Integración sobre curvas
Trabajo y circulación

Apellidos, nombre	Thome Coppo, Néstor
	njthome@mat.upv.es
Departamento	Matemática Aplicada
Centro	Escuela Técnica Superior de
	Ingenieros de Telecomunicación

1. Resumen de las ideas clave

En este artículo se va a presentar la resolución completa de un problema tipo del tema de **integración sobre curvas**. Se introducen comentarios, cuestiones, observaciones, gráficas, etc. para que la resolución del problema sea interactiva como si se estuviese oyendo la explicación de clase y trabajando en ese momento las propuestas que allí se realizan. Este artículo está estructurado como sigue:

Contenido de este artículo
2. Introducción.
3. Objetivos.
4. Desarrollo.
5. Cierre.

Cuadro 1: Contenido de este artículo

2. Introducción

Es conocido que a la hora de resolver **integrales sobre curvas** hay tres procedimientos que generalmente son los utilizados y que son explicados en clase. Se debe tener en cuenta si el campo a analizar es conservativo o no. Si el **campo vectorial no es conservativo**, las posibilidades son:

- Resolver la integral directamente a partir de la definición.

  Se utilizará si la integral planteada mediante la definición es de fácil resolución. En principio, el planteamiento por definición siempre sería posible si se cuenta con una parametrización de la curva. El problema que puede surgir es la dificultad a la hora de resolver la integral. En caso de no poderse resolver con un método alternativo, debería acudirse a métodos numéricos.

- Aplicar el Teorema de Stokes.

  La integral curvilínea se podrá resolver mediante el Teorema de Stokes si la curva es cerrada. Para su aplicación será necesario buscar una superficie adecuada. Suele utilizarse si la integral que proporciona la aplicación de la definición no es fácil de resolver.

En el caso de estar ante la presencia de un **campo vectorial conservativo**, para el cálculo tanto del trabajo como de la circulación también es posible recurrir a la definición o bien:

- Utilizar el Teorema de caracterización de campos conservativos.

El teorema de caracterización proporciona varias condiciones que permiten simplificar el análisis. Por ejemplo, para saber si el campo es conservativo se puede comenzar estudiando la igualdad de la condición conocida como de las derivadas cruzadas. Suponiendo que ya lo es, se analiza si la curva proporcionada es cerrada o no. Si lo es, puede asegurarse que el valor del trabajo solicitado es cero. Si no lo es, es posible parametrizar una curva sencilla que una los extremos de la curva original y proceder por definición. O bien, calcular un potencial y a partir de el hallar el trabajo como diferencia de potenciales en los extremos.

El objetivo de este artículo es estudiar todos los casos indicados anteriormente. Estas técnicas serán útiles en las posteriores asignaturas técnicas y son de gran utilidad en la Ingeniería en general.

En el cuadro de la Figura 1 se puede observar un esquema básico de lo expuesto anteriormente, que puede ayudar para el cálculo de una integral sobre una curva de un campo vectorial. Si bien siempre se podría intentar resolver por definición, se la ha incluido en el cuadro en el caso en el que realmente es necesario emplearla.

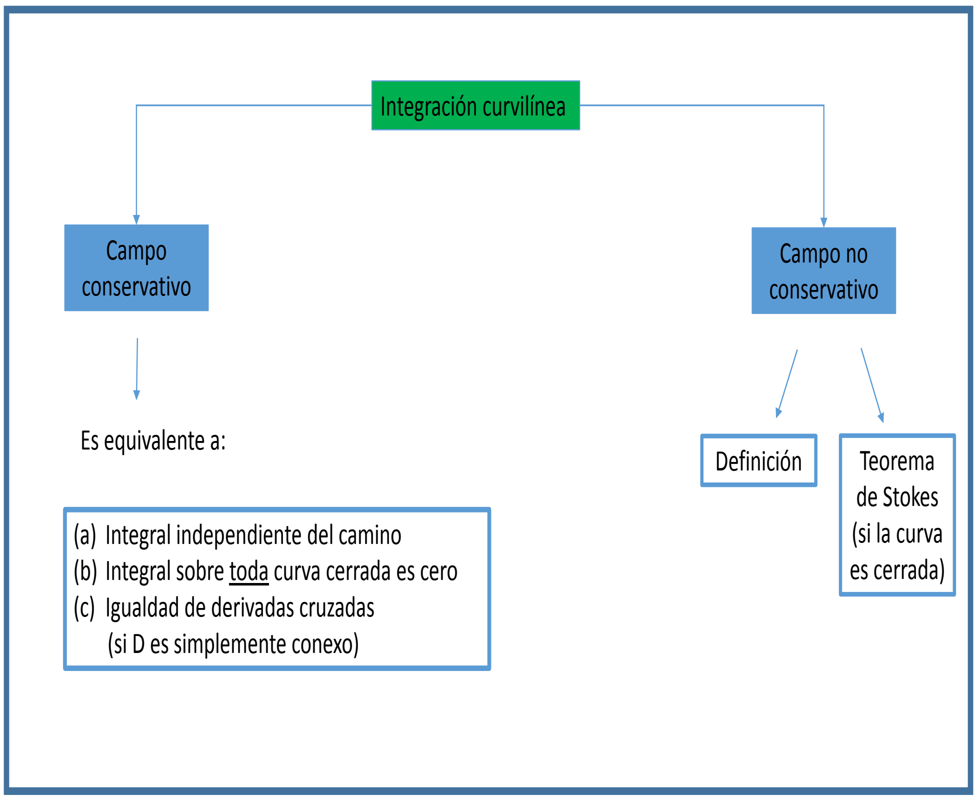

Figura 1: Esquema general para el tratamiento de una integral curvilínea

3. Objetivos

Una vez que el alumno lea con detenimiento este documento, será capaz de:

- Resolver integrales curvilíneas por definición en casos sencillos en que el campo vectorial y la curva lleven a integrales que, mediante métodos de integración conocidos, se pueda llegar a la solución.
- Darse cuenta de cuándo es necesario utilizar el Teorema de Stokes para realizar el cálculo de una integral curvilínea.
- Utilizar todas las condiciones equivalentes de campos conservativos para facilitar el cálculo de integrales curvilíneas.

A lo largo del documento el alumno verá que se van planteando algunas cuestiones. Sería interesante que se detuviese a reflexionar sobre las mismas antes de leer la respuesta.

4. Desarrollo

Es conocido que si se tiene que resolver una integral curvilínea de un campo vectorial $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ y se dispone de una parametrización $\mathbf{r} : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ de la curva C sobre la que se pide resolver, se puede recurrir a la definición

$$\boxed{\int_C \langle \mathbf{F}, \, \mathrm{d}\mathbf{r} \rangle = \int_a^b \langle \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)), \mathbf{r}'(t) \rangle \, \mathrm{d}t}$$

reduciendo el problema al cálculo de una integral simple (si las integrales existen). Para ello será necesario repasar los métodos vistos en Secundaria o en Matemáticas I[1].
Sin embargo, ¿qué ocurre si la curva es lo suficientemente complicada? Es decir, ¿qué ocurre si al llegar a la integral simple anterior, queda un integrando complicado o incluso que no se pueda tratar con métodos conocidos? En este caso, se debería disponer de métodos alternativos que ayuden a su solución.

En este punto sería recomendable repasar el Capítulo 3 dedicado a Curvas e Integración sobre Curvas del libro de teoría [1] citado en la Bibliografía.

Antes de entrar en el tema de integración sería recomendable que visualices los **objetos de aprendizaje** que encontrarás en las Páginas Web [3] y [4][2]. En estos objetos podrás simular varios campos vectoriales tanto planos como espaciales y a partir de ellos hacerte una idea del tipo de dibujos que proporcionan este tipo especiales de funciones.

En las Páginas Web [4] y [5] citadas en la Bibliografía, podrás encontrar dos **objetos de aprendizaje** que te permitirán analizar la estructura de campos vectoriales conservativos. El primero de ellos corresponde a campos vectoriales planos y el segundo a campos vectoriales espaciales. Realiza varias simulaciones y comprenderás el concepto.

En la Página Web [6] citada en la Bibliografía, podrás visualizar un **objeto de aprendizaje** en el que se puede realizar el cálculo de varias integrales curvilíneas y se obtiene como salida del objeto, además del resultado numérico del valor de la integral, una gráfica con varios vectores que muestran la gráfica del campo vectorial aplicado a puntos de la curva como así también de los vectores tangentes en esos mismos puntos. Este objeto permite visualizar **cómo funcionan** este tipo de integrales en la práctica. Observa con detenimiento el signo que se obtiene en los resultados a partir de si el ángulo entre los vectores es agudo, recto u obtuso (¿cómo relacionas este hecho con el signo del producto escalar?). Puedes practicar realizando modificaciones en los distintos parámetros que el objeto permite.

Ahora se va proceder al desarrollo de un ejemplo con su resolución completa y una serie de comentarios que permitirán comprender los entresijos que suelen encontrarse a la hora de resolver una integral con esta problemática.

[1] Si fuese necesario, los métodos básicos de integración se pueden repasar del libro de teoría [2] citado en la Bibliografía.

[2] Para visualizar los objetos de aprendizaje debes copiar los enlaces y pegarlos en un buscador.

4.1. Ejemplo motivador resuelto

Ejemplo 1 *Se considera el siguiente campo vectorial espacial* $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *dado por*

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (y^2 + \alpha y - x^2, 2xy + 4x, 4z^3),$$

que depende de un parámetro, el número real α*. Se pide responder las siguientes preguntas.*

(a) Calcula todos los valores de α *para los cuales el campo vectorial es conservativo en* $\mathbb{R}^3$*.*

(b) Para los valores de α *obtenidos en el apartado (a), ¿es posible obtener una función potencial* f *para* $\mathbf{F}$*? En caso afirmativo, calcúlala. ¿Es única? Justifica.*

(c) En este apartado se considera $\alpha = 4$*.*

- *(I) Calcula, de dos formas diferentes, el trabajo que realiza el campo* $\mathbf{F}$ *para mover una partícula a lo largo de la curva* $\mathbf{r}(t) = (te^{t-1}, \cos(\pi t^3), \operatorname{sen}(\pi t^2))$*, para* $0 \leq t \leq 1$*.*
- *(II) ¿Es la curva del apartado anterior una curva cerrada? Justificar.*
- *(III) Encuentra, de dos formas diferentes, el valor que se obtiene al calcular la circulación que realiza el campo* $\mathbf{F}$ *para mover una partícula a lo largo de la curva*

$$C : \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ z = 4 \end{cases}$$

Calcula la recta tangente a la curva de este apartado en el punto $(0, 1, 4)$*.*

(d) En este apartado se considera $\alpha = 8$*.*

- *(I) Calcula*

$$\int_C \langle \mathbf{F}, \, \mathrm{d}\mathbf{r} \rangle$$

donde C *es el segmento de recta que va desde el punto* $A = (0, 1, 0)$ *hasta el punto* $B = (1, -1, 0)$*.*

- *(II) Calcula la circulación realizada por el campo* $\mathbf{F}$ *para mover una partícula a lo largo de la curva* $\mathbf{r}(t) = (\cos(t), \operatorname{sen}(t), 4)$*, para* $0 \leq t \leq 2\pi$ *de dos maneras diferentes: por definición y aplicando el Teorema de Stokes.*
- *(III) ¿Es posible asegurar que el trabajo realizado por* $\mathbf{F}$ *para mover una partícula desde el punto A hasta el punto B del apartado (I) coincide con el resultado allí obtenido utilizando una curva cualquiera? Justifica.*

Resolución:
Vamos a resolver cada uno de los apartados del ejemplo.
Se considera el campo vectorial espacial

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (y^2 + \alpha y - x^2, 2xy + 4x, 4z^3).$$

Puesto que este campo depende del parámetro real α, es lógico pensar que para algunos valores de α será conservativo y para otros no. En el caso de campos conservativo se podrá utilizar cualesquiera de las condiciones equivalentes del teorema que los caracteriza.

(a) El campo vectorial está definido en el dominio $D = \mathbb{R}^3$, que es un conjunto simplemente conexo. Llamando

$$M(x, y, z) = y^2 + \alpha y - x^2, \qquad N(x, y, z) = 2xy + 4x, \qquad P(x, y, z) = 4z^3,$$

es inmediato reconocer que los campos escalares M, N y P tienen derivadas parciales continuas en D con lo cual $\mathbf{F} \in \mathcal{C}^1$ en D. Entonces, se cumple que $\mathbf{F}$ es conservativo en D si y sólo si

$$M_y(x,y,z) = N_x(x,y,z), \quad M_z(x,y,z) = P_x(x,y,z), \quad N_z(x,y,z) = P_y(x,y,z),$$

para todo $(x,y,z) \in D$. Calculando estas derivadas, las tres condiciones anteriores son equivalentes a $2y + \alpha = 2y + 4$ para todo $y \in \mathbb{R}$. Es decir,

$$\boxed{\mathbf{F} \text{ es conservativo en } D \text{ si } \alpha = 4 \text{ y es no conservativo si } \alpha \neq 4.}$$

(b) Tomemos ahora $\alpha = 4$. Por definición de campo conservativo, existe función potencial, es decir, es posible obtener un campo escalar $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tal que $\mathbf{F} = \nabla f$. En términos de las componentes de ambos campos, la última igualdad de vectores se convierte en

$$(M(x,y,z), N(x,y,z), P(x,y,z)) = (f_x(x,y,z), f_y(x,y,z), f_z(x,y,z)),$$

para todo $(x,y,z) \in D = \mathbb{R}^3$. Teniendo en cuenta la definición de las funciones M, N y P e igualando componentes, se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones en derivadas parciales (en la incógnita f):

$$\begin{aligned} f_x(x,y,z) &= y^2 + 4y - x^2 && (1) \\ f_y(x,y,z) &= 2xy + 4x && (2) \\ f_z(x,y,z) &= 4z^3 && (3) \end{aligned}$$

Integrando la ecuación (1) con respecto a la variable x se tiene que

$$f(x,y,z) = xy^2 + 4xy - \frac{x^3}{3} + g(y,z), \tag{4}$$

donde $g(y,z)$ es una función diferenciable en las variables y y z. Derivando (4) con respecto a y y comparando con (2) se tiene que

$$2xy + 4x = f_y(x,y,z) = 2xy + 4x + g_y(y,z),$$

que al simplificar se convierte en la ecuación en derivadas parciales $g_y(y,z) = 0$, de donde se obtiene que su solución general es $g(y,z) = h(z)$, para cierta función diferenciable h en la única variable z. Sustituyendo en (4) se obtiene

$$f(x,y,z) = xy^2 + 4xy - \frac{x^3}{3} + h(z). \tag{5}$$

Derivando esta última expresión con respecto a la variable z y comparando con (3) se tiene que

$$4z^3 = f_z(x,y,z) = h'(z),$$

de donde la ecuación diferencial ordinaria $h'(z) = 4z^3$ lleva a que una solución es $h(z) = z^4$. Sustituyendo en (5) se llega a la función potencial pedida que es

$$\boxed{f(x,y,z) = xy^2 + 4xy - \frac{x^3}{3} + z^4.}$$

Como se desprende del procedimiento, esta función no es la única en tales condiciones. De hecho, se puede demostrar que todas las funciones potenciales difieren en una constante, con lo cual la forma general de todos los potenciales es

$$\boxed{f(x,y,z) = xy^2 + 4xy - \frac{x^3}{3} + z^4 + C,}$$

donde C es una constante real arbitraria.

¿Hay alguna manera sencilla de comprobar si el resultado obtenido es correcto? En caso afirmativo, hazlo.

(c) En este apartado se considera $\alpha = 4$.

(I) Primera forma. **Utilizando la función potencial hallada anteriormente**. Puesto que $\mathbf{F}$ es un campo vectorial conservativo en $\mathbb{R}^3$, el trabajo se puede calcular como diferencia de potenciales en los extremos de la curva. En este caso, el extremo inicial de la curva es $A = \mathbf{r}(0) = (0, 1, 0)$ y su extremo final es $B = \mathbf{r}(1) = (1, -1, 0)$. Luego,

$$\begin{aligned} \int_C \langle \mathbf{F}, \mathrm{d}\mathbf{r} \rangle &= f(B) - f(A) \\ &= f(1, -1, 0) - f(0, 1, 0) \\ &= -\frac{10}{3}. \end{aligned}$$

Segunda forma. **Utilizando la independencia del camino**. Al ser $\mathbf{F}$ un campo vectorial conservativo en $\mathbb{R}^3$, se puede concluir que el valor de la integral curvilínea a lo largo de una curva depende de sus puntos extremos (y no de la curva en sí). Esto nos permite cambiar la curva dada por otra en donde los cálculos resulten más sencillos. En este caso, se considerará un segmento de recta que una los extremos A y B. Dicho segmento se puede parametrizar como $\mathbf{r}(\mathbf{t}) = A + t(B - A), 0 \leq t \leq 1$. En el ejemplo queda $B - A = (1, -2, 0)$ y por tanto:

$$\boxed{\mathbf{r}(\mathbf{t}) = (t, 1 - 2t, 0), 0 \leq t \leq 1.}$$

Claramente, $\mathbf{r}'(t) = (1, -2, 0)$. Identificando en la expresión de la parametrización $x(t) = t$, $y(t) = -2t$, $z(t) = 0$, y sustituyendo en la definición de integral curvilínea se tiene que

$$\begin{aligned} \int_C \langle \mathbf{F}, \mathrm{d}\mathbf{r} \rangle &= \int_a^b \langle \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)), \mathbf{r}'(t) \rangle \, \mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 \langle \mathbf{F}(x(t), y(t), z(t)), (x'(t), y'(t), z'(t)) \rangle \, \mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 \langle ((1-2t)^2 + 4(1-2t) - t^2, 2t(1-2t) + 4t, 0), (1, -2, 0) \rangle \, \mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 [(1-2t)^2 + 4(1-2t) - t^2 - 4t(1-2t) - 8t] \, \mathrm{d}t \\ &= \left[-\frac{(1-2t)^3}{6} - (1-2t)^2 - \frac{t^3}{3} - 2t^2 + \frac{8t^3}{3} - 4t^2 \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{6} - 1 - \frac{1}{3} - 2 + \frac{8}{3} - 4 + \frac{1}{6} + 1 \\ &= -\frac{10}{3}. \end{aligned}$$

(II) Como los extremos de la curva son $A = \mathbf{r}(0) = (0, 1, 0)$ y $B = \mathbf{r}(1) = (1, -1, 0)$, y son distintos, entonces la curva no es cerrada.

(III) Primera forma. La curva dada por

$$C : \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ z = 4 \end{cases}$$

corresponde a una circunferencia situada en el plano $z = 4$ con centro en $(0, 0, 4)$ y radio 1. Por tanto, una parametrización es

$$\mathbf{r}(t) = (\cos(t), \operatorname{sen}(t), 4), \qquad t \in [0, 2\pi].$$

Es fácil ver que $\mathbf{r}'(t) = (-\operatorname{sen}(t), \cos(t), 0)$. Además, la composición de funciones da

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) = (\operatorname{sen}^2(t) + 4\operatorname{sen}(t) - \cos^2(t), 2\cos(t)\operatorname{sen}(t) + 4\cos(t), 256)$$

y así, usando identidades trigonométricas, el producto escalar queda

$$\begin{aligned}
&\langle \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)), \mathbf{r}'(t)\rangle = \\
&= -\operatorname{sen}^3(t) - 4\operatorname{sen}^2(t) + \operatorname{sen}(t)\cos^2(t) + 2\cos^2(t)\operatorname{sen}(t) + 4\cos^2(t) \\
&= 4\cos(2t) + 3\operatorname{sen}(t)\cos^2(t) - \operatorname{sen}^3(t).
\end{aligned}$$

Por tanto, por definición de integral curvilínea se tiene que

$$\begin{aligned}
\int_C \langle \mathbf{F}, \mathrm{d}\mathbf{r}, \rangle &= \int_a^b \langle \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)), \mathbf{r}'(t)\rangle \, \mathrm{d}t \\
&= \int_0^{2\pi} [4\cos(2t) + 3\operatorname{sen}(t)\cos^2(t) - \operatorname{sen}^3(t)] \, \mathrm{d}t \\
&= 0.
\end{aligned}$$

¿Por qué todas las integrales del último paso dan cero? Justificarlo.

Segunda forma. Puesto que $\mathbf{F}$ es un campo conservativo en $\mathbb{R}^3$ y la circunferencia es una curva cerrada, el teorema de caracterización de campos conservativos asegura que la circulación pedida debe ser 0.

Por otro lado, para hallar la recta tangente pedida se debe identificar primero el valor del parámetro $t_0 \in [0, 2\pi]$ para el cual se cumple que

$$\mathbf{r}(t_0) = (0, 1, 4).$$

Se debe resolver entonces el sistema siguiente

$$\cos(t) = 0 \quad (6)$$
$$\operatorname{sen}(t) = 1 \quad (7)$$
$$4 = 4 \quad (8)$$

Es evidente que las tres igualdades se cumplen únicamente para $t_0 = \frac{\pi}{2}$. Ahora se calcula el vector tangente a la curva en el punto $\mathbf{r}(t_0)$,

$$\mathbf{r}'(t_0) = (-\operatorname{sen}(t_0), \cos(t_0), 0) = (-1, 0, 0).$$

Por último, la recta tangente tiene ecuación vectorial

$$L_T : (x, y, z) = \mathbf{r}(t_0) + \lambda\mathbf{r}'(t_0) = (-\lambda, 1, 4), \text{ para todo } \lambda \in \mathbb{R}.$$

¿Qué se obtendría si en la ecuación de la recta L_T se cambia la variación del parámetro a $\lambda \in [0, +\infty[$? ¿Y si se cambia a $\lambda \in [0, 1]$? Justifícalo.

(d) En este apartado se considera el campo vectorial

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (y^2 + 8y - x^2, 2xy + 4x, 4z^3).$$

(I) Como el campo vectorial de este apartado es no conservativo y la curva no es cerrada, únicamente se puede utilizar la **definición** para calcular la integral pedida.

El segmento de recta que va desde el punto $A = (0, 1, 0)$ hasta el punto $B = (1, -1, 0)$ se puede **parametrizar** mediante

$$\mathbf{r}(t) = A + t(B - A) = (t, 1 - 2t, 0), \ t \in [0, 1].$$

Evidentemente, $\mathbf{r}'(t) = (1, -2, 0)$. Ahora

$$\begin{aligned}
\int_C \langle \mathbf{F}, \,\mathrm{d}\mathbf{r}\rangle &= \int_0^1 [(1-2t)^2 + 8(1-2t) - t^2 - 4t(1-2t) - 8t]\,\mathrm{d}t \\
&= \left[-\frac{(1-2t)^3}{6} - 2(1-2t)^2 - \frac{t^3}{3} - 2t^2 + \frac{8t^3}{3} - 4t^2\right]_0^1 \\
&= \frac{1}{6} - 2 - \frac{1}{3} - 2 + \frac{8}{3} - 4 + \frac{1}{6} + 2 \\
&= -\frac{11}{3}.
\end{aligned}$$

Observa qque es posible realizar este cálculo considerando el campo vectorial dado en términos de α directamente. Realízalo y comprueba que, al sustituir α por 4 y por 8, se obtienen las dos integrales ya calculadas.

(II) Primera forma. Se procederá **por definición** teniendo en cuenta que la curva está parametrizada mediante $\mathbf{r}(t) = (\cos(t), \operatorname{sen}(t), 4)$, para $0 \leq t \leq 2\pi$. Así, $\mathbf{r}'(t) = (-\operatorname{sen}(t), \cos(t), 0)$ y

$$\langle \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)), \mathbf{r}'(t)\rangle = -\operatorname{sen}^3(t) - 8\operatorname{sen}^2(t) + \operatorname{sen}(t)\cos^2(t) + 2\cos^2(t)\operatorname{sen}(t) + 4\cos^2(t).$$

por tanto

$$\begin{aligned}
\int_C \langle \mathbf{F}, \,\mathrm{d}\mathbf{r}\rangle &= \int_0^{2\pi} [3\operatorname{sen}(t)\cos^2(t) + 4\cos^2(t) - \operatorname{sen}^3(t) - 8\operatorname{sen}^2(t)]\,\mathrm{d}t \\
&= -4\pi.
\end{aligned}$$

Resolver las integrales trigonométricas del último paso. Repasa este tipo de integrales de Matemáticas I si no las recuerdas.

Segunda forma. Para aplicar el **Teorema de Stokes** se debe definir una superficie (abierta) de tal modo que su contorno coincida con la curva dada. En este caso, la opción más sencilla es considerar el círculo que encierra la circunferencia dada, es decir $x^2 + y^2 \leq 1$, $z = 4$, siendo una posible parametrización de dicho círculo la función vectorial

$$S:\ \mathbf{s}(u, v) = (u, v, 4) \text{ donde } D = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u^2 + v^2 \leq 1\}.$$

El campo vectorial de los vectores (normales) fundamentales se determina a partir del producto vectorial entre

$$\mathbf{s}_u = (1, 0, 0) \qquad \text{y} \qquad \mathbf{s}_v = (0, 1, 0),$$

que da $\mathbf{s}_u \times \mathbf{s}_v = (0, 0, 1)$. Como este vector normal que apunta hacia arriba y la circunferencia se recorre desde el eje X positivo hacia el eje Y positivo, la regla de la mano derecha garantiza que las orientaciones son compatibles. El vector rotacional del campo vectorial calculado a partir de su definición da $\operatorname{rot}(\mathbf{F}) = (0, 0, -4)$. Luego,

$$\begin{aligned}
\int_C \langle \mathbf{F}, \,\mathrm{d}\mathbf{r}\rangle &= \iint_S \langle \operatorname{rot}(\mathbf{F}), \,\mathrm{d}\mathbf{S}\rangle \\
&= \iint_D \langle \operatorname{rot}(\mathbf{F})(\mathbf{s}(u, v)), \mathbf{s}_u \times \mathbf{s}_v\rangle \,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v \\
&= \iint_D \langle (0, 0, -4), (0, 0, 1)\rangle \,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v \\
&= -4 \iint_D \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v \\
&= -4\,\text{Área}(D) \\
&= -4\pi.
\end{aligned}$$

(III) Al tratarse de un campo no conservativo, nada puede asegurarse sobre el resultado que dará el trabajo realizado por $\mathbf{F}$ para mover una partícula desde el punto A hasta el punto B del apartado (I). Se deberá analizar el valor para cada curva por separado.

4.2. Actividad

Ejercicio 2 *Repetir todos los apartados del problema resuelto considerando ahora el campo vectorial siguiente:*

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (\beta^2 y - 2x, 4x - y, z^2),$$

donde, como antes, se deberá comenzar determinando los valores de β reales para los cuales el campo es conservativo y trabajar con todos los valores encontrados.

Respuestas: $\beta = \pm 2$, $f(x, y, z) = 4xy - x^2 - \frac{y^2}{2} + \frac{z^3}{3}$, -5, 0, -5, -12π.

Ahora: ¡Manos a la obra! Ya puedes resolver los Ejercicios planteados en el libro de teoría indicado en la Bibliografía.

5. Cierre

En este artículo el alumno dispone de la resolución completa de un ejemplo motivador que son ejemplos clásicos que se presentan como aplicación en la teoría de integración sobre curvas. Ahora, valiéndose de todos estos conceptos completamente desarrollados, podrá realizar los ejercicios propuestos en el libro de teoría.

6. Bibliografía

7. Libros

[1] N. Thome: Teoría y Problemas de Análisis Vectorial, Ed. Universidad Politécnica de Valencia, Ref. 2008.299, ISBN: 978-84-8363-229-1, 2008.

[2] N. Thome: Teoría y Problemas de Matemáticas I, Ed. Universidad Politécnica de Valencia, 2da Edición, ISBN: 978-84-8363-928-3, 2012.

8. Referencias de fuentes electrónicas

[3] `https://laboratoriosvirtuales.upv.es/eslabon/ejemplos_campos_vectoriales_2D/default.aspx`

[4] `https://laboratoriosvirtuales.upv.es/eslabon/ejemplos_campos_vectoriales _3D/`

[5] `https://laboratoriosvirtuales.upv.es/eslabon/conservativo_3D_parametrico/default.aspx`

[6] `https://laboratoriosvirtuales.upv.es/eslabon/campos_conservativos_2D_curvas_nivel/`

[7] `https://laboratoriosvirtuales.upv.es/eslabon/int_curv_aprox/default.aspx`