UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA

El rol del Movimiento Browniano o proceso estocástico de Wiener estándar en las Finanzas

Apellidos, nombre	Burgos Simón, Clara Calatayud Gregori, Julia; Cortés López, Juan Carlos; Jornet Sanz, Marc; (clabursi @ posgrado.upv.es; jucagre@alumni.uv.es; jccortes@imm.upv.es; marjorsa@doctor.upv.es)
Departamento	Matemática Aplicada Instituto Universitario de Matemática Multidisciplinar
Centro	Facultad de Administración y Dirección de Empresas

1 Resumen de las ideas clave

En este artículo docente se introduce el proceso estocástico Movimiento Browniano o de Wiener, explicando el rol que desempeña en la modelización de la dinámica de subyacente cotizados en ambiente de incertidumbre.

2 Introducción

Un proceso estocástico o función aleatoria describe la evolución temporal de una variable aleatoria. En este trabajo se presentará, de forma intuitiva, uno de los procesos estocásticos más importantes en Estadística, y que se denomina el Movimiento Browniano o proceso estocástico de Wiener estándar y que desempeña un papel muy importante en la modelización de la dinámica de activos subyacente en Finanzas.

El Movimiento Browniano es un proceso estocástico (o función aleatoria) que toma valores continuos y depende de una variable independiente, que por conveniencia denota el tiempo, el cual también se considera como variable continua. El Movimiento Browniano ha resultado adecuado para describir el comportamiento de variables económico-financieras, como es el caso de los activos subyacentes cotizados.

El Movimiento Browniano es un proceso estocástico de tipo *gaussiano*. Se recuerda que un proceso estocástico $\{X(t;\omega): t \in T, \omega \in \Omega\}$ (siendo Ω el espacio muestral del espacio de probabilidad donde está definido el proceso estocástico), dice que es gaussiano si las distribuciones finito dimensionales de dicho proceso son de tipo gaussinas, en particular, $X(t;\cdot)$ es una variable aleatoria gaussiana para cada $t \in T$ fijo.

La definición o introducción del proceso Movimiento Browniano la realizó de forma intuitiva, en 1827, el botánico escocés Robert Brown quien lo utilizó para describir el movimiento aleatorio de las partículas de polen en el agua debido a la interactuación molecular. A este fenómeno se le denominó "Movimiento Browniano" en su honor. En el siglo XX, se descubrió la utilidad de dicho instrumento matemático en múltiples campos; en particular en el campo de las Finanzas, en el que se utilizó el Movimiento Browniano para la modelización del comportamiento de los precios de activos bursátiles. Louis Bachelier (1900) hizo uso de las mismas en su tesis doctoral titulada "La Teoría de la Especulación" para modelizar ciertos activos financieros. No obstante, el trabajo de L. Bachelier no fue comprendido en su época y durante mucho tiempo permaneció ignorado. Con posterioridad, fue Norbert Wiener quien consiguió formalizar matemáticamente el concepto de Movimiento Browniano y de ahí que, en ocasiones, se le denomine también proceso de Wiener (estándar). A lo largo de estas páginas, el Movimiento Browniano o proceso de Wiener estándar se denotará por: $\{B(t;\omega): t \geq 0, \omega \in \Omega\}$ o brevemente por $\{B(t): t \geq 0\}$, aunque en muchos textos se utiliza indistintamente la notación: $\{W(t): t \geq 0\}$.

El principal rol del Movimiento Browniano en Finanzas es que aparece en la expresión matemática de un importante modelo, denominado modelo Lognormal, formulado mediante la siguiente ecuación diferencial (denominada ecuación diferencial estocástica de tipo Itô), para describir la dinámica de un subyacente cotizado, $S(t)$, en cada instante temporal $t > 0$ a partir de un valor de cotización inicial conocido, s_0, y siendo μ y σ los dos parámetros de dicho modelo.

$$\left.\begin{array}{rcl} dS(t) & = & \mu S(t)dt + \sigma S(t)dB(t), \\ S(0) & = & s_0, \end{array}\right\}$$

Ec. 1. Modelo Lognormal para describir la dinámica de activos cotizados en ambiente de incertidumbre.

Utilizando un cálculo operacional propio para ecuaciones diferenciales estocásticas del tipo anterior, se puede probar que la solución del modelo Lognormal es el siguiente proceso estocástico, denominado Movimiento Browniano Geométrico.

$$S(t) = s_0 e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma B(t)}.$$

Ec. 2. El Movimiento Browniano Geométrico *que es solución del Modelo Lognormal.*

3 Objetivos

Los principales objetivos docentes de este artículo son que el alumno sea capaz de:

- Explicar el rol que desempeña el Movimiento Browniano o de Wiener en la desempeña en la modelización de la dinámica de subyacente cotizados en ambiente de incertidumbre.
- Definir formalmente las propiedades que definen o caracterizan el Movimiento Browniano o de Wiener.
- Deducir las principales propiedades estadísticas del Movimiento Browniano o de Wiener.
- Conocer cómo se pueden simular valores del Movimiento Browniano o de Wiener.

4 Definición formal del Movimiento Browniano o proceso estocástico de Wiener

A continuación, damos la definición formal del Movimiento Browniano. Es importante señalar que su definición no se da a través de una fórmula matemática, sino mediante una serie de propiedades estadísticas que lo caracterizan.

El Movimiento Browniano o proceso estocástico de Wiener estándar, denotado indistintamente por $\{B(t): t \geq 0\}$ ó $\{W(t): t \geq 0\}$, es un proceso estocástico que cumple las siguientes propiedades:

- **MB.1.** Comienza en el origen con probabilidad 1: $P[B(0) = 0] = 1$.
- **MB.2.** Los incrementos del Browniano, dados por $B(t) - B(s)$, son variables aleatorias independientes:

  $$B(t_1) - B(t_0);\ B(t_2) - B(t_1); \dots ; B(t_{n+1}) - B(t_n),$$

  con $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \cdots \leq t_{n+1} \leq +\infty$.
- **MB.3.** Tiene incrementos estacionarios:

$$B(t+\Delta t)-B(t)\overset{d}{=}B(s+\Delta t)-B(s), \quad \forall\, s,t\colon 0\le s\le t\le +\infty\,,$$

donde el símbolo $\overset{d}{=}$ denota que la igualdad anterior es el sentido de las distribuciones estadísticas.

- **MB.4.** Los incrementos del proceso son gaussianos o normales de media 0 y varianza $t-s$:

$$B(t)-B(s)\sim N[0;\, t-s\,], \quad \forall s,t\colon 0\le s\le t\le +\infty.$$

Obsérvese que considerando las propiedades MB.1 y MB.4., en el caso particular en que $s=0$, se deduce que

$$B(t)=B(t)-B(0)\sim N[0;t-0]=N[0;t],$$

es decir, que fijado t, la variable aleatoria $B(t)$ sigue una distribución normal o gaussiana de media 0 y desviación típica $\sqrt{t}$.

5 Propiedades estadísticas principales del Movimiento Browniano. Simulación numérica

En este apartado se introducen las principales propiedades estadísticas del Movimiento Browniano, las cuales se deducen de las propiedades que caracterizan su definición.

P.1. *Función Media*: A partir de la condición MB.4, se deduce que la función media del Movimiento Browniano es idénticamente nula:

$$\mu_{W(t)} = 0, \quad \forall\, t\ \ge 0.$$

P.2. Función Covarianza: Mide el grado de relación lineal entre las variables aleatorias, $B(s)$ y $B(t)$, que se obtienen al fijar dos instantes s y t, respectivamente. En efecto, veamos que se cumple

$$Cov\,[B(t),B(s)]=\min(s,t), \qquad \forall s,t\colon 0\le s\le t\le +\infty.$$

En efecto, si tomamos $0\le s\le t\le +\infty$, entonces utilizando la propiedad P.1 y las propiedades básicas del operador esperanza se tiene:

$$\begin{aligned}
Cov\,[B(t),B(s)] &= E\,[B(t)B(s)] - E[B(t)]E[B(s)] \\
&= E\big[B(t)B(s) - \big(B(s)\big)^2 + (B(s))^2\big] \\
&= E\left[\big(B(t)-B(s)\big)B(s) + \big(B(s)\big)^2\right] \\
&= E\big[\big(B(t)-B(s)\big)B(s)\big] + E[(B(s))^2] \\
&= E[(B(t)-B(s))(B(s)-B(0))] + E[(B(s))^2] \\
&= E[B(t)-B(s)]\,E[B(s)-B(0)] + E[(B(s))^2] \\
&= (E[B(t)] - E\,[B(s)])(E[B(s)]) - E[B(0)] + E[(B(s))^2] \\
&= E[(B(s))^2] \\
&= Var[B(s)] \\
&= s.
\end{aligned}$$

Obsérvese que si en la relación anterior tomamos $s = t$, se obtiene la propiedad MB.4, es decir, que la varianza del Movimiento Browniano es t:

$$Var[B(t)) = Cov\,[B(t), B(t)] = \min(t,t) = t, \qquad \forall t: 0 \leq t \leq +\infty.$$

P.3. $B(t)$ es $\frac{1}{2}$−autosemejante: Esta es, únicamente, una propiedad geométrica que formalmente se denota de la siguiente manera:

$$B(T \cdot t) \overset{d}{=} \sqrt{T} \cdot B(t), \quad \forall\, t \geq 0, \;\; \forall\, T \geq 0.$$

P.4. Las trayectorias muestrales de $B(t)$ son continuas, pero no son diferenciables en ningún punto. Se puede demostrar que $B(t)$ tiene trayectorias que no son de variación acotada, lo que significa que no son derivables (las trayectorias del Movimiento Browniano tienen puntos angulosos, es decir, con pico para todo instante t). Este comportamiento muestral se observa en la Gráfica 1.

En la Gráfica 1 también se ilustra que la media del Movimiento Browniano es cero (propiedad P1) y que su desviación típica (o varianza) crece con el tiempo (propiedad P2).

Para poder realizar predicciones de subyacentes cotizados según la Ec.2 se suelen realizar simulaciones del Movimiento Browniano. A continuación, se indica una forma muy sencilla (quizás la más elemental) de simular dicho proceso, aunque cabe señalar que el software especializado disponible tiene implementados otros algoritmos para realizar dicha simulación.

La simulación del el Movimiento Browniano que se presenta a continuación se basa en la simulación de variables aleatorias normales tipificadas o estándar. Concretamente se utilizará la siguiente identidad:

$$B(t) \overset{d}{=} \sqrt{t} Z, \quad Z \sim N[0; 1].$$

Ec. 3. Identidad para simular el Movimiento Browniano.

La anterior justificación de la identidad de la Ec.3 se detalla en la Tabla 1. Básicamente se trata de justificar que ambos miembros tienen la misma distribución, concretamente de tipo gaussiano, con la misma media y varianza.

	B(t)	$\sqrt{t}Z$
Distribución	gaussiana	Transformación lineal de una variable gaussiana
Media	$0 \quad [\text{MB } 4]$	$E[\sqrt{t}Z] = \sqrt{t}\,E[Z] = 0$
Varianza	$t \quad [\text{MB } 4]$	$Var[\sqrt{t}\ Z] = [Z] = (\sqrt{t})^2 Var[Z] = t$

Tabla 1. Justificación de la identidad de la Ec.3 para simular el Movimiento Browniano

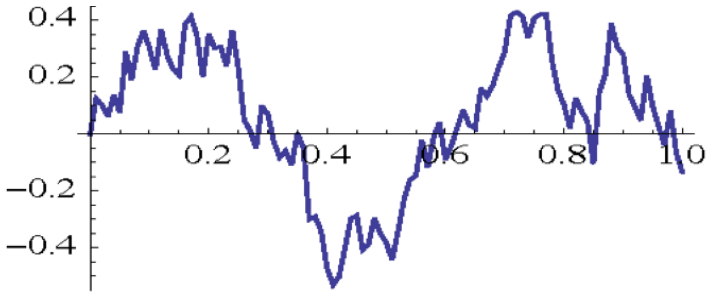

Gráfico 1. Simulación del Movimiento Browniano en el intervalo $[0,1]$.

6 Cierre

Con este trabajo se pretende introducir al lector a la definición del proceso estocástico de Wiener o Movimiento Browniano y a sus principales propiedades estadísticas, así como indicar el importante papel que desempeña en la modelización de activos subyacentes cotizados en ambiente de incertidumbre.

7 Bibliografía

[1] Øksendahl, B. (1998) Stochastic Differential Equations: An Introduction with Applications. Springer.

Se trata de un texto con enfoque matemático que introduce de forma rigurosa los principales conceptos sobre ecuaciones diferenciales estocásticas y procesos estocásticos, mostrando también ejemplos motivadores de su aplicación, destacando entre ellos algunas aplicaciones a Finanzas.

[2] Lamberton, D.; Lapeyre, B. (1996) Introduction to Stochastic Calculus to Finance. Chapman & Hall/CRC.

Este libro permite iniciarse al Cálculo Estocástico apropiado, denominado de tipo Itô, para resolver ecuaciones diferenciales estocásticas que aparecen en Finanzas.