Resumen

Un área importante de la Matemática Aplicada es el Análisis Matricial dado que muchos problemas pueden reformularse en términos de matrices y de esta manera facilitar su resolución. El problema de valor propio inverso consiste en la reconstrucción de una matriz a partir de datos espectrales dados. Este tipo de problemas se presenta en diferentes áreas de la ingeniería y surge en numerosas aplicaciones donde los parámetros de un sistema físico concreto son determinados a partir del conocimiento o del comportamiento dinámico esperado. En esta tesis se resuelve el problema de valor propio inverso para tres tipos específicos de matrices.

Los problemas de valores propios inversos han sido estudiados desde los puntos de vista teórico, numérico como también del de las aplicaciones. La lista de aplicaciones es muy variada. Entre las principales se pueden mencionar el diseño de control, la identificación de sistemas, el análisis y diseño de estructuras, los estudios geofísicos, la espectroscopía molecular, la teoría de circuitos, etc. Algunas de estas aplicaciones se describirán en el Capítulo 1 de esta tesis.

En varios casos, para que el problema de valor propio tenga sentido, es necesario imponer algunas condiciones adicionales sobre la matriz en cuestión, es decir, a matriz deberá tener una estructura específica. En resumen, un problema de valor propio inverso adecuadamente planteado debe satisfacer dos restricciones: la referida a los datos espectrales y la restricción estructural deseable.

Dada una matriz X y una matriz diagonal D, se buscan soluciones de la ecuación $AX = XD$ siendo A una matriz con una determinada estructura y que posee un cierto espectro predefinido. A partir de estas restricciones sobre la matriz A surgen una variedad de problemas de valores propios inversos.

Por ejemplo, el problema de valor propio inverso para matrices centrosimétricas fue abordado por F. Zhou, X. Hu y L. Zhang en [49]. Usando la descomposición en valores singulares y la inversa de Moore-Penrose, hallaron condiciones para que el problema tuviese solución. Las matrices centrosimétricas tienen aplicaciones en teoría de la información y en teoría de sistemas lineales entre otras.

En el artículo [38] publicado en 2005, Z. Y. Peng estudió el problema de valor propio inverso para el caso en que A sea una matriz hermítica y antireflexiva con respecto a una matriz de reflexión generalizada. Cinco años más tarde, M. Liang y L. Dai hallaron en [32] condiciones para las cuales el problema de valores propios inversos a izquierda y a derecha para matrices reflexivas y antireflexivas generalizadas, tiene solución, dando también la expresión general de la solución. En el mismo año, L. Lebtahi y N. Thome resolvieron en [28] el problema para el caso de una matriz A que sea hermítica y reflexiva o antireflexiva con respecto a una matriz J que cumple las condiciones de ser tripotente y hermítica.
En el Capítulo 2 de esta memoria se extiende el último trabajo mencionado al caso de una matriz A que sea hermítica y reflexiva con respecto a una matriz J que es $\{k+1\}$-potente y

normal. En el Teorema 2.2.1 se dan las condiciones bajo las cuales el problema tiene solución y se proporciona la forma explícita de la solución general. Además, en el caso de que el conjunto de soluciones del problema de valor propio inverso sea no vacío, se resuelve el problema de Procrustes asociado.

El problema de Procrustes, o de la mejor aproximación, asociado al problema de valor propio se puede describir sintéticamente de la siguiente manera: dada una matriz obtenida de forma experimental, el problema consiste en hallar una matriz del conjunto solución del problema (y, por tanto, con la estructura deseada), tal que sea la mejor aproximación a la matriz dato usando, generalmente, la norma de Frobenius.

Por otra parte, las matrices Hamiltonianas y antiHamiltonianas aparecen en la resolución de importantes problemas de la Teoría de Sistemas y Control. Surgen, por ejemplo, en control óptimo cuadrático lineal [34, 42], en el cálculo de la norma H_∞ de un sistema estable [50] y en la resolución de la ecuación algebraica de Riccati [27]. El problema de valor propio inverso para matrices hermíticas y Hamiltonianas generalizadas fue analizado por Z. Zhang, X. Hu y L. Zang en [48] y posteriormente fue considerado el caso de matrices hermíticas y antiHamiltonianas generalizadas por Z. Bai. En ambos casos no sólo se estudió el problema de valor propio inverso sino que también se resolvió el problema de hallar la mejor aproximación probando previamente que se obtiene solución única.

Una extensión de las matrices Hamiltonianas son las matrices J-Hamiltonianas definidas por primera vez en [14], y corresponde a una de las aportaciones originales que se realizan en esta memoria. En los Capítulos 3 y 4 de esta tesis se estudian el problema de valor propio inverso para matrices normales J-Hamiltonianas y para normales J-antiHamiltonianas, respectivamente. Para la resolución del caso de las matrices normales y J-Hamiltonianas se presentan cuatro métodos diferentes, analizando previamente la estructura de este tipo de matrices. Los dos primeros métodos son generales, dan condiciones para que el problema tenga solución y, entre las soluciones encontradas, se consideran las que son normales y J-Hamiltonianas. El tercer método queda formalizado en el Teorema 3.2.2 que proporciona las condiciones bajo las cuales el problema tiene solución y se presentan infinitas soluciones del mismo, pero con este método no es posible obtenerlas todas. Finalmente, el último método permite obtener la forma de todas las soluciones. El principal resultado se da en el Teorema 3.2.3. Una sección completa está dedicada a la resolución del problema de optimización de Procrustes asociado en el caso en que el problema admite solución. En este caso, el principal resultado se presenta en el Teorema 3.3.1.

A continuación se presenta, de forma sintetizada, la organización de esta tesis en sus cuatro capítulos.

El Capítulo 1 contiene una introducción al problema de valor propio inverso y al problema de Procrustes, y se describen algunos problemas estudiados en la literatura. También, se enumeran algunas definiciones, propiedades, lemas y teoremas utilizados a lo largo de la memoria.

En el Capítulo 2 se estudia el problema de valor propio inverso para una matriz hermítica y reflexiva con respecto a una matriz normal y $\{k + 1\}$-potente, así como también el problema de optimización de Procrustes asociado. Además, se propone un algoritmo que resuelve el problema de Procrustes y se da un ejemplo que muestra el funcionamiento de dicho algoritmo.

El problema de valor propio inverso para una matriz normal y *J*-Hamiltoniana se resuelve en el Capítulo 3 usando distintos métodos y además se considera el problema de optimización de Procrustes asociado. Del mismo modo que en el Capítulo 2, se propone un algoritmo que sirve para calcular la solución del problema de optimización y se presentan algunos ejemplos que permiten mostrar el desempeño del mismo.

Finalmente, en el Capítulo 4, en base a los resultados obtenidos en el Capítulo 3, se aborda el problema de valor propio inverso para matrices *J*-antiHamiltonianas. Siguiendo la línea de los Capítulos 2 y 3, se presenta un algoritmo que resuelve el problema de Procrustes y se ilustra con ejemplos de aplicación de los resultados.

Las principales contribuciones obtenidas en esta tesis fueron publicadas en revistas científicas y presentadas en congresos. Se pueden ver en [13, 14, 15, 16, 17, 18].

Bibliografía

[1] D. Akca. Generalized Procrustes Analysis and its applications in Photogrammetry. Technical report, ETS, Swiss Federal Institute of Technology Zurich, Institute of Geodesy and Photogrammetry, 2003.

[2] Z. Bai. The solvability conditions for the inverse eigenvalue problem of Hermitian and generalized skew-Hamiltonian matrices and its approximation. *Inverse Problems*, 19(5):1185-1194, 2003.

[3] V. Barcilon. On the Multiplicity of Solutions of the Inverse Problem for a Vibrating Beam. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 37(3):605-613, 1979.

[4] A. Ben-Israel y T. Greville. *Generalized Inverses: Theory and Applications*. Springer-Verlag, New York, 2003.

[5] P. Benner, D. Kesner y V. Mehrmann. Skew-Hamiltonian and Hamiltonian Eigenvalue Problems: Theory, Algorithms and Applications. En *Actas del Conference on Applied Mathematics and Scientific Computing*, pages 3-39, Brijuni, Croatia, 2005.

[6] D. Boley y G. H. Golub. A survey of matrix inverse eigenvalue problems. *Inverse Problems*, 3:595-622, 1987.

[7] H. C. Chen. Generalized Reflexive Matrices: Special Properties and Applications. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, 19(1):140-153, 1998.

[8] E. W. Cheney. *Introduction to Approximation Theory*. McGraw-Hill Book Co., New York, USA, 1966.

[9] M. T. Chu y G. H. Golub. *Structured inverse eigenvalue problems*. Acta Numerica, 11:1-70, 2002.

[10] F. Crosilla. Procrustes *Analysis and Geodetic Sciences*, pages 287-292. Springer, Heidelberg, 2003.

[11] D. S. Djordjevi¢. Explicit solution of the operator equation $A^*X+X^*A = B$. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 200:701-704, 2007.

[12] M. G. Eberle y M. C. Maciel. Finding the closest Toeplitz matrix. *Computational & Applied Mathematics*, 22(1):1-18, 2003.

[13] S. Gigola, L. Lebtahi y N. Thome. Un algoritmo de optimización en un problema de valor propio inverso matricial. *IV Congreso Latinoamericano de Matemáticos (IV CLAM 2012), Universidad Nacional de Córdoba, Argentina,* 2012.

[14] S. Gigola, L. Lebtahi y N. Thome. Existencia de la solución del problema del valor propio inverso para matrices *J*-hamiltonianas. *Matemática Aplicada, Computacional e Industrial*, 4:509-512, 2013.

[15] S. Gigola, L. Lebtahi y N. Thome. Inverse eigenvalue problem for normal *J*-hamiltonian matrices. *Applied Mathematics Letters*, 48:36-40, 2015.

[16] S. Gigola, L. Lebtahi y N. Thome. Sobre las soluciones del problema del valor propio inverso para matrices *J*-hamiltonianas. *Matemática Aplicada, Computacional e Industrial*, 5:345-348, 2015.

[17] S. Gigola, L. Lebtahi y N. Thome. The inverse eigenvalue problem for a Hermitian reflexive matrix and the optimization problem. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 291:449-457, 2016.

[18] S. Gigola, L. Lebtahi y N. Thome. Problema del valor propio inverso de Procrustes para matrices normales *J*-Hamiltonianas. *Encuentro de la Red Temática de Álgebra Lineal, Análisis Matricial y Aplicaciones (ALAMA 2018), se celebrará del 30 de mayo al 1 de junio de 2018 en Sant Joan d'Alacant, España.*

[19] G. M. L. Gladwell. Inverse Problems in Vibration. *Applied Mechanics Reviews*, 39(7):1013-1018, 1986.

[20] G. M. L. Gladwell. *Inverse Problems in Vibration*. Springer Netherlands, United States, 2005.

[21] A. Herrero y N. Thome. Using the GSVD and the lifting tecnique to find *{P; k + 1}* reflexive and anti-reflexive solution of *AXB = C*. *Applied Mathematics Letters*, 24:1130-1141, 2011.

[22] X. Ibáñez-Català y M. I. Troparevsky. An Approximated Solution to the Inverse Problem of EEG. En *Actas de la 4th European Conference of the International Federation for Medical and Biological Engineering,* 2009.

[23] K. T. Joseph. Inverse eigenvalue problem in structural design. *AIAA Journal*, 30(12):2890-2896, 1992.

[24] C. G. Khatri y S. K. Mitra. Hermitian and nonnegative definite solutions of linear matrix equations. *SIAM J. Appl. Math*., 31(4):579-585, 1976.

[25] H. J. Landau. The inverse eigenvalue problem for real symmetric Toeplitz matrices. *Journal of the American Mathematical Society*, 7(3):749-767, 1994.

[26] A .Laub. A Schur method for solving algebraic Riccati equations. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 24(6):913-921, 1979.

[27] A. Laub. *Invariant Subspace Methods for the Numerical Solution of Riccati Equations*, pages 163-196. Springer-Verlag, Berlin, 1991.

[28] L. Lebtahi y N. Thome. The inverse eigenvalue problem for Hermitian reflexive (anti-reflexive) matrices with respect to a tripotent Hermitian matrix. En *Actas del Second ALAMA Meeting*, pages 1-6, Valencia, España, 2010.

[29] L. Lebtahi y N. Thome. El problema del valor propio inverso para cierta clase de matrices. En *Actas del III Congreso de Matemática Aplicada, Computacional e Industrial, MACI 3*, pages 495-498, Bahía Blanca, Argentina, 2011.

[30] B. M. Levitan. *Inverse Sturm Liouville Problems*. VNU Science Press, 1987.

[31] N. Li. A Matrix Inverse Eigenvalue Problem and Its Application. *Linear Algebra and its Application*s, 266:143-152, 1997.

[32] M. L. Liang y L. F. Dai. The left and right inverse eigenvalue problems of generalized reflexive and anti-reflexive matrices. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 234:743-49, 2010.

[33] Z. Liu y H. Fassbender. An inverse eigenvalue problem and an associated approximation problem for generalized K-centrohermitian matrices. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 206(1):578-585, 2007.

[34] V. L. Mehrmann. *The Autonomous Linear Quadratic Control Problem, Theory and Numerical Solution*. Springer-Verlag, Heidelberg, 1991.

[35] C. D. Meyer. *Matrix Analysis and Applied Linear Algebra*. SIAM, New York, 2000.

[36] R. L. Parker. The magnetotelluric inverse problem. *Geophysical Surveys*, 6:5-25, 1983.

[37] R. L. Parker y K. A. Whaler. Numerical methods for establishing solutions to the inverse problem of electromagnetic induction. *Journal of Geophysical Research*, 86(B10):9574-9584, 1981.

[38] Z. Y. Peng. The inverse eigenvalue problem for Hermitian anti-reflexive matrices and its approximation. *Applied Mathematics and Computation*, 162(3):1377-1389, 2005.

[39] C. R. Rao y S. K. Mitra. *Generalized Inverse of Matrices and its Applications*. John Wiley & Sons, New York, 1971.

[40] P. H. Schönemann. A generalized solution of the orthogonal Procrustes problem. *Psychometrika*, 31(1):1-10, 1966.

[41] P.H. Schönemann y R. M. Carroll. Fitting one matrix to another under choice of a central dilation and rigid motion. *Psychometrika*, 35(2):245-255, 1970.

[42] V. Sima. *Algorithms for Linear-Quadratic Optimization*. Marcel Dekker, Inc., New York, 1996.

[43] W. F. Trench. Numerical Solution of the Inverse Eigenvalue Problem for Real Symmetric Toeplitz Matrices. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 18(6):1722-1736, 1997.

[44] W. F. Trench. Inverse eigenproblems and associated approximation problems for matrices with generalized symmetry or skew symmetry. *Linear Algebra and its Applications*, 380:199-211, 2004.

[45] S. J. Wang y S. Y. Chu. An algebraic approach to the inverse eigenvalue problem for a quantum system with a dynamical group. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 27(16):5655-5671, 1994.

[46] Y.Wei y H. Dai. An inverse eigenvalue problem for Jacobi matrix. *Applied Mathematics and Computation*, 251:633-642, 2015.

[47] J. Yang y Y. Deng. Procrustes Problems for General, Triangular, and Symmetric Toeplitz Matrices. *Journal of Applied Mathematics*, Article ID 696019, 2013.

[48] Z. Zhang, X. Hu y L. Zhang. The solvability conditions for the inverse eigenproblem of Hermitian-generalized Hamiltonian matrices. *Inverse Problems*, 18:1369-1376, 2002.

[49] F. Z. Zhou, X. Y. Hu y L. Zhang. The solvability conditions for the inverse eigenvalue problems of centro-symmetric matrices. *Linear Algebra and its Applications*, 364:147-160, 2003.

[50] K. Zhou, J. C. Doyle y K. Glover. *Robust and Optimal Control*. Prentice Hall, Inc., Upper Saddle River, New Jersey, USA, 1996.