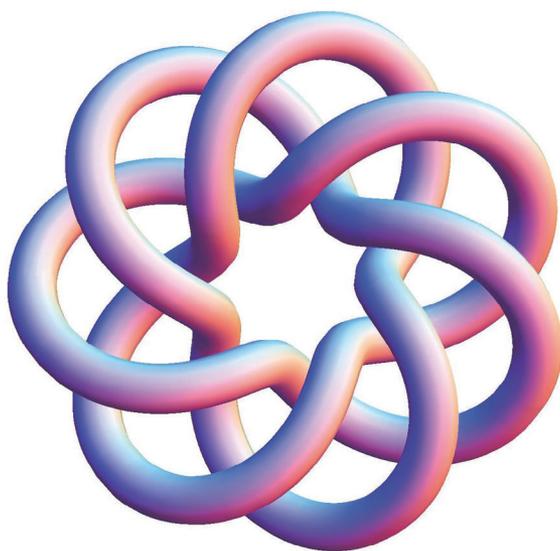


a
acadèmica

Cálculo y Álgebra con Mathematica 11

José Antonio Morano Fernández
Luis Manuel Sánchez Ruiz



$$2 \times \pi R \times R \frac{\sqrt{\pi R^2}}{\pi R^2}$$
$$+ \pi R^2$$
$$= \sqrt[3]{\frac{100}{3,14}} = 3,17$$
$$(a+b)x + (4a)^3$$

EDITORIAL
UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA

José Antonio Morano Fernández
Luis Manuel Sánchez Ruiz

**Cálculo y Álgebra
con
Mathematica 11**

EDITORIAL
UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA

Colección Académica

Para referenciar esta publicación utilice la siguiente cita: Moraño-Fernández, J. A. y Sánchez-Ruiz, L.M. (2018). *Cálculo y Álgebra con Mathematica 11*. Valencia: Universitat Politècnica de València

© José Antonio Moraño-Fernández
Luis Manuel Sánchez-Ruiz

© 2018, Editorial Universitat Politècnica de València
distribución: www.lalibreria.upv.es / Ref.: 0801_04_01_01

Imprime: Byprint Percom, sl

ISBN: 978-84-9048-737-2
Impreso bajo demanda

La Editorial UPV autoriza la reproducción, traducción y difusión parcial de la presente publicación con fines científicos, educativos y de investigación que no sean comerciales ni de lucro, siempre que se identifique y se reconozca debidamente a la Editorial UPV, la publicación y los autores. La autorización para reproducir, difundir o traducir el presente estudio, o compilar o crear obras derivadas del mismo en cualquier forma, con fines comerciales/lucrativos o sin ánimo de lucro, deberá solicitarse por escrito al correo edicion@editorial.upv.es.

Impreso en España

Índice General

| | | |
|----------|---|-----------|
| 1 | Introducción al programa | 1 |
| 1.1 | Inicio y entorno | 1 |
| 1.2 | La barra de menús | 5 |
| 1.3 | Primeros cálculos | 7 |
| 1.3.1 | Operaciones algebraicas | 7 |
| 1.3.2 | Paréntesis, corchetes, llaves y comentarios | 7 |
| 1.3.3 | Números, simplificaciones y aproximaciones | 8 |
| 1.3.4 | Factoriales y números combinatorios | 10 |
| 1.3.5 | Uso de Outputs y expresiones anteriores | 11 |
| 1.4 | Operaciones lógicas | 11 |
| 1.5 | Guardar, recuperar o imprimir ficheros | 12 |
| 1.6 | Ejercicios propuestos | 13 |
| 2 | Variables y listas | 15 |
| 2.1 | Variables | 15 |
| 2.1.1 | Asignación y liberación de valores | 15 |
| 2.1.2 | Sustitución de variables | 17 |
| 2.2 | Listas con Mathematica | 18 |
| 2.3 | Manipulación interactiva | 20 |
| 2.4 | Ejercicios propuestos | 21 |

| | | |
|----------|---|-----------|
| 3 | Funciones de una variable | 23 |
| 3.1 | Definición y evaluación | 23 |
| 3.2 | Funciones elementales | 24 |
| 3.2.1 | Polinomios | 24 |
| 3.2.2 | Expresiones racionales | 26 |
| 3.2.3 | Funciones logarítmicas y exponenciales | 27 |
| 3.2.4 | Funciones trigonométricas y sus inversas | 28 |
| 3.2.5 | Funciones hiperbólicas y sus inversas | 29 |
| 3.2.6 | Valor absoluto y función signo | 29 |
| 3.2.7 | Algunas funciones especiales | 30 |
| 3.3 | Límites | 30 |
| 3.3.1 | Cálculo de límites | 30 |
| 3.3.2 | Límites infinitos | 31 |
| 3.4 | Derivadas | 32 |
| 3.5 | Integración | 33 |
| 3.5.1 | Cálculo de primitivas | 33 |
| 3.5.2 | Cálculo de integrales definidas | 34 |
| 3.6 | Ejercicios propuestos | 35 |
| 4 | Números complejos | 37 |
| 4.1 | Operaciones y comandos básicos | 37 |
| 4.2 | Raíces de un número complejo | 39 |
| 4.2.1 | Cálculo | 39 |
| 4.2.2 | Aplicación a la construcción de polígonos | 41 |
| 4.3 | Punto fijo de una lista y precisión | 42 |
| 4.4 | Determinaciones del argumento | 44 |
| 4.5 | Logaritmos complejos | 45 |
| 4.6 | Ejercicios propuestos | 46 |

| | | |
|----------|---|-----------|
| 5 | Gráficas 2D | 47 |
| 5.1 | Curvas en forma cartesiana | 47 |
| 5.1.1 | Función dada en forma explícita | 47 |
| 5.1.2 | Representación de varias funciones y leyendas | 51 |
| 5.1.3 | Funciones definidas a trozos | 52 |
| 5.1.4 | Curvas en forma implícita | 55 |
| 5.2 | Regiones planas | 56 |
| 5.3 | Curvas en coordenadas paramétricas | 57 |
| 5.4 | Curvas en coordenadas polares | 58 |
| 5.5 | Gráficas de objetos geométricos | 61 |
| 5.6 | Representaciones conjuntas | 63 |
| 5.7 | Animación y manipulación gráfica | 65 |
| 5.8 | Ejercicios propuestos | 66 |
| 6 | Métodos numéricos | 69 |
| 6.1 | Resolución de ecuaciones y sistemas | 69 |
| 6.1.1 | Método general | 69 |
| 6.1.2 | Ecuaciones y sistemas no algebraicos | 71 |
| 6.1.3 | Resolución gráfica | 75 |
| 6.2 | Cálculos iterativos | 77 |
| 6.3 | Método de Newton-Raphson | 78 |
| 6.4 | Polinomio de interpolación y error | 80 |
| 6.5 | Ejercicios propuestos | 82 |
| 7 | Matrices y sistemas lineales | 85 |
| 7.1 | Matrices y vectores | 85 |
| 7.2 | Generación de matrices | 86 |
| 7.3 | Operaciones con matrices y vectores | 87 |

| | | |
|-----------|--|------------|
| 7.4 | Elementos y bloques | 92 |
| 7.5 | Sistemas de ecuaciones lineales | 94 |
| 7.6 | Ejercicios propuestos | 97 |
| 8 | Espacios vectoriales y euclídeos | 99 |
| 8.1 | Dependencia e independencia lineal | 99 |
| 8.2 | Cambios de coordenadas | 101 |
| 8.3 | Intersección y suma de subespacios | 103 |
| 8.4 | Distancias, ángulos y ortogonalización | 105 |
| 8.5 | Proyecciones ortogonales | 106 |
| 8.5.1 | Proyecciones sobre vectores | 106 |
| 8.5.2 | Proyecciones sobre subespacios | 107 |
| 8.6 | Aplicaciones | 108 |
| 8.6.1 | Resolución mínimo-cuadrática de sistemas | 108 |
| 8.6.2 | Ajustes de curvas | 109 |
| 8.7 | Ejercicios propuestos | 112 |
| 9 | Aplicaciones lineales y diagonalización | 115 |
| 9.1 | Matriz asociada | 115 |
| 9.2 | Núcleo e imagen de una aplicación lineal | 117 |
| 9.3 | Valores y vectores propios | 118 |
| 9.4 | Diagonalización | 120 |
| 9.5 | Ejercicios propuestos | 122 |
| 10 | Funciones y gráficas 3D | 123 |
| 10.1 | Introducción | 123 |
| 10.2 | Gráficas en 3D | 124 |
| 10.2.1 | Forma explícita | 124 |
| 10.2.2 | Forma implícita | 125 |

| | | |
|-----------|--|------------|
| 10.2.3 | Opciones del gráfico | 126 |
| 10.2.4 | Representación de varios elementos | 128 |
| 10.3 | Regiones tridimensionales | 129 |
| 10.4 | Gráficas 3D en coordenadas paramétricas | 130 |
| 10.4.1 | Curvas tridimensionales | 130 |
| 10.4.2 | Superficies en coordenadas paramétricas | 131 |
| 10.5 | Objetos en 3D | 132 |
| 10.6 | Giros, zoom, animaciones y manipulación | 134 |
| 10.7 | Ejercicios propuestos | 135 |
| 11 | Funciones de varias variables | 137 |
| 11.1 | Derivadas parciales | 137 |
| 11.2 | Gradiente | 138 |
| 11.3 | Derivada direccional | 139 |
| 11.4 | Jacobianos | 139 |
| 11.5 | Diferencial y derivada de la función compuesta | 140 |
| 11.6 | Funciones implícitas | 141 |
| 11.6.1 | Funciones definidas por una ecuación | 141 |
| 11.6.2 | Funciones definidas por un sistema | 144 |
| 11.7 | Aplicación: Extremos libres | 145 |
| 11.8 | Máximos y mínimos condicionados | 147 |
| 11.9 | Ejercicios propuestos | 148 |
| 12 | Integración con una variable | 151 |
| 12.1 | Integral definida | 151 |
| 12.2 | Aplicación: Cálculo de áreas planas | 151 |
| 12.3 | Integral aproximada | 153 |
| 12.4 | Integrales impropias | 155 |

| | | |
|-----------|--|------------|
| 12.5 | Las funciones Gamma y Beta | 158 |
| 12.6 | Ejercicios propuestos | 160 |
| 13 | Integrales curvilíneas | 163 |
| 13.1 | Integral curvilínea de primera especie | 163 |
| 13.1.1 | Cálculo | 163 |
| 13.1.2 | Aplicaciones: Masas y longitudes de cables. Áreas de superficies cilíndricas | 165 |
| 13.2 | Integral curvilínea de segunda especie | 166 |
| 13.2.1 | Cálculo | 166 |
| 13.2.2 | Aplicaciones: Trabajos y teoría del potencial | 167 |
| 13.3 | Ejercicios propuestos | 170 |
| 14 | Integrales dobles | 173 |
| 14.1 | Cálculo de integrales dobles | 173 |
| 14.2 | Aplicaciones de la integral doble | 175 |
| 14.2.1 | Masas y áreas de placas planas | 175 |
| 14.2.2 | Volúmenes de sólidos | 176 |
| 14.3 | Integrales de superficie | 177 |
| 14.3.1 | Cálculo | 177 |
| 14.3.2 | Aplicaciones: Masas y áreas de placas alabeadas | 179 |
| 14.3.3 | Cálculo del flujo de un campo | 180 |
| 14.4 | Ejercicios propuestos | 182 |
| 15 | Integrales triples | 185 |
| 15.1 | Cálculo de integrales triples | 185 |
| 15.2 | Aplicaciones: Masas y volúmenes de sólidos | 186 |
| 15.3 | Ejercicios propuestos | 188 |

| | |
|---|------------|
| 16 Series | 189 |
| 16.1 Sumas y productos | 189 |
| 16.2 Series numéricas | 191 |
| 16.3 Series de potencias | 192 |
| 16.3.1 Campo de convergencia | 192 |
| 16.3.2 Desarrollos en series de potencias | 193 |
| 16.4 Series de Fourier | 195 |
| 16.5 Ejercicios propuestos | 198 |
| | |
| 17 Ecuaciones diferenciales | 201 |
| 17.1 Ecuaciones diferenciales ordinarias | 201 |
| 17.2 Problemas de valor inicial y de contorno | 203 |
| 17.3 Sistemas de ecuaciones diferenciales | 204 |
| 17.4 Métodos numéricos | 206 |
| 17.5 Ejercicios propuestos | 207 |

Prólogo

Mathematica es un software de apoyo a la resolución de problemas matemáticos en general, tanto desde el punto de vista simbólico, como numérico. En este libro presentamos la **versión 11**.

El programa en esta versión dispone de una potente herramienta para la construcción de gráficos matemáticos en dos y en tres dimensiones, que facilita la realización de brillantes presentaciones e ilustraciones. Además tiene un completo lenguaje de programación, que permite al usuario implementar sus propios proyectos en lenguaje informático, y ejecutarlos en el entorno global.

En este texto presentamos algunas de las utilidades de este programa que ayudan a cubrir las necesidades computacionales básicas de cálculo y álgebra y algunas de sus aplicaciones en carreras de ciencias e ingeniería. El enfoque es eminentemente práctico y la exposición se hace sobre ejemplos concretos o explicando los comandos a utilizar, pidiendo que se aplique en ejercicios.

El esfuerzo que se dedique a conocer este programa se verá prontamente recompensado con un ahorro significativo en el tiempo empleado en la resolución de ejercicios, con la potencia de resolución del programa y su gran capacidad de visualización.

Los autores agradecen a la profesora Matilde Legua su generosidad al permitir que ideas y ejercicios aportados por ella en el texto *Matemáticas con Derive*, publicado por los tres conjuntamente en la Editorial de la Universitat Politècnica de València, los adaptásemos a *Mathematica* 6, y versiones posteriores, que ahora actualizamos.

Los autores

Capítulo 1

Introducción al programa

1.1 Inicio y entorno

Este capítulo hace una panorámica general del uso de *Mathematica* dejando para posteriores capítulos la exposición de herramientas más avanzadas que ayudan a entender y trabajar las matemáticas.

Podemos acceder al programa de diferentes maneras.

Si lo tenemos instalado en el disco duro usamos el icono:



Los usuarios de la Universitat Politècnica de València pueden descargar el programa *Mathematica* 11 y las instrucciones para su instalación en la web

software.upv.es

Además, y si no ha sido desactivada, aparece una ventana de bienvenida con información y accesos adicionales que pueden ser útiles.

Cuando se carga el programa, en la parte superior aparece una *barra de menús* desplegable con los comandos u órdenes que nos servirán para trabajar con el programa.

La forma usual de trabajar con el programa es abrir un *Notebook*, o cuaderno de notas, en blanco que por defecto se llama ‘Untitled-1’. En él podemos empezar a escribir aunque no aparezca el cursor.



El uso más simple de *Mathematica* es utilizarlo como una simple calculadora. Si escribimos $1 + 2 + 3$ observaremos que la suma aparece delimitada por un corchete azul en el margen derecho de la ventana.

La información contenida en cada uno de estos corchetes es lo que denominamos **celda**.

Para *realizar o simplificar* la suma anterior, se oprimen simultáneamente, con el cursor situado dentro de la celda, las teclas

May + Enter.

Otra forma es pulsar directamente la tecla **Intro** del teclado numérico.

Cuando *Mathematica* responde, lo hace ubicando la respuesta en una nueva celda. Existen varios tipos de celdas según la utilidad de cada una de ellas. Las celdas con instrucciones se denominan:

Input si son de entrada.

Output si son las respuestas¹.

¹Cada celda *Input* se corresponde con su *Output*, compartiendo ambas el mismo número de orden durante la sesión de trabajo. Puede evitarse el *Output* añadiendo “;” detrás de la instrucción.

Otro tipo de celdas son las de **Texto** que incorporan comentarios y no generan respuesta. Podemos distinguirlas porque tienen dos rayas en la parte superior del corchete azul mientras que las de cálculo tienen un triángulo.

Por defecto las celdas son todas de cálculo, y para convertirlas en celdas de texto debemos seleccionar la celda marcando con el cursor el corchete correspondiente y realizar el cambio mediante la opción **Style>Text** del menú **Format**.



Cuando se comete alguna errata o error de sintaxis *Mathematica* informa o advierte de ello a través de un mensaje.

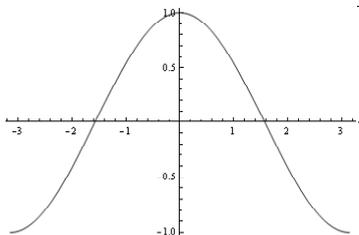
En cualquier caso siempre se puede modificar el contenido de una celda situando el cursor en el interior de ésta y haciendo las modificaciones pertinentes. Entonces puede ejecutarse el nuevo contenido de la celda según se ha explicado con anterioridad.

Ejemplo 1.1.1 *Escribir en una celda $\text{Plot}[\text{Cos}[x], \{x, -\text{Pi}, \text{Pi}\}]$ y activarla. Luego sustituir Cos por Sin , posteriormente Pi por 10 y volver a ejecutar.*

Sol.: Introducimos el comando

$\text{In}[1] := \text{Plot}[\text{Cos}[x], \{x, -\text{Pi}, \text{Pi}\}]$

$\text{Out}[1] =$



Hacemos los cambios sobre la primera celda y volvemos a ejecutar. ■

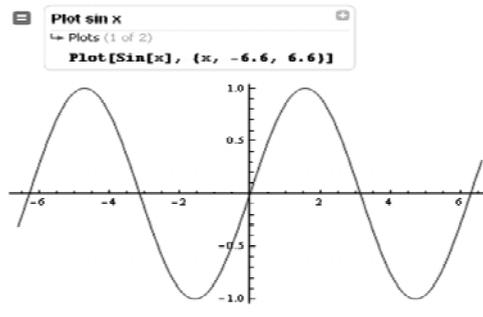
Es recomendable definir cada instrucción a realizar en una celda diferente, activando su respuesta antes de continuar con la siguiente. De esta manera se detectan de forma inmediata los posibles errores cometidos.

En el último ejemplo hemos obtenido una gráfica que requiere el conocimiento del comando *Plot* y su sintaxis. Una de las ventajas disponibles desde la versión 8 de *Mathematica* es la posibilidad de introducir de forma libre el símbolo `=` al inicio de la celda y lo que se desea hacer, entonces el programa proporciona una posible sintaxis y el output correspondiente.

Ejemplo 1.1.2 *Escribir y ejecutar en una celda*

`= plot sin x`

Sol.: Introducimos la expresión dada `= plot sin x`, y al ejecutarla vemos que el input se completa con la sintaxis empleada por el programa y a la vez nos proporciona el output.



Si introducimos `==` al inicio de la celda de entrada en vez de `=` nos da una respuesta más completa que además permite hacer una manipulación interactiva. Con cada una de ellas el icono inicial que aparece es diferente.

En este texto introduciremos la sintaxis correcta de todos los comandos en aras de la eficiencia expositiva pero invitamos a que se explore la comprensión del programa de la "free-form linguistic input" que es como éste denomina en inglés a la introducción de inputs en formato libre.

Las celdas pueden seleccionarse individualmente o agrupadas con objeto de borrarlas, activar su respuesta, modificar su estilo, etc. Para hacer esta

selección múltiple mantenemos pulsada la tecla *Ctrl* mientras vamos marcando las celdas elegidas, o determinando el rango de celdas seleccionadas mediante *May/Shift*.

Si el objetivo de esta selección es borrar las celdas bastará con pulsar la tecla *Supr*.

1.2 La barra de menús

En la parte superior de la ventana podemos ver la barra de menús que está compuesta por varias opciones: *File*, *Edit*, *Insert*, *Format*, *Cell*, *Graphics*, *Evaluation*, *Palettes*, *Window* y *Help*, que funcionan siguiendo los pasos usuales propios del sistema operativo *Windows / OS X*.

Cada menú ofrece muchas posibilidades que el usuario irá descubriendo con la práctica. De momento vamos a comentar las que consideramos más importantes.

File Proporciona diferentes posibilidades de manejo de los ficheros, de impresión y la opción de salir del programa.

New. Comienza un nuevo documento.

Open. Abre un documento creado con antelación.

Close. Cierra el documento actual.

Save. Graba el documento actual.

Save As. Permite grabar el documento con otro nombre o en otra ruta.

Print. Imprime el documento actual.

Exit. Sale de Mathematica.

Edit Proporciona herramientas que pueden ser útiles para la edición.

Undo. Deshace la última acción realizada.

Copy. Copia la celda o el texto que hayamos seleccionado.

Paste. Pega en el documento actual la información almacenada con Copy en el punto donde situemos el cursor o, en su defecto, donde ubiquemos la línea divisoria de celdas.

Insert Permite incorporar objetos o caracteres.

Special Character. Permite elegir caracteres especiales como letras griegas, flechas, etc.

Typesetting. Permite elegir la forma de la expresión matemática: subíndice, fracción, radical,...

Table/Matrix. Formato para la introducción de tablas y matrices.

Inline Free-form Input. Permite introducir expresiones cuya sintaxis no se conoce exactamente.

Format Sus opciones se relacionan con el tipo, tamaño, fuente y otras características relacionadas con el tipo de letra.

Style. Permite elegir entre diferentes tipos de escritura. Por defecto, **Input** para fórmulas y **Text** para simple escritura.

Font. Elige entre tipos de letras y tamaños.

Cell Gestiona las propiedades de las celdas en las que se escribe.

Graphics Permite crear gráficas manualmente y editarlas.

Evaluation Evalúa las celdas y permite interrumpir una evaluación en proceso.

Palettes Muestra diferentes ventanas que ayudan en la elección de funciones. Conviene destacar la opción **Basic Math Assistant** que permite introducir los símbolos matemáticos en su forma usual.

Window Faculta la gestión de varias ventanas abiertas a la vez permitiendo visualizar el contenido de todas ellas simultáneamente y entre otras opciones se halla **Full Screen** (F12 en Windows y ctrl+cmd+F en OS X) que muestra el fichero en pantalla completa.

Help Contiene opciones de ayuda, entre ellas **Find Selected Function** (F1 en Windows y May+cmd+F en OS X) que aplicada sobre un comando nos da información del mismo.

1.3 Primeros cálculos

1.3.1 Operaciones algebraicas

Las operaciones elementales de adición, sustracción, producto y cociente se realizan mediante los habituales símbolos $+$, $-$, $*$ y $/$, si bien el producto puede efectuarse también dejando un espacio en blanco.

La *potencia* se realiza mediante \wedge y los *radicales* se introducen como potencias de exponente fraccionario. Para el caso particular de la raíz cuadrada se puede introducir escribiendo **Sqrt**[_].

1.3.2 Paréntesis, corchetes, llaves y comentarios

Al realizar operaciones con *Mathematica* es importante tener en cuenta el uso de los paréntesis (). Se utilizan para indicar la prioridad de las operaciones.

Sin paréntesis, los productos y divisiones tienen prioridad sobre las sumas y restas; y las potencias, sobre los productos y divisiones. Las operaciones con la misma prioridad se ejecutan en el orden con que han sido escritas.

Los corchetes [] encierran los argumentos de las funciones, tanto las definidas en *Mathematica* como las construidas por el usuario.

Las llaves { } se usan para definir listas de elementos las cuales se utilizan frecuentemente con *Mathematica*. En la Sección 2.2 comenzaremos a ver su manejo.

Para seguir leyendo haga click aquí