Resum

Una àrea important de la Matemàtica és l'Anàlisi Matricial ja que molts problemes poden reformular-se en termes de matrius i d'aquesta manera facilitar la seua resolució.

El problema de valor propi invers consisteix en la reconstrucció d'una matriu a partir de dades espectrals donades. Aquest tipus de problemes es presenta a diferents àrees de l'enginyeria i sorgeix a nombroses aplicacions a on els paràmetres d'un sistema físic concret són determinats a partir del coneixement o del comportament dinàmic esperat.

A aquesta tesi es resol el problema de valor propi invers per a tres tipus específics de matrius.

Els problemes de valors propis inversos han estat estudiats des dels punts de vista teòric, numèric com també del de les aplicacions. La llista d'aplicacions és molt variada. Entre les principals s'hi poden esmentar el disseny de control, la identificació de sistemes, l'anàlisi i disseny d'estructures, els estudis geofísics, l'espectroscopia molecular, la teoria de circuits, etc. Algunes d'aquestes aplicacions es descriuran al Capítol 1 d'aquesta tesi.

En diversos casos, per tal de que el problema de valor propi tingui sentit, és necessari imposar algunes condicions addicionals sobre la matriu en qüestió, és a dir, la matriu haurà de tenir una estructura específica. En resum, un problema de valor propi invers adequadament plantejat ha de satisfer dues restriccions: la referida a les dades espectrals i la restricció estructural desitjada.

Donada una matriu X i una matriu diagonal D, es busquen solucions de l'equació $AX = XD$ sent A una matriu amb una determinada estructura i que posseeix un cert espectre predefinit. A partir d'aquestes restriccions sobre la matriu A sorgeixen una varietat de problemes de valors propis inversos.

Per exemple, el problema de valor propi invers per a matrius centresimètriques va ser abordat per F. Zhou, X. Hu i L. Zhang a [49]. Fent servir la descomposió en valors singulars i la inversa de Moore-Penrose, van trobar condicions per tal de que el problema tingués solució. Les matrius centresimètriques tenen aplicacions en teoria de la informació i en teoria de sistemes lineals entre d'altres.

A l'article [38] publicat en 2005, Z. Y. Peng va estudiar el problema de valor propi invers pel cas en que A fos una matriu hermítica i antireflexiva respecte d'una matriu de reflexió generalitzada. Cinc anys més tard, M. Liang i L. Dai van trobar a [32] condicions per les quals el problema de valors propis inversos a esquerra i a dreta per a matrius reflexives i antirreflexives generalitzades té solució, donant també l'expresió general de la solució. El mateix any, L. Lebtahi i N. Thome van resoldre a [28] el problema pel cas d'una matriu A que fos hermítica i reflexiva o antireflexiva respecte d'una matriu J que complix les condicions de ser tripotent i hermítica.

Al Capítol 2 d'aquesta memòria s'estén l'últim treball esmentat pel cas d'una matriu A que sigui hermítica i reflexiva respecte d'una matriu J que és $\{k+1\}$-potent i normal. Al Teorema 2.2.1 es donen les condicions sota les quals el problema té solució i es proporciona la forma explícita de la solució general.

A més, en el cas de que el conjunt de solucions del problema de valor propi invers sigui no buit, es resol el problema de Procrustes associat.

El problema de Procrustes, o de la millor aproximació, associat al problema de valor propi es pot descriure sintèticament de la següent manera: donada una matriu obtenida de manera experimental, el problema consisteix en trobar una matriu del conjunt solució del problema (i, per tant, amb l'estructura desitjada), tal que siga la millor aproximació a la matriu donada fent servir, generalment, la norma de Frobenius.

D'altra banda, les matrius Hamiltonianes i antiHamiltonianes apareixen en la resolució d'importants problemes de la Teoria de Sistemes i Control. Sorgeixen, per exemple, a control òptim quadràtic lineal [34, 42], al càlcul de la norma H_∞ d'un sistema estable [50] i a la resolució de l'equació algebraica de Riccati [27]. El problema de valor propi invers per a matrius hermítiques i Hamiltonianes generalitzades va ser analitzat per Z. Zhang, X. Hu i L. Zang a [48] i posteriorment va ser considerat el cas de matrius hermítiques i antiHamiltonianes generalitzades per Z. Bai. En ambdós casos no només s'estudia el problema de valor propi invers sino que també es va resoldre el problema de trobar la millor aproximació provant prèviament que s'obté solució única.

Una extensió de les matrius Hamiltonianes són les matrius J-Hamiltonianes definides per primera vegada a [14], i correspon a una de les aportacions originals que es realitzen a aquesta memòria. Als Capítols 3 i 4 d'aquesta tesi s'estudien el problema de valor propi invers per a matrius normals J-Hamiltonianes i per a normals J-antiHamiltonianes, respectivament. Per a la resolució del cas de les matrius normals i J-Hamiltonianes es presenten quatre mètodes diferents, analitzant prèviament l'estructura d'aquest tipus de matrius. Els dos primers mètodes són generals, donen condicions per a que el problema tingui solució i, entre les solucions trobades, es consideren les que són normals i J-Hamiltonianes. El tercer mètode queda formalitzat al Teorema 3.2.2 que proporciona les condicions sota les quals el problema té solució i es presenten infinites solucions del mateix, però amb aquest mètode no és possible obtenir-les totes. Finalment, l'últim mètode permet obtenir la forma de totes les solucions. El principal resultat es dona al Teorema 3.2.3. Una secció completa està dedicada a la resolució del problema d'optimització de Procrustes associat en el cas en que el problema admet solució. En aquest cas, el principal resultat es presenta al Teorema 3.3.1.

A continuació es presenta, de forma sintetitzada, l'organització d'aquesta tesi en els seus quatre capítols.

El Capítol 1 conté una introducció al problema de valor propi invers i al problema de Procrustes, i es descriuen alguns problemes estudiats a la literatura. També, s'enumeren algunes definicions, propietats, lemes i teoremes utilitzats al llarg de la memòria.

Al Capítol 2 s'estudia el problema de valor propi invers per a una matriu hermítica i reflexiva respecte d'una matriu normal i $\{k+1\}$-potent, així com també el problema d'optimització de Procrustes associat. A més, es proposa un algoritme que resol el problema de Procrustes i es dona un exemple que mostra el funcionament del mateix.

El problema de valor propi invers per a una matriu normal i J-Hamiltoniana es resol al Capítol 3 fent servir diferents mètodes i a més es considera el problema d'optimització de Procrustes associat. De la mateixa manera que al Capítol 2, es proposa un algoritme que serveix per a calcular la solució del problema d'optimització i es presenten alguns exemples que permeten mostrar el rendiment del mateix.

Finalment, al Capítol 4, en funció dels resultats obtinguts al Capítol 3, s'aborda el problema de valor propi invers per a matrius J-antiHamiltonianes. Seguint la línia dels Capítols 2 i 3, es presenta un algoritme que resol el problema de Procrustes i es proporcionen exemples d'aplicació dels resultats.

Les principals contribucions obtingudes en aquesta tesi van ser publicades a revistes científiques i presentades a congressos. Es poden veure a [13, 14, 15, 16, 17, 18].

Bibliografía

[1] D. Akca. Generalized Procrustes Analysis and its applications in Photogrammetry. Technical report, ETS, Swiss Federal Institute of Technology Zurich, Institute of Geodesy and Photogrammetry, 2003.

[2] Z. Bai. The solvability conditions for the inverse eigenvalue problem of Hermitian and generalized skew-Hamiltonian matrices and its approximation. *Inverse Problems*, 19(5):1185–1194, 2003.

[3] V. Barcilon. On the Multiplicity of Solutions of the Inverse Problem for a Vibrating Beam. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 37(3):605–613, 1979.

[4] A. Ben-Israel y T. Greville. *Generalized Inverses: Theory and Applications.* Springer-Verlag, New York, 2003.

[5] P. Benner, D. Kesner y V. Mehrmann. Skew-Hamiltonian and Hamiltonian Eigenvalue Problems: Theory, Algorithms and Applications. En *Actas del Conference on Applied Mathematics and Scientific Computing*, pages 3–39, Brijuni, Croatia, 2005.

[6] D. Boley y G. H. Golub. A survey of matrix inverse eigenvalue problems. *Inverse Problems*, 3:595–622, 1987.

[7] H. C. Chen. Generalized Reflexive Matrices: Special Properties and Applications. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, 19(1):140–153, 1998.

[8] E. W. Cheney. *Introduction to Approximation Theory.* McGraw-Hill Book Co., New York, USA, 1966.

[9] M. T. Chu y G. H. Golub. Structured inverse eigenvalue problems. *Acta Numerica*, 11:1–70, 2002.

[10] F. Crosilla. *Procrustes Analysis and Geodetic Sciences*, pages 287–292. Springer, Heidelberg, 2003.

[11] D. S. Djordjević. Explicit solution of the operator equation $A^*X + X^*A = B$. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 200:701–704, 2007.

[12] M. G. Eberle y M. C. Maciel. Finding the closest Toeplitz matrix. *Computational & Applied Mathematics*, 22(1):1–18, 2003.

[13] S. Gigola, L. Lebtahi y N. Thome. Un algoritmo de optimización en un problema de valor propio inverso matricial. *IV Congreso Latinoamericano de Matemáticos (IV CLAM 2012), Universidad Nacional de Córdoba, Argentina, 2012.*

[14] S. Gigola, L. Lebtahi y N. Thome. Existencia de la solución del problema del valor propio inverso para matrices J-hamiltonianas. *Matemática Aplicada, Computacional e Industrial*, 4:509–512, 2013.

[15] S. Gigola, L. Lebtahi y N. Thome. Inverse eigenvalue problem for normal J-hamiltonian matrices. *Applied Mathematics Letters*, 48:36–40, 2015.

[16] S. Gigola, L. Lebtahi y N. Thome. Sobre las soluciones del problema del valor propio inverso para matrices J-hamiltonianas. *Matemática Aplicada, Computacional e Industrial*, 5:345–348, 2015.

[17] S. Gigola, L. Lebtahi y N. Thome. The inverse eigenvalue problem for a Hermitian reflexive matrix and the optimization problem. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 291:449–457, 2016.

[18] S. Gigola, L. Lebtahi y N. Thome. Problema del valor propio inverso de Procrustes para matrices normales J-Hamiltonianas. *Encuentro de la Red Temática de Álgebra Lineal, Análisis Matricial y Aplicaciones (ALAMA 2018), se celebrará del 30 de mayo al 1 de junio de 2018 en Sant Joan d'Alacant, España.*

[19] G. M. L. Gladwell. Inverse Problems in Vibration. *Applied Mechanics Reviews*, 39(7):1013–1018, 1986.

[20] G. M. L. Gladwell. *Inverse Problems in Vibration.* Springer Netherlands, United States, 2005.

[21] A. Herrero y N. Thome. Using the GSVD and the lifting tecnique to find $\{P, k+1\}$ reflexive and anti-reflexive solution of $AXB = C$. *Applied Mathematics Letters*, 24:1130–1141, 2011.

[22] X. Ibáñez-Català y M. I. Troparevsky. An Approximated Solution to the Inverse Problem of EEG. En *Actas de la 4th European Conference of the International Federation for Medical and Biological Engineering*, 2009.

[23] K. T. Joseph. Inverse eigenvalue problem in structural design. *AIAA Journal*, 30(12):2890–2896, 1992.

[24] C. G. Khatri y S. K. Mitra. Hermitian and nonnegative definite solutions of linear matrix equations. *SIAM J. Appl. Math.*, 31(4):579–585, 1976.

[25] H. J. Landau. The inverse eigenvalue problem for real symmetric Toeplitz matrices. *Journal of the American Mathematical Society*, 7(3):749–767, 1994.

[26] A .Laub. A Schur method for solving algebraic Riccati equations. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 24(6):913–921, 1979.

[27] A. Laub. *Invariant Subspace Methods for the Numerical Solution of Riccati Equations*, pages 163–196. Springer-Verlag, Berlin, 1991.

[28] L. Lebtahi y N. Thome. The inverse eigenvalue problem for Hermitian reflexive (anti-reflexive) matrices with respect to a tripotent Hermitian matrix. En *Actas del Second ALAMA Meeting*, pages 1–6, Valencia, España, 2010.

[29] L. Lebtahi y N. Thome. El problema del valor propio inverso para cierta clase de matrices. En *Actas del III Congreso de Matemática Aplicada, Computacional e Industrial, MACI 3*, pages 495–498, Bahía Blanca, Argentina, 2011.

[30] B. M. Levitan. *Inverse Sturm Liouville Problems.* VNU Science Press, 1987.

[31] N. Li. A Matrix Inverse Eigenvalue Problem and Its Application. *Linear Algebra and its Applications*, 266:143–152, 1997.

[32] M. L. Liang y L. F. Dai. The left and right inverse eigenvalue problems of generalized reflexive and anti-reflexive matrices. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 234:743–749, 2010.

[33] Z. Liu y H. Faßbender. An inverse eigenvalue problem and an associated approximation problem for generalized K-centrohermitian matrices. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 206(1):578–585, 2007.

[34] V. L. Mehrmann. *The Autonomous Linear Quadratic Control Problem, Theory and Numerical Solution.* Springer-Verlag, Heidelberg, 1991.

[35] C. D. Meyer. *Matrix Analysis and Applied Linear Algebra.* SIAM, New York, 2000.

[36] R. L. Parker. The magnetotelluric inverse problem. *Geophysical Surveys*, 6:5–25, 1983.

[37] R. L. Parker y K. A. Whaler. Numerical methods for establishing solutions to the inverse problem of electromagnetic induction. *Journal of Geophysical Research*, 86(B10):9574–9584, 1981.

[38] Z. Y. Peng. The inverse eigenvalue problem for Hermitian anti-reflexive matrices and its approximation. *Applied Mathematics and Computation*, 162(3):1377–1389, 2005.

[39] C. R. Rao y S. K. Mitra. *Generalized Inverse of Matrices and its Applications*. John Wiley & Sons, New York, 1971.

[40] P. H. Schönemann. A generalized solution of the orthogonal Procrustes problem. *Psychometrika*, 31(1):1–10, 1966.

[41] P.H. Schönemann y R. M. Carroll. Fitting one matrix to another under choice of a central dilation and rigid motion. *Psychometrika*, 35(2):245–255, 1970.

[42] V. Sima. *Algorithms for Linear-Quadratic Optimization*. Marcel Dekker, Inc., New York, 1996.

[43] W. F. Trench. Numerical Solution of the Inverse Eigenvalue Problem for Real Symmetric Toeplitz Matrices. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 18(6):1722–1736, 1997.

[44] W. F. Trench. Inverse eigenproblems and associated approximation problems for matrices with generalized symmetry or skew symmetry. *Linear Algebra and its Applications*, 380:199–211, 2004.

[45] S. J. Wang y S. Y. Chu. An algebraic approach to the inverse eigenvalue problem for a quantum system with a dynamical group. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 27(16):5655–5671, 1994.

[46] Y. Wei y H. Dai. An inverse eigenvalue problem for Jacobi matrix. *Applied Mathematics and Computation*, 251:633–642, 2015.

[47] J. Yang y Y. Deng. Procrustes Problems for General, Triangular, and Symmetric Toeplitz Matrices. *Journal of Applied Mathematics*, Article ID 696019, 2013.

[48] Z. Zhang, X. Hu y L. Zhang. The solvability conditions for the inverse eigenproblem of Hermitian-generalized Hamiltonian matrices. *Inverse Problems*, 18:1369–1376, 2002.

[49] F. Z. Zhou, X. Y. Hu y L. Zhang. The solvability conditions for the inverse eigenvalue problems of centro-symmetric matrices. *Linear Algebra and its Applications*, 364:147–160, 2003.

[50] K. Zhou, J. C. Doyle y K. Glover. *Robust and Optimal Control*. Prentice Hall, Inc., Upper Saddle River, New Jersey, USA, 1996.