



UNIVERSITAT
POLITÈCNICA
DE VALÈNCIA

Efecto de la velocidad de la corriente incidente en la resistencia aerodinámica subsónica

Apellidos y nombre: García-Cuevas González, Luis Miguel (luiga12@mot.upv.es)¹
Carreres Talens, Marcos (marcarta@mot.upv.es)¹
Tiseira Izaguirre, Andrés Omar (anti1@mot.upv.es)¹

Departamento/Centro: ¹Departamento de Máquinas y Motores Térmicos
Universitat Politècnica de València

Índice general

1. Resumen	2
2. Objetivos	2
3. Introducción	2
4. Desarrollo	2
4.1. Conceptos básicos	2
4.2. Efecto de la velocidad en la resistencia parásita	3
4.3. Efecto de la velocidad en la resistencia inducida	5
4.4. Velocidad de mínima resistencia aerodinámica	5
4.5. Velocidad de máxima eficiencia aerodinámica	5
4.6. Velocidad de mínima resistencia para distintas altitudes de vuelo	6
4.7. Vuelo con viento de cola	6
4.8. Aclaraciones sobre la velocidad de vuelo de crucero	7
5. Cierre	8
Bibliografía	8

1 Resumen

En este artículo vamos a presentar cómo varía la resistencia aerodinámica de aeronaves subsónicas en función de la velocidad de la corriente incidente y de la velocidad de vuelo, que no tienen por qué coincidir. También veremos cómo es posible estimar la velocidad de mínima resistencia aerodinámica y cómo es posible volar a velocidades muy elevadas aprovechando el viento de cola.

2 Objetivos

Tras leer detenidamente este documento, el lector ha de ser capaz de:

- Analizar el efecto de la velocidad de la corriente incidente sobre la resistencia parásita en aeronaves subsónicas.
- Analizar el efecto de la velocidad de la corriente incidente sobre la resistencia inducida en aeronaves subsónicas.
- Analizar el efecto de la velocidad de la corriente incidente sobre la resistencia aerodinámica global en aeronaves subsónicas.
- Estimar la velocidad de mínima resistencia en distintas altitudes de vuelo.
- Estimar la velocidad de vuelo en condiciones de viento de cola para una resistencia aerodinámica fija.

3 Introducción

La resistencia aerodinámica en aeronaves volando en condiciones subsónicas se ve afectada por multitud de motivos. Entre ellos, la velocidad de la corriente incidente tiene un papel fundamental. En este documento se explican los principales efectos de la velocidad de la corriente incidente sobre la resistencia aerodinámica de un avión, de modo que el lector pueda entender mejor por qué los aviones, que suelen volar en crucero en condiciones cercanas a las de mínima resistencia para maximizar su alcance, vuelan a la velocidad que lo hacen. También se mostrará por qué las mismas rutas aéreas realizadas en sentido este a oeste requieren de tiempos distintos de los de las mismas rutas realizadas en sentido oeste a este.

4 Desarrollo

4.1 Conceptos básicos

Supongamos que una aeronave vuela con un peso W en una atmósfera con densidad ρ_∞ y una velocidad de la corriente incidente sin perturbar U_∞ que sea lo suficientemente baja como para no producir velocidades sónicas o supersónicas sobre la aeronave. De forma general, en vuelo rectilíneo equilibrado podemos suponer que el peso es igual a la sustentación. Así, se tiene la [Ecuación 1](#):

$$W = L = \frac{1}{2} \cdot \rho_\infty \cdot U_\infty^2 \cdot S \cdot C_L \quad (1)$$

donde L es la sustentación, S es una superficie de referencia, que tomaremos como la superficie en planta alar, y C_L es el coeficiente de sustentación. De este modo, se tiene la [Ecuación 2](#):

$$C_L = \frac{2 \cdot W}{\rho_\infty \cdot U_\infty^2 \cdot S} \quad (2)$$

Sabemos que el coeficiente de resistencia aerodinámica C_D de una aeronave se puede aproximar, si su ángulo de ataque es suficientemente pequeño, por una expresión parabólica como en la [Ecuación 3](#):

$$C_D = C_{D_0} + C_{D_i} = C_{D_0} + \frac{C_L^2}{\pi \cdot \mathcal{R} \cdot e} \quad (3)$$

donde C_{D_0} es el llamado coeficiente de resistencia parásita, C_{D_i} es el coeficiente de resistencia inducida, \mathcal{R} es el alargamiento alar (definido como envergadura al cuadrado dividida entre la superficie en planta alar, b^2/S) y e es el llamado factor de eficiencia de Oswald. Se puede comprobar que este último elemento, el factor de Oswald, depende principalmente de la forma en planta alar y su valor está típicamente entre 0,7 y 1. Introduciendo la [Ecuación 2](#) en [Ecuación 3](#), se tiene la [Ecuación 4](#):

$$C_D = C_{D_0} + \frac{4 \cdot W^2}{\rho_\infty^2 \cdot U_\infty^4 \cdot S^2 \cdot \pi \cdot \mathcal{R} \cdot e} \quad (4)$$

Multiplicando la [Ecuación 4](#) por la presión dinámica y la superficie, obtenemos una expresión para la resistencia aerodinámica en la [Ecuación 5](#):

$$D = \frac{1}{2} \cdot \rho_\infty \cdot S \cdot U_\infty^2 \cdot C_{D_0} + \frac{W^2}{\frac{1}{2} \cdot \rho_\infty \cdot U_\infty^2 \cdot S \cdot \pi \cdot \mathcal{R} \cdot e} \quad (5)$$

donde el primer bloque es igual a la resistencia parásita D_0 ([Ecuación 6](#)) y el segundo bloque es igual a la resistencia inducida D_i ([Ecuación 7](#)):

$$D_0 = \frac{1}{2} \cdot \rho_\infty \cdot S \cdot U_\infty^2 \cdot C_{D_0} \quad (6)$$

$$D_i = \frac{W^2}{\frac{1}{2} \cdot \rho_\infty \cdot U_\infty^2 \cdot S \cdot \pi \cdot \mathcal{R} \cdot e} \quad (7)$$

4.2 Efecto de la velocidad en la resistencia parásita

Por simplicidad, supongamos que la resistencia parásita puede aproximarse de forma apropiada por la analogía de la placa plana, que la capa límite es laminar y que la mayor contribución viene de la superficie alar. El caso general dará resultados similares, y estas simplificaciones facilitan la obtención de tendencias. En este caso, el coeficiente de resistencia parásita se puede estimar calculando el coeficiente de fricción de la placa plana equivalente, C_f . Este último depende del número de Reynolds Re , y se puede obtener de forma analítica para una capa límite laminar en una placa plana bajo ciertas condiciones mediante la ley de fricción de Blasius, tal y como se muestra en la [Ecuación 8](#):

$$C_f = \frac{1,328}{\sqrt{Re}} = \frac{1,328 \cdot \sqrt{\mu_\infty}}{\sqrt{\rho_\infty \cdot U_\infty \cdot CMA}} \quad (8)$$

donde μ_∞ es la viscosidad dinámica del aire aguas arriba en la corriente sin perturbar y CMA es la cuerda media aerodinámica del ala. Así, el coeficiente de resistencia parásita se puede aproximar por la [Ecuación 9](#):

$$C_{D_0} \propto \frac{S_{wet}}{S} \cdot \frac{1,328}{\sqrt{Re}} \simeq 2 \cdot \frac{1,328 \cdot \sqrt{\mu_\infty}}{\sqrt{\rho_\infty \cdot U_\infty \cdot CMA}} \quad (9)$$

Hemos aproximado la superficie mojada S_{wet} por dos veces la superficie en planta alar. Por simplicidad, supondremos que los términos que diferencian C_{D_0} de la expresión final en la [Ecuación 9](#) son muy pequeños. El coeficiente de resistencia aerodinámica parásita cae al aumentar la velocidad de la corriente incidente, aunque lo hace de forma lenta. Con una capa límite turbulenta, de hecho, a partir de cierto punto deja de caer y permanece constante.

Introduciendo la [Ecuación 9](#) en la [Ecuación 6](#), se tiene la [Ecuación 10](#) para una estimación de la resistencia parásita para un ala con capa límite laminar:

$$D_0 \simeq \frac{1}{2} \cdot \rho_\infty \cdot S \cdot U_\infty^2 \cdot 2 \cdot \frac{1,328 \cdot \sqrt{\mu_\infty}}{\sqrt{\rho_\infty \cdot U_\infty \cdot CMA}} = \rho_\infty^{\frac{1}{2}} \cdot S \cdot U_\infty^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{1,328 \cdot \sqrt{\mu_\infty}}{\sqrt{CMA}} \quad (10)$$

La resistencia aerodinámica parásita aumenta al aumentar la velocidad de la corriente incidente. El efecto se puede ver en la [figura 1](#), donde se ha obtenido el valor típico para un ala de 30 m^2 y alargamiento igual a 8 volando en condiciones de capa límite laminar o turbulenta con corriente totalmente adherida a una altitud de 11 km. Es notable cómo la resistencia parásita es mucho mayor en el caso de capa límite turbulenta, con una evolución más cuadrática con la velocidad de la corriente incidente.

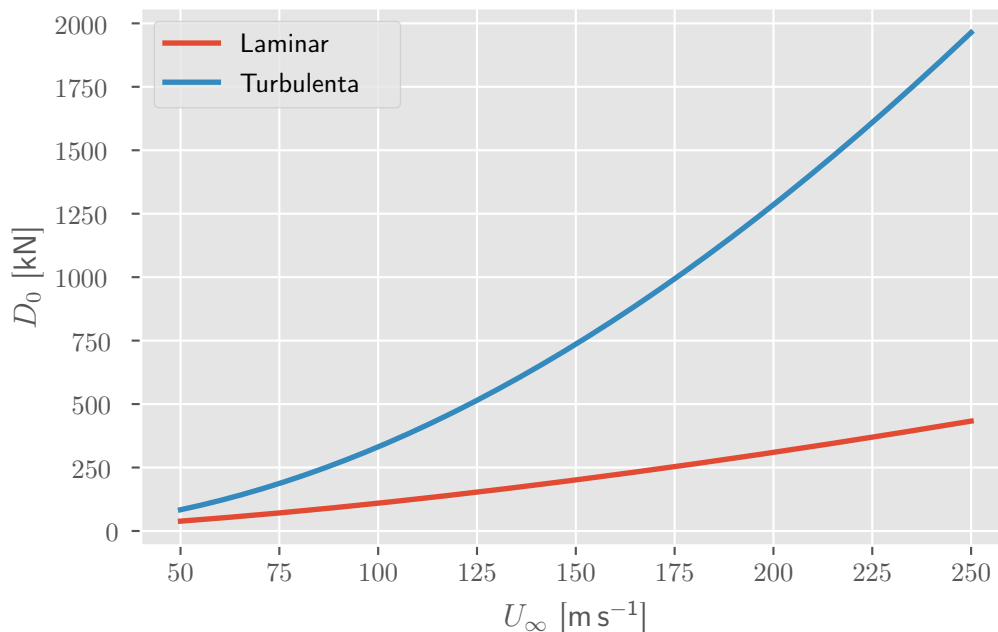


Figura 1: Resistencia aerodinámica parásita de un ala de 30 m^2 , alargamiento igual a 8, capa límite totalmente laminar o totalmente turbulenta, corriente totalmente adherida y volando a distintas velocidades a 11 km de altitud según la Atmósfera Estándar Internacional.

4.3 Efecto de la velocidad en la resistencia inducida

Aquí el efecto es evidente en la [Ecuación 4](#) y [Ecuación 7](#). Ya que la velocidad de la corriente incidente no produce cambios apreciables en el factor de eficiencia de Oswald, tenemos que la resistencia inducida se reduce al aumentar la velocidad de vuelo. En el caso del coeficiente de resistencia inducida, se reduce muy rápidamente al reducir la velocidad de vuelo.

4.4 Velocidad de mínima resistencia aerodinámica

Volvemos a suponer aquí vuelo horizontal equilibrado a velocidad constante. El cálculo puede complicarse al tener que estimar la variación del coeficiente de resistencia parásita con la velocidad: entre otros factores, hay cambios entre capa límite laminar y capa límite turbulenta, la superficie afectada por cada uno de los regímenes de capa límite puede modificarse o se puede llegar al número de Reynolds de corte. Por simplicidad, supondremos que hemos calculado ya una aproximación buena del valor de C_{D_0} para un rango de velocidades en torno a la velocidad de mínima resistencia aerodinámica. En ese caso, podemos derivar la [Ecuación 6](#) respecto de la velocidad e igualar a 0 para calcular sus extremos ([Ecuación 11](#)):

$$\frac{dD}{dU_\infty} = \rho_\infty \cdot S \cdot U_\infty \cdot C_{D_0} - \frac{4 \cdot W^2}{\rho_\infty \cdot U_\infty^3 \cdot S \cdot \pi \cdot \mathcal{R} \cdot e} = 0 \quad (11)$$

No hace falta calcular derivadas segundas para comprobar si se trata de un mínimo o un máximo: ya sabemos que la solución presenta un único extremo y es un mínimo. Despejando la velocidad en la [Ecuación 11](#), se obtiene la expresión de la [Ecuación 12](#) para la velocidad de mínima resistencia:

$$U_\infty = \left(\frac{1}{\pi \cdot \mathcal{R} \cdot e \cdot C_{D_0}} \right)^{\frac{1}{4}} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot W}{\rho_\infty \cdot S}} \quad (12)$$

Es interesante ver que, cuanto mayor sea la altitud de vuelo, más alta es la velocidad de mínima resistencia. Esto también ocurre para el parámetro de carga alar W/S : cuanto más grande es, mayor es la velocidad de mínima resistencia aerodinámica. El efecto del alargamiento, el factor de Oswald o el coeficiente de resistencia parásita es en sentido contrario: al crecer estos parámetros se reduce la velocidad de mínima resistencia. Sin embargo, su efecto es menos notable, al ser términos elevados a un cuarto. Eso es así hasta llegar a velocidades transónicas, por supuesto, donde la aproximación de C_{D_0} más o menos constante deja de ser válida.

4.5 Velocidad de máxima eficiencia aerodinámica

Un concepto relacionado es la velocidad de máxima eficiencia aerodinámica. La eficiencia aerodinámica E se define como la sustentación dividida entre la resistencia ([Ecuación 13](#)):

$$E = \frac{L}{D} = \frac{C_L}{C_D} = \frac{C_L}{C_{D_0} + \frac{C_L^2}{\pi \cdot \mathcal{R} \cdot e}} \quad (13)$$

Parece evidente que resulta interesante volar con una eficiencia aerodinámica elevada, pues se conseguirá tener una baja resistencia para la sustentación necesaria. Obtendremos primero el coeficiente de sustentación que maximiza la eficiencia aerodinámica. Después, sabiendo que el vuelo es horizontal, equilibrado y a velocidad constante igualando la sustentación al peso podremos despejar la velocidad de la corriente incidente ([Ecuación 14](#))

$$\frac{dE}{dC_L} = \frac{1}{C_{D_0} + \frac{C_L^2}{\pi \cdot \mathcal{R} \cdot e}} - \frac{2 \cdot C_L^2}{\left(C_{D_0} + \frac{C_L^2}{\pi \cdot \mathcal{R} \cdot e}\right)^2 \cdot \pi \cdot \mathcal{R} \cdot e} = 0 \quad (14)$$

Despejando el coeficiente de sustentación en la [Ecuación 14](#) se puede obtener una expresión sencilla y compacta para el coeficiente de sustentación que maximiza la eficiencia aerodinámica ([Ecuación 15](#)):

$$C_L = \sqrt{C_{D_0} \cdot \pi \cdot \mathcal{R} \cdot e} \quad (15)$$

Igualando la sustentación al peso y despejando la velocidad, tenemos la [Ecuación 16](#) que nos proporciona la velocidad de máxima eficiencia aerodinámica:

$$W = \frac{1}{2} \cdot \rho_\infty \cdot U_\infty^2 \cdot S \cdot \sqrt{C_{D_0} \cdot \pi \cdot \mathcal{R} \cdot e} \Rightarrow U_\infty = \left(\frac{1}{\pi \cdot \mathcal{R} \cdot e \cdot C_{D_0}}\right)^{\frac{1}{4}} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot W}{\rho_\infty \cdot S}} \quad (16)$$

Evidentemente, la solución de máxima eficiencia de la [Ecuación 16](#) es la misma que la de la [Ecuación 12](#), para mínima resistencia aerodinámica: para una sustentación fija, máxima eficiencia aerodinámica significa mínima resistencia. Nótese que esta máxima eficiencia aerodinámica es la del avión completo, no la de un determinado perfil del ala.

4.6 Velocidad de mínima resistencia para distintas altitudes de vuelo

La altitud de vuelo modifica sustancialmente la velocidad a la que la resistencia es mínima, ya que afecta a la densidad del aire y a su viscosidad dinámica. En la [figura 2](#) se puede ver la resistencia aerodinámica estimada con la [Ecuación 5](#) para una aeronave con una masa de 10 000 kg, un alargamiento $\mathcal{R} = 8$, una superficie alar $S = 30 \text{ m}^2$, un factor de Oswald $e = 0,85$ y un coeficiente de resistencia parásita $C_{D_0} = 0,02$ volando en régimen subsónico a distintas altitudes. Las tendencias de las curvas son similares para un valor de C_{D_0} variable y dependiente del número de Reynolds. Nótese que el valor de la resistencia mínima no presenta variaciones importantes para distintas altitudes de vuelo en el caso de C_{D_0} constante. Los cálculos han sido realizados suponiendo Atmósfera Estándar Internacional.

4.7 Vuelo con viento de cola

La velocidad U_∞ que se ha utilizado hasta ahora es la de la corriente incidente respecto del avión. Si el viento está en calma, U_∞ coincide en valor absoluto con la velocidad del avión respecto a tierra, pero tiene el sentido contrario. En general, U_∞ tendrá la expresión general de la [Ecuación 17](#):

$$U_\infty = U_{\text{wind}} - U_{\text{aircraft}} \quad (17)$$

donde U_∞ es el vector velocidad de la corriente incidente sin perturbar respecto del avión, U_{wind} es el vector velocidad del viento, respecto del suelo y U_{aircraft} es el vector velocidad del avión respecto al suelo. Despejando la velocidad respecto a tierra, la velocidad de la aeronave es la obtenida en la [Ecuación 18](#):

$$U_{\text{aircraft}} = U_{\text{wind}} - U_\infty \quad (18)$$

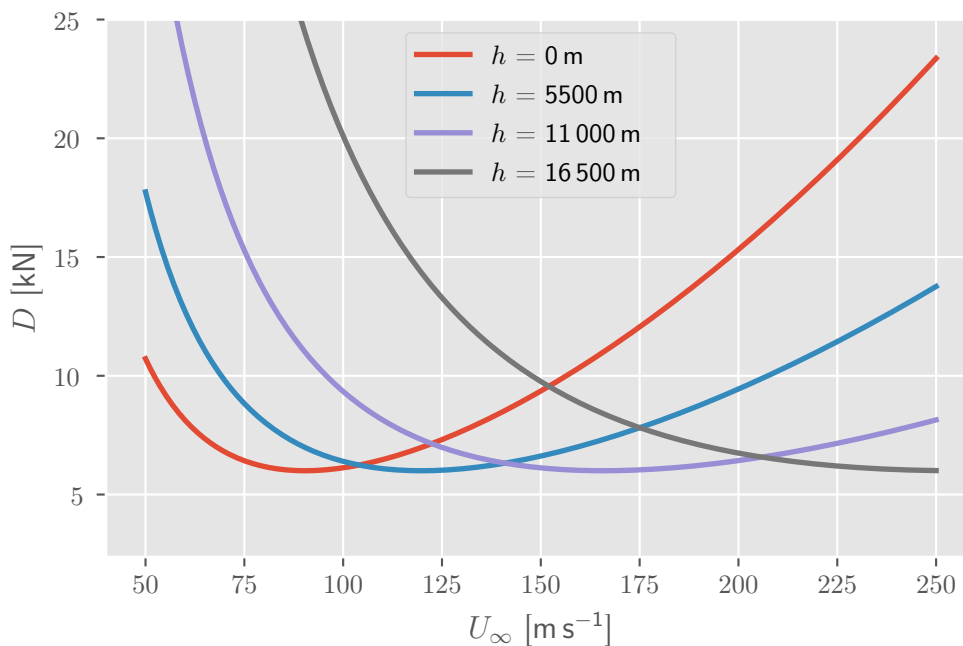


Figura 2: Resistencia aerodinámica de una aeronave volando a distintas velocidades y altitudes en Atmósfera Estándar Internacional.

Si se vuela con una velocidad de la corriente incidente sin perturbar fija igual a U_∞ y el viento se mueve alineado con ésta y en sentido contrario, U_{aircraft} es mayor que si no hay viento. En otras palabras: en vuelo horizontal y equilibrado, volar con viento de cola permite hacerlo a más velocidad respecto a tierra manteniendo la resistencia aerodinámica. Volar con viento de frente, en cambio, reduce la velocidad respecto al suelo para una misma resistencia aerodinámica. Algunos fenómenos meteorológicos, como la corriente en chorro, producen vientos horizontales de alta velocidad que pueden ser aprovechados por las aeronaves para aumentar su velocidad respecto al suelo manteniendo la resistencia aerodinámica y, por tanto, el empuje de sus motores. En aviación comercial, este fenómeno es muy utilizado: el 18 de noviembre de 1952 el Capitán Logan D. Scott voló un Boeing 377 Stratocruiser de la Pan Am desde Tokio hasta Honolulu en 11 horas y 30 minutos gracias a la corriente en chorro a 7600 m de altitud, reduciendo el trayecto en 6 horas y media y evitando un respotaje intermedio en la isla de Wake. Unos meses más tarde, en marzo, y aprovechando el movimiento de la corriente en chorro hacia el sur, el Capitán John H. Kelly voló otro Stratocruiser desde Tokio hasta Honolulu en sólo 9 horas y 18 minutos.

4.8 Aclaraciones sobre la velocidad de vuelo de crucero

Los aviones no tienen por qué volar, en general, a la velocidad de mínima resistencia aerodinámica cuando operan en crucero. La minimización de la resistencia aerodinámica no tiene por qué significar la optimización de la misión. De todas formas, la velocidad de crucero no suele estar muy alejada de la de mínima resistencia. Esta velocidad acaba siendo superior, y produce resistencias aerodinámicas sólo algo más altas que la mínima.

Esta velocidad de mínima resistencia o máxima eficiencia aerodinámica no es la de máxima eficiencia aerodinámica del perfil: en todo momento se ha hecho el desarrollo considerando la aeronave completa.

Por último, la velocidad de mínima resistencia aerodinámica se puede ver modificada durante el vuelo en crucero debido al consumo de combustible: al reducir el peso del avión, también lo

hace la sustentación y, por tanto, el valor obtenido en [Ecuación 12](#). Para mantener la misma velocidad de mínima resistencia es necesario modificar la altitud durante el vuelo.

5 Cierre

En este artículo hemos visto cuál es el efecto de la velocidad de la corriente incidente en la resistencia aerodinámica parásita, en la resistencia inducida y, por tanto, en la resistencia aerodinámica total de una aeronave subsónica. Hemos desarrollado también un método para estimar la velocidad de mínima resistencia aerodinámica, que coincide con la de máxima eficiencia aerodinámica. Hemos podido comprobar también que dicha velocidad aumenta al aumentar la altitud de vuelo de la aeronave, y que es posible aprovechar el viento de cola para poder volar a velocidades mucho mayores respecto al suelo que las que nos podríamos permitir sin aprovechar dicho viento.

Bibliografía

Standard Atmosphere (1975). Standard. International Organization for Standardization.

Pan Am Historical Foundation (s.f.). *Riding the Jetstream*. URL: <https://www.panam.org/golden-age/656-riding-the-jetstream>.