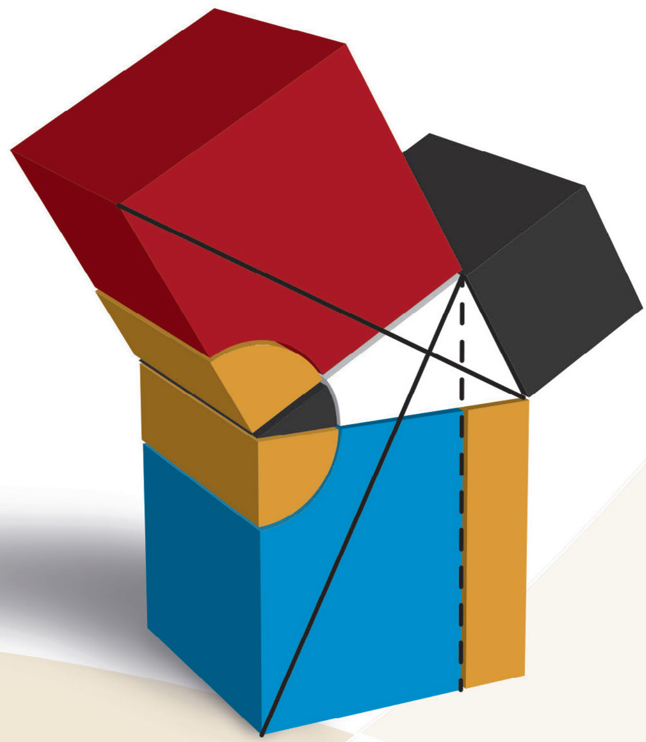
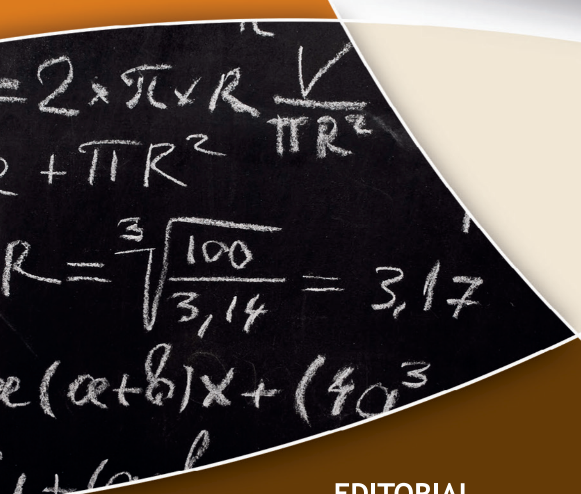
académica

# Geometría euclídea

Vicente D. Estruch Fuster | Valentín Gregori Gregori | Bernardino Roig Sala





EDITORIAL
UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA

Vicente D. Estruch Fuster
Valentín Gregori Gregori
Bernardino Roig Sala

# Geometría euclídea

**EDITORIAL**
**UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA**

Colección *Académica*

Para referenciar esta publicación utilice la siguiente cita: Estruch Fuster, Vicente D., Gregori Gregori, Valentín y Roig Sala, Bernardino (2018). *Geometría Euclídea*. Valencia: Editorial Universitat Politècnica de València


*distribución:* www.lalibreria.upv.es / Ref.: 0793_03_01_01

Imprime: Byprint Percom, sl

ISBN: 978-84-9048-729-7
Impreso bajo demanda



Impreso en España

# Presentación

La presente obra contiene la parte de geometría que los autores han redactado para la asignatura Álgebra matricial y geometría, del Grado en Tecnologías Interactivas, que se imparte en la Escuela Politécnica Superior de Gandia. El texto centra su estudio en el plano y el espacio ordinarios (euclídeos).

El libro, como es usual en textos matemáticos, expone los resultados con una continuada argumentación, pero en este caso sin apenas demostraciones. No obstante, en letra pequeña se presentan pruebas abreviadas o extensiones de la teoría que el lector puede obviar en una primera lectura.

La obra se ha estructurado en capítulos que contienen varias secciones, y en cada uno de ellos los resultados se ilustran con ejemplos apropiados. Al final de cada capítulo aparece una lista de ejercicios resueltos que podrán poner a prueba la comprensión y adquisición de conocimientos por parte del lector. Estos ejercicios, en ocasiones, complementan la teoría.

Los capítulos que conforman la obra son, en este orden: Espacios vectoriales euclídeos, El plano euclídeo, El espacio euclídeo, Semejanza en $\mathbb{R}^2$, Semejanza en $\mathbb{R}^3$ y Sistemas de coordenadas en el plano y en el espacio.

Para la comprensión del texto se requieren conocimientos de álgebra elemental. Los autores agradecerán cualquier sugerencia tendente a mejorar el presente texto en ediciones posteriores (enviar a *vdestruc@mat.upv.es*).

*Los autores*

# NOTACIÓN

En este texto se ha evitado un lenguaje excesivamente simbólico. No obstante, el lector debe conocer la siguiente terminología básica que se usa en matemáticas y ciencias tecnológicas:

| | |
|---|---|
| $\forall$ | Cuantificador universal. Se lee “para todo” o “para cada” |
| $\exists$ | Cuantificador existencial. Se lee “existe” |
| $\Longleftrightarrow$ | Equivalencia proposicional. Se lee “si y sólo si” |
| sii | Abreviatura de “si y sólo si” |
| $\Rightarrow$ | Implicación proposicional. La proposición de la izquierda implica la de la derecha. Se lee “implica” |
| $\mid$ | Se lee “tal (tales) que” |
| $:$ | Se lee “tal (tales) que” |
| i.e. | En latín *id est* y se lee “es decir” |
| $\in$ | Símbolo de pertenencia |
| $\subset$ | Símbolo de inclusión |
| $\cup$ | Símbolo de unión |
| $\cap$ | Símbolo de intersección |
| $\mathbb{N}$ | Conjunto de los números naturales (incluye al cero) |
| $\mathbb{N}^*$ | El conjunto $\mathbb{N}$ sin el cero |
| $\mathbb{Z}$ | El anillo de los números enteros |
| $\mathbb{Q}$ | El cuerpo de los números racionales |
| $\mathbb{R}$ | El cuerpo de los números reales |
| $\mathbb{C}$ | El cuerpo de los números complejos |

# Índice

# Capítulo 1

# ESPACIOS VECTORIALES EUCLÍDEOS

## 1.1 EL ESPACIO VECTORIAL EUCLÍDEO $\mathbb{R}^n$

### 1.1.1 El producto escalar en $\mathbb{R}^n$

Sean $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ dos vectores de $\mathbb{R}^n$. Se define el **producto escalar** (euclídeo u ordinario) de los vectores $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ como $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 + \cdots x_n \cdot y_n$, y la **norma euclídea** (asociada) del vector $\boldsymbol{x}$ como $\|\boldsymbol{x}\| = +\sqrt{\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x}}$.

Si denotamos $\boldsymbol{x}^2$ a $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x}$ es obvio que $\|\boldsymbol{x}\|^2 = \boldsymbol{x}^2 = x_1^2 + \cdots + x_n^2$.

Se verifican las siguientes propiedades básicas (de un producto escalar y norma) para $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ y $\lambda \in \mathbb{R}$:

(a) $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = \boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{x}$

(b) $\boldsymbol{x} \cdot (\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z}) = \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} + \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{z}$

(c) $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x} \geq 0$

(d) $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x} = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$

(e) $(\lambda \boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{y} = \lambda\, (\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y})$

(f) $\|\lambda \boldsymbol{x}\| = |\lambda|\ \|\boldsymbol{x}\|$

(g) $\|\boldsymbol{x}\| \geq 0$

(h) $\|\boldsymbol{x}\| = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$

También se verifica:

$|\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}| \leq \|\boldsymbol{x}\|\, \|\boldsymbol{y}\|$, Desigualdad de Cauchy-Schwarz

$\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\| \leq \|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|$, Desigualdad de Minkowski (triangular)

Al espacio vectorial $\mathbb{R}^n$ provisto del producto escalar se le denomina **espacio vectorial euclídeo** $\mathbb{R}^n$.

**Para seguir leyendo haga click aquí**