

Realidad y educación: un modelo didáctico para la catástrofe del Prestige

Luis M. García Raffi

INSTITUTO DE MATEMÁTICA PURA Y APLICADA

lmgarcia@mat.upv.es

E. A. Sánchez Pérez

INSTITUTO DE MATEMÁTICA PURA Y APLICADA

[easancpe@mat.upv.es](mailto:esasncpe@mat.upv.es)

Mario Sopena Novales

UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE VALENCIA

Abstract

En este trabajo presentamos un modelo didáctico sencillo para la descripción del movimiento de un vertido de un material líquido menos denso que el agua en el mar. El problema ha sido diseñado según un planteamiento en diferentes niveles, para permitir su uso como herramienta en la enseñanza de ciertos conceptos fundamentales de las matemáticas y la física en la universidad, o incluso en el segundo curso del bachillerato.

In this work we present an easy didactic model for the description of the movement of a liquid less dense than the water on the sea. The problem has been designed from a multi-level point of view, in order to use it as a tool for the teaching of several fundamental concepts of physics and mathematics at the university, or even in the last course of the high school.

1 Introducción

La utilización de temas de actualidad en la enseñanza es uno de los recursos tradicionales que permiten captar la atención, y por lo tanto aumentar la motivación, de los estudiantes sobre los contenidos que se estudian. Este efecto de refuerzo también es perceptible en la etapa universitaria, en la que la madurez intelectual de los alumnos puede permitir relacionar sin trabas los conceptos científicos teóricos con motivaciones externas a la propia materia. La elección del tema sobre el que desarrollar modelos físico-matemáticos de contenido didáctico es una variable de primera magnitud para introducir las herramientas propias de la modelización y otros elementos relevantes de los temarios. Si, además, el tema ha producido un impacto social importante, como en el caso de catástrofes provocadas por el ser humano que tienen consecuencias medioambientales significativas, su propia elección puede constituir una gran ventaja para el acercamiento de los estudiantes a los conceptos abstractos que finalmente se manejan en el modelo.

En este contexto, cualquier persona que haya estado en contacto con el mundo universitario — en realidad, en cualquier nivel educativo— en los meses posteriores a la catástrofe del Prestige, en el que miles de toneladas de fuel fueron arrojadas al mar, sabe que el subsiguiente desastre ecológico conmovió profundamente a toda la comunidad, y especialmente a los estudiantes, muchos de los cuales se organizaron para ayudar a paliar, en la medida de sus posibilidades, las consecuencias de la catástrofe. Además, desde los primeros momentos de la catástrofe, salieron a la palestra los científicos para hablar de las consecuencias de la misma en base a modelos sobre la difusión del contaminante, su influencia en el ecosistema, etc. Este es el motivo por el cual entendemos que el tema puede ser muy interesante para desarrollar un proyecto de modelización matemática, en el primer o segundo curso de las carreras científicas y técnicas. Los autores de este trabajo llevamos algunos años desarrollando este tipo de herramientas para el estudio de la física y las matemáticas en la universidad, tanto en asignaturas generales con contenidos relacionados con estas disciplinas, como en el marco de asignaturas específicas de modelización. Básicamente, nuestra idea es que los trabajos de modelización matemática puede ser una herramienta útil para la comprensión y fijación de los conceptos abstractos, puesto que, si estos proyectos están correctamente diseñados, para su ejecución es necesario entender y saber utilizar sus propiedades. El lector interesado puede encontrar más información sobre esta línea de trabajo en los artículos [5], [6] y [7].

El diseño del modelo que se presenta a continuación utiliza conceptos elementales de cinemática, cálculo diferencial e integral, correspondientes a los temarios de las asignaturas habituales del primer (o segundo) curso de las carreras técnicas o de contenido científico. Debemos subrayar que nuestra intención es completamente didáctica, y no que el modelo se ajuste completamente al fenómeno que pretende describir. Pretendemos, sobre todo, que los resultados del modelo sean verosímiles, lo cual permitirá a los estudiantes interactuar con éste variando las condiciones, y comprobando que esas variaciones producen los efectos previstos en el modelo. El planteamiento sigue un esquema de complejidad progresiva, de forma que puede ser utilizado en distintas etapas formativas de los estudiantes. Asimismo, se sugieren posibles vías de perfeccionamiento del modelo, en aquellos puntos en los que es posible.

2 Descripción del modelo

El modelo propuesto está dividido en dos partes. En primer lugar nos encargamos del vertido del barco desde el fondo del mar y posteriormente introducimos una componente de viento que desplazará la mancha generada por el vertido. Esta aproximación de complejidad creciente

permite acercarse al problema desde distintos puntos de vista, incluyendo en el paso siguiente lo desarrollado en el paso anterior.

Para representar la mancha de petróleo hemos optado, en primer lugar, por una función del tipo $\rho(\theta, t)$. Esta función nos dará para cada ángulo θ y cada instante de tiempo t , el radio de la mancha, considerando como centro de coordenadas el lugar del hundimiento del barco. Para la segunda parte del modelo vamos a dividir la mancha en otras más pequeñas que juntas representarán toda la marea negra. Esto nos permitirá buscar el par $\{\rho(t), \theta(t)\}$ que para cada instante de tiempo nos dará la posición de cada una de las pequeñas manchas. Por lo tanto tendremos tantos pares de funciones $\{\rho(t), \theta(t)\}$ como divisiones hagamos de la mancha inicial.

3 Modelo de marea negra

3.1 Hundimiento del barco

Nuestro modelo comienza en el momento en el que el barco naufraga, produciendo un primer vertido, para seguir expulsando fuel al mar una vez hundido. Debido a que el fuel es menos denso que el agua de mar, éste emergerá a la superficie produciendo una mancha. Una aproximación a la forma de esta mancha es considerarla como un disco, sin espesor, y por tanto tratarla como un área. Así pues, podemos afirmar que el área de la mancha que se formará en la superficie será proporcional a la cantidad de fuel vertido por el barco durante un determinado tiempo. Podemos representar esta relación mediante la ecuación

$$V_v dt = \delta dA,$$

donde V_v es la velocidad del vertido, δ es la densidad superficial del fuel y A el área ocupada por la mancha. Suponiendo que la mancha es circular ($A = \pi\rho^2$), obtenemos

$$dA = 2\pi\rho d\rho \Rightarrow V_v dt = \delta 2\pi\rho d\rho.$$

Una primera aproximación a la solución sería considerar la velocidad del vertido y la densidad constantes. Así, suponiendo que el radio inicial de la mancha es ρ_0 , obtendríamos la solución

$$\int_0^t V_v dt = \int_{\rho_0}^{\rho} \delta 2\pi\rho d\rho \Rightarrow V_v t = \delta\pi(\rho^2 - \rho_0^2) \Rightarrow \rho = \sqrt{\rho_0^2 + \frac{V_v t}{\delta\pi}}.$$

Con el fin de aumentar la complejidad, y por lo tanto la adecuación del modelo, planteamos, inicialmente, una velocidad del vertido creciente que satura en el momento en el que el barco ya no se agrieta más. Sin embargo, tras consultar los Informes del Comité Científico y Asesor del Prestige, constatamos que esta hipótesis era inadecuada. Las grietas por las que el barco expulsa fuel se generaron a consecuencia del impacto del pecio en el fondo, no produciéndose más posteriormente. Únicamente con el enfriamiento del fuel, y el consiguiente aumento de viscosidad, disminuía la velocidad a la que el fuel salía de los tanques [4]. Esto indicaba que nuestra primera aproximación era errónea. Para simular el verdadero fenómeno podemos usar una función decreciente que parta de un valor inicial fijado por nosotros, como por ejemplo

$$V_v(t) = ke^{-at},$$

donde la constante k representa la velocidad inicial del vertido, y la constante a , la rapidez con que disminuye la velocidad del mismo. Resolviendo la ecuación planteada anteriormente, tras haber introducido esta nueva función para la velocidad de vertido, obtenemos

$$\int_0^t ke^{-at} dt = \int_{\rho_0}^{\rho} \delta 2\pi\rho d\rho \Rightarrow \frac{k}{a}(1 - e^{-at}) = \delta\pi(\rho^2 - \rho_0^2) \Rightarrow \rho = \sqrt{\rho_0^2 + \frac{k}{\delta\pi a}(1 - e^{-at})}.$$

Esta aproximación también nos permite obtener más información sobre el propio modelo. Puesto que tenemos la evolución de la velocidad del vertido para cualquier valor del tiempo t , si integramos con respecto a t dicha velocidad, obtendremos la masa total vertida M . Su valor es

$$\int_0^t k e^{-at} dt = \frac{k}{a} (e^{-at} \Big|_0^\infty) = \frac{k}{a} = M.$$

En este punto podemos realizar la primera representación gráfica. Para ello debemos dar valores concretos a nuestras variables usando los datos del hundimiento del Prestige obtenidos en [1] y [2]. La velocidad del vertido a día 10/12/2002 es de $125 \text{ Tm}/\text{dia}$. Eso nos permite obtener un valor adecuado para la constante k . Puesto que la cantidad de fuel en el momento del hundimiento (M) era de 59.000 Tm , obtenemos $a = 2,12 \cdot 10^{-3} (\text{dias})^{-1}$. La densidad del fuel la fija en $1.012 \text{ kg}/\text{m}^3$. Puesto que nosotros trabajamos con densidad superficial y los datos son para densidad volumétrica, deberemos suponer cierto grosor a nuestra mancha. Para obtener este grosor vamos a recurrir a otro dato, el radio de la mancha inicial debida al naufragio. Los datos nos dicen que la masa de fuel expulsada en el momento del naufragio era de 18.000 Tm , y de [3] sabemos que el diámetro de la mancha era de aproximadamente 5 millas (1 milla marina son 1852 m). Por lo que con $M = \delta \pi \rho_0^2 \gamma$, obtenemos $\gamma \approx 6,6 \text{ cm}$. Así pues,

$$\delta = 1,012 \text{ kg}/\text{m}^3 \cdot 0,066 \text{ m} = 0,0668 \text{ kg}/\text{m}^2 = 0,0668 \cdot 10^{-3} \text{ Tm}/\text{m}^2.$$

Resumiendo:

$\rho = \sqrt{\rho_0^2 + \frac{k}{\delta \pi a} (1 - e^{-at})}$	$a = 2,12 \cdot 10^{-3} \text{ 1}/\text{dia}$ $k = 125 \text{ Tm}/\text{dia}$	$0,0668 \cdot 10^{-3} \text{ Tm}/\text{m}^2$ $\rho_0 = 9260 \text{ m}$
---	--	---

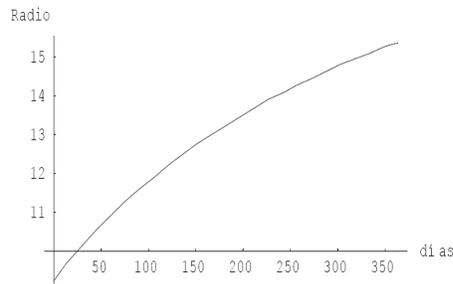


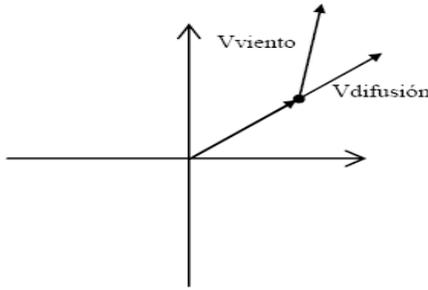
FIGURA 1.

Dibujamos los resultados en la Figura 1, donde se aprecia la evolución del radio de la mancha en función del número de días desde el hundimiento. Un detalle importante para el modelo propuesto es que la mancha no se mueve del lugar donde se produjo el hundimiento; únicamente aumenta su tamaño. En la gráfica podemos ver como a ese ritmo de expulsión, el fuel sigue saliendo casi a la misma velocidad que, poco a poco, va disminuyendo. Si cambiamos el orden de magnitud del parámetro a , tomando por ejemplo $a = 2 \cdot 10^{-2}$, cambiaríamos las características del modelo, que saturaría aproximadamente a los 200 dias .

3.2 Viento

Si incluimos el viento en nuestro modelo debemos usar una nueva perspectiva. En vez de pensar en la mancha como un todo indivisible, la vamos a suponer formada por muchas manchas más pequeñas, cada una de ellas gobernada por un sistema de ecuaciones de movimiento (aproximación del punto material).

Supongamos una mancha puntual como la de la figura:



Esa mancha se ve afectada por la difusión de la propia mancha que va emergiendo, y que tiene dirección radial, y por una componente de viento de dirección arbitraria. Podemos pues escribir

$$v = (v_{vx} + v_{difx}, v_{vy} + v_{dify}).$$

Si lo expresamos en coordenadas polares, obtenemos

$v_{vx} = v_v(t) \cos(w(t))$	$v_{difx} = v_{dif}(t) \cos(w(t))$
$v_{vy} = v_v(t) \text{sen}(w(t))$	$v_{dify} = v_{dif}(t) \text{sen}(w(t))$
$x(t) = \rho(t) \cos(w(t))$	$v_x(t) = \frac{d\rho}{dt} \cos(w(t)) - \rho(t) \text{sen}(w(t)) \frac{dw}{dt}$
$x(t) = \rho(t) \text{sen}(w(t))$	$v_y(t) = \frac{d\rho}{dt} \text{sen}(w(t)) + \rho(t) \cos(w(t)) \frac{dw}{dt}$

Operando, resulta

$$\begin{aligned} (\dot{\rho} - v_{dif}) \cos(w) - \rho \dot{w} \text{sen}(w) &= v_v \cos(w) \\ (\dot{\rho} - v_{dif}) \text{sen}(w) + \rho \dot{w} \cos(w) &= v_v \text{sen}(w) \end{aligned}$$

donde hemos quitado de la notación la referencia a la dependencia temporal, y las derivadas con respecto al tiempo se expresan como un punto sobre la variable correspondiente. En este punto conviene hacer notar el hecho de que el sistema resultante es un sistema de ecuaciones diferenciales acoplado, cuya solución no es en absoluto trivial. Para resolverlo conviene acudir a métodos numéricos. En este caso acudimos al programa MATHEMATICA. Para resolver el sistema necesitamos, previamente, calcular $v_{dif}(t)$, para lo que derivaremos la ecuación del radio de la mancha obtenida en el apartado anterior, resultando

$$v_{dif}(t) = \frac{ke^{-at}}{2\pi d \sqrt{\frac{k}{a\pi d}(1 - e^{-at}) + \rho_0^2}}.$$

También los parámetros usados en la velocidad de difusión son los correspondientes al apartado anterior. Además, como coordenadas iniciales de nuestra mancha puntual tomaremos $r = 9260 \text{ m}$ (el ρ_0 del apartado anterior) y $w = \frac{\pi}{2}$. Como viento tomaremos un viento flojo (grado 3), según la escala Beaufort, lo que corresponde a una velocidad de 12 Km/hora (288.000 m/dia), en la dirección $-\frac{\pi}{4}$. Conviene puntualizar que, tal y como se ha planteado el modelo, la partícula se mueve solidariamente con el viento. En realidad, sólo una fracción de la velocidad del viento será transmitida a la partícula mediante un proceso físico fuera del interés de nuestro modelo. Así, para simular esto, multiplicaremos el módulo del viento por una constante cuyo valor lo elegimos con la única limitación de la consideración hecha anteriormente. Podemos tomar, por ejemplo, un valor de 0,1, con lo que el módulo del viento queda en 28.800 m/dia . Con todos estos datos ya podemos resolver el sistema de ecuaciones diferenciales en MATHEMATICA. Presentamos el código a continuación.

```

a = 2.12 10^-3; d = 0.0668 10^-3; k = 125; r0 = 9260;
vdif[t_] := (k Exp[-t a]) / (2 Pi d Sqrt[ k (1-Exp[-t a])/(Pi a
d) + r0^2]);
v0[t_] := 288 10^3; w0[t_] := -Pi/4; wini = Pi/2; rini = r0; tini = 0;
sol = NDSolve[{ (r'[t] - vdif[t]) * Cos[w[t]] - r[t] * Sin[w[t]] * w'[t] ==
v0[t] * Cos[w0[t]], r[tini] == rini,
(r'[t] - vdif[t]) * Sin[w[t]] + r[t] * Cos[w[t]] * w'[t] ==
v0[t] * Sin[w0[t]], w[tini] == wini}, {r, w}, {t, tini, 30}];
ParametricPlot[Evaluate[{r[t] * Cos[w[t]] / 10^3, r[t] * Sin[w[t]] / 10^3} /. sol],
{t, tini, 30}, PlotRange -> All, AxesLabel -> {km, km}];

```

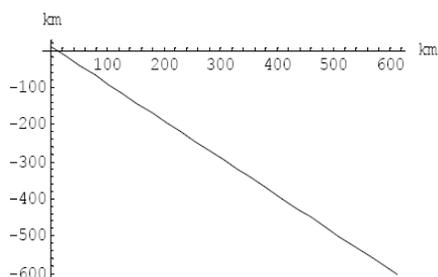


FIGURA 2.

El resultado, para una evolución de la mancha de 30 días, se puede observar en la Figura 2. Vemos como se mueve en un mes, aproximadamente, 600 *Km* en la dirección del viento. Además, podemos observar en el gráfico como la evolución de la misma viene dada únicamente por la fuerza del viento. Nuestro modelo muestra que la fuerza de difusión de la mancha —debida a que continuamente el barco expulsa fuel— no es comparable a la fuerza del viento que hemos usado. Sin embargo, podemos introducir los parámetros correspondientes a un viento más flojo, y ver el efecto de las dos fuerzas al mismo tiempo.

Además, con el fin de avanzar en la complejidad del modelo, podemos introducir distintas clases de viento. Como primer tipo, presentamos un viento que va cambiando de dirección de forma periódica. Para ello introduciremos, a un viento que sopla en la dirección $-\frac{\pi}{2}$, una variación sinusoidal. La resolución es idéntica introduciendo los nuevos valores:

```
v0[t_] := 288 ; w0[t_] := -Pi/2 * Sin[2*Pi*t/12];
```

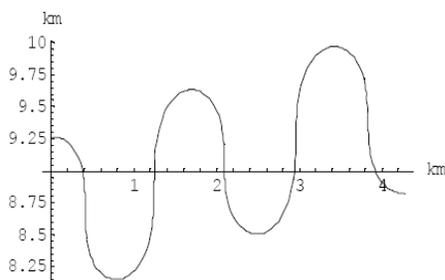


FIGURA 3.

En este caso si es posible observar el efecto de la difusión, que desplaza la partícula en dirección radial. Al mismo tiempo, la variación sinusoidal del viento produce un movimiento más complejo. También podemos introducir una variación en el módulo del viento, con el fin de simular cambios tanto en la intensidad del viento como de su sentido. Unos valores posibles para representar este efecto serían

```
v0[t_]:=28.8 * Sin[2*Pi*t/12];w0[t_]:= -Pi/2*Sin[2*Pi*t/20];
```

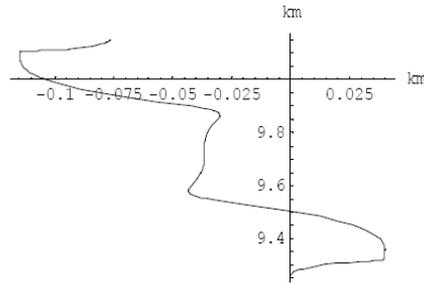


FIGURA 4.

La Figura 4 representa una simulación con este tipo de viento dando lugar a un movimiento bastante complejo, en el que se cambia tanto la dirección como el sentido de la trayectoria. El movimiento es ahora suficientemente complejo como para hacer muy difícil separar las distintas causas (difusión, cambio en el sentido, fuerza y dirección del viento) que lo provocan.

Por último, hemos querido presentar un dibujo completo de la mancha durante su evolución temporal. Para ello, se ha resuelto el sistema presentado anteriormente, para distintos valores de w iniciales. El código necesario se presenta a continuación (las líneas que comienzan con % son comentarios y no forman parte del código).

```
% Par\{a}metros iniciales
a = 2.12 10^-3; d = 0.0668 10^-3; k = 125; r0 = 9260;
rdif[t_]:=Sqrt[r0^2 + k*(1-Exp[-a t])/(d Pi a)]; vdif[t_] := (k
Exp[-t a]) / (2 Pi d Sqrt[ k (1-Exp[-t a])/(Pi a d) + r0^2]);
v0[t_]:=28800*Sin[2*Pi*t/60];w0[t_]:=-Pi/2*Sin[2*Pi*t/12];
wini=Pi/2;rini=r0;tini=0;
gridtheta=100;gridt=40;tini=0; tmax=30;
% Resolvemos el sistema para varios valores de w
For[theta=0.0001;n=0,n<=gridtheta,theta=theta+2*N[Pi]/gridtheta;n=n+1,
sol[n] = NDSolve[{ (r'[t]-vdif[t])*Cos[w[t]]-r[t]*Sin[w[t]]*w'[t] ==
v0[t]*Cos[w0[t]],r[tini] == rini,
(r'[t]-vdif[t])*Sin[w[t]]+r[t]*Cos[w[t]]*w'[t] ==
v0[t]*Sin[w0[t]], w[tini]==theta},{r,w},{t,tini,tmax}];
th[n]=theta;
]
% Agrupamos nuestras funciones r(t),w(t) en pares de valores x,y
For[i=0,I<=gridt,i=i+1,
For[lista={};j=0,j<=gridtheta,j++,
tim = tmax*i/gridt;
lista=Append[lista,{Evaluate[r[tim]*Cos[w[tim]] /. sol[j]][[1]],
Evaluate[r[tim]*Sin[w[tim]] /. sol[j]][[1]]} ]
];
solucion[i]=lista;
]
% Dibujamos distintas soluciones con un paso temporal de 7 d\{i}as
For[i=0,I<=gridt,i=i+7,
ListPlot[solucion[i]/10^3, AspectRatio->Automatic,
PlotJoined -> True, PlotRange-> {{-50,300},{-90, 90}}]
];
% Por simplicidad, todas las gr\{a}ficas dibujadas por Mathematica
```

se han fundido en una sola con un programa gráfico.

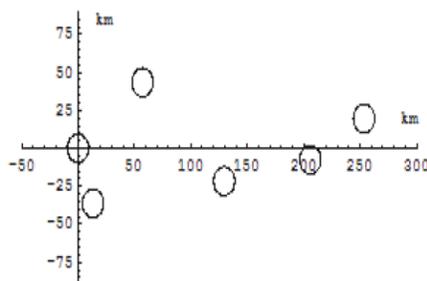


FIGURA 5.

La Figura 5 representa la evolución de toda la mancha durante un periodo de 40 días. Los ejes tienen su origen en el lugar del vertido. En concreto hemos dibujado las manchas de los días múltiplos de 7, es decir, semanalmente. Podemos observar como la dirección del viento cambiante lo hace ir evolucionando por encima y por debajo del eje de abscisas. También hemos considerado la velocidad variable, lo que se manifiesta en una variación de la distancia recorrida para cada semana. Esta última figura representada, aunque es la más compleja de realizar, es la que más información visual ofrece y en ella se puede apreciar fácilmente la evolución temporal de la ubicación de la mancha.

4 Conclusiones

Como hemos indicado en la introducción, el modelo desarrollado tiene como objetivo aportar una herramienta didáctica para la enseñanza de algunos elementos del análisis matemático y de la cinemática. Nuestra presentación, en la que hemos ido aumentando progresivamente la complejidad del modelo, tiene también un interés didáctico. Nuestra intención es que el ejercicio se pueda plantear y resolver de forma constructiva, lo cual puede aportar al estudiante una visión de cómo se desarrollan los modelos. En este sentido, el modelo que ha sido propuesto queda abierto a numerosas ampliaciones. Una de ellas consistiría en introducir un planteamiento no determinista. Así, sería posible considerar un modelo de viento definido por una distribución gaussiana cuya media determine la dirección principal del viento. También, la introducción de los efectos de las mareas y corrientes submarinas aportaría mayor verosimilitud al modelo. Por último, una simulación en la que la mancha inicial pudiera fragmentarse en diversos trozos por la acción del viento, de las mareas y de las corrientes sería un paso más para explotar las posibilidades del modelo.

La siguiente reformulación del problema podría también proporcionar nuevos desarrollos. Realmente, una marea negra no es un disco extendido en la superficie del mar, tal y como hemos planteado. Una aproximación más cercana a la realidad, y que da pie a otro modelo más complejo -aunque, por tanto, fuera de las intenciones de este artículo-, es modelizar la marea negra como un cono, cuya base se encontraría en la superficie del mar y cuyo vértice se originaría en el barco que expulsa el fuel. Este cono sufriría el embate de dos fuerzas: el viento, desde la superficie, y las corrientes en la parte sumergida en el mar. Así, la fragmentación de la mancha de fuel sería el resultado de un movimiento distinto para el fuel de la superficie y para el que está sumergido. Por supuesto, esta formulación supone una resolución mucho más compleja, y haría necesario el uso de instrumentos matemáticos más sofisticados.

5 Bibliografía

- [1] Comité Científico y Asesor. Hundimiento del buque Prestige Informe nº 1.
<http://www.ccaprestige.es/>
- [2] Comité Científico y Asesor. Hundimiento del buque Prestige Informe nº 5.
<http://www.ccaprestige.es/>
- [3] Especial prestige.elmundo.es.
<http://www.elmundo.es/especiales/2002/11/ecologia/prestige/relato.html>
- [4] Dossier de prensa “Programa científico para el seguimiento y la evaluación de las consecuencias del vertido del Prestige”.
<http://www.csic.es/prensa/Docu-prestige.html>
- [5] L.M. García Raffi, S. Pueblas, E.A. Sánchez Pérez, J.V. Sánchez Pérez, O. Valero. “Un modelo estocástico de propagación de incendios forestales”. Epsilon, 54, 457-468. 2002.
- [6] L.M. García Raffi, S. Pueblas, E.A. Sánchez Pérez, J.V. Sánchez Pérez. “Un modelo simple de propagación de incendios forestales con ecuaciones diferenciales ordinarias”. Epsilon, 51, 489-502. 2001.
- [7] L.M. García Raffi, E.A. Sánchez Pérez, J.V. Sánchez Pérez. “Introducción de las técnicas de modelización para el estudio de la física y de las matemáticas en los primeros cursos de las carreras técnicas”. Enseñanza de las Ciencias, 17(1), 119-129. 1999.

