Fórmula de Paridad para Opciones Financieras Europeas

Apellidos, nombre	Calatayud Gregori, Julia (jucagre@alumni.uv.es) Cortés López, Juan Carlos; (jccortes@imm.upv.es) Jornet Sanz, Marc; (marjorsa@doctor.upv.es)
Departamento	Matemática Aplicada Instituto Universitario de Matemática Multidisciplinar
Centro	Facultad de Administración y Dirección de Empresas

1 Resumen de las ideas clave

En este trabajo se establece una relación matemática, denominada Fórmula de Paridad, que relaciona las primas de una opción de compra u opción Call y de una opción de venta u opción Put de tipo europeo que han sido suscritas sobre un mismo activo subyacente, con un mismo período de vencimiento y un mismo precio de ejercicio. Se establecen dos versiones de la Fórmula de Paridad, dependiendo de si el activo subyacente paga o no dividendos durante la vida del contrato de la opción.

2 Introducción

El objetivo de este trabajo es establecer la denominada **Fórmula de Paridad** para opciones financieras de compra (Call) y de venta (Put) en el caso en que ambos contratos de opción se realizan sobre un mismo subyacente, tienen un mismo precio de ejercicio K y un mismo vencimiento T. La fórmula de paridad se establecerá únicamente en el caso en que las opciones son de tipo europeo, es decir, cuando el derecho (de compra, en el caso de la Call; y de venta, en el caso de la Put) solo se puede ejercer en el instante T de vencimiento del contrato. Para la deducción de la fórmula de paridad se distinguirán dos casos:

- Si el subyacente no paga ningún dividendo en el durante el período de vida de la opción.
- Si el subyacente sí paga un dividendo en el durante el período de vida de la opción.

De ello resultarán dos fórmulas, la segunda de las cuales generaliza la primera.

En lo que sigue de trabajo, $[t_0, T]$ denota el período de vida del contrato; S_{t_0} y S_T el valor del subyacente (normalmente una acción) al inicio y al final del período $[t_0, T]$, respectivamente; y C y P, son las primas de la opción de compra y de venta, respectivamente.

3 Objetivos

Los principales objetivos docentes de este artículo son que el lector sea capaz de:

- Conocer cómo establecer la fórmula de paridad para opciones de compra (Call) y de venta (Put) de tipo europeo para contratos sobre un mismo subyacente que no paga dividendos, un mismo vencimiento, y un mismo precio de ejercicio, utilizando para ello la construcción de carteras financieras apropiadas y el Principio de Ausencia de Oportunidades de Arbitraje.
- Conocer cómo establecer la fórmula de paridad para opciones de compra (Call) y de venta (Put) de tipo europeo para contratos sobre un mismo subyacente que sí paga un dividendo, un mismo vencimiento, y un mismo precio de ejercicio, utilizando para ello la construcción de carteras financieras apropiadas y el Principio de Ausencia de Oportunidades de Arbitraje.

4 Fórmula de Paridad cuando no hay pago de dividendos

Para la deducción de la fórmula vamos a construir dos carteras financieras, que denotaremos por A y B. Aunque, inicialmente la construcción de estas carteras puede parecer artificial, su utilidad se evidenciará posteriormente. No obstante, conviene recordar que al igual que las Matemáticas tienen sus propios métodos deductivos para demostrar resultados rigurosamente (como ejemplo, el método por reducción al absurdo, la inducción matemática, etc.), en Finanzas es usual la construcción de carteras para establecer resultados.

Cartera A ($t = t_0$)

1. Posición larga en la Put (es decir, se paga la prima P en el instante t_0 por tener derecho a vender el subyacente en el instante T al precio de ejercicio K).
2. Posición corta en la Call (es decir, se recibe del tenedor de la opción de compra la prima C en el instante t_0, a cambio de que el tenedor posea el derecho a comprar el subyacente en el instante T al precio de ejercicio K).

Cartera B ($t = t_0$)

1. Posición corta en una acción (es decir, se venderá el subyacente en el instante T) que en el instante t_0 tiene el valor S_{t_0}.
2. Se invierte la cantidad en efectivo $Ke^{-r(T-t_0)}$ que se resulta de actualizar al instante t_0 y al tipo de interés libre de riesgo $r > 0$, el precio de ejercicio de la Call (el cual se recibirá si el tenedor de la Call ejerce su derecho de compra del subyacente por la posición corta en la opción Call).

El valor de ambas carteras al inicio ($t = t_0$) es:

$$\begin{aligned}\text{Valor CARTERA A } (t = t_0) &= P - C,\\ \text{Valor CARTERA B } (t = t_0) &= Ke^{-r(T-t_0)} - S_{t_0}.\end{aligned}$$

Mientras que el valor de ambas carteras al vencimiento ($t = T$) es:

$$\begin{aligned}\text{Valor CARTERA A } (t = T) &= \max(K - S_T, 0) - \max(S_T - K, 0) = K - S_T,\\ \text{Valor CARTERA B } (t = T) &= \left(Ke^{-r(T-t_0)}\right)e^{r(T-t_0)} - S_T = K - S_T.\end{aligned}$$

Como los valores finales de ambas carteras son iguales, haciendo uso del Principio de Ausencia de Oportunidades de Arbitraje, los valores iniciales de ambas carteras deben coincidir, y por tanto se deduce

$$P - C = Ke^{-r(T-t_0)} - S_{t_0}.$$

Ecuación 1. Fórmula de Paridad Put-Call para opciones europeas cuyo subyacente no paga ningún dividendo durante la vida del contrato. Se asume un régimen de capitalización de interés compuesto continuo.

Con objeto de mostrar la flexibilidad en el razonamiento a la hora de construir las carteras "adecuadas" para deducir la Fórmula de Paridad anterior (algo similar a lo que ocurre en Matemáticas, donde un teorema puede demostrarse por razonamientos diferentes), a continuación, se establecerá la Fórmula de Paridad Put-Call construyendo otras carteras C y D, diferentes a las Carteras A y B anteriores. Además, definiremos estas nuevas carteras en el instante final $t = T$. Esto cambia el razonamiento expuesto en el enfoque utilizado con las Carteras A y B, pero como veremos es equivalente, y así enriquecemos nuestra exposición. Concretamente vamos a definir las siguientes carteras:

Cartera C ($t = T$)

1. Posición larga en una acción (es decir, se adquirirá el subyacente en el instante T).
2. Posición larga en la Put (es decir, se paga la prima P por tener derecho a vender el subyacente en el instante T al precio de ejercicio K).

Cartera D ($t = T$)

1. Posición larga en una opción Call (es decir, se paga la prima C por tener derecho a comprar el subyacente en el instante T al precio de ejercicio K).
2. En el instante t_0 se invierte la cantidad en efectivo $Ke^{-r(T-t_0)}$ en un bono libre de riesgo al tipo de interés $r > 0$, de modo que en el vencimiento $t = T$ se genera el efectivo K.

El valor de ambas carteras al vencimiento $(t = T)$ es:

$$\begin{aligned} \text{Valor CARTERA C } (t = T) &= S_T + \max(K - S_T, 0) = \max(K, S_T)\,, \\ \text{Valor CARTERA D } (t = T) &= \max(S_T - K, 0) + K = \max(S_T, K)\,. \end{aligned}$$

Mientras que el valor de ambas carteras al inicio $(t = t_0)$ es:

$$\begin{aligned} \text{Valor CARTERA C } (t = t_0) &= S_{t_0} + P, \\ \text{Valor CARTERA D } (t = t_0) &= Ke^{-r(T-t_0)} + C. \end{aligned}$$

Como los valores finales de ambas carteras son iguales, haciendo uso del Principio de Ausencia de Oportunidades de Arbitraje, los valores iniciales de las carteras también deben coincidir. Por tanto,

$$S_{t_0} + P = Ke^{-r(T-t_0)} + C,$$

y si reordenamos esta igualdad llegamos a

$$P - C = Ke^{-r(T-t_0)} - S_{t_0},$$

que es la relación de Paridad Put-Call establecida anteriormente en la Ec.1 vía la construcción de las Carteras A y B, en lugar de las carteras C y D.

Para terminar, es interesante observar que si en lugar de haber utilizado un régimen de capitalización a interés compuesto continuo, hubiéramos aplicado un régimen de capitalización a interés compuesto discreto, entonces la Fórmula de Paridad Put-Call de la Ec.1 se expresaría en la siguiente forma:

$$P - C = K(1+r)^{-(T-t_0)} - S_{t_0}.$$

Ecuación 2. Fórmula de Paridad Put-Call para opciones europeas cuyo subyacente no paga ningún dividendo durante la vida del contrato. Se asume un régimen de capitalización de interés compuesto discreto.

5 Fórmula de Paridad cuando sí hay pago de un dividendo

En el caso de que el subyacente (o acción) paga un dividendo durante el período de vida del contrato de la opción, debe tenerse en cuenta esta nueva característica porque si revisamos el razonamiento anterior, en el caso de la Cartera B se ha pedido prestada una acción (posición corta sobre una acción) y cuando se devuelva la acción a su propietario éste no solo deseará recuperar el valor correspondiente de la acción, sino también el dividendo que paga la acción en algún instante, digamos $t_1 \in [t_0, T]$. En lo sucesivo denotaremos el valor del dividendo en el instante inicial por d_0 (obsérvese que si $t_1 > t_0$, este valor está implícitamente actualizado en d_0). Por tanto, en este escenario, el valor final de la Cartera B será:

$$\text{Valor CARTERA B } (t = T) = K - S_T - d_0 e^{r(T-t_0)}.$$

Ahora ya no podemos igualar los valores iniciales de las Carteras A y B, ya que no son iguales. Para reformular la nueva situación se necesita reajustar la construcción de la Cartera B. Con esta motivación, construimos la siguiente

Cartera B' ($t = t_0$)

1. Posición corta en una acción (es decir, se venderá el subyacente en el instante T) que en el instante t_0 tiene el valor S_{t_0}.
2. Se invierte la cantidad en efectivo $Ke^{-r(T-t_0)} + d_0$ que se resulta de actualizar al instante t_0 y al tipo de interés libre de riesgo $r > 0$, el precio de ejercicio de la Call (el cual se recibirá si el tenedor de la Call ejerce su derecho de compra del subyacente por la posición corta en la opción Call) más el valor del dividendo actualizado.

El valor inicial de esta nueva cartera es:

$$\text{Valor CARTERA B' } (t = t_0) = Ke^{-r(T-t_0)} + d_0 - S_{t_0},$$

y su valor final será (obsérvese que se tiene en cuenta que el dividendo capitalizado se debe devolver al propietario de la acción que se pidió en corto en el instante inicial t_0)

$$\text{Valor CARTERA B' } (t = T) = K + d_0 e^{r(T-t_0)} - S_T - d_0 e^{r(T-t_0)} = K - S_T.$$

Este valor final es el mismo que el que tiene la Cartera A (la cual no hemos modificado respecto de la situación descrita en el apartado anterior), por lo tanto, haciendo uso del Principio de Ausencia de Oportunidades de Arbitraje, los valores iniciales de ambas carteras deben coincidir.

De este modo, se deduce

$$P - C = Ke^{-r(T-t_0)} + d_0 - S_{t_0}.$$

Ecuación 3. Fórmula de Paridad Put-Call para opciones europeas cuyo subyacente sí paga un dividendo durante la vida del contrato. Se asume un régimen de capitalización de interés compuesto continuo.

Si en lugar de haber utilizado un régimen de capitalización a interés compuesto continuo, se hubiera aplicado un régimen de capitalización a interés compuesto discreto, entonces la Fórmula de Paridad Put-Call de la Ec.3 se expresaría en la siguiente forma equivalente

$$P - C = K(1 + r)^{-(T-t_0)} + d_0 - S_{t_0}.$$

Ecuación 4. Fórmula de Paridad Put-Call para opciones europeas cuyo subyacente sí paga un dividendo durante la vida del contrato. Se asume un régimen de capitalización de interés compuesto discreto.

Por último señalar que si durante la vida de la opción, la acción pagara más de un dividendo, digamos $d_1, d_2, \dots, d_N \in [t_0, T]$ en diferentes instantes, por ejemplo, $t_1, t_2, \dots, t_N \in [t_0, T]$, respectivamente, la Fórmulas de Paridad correspondientes serían análogas a las dadas en las Ecs. 3 y 4 siendo:

$$d_0 = d_1 e^{-r(T-t_1)} + d_2 e^{-r(T-t_2)} + \cdots + d_N e^{-r(T-t_N)} \quad \text{si} \quad r \text{ es compuesto continuo,}$$

y

$$d_0 = d_1(1 + r)^{-(T-t_1)} + d_2(1 + r)^{-(T-t_2)} + \cdots + (1 + r)^{-(T-t_N)} \quad \text{si} \quad r \text{ es compuesto discreto.}$$

6 Ejemplos

En este apartado se ilustrará, con dos ejemplos sencillos, el uso de las Fórmulas de Paridad Put-Call para opciones europeas cuyo subyacente no paga y sí paga un dividendo durante la vida el contrato.

Ejemplo 1

Supongamos que un inversor ha comprado una opción de compra Call. El contrato se ha emitido con las siguientes condiciones:

- La acción (subyacente) actualmente cotiza al valor de $S_{t_0} = 30€$.
- El tipo de interés libre de riesgo es del $r = 1\%$ anual compuesto de forma continua.
- La prima de la opción Call es de $C = 3€$.
- El precio de ejercicio del contrato es de $K = 28€$.
- El contrato de la opción Call vencerá en $T - t_0 = 3$ meses.

Utilizando la Fórmula de Paridad Put-Call sin pago de dividendos (dada en la Ec.1), vamos a determinar el valor de la prima de una opción Put sobre el mismo tipo de contrato (mismo precio de ejercicio, vencimiento y subyacente), de modo que se evite la ausencia de oportunidades de arbitraje en el mercado. En efecto,

$$P - C = Ke^{-r(T-t_0)} - S_{t_0},$$

$$P = C + Ke^{-r(T-t_0)} - S_{t_0}.$$

$$P = 3 + 28e^{-0.01\left(\frac{3-0}{12}\right)} - 30 = 0.93€.$$

Ejemplo 2

Supongamos las mismas condiciones que en el Ejemplo 1, pero en el caso en la acción paga un dividendo de $1.5€$ un mes después del inicio del contrato de la opción. Obsérvese por tanto que $d_0 = 1.5e^{-0.01\left(\frac{1-0}{12}\right)} = 1.49875€$. Utilizando la Fórmula de Paridad Put-Call con pago de dividendos (dada en la Ec.3), vamos a determinar el valor de la prima de una opción Put sobre el mismo tipo de contrato (mismo precio de ejercicio, vencimiento y subyacente), de modo que se evite la ausencia de oportunidades de arbitraje en el mercado. En efecto,

$$P - C = Ke^{-r(T-t_0)} + d_0 - S_{t_0},$$

$$P = C + Ke^{-r(T-t_0)} + d_0 - S_{t_0}.$$

$$P = 3 + 28e^{-0.01\left(\frac{3-0}{12}\right)} + 1.49875 - 30 = 2.42884€.$$

7 Cierre

En estas páginas se ha expuesto de forma razonada la deducción de las Fórmulas de Paridad para opciones de compra (Call) y de venta (Put) de tipo europeo sobre un mismo subyacente, precio de ejercicio y vencimiento, considerando dos posibilidades: (1) el subyacente no paga ningún dividendo durante la vida del contrato; (2) el subyacente paga un dividendo durante la vida del contrato. El trabajo expuesto sirve como motivación para estudiar fórmulas análogas para opciones de tipo americano, es decir, contratos de opciones donde el derecho de compra o de venta puede ejercerse en cualquier instante durante la vida del contrato de opción.

8 Bibliografía

[1] J.C. Hull: Options, Futures and Other Derivatives, Prentice Hall, 5ª edición, 2003.

Se trata de un texto excelente donde puede encontrarse una introducción a las opciones financieras desde un enfoque que combina los aspectos cualitativos financieros con un nivel matemático elemental.