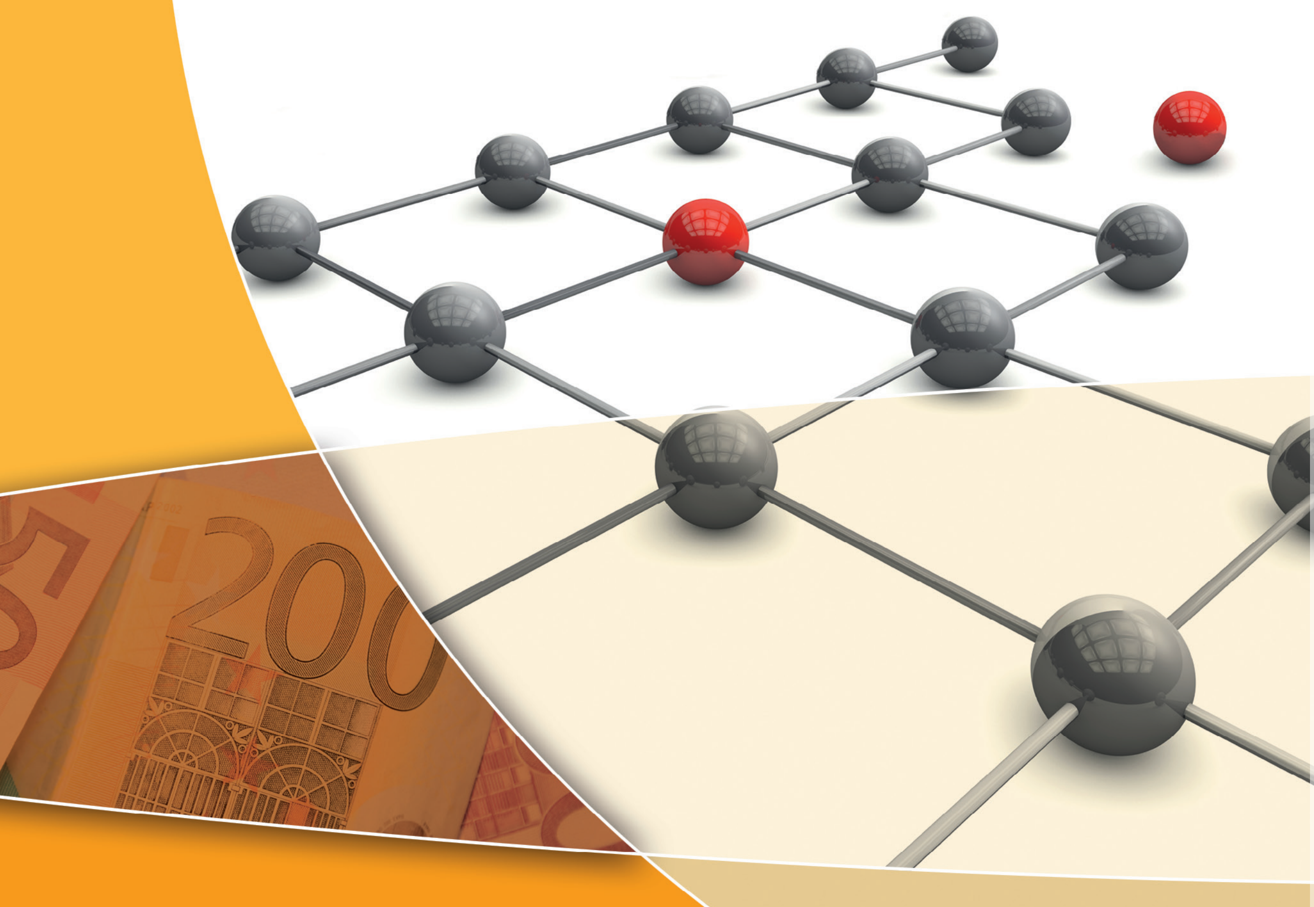
acadèmica

Problemas resueltos de modelos estáticos y optimización aplicados a la administración y dirección de empresas

Clara Burgos Simón | José Sergio Camp Mora | Llúcia Monreal Mengual | Ana Navarro Quiles | Cristina Santamaría Navarro | Rafael Jacinto Villanueva Micó (coord.)



EDITORIAL
UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA

Clara Burgos Simón
José Sergio Camp Mora
Llúcia Monreal Mengual
Ana Navarro Quiles
Cristina Santamaría Navarro
Rafael Jacinto Villanueva Micó (coord.)

Problemas resueltos de modelos estáticos y optimización aplicados a la administración y dirección de empresas

EDITORIAL
UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA

Colección *Académica*

Para referenciar esta publicación utilice la siguiente cita: Burgos Simón, C., Camp Mora, J. S., Monreal Mengual, Ll., Navarro Quiles, A., Santamaría Navarro, C. y Villanueva Micó, R. J. (coord.) (2018). *Problemas resueltos de modelos estáticos y optimización aplicados a la administración y dirección de empresas*. Valencia: Editorial Universitat Politècnica de València

distribución: www.lalibreria.upv.es / Ref.: 0778_04_01_01

Imprime: Byprint Percom, sl

ISBN: 978-84-9048-724-2
Impreso bajo demanda

Impreso en España

Resumen

Este texto compila una serie de ejercicios matemáticos de modelización matemática en la administración y dirección de empresas. De esta forma, se introduce al lector en el estudio de forma matemática de ciertos modelos económicos que juegan un papel fundamental en áreas como las Finanzas, la Microeconomía y la Macroeconomía entre otras. Así, hemos optado por clasificar los modelos en diferentes capítulos dependiendo del tipo de problema. Además en cada uno de los problemas desarrollados se ha indicado brevemente su resolución haciendo uso del software *Mathematica*®, para así dotar al lector de los conocimientos computacionales básicos que le permitan resolver el ejercicio utilizando este paquete de cálculo simbólico. Así en cada capítulo se muestran las ideas relevantes que permiten comprender los diferentes problemas de índole económica desde un punto de vista tanto matemático como pedagógico.

En el Capítulo 1 se estudian algunos tipos de modelos estáticos. Primeramente el modelo lineal estático de mercado de un bien, modelo fundamental en Microeconomía. A continuación varios ejemplos de modelos de renta nacional de gran utilidad en Macroeconomía, entre los que se encuentran el modelo simplificado de renta nacional como el modelo IS-LM (Investment - Saving - Liquidity - Money). Asimismo, encontramos ejercicios relativos al modelo input-output de Leontief.

El Capítulo 2 se centra en la resolución de varios problemas de diagonalización de matrices, de gran importancia en la resolución de modelos dinámicos basados en sistemas de ecuaciones lineales, como pueden ser los modelos de competencia donde los clientes van cambiando de proveedor o los llamados

modelos de Markov, representados mediante una matriz de transición entre ciertos estados establecidos. Asimismo, el cálculo de valores propios será útil en el Capítulo 3 para la clasificación de puntos críticos en problemas de optimización de varias variables.

Finalmente en el Capítulo 3, mostramos diversos problemas de optimización tanto de una como de varias variables. Cada uno de estos problemas viene contextualizado en una aplicación económica concreta. Particularmente, se estudiarán varias cuestiones de maximización de ingresos y beneficios, así como la aplicación del concepto de coste de oportunidad en la toma de decisiones óptimas.

Índice general

Capítulo 1

Modelos estáticos

1.1 Interpretación económica y geométrica del equilibrio en un modelo lineal de mercado de un bien

Sea el modelo lineal de mercado de un bien dado por

$$\left.\begin{array}{rcl} Q_D & = & \alpha - \beta P \\ Q_S & = & -\gamma + \delta P \\ Q_D & = & Q_S \end{array}\right\}$$

donde Q_D representa la cantidad demandada por el consumidor del bien, Q_S representa la cantidad producida/ofrecida por el productor del bien y P representa el precio del bien. Consideremos el mercado en el que $\alpha = 10$, $\beta = 2$, $\gamma = 4$ y $\delta = 4$. Para estos valores resuelve los siguientes apartados.

Apartado (a)

Calcula el precio y la producción de equilibrio.

Solución

Sustituimos los valores de los parámetros dados y tenemos el modelo de mercado de un bien siguiente

$$\left.\begin{array}{rcl} Q_D & = & 10-2P, \\ Q_S & = & -4+4P, \\ Q_D & = & Q_S. \end{array}\right\}$$

A partir de la condición de equilibrio del modelo, tercera ecuación, obtenemos

$$Q_S = Q_D \Rightarrow 10-2P = -4+4P \Rightarrow 10+4 = 4P+2P \Rightarrow 6P = 14 \Rightarrow P_{\mathrm{e}} = \frac{7}{3}$$

y por tanto el precio de equilibrio está en $P_{\mathrm{e}} = \frac{7}{3}$ unidades monetarias (u.m.). Sustituyendo en la ecuación de la demanda, por ejemplo, obtenemos la cantidad producida/vendida de equilibrio

$$Q_{\mathrm{e}} = Q_D(P_{\mathrm{e}}) = 10 - 2\frac{7}{3} = \frac{16}{3}.$$

Como $P_{\mathrm{e}} > 0$ y $Q_{\mathrm{e}} > 0$ la solución de equilibrio tiene sentido económico.

Mathematica®

```
s = Solve[{Q == 10 - 2 P, Q == - 4 + 4 P}, {P, Q}]
```

$$\left\{\left\{P \to \frac{7}{3}, Q \to \frac{16}{3}\right\}\right\}$$

Apartado (b)

Representa gráficamente las funciones Q_S y Q_D en la misma gráfica. ¿Hay intersección? Si la hay, interprétala económicamente. Interpreta además el significado de la intersección de ambas rectas con el eje de abscisas (eje-x).

Solución

Para realizar el gráfico utilizamos: los puntos $(1, 0)$ y $(0, -4)$ pertenecientes a la recta de la oferta para trazar dicha recta y los puntos $(5, 0)$ y $(0, 10)$ en el caso de la demanda obteniendo la Figura 1.1

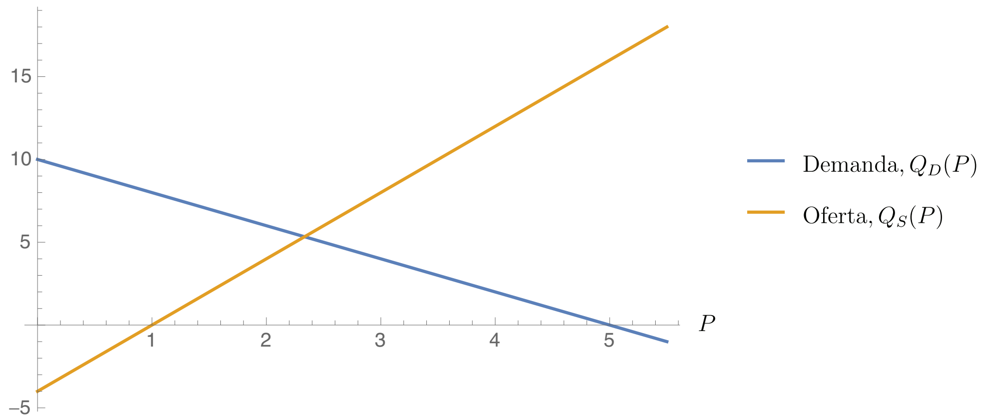


Figura 1.1: Funciones de demanda y oferta, $Q_D(P)$ y $Q_S(P)$ respectivamente.

Como puede verse en la Figura 1.1 ambas rectas se cruzan en el punto de equilibrio $(P_e, Q_e) = (\frac{7}{3}, \frac{16}{3})$ calculado anteriormente. Este punto recoge el precio del producto en el mercado para el que la oferta y demanda son iguales, esto es, el mercado se vacía. Observamos además que la curva de oferta cruza al eje de abscisas en el precio $P = 1$ u.m. Este es el precio que marca el productor como el precio mínimo a partir del cual existirá oferta. En el caso de la curva de demanda cruza al eje de abscisas en el precio $P = 5$ u.m. Este precio es el máximo admisible por el comprador, a partir de este precio no habrá demanda.

Mathematica®

```
Plot[{10 - 2 P, - 4 + 4 P}, {P, 0, 5.5}, AxesOrigin → {0, 0},
PlotLegends → {"Demanda, Q_D(P)", "Oferta, Q_S(P)"},
AxesLabel → {"P", " "}]
```

1.2 Modelo lineal de mercado de un bien: equilibrio y análisis estático-comparativo

Considera el modelo lineal de mercado con un bien

$$\left.\begin{array}{rcl} Q_D & = & \alpha - \beta P, \\ Q_S & = & -\gamma + \delta P, \\ Q_D & = & Q_S, \end{array}\right\} \tag{1.1}$$

donde Q_D es la demanda, Q_S es la oferta y P es el precio del producto. Considera que los parámetros del modelo (1.1) toman los valores $\alpha = 10$, $\beta = 2$ y $\gamma = 4$.

Apartado (a)

Calcula el punto de equilibrio, es decir el precio y la producción de equilibrio, P_{e} y Q_{e} respectivamente, teniendo en cuenta que dependerá de δ.

Solución

El primer paso es sustituir los valores correspondientes de los parámetros en el modelo (1.1), obteniendo así el modelo

$$\left.\begin{array}{rcl} Q_D & = & 10 - 2P, \\ Q_S & = & -4 + \delta P, \\ Q_D & = & Q_S. \end{array}\right\} \tag{1.2}$$

El precio de equilibrio P_{e} se obtiene a partir de la condición de equilibrio del modelo (1.2), esto es cuando las funciones de oferta y demanda coinciden. Teniendo en cuenta la tercera ecuación dada en (1.2) obtenemos

$$Q_S = Q_D \;\Rightarrow\; 10 - 2P = -4 + \delta P \;\Rightarrow\; P_{\mathrm{e}} = \frac{14}{\delta + 2}.$$

Destacar que la solución se ha podido obtener dado que $\delta > 0$ y por lo tanto $\delta + 2 > 0$. Además dado que $14 > 0$ y $\delta + 2 > 0$, entonces $P_{\mathrm{e}} > 0$ y el resultado tiene sentido económico.

Ahora obtenemos la producción de equilibrio sustituyendo el valor del precio en la función de demanda (o de oferta)

$$Q_{\mathrm{e}} = Q_D(P_{\mathrm{e}}) = 10 - 2\frac{14}{2 + \delta} = \frac{10\delta - 8}{\delta + 2}.$$

La producción de equilibrio Q_{e} tiene sentido económico si $Q_{\mathrm{e}} \geq 0$, y, teniendo en cuenta que $\delta + 2 > 0$, ocurrirá si $10\delta - 8 \geq 0$, esto es, si $\delta \geq 8/10 = 4/5$.

Mathematica®

```
eq = {Q == α - β P, Q == - γ + δ P};

re = {α → 10, β → 2, γ → 4};

s = Solve[eq, {P, Q}] /. re
```

$$\left\{P \to \frac{14}{2 + \delta},\; Q \to -\frac{8 - 10\delta}{2 + \delta}\right\}$$

Apartado (b)

Realiza un análisis comparativo del precio de equilibrio, P_{e}, con respecto al parámetro δ.

Solución

Para realizar dicho estudio tenemos que hallar la derivada de P_{e} con respecto a δ

$$P_{\mathrm{e}}'(\delta) = \frac{-14}{(\delta + 2)^2}.$$

Para seguir leyendo haga click aquí