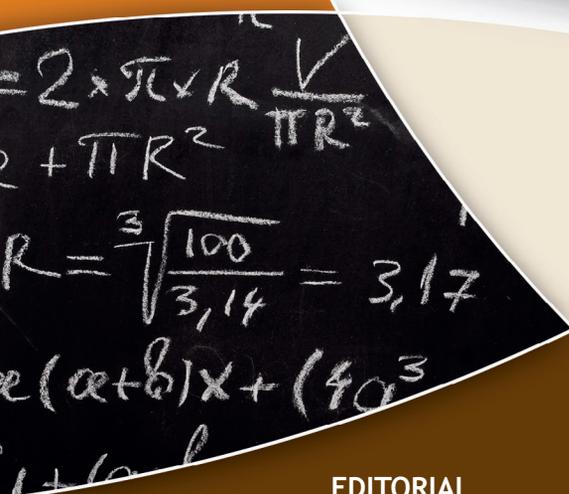
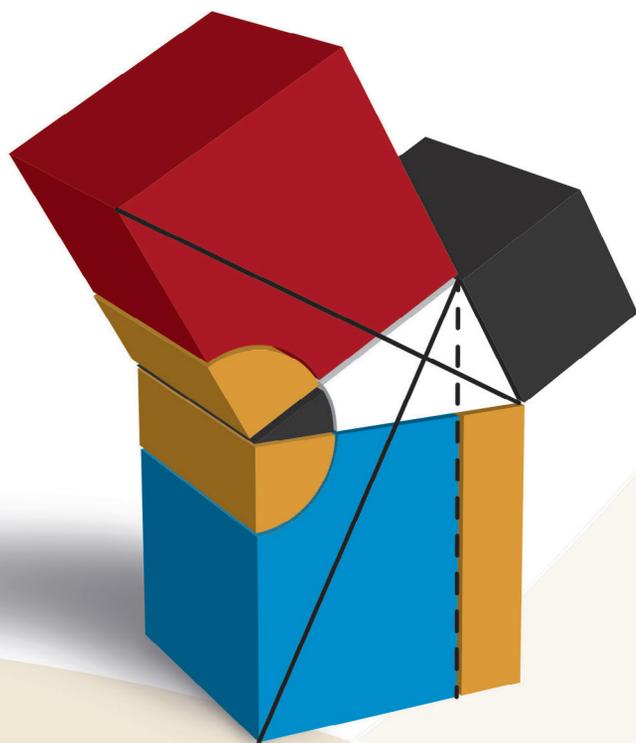




Geometría euclídea

Vicente D. Estruch Fuster | Valentín Gregori Gregori |
Bernardino Roig Sala



EDITORIAL
UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA

Vicente D. Estruch Fuster
Valentín Gregori Gregori
Bernardino Roig Sala

Geometría euclídea

**EDITORIAL
UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA**

Colección *Académica*

Para referenciar esta publicación utilice la siguiente cita: Estruch Fuster, Vicente D., Gregori Gregori, Valentín y Roig Sala, Bernardino (2018). *Geometría Euclídea*. Valencia: Editorial Universitat Politècnica de València

© Vicente D. Estruch Fuster
Valentín Gregori Gregori
Bernardino Roig Sala

© 2018, Editorial Universitat Politècnica de València
distribución: www.lalibreria.upv.es / Ref.: 0793_03_01_01

Imprime: Byprint Percom, sl

ISBN: 978-84-9048-729-7
Impreso bajo demanda

La Editorial UPV autoriza la reproducción, traducción y difusión parcial de la presente publicación con fines científicos, educativos y de investigación que no sean comerciales ni de lucro, siempre que se identifique y se reconozca debidamente a la Editorial UPV, la publicación y los autores. La autorización para reproducir, difundir o traducir el presente estudio, o compilar o crear obras derivadas del mismo en cualquier forma, con fines comerciales/lucrativos o sin ánimo de lucro, deberá solicitarse por escrito al correo edicion@editorial.upv.es.

Impreso en España

Presentación

La presente obra contiene la parte de geometría que los autores han redactado para la asignatura Álgebra matricial y geometría, del Grado en Tecnologías Interactivas, que se imparte en la Escuela Politécnica Superior de Gandia. El texto centra su estudio en el plano y el espacio ordinarios (euclídeos).

El libro, como es usual en textos matemáticos, expone los resultados con una continuada argumentación, pero en este caso sin apenas demostraciones. No obstante, en letra pequeña se presentan pruebas abreviadas o extensiones de la teoría que el lector puede obviar en una primera lectura.

La obra se ha estructurado en capítulos que contienen varias secciones, y en cada uno de ellos los resultados se ilustran con ejemplos apropiados. Al final de cada capítulo aparece una lista de ejercicios resueltos que podrán poner a prueba la comprensión y adquisición de conocimientos por parte del lector. Estos ejercicios, en ocasiones, complementan la teoría.

Los capítulos que conforman la obra son, en este orden: Espacios vectoriales euclídeos, El plano euclídeo, El espacio euclídeo, Semejanza en \mathbb{R}^2 , Semejanza en \mathbb{R}^3 y Sistemas de coordenadas en el plano y en el espacio.

Para la comprensión del texto se requieren conocimientos de álgebra elemental. Los autores agradecerán cualquier sugerencia tendente a mejorar el presente texto en ediciones posteriores (enviar a *vdestruc@mat.upv.es*).

Los autores

NOTACIÓN

En este texto se ha evitado un lenguaje excesivamente simbólico. No obstante, el lector debe conocer la siguiente terminología básica que se usa en matemáticas y ciencias tecnológicas:

\forall	Cuantificador universal. Se lee “para todo” o “para cada”
\exists	Cuantificador existencial. Se lee “existe”
\iff	Equivalencia proposicional. Se lee “si y sólo si”
sii	Abreviatura de “si y sólo si”
\Rightarrow	Implicación proposicional. La proposición de la izquierda implica la de la derecha. Se lee “implica”
	Se lee “tal (tales) que”
:	Se lee “tal (tales) que”
i.e.	En latín <i>id est</i> y se lee “es decir”
\in	Símbolo de pertenencia
\subset	Símbolo de inclusión
\cup	Símbolo de unión
\cap	Símbolo de intersección
\mathbb{N}	Conjunto de los números naturales (incluye al cero)
\mathbb{N}^*	El conjunto \mathbb{N} sin el cero
\mathbb{Z}	El anillo de los números enteros
\mathbb{Q}	El cuerpo de los números racionales
\mathbb{R}	El cuerpo de los números reales
\mathbb{C}	El cuerpo de los números complejos

Índice

1	ESPACIOS VECTORIALES EUCLÍDEOS	11
1.1	EL ESPACIO VECTORIAL EUCLÍDEO \mathbb{R}^n	11
1.1.1	El producto escalar en \mathbb{R}^n	11
1.1.2	Base ortonormal	12
1.1.3	Ejemplo	12
1.2	PLANO VECTORIAL EUCLÍDEO \mathbb{R}^2 Y ESPACIO VECTORIAL EUCLÍDEO \mathbb{R}^3	12
1.2.1	Sobre las propiedades básicas	12
1.2.2	Ejemplo	13
1.2.3	Expresión trigonométrica del producto escalar en \mathbb{R}^2 y \mathbb{R}^3	13
1.2.4	Ejemplo	14
1.2.5	Ortogonalidad (perpendicularidad) en \mathbb{R}^2	14
1.2.6	Ejemplo	14
1.2.7	Representación gráfica de los vectores unitarios en \mathbb{R}^2 y \mathbb{R}^3	14
1.2.8	Sobre vectores unitarios en \mathbb{R}^2 y \mathbb{R}^3	15
1.2.9	Ejemplo	15
1.2.10	Bases ortonormales en \mathbb{R}^2 y \mathbb{R}^3	15
1.2.11	Proyección ortogonal	15
1.3	EL PRODUCTO VECTORIAL Y EL PRODUCTO MIXTO EN \mathbb{R}^3	16
1.3.1	El producto vectorial	16
1.3.2	Interpretación geométrica del producto vectorial	17
1.3.3	Ejemplo	17
1.3.4	Propiedades del producto vectorial	17
1.3.5	El producto mixto	17
1.3.6	Interpretación geométrica del producto mixto	18
1.3.7	Ejemplo	18
1.3.8	Nota	18
1.4	EJERCICIOS RESUELTOS	19
2	EL PLANO EUCLÍDEO	23
2.1	EL PLANO EUCLÍDEO	23

2.1.1	Definición	23
2.1.2	Nota	24
2.1.3	Ejemplo	24
2.1.4	Propiedades (axiomática del plano afín)	24
2.1.5	Sistema de referencia en el plano	24
2.1.6	Nota	25
2.1.7	Cambios de sistemas de referencias	25
2.1.8	Ejemplo	26
2.1.9	La recta en el plano	26
2.1.10	Nota	27
2.1.11	Ejemplo (recta que pasa por dos puntos)	27
2.1.12	Otras ecuaciones de la recta	28
2.1.13	Ejemplo	28
2.1.14	Rectas paralelas a los ejes	29
2.1.15	Ejemplo	29
2.1.16	Posición relativa de rectas y puntos	29
2.1.17	Ejemplo	30
2.1.18	Nota	30
2.1.19	Ejemplo (simétrico de un punto respecto otro punto)	31
2.2	CONCEPTOS MÉTRICOS EN EL PLANO	31
2.2.1	Distancia entre dos puntos	31
2.2.2	Ángulo que forman dos rectas	31
2.2.3	Nota	32
2.2.4	Ejemplo	32
2.2.5	Distancia de un punto a una recta	32
2.2.6	Distancia entre rectas paralelas	32
2.2.7	Ecuación normal de la recta	33
2.2.8	Ejemplo	33
2.2.9	La recta expresada con determinante. Área de un triángulo	34
2.2.10	Consideraciones geométricas en un triángulo	34
2.3	EJERCICIOS RESUELTOS	35
3	EL ESPACIO EUCLÍDEO	41
3.1	EL ESPACIO EUCLÍDEO	41
3.1.1	El espacio euclídeo. Sistemas de referencia	41
3.1.2	La recta en el espacio	42
3.1.3	Ejemplo	42
3.1.4	Planos en \mathbb{R}^3	42
3.1.5	Ecuación general del plano	43
3.1.6	Ejemplo (plano definido por tres puntos no alineados)	43
3.1.7	La recta como intersección de dos planos	44

3.1.8	Ejemplo	44
3.1.9	Nota	44
3.1.10	Posición relativa de rectas y planos	45
3.1.11	Ejemplo (la posición relativa de dos planos)	45
3.2	CONCEPTOS MÉTRICOS EN EL ESPACIO	46
3.2.1	Distancia entre dos puntos	46
3.2.2	Ejemplo	46
3.2.3	Ángulo de dos rectas que se cortan	46
3.2.4	Ejemplo	46
3.2.5	Ecuación normal del plano. Planos paralelos	47
3.2.6	Ejemplo	47
3.2.7	Distancia de un punto a un plano	48
3.2.8	Nota	48
3.2.9	Ejemplo	48
3.2.10	Distancia entre planos paralelos	49
3.2.11	Distancia de un punto a una recta	49
3.2.12	Distancia entre rectas paralelas y de recta paralela a un plano	49
3.2.13	Distancia de dos rectas que se cruzan	50
3.2.14	Ejemplo	50
3.2.15	Puntos de distancia mínima entre rectas que se cruzan	50
3.2.16	Ángulo de recta y plano. Perpendicularidad	51
3.2.17	Ejemplo	51
3.2.18	Ángulo de dos planos	51
3.2.19	Ejemplo	52
3.3	EJERCICIOS RESUELTOS	52
4	SEMEJANZA EN \mathbb{R}^2	63
4.1	ENDOMORFISMOS ORTOGONALES EN \mathbb{R}^2	63
4.1.1	Definición	63
4.1.2	Consecuencia	63
4.1.3	Caracterización de los endomorfismos ortogonales	64
4.1.4	Giros con centro en el origen	64
4.1.5	Ejemplo	65
4.1.6	Simetría central	66
4.1.7	Simetría axial con eje que pasa por el origen	66
4.1.8	Ejemplo (simetría axial respecto los ejes coordenados)	67
4.1.9	La simetría central como producto de simetrías axiales	68
4.1.10	Nota	68
4.2	ISOMETRÍAS	69
4.2.1	Definición	69
4.2.2	Ejemplo	69

4.2.3	Definición	69
4.2.4	Propiedades	70
4.2.5	Traslación	70
4.2.6	Ejemplo	71
4.2.7	Giro	72
4.2.8	Ejemplo	72
4.2.9	Simetría central respecto a un punto	73
4.2.10	Simetría axial respecto a un eje	73
4.2.11	Ejemplo	74
4.2.12	Simetría axial respecto a rectas paralelas a los ejes coordenados	75
4.2.13	Simetría respecto a un punto como producto de simetrías axiales	76
4.2.14	Isometrías del plano euclídeo	76
4.3	SEMEJANZA EN EL PLANO	76
4.3.1	Homotecia	76
4.3.2	Proposición	77
4.3.3	Consecuencias	77
4.3.4	Ejemplo	77
4.3.5	Proposición	78
4.3.6	Homotecia de razón negativa	78
4.3.7	Definición	78
4.3.8	Área de triángulos semejantes	79
4.4	EJERCICIOS RESUELTOS	79
5	SEMEJANZA EN \mathbb{R}^3	89
5.1	ENDOMORFISMOS ORTOGONALES EN \mathbb{R}^3	89
5.1.1	Definición	89
5.1.2	Giro en \mathbb{R}^3 de eje por el origen	89
5.1.3	Ejemplo	90
5.1.4	Simetría (ortogonal) respecto un plano que pasa por el origen	90
5.1.5	Simetría (ortogonal) respecto a un plano coordenado	90
5.1.6	Simetría central respecto el origen	91
5.1.7	Representación geométrica de los endomorfismos ortogonales	91
5.2	ISOMETRÍAS DEL ESPACIO EUCLÍDEO \mathbb{R}^3	91
5.2.1	Preliminares	91
5.2.2	Traslación	92
5.2.3	Giro	92
5.2.4	Ejemplo	92
5.2.5	Simetría ortogonal respecto a un plano π cualquiera	93
5.2.6	Simetría respecto a un plano paralelo a un plano coordenado	93
5.2.7	Simetría central respecto a un punto	93
5.2.8	Isometrías del espacio euclídeo	94

5.2.9	Movimiento helicoidal	94
5.3	SEMEJANZA EN EL ESPACIO	94
5.3.1	Homotecia en el espacio	94
5.3.2	Ejemplo	94
5.3.3	Semejanza en el espacio	95
5.3.4	Ejemplo	96
5.4	EJERCICIOS RESUELTOS	96
6	SISTEMAS DE COORDENADAS EN EL PLANO Y EN EL ESPACIO	101
6.1	COORDENADAS POLARES EN EL PLANO	101
6.1.1	Coordenadas polares	101
6.1.2	Ejemplos	102
6.1.3	Relación entre coordenadas cartesianas y polares	103
6.1.4	Ejemplo	103
6.1.5	Curvas definidas mediante coordenadas polares	104
6.1.6	Ejemplo	104
6.1.7	Algunos lugares geométricos particulares	104
6.1.8	Representación gráfica de una función en polares. Simetrías	105
6.1.9	Ejemplo. La cardioide	105
6.1.10	Puntos de intersección de dos curvas en polares	106
6.1.11	Ejemplo	106
6.2	COORDENADAS CILÍNDRICAS EN \mathbb{R}^3	107
6.2.1	Coordenadas cilíndricas	107
6.2.2	Relación entre coordenadas cilíndricas y cartesianas	107
6.2.3	Algunos lugares geométricos particulares	107
6.3	COORDENADAS ESFÉRICAS EN EL ESPACIO	108
6.3.1	Coordenadas esféricas (o polares) del espacio	108
6.3.2	Relación entre coordenadas cartesianas o cilíndricas y esféricas	108
6.3.3	Algunos lugares geométricos particulares	109
6.4	CURVAS DADAS POR ECUACIONES PARAMÉTRICAS	110
6.4.1	Consideraciones previas	110
6.4.2	Parametrizaciones de curvas	110
6.4.3	Conceptos relativos a curvas parametrizadas	110
6.4.4	Casos particulares de parametrización de curvas	111
6.4.5	Ejemplo	112
6.4.6	La hélice circular	112
6.5	EJERCICIOS RESUELTOS	113
	BIBLIOGRAFÍA	119
	ÍNDICE DE TÉRMINOS	121

Capítulo 1

ESPACIOS VECTORIALES EUCLÍDEOS

1.1 EL ESPACIO VECTORIAL EUCLÍDEO \mathbb{R}^n

1.1.1 El producto escalar en \mathbb{R}^n

Sean $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ dos vectores de \mathbb{R}^n . Se define el **producto escalar** (euclídeo u ordinario) de los vectores \mathbf{x} e \mathbf{y} como $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 + \dots + x_n \cdot y_n$, y la **norma euclídea** (asociada) del vector \mathbf{x} como $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}}$.

Si denotamos \mathbf{x}^2 a $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}$ es obvio que $\|\mathbf{x}\|^2 = \mathbf{x}^2 = x_1^2 + \dots + x_n^2$.

Se verifican las siguientes propiedades básicas (de un producto escalar y norma) para $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ y $\lambda \in \mathbb{R}$:

(a) $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{y} \cdot \mathbf{x}$

(b) $\mathbf{x} \cdot (\mathbf{y} + \mathbf{z}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} + \mathbf{x} \cdot \mathbf{z}$

(c) $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} \geq 0$

(d) $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$

(e) $(\lambda \mathbf{x}) \cdot \mathbf{y} = \lambda (\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})$

(f) $\|\lambda \mathbf{x}\| = |\lambda| \|\mathbf{x}\|$

(g) $\|\mathbf{x}\| \geq 0$

(h) $\|\mathbf{x}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$

También se verifica:

$|\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}| \leq \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|$, Desigualdad de Cauchy-Schwarz

$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$, Desigualdad de Minkowski (triangular)

Al espacio vectorial \mathbb{R}^n provisto del producto escalar se le denomina **espacio vectorial euclídeo** \mathbb{R}^n .

Para seguir leyendo haga click aquí