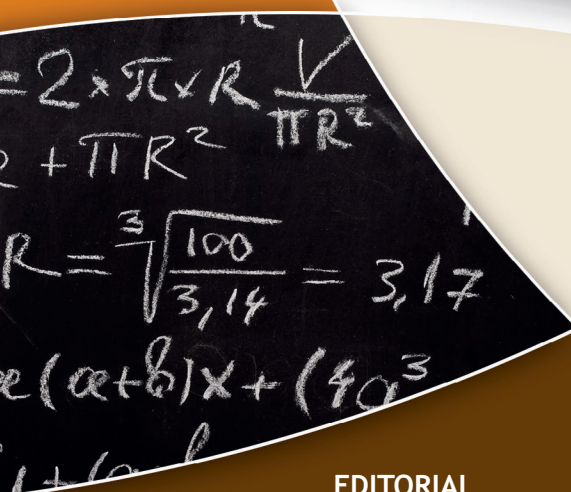
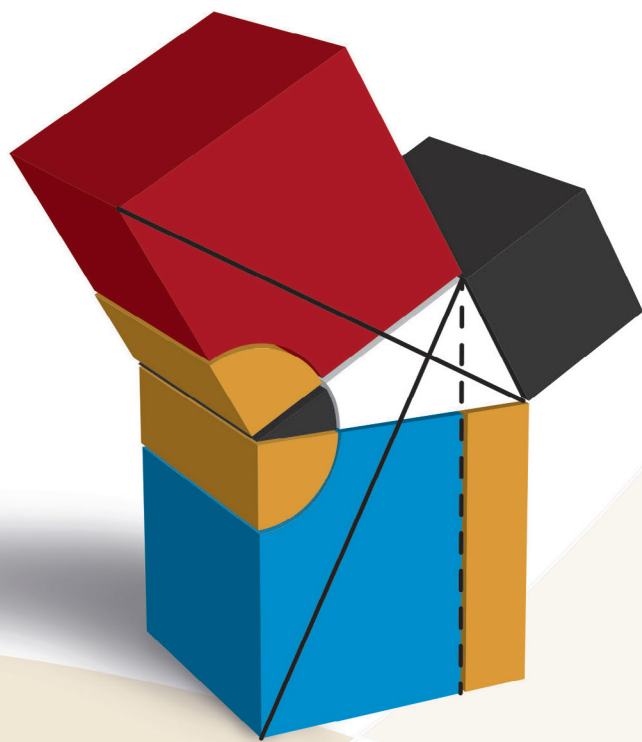




# Geometría euclídea

Vicente D. Estruch Fuster | Valentín Gregori Gregori |  
Bernardino Roig Sala



EDITORIAL  
UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA

Vicente D. Estruch Fuster  
Valentín Gregori Gregori  
Bernardino Roig Sala

# **Geometría euclídea**

**EDITORIAL  
UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA**

Colección *Académica*

Para referenciar esta publicación utilice la siguiente cita: Estruch Fuster, Vicente D., Gregori Gregori, Valentín y Roig Sala, Bernardino (2018). *Geometría Euclídea*. Valencia: Editorial Universitat Politècnica de València

© Vicente D. Estruch Fuster  
Valentín Gregori Gregori  
Bernardino Roig Sala

© 2018, Editorial Universitat Politècnica de València  
*distribución:* [www.lalibreria.upv.es](http://www.lalibreria.upv.es) / Ref.: 0793\_03\_01\_01

Imprime: Byprint Percom, sl

ISBN: 978-84-9048-729-7  
Impreso bajo demanda

La Editorial UPV autoriza la reproducción, traducción y difusión parcial de la presente publicación con fines científicos, educativos y de investigación que no sean comerciales ni de lucro, siempre que se identifique y se reconozca debidamente a la Editorial UPV, la publicación y los autores. La autorización para reproducir, difundir o traducir el presente estudio, o compilar o crear obras derivadas del mismo en cualquier forma, con fines comerciales/lucrativos o sin ánimo de lucro, deberá solicitarse por escrito al correo [edicion@editorial.upv.es](mailto:edicion@editorial.upv.es).

Impreso en España

# Presentación

La presente obra contiene la parte de geometría que los autores han redactado para la asignatura Álgebra matricial y geometría, del Grado en Tecnologías Interactivas, que se imparte en la Escuela Politécnica Superior de Gandia. El texto centra su estudio en el plano y el espacio ordinarios (euclídeos).

El libro, como es usual en textos matemáticos, expone los resultados con una continuada argumentación, pero en este caso sin apenas demostraciones. No obstante, en letra pequeña se presentan pruebas abreviadas o extensiones de la teoría que el lector puede obviar en una primera lectura.

La obra se ha estructurado en capítulos que contienen varias secciones, y en cada uno de ellos los resultados se ilustran con ejemplos apropiados. Al final de cada capítulo aparece una lista de ejercicios resueltos que podrán poner a prueba la comprensión y adquisición de conocimientos por parte del lector. Estos ejercicios, en ocasiones, complementan la teoría.

Los capítulos que conforman la obra son, en este orden: Espacios vectoriales euclídeos, El plano euclídeo, El espacio euclídeo, Semejanza en  $\mathbb{R}^2$ , Semejanza en  $\mathbb{R}^3$  y Sistemas de coordenadas en el plano y en el espacio.

Para la comprensión del texto se requieren conocimientos de álgebra elemental. Los autores agradecerán cualquier sugerencia tendente a mejorar el presente texto en ediciones posteriores (enviar a *vdestruc@mat.upv.es*).

*Los autores*

## NOTACIÓN

En este texto se ha evitado un lenguaje excesivamente simbólico. No obstante, el lector debe conocer la siguiente terminología básica que se usa en matemáticas y ciencias tecnológicas:

$\forall$	Cuantificador universal. Se lee “para todo” o “para cada”
$\exists$	Cuantificador existencial. Se lee “existe”
$\iff$	Equivalencia proposicional. Se lee “si y sólo si”
sii	Abreviatura de “si y sólo si”
$\Rightarrow$	Implicación proposicional. La proposición de la izquierda implica la de la derecha. Se lee “implica”
	Se lee “tal (tales) que”
:	Se lee “tal (tales) que”
i.e.	En latín <i>id est</i> y se lee “es decir”
$\in$	Símbolo de pertenencia
$\subset$	Símbolo de inclusión
$\cup$	Símbolo de unión
$\cap$	Símbolo de intersección
$\mathbb{N}$	Conjunto de los números naturales (incluye al cero)
$\mathbb{N}^*$	El conjunto $\mathbb{N}$ sin el cero
$\mathbb{Z}$	El anillo de los números enteros
$\mathbb{Q}$	El cuerpo de los números racionales
$\mathbb{R}$	El cuerpo de los números reales
$\mathbb{C}$	El cuerpo de los números complejos

# Índice

<b>1</b>	<b>ESPACIOS VECTORIALES EUCLÍDEOS</b>	<b>11</b>
1.1	EL ESPACIO VECTORIAL EUCLÍDEO $\mathbb{R}^n$	11
1.1.1	El producto escalar en $\mathbb{R}^n$	11
1.1.2	Base ortonormal	12
1.1.3	Ejemplo	12
1.2	PLANO VECTORIAL EUCLÍDEO $\mathbb{R}^2$ Y ESPACIO VECTORIAL EUCLÍDEO $\mathbb{R}^3$	12
1.2.1	Sobre las propiedades básicas	12
1.2.2	Ejemplo	13
1.2.3	Expresión trigonométrica del producto escalar en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$	13
1.2.4	Ejemplo	14
1.2.5	Ortogonalidad (perpendicularidad) en $\mathbb{R}^2$	14
1.2.6	Ejemplo	14
1.2.7	Representación gráfica de los vectores unitarios en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$	14
1.2.8	Sobre vectores unitarios en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$	15
1.2.9	Ejemplo	15
1.2.10	Bases ortonormales en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$	15
1.2.11	Proyección ortogonal	15
1.3	EL PRODUCTO VECTORIAL Y EL PRODUCTO MIXTO EN $\mathbb{R}^3$	16
1.3.1	El producto vectorial	16
1.3.2	Interpretación geométrica del producto vectorial	17
1.3.3	Ejemplo	17
1.3.4	Propiedades del producto vectorial	17
1.3.5	El producto mixto	17
1.3.6	Interpretación geométrica del producto mixto	18
1.3.7	Ejemplo	18
1.3.8	Nota	18
1.4	EJERCICIOS RESUELTOS	19
<b>2</b>	<b>EL PLANO EUCLÍDEO</b>	<b>23</b>
2.1	EL PLANO EUCLÍDEO	23

2.1.1	Definición . . . . .	23
2.1.2	Nota . . . . .	24
2.1.3	Ejemplo . . . . .	24
2.1.4	Propiedades (axiomática del plano afín) . . . . .	24
2.1.5	Sistema de referencia en el plano . . . . .	24
2.1.6	Nota . . . . .	25
2.1.7	Cambios de sistemas de referencias . . . . .	25
2.1.8	Ejemplo . . . . .	26
2.1.9	La recta en el plano . . . . .	26
2.1.10	Nota . . . . .	27
2.1.11	Ejemplo (recta que pasa por dos puntos) . . . . .	27
2.1.12	Otras ecuaciones de la recta . . . . .	28
2.1.13	Ejemplo . . . . .	28
2.1.14	Rectas paralelas a los ejes . . . . .	29
2.1.15	Ejemplo . . . . .	29
2.1.16	Posición relativa de rectas y puntos . . . . .	29
2.1.17	Ejemplo . . . . .	30
2.1.18	Nota . . . . .	30
2.1.19	Ejemplo (simétrico de un punto respecto otro punto) . . . . .	31
2.2	CONCEPTOS MÉTRICOS EN EL PLANO . . . . .	31
2.2.1	Distancia entre dos puntos . . . . .	31
2.2.2	Ángulo que forman dos rectas . . . . .	31
2.2.3	Nota . . . . .	32
2.2.4	Ejemplo . . . . .	32
2.2.5	Distancia de un punto a una recta . . . . .	32
2.2.6	Distancia entre rectas paralelas . . . . .	32
2.2.7	Ecuación normal de la recta . . . . .	33
2.2.8	Ejemplo . . . . .	33
2.2.9	La recta expresada con determinante. Área de un triángulo . . . . .	34
2.2.10	Consideraciones geométricas en un triángulo . . . . .	34
2.3	EJERCICIOS RESUELTOS . . . . .	35
<b>3</b>	<b>EL ESPACIO EUCLÍDEO</b> . . . . .	<b>41</b>
3.1	EL ESPACIO EUCLÍDEO . . . . .	41
3.1.1	El espacio euclídeo. Sistemas de referencia . . . . .	41
3.1.2	La recta en el espacio . . . . .	42
3.1.3	Ejemplo . . . . .	42
3.1.4	Planos en $\mathbb{R}^3$ . . . . .	42
3.1.5	Ecuación general del plano . . . . .	43
3.1.6	Ejemplo (plano definido por tres puntos no alineados) . . . . .	43
3.1.7	La recta como intersección de dos planos . . . . .	44

3.1.8	Ejemplo . . . . .	44
3.1.9	Nota . . . . .	44
3.1.10	Posición relativa de rectas y planos . . . . .	45
3.1.11	Ejemplo (la posición relativa de dos planos) . . . . .	45
3.2	CONCEPTOS MÉTRICOS EN EL ESPACIO . . . . .	46
3.2.1	Distancia entre dos puntos . . . . .	46
3.2.2	Ejemplo . . . . .	46
3.2.3	Ángulo de dos rectas que se cortan . . . . .	46
3.2.4	Ejemplo . . . . .	46
3.2.5	Ecuación normal del plano. Planos paralelos . . . . .	47
3.2.6	Ejemplo . . . . .	47
3.2.7	Distancia de un punto a un plano . . . . .	48
3.2.8	Nota . . . . .	48
3.2.9	Ejemplo . . . . .	48
3.2.10	Distancia entre planos paralelos . . . . .	49
3.2.11	Distancia de un punto a una recta . . . . .	49
3.2.12	Distancia entre rectas paralelas y de recta paralela a un plano . . . . .	49
3.2.13	Distancia de dos rectas que se cruzan . . . . .	50
3.2.14	Ejemplo . . . . .	50
3.2.15	Puntos de distancia mínima entre rectas que se cruzan . . . . .	50
3.2.16	Ángulo de recta y plano. Perpendicularidad . . . . .	51
3.2.17	Ejemplo . . . . .	51
3.2.18	Ángulo de dos planos . . . . .	51
3.2.19	Ejemplo . . . . .	52
3.3	EJERCICIOS RESUELTOS . . . . .	52
<b>4</b>	<b>SEMEJANZA EN <math>\mathbb{R}^2</math></b> . . . . .	<b>63</b>
4.1	ENDOMORFISMOS ORTOGONALES EN $\mathbb{R}^2$ . . . . .	63
4.1.1	Definición . . . . .	63
4.1.2	Consecuencia . . . . .	63
4.1.3	Caracterización de los endomorfismos ortogonales . . . . .	64
4.1.4	Giros con centro en el origen . . . . .	64
4.1.5	Ejemplo . . . . .	65
4.1.6	Simetría central . . . . .	66
4.1.7	Simetría axial con eje que pasa por el origen . . . . .	66
4.1.8	Ejemplo (simetría axial respecto los ejes coordenados) . . . . .	67
4.1.9	La simetría central como producto de simetrías axiales . . . . .	68
4.1.10	Nota . . . . .	68
4.2	ISOMETRÍAS . . . . .	69
4.2.1	Definición . . . . .	69
4.2.2	Ejemplo . . . . .	69



4.2.3	Definición . . . . .	69
4.2.4	Propiedades . . . . .	70
4.2.5	Traslación . . . . .	70
4.2.6	Ejemplo . . . . .	71
4.2.7	Giro . . . . .	72
4.2.8	Ejemplo . . . . .	72
4.2.9	Simetría central respecto a un punto . . . . .	73
4.2.10	Simetría axial respecto a un eje . . . . .	73
4.2.11	Ejemplo . . . . .	74
4.2.12	Simetría axial respecto a rectas paralelas a los ejes coordenados . . . . .	75
4.2.13	Simetría respecto a un punto como producto de simetrías axiales . . . . .	76
4.2.14	Isometrías del plano euclídeo . . . . .	76
4.3	SEMEJANZA EN EL PLANO . . . . .	76
4.3.1	Homotecia . . . . .	76
4.3.2	Proposición . . . . .	77
4.3.3	Consecuencias . . . . .	77
4.3.4	Ejemplo . . . . .	77
4.3.5	Proposición . . . . .	78
4.3.6	Homotecia de razón negativa . . . . .	78
4.3.7	Definición . . . . .	78
4.3.8	Área de triángulos semejantes . . . . .	79
4.4	EJERCICIOS RESUELTOS . . . . .	79
<b>5</b>	<b>SEMEJANZA EN <math>\mathbb{R}^3</math></b> . . . . .	<b>89</b>
5.1	ENDOMORFISMOS ORTOGONALES EN $\mathbb{R}^3$ . . . . .	89
5.1.1	Definición . . . . .	89
5.1.2	Giro en $\mathbb{R}^3$ de eje por el origen . . . . .	89
5.1.3	Ejemplo . . . . .	90
5.1.4	Simetría (ortogonal) respecto un plano que pasa por el origen . . . . .	90
5.1.5	Simetría (ortogonal) respecto a un plano coordenado . . . . .	90
5.1.6	Simetría central respecto el origen . . . . .	91
5.1.7	Representación geométrica de los endomorfismos ortogonales . . . . .	91
5.2	ISOMETRÍAS DEL ESPACIO EUCLÍDEO $\mathbb{R}^3$ . . . . .	91
5.2.1	Preliminares . . . . .	91
5.2.2	Traslación . . . . .	92
5.2.3	Giro . . . . .	92
5.2.4	Ejemplo . . . . .	92
5.2.5	Simetría ortogonal respecto a un plano $\pi$ cualquiera . . . . .	93
5.2.6	Simetría respecto a un plano paralelo a un plano coordenado . . . . .	93
5.2.7	Simetría central respecto a un punto . . . . .	93
5.2.8	Isometrías del espacio euclídeo . . . . .	94

5.2.9	Movimiento helicoidal . . . . .	94
5.3	SEMEJANZA EN EL ESPACIO . . . . .	94
5.3.1	Homotecia en el espacio . . . . .	94
5.3.2	Ejemplo . . . . .	94
5.3.3	Semejanza en el espacio . . . . .	95
5.3.4	Ejemplo . . . . .	96
5.4	EJERCICIOS RESUELTOS . . . . .	96
<b>6</b>	<b>SISTEMAS DE COORDENADAS EN EL PLANO Y EN EL ESPACIO</b>	<b>101</b>
6.1	COORDENADAS POLARES EN EL PLANO . . . . .	101
6.1.1	Coordenadas polares . . . . .	101
6.1.2	Ejemplos . . . . .	102
6.1.3	Relación entre coordenadas cartesianas y polares . . . . .	103
6.1.4	Ejemplo . . . . .	103
6.1.5	Curvas definidas mediante coordenadas polares . . . . .	104
6.1.6	Ejemplo . . . . .	104
6.1.7	Algunos lugares geométricos particulares . . . . .	104
6.1.8	Representación gráfica de una función en polares. Simetrías . . . . .	105
6.1.9	Ejemplo. La cardioide . . . . .	105
6.1.10	Puntos de intersección de dos curvas en polares . . . . .	106
6.1.11	Ejemplo . . . . .	106
6.2	COORDENADAS CILÍNDRICAS EN $\mathbb{R}^3$ . . . . .	107
6.2.1	Coordenadas cilíndricas . . . . .	107
6.2.2	Relación entre coordenadas cilíndricas y cartesianas . . . . .	107
6.2.3	Algunos lugares geométricos particulares . . . . .	107
6.3	COORDENADAS ESFÉRICAS EN EL ESPACIO . . . . .	108
6.3.1	Coordenadas esféricas (o polares) del espacio . . . . .	108
6.3.2	Relación entre coordenadas cartesianas o cilíndricas y esféricas . . . . .	108
6.3.3	Algunos lugares geométricos particulares . . . . .	109
6.4	CURVAS DADAS POR ECUACIONES PARAMÉTRICAS . . . . .	110
6.4.1	Consideraciones previas . . . . .	110
6.4.2	Parametrizaciones de curvas . . . . .	110
6.4.3	Conceptos relativos a curvas parametrizadas . . . . .	110
6.4.4	Casos particulares de parametrización de curvas . . . . .	111
6.4.5	Ejemplo . . . . .	112
6.4.6	La hélice circular . . . . .	112
6.5	EJERCICIOS RESUELTOS . . . . .	113
	<b>BIBLIOGRAFÍA . . . . .</b>	<b>119</b>
	<b>ÍNDICE DE TÉRMINOS . . . . .</b>	<b>121</b>



# Capítulo 1

## ESPACIOS VECTORIALES EUCLÍDEOS

### 1.1 EL ESPACIO VECTORIAL EUCLÍDEO $\mathbb{R}^n$

#### 1.1.1 El producto escalar en $\mathbb{R}^n$

Sean  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ,  $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$  dos vectores de  $\mathbb{R}^n$ . Se define el **producto escalar** (euclídeo u ordinario) de los vectores  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$  como  $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 + \dots + x_n \cdot y_n$ , y la **norma euclídea** (asociada) del vector  $\mathbf{x}$  como  $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}}$ .

Si denotamos  $\mathbf{x}^2$  a  $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}$  es obvio que  $\|\mathbf{x}\|^2 = \mathbf{x}^2 = x_1^2 + \dots + x_n^2$ .

Se verifican las siguientes propiedades básicas (de un producto escalar y norma) para  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$  y  $\lambda \in \mathbb{R}$ :

(a)  $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{y} \cdot \mathbf{x}$

(b)  $\mathbf{x} \cdot (\mathbf{y} + \mathbf{z}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} + \mathbf{x} \cdot \mathbf{z}$

(c)  $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} \geq 0$

(d)  $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$

(e)  $(\lambda \mathbf{x}) \cdot \mathbf{y} = \lambda (\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})$

(f)  $\|\lambda \mathbf{x}\| = |\lambda| \|\mathbf{x}\|$

(g)  $\|\mathbf{x}\| \geq 0$

(h)  $\|\mathbf{x}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$

También se verifica:

$|\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}| \leq \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|$ , Desigualdad de Cauchy-Schwarz

$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$ , Desigualdad de Minkowski (triangular)

Al espacio vectorial  $\mathbb{R}^n$  provisto del producto escalar se le denomina **espacio vectorial euclídeo**  $\mathbb{R}^n$ .

**Para seguir leyendo haga click aquí**