



UNIVERSITAT  
POLITÈCNICA  
DE VALÈNCIA

# Generalización de la Carta de Smith

**Apellidos y nombre:** Muller, Andrei A. ([andrei.stefan1@gmail.com](mailto:andrei.stefan1@gmail.com))<sup>1</sup>  
Sanabria Codesal, Esther ([esanabri@mat.upv.es](mailto:esanabri@mat.upv.es))<sup>2</sup>  
Moldoveanu, Alin ([alin.moldoveanu@cs.pub.ro](mailto:alin.moldoveanu@cs.pub.ro))<sup>3</sup>  
Asevei, Víctor ([victor.asavei@cs.pub.ro](mailto:victor.asavei@cs.pub.ro))<sup>3</sup>

**Departamento/Centro:** <sup>1</sup>Nanoelectronic Devices Laboratory  
École Polytechnique Fédérale de Lausanne, Switzerland

<sup>2</sup>Departamento de Matemática Aplicada  
Universitat Politècnica de València

<sup>3</sup>Faculty of Automatic Control and Computers  
University Politehnica Bucuresti, Bucharest, Romania

## 1 Resumen

La Carta de Smith es una herramienta para el análisis de las líneas de transmisión en cualquier circuito de microondas. La carta es una representación, en el plano del coeficiente de reflexión, de la resistencia y reactancia normalizadas que permite obtener diversos parámetros que caracterizan las líneas de transmisión, así como resolver problemas de adaptación de impedancias de forma gráfica, sin necesidad de recurrir al cálculo complejo. En este artículo vamos a presentar una generalización de la Carta de Smith utilizando la proyección estereográfica, ya que las propiedades de esta aplicación mantienen las características interesantes de la carta clásica y mejoran algunos de sus inconvenientes.

## 2 Introducción

La integración de los conocimientos impartidos en las diferentes asignaturas de un grado, además de mejorar el aprendizaje de los alumnos, pone de manifiesto la importancia que tienen las materias básicas en la formación profesional de sus titulados. En este trabajo mostramos un ejemplo donde el manejo adecuado de los conceptos matemáticos, incluidos en la formación básica de los alumnos, proporcionan herramientas para generalizar la Carta de Smith, una herramienta gráfica muy utilizada en el análisis de circuitos de microondas. La Carta de Smith [1] relaciona la impedancia normalizada con el coeficiente de reflexión de una línea de transmisión en un circuito. Esta relación corresponde a una transformación de Möbius en el plano complejo extendido  $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$  que tiene interesantes propiedades que facilitan los cálculos y permiten representar gráficamente la impedancia normalizada en un punto de una línea de transmisión a partir del coeficiente de reflexión en ese punto y viceversa, así como calcular el rendimiento de un circuito. A pesar de las múltiples ventajas que posee la Carta de Smith, como demuestra su uso actual como herramienta gráfica en el análisis y diseño de circuitos, esta carta también presenta algunos inconvenientes. En este artículo presentamos una generalización de ella basada en la proyección estereográfica de la esfera unidad sobre el plano extendido [2] que por sus propiedades de conservar círculos y ángulos (ser una aplicación conforme), mantiene todas las ventajas de la carta clásica evitando algunas de sus limitaciones.

## 3 Objetivos

Este trabajo tiene como objetivos:

- Describir los inconvenientes que presenta la Carta de Smith a la hora de trabajar en el análisis de la estabilidad y el diseño de amplificadores y osciladores.
- Aplicar el modelo de Carta de Smith generalizada al análisis y diseño de circuitos para realizar representaciones que no son posibles en la Carta de Smith clásica.
- Identificar como el manejo adecuado de conceptos matemáticos básicos, proporciona herramientas útiles que facilitan un mejor desempeño en la actividad profesional del alumno.

## 4 Carta de Smith

En el estudio de la transmisión de ondas, las estructuras a través de la cuales se propaga la señal desde el generador hasta un punto de destino (o carga) se denominan líneas de transmisión. En este contexto, para el diseño de circuitos resulta interesante conocer la oposición que presentan los distintos tipos de líneas al paso de las ondas que estamos interesados en estudiar; la medida de esta oposición es conocida como impedancia. En el caso particular del estudio de circuitos de ondas electromagnéticas, y más concretamente de microondas, la impedancia característica de una línea de transmisión  $Z_0$ , junto con la impedancia a lo largo de ella  $Z_l$  determinan el coeficiente de reflexión, que indica la relación entre la amplitud de la onda reflejada y la amplitud de la onda incidente en cada punto de la línea. La expresión del coeficiente de reflexión, que denotamos por  $\rho$ , viene dado por:

$$\rho = \frac{Z_l - Z_0}{Z_l + Z_0} = \frac{\frac{Z_l}{Z_0} - 1}{\frac{Z_l}{Z_0} + 1} = |\rho|e^{j\varphi_\rho} = \rho_r + j\rho_x.$$

Por tanto, al ser un número complejo, podemos expresarlo tanto en forma de módulo  $|\rho|$  y fase  $\varphi_\rho$ , como en forma binomial descompuesto en parte real  $\rho_r$  y parte imaginaria  $\rho_x$ .

La impedancia normalizada es el valor que toma la impedancia al dividirla por la impedancia característica de la línea de transmisión, es decir  $Z = \frac{Z_l}{Z_0}$ , y puede expresarse en función del coeficiente de reflexión como:

$$Z = \frac{Z_l}{Z_0} = \frac{1 + \rho}{1 - \rho} = r + jx,$$

donde  $r$  es la resistencia normalizada y  $x$  es la reactancia normalizada.

Introducimos a continuación las transformaciones de Möbius que son funciones racionales definidas en el plano complejo

$$f: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$z \longmapsto \frac{az + b}{cz + d},$$

donde  $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ , de manera que  $ad \neq bc$ .

Si  $c \neq 0$ , la extensión de estas transformaciones al espacio extendido  $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$  viene dada por:

$$f(z) = \begin{cases} \frac{a}{c} & \text{si } z = \infty, \\ \infty & \text{si } z = \frac{-d}{c}, \end{cases}$$

mientras que si  $c = 0$ , está definida como:

$$f(z) = \begin{cases} \frac{a}{d}z + \frac{b}{d} & \text{si } z \neq \infty, \\ \infty & \text{si } z = \infty. \end{cases}$$

Las transformaciones de Möbius son aplicaciones conformes sobre  $\mathbb{C}$ , es decir, conservan ángulos entre curvas y además tienen la propiedad de transformar círculos en círculos.

En el espacio extendido  $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$  podemos considerar a las rectas como circunferencias que contienen al infinito, o circunferencias de radio infinito, y así podemos decir que las transformaciones de Möbius llevan las rectas en circunferencias que contienen al punto  $-d/c$ .

Observamos que la relación entre la impedancia normalizada  $Z$  y el coeficiente de reflexión  $\rho$  se expresa matemáticamente como la transformación de Möbius en el plano complejo:

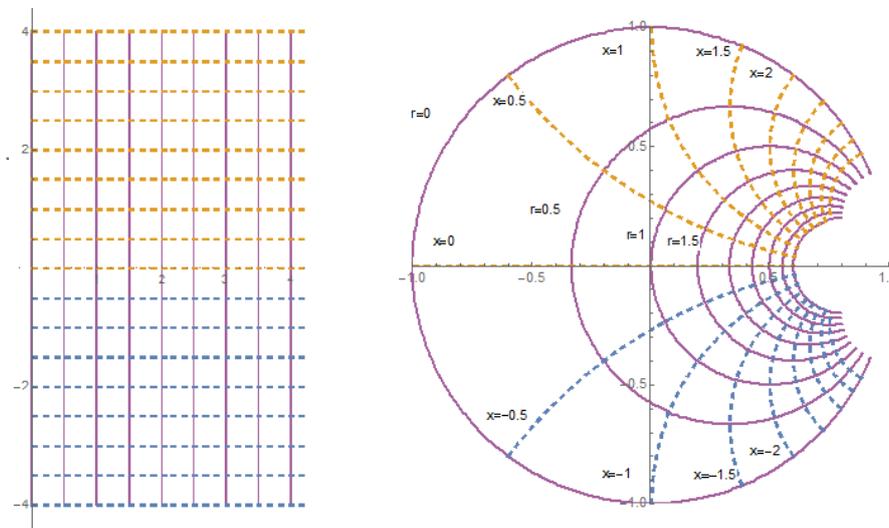
$$T : \mathbb{C} \setminus \{-1\} \longrightarrow \mathbb{C} \setminus \{1\}$$

$$Z \longmapsto T(Z) = \frac{Z - 1}{Z + 1} \quad (1)$$

de manera que  $T(Z) = \rho$ . Observamos que no existe imagen del punto  $-1$ , por tanto, para incluirlo en el dominio de definición, extendemos el plano complejo con el punto del infinito y de esta forma la extensión de la transformación  $T$  al plano  $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$  viene dada por:

$$T = \begin{cases} -1 & \text{si } Z = \infty, \\ \infty & \text{si } Z = 1. \end{cases}$$

Las rectas verticales  $Z = r$ , con  $r \geq 0$ , correspondientes a líneas de resistencia constante, y las rectas horizontales  $Z = jx$ , correspondientes a líneas de reactancia constante, se convierten a través de la transformación  $T$  en las circunferencias del plano  $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$  que definen la Carta de Smith, como vemos en la figura 1.



**Figura 1:** Líneas de resistencia y reactancia constante y sus correspondientes circunferencias en la Carta de Smith

Las propiedades de  $T$  garantizan que tanto los ángulos, como los círculos del  $Z$ -plano (dominio de  $T$ ) se mantendrán en el  $\rho$ -plano (imagen de  $T$ ). Utilizando el laboratorio virtual: [https://laboratoriosvirtuales.upv.es/eslabon/Smith\\_Z/default.aspx](https://laboratoriosvirtuales.upv.es/eslabon/Smith_Z/default.aspx), podemos ver de forma interactiva como pasan los valores complejos del  $Z$ -plano al  $\rho$ -plano.

#### 4.1 Generalización de la carta

Aunque la mayoría de los circuitos interesantes en la teoría de microondas se representan dentro de los límites de la Carta de Smith, existen algunas aplicaciones donde las cargas están representadas fuera de la circunferencia unidad, como en el análisis de la estabilidad y el diseño de amplificadores y osciladores [3], o en los circuitos donde aparecen líneas de transmisión con pérdidas, donde las cargas pueden tener impedancias normalizadas con parte real negativa. Podemos considerar en estos casos la carta extendida al plano complejo, como vemos en la figura 2, pero esta no es fácil de manejar especialmente cuando nos acercamos al punto del infinito.

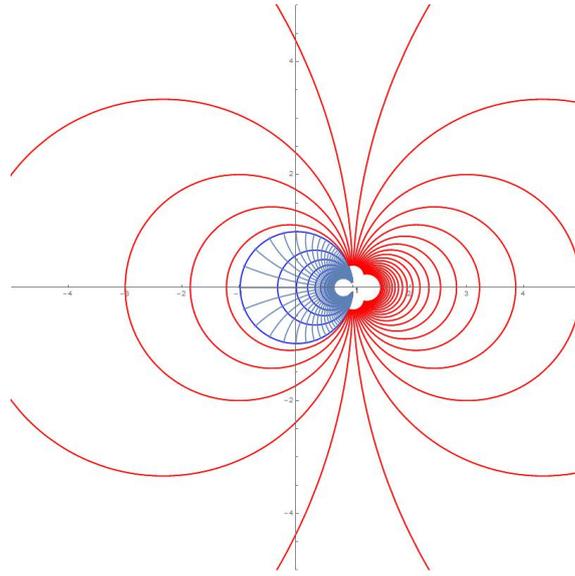


Figura 2: Carta de Smith extendida al plano complejo

Varios autores han planteado generalizaciones para paliar estas carencias, pero solo el modelo definido en [2] (ver también [4]) define una generalización en la esfera de Riemman que mantiene todas las propiedades de la carta original, con la ventaja adicional de que es posible representar todo tipo de cargas. Para definir esta nueva carta, que llamaremos Carta de Smith 3D, se utiliza la proyección estereográfica desde el polo sur  $S = (0, 0, -1)$  de la esfera unidad  $\mathbb{S}$  (esfera de radio 1) en el plano complejo:

$$\begin{aligned} \pi_S : \mathbb{S} \setminus \{S\} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (x, y, z) &\longmapsto \pi_S(x, y, z) = \frac{x}{z+1} + j \frac{y}{z+1} \end{aligned} \quad (2)$$

La proyección estereográfica es una biyección, cuya inversa viene dada por:

$$\begin{aligned} \pi_S^{-1} : \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{S} \setminus \{S\} \\ (x, y) &\longmapsto \pi_S^{-1}(x, y) = \left( \frac{2x}{x^2 + y^2 + 1}, \frac{2y}{x^2 + y^2 + 1}, \frac{1 - (x^2 + y^2)}{x^2 + y^2 + 1} \right) \end{aligned} \quad (3)$$

Por tanto, si aplicamos la inversa de la proyección estereográfica (3) al  $\rho$ -plano para cualquier valor de  $\rho = \rho_r + j \rho_x$ , obtenemos su correspondiente valor en la Carta de Smith 3D, dado por:

$$\rho_S(\rho_r + j \rho_x) = \left( \frac{2 \rho_r}{|\rho|^2 + 1}, \frac{2 \rho_x}{|\rho|^2 + 1}, \frac{1 - |\rho|^2}{|\rho|^2 + 1} \right)$$

De forma análoga, si componemos la transformación  $T$  (1) con la inversa de la proyección estereográfica (3), podemos calcular el punto de la Carta de Smith 3D correspondiente a cada punto  $Z = r + jx$ , del  $Z$ -plano ampliado, es decir, el punto de la esfera en función de la resistencia normalizada  $r$  y de la reactancia normalizada  $x$ :

$$\rho_{\mathbb{S}}(r + jx) = \left( \frac{|Z|^2 - 1}{|Z|^2 + 1}, \frac{2x}{|Z|^2 + 1}, \frac{2r}{|Z|^2 + 1} \right)$$

Vemos estas equivalencias gráficamente en la figura 3.

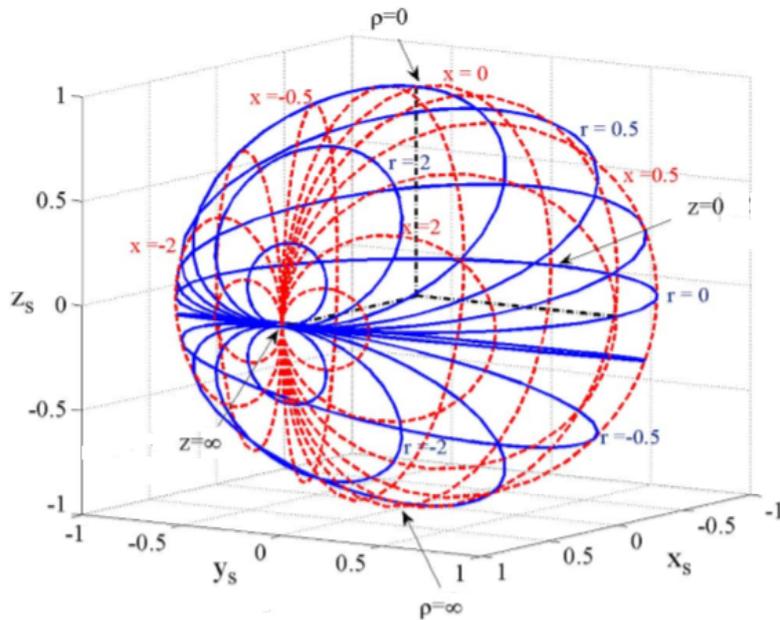


Figura 3: Carta de Smith 3D

De forma inversa, si aplicamos la proyección estereográfica (2) a cada punto  $(x_{\mathbb{S}}, y_{\mathbb{S}}, z_{\mathbb{S}}) \in \mathbb{S}$  tal que  $x_{\mathbb{S}}^2 + y_{\mathbb{S}}^2 + z_{\mathbb{S}}^2 = 1$ , la expresión del coeficiente de reflexión en dichos puntos viene dada por:

$$\rho(x_{\mathbb{S}}, y_{\mathbb{S}}, z_{\mathbb{S}}) = \frac{x_{\mathbb{S}} + j y_{\mathbb{S}}}{z_{\mathbb{S}} + 1},$$

lo que indica que el módulo de  $\rho$  solo depende de la coordenada  $z_{\mathbb{S}}$  y la fase será el ángulo que forma el segmento definido entre el origen y el punto  $(x_{\mathbb{S}}, y_{\mathbb{S}})$  con el eje  $OX$ :

$$|\rho| = \sqrt{\frac{1 - z_{\mathbb{S}}}{1 + z_{\mathbb{S}}}}, \quad \varphi_{\rho} = \arctan \frac{y_{\mathbb{S}}}{x_{\mathbb{S}}}.$$

Así para cada punto del hemisferio norte de la esfera, obtenemos un punto en el círculo ecuatorial de ella que corresponde al  $\rho$ -plano con  $|\rho| \leq 1$ , es decir, pertenece a la Carta de Smith plana; mientras que los puntos del hemisferio sur, corresponden al  $\rho$ -plano cuando  $|\rho| > 1$ .

Por tanto, en la Carta de Smith 3D los circuitos con resistencia positiva (impedancias pasivas) se sitúan en el hemisferio norte y los de resistencia negativa (impedancias activas), que están fuera de la Carta de Smith, en el hemisferio sur.

Los circuitos puramente resistivos, es decir, aquellos cuya reactancia es nula se representan en el meridiano de Greenwich, de manera que los circuitos inductivos (de reactancia positiva) se representan en longitudes situadas al este y los circuitos capacitivos (de reactancia negativa) en longitudes situadas al oeste.

La expresión de la impedancia normalizada de los puntos en la esfera  $(x_S, y_S, z_S) \in \mathbb{S}$  viene dada por:

$$Z(x_S, y_S, z_S) = \frac{z_S + j y_S}{1 - x_S},$$

luego su módulo y fase pueden expresarse como:

$$|Z| = \sqrt{\frac{1 + x_S}{1 - x_S}}, \quad \varphi_Z = \arctan\left(\frac{y_S}{z_S}\right).$$

Y por tanto, el factor de calidad, definido como  $Q = \frac{r}{x}$ , vendrá dado por  $Q = \cot(\varphi_Z) = \frac{z_S}{y_S}$ .

## 4.2 Ejemplos

Veremos en este apartado algunos ejemplos del uso de la Carta de Smith generalizada y su equivalencia en la Carta de Smith clásica. Para ello usaremos la herramienta CAD ([www.3dsmithchart.com](http://www.3dsmithchart.com)) diseñada por los autores de la Carta de Smith 3D para facilitar el manejo de la información en la superficie esférica.

En primer lugar mostramos el coeficiente de reflexión de un inductor 1nH, representado en la Carta de Smith 3D al este del meridiano de Greenwich, como vemos en la figura 4.

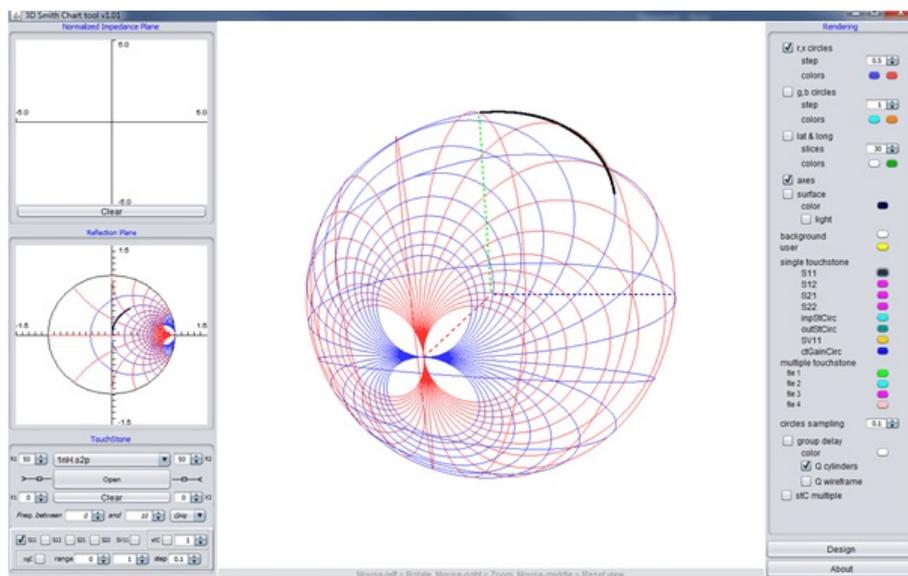
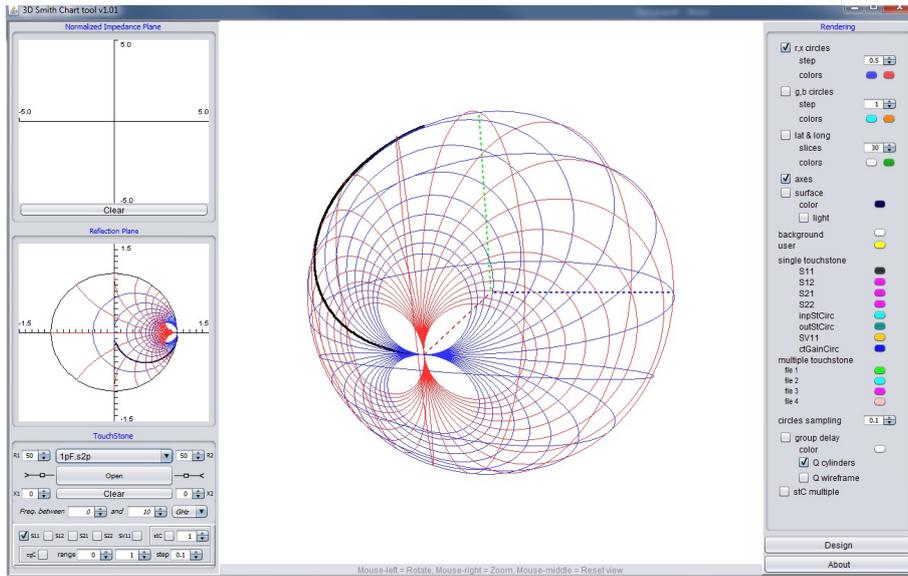


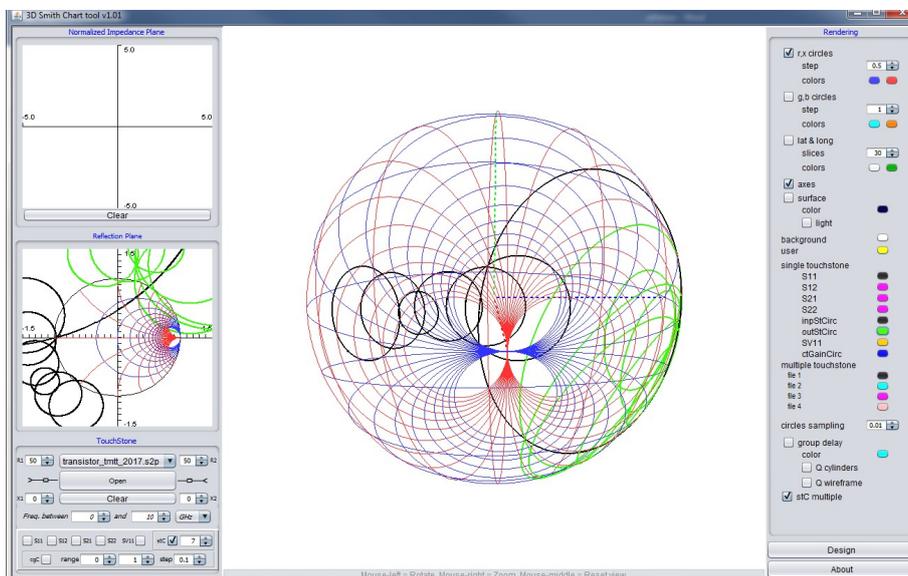
Figura 4: Coeficiente de reflexión de un inductor 1nH.

Sin embargo, la representación del coeficiente de reflexión de un condensador 1pF se encuentra al oeste de dicho meridiando, como nos muestra la figura 5.



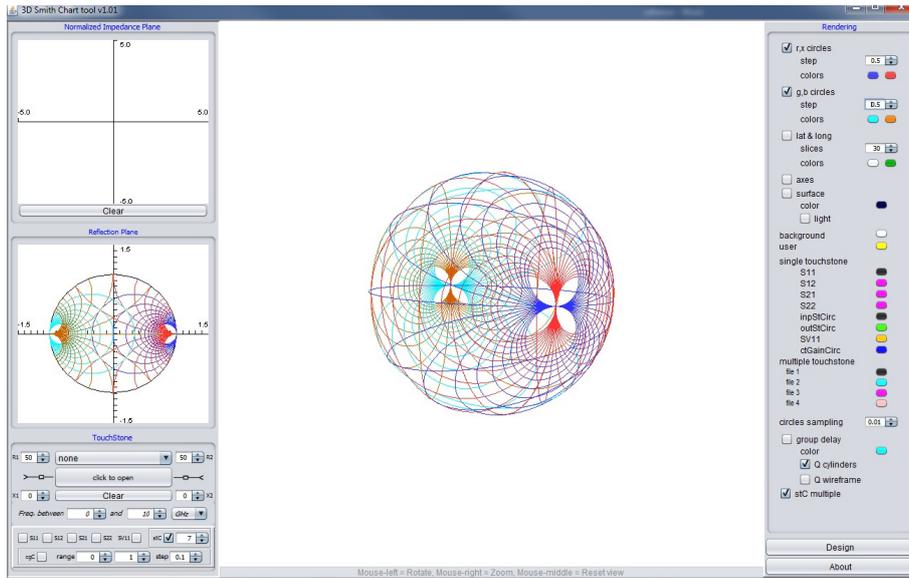
**Figura 5:** Coeficiente de reflexión de un capacitor 1pF.

A continuación mostramos los círculos de estabilidad de entrada y salida de un transistor de estabilidad incondicional. Observamos en la figura 6 que los círculos que están fuera de la Carta de Smith se sitúan en el hemisferio sur de la Carta de Smith 3D.



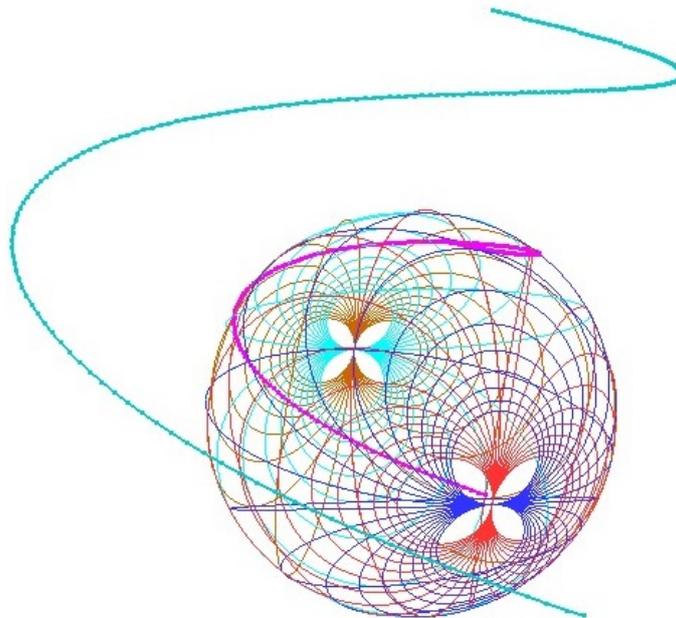
**Figura 6:** Círculos de estabilidad de un transistor de estabilidad incondicional.

En el gráfico 7 están representadas la impedancia y admitancia tanto en la Carta de Smith como en la Carta de Smith 3D.



**Figura 7:** Impedancia y admitancia en la Carta de Smith 3D.

Por otro lado, parámetros como el retardo de grupo, el factor de calidad ([5]) o la ganancia de potencia unilateral ([6]) se pueden representar en el espacio de forma mucho más clara, como vemos en las figuras 8 y 9. En el caso particular del retardo de grupo sobre el parámetro  $S_{21}$ , si es positivo se representará en la parte exterior de la esfera (como en la figura 8), mientras que si es negativo se representará en la parte interior.



**Figura 8:** Retardo de grupo positivo.

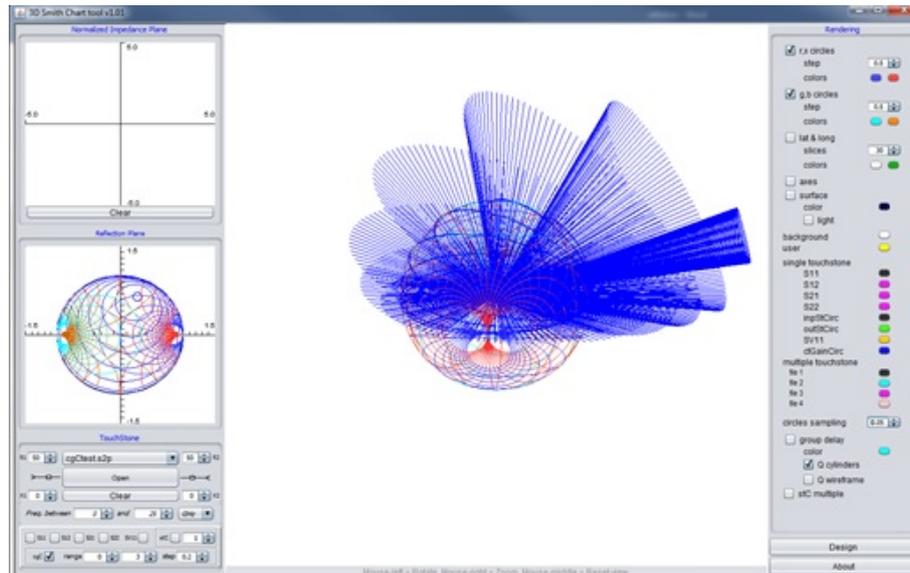


Figura 9: Círculos de ganancia de potencia del transductor unilateral.

Otros ejemplos de uso de la Carta de Smith 3D pueden verse en el blog de artículos de divulgación técnica SHARENG Divulgación: <https://tomrospa.wordpress.com/2017/06/13/disenando-con-la-carta-de-smith-3d/>.

## 5 Cierre

En este trabajo hemos presentado la Carta de Smith 3D, una representación tridimensional que generaliza la Carta de Smith mejorando su aplicabilidad. Entre otras ventajas, la Carta de Smith 3D unifica completamente el diseño de circuitos activos y pasivos con cualquier magnitud del coeficiente de reflexión, manteniendo inalteradas todas las formas circulares de la carta clásica. Este nuevo modelo representa una valiosa herramienta gráfica para el análisis de circuitos de microondas y existe una herramienta CAD ([www.3dsmithchart.com](http://www.3dsmithchart.com)) que resulta de gran utilidad a la hora de trabajar con ella.

## Referencias

- [1] P. H. Smith, Transmission-line calculator, *Electronics*, vol. 12, pp. 2931, 1939.
- [2] A. A. Muller, P. Soto, D. Dascalu, D. Neculoiu and V. E. Boria, A 3D Smith chart based on the Riemann sphere for active and passive microwave circuits, *IEEE Microwave and Wireless Components Letters*, vol. 21, no. 6, pp. 286-288, 2011.
- [3] P. D. Abrie, Design of RF and Microwave Amplifiers and Oscillators. *Norwood, MA: Artech House*, 2009.
- [4] A. A. Muller, P. Soto, D. Dascalu and V. E. Boria, The 3D Smith chart and its Practical Applications, *Microwave Journal*, vol. 55, no. 7, pp. 64-74, 2012.

- [5] A. A. Muller, E. Sanabria-Codesal, A. Moldoveanu, V. Asavei, S. Lucyszyn, Extended Capabilities of the 3D Smith chart with group delay and resonator quality factor, *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. 65, no. 1. pp. 10-19, 2017.
- [6] A. A. Muller, E. Sanabria-Codesal, A. Moldoveanu, V. Asavei, P. Soto, V. E. Boria, S. Lucyszyn, Apollonius Unilateral Transducer Power Gain Circles on 3D Smith charts, *IET Electronics Letters*, vol. 50 no. 21, pp. 1531-1533, 2014.