

Resolución:
Ahora que hemos aclarado estos puntos, vamos a resolver cada uno de los apartados del ejemplo.

(a) El **primer paso** consiste en realizar una gráfica de la región de integración para ver el aspecto que presenta.

Claramente, para la primera integral se tiene que

- la variable y varía entre las rectas $y = 0$ e $y = 1$,
- la variable x varía entre $x = 1$ y $x = 2$.

Para la segunda integral,

- la variable y varía entre las rectas $y = 1$ e $y = 2$,
- la variable x varía entre la recta $x = y$ y $x = 2$.

Puedes observar en la Figura 2 la gráfica de la región de integración.

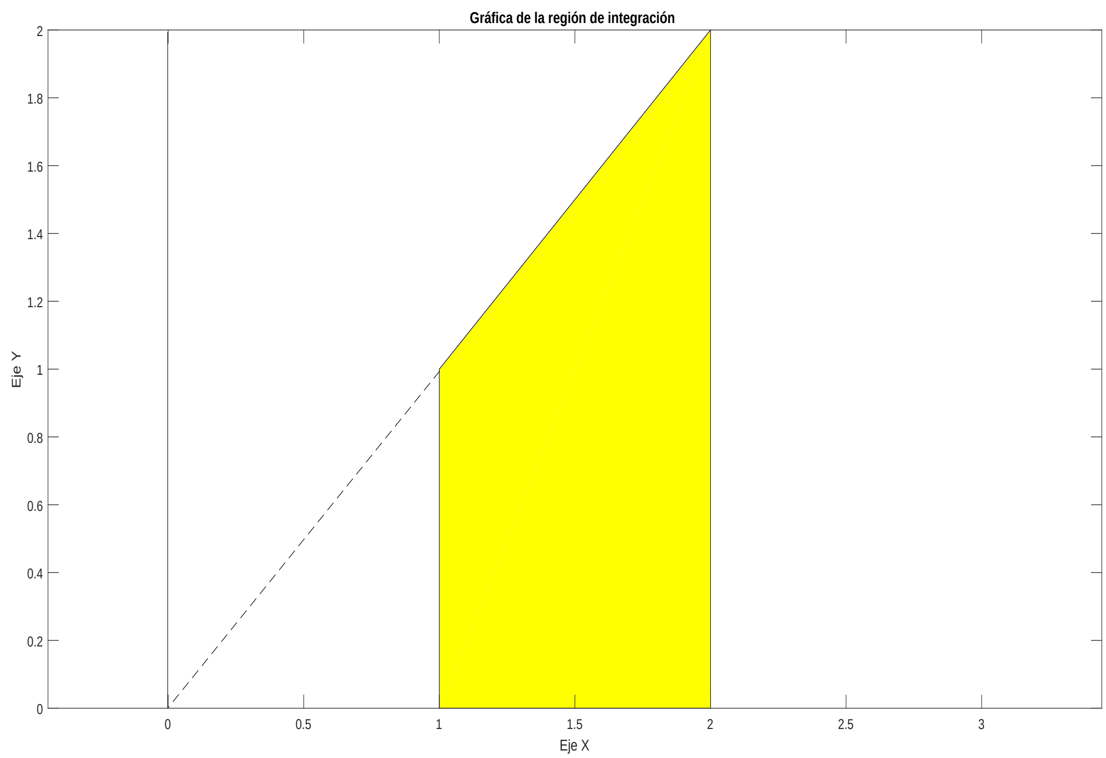

Figura 2: Región de integración

Si, en lugar de mirar primero la variación en el eje Y, ahora se mira primero la variación en el eje X, del razonamiento anterior, el dibujo puede pensarse acotado entre las rectas $x = 1$ y $x = 2$ y para cada uno de los valores de x en este intervalo $[1, 2]$, los valores de las ordenadas y deberán variar desde la función que hace de "suelo", es decir, desde $y = 0$, hasta la función que hace de "techo", es decir, hasta la función $y = x$. Esto permite escribir la integral I como sigue:

$$I = \int_1^2 \int_0^x \frac{1}{(x^2+y^2)^{3/2}} \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x.$$

¿Cuál es el teorema que se ha aplicado para asegurar que ambas integrales son iguales? Comprueba que todas sus hipótesis son válidas para estar seguros de que su aplicación ha sido correcta.

¿Te has preguntado lo siguiente?: ¿Sería lo mismo haber escrito que la variable y varía entre $y = x$ e $y = 0$? Claramente que no. ¿Cómo lo argumentarías? ¡Es muy importante tener en cuenta este hecho!

(b) De nuevo, **NO**, pues al observar el integrando

$$f(x,y) = \frac{1}{(x^2+y^2)^{3/2}},$$

rápidamente se ve que el cálculo de una primitiva de la función para resolver la integral interior con respecto (ahora) a la variable y tampoco es sencillo.

(c) Para ello seguiremos los siguientes pasos:

Paso 1 A partir de la **gráfica** de la región de integración y del integrando se observa que es conveniente realizar el cambio a **coordenadas polares**.

La relación entre las coordenadas cartesianas (x, y) y las coordenadas polares (r, θ) viene dada por

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x & = & r\cos(\theta) \\ y & = & r\operatorname{sen}(\theta) \end{array} \right.$$

Para barrer toda la región de la Figura 2, los valores del ángulo θ deben variar:

- desde $\theta = 0$ (que se corresponde con el rayo que pasa por el origen de coordenadas y por el punto $(2, 0)$, por ejemplo),
- hasta $\theta = \pi/4$ (que se corresponde con el rayo que pasa por el origen de coordenadas y por el punto $(2, 2)$, por ejemplo).

Para cada uno de estos valores permitidos para los ángulos θ, los valores del radio deben variar:

- desde la recta $x = 1$ que traducida a coordenadas polares corresponde a $r = \frac{1}{\cos(\theta)}$ (lo cual se deduce despejando de $1 = x = r\cos(\theta)$),
- hasta la recta $x = 2$ que traducida a coordenadas polares corresponde a $r = \frac{2}{\cos(\theta)}$ (lo cual se deduce despejando de $2 = x = r\cos(\theta)$).

Paso 2 Plantear la **nueva integral** utilizando estas nuevas coordenadas y teniendo en cuenta que al realizar el cambio se debe considerar el **jacobiano de la transformación**.

A partir de la información del paso anterior, recordando que el jacobiano al cambiar de coordenadas cartesianas a polares es r y que (¡Justifica la validez de la segunda y tercera igualdades!)

$$\frac{1}{(x^2+y^2)^{3/2}} = \frac{1}{([r\cos(\theta)]^2 + [r\operatorname{sen}(\theta)]^2)^{3/2}} = \frac{1}{(r^2)^{3/2}} = \frac{1}{r^3}$$

se tiene directamente que:

$$I = \int_1^2 \int_0^x \frac{1}{(x^2+y^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/4} \int_{\frac{1}{\cos(\theta)}}^{\frac{2}{\cos(\theta)}} \frac{1}{r^3}\,r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta.$$

Paso 3 Resolver la **nueva integral**, que debe resultar **más sencilla**.

Ahora, el cálculo es inmediato

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^{\pi/4} \int_{\frac{1}{\cos(\theta)}}^{\frac{2}{\cos(\theta)}} \frac{1}{r^2}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta \\
&= \int_0^{\pi/4} -\left[\frac{1}{r}\right]_{\frac{1}{\cos(\theta)}}^{\frac{2}{\cos(\theta)}} \mathrm{d}\theta \\
&= \int_0^{\pi/4} \left[-\frac{\cos(\theta)}{2} + \cos(\theta)\right] \mathrm{d}\theta \\
&= \int_0^{\pi/4} \frac{\cos(\theta)}{2}\,\mathrm{d}\theta \\
&= \left[\frac{\operatorname{sen}(\theta)}{2}\right]_0^{\pi/4} \\
&= \sqrt{2}/4.
\end{aligned}$$

¿Podría haber dado un resultado negativo?

4.2. Una aplicación

Es conocido que las integrales dobles se utilizan en el cálculo de áreas $A(R)$ de una región plana R:

$$\boxed{A(R) = \iint_R 1\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x.}$$

Veamos un ejemplo de aplicación.

Ejemplo 2 *Calcular el área de la región plana limitada por*

$$x^2 + (y-2)^2 \leq 4, \qquad y \geq -\sqrt{3}x, \qquad x \leq 0, \qquad x^2 + y^2 \geq 4.$$

Utilizando el mismo procedimiento que en el ejemplo anterior, al realizar la gráfica que se observa en la Figura 3, es fácil detectar que un cambio a coordenadas polares permitirá dar una solución sencilla al problema planteado.

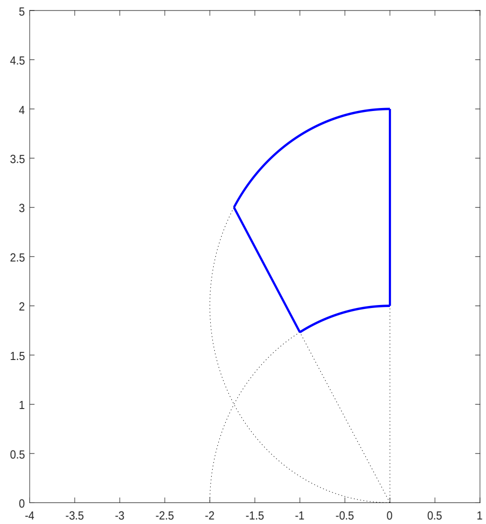

Figura 3: Región de integración (acotada por las cuatro curvas pintadas de azul)

Del dibujo, rápidamente se pueden identificar los extremos para el ángulo de la nueva integral (varían entre $\theta = \pi/2$ y usando trigonometría se deduce que el extremo superior es $\theta = 2\pi/3$). El radio varía desde la circunferencia centrada en el origen hasta la circunferencia dezplazada, es decir desde

$$r = 2 \quad \text{hasta} \quad r = 4\,\mathrm{sen}(\theta)$$

(este último se deduce tras sustituir la expresión de las coordenadas polares en $x^2 + y^2 = 4y$ y luego despejar r):

$$\begin{aligned}
A(R) &= \int_{\pi/2}^{2\pi/3} \int_{2}^{4\,\mathrm{sen}(\theta)} r \,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta \\
&= \int_{\pi/2}^{2\pi/3} \left[\frac{r^2}{2}\right]_2^{4\,\mathrm{sen}(\theta)} \mathrm{d}\theta \\
&= \int_{\pi/2}^{2\pi/3} [8\,\mathrm{sen}^2(\theta) - 2]\,\mathrm{d}\theta \\
&= \int_{\pi/2}^{2\pi/3} \left[8\frac{1-\cos(2\theta)}{2} - 2\right] \mathrm{d}\theta \\
&= \int_{\pi/2}^{2\pi/3} [2 - 4\cos(2\theta)]\;\mathrm{d}\theta \\
&= [2\theta - 2\,\mathrm{sen}(2\theta)]_{\pi/2}^{2\pi/3} \\
&= \frac{4}{3}\pi + \sqrt{3} - \pi \\
&= \frac{\pi}{3} + \sqrt{3}.
\end{aligned}$$

¿Te atreves a plantearla en coordenadas cartesianas? Hazlo y, al comparar ambos planteamientos, podrás valorar la necesidad y la importancia de los cambios adecuados de variables.

4.3. Actividades

Ejercicio 3 *Dibuja la región de integración y realiza el cambio a coordenadas polares*

$$\int_0^1 \int_{x^2}^{x} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x + \int_1^2 \int_x^{x^2} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x,$$

siendo f una función integrable en dicha región. ¿Se podría escribir la integral anterior de la siguiente manera?

$$\int_0^2 \int_{x^2}^{x} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x.$$

Justifica la respuesta.

Respuesta:

$$\int_0^{\pi/4} \int_0^{\frac{\mathrm{sen}(\theta)}{\cos^2(\theta)}} f(r\cos(\theta), r\,\mathrm{sen}(\theta))r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta + \int_{\pi/4}^{\mathrm{arctg}(2)} \int_{\frac{\mathrm{sen}(\theta)}{\cos^2(\theta)}}^{\frac{2}{\cos(\theta)}} f(r\cos(\theta), r\,\mathrm{sen}(\theta))r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta.$$

No.

Ejercicio 4 *Dibuja la región de integración y realiza el cambio de coordenadas polares a coordenadas cartesianas*

$$\int_{\pi/2}^{\pi} \int_0^{4\,\mathrm{sen}(\theta)} f(r\cos(\theta), r\,\mathrm{sen}(\theta))r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta,$$

siendo f una función integrable en dicha región.

Respuesta:

$$\int_0^4 \int_{-\sqrt{4y-y^2}}^{0} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Ahora: ¡Manos a la obra! Ya puedes resolver los Ejercicios planteados en el libro de teoría indicado en la Bibliografía.

5. Cierre

En este artículo el alumno dispone de la resolución completa de dos ejemplos motivadores que son ejemplos clásicos que se presentan como aplicación en la teoría de integración doble. Ahora, valiéndose de estos problemas completamente desarrollados, podrá realizar los ejercicios propuestos en el libro de teoría.

6. Bibliografía

6.1. Libros

[1] N. Thome: Teoría y Problemas de Análisis Vectorial, Ed. Universidad Politécnica de Valencia, Ref. 2008.299, ISBN: 978-84-8363-229-1.

6.2. Referencias de fuentes electrónicas

[2] `https://www.youtube.com/watch?annotation_id=annotation_2022120369&feature=iv&src_vid=r18Gi8lSkfM&v=GHBMiscPE-g`

[3] `https://laboratoriosvirtuales.upv.es/eslabon/volumen_aprox/`

[4] `https://laboratoriosvirtuales.upv.es/eslabon/carte_polar/`

[5] `https://laboratoriosvirtuales.upv.es/eslabon/ejemplos_curvas_polares/`