

# Álgebra aplicada en el mundo de las telecomunicaciones

**José Antonio Montero Morales**  
UNIVERSIDAD RAMÓN LLULL  
<http://www.salleURL.edu/montero>

---

## Abstract

*En este documento se expone un ejercicio de modelización matemática que se propone a alumnos de ingeniería de telecomunicaciones durante el primer curso, en la asignatura de álgebra lineal. Aunque la modelización matemática hace referencia generalmente a la construcción de modelos que ayudan a realizar predicciones o a explicar fenómenos complejos, en este caso debe interpretarse como una herramienta docente que permite llevar a la práctica con los estudiantes una actividad organizativa y estructurada mediante la cual se utilizan conocimientos previamente adquiridos para descubrir regularidades y relaciones en situaciones pertenecientes al mundo real.*

---

## 1 Introducción

Cuando un alumno se encuentra ante un problema real debe enfrentarse a diferentes retos. En primer lugar, debe ser capaz de identificar las herramientas matemáticas que pueden ayudarle a resolver el problema al que se enfrenta. Seguidamente, tiene que trasladar su problema real a un escenario matemático; es decir, debe conectar mundo real con mundo matemático de manera que el problema inicial pueda ser modelado en términos matemáticos. Una vez realizada esta vinculación entre ambos mundos (que puede llevar asociada una simplificación del problema), el tercer paso consiste en la resolución matemática del problema. Finalmente, el resultado matemático obtenido debe ser exportado e interpretado nuevamente en el contexto real inicial (figura 1). En el caso de la formación de futuros ingenieros este enfoque es especialmente necesario.

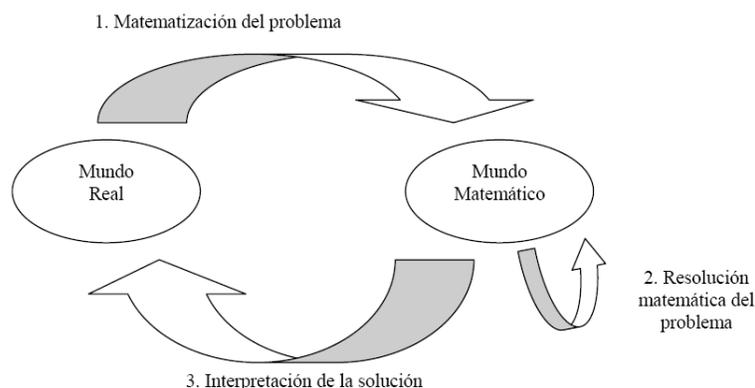


FIGURA 1: PROCESO SEGUIDO EN LA MODELIZACIÓN MATEMÁTICA DE UN PROBLEMA.

En el caso que se presenta en el punto siguiente, los alumnos se enfrentan al problema que supone interpretar correctamente la información recibida por un receptor en un sistema de comunicaciones digitales.

## 2 Diseño del diagrama de bloques de un demodulador digital QPSK

Con la presentación en clase de este ejemplo de aplicación el alumno comprueba que las herramientas algebraicas también pueden aplicarse en el mundo de las comunicaciones digitales. Esta presentación se lleva a cabo utilizando una aplicación informática diseñada expresamente con esta finalidad. Dicha aplicación se denomina ALGTEC (Álgebra y Tecnología) y los detalles de la misma pueden consultarse en [1] y [2]. En primer lugar se expone al alumno la necesidad de modular la información binaria que desea ser transmitida a través de un canal de transmisión. De todas las modulaciones digitales disponibles, la explicación se centra en las modulaciones de fase. El ejemplo que se presenta utiliza la modulación QPSK. El objetivo perseguido es el diseño del diagrama de bloques del sistema receptor que recibirá la señal transmitida, de forma que reconozca debidamente la información enviada por el emisor. En el ejemplo se asume que el problema del sincronismo entre emisor y receptor está solucionado. Para profundizar en los detalles referentes a la modulación QPSK puede consultarse [3].

Las señales (símbolos) que proceden del emisor se generan a partir de una combinación lineal de dos señales:  $\cos(w_0t)$  y  $\sin(w_0t)$ , donde representa  $w_0$  la pulsación de la señal portadora. Es decir,  $s_i(t) = A_1 \cos(w_0t) + B_1 \sin(w_0t)$ , donde  $s_i(t)$  representa uno de los 4 símbolos posibles que pueden enviarse desde el emisor. Los coeficientes  $A_1$  y  $A_2$  pueden tomar dos valores diferentes, 1 o  $-1$ , según el símbolo enviado. En el ejemplo podemos enviar 4 símbolos distintos, y

cada uno de ellos representa el envío de 2 bits: 00, 01, 10 o 11.

Cuando la señal enviada  $s_i(t)$  desde el emisor atraviesa el canal de transmisión, queda alterada por éste, debido al ruido, interferencias y otros posibles efectos que se dan en el mismo. Por este motivo, la señal que llega al receptor ya no es  $s_i(t)$ , sino  $s'_i(t)$ . El receptor, a partir de  $s'_i(t)$  debe ser capaz de deducir cuál fue la señal  $s_i(t)$  transmitida realmente (ver figura 2).

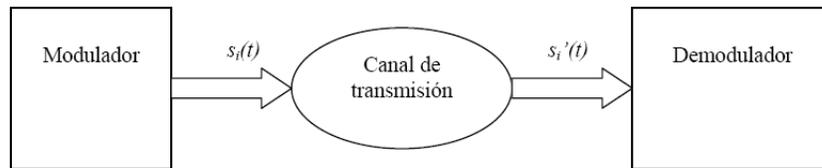


FIGURA 2: ESQUEMA DE UN SISTEMA DE COMUNICACIONES DIGITALES.

A lo largo de la exposición se va planteando el problema en términos algebraicos. El símbolo que es enviado desde el emisor es generado a partir de la base ortogonal  $\mathcal{B}$  formada por las señales  $\cos(w_0t)$  y  $\sin(w_0t)$ . Es decir, el símbolo emitido pertenece al subespacio engendrado por la base ( $s_i(t) \in \langle \mathcal{B} \rangle$ ). La señal recibida,  $s'_i(t)$ , en general, no pertenece a  $\langle \mathcal{B} \rangle$ , pero podemos proyectarla sobre dicho subespacio para encontrar la mejor aproximación de  $s'_i(t)$  sobre el mismo. Dicha aproximación la denominaremos  $\hat{s}'_i(t)$ , y se calcula del siguiente modo:

$$\hat{s}'_i(t) = \frac{\langle s_i(t), \cos(w_0t) \rangle}{\langle \cos(w_0t), \cos(w_0t) \rangle} \cos(w_0t) + \frac{\langle s_i(t), \sin(w_0t) \rangle}{\langle \sin(w_0t), \sin(w_0t) \rangle} \sin(w_0t).$$

Para decidir cuál de los 4 símbolos  $s_i(t)$  posibles se emitió, podemos comprobar a cuál de ellos se acerca más la señal  $\hat{s}'_i(t)$ . Es decir, podemos calcular la distancia entre cada símbolo posible y  $\hat{s}'_i(t)$ , y decidir que se emitió aquel símbolo cuya distancia (error) sea menor. En la parte final de la exposición el alumno comprueba que el diagrama de bloques del demodulador está formado por los módulos necesarios para realizar estas operaciones algebraicas, y coincide con el que puede consultarse en el capítulo 4 del libro referenciado en [3].

Al final de la exposición se pone a disposición del alumno un módulo de experimentación que le permite introducir una secuencia binaria a transmitir utilizando la modulación QPSK, y también le permite modificar el nivel de ruido (variable aleatoria con distribución Gaussiana) que se añade a la señal modulada. Dicho módulo permite visualizar la señal modulada enviada y la señal recibida. También aparecen representados sobre el plano todos los posibles símbolos enviados, expresados en componentes respecto a la base  $\mathcal{B}$ , y las proyecciones sobre el mismo plano de los símbolos recibidos en el receptor. De este modo se puede observar fácilmente cuál es la información demodulada por el receptor. Si se incrementa el ruido introducido por el canal de transmisión el alumno puede comprobar cómo finalmente el sistema se equivoca al demodular, ya que el error más pequeño ya no corresponde siempre con el símbolo correcto enviado.



FIGURA 3: PANTALLAS DE ALGTEC. FASE DE EXPOSICIÓN DEL PROBLEMA.

En la figura 3 se muestran dos pantallas de la aplicación ALGTEC pertenecientes a la exposición del problema y en la figura 4 puede consultarse otra perteneciente al módulo de experimentación correspondiente al ejemplo descrito.

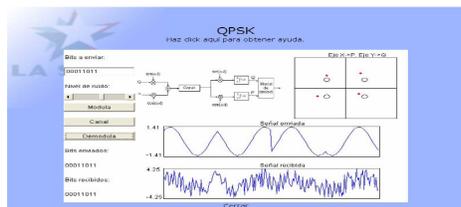


FIGURA 4: PANTALLA DE ALGTEC. MÓDULO DE EXPERIMENTACIÓN DEL PROBLEMA PRESENTADO.

### 3 Conclusiones

La incorporación a las clases de problemas procedentes del mundo técnico que son modelados y resueltos aplicando herramientas algebraicas incluidas en el temario de la asignatura persigue fundamentalmente dos objetivos: (i) aumentar la motivación de los alumnos hacia la asignatura, y (ii) potenciar en ellos su capacidad de asociar elementos de un problema real con herramientas y conceptos algebraicos con el fin de resolver dicho problema.

Desde hace varios años la asignatura de álgebra lineal impartida a futuros ingenieros de telecomunicaciones en *Enginyeria i Arquitectura La Salle* (Universidad Ramón Llull) incorpora numerosos ejercicios y ejemplos de este tipo que son estudiados por los alumnos en grupos aplicando el aprendizaje cooperativo como estrategia de trabajo. El análisis realizado a partir de los datos obtenidos de los alumnos durante estos años permite confirmar un claro avance en la dirección apuntada por los dos objetivos indicados anteriormente. Para más detalles sobre esta experiencia, consultar [4].

### 4 Bibliografía

- [1] J. A. Montero, E. Martínez, J. A. Morán, F. Alías, J. Rodríguez. "ALGTEC: Un complemento a la enseñanza del álgebra lineal en ingeniería de telecomunicaciones". Actas de la III Conferencia internacional sobre educación, formación, nuevas tecnologías y e-learning empresarial. Virtual Educa. Valencia. 2002.
- [2] J. A. Montero, F. Alías, J. Rodríguez, L. Formiga. "ALGTEC como base de una nueva metodología constructivista para la docencia del álgebra lineal en ingeniería". Actas del XIX simposium nacional de la unión científica internacional de radio (URSI). Barcelona. 2004.
- [3] Bernard Sklar. "Digital Communications. Fundamentals and Applications". Prentice Hall. Segunda edición. 2001.
- [4] J. A. Montero, J. A. Morán, J. Gómez, F. Alías, L. Vicent, D. Badia. "Moving from classical teaching to active learning in algebra for engineers". Actas correspondientes al International seminar on innovative learning. Valladolid. 2006.