



UNIVERSITAT
POLITÈCNICA
DE VALÈNCIA

Integración sobre superficies Flujo

Apellidos, nombre	Thome Coppo, Néstor
	njthome@mat.upv.es
Departamento	Matemática Aplicada
Centro	Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Telecomunicación

1. Resumen de las ideas clave

En este artículo se va a presentar la resolución completa de dos problemas tipo del tema de **integración sobre superficies**. Se introducen comentarios, cuestiones, observaciones, gráficas, etc. para que la resolución del problema sea interactiva como si se estuviese oyendo la explicación de clase y trabajando en ese momento las propuestas que allí se realizan. Este artículo está estructurado como sigue:

Contenido de este artículo
2. Introducción.
3. Objetivos.
4. Desarrollo.
5. Cierre.

Cuadro 1: Contenido de este artículo

2. Introducción

Es conocido que a la hora de resolver **integrales sobre superficies** hay tres procedimientos que generalmente son los utilizados y que son explicados en clase. Las posibilidades son:

- Resolver la integral directamente a partir de la definición.
- Aplicar adecuadamente el Teorema de Gauss.

El primero se utilizará si la integral planteada mediante la definición es de fácil resolución y si no se debe pasar a la aplicación del Teorema de Gauss (si se cumplen sus hipótesis). En principio, el planteamiento por definición siempre sería posible si se cuenta con una parametrización de la superficie. El problema que puede surgir es la dificultad a la hora de resolver la integral y en caso de no poderse resolver con un método alternativo a la definición debería acudir a métodos numéricos para integrales dobles.

En el caso de estar ante la presencia de una integral de superficie del rotacional de un campo vectorial sobre una superficie cuya frontera es una curva cerrada, también es posible:

- Utilizar el Teorema de Stokes.

En este caso, se puede resolver directamente la integral que proporciona el flujo, siempre que este cálculo sea sencillo, o bien intentarlo con la integral curvilínea indicada en el teorema.

El objetivo de este artículo es estudiar los dos primeros casos indicados anteriormente puesto que el tercero fue analizado en el artículo sobre integración sobre curvas. Estos procedimientos serán útiles en las posteriores asignaturas técnicas y son de gran utilidad en la Ingeniería en general.

En el Cuadro de la Figura 1 se puede observar un esquema básico de lo expuesto anteriormente, que puede ayudar para la resolución de una integral sobre una superficie.

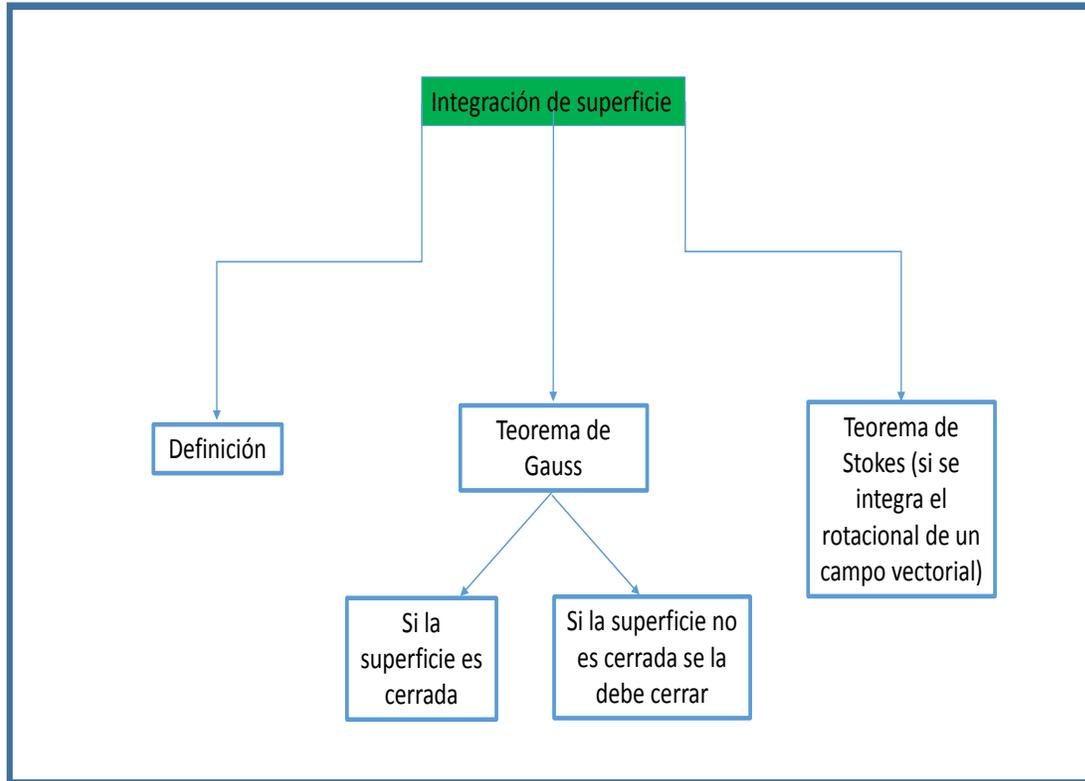


Figura 1: Esquema general para el tratamiento de una integral sobre una superficie

3. Objetivos

Una vez que el alumno lea con detenimiento este documento, será capaz de:

- Resolver integrales de superficie por definición en casos sencillos en que el campo vectorial y la superficie lleven a integrales que, mediante los métodos de integración conocidos, se pueda llegar a la solución.
- Darse cuenta de cuándo es necesario utilizar el Teorema de Gauss para realizar el cálculo de una integral de flujo y saber cómo se aplica.
- Utilizar el Teorema de la Divergencia para facilitar la resolución de la integral de superficie aunque ésta no sea cerrada.

A lo largo del documento el alumno verá que se van planteando algunas cuestiones. Sería interesante que se detuviese a reflexionar sobre las mismas antes de leer la respuesta.

4. Desarrollo

Es conocido que si se tiene que resolver una integral sobre una superficie de un campo vectorial $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ y se dispone de una parametrización $\mathbf{r} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ de la superficie S sobre la que se pide resolver (siendo D un subconjunto de \mathbb{R}^2), se puede recurrir a la definición

$$\iint_S \langle \mathbf{F}, d\mathbf{S} \rangle = \iint_D \langle \mathbf{F}(\mathbf{r}(u, v)), \mathbf{r}_u(u, v) \times \mathbf{r}_v(u, v) \rangle du dv$$

reduciendo el problema al cálculo de una integral doble (si las integrales existen). Para ello será necesario tener en cuenta el tema de integración múltiple estudiado anteriormente en la asignatura.

Sin embargo, ¿qué ocurre si la superficie es lo suficientemente complicada? Es decir, ¿qué ocurre si al llegar a la integral doble anterior, queda un integrando complicado o incluso que no se pueda tratar con métodos conocidos? En este caso, se debería disponer de métodos alternativos que ayuden a su solución.

En este punto sería recomendable repasar el Capítulo 4 dedicado a Superficies e Integración sobre Superficies del [libro de teoría](#) [1] citado en la Bibliografía.

Antes de entrar en el tema de integración sería recomendable que visualices los **objetos de aprendizaje** que encontrarás en las [Páginas Web](#) [2] y [3]¹. En estos objetos podrás simular varios campos vectoriales tanto planos como espaciales y a partir de ellos hacerte una idea del tipo de dibujos que proporcionan este tipo especiales de funciones.

En la [Página Web](#) [4] citada en la Bibliografía, podrás visualizar un **objeto de aprendizaje** en el que se puede realizar el cálculo de varias integrales sobre superficies y se obtiene como salida del objeto, además del resultado numérico del valor de la integral, una gráfica con varios vectores que muestran la gráfica del campo vectorial aplicado a puntos de la superficie y los vectores normales a dicha superficie en los mismos puntos. Observa con detenimiento el signo que se obtiene en los resultados a partir de si el ángulo entre los vectores es agudo, recto u obtuso (¿cómo relacionas este hecho con el signo del producto escalar?). Puedes practicar realizando modificaciones en los distintos parámetros que el objeto permite.

Ahora se va proceder al desarrollo de dos ejemplos con su resolución completa y una serie de comentarios que permitirán comprender los entresijos que suelen encontrarse a la hora de resolver una integral con esta problemática.

¹Para visualizar los objetos de aprendizaje debes copiar el enlace y pegarlo en un buscador.

4.1. Ejemplo motivador resuelto

Ejemplo 1 Se considera el campo vectorial espacial $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dado por

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (x, y, z),$$

las superficies de ecuación $z = 4 - 2x^2 - 2y^2$ y $z = 1 + x^2 + y^2$ y el sólido Q limitado por dichas superficies, donde con S_1 y S_2 se denotan, respectivamente, las porciones de las mismas que encierran el sólido.

Se pide responder las siguientes preguntas.

- (a) Encuentra una parametrización para la superficie S_1 y otra para la superficie S_2 de modo que la superficie $S = S_1 \cup S_2$ esté orientada hacia el exterior.
- (b) Calcula el flujo que determina el campo \mathbf{F} al atravesar la superficie S :
 - (i) por definición.
 - (ii) utilizando el Teorema de la Divergencia.

Análisis previo a la solución: Para comenzar, nos planteamos y resolveremos las siguientes cuestiones.

Cuestiones:

- (1) Representa gráficamente el sólido Q limitado por las superficies S_1 y S_2 .
- (2) Si las superficies S_1 y S_2 se orientan de modo que la superficie $S = S_1 \cup S_2$ quede orientada hacia el exterior, y se tiene en cuenta la dirección de las líneas del campo, ¿qué signo tendrá el flujo del campo \mathbf{F} que atraviesa la superficie S_1 ? ¿Y el que atraviesa S_2 ? ¿Es posible intuir el signo del flujo que atraviesa S ?
- (3) ¿Es S una superficie cerrada?

Respondamos a cada una de estas cuestiones.

- (1) La gráfica de las superficies S_1 y S_2 y del sólido que las limita se pueden apreciar en la Figura 2. Se trata de dos paraboloides, uno con vértice en el punto $(0, 0, 4)$ y sus restantes puntos en la franja $2 \leq z \leq 4$ y otro con vértice en $(0, 0, 1)$ y sus restantes puntos en la franja $1 \leq z \leq 2$.

Observar que para realizar la gráfica ha hecho falta encontrar la intersección de ambas superficies. Para ello se igualan los valores de z en $z = 4 - 2x^2 - 2y^2$ y $z = 1 + x^2 + y^2$, que despejando se obtiene

$$x^2 + y^2 = 1$$

y, al sustituir en cualquiera de las igualdades anteriores, se deduce que $z = 2$. Es decir, los paraboloides se cortan en la circunferencia paralela al plano XY de radio 1 centrada en el punto $(0, 0, 2)$.

- (2) Realiza un ejercicio de imaginación puesto que en este problema el campo vectorial es muy sencillo de representar gráficamente. Intenta visualizar algunos vectores del

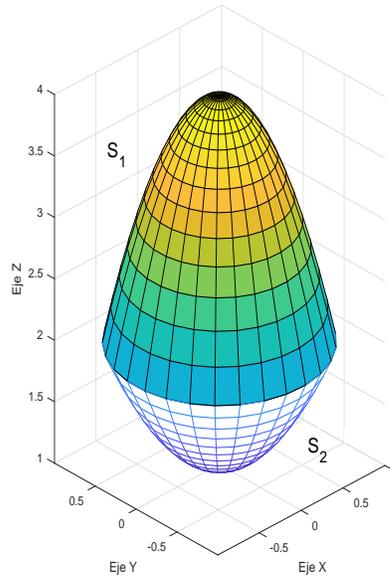


Figura 2: Superficies S_1 y S_2 y sólido Q

campo vectorial $\mathbf{F}(x, y, z) = (x, y, z)$ atravesando cada una de las superficies. Para vectores cercanos al origen y de módulo pequeño, las flechas apuntan hacia S_1 mientras que los vectores normales a S_1 apuntan “hacia abajo”. **¿Qué ocurre cuando ambos vectores se encuentran sobre la superficie S_1 ?** Con respecto a S_2 , las flechas apuntan en la misma dirección que las de los vectores normales a S_2 (en cada punto). Este razonamiento nos lleva a pensar que el flujo que atraviesa S_1 tendrá signo negativo, pues todos los productos escalares a realizar lo tienen, mientras que el flujo que atraviesa S_2 tendrá signo positivo pues todos los productos escalares a realizar lo tienen. Además, es razonable pensar que “entran menos flechas” por S_1 que las que “salen” por S_2 a juzgar por las porciones de superficies involucradas, como se aprecia en el dibujo. Por tanto, la intuición nos dice que el flujo total deberá ser positivo. **Compara con los ejemplos de la Página Web [4].**

(3) **SI.** Claramente la superficie S es cerrada como se aprecia en la Figura 2.

Resolución:

Ahora que hemos aclarado estos puntos, **vamos a resolver cada uno de los apartados del ejemplo.**

(a) La superficie S_1 está dada por los puntos $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tales que

$$z = f(x, y) = 4 - 2x^2 - 2y^2,$$

es decir, z es una función explícita de x e y . Sin embargo, para recorrer solamente los puntos sobre la gráfica de S_1 es necesario acotar los valores de x e y . Teniendo en

cuenta la Cuestión (1), estos valores deben variar en el interior de la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$. Resumiendo, una parametrización posible es:

$$\boxed{S_1 : \mathbf{r}(u, v) = (u, v, 4 - 2u^2 - 2v^2), \text{ con } (u, v) \in D_1}$$

siendo $D_1 = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u^2 + v^2 \leq 1\}$. Los vectores normales fundamentales para esta parametrización vienen dados por

$$\mathbf{r}_u(u, v) \times \mathbf{r}_v(u, v) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & -4u \\ 0 & 1 & -4v \end{vmatrix} = (4u, 4v, 1),$$

que claramente apuntan hacia “afuera”, lo que se deduce de la gráfica y de observar que la tercera componente es positiva.

De forma semejante, se considera la parametrización

$$\boxed{\mathbf{r}(u, v) = (u, v, 1 + u^2 + v^2), \text{ con } (u, v) \in D_2}$$

siendo $D_2 = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u^2 + v^2 \leq 1\}$. Los vectores normales fundamentales para esta parametrización vienen dados por

$$\mathbf{r}_u(u, v) \times \mathbf{r}_v(u, v) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & 2u \\ 0 & 1 & 2v \end{vmatrix} = (-2u, -2v, 1),$$

que claramente apuntan hacia “el interior” de la superficie, lo que se deduce de la gráfica y de observar que la tercera componente es positiva. Entonces, en lugar de haber obtenido una parametrización para S_2 , lo que se ha parametrizado mediante esta función vectorial $\mathbf{r}(u, v)$, con $(u, v) \in D_2$ es la superficie $-S_2$. A priori este hecho parece ser un inconveniente; sin embargo se soluciona utilizando la siguiente propiedad:

$$\boxed{\iint_{-S} \langle \mathbf{F}, d\mathbf{S} \rangle = - \iint_S \langle \mathbf{F}, d\mathbf{S} \rangle.}$$

- (b) (I) A partir de la parametrización hallada para S_1 , el flujo que produce el campo \mathbf{F} al atravesar S_1 viene dado por

$$\begin{aligned} F_1 &= \iint_{S_1} \langle \mathbf{F}, d\mathbf{S} \rangle \\ &= \iint_{D_1} \langle \mathbf{F}(\mathbf{r}(u, v)), \mathbf{r}_u(u, v) \times \mathbf{r}_v(u, v) \rangle du dv \\ &= \iint_{D_1} \langle \mathbf{r}(u, v), \mathbf{r}_u(u, v) \times \mathbf{r}_v(u, v) \rangle du dv \\ &= \iint_{D_1} \langle (u, v, 4 - 2u^2 - 2v^2), (4u, 4v, 1) \rangle du dv \\ &= \iint_{D_1} (4u^2 + 4v^2 + 4 - 2u^2 - 2v^2) du dv \\ &= \iint_{D_1} (2u^2 + 2v^2 + 4) du dv. \end{aligned}$$

Aplicando un cambio de variables a coordenadas polares $x = r \cos(\theta)$, $y = r \sin(\theta)$ (recordando que el jacobiano es r), la integral queda

$$\begin{aligned} F_1 &= \iint_{D_1} (2u^2 + 2v^2 + 4) \, du \, dv \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (2r^2 + 4)r \, dr \, d\theta \\ &= 5\pi. \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que se ha parametrizado $-S_2$ en lugar de S_2 en el apartado anterior, el flujo que produce el campo \mathbf{F} al atravesar S_2 viene dado por

$$\begin{aligned} F_2 &= \iint_{S_2} \langle \mathbf{F}, d\mathbf{S} \rangle \\ &= - \iint_{-S_2} \langle \mathbf{F}, d\mathbf{S} \rangle \\ &= - \iint_{D_2} \langle \mathbf{F}(\mathbf{r}(u, v)), \mathbf{r}_u(u, v) \times \mathbf{r}_v(u, v) \rangle \, du \, dv \\ &= - \iint_{D_2} \langle \mathbf{r}(u, v), \mathbf{r}_u(u, v) \times \mathbf{r}_v(u, v) \rangle \, du \, dv \\ &= - \iint_{D_2} \langle (u, v, 1 + u^2 + v^2), (-2u, -2v, 1) \rangle \, du \, dv \\ &= - \iint_{D_2} (-2u^2 - 2v^2 + 1 + u^2 + v^2) \, du \, dv \\ &= - \iint_{D_2} (1 - u^2 - v^2) \, du \, dv \\ &= \iint_{D_2} (u^2 + v^2 - 1) \, du \, dv. \end{aligned}$$

Aplicando un cambio de variables a coordenadas polares $x = r \cos(\theta)$, $y = r \sin(\theta)$ (recordando que el jacobiano es r), la integral queda

$$\begin{aligned} F_2 &= \iint_{D_2} (u^2 + v^2 - 1) \, du \, dv \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (r^2 - 1)r \, dr \, d\theta \\ &= -\frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Luego, el flujo que atraviesa S es $F = F_1 + F_2 = \frac{9}{2}\pi$.

Una observación importante es que otra posible parametrización para S_1 se puede obtener teniendo en cuenta los dos hechos utilizados. A saber, ha sido útil saber que $z = f(x, y)$ pues permitió escribir una parametrización sencilla $\mathbf{r}(u, v)$ pero al tener que realizar posteriormente el cambio a coordenadas polares, se podría haber parametrizado directamente de la siguiente manera

$$\boxed{S_1 : \mathbf{r}(u, v) = (r \cos(\theta), r \sin(\theta), 4 - 2r^2), \text{ con } (r, \theta) \in D_1}$$

siendo $D_1 = \{(r, \theta) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq r \leq 1\}$.

Idem para S_2 .

- (II) Por ser el campo vectorial \mathbf{F} de clase \mathcal{C}^1 (es decir, sus componentes tienen derivadas parciales continuas) y la superficie S es cerrada, es posible aplicar el Teorema de la Divergencia. Es fácil ver que

$$\operatorname{div}(\mathbf{F})(x, y, z) = 3, \quad \text{para todo } (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

Por ello, el flujo pedido se puede calcular mediante

$$\begin{aligned} F &= \iint_S \langle \mathbf{F}, d\mathbf{S} \rangle \\ &= \iiint_Q \operatorname{div}(\mathbf{F})(x, y, z) \, dV \\ &= 3 \iiint_Q dV \\ &= 3V(Q), \end{aligned}$$

donde $V(Q)$ representa el volumen del sólido Q . Es sencillo calcularlo si se realiza un cambio a coordenadas cilíndricas. En efecto, (recordando que, en este caso, el jacobiano es r), la integral pedida es

$$\begin{aligned} F &= 3V(Q) \\ &= 3 \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_{1+r^2}^{4-2r^2} r \, dz \, dr \, d\theta \\ &= \frac{9}{2}\pi. \end{aligned}$$

Comparando los resultados obtenidos en los apartados (I) y (II) se ha comprobado que el Teorema de Gauss se cumple para este ejemplo.

4.2. Una aplicación

Si la superficie no sea cerrada es posible utilizar el Teorema de Gauss si se la cierra previamente. Veamos un ejemplo de aplicación.

Ejemplo 2 *Calcular el flujo que determina el campo $\mathbf{F}(x, y, z) = (x, y, z)$ al atravesar la superficie S_1 descrita por:*

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 4 - 2x^2 - 2y^2, x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Solución: La superficie de este apartado coincide con la superficie (también llamada) S_1 del ejemplo anterior. Puesto que S_1 no es cerrada se considera, por ejemplo, la superficie

$$S_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 2, x^2 + y^2 \leq 1\}$$

de modo que $S = S_1 \cup S_2$ sí lo es. Ahora es posible aplicar el Teorema de la Divergencia:

$$\iint_{S_1} \langle \mathbf{F}, d\mathbf{S} \rangle + \iint_{S_2} \langle \mathbf{F}, d\mathbf{S} \rangle = \iint_S \langle \mathbf{F}, d\mathbf{S} \rangle = \iiint_Q \operatorname{div}(\mathbf{F})(x, y, z) dV.$$

Ahora se calculan por separado las integrales sobre S_2 y sobre Q . En efecto, por tratarse de un trozo de plano, una parametrización para S_2 es

$$S_2 : \mathbf{r}(u, v) = (u, v, 2), \text{ con } (u, v) \in D_2$$

siendo $D_2 = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u^2 + v^2 \leq 1\}$. Los vectores normales fundamentales para esta parametrización vienen dados por

$$\mathbf{r}_u(u, v) \times \mathbf{r}_v(u, v) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (0, 0, 1),$$

que claramente apuntan hacia “arriba” de la superficie plana, pues la tercera componente es positiva. De nuevo, lo que se ha parametrizado con esta función vectorial $\mathbf{r}(u, v)$, con $(u, v) \in D_2$ es la superficie $-S_2$. El flujo que produce el campo \mathbf{F} al atravesar S_2 viene dado por

$$\begin{aligned} F_2 &= \iint_{S_2} \langle \mathbf{F}, d\mathbf{S} \rangle \\ &= - \iint_{-S_2} \langle \mathbf{F}, d\mathbf{S} \rangle \\ &= - \iint_{D_2} \langle \mathbf{F}(\mathbf{r}(u, v)), \mathbf{r}_u(u, v) \times \mathbf{r}_v(u, v) \rangle du dv \\ &= - \iint_{D_2} \langle \mathbf{r}(u, v), \mathbf{r}_u(u, v) \times \mathbf{r}_v(u, v) \rangle du dv \\ &= - \iint_{D_2} \langle (u, v, 2), (0, 0, 1) \rangle du dv \\ &= -2 \iint_{D_2} du dv \\ &= -2A(D_2) \\ &= -2\pi. \end{aligned}$$

Por otro lado, utilizando coordenadas cilíndricas,

$$\begin{aligned} \iiint_Q \operatorname{div}(\mathbf{F})(x, y, z) dV &= 3V(Q) \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_2^{4-2r^2} r dz dr d\theta \\ &= 3\pi. \end{aligned}$$

Por lo tanto, el flujo pedido viene dado por

$$\iint_{S_1} \langle \mathbf{F}, dS \rangle = \iiint_Q \operatorname{div}(\mathbf{F})(x, y, z) dV - \iint_{S_2} \langle \mathbf{F}, dS \rangle = 3\pi + 2\pi = 5\pi,$$

que coincide con lo obtenido en el problema anterior.

4.3. Actividad

Ejercicio 3 *Calcula el flujo que determina el campo vectorial*

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \left(xz^2, \frac{1}{3}y^3 + \operatorname{ch}(z), x^2z + y \right)$$

al atravesar la mitad superior de la esfera de ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Respuesta: $\frac{2}{5}\pi$.

Ahora: ¡Manos a la obra! Ya puedes resolver los Ejercicios planteados en el libro de teoría indicado en la Bibliografía.

5. Cierre

En este artículo el alumno dispone de la resolución completa de un ejemplo motivador y de una forma concreta de aplicar el Teorema de la Divergencia, que son ejemplos clásicos que se presentan como aplicación en la teoría de integración sobre superficies. Ahora, valiéndose de todos estos conceptos completamente desarrollados, podrá realizar los ejercicios propuestos en el libro de teoría.

6. Bibliografía

7. Libros

[1] N. Thome: Teoría y Problemas de Análisis Vectorial, Ed. Universidad Politécnica de Valencia, Ref. 2008.299, ISBN: 978-84-8363-229-1, 2008.

8. Referencias de fuentes electrónicas

[2] https://laboratoriosvirtuales.upv.es/eslabon/ejemplos_campos_vectorial_es_2D/default.aspx

[3] https://laboratoriosvirtuales.upv.es/eslabon/ejemplos_campos_vectoriales_3D/

[4] https://laboratoriosvirtuales.upv.es/eslabon/int_sup_aprox/default.aspx