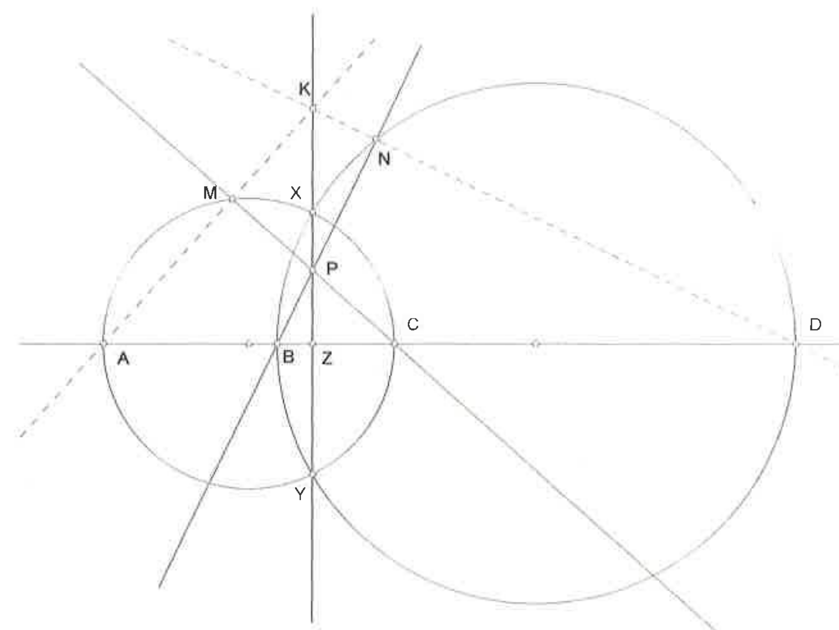
SOCIEDAD «PUIG ADAM» DE PROFESORES DE MATEMATICAS



BOLETIN N.° 48
FEBRERO DE 1998

ESTE BOLETIN SE DISTRIBUYE GRATUITAMENTE ENTRE LOS SOCIOS DE LA SOCIEDAD "PUIG ADAM" DE PROFESORES DE MATEMATICAS.

NO SE VENDE NI SE ADMITEN SUSCRIPCIONES.

La confección de este número ha estado a cargo de Eugenio Roanes

ISSN: 1135-0261

Depósito Legal: M-7762-1995

Gráficas Loureiro, S.L.- San Pedro, 23 bis -28917 Leganés (Madrid).
Teléf.: 611 59 88

La portada de este número reproduce la figura relativa a la "Comprobación de un Problema Olímpico con un Sistema de Geometría Dinámica", contenida en este número 48 de nuestro Boletín.

Toda la correspondencia deberá dirigirse a la sede de nuestra sociedad:

SOCIEDAD «PUIG ADAM» DE PROFESORES DE MATEMATICAS
Facultad de Educación (despacho 3517)
Paseo Juan XXIII, s/n
Ciudad Universitaria
28040 - Madrid
Telf. (91) 394 6248

ÍNDICE

Págs.

(c) $\underline{n=3}$. *Se tiene*

$$V(x_1, x_2, x_3) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \end{bmatrix},$$

de donde

$$L = \begin{bmatrix} 1 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad V = \begin{bmatrix} x_1^2 & x_2^2 \end{bmatrix}, \quad U = [x_3^2],$$

$$K(x_1, x_2) = \left[\frac{x_2^2x_1 - x_1^2x_2 + x_1^2x_3 - x_2^2x_3 + x_3^2x_2 - x_3^2x_1}{x_2 - x_1}\right]$$

$$\Longrightarrow [K(x_1, x_2)]^{-1} = \left[\frac{x_2 - x_1}{x_2^2x_1 - x_1^2x_2 + x_1^2x_3 - x_2^2x_3 + x_3^2x_2 - x_3^2x_1}\right].$$

Aplicando (E):

$$\boxed{[V(x_1, x_2, x_3)]^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{x_2 x_3}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)} & \frac{x_2+x_3}{(x_1-x_2)(x_3-x_1)} & \frac{1}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)} \\ \frac{x_1 x_3}{(x_1-x_2)(x_3-x_2)} & \frac{x_1+x_3}{(x_1-x_2)(x_2-x_3)} & \frac{1}{(x_1-x_2)(x_3-x_2)} \\ \frac{x_1 x_2}{(x_1-x_3)(x_2-x_3)} & \frac{x_1+x_2}{(x_1-x_3)(x_3-x_2)} & \frac{1}{(x_1-x_3)(x_2-x_3)} \end{bmatrix}}$$

En el caso del ejemplo 1.1, para la matriz de Vandermonde:

$$V(1,-1,3) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 9 \end{bmatrix},$$

donde $x_1 = 1, x_2 = -1, x_3 = 3$, *se obtiene:*

$$V(1,-1,3)^{-1} = \begin{bmatrix} 3/4 & 1/2 & -1/4 \\ 3/8 & -1/2 & 1/8 \\ -1/8 & 0 & 1/8 \end{bmatrix}.$$

Bibliografía

[1] T. S. CHIHARA, *An Introduction to Orthogonal Polynomials,* Gordon and Breach, New York, 1978.

[2] E. NAVARRO, E. PONSODA y R. COMPANY, *Algebra*, Servicio de Publicaciones de la Universidad Politécnica de Valencia, Ref: 97-824, 1997.

[3] J. STOER y R. BULIRSCH, *Introduction to Numerical Analysis*, Springer-Verlag, New York, 1980.

ALGUNAS APLICACIONES DE UN TEOREMA DE PEANO

Juan Carlos Cortés López
Departamento de Matemáticas
I.E.S. Bonifacio Sotos. Casas Ibáñez (Albacete)

Abstract

This work concentrates on a result gives by Giuseppe Peano which allows the obtention of the classical theorems about differential calculus by Lagrange and Cauchy. We shall also apply Peano's result in order to obtain a method which will generate new functional inequalities as well as calculate limits.

1 El teorema de Peano

Empezamos recordando un resultado que luego utilizaremos y que nos dice cómo derivar determinantes funcionales.

Lema 1 . *Dadas "n^2" funciones derivables* $\{f_{ij}\}_{1\leq i,j\leq n}$ *en un intervalo abierto* $]a, b[$, *consideremos la función*

$$D :]a, b[\longrightarrow R$$

dada por el determinante

$$D(x) = \begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \dots & f_{1n}(x) \\ f_{21}(x) & f_{22}(x) & \dots & f_{2n}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{n1}(x) & f_{n2}(x) & \dots & f_{nn}(x) \end{vmatrix}$$

entonces la función $D(x)$ *es derivable en* $]a, b[$ *y además su derivada viene dada por*

$$D'(x) = \sum_{k=1}^{n} D_k(x)$$

donde

$$D_k(x) = \begin{vmatrix} f_{11}(x) & \dots & f_{1n}(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ f'_{k1}(x) & \dots & f'_{kn}(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ f_{n1}(x) & \dots & f_{nn}(x) \end{vmatrix}$$

Presentamos ya el teorema de Peano.

Teorema 1 . *Sean f, g y h funciones continuas en $[a,b]$ y derivables en $]a,b[$, entonces existe al menos un punto $c \in]a,b[$, tal que*

$$\begin{vmatrix} f(a) & g(a) & h(a) \\ f(b) & g(b) & h(b) \\ f'(c) & g'(c) & h'(c) \end{vmatrix} = 0$$

Demostración. A partir de las funciones f, g y h definamos la función $P: \ ]a,b[\longrightarrow R$, dada por

$$P(x) = \begin{vmatrix} f(a) & g(a) & h(a) \\ f(b) & g(b) & h(b) \\ f(x) & g(x) & h(x) \end{vmatrix}$$

la cual cumple las hipótesis del teorema de Rolle:

- P es continua en $[a,b]$, por serlo por hipótesis las funciones f, g y h.

- P es derivable en $]a,b[$, por serlo por hipótesis las funciones f, g y h.

- $P(a) = P(b) = 0$, ya que entonces el determinante tiene dos filas iguales.

Luego entonces existe al menos un punto $c \in]a,b[$, tal que

$$P'(c) = \begin{vmatrix} f(a) & g(a) & h(a) \\ f(b) & g(b) & h(b) \\ f'(c) & g'(c) & h'(c) \end{vmatrix} = 0$$

donde para calcular la derivada de P hemos usado el *lema 1* y que el determinante de una matriz con una fila de ceros es nulo.

2 Los teoremas de Lagrange y de Cauchy generalizado

Teorema de Lagrange

Particularizando el teorema de Peano para las funciones $g(x) = x$ y $h(x) = 1$, que obviamente cumplen sus hipótesis, se tiene que existe al menos un $c \in]a,b[$, tal que

$$P'(c) = \begin{vmatrix} f(a) & a & 1 \\ f(b) & b & 1 \\ f'(c) & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

esto es, desarrollando el determinante

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$$

que es teorema del valor medio o de Lagrange.

Teorema de Cauchy

Para deducirlo basta aplicar el teorema de Peano tomando $h(x) = 1$, de lo cual resulta que existe al menos un $c \in]a,b[$, tal que

$$P'(c) = \begin{vmatrix} f(a) & g(a) & 1 \\ f(b) & g(b) & 1 \\ f'(c) & g'(c) & 0 \end{vmatrix} = 0$$

y desarrollando el determinante se tiene

$$f'(c)\,(g(b) - g(a)) = g'(c)\,(f(b) - f(a))$$

que es el teorema de Cauchy generalizado.

3 Generación de nuevas desigualdades funcionales

Es bien sabido que tanto el teorema de Lagrange como el teorema de Cauchy permiten, entre sus múltiples aplicaciones, deducir desigualdades funcionales: el teorema de Lagrange involucrando una función $f(x)$ y el teorema de Cauchy relacionando dos funciones $f(x)$ y $g(x)$. Así, por ejemplo, es sencillo probar usando el teorema del valor medio sobre la función $f(x) = \ln x$ en $[a, b]$ que

$$1 - (a/b) < \ln b/a < (b/a) - 1 \, , \qquad 0 < a < b \, . \qquad (1)$$

y aplicando el teorema de Cauchy a las funciones $f(x) = 2x \arctan x$ y $g(x) = \ln(1 + x^2)$ en $[0, x]$ que

$$2x \arctan x > \ln\left(1 + x^2\right)$$

En este apartado aplicaremos el teorema de Peano para deducir nuevas desigualdades involucrando tres funciones $f(x)$, $g(x)$ y $h(x)$. Como este trabajo no pretende agotar toda la variedad de desigualdades que pueden interesar y deducirse a partir de esta técnica, sino abrir un nuevo método de trabajo, tan sólo mostraremos un ejemplo interesante de aplicación, dejando de esta forma una puerta abierta a una exploración futura.

Ejemplo 1. Consideremos las funciones $f(x) = \sin x$, $g(x) = \cos x$ y $h(x) = x$ en el intervalo $[x, y]$ con $0 < x < y < \pi/2$. Como $f(x)$, $g(x)$ y $h(x)$ cumplen las hipótesis del teorema de Peano, sabemos que existe al menos un z : $0 < x < z < y < \pi/2$, tal que

$$\begin{vmatrix} \sin x & \cos x & x \\ \sin y & \cos y & y \\ \cos z & -\sin z & 1 \end{vmatrix} = 0$$

desarrollando el determinante, para $0 < x < z < y < \pi/2$ se tiene

$$[y \sin x - x \sin y] \sin z + [y \cos x - x \cos y] \cos z = \sin(y - x)$$

ahora teniendo en cuenta que

$$0 < \sin z < 1 \, , \; 0 < \cos z < 1 \text{ para } 0 < z < \pi/2$$

y la conocida desigualdad

$$\frac{\sin x}{x} > \frac{\sin y}{y} \, , \qquad 0 < x < y < \pi/2$$

y que

$$\frac{\cos x}{x} > \frac{\cos y}{y} \, , \qquad 0 < x < y < \pi/2$$

ya que

$$f(x) = \frac{\cos x}{x} \quad \text{es decreciente} \, , \quad 0 < x < \pi/2 \, ,$$

pues

$$f'(x) = \frac{-(x \sin x + \cos x)}{x^2} < 0 \, , \qquad 0 < x < \pi/2$$

obtenemos una cota del seno de la diferencia de dos ángulos

$$0 \leq \sin(y - x) \leq y(\sin x + \cos x) - x(\sin y + \cos y)$$

4 Mejora de desigualdades funcionales y cálculo de límites

En (1) hemos visto que

$$1 - (x/y) < \ln y/x < (y/x) - 1 \, , \qquad 0 < x < y$$

Tomando $x = 10$ e $y = 12$ obtenemos la siguiente acotación del $\ln 1.2$

$$0.1\hat{6} = 1/6 < \ln 1.2 < 1/5 = 0.2$$

A continuación y aplicando el teorema de Peano mejoraremos esta desigualdad. Aún más, daremos un método recurrente para mejorar cada vez más la desigualdad optimizada en el paso anterior. Para ello aplicaremos el resultado de Peano a las funciones $f(x) = \ln x$, $g(x) = \sqrt{x}$ y $h(x) = 1$ en el intervalo $0 < x < y$. Por cumplirse las hipótesis del teorema de Peano sabemos que existe un punto z, con $0 < x < z < y$, tal que

$$\begin{vmatrix} \ln x & \sqrt{x} & 1 \\ \ln y & \sqrt{y} & 1 \\ 1/z & \dfrac{1}{2\sqrt{z}} & 0 \end{vmatrix} = 0$$

desarrollando el determinante,

$$\frac{1}{2\sqrt{z}}(\ln y - \ln x) = \frac{1}{z}\left(\sqrt{y} - \sqrt{x}\right)$$

como $x < z < y$ y la función $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ es decreciente se tiene

$$\frac{2}{\sqrt{y}} < \frac{\ln y - \ln x}{\sqrt{y} - \sqrt{x}} = \frac{2\sqrt{z}}{z} = \frac{2}{\sqrt{z}} < \frac{2}{\sqrt{x}}$$

en consecuencia obtenemos la siguiente cota de $\ln(y/x)$

$$\frac{2(\sqrt{y}-\sqrt{x})}{\sqrt{y}} < \ln\left(\frac{y}{x}\right) < \frac{2(\sqrt{y}-\sqrt{x})}{\sqrt{x}} \tag{2}$$

que aplicada para $x = 10$ e $y = 12$ nos da la siguiente acotación de $\ln 1.2$, que mejora la anteriormente dada

$$0.174258\ldots < \ln 1.2 < 0.190890\ldots$$

siendo el valor exacto $\ln 1.2 = 0.182321\ldots$.

De hecho es fácil ver que (2) efectivamente constituye una mejora de (1), pues

$$1 - \frac{x}{y} < \frac{2(\sqrt{y}-\sqrt{x})}{\sqrt{y}}$$

y

$$\frac{2(\sqrt{y}-\sqrt{x})}{\sqrt{x}} < \frac{y}{x} - 1$$

como es sencillo demostrar, para ello basta probar las desigualdades que resultan de realizar previamente el cambio de variable $t = \frac{y}{x}$, las cuales son inmediatas.

Mejoramos aún más esta desigualdad. Aplicamos el teorema de Peano a las funciones $f(x) = \ln x$, $g(x) = \sqrt[n]{x}$ y $h(x) = 1$ en el intervalo $[x, y]$ con $0 < x < y$ donde se cumplen las hipótesis pertinentes. Por tanto existe z, con $0 < x < z < y$ de modo que

$$\begin{vmatrix} \ln x & \sqrt[n]{x} & 1 \\ \ln y & \sqrt[n]{y} & 1 \\ \frac{1}{z} & \frac{1}{n\sqrt[n]{z^{n-1}}} & 0 \end{vmatrix} = 0$$

operando se llega a que

$$\frac{1}{n\sqrt[n]{z^{n-1}}}[\ln y - \ln x] = \frac{1}{z}\left[\sqrt[n]{y} - \sqrt[n]{x}\right]$$

como $x < z < y$ se tiene

$$\frac{1}{\sqrt[n]{x}} > \frac{1}{\sqrt[n]{z}} > \frac{1}{\sqrt[n]{y}}$$

por tanto

$$\frac{n}{\sqrt[n]{y}} < \frac{\ln y - \ln x}{\sqrt[n]{y} - \sqrt[n]{x}} = \frac{n\sqrt[n]{z^{n-1}}}{z} = \frac{n}{\sqrt[n]{z}} < \frac{n}{\sqrt[n]{x}}$$

o equivalentemente

$$n\,\frac{\sqrt[n]{y} - \sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}} < \ln\frac{y}{x} < n\,\frac{\sqrt[n]{y} - \sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{x}} \tag{3}$$

que mejora la desigualdad (2). De hecho si aplicamos (3) para $n = 5$, $x = 10$ e $y = 12$ obtenemos la siguiente cota de $\ln 1.2$

$$0.179037\ldots < \ln 1.2 < 0.185686\ldots$$

Y la aproximación mejora al aumentar el valor de n.

Además observemos que (3) puede escribirse

$$n\left(1 - \sqrt[n]{\frac{x}{y}}\right) < \ln\frac{y}{x} < n\left(\sqrt[n]{\frac{y}{x}} - 1\right)$$

Así efectuando en esta última desigualdad el cambio de variable $t = \frac{y}{x}$, podemos reescribirla como

$$n\left(1 - \frac{1}{\sqrt[n]{t}}\right) < \ln t < n\left(\sqrt[n]{t} - 1\right)$$

esto es

$$n\left(\frac{\sqrt[n]{t} - 1}{\sqrt[n]{t}}\right) < \ln t < n\left(\sqrt[n]{t} - 1\right)$$

Tomando límites cuando $n \to \infty$, teniendo en cuenta que $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{z} = 1$ y que $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{t} - 1\right)$ existe, se deduce

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{t} - 1\right) = \ln t$$