



UNIVERSITAT  
POLITÈCNICA  
DE VALÈNCIA



Escuela Técnica Superior de Ingeniería del Diseño

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA

ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIERÍA DEL DISEÑO

---

**AERODINÁMICA NO-ESTACIONARIA DE PERFILES**  
**ANÁLISIS TEÓRICO Y NUMÉRICO**

---

AUTOR: LUCAS BERNÁCER SORIANO

TUTOR: MARIO LÁZARO NAVARRO

# Agradecimientos

El presente trabajo fue realizado bajo la supervisión de Mario Lázaro Navarro, al cual me gustaría agradecer la libertad recibida a la hora de escoger la materia de estudio. Así como, todo el respaldo mostrado durante la realización del proyecto.

A mi familia, por el apoyo que me han dado a lo largo de los años y por motivarme a seguir estudiando. A mi padre, por preguntarme todos los días como me había ido. A mi madre, por decirme que era capaz de todo siempre que me surgían dudas. Y a mi hermana, porque sé que me va a echar de menos aunque se niegue a reconocerlo.

A mis amigos de siempre, los cuales han estado ahí cuando necesitaba tomarme un descanso. Agradezco los buenos momentos que hemos vivido y todos los que nos quedan. A Alejandro, Arturo, Daniel, José Juan, Miguel y Salva.

Al *Report Team*, por ser un respaldo continuo en clase y por todos los trabajos que hemos sacado adelante. A Fran, por contagiarme su pasión por el mundo aeronáutico y por esos trayectos en coche de vuelta a casa. A Jorge, por ser aquella persona que siempre ponía un poco de cordura en el grupo. Y a Miguel, por demostrarme que en la entropía puede existir orden.

Por último, me gustaría darle las gracias a Kanye West por ponerle banda sonora a esta bonita etapa de mi vida.

## Resumen

El estudio teórico y numérico de la aerodinámica no-estacionaria aplicado a un perfil permite alcanzar el cálculo de aquellas fuerzas que gobiernan su respuesta temporal. Partiendo del fundamento teórico sobre el cual se sostiene la teoría potencial no-estacionaria, se accede al planteamiento del esquema de resolución numérica aplicable a un perfil sometido a cualquier tipo de movimiento.

Resulta necesario determinar la validez del método numérico, llevándose a cabo una comparación con las soluciones analíticas a través del planteamiento de cuatro casos de estudio. En los dos primeros, el perfil se encuentra bajo un movimiento armónico, examinando su respuesta oscilante inicialmente en flexión y posteriormente en giro. Asimismo, el tercer y cuarto estudio acontece al comportamiento del perfil frente a un cambio instantáneo en el ángulo de ataque y ante la entrada progresiva de una ráfaga tipo escalón.

# Tabla de contenidos

<b>Resumen</b> . . . . .	<b>III</b>
<b>Tabla de contenidos</b> . . . . .	<b>IV</b>
<b>Lista de figuras</b> . . . . .	<b>VI</b>
<b>1 Introducción</b> . . . . .	<b>1</b>
<b>2 Aerodinámica no-estacionaria de perfiles</b> . . . . .	<b>3</b>
2.1 Teoría potencial linealizada de perfiles en régimen incompresible . . . . .	5
2.1.1 Potencial no-estacionario . . . . .	5
2.1.2 Condición de contorno en el perfil . . . . .	8
2.1.3 Condición de contorno en el infinito . . . . .	9
2.1.4 Condición en la estela. Hipótesis de Kutta . . . . .	10
2.1.5 Coeficiente de presiones . . . . .	12
2.2 Distribución de torbellinos potenciales no-estacionarios . . . . .	15
2.3 Cálculo analítico del coeficiente de presiones . . . . .	26
<b>3 Método de los paneles no-estacionario</b> . . . . .	<b>29</b>
3.1 Teorema de Kutta-Joukovsky generalizado . . . . .	30
3.2 Distribución discreta de torbellinos no-estacionarios . . . . .	35
3.3 Planteamiento de ecuaciones y solución numérica . . . . .	37
<b>4 Oscilaciones en flexión</b> . . . . .	<b>45</b>
4.1 Solución analítica . . . . .	46
4.2 Solución numérica . . . . .	49
4.3 Resultados . . . . .	49
<b>5 Oscilaciones en giro</b> . . . . .	<b>59</b>
5.1 Solución analítica . . . . .	60
5.2 Solución numérica . . . . .	63
5.3 Resultados . . . . .	64
<b>6 Cambio en el ángulo de ataque</b> . . . . .	<b>76</b>
6.1 Solución analítica . . . . .	77
6.2 Solución numérica . . . . .	78
6.3 Resultados . . . . .	79

<b>7</b>	<b>Comportamiento ante ráfaga</b>	<b>87</b>
7.1	Solución analítica	87
7.2	Solución numérica	90
7.3	Resultados	91
<b>Anexos</b>		<b>97</b>
<b>A</b>	<b>Código en <i>Matlab</i></b>	<b>97</b>
<b>B</b>	<b>Interfaz gráfica</b>	<b>108</b>
<b>C</b>	<b>Presupuesto</b>	<b>111</b>
<b>Bibliografía</b>		<b>113</b>

## Lista de figuras

2.1	Ejemplo de aparición de fuerzas cuasi-estacionarias . . . . .	4
2.2	Definición geométrica ante comportamiento estacionario y no-estacionario	6
2.3	Condición de Kutta aplicada en la estela . . . . .	10
3.1	Modelado de la estela con el tiempo y desprendimiento de torbellinos	36
4.1	Movimiento de un perfil sujeto a oscilaciones en flexión . . . . .	45
4.2	Velocidades relativas a un perfil sujeto a oscilaciones en flexión . . . .	46
4.3	Evaluación de la función de Theodorsen . . . . .	50
4.4	Influencia de $\kappa$ en el coeficiente de sustentación analítico . . . . .	51
4.5	Variación del coeficiente de sustentación con $\alpha_e$ para diferentes $\kappa$ . . .	53
4.6	Comparación entre solución analítica y cuasi-estacionaria en función de $\kappa$ . . . . .	56
4.7	Influencia de $n$ en $C_L$ para perfil oscilando en flexión . . . . .	58
4.8	Influencia de $\Delta\xi$ en $C_L$ para perfil oscilando en flexión . . . . .	58
5.1	Perfil sometido a oscilaciones en giro con $a=0$ . . . . .	60
5.2	Influencia de $\kappa$ en el coeficiente de sustentación para $a = 0$ . . . . .	66
5.3	Influencia de $\kappa$ elevados en el coeficiente de sustentación para $a = 0$ .	67
5.4	Variación de $C_L$ con $\alpha$ para perfil oscilando en giro . . . . .	68
5.5	Respuesta de perfil oscilando en giro para $\kappa \ll 1$ . . . . .	69
5.6	Variación de los términos $C_L$ con $\alpha$ según el punto de giro para $\kappa = 0.3$	70
5.7	Variación de los términos $C_L$ con $\alpha$ según el punto de giro para $\kappa = 0.7$	71
5.8	Solución analítica y estacionaria para perfil oscilando en giro . . . . .	73
5.9	Influencia de $n$ en $C_L$ para perfil bajo oscilaciones en giro donde $\Delta\xi = 0.5$ . . . . .	74
5.10	Influencia de $\Delta\xi$ en $C_L$ para perfil bajo oscilaciones en giro con $n = 100$	75
6.1	Perfil ante cambio instantáneo en el ángulo de ataque . . . . .	76
6.2	Función de Wagner evaluada hasta $\tau = 100$ . . . . .	77
6.3	Diagrama del programa empleado para realizar el estudio de sensibilidad	80
6.4	Relación entre la longitud y número de paneles hasta la convergencia	81
6.5	Estudio de sensibilidad del tiempo adimensional . . . . .	82
6.6	Estudio de sensibilidad del gasto computacional . . . . .	83
6.7	Evolución de $C_L$ durante los instantes iniciales para $m = 219$ , $\Delta\xi = 0.5$ y $\alpha_o = 1$ rad . . . . .	84
6.8	Evolución de la sustentación para los tres métodos implementados . .	85
6.9	Variación de la sustentación para varios valores de $\Delta\xi$ . . . . .	86

7.1	Avance en el tiempo de la ráfaga ante un perfil . . . . .	88
7.2	Función de Küssner evaluada hasta $\tau = 60$ . . . . .	90
7.3	Relación entre la longitud y número de paneles hasta la convergencia	93
7.4	Estudio de sensibilidad del tiempo adimensional . . . . .	93
7.5	Estudio de sensibilidad del gasto computacional . . . . .	94
7.6	Evolución de $C_L$ durante los instantes iniciales para $w_o = 1$ . . . . .	95
7.7	Evolución del coeficiente de sustentación ante ráfaga unidad escalón .	96
A.1	Diagrama de flujo del programa implementado . . . . .	98
B.1	Vista general de la interfaz gráfica . . . . .	108
B.2	Segregación de la interfaz en distintos componentes . . . . .	109

---

## Introducción

El estudio de la aerodinámica no-estacionaria se caracteriza por ser un campo que encierra multitud de complicadas cuestiones. La extensamente conocida teoría de flujo potencial admite un tratamiento no-estacionario, conduciendo a soluciones analíticas de determinados problemas ante el cálculo de las fuerzas que actúan sobre el perfil. Igualmente, es común recurrir a esquemas numéricos que agilizan la resolución de dichos problemas y evitan tratar con enrevesados desarrollos simbólicos. Siendo necesario llevar a cabo una comparación entre sendas soluciones a fin de determinar las ventajas e inconvenientes de cada una.

En el capítulo 2 quedan presentados todos aquellos conceptos teóricos que se consideran relevantes en relación a la aerodinámica no-estacionaria de perfiles y tratamiento de soluciones analíticas. Se introduce inicialmente aquella distinción entre tipos de fuerzas, para proseguir con el planteamiento de la ecuación diferencial que gobierna el comportamiento del flujo potencial en el caso no-estacionaria. Quedan establecidas aquellas singularidades a emplear durante los desarrollos realizados y las condiciones de contorno que complementan la ecuación de Laplace. Así pues, una vez alcanzada la expresión analítica del coeficiente de presiones, se particulariza para el problema de un perfil oscilando armónicamente, logrando obtener las expresiones que definen la distribución de torbellinos empleada para resolver el caso de estudio.

Como ha sido mencionado anteriormente, no solo se pretende brindar las soluciones analíticas, sino que se desarrolla la implementación de una resolución numérica que queda recogida en el capítulo 3. El conocido método de los paneles es particularizado para el caso no-estacionario, aproximando la localización de los paneles a la línea media del perfil y encontrándose éste sometido a un movimiento que condiciona su respuesta. El esquema numérico utiliza los requisitos impuestos por la condición de conservación de la vorticidad y del campo de velocidades sobre el perfil, así como, modela la influencia de la estela extendiendo la distribución de torbellinos sobre la misma. El resultado es un bucle de resolución donde se evalúa tanto el paso temporal como la discretización del perfil y el movimiento descrito por el mismo.

Por último, los capítulos 4, 5, 6 y 7 recogen los estudios, en relación a los cálculos de las fuerzas aerodinámicas, sobre un perfil en movimiento a través de los dos métodos presentados: resolución analítica y solución numérica. Dicha comparación sirve de sustento para establecer la validez del esquema numérico empleado para la resolución de problemas de perfiles en el campo no-estacionario, desarrollándose las expresiones de las soluciones analíticas para cuatro casos de estudio:

- Oscilaciones de flexión.
- Oscilaciones en giro.
- Cambio en el ángulo de ataque.
- Comportamiento ante ráfaga.

Primeramente, se afronta el estudio del comportamiento del perfil ante dos movimientos armónicos como son las oscilaciones de flexión y las oscilaciones en giro, cuyo desarrollo teórico ha sido introducido en el capítulo 2. Por otro lado, el tercer y cuarto análisis se centra en la respuesta del perfil ante entradas unitarias de variaciones instantáneas en el ángulo de ataque e intensidad de ráfaga. Se emplean entonces unas funciones que modelan el efecto integral de la función de Theodorsen con la finalidad de alcanzar las soluciones analíticas. Para el caso concreto del cambio brusco del ángulo de ataque, se utiliza la función de Wagner, mientras que para el comportamiento ante una ráfaga discreta se recurre a la aproximación de Küssner.

El coeficiente de sustentación resulta ser aquella magnitud a calcular para dichos casos de estudio, siendo capaces de lograr su evolución temporal y así determinar la exactitud de los resultados. Igualmente, y con respecto al esquema numérico del método de los paneles, también se plantea la solución numérica estacionaria en aquellos casos donde presente cierta relevancia. El anexo A recoge aquel código empleado, tanto para la resolución del caso analítico como del numérico mediante el software de programación *Matlab*.

No obstante, el hecho de que solo se disponga de resolución analítica de los cuatro casos planteados no significa que el método numérico se encuentre restringido a dichas situaciones. El esquema es capaz de afrontar la resolución de cualquier tipo de geometría o comportamiento del perfil impuesto por el usuario, así como a no limitarse únicamente al cálculo de la sustentación. A pesar de ello, dado que el principal objetivo es comprobar su precisión y validez, es necesario plantear la comparación con la solución exacta.

Una vez completados todos los estudios, se implementa una interfaz gráfica que permite al usuario resolver dichos casos de una forma fácil e intuitiva. Presentando tanto las resoluciones numéricas como analíticas en función de los parámetros de entrada que se deseen y permitiendo realizar comparaciones entre ambas. El anexo B contiene toda la información referente a la interfaz del programa.

## Aerodinámica no-estacionaria de perfiles

El principal objetivo de la aerodinámica, tanto estacionaria como no-estacionaria, es el cálculo de las fuerzas que actúan sobre el perfil. De forma que dichas fuerzas puedan ser usadas para resolver el problema de la estabilidad aeroelástica estática o dinámica.

En el análisis estático, se considera que los términos de aceleraciones y velocidades son despreciables, haciendo uso de las hipótesis planteadas por la aerodinámica estacionaria para alcanzar la expresión del coeficiente de presión. Sin embargo, cuando el perfil entra en movimiento, la interacción con el medio fluido genera un cambio en las fuerzas involucradas, dando lugar a una variación del coeficiente de presión en función del tiempo. Este fenómeno supone que dicha expresión no dependa únicamente de la situación del perfil, sino también de su velocidad y aceleración.

Las fuerzas aerodinámicas a evaluar pueden separarse en dos tipos dependiendo de su naturaleza: las denominadas cuasi-estacionarias y las fuerzas que aparecen como consecuencia del efecto de la estela tras el perfil. Se detalla a continuación las particularidades presentadas por cada una de ellas.

- Las fuerzas procedentes del comportamiento cuasi-estacionario son originadas por el movimiento relativo de los puntos del perfil respecto del fluido. Se plantea entonces el ejemplo de un perfil con ángulo de ataque  $\alpha$  fijo e inmerso en un fluido de velocidad horizontal  $U_\infty$ . Pudiendo moverse como un sólido rígido en oscilaciones verticales de amplitud  $h(t)$  que no involucran ningún tipo de giro.

La velocidad vertical de los puntos que componen el perfil es  $\dot{h}(t)$  hacia abajo, por lo que la velocidad relativa del fluido al perfil resulta ser la misma en magnitud pero opuesta en sentido. Atendiendo a la composición vectorial de velocidades, este suceso induce un determinado ángulo de ataque.

$$U_e = \sqrt{U_\infty^2 + \dot{h}^2} = U_\infty \sqrt{1 + \frac{\dot{h}^2}{U_\infty^2}} \approx U_\infty \quad (2.1)$$

La ecuación 2.1 muestra el desarrollo de la velocidad resultante incidente, teniendo en consideración tanto la componente horizontal (velocidad de vuelo) como la vertical (movimiento relativo del perfil). No obstante, debido a que la velocidad de vuelo es asumida notablemente superior a aquella inducida por el movimiento del perfil, puede aceptarse, de manera aproximada, que la magnitud total es aquella mostrada por la velocidad de vuelo.

Por otro lado, el factor de mayor relevancia reside en el tratamiento del ángulo de ataque. Originariamente, el perfil presenta un ángulo de ataque  $\alpha$  respecto de la horizontal, sin embargo, ahora muestra un nuevo ángulo de ataque debido a la composición de velocidades y al movimiento descrito por el perfil.

$$\alpha_e = \alpha + \text{ArcTan} \left( \frac{\dot{h}}{U_\infty} \right) \approx \alpha + \frac{\dot{h}}{U_\infty} \quad (2.2)$$

Este fenómeno puede observarse a través de la figura 2.1.

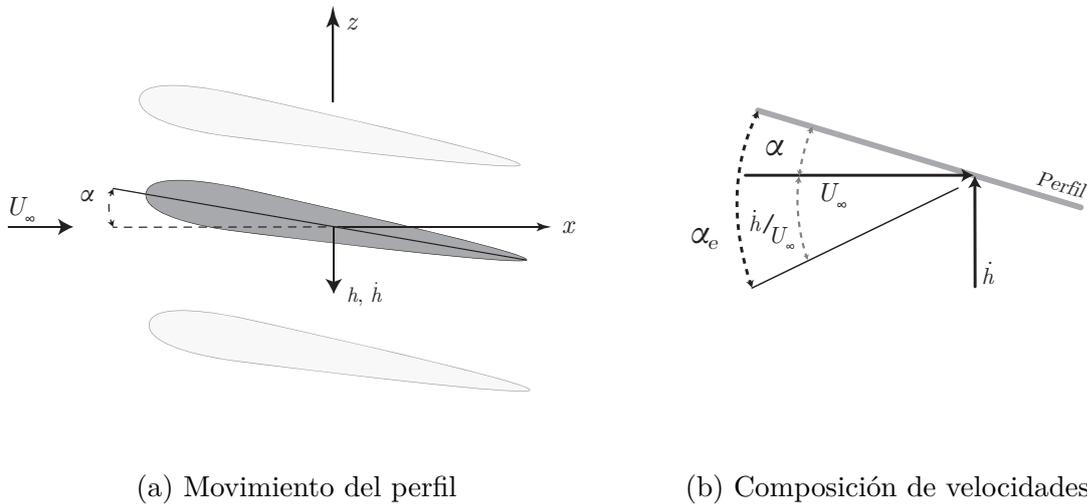


Figura 2.1: Ejemplo de aparición de fuerzas cuasi-estacionarias

La fuerza de sustentación también queda modificada de acuerdo con el nuevo ángulo de ataque. Dependiendo ahora de la posición del perfil y de la velocidad vertical, véase ecuación 2.3.

$$L = \frac{1}{2} \rho_\infty U_\infty^2 S C_{L_\alpha} \alpha_e(t) = \frac{1}{2} \rho_\infty U_\infty^2 S C_{L_\alpha} \left( \frac{\dot{h}}{U_\infty} \right) \quad (2.3)$$

A través de este ejemplo, queda recogida la versión más simple de las fuerzas aerodinámicas cuasi-estacionarias. En un caso general, además de un desplazamiento vertical, el perfil también puede experimentar un giro. Siendo alterada la expresión de la sustentación y mostrando una estructura más compleja.

- Las fuerzas derivadas del efecto de la estela del perfil necesitan un tratamiento más específico. Primeramente, cabe recordar que el balance de circulación total en el campo fluido debe ser nulo. De forma que cuando el perfil se mueve perpendicularmente al fluido, se desencadena una alteración de la circulación del perfil.

Con la finalidad de que la vorticidad se mantenga constante, se generan instantáneamente unos vórtices en el borde de fuga del perfil. Tales vórtices producen una distribución de vorticidad en la estela, modificando el coeficiente de presión sobre el perfil y consecuentemente la circulación global. Cabe aclarar que para compensar el desequilibrio propiciado por el movimiento del perfil, el sentido de los vórtices de la estela debe ser opuesto a aquel presentado por el vórtice del perfil.

De manera más específica, los vórtices presentan una estructura armónica cuando el movimiento del perfil es de dicho tipo, viajando desde el perfil hasta el infinito por el efecto de la velocidad de vuelo. Así pues, la distancia entre vórtices depende fundamentalmente de su frecuencia y de la velocidad de vuelo, conociéndose al conjunto de torbellinos con el nombre de *calle de Von Karman*.

Al efecto producido por la vorticidad en la estela se le denomina no-estacionario para diferenciarlo del cuasi-estacionario tratado en el punto anterior.

Se justifica entonces la importancia de disponer de los medios para la obtención de las fuerzas que actúan sobre el perfil, dado que a partir de ellas es posible acceder a estudios más profundos entorno al comportamiento del perfil. A lo largo de las siguientes secciones se muestra aquella teoría potencial particularizada para el tratamiento de perfiles.

### 2.1. Teoría potencial linealizada de perfiles en régimen incompresible

#### 2.1.1. Potencial no-estacionario

En régimen incompresible, tanto estacionario como no-estacionario, la ecuación diferencial que gobierna el potencial de velocidades es la de Laplace:

$$\nabla^2\Phi = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} = 0 \quad (2.4)$$

La Ec. (2.4) se caracteriza por ser una ecuación lineal en derivadas parciales de segundo orden, cuya solución puede ser alcanzada a través de la combinación lineal de otras soluciones. Este hecho es de gran relevancia y permite reproducir un determinado comportamiento del campo fluido mediante lo que se conoce como suma de flujos elementales.

Con el propósito de obtener soluciones analíticas aproximadas de la ecuación de Laplace se usa el principio de perturbación, fundamento de la denominada teoría potencial linealizada de perfiles que tiene su versión en el campo no-estacionario. Este principio se establece en la ligera variación de la geometría del perfil respecto de su situación inicial, significando este hecho que las nuevas líneas de corriente cambian de forma suave y proporcional con respecto a la magnitud de la perturbación.

Inicialmente, antes de que aparezca el perfil, el potencial es debido al flujo elemental horizontal  $U_\infty$ , es decir,  $\Phi_\infty = U_\infty x$ . Por otro lado, la geometría del perfil se obtiene a partir de la definición de unas cotas  $z = f_p(x, t)$  que en general son función de la posición y del tiempo.

Esta geometría siempre se puede descomponer en una parte independiente del tiempo, o estacionaria  $z_s(x)$ , más otra componente que puede desplazarse y en consecuencia resulta ser no-estacionaria  $z_u(x, t)$ . Dichas funciones geométricas se consideran como pequeñas perturbaciones matemáticas de la situación inicial, por lo que cada una de sus componentes es proporcional a un parámetro de perturbación dado. La geometría queda definida simbólicamente como:

$$z = f_p(x, t) = z_s + z_u = \epsilon f_s(x) + \nu f_u(x, t) \quad (2.5)$$

donde  $\epsilon, \nu \ll 1$  son los parámetros de perturbación. Los subíndices  $s$  y  $u$  hacen referencia a la parte estacionaria (*steady*) y no-estacionaria (*unsteady*). Así pues, la naturaleza de los parámetros de perturbación es diversa, abarcando desde un pequeño ángulo de ataque hasta la relación espesor/cuerda de un perfil, y siendo todos ellos muy inferiores a la unidad para garantizar que la solución obtenida se aproxime a la exacta. En la figura 2.2 se recoge la representación de cada una de las componentes geométricas.

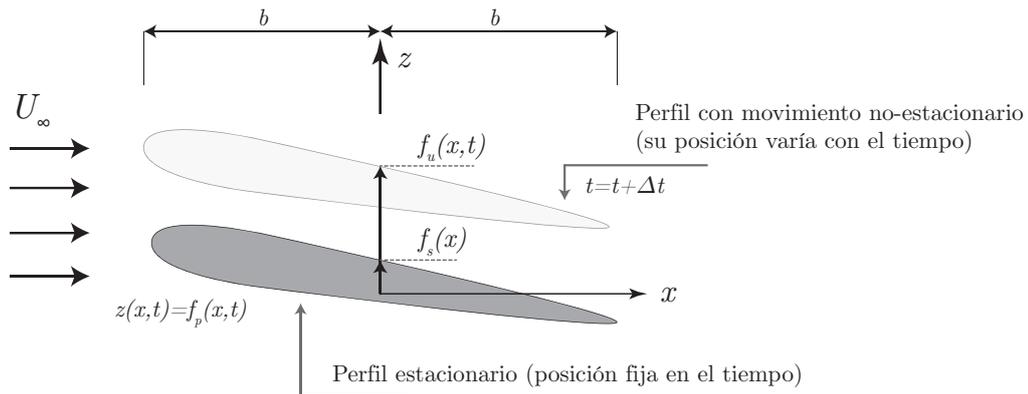


Figura 2.2: Definición geométrica ante comportamiento estacionario y no-estacionario

La consecuencia más importante es que el potencial total se puede expandir en términos de los parámetros de perturbación como cualquier otra función de dos variables, reteniendo los términos lineales y despreciando los de orden  $\mathcal{O}(\nu^2)$ ,  $\mathcal{O}(\epsilon^2)$ ,  $\mathcal{O}(\epsilon\nu)$  y superiores:

$$\Phi(x, z, t) \approx \Phi_\infty + \epsilon \Phi_s(x, z) + \nu \Phi_u(x, z, t) \equiv U_\infty x + \phi(x, z) + \varphi(x, z, t) \quad (2.6)$$

donde  $\phi = \epsilon \Phi_s$  y  $\varphi = \nu \Phi_u$  son los potenciales de perturbación estacionarios y no-estacionarios respectivamente, que pasan a ser incógnitas del problema. Para obtener las ecuaciones diferenciales que gobiernan el comportamiento de los potenciales de perturbación es necesario introducir la expresión (2.6) anterior en la ecuación del potencial (2.4) y separar en función de  $\epsilon$  y  $\nu$ :

$$\nabla^2 \Phi = \epsilon \nabla^2 \Phi_s + \nu \nabla^2 \Phi_u = 0 \quad (2.7)$$

La ecuación anterior debe ser válida para cualquier valor de  $\epsilon$  y de  $\nu$ , por lo que necesariamente debe cumplirse que:

$$\text{Problema estacionario} \rightarrow \nabla^2 \Phi_s = 0 \quad (2.8)$$

$$\text{Problema no-estacionario} \rightarrow \nabla^2 \Phi_u = 0 \quad (2.9)$$

Aunque ambos problemas verifican la ecuación de Laplace, en el caso no-estacionario interviene la variable tiempo como parámetro. Físicamente se observa que el flujo se adapta instantáneamente a los cambios en el perfil al no aparecer derivadas temporales en la Ec. (2.9). No obstante, el hecho de que en las condiciones de contorno surjan derivadas temporales, y que el coeficiente de presiones dependa de la variación del potencial, hace que el tiempo sea considerado una variable en la solución final.

Teniendo en cuenta que los parámetros de perturbación no dependen de las coordenadas, las ecuaciones (2.8) y (2.9) se pueden poner en términos de los potenciales de perturbación:

$$\text{Problema estacionario} \rightarrow \nabla^2 \phi = 0 \quad (2.10)$$

$$\text{Problema no-estacionario} \rightarrow \nabla^2 \varphi = 0 \quad (2.11)$$

Una vez ha sido expuesto el desarrollo del potencial en su vertiente estacionaria y no-estacionaria, se establecen aquellas condiciones de contorno que deben acompañar a la ecuación diferencial.

### 2.1.2. Condición de contorno en el perfil

En todo instante se debe verificar que el perfil es una superficie fluida, la cual puede cambiar de posición e incluso de forma, pero debe mantener la condición de línea de corriente durante dicho movimiento. Partiendo de la definición del perfil mediante la ecuación implícita  $F(x, z, t) = z - f_p(x, t) = 0$ , en todo punto de la forma  $(x, z) = (x, f_p(x, t))$  debe verificarse que:

$$\frac{DF}{Dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \nabla\Phi(x, f_p(x, t)) \cdot \nabla F = 0 \quad (2.12)$$

En vista de alcanzar la expresión de cada componente de la Ec. (2.12), primeramente se calcula el vector velocidad en los puntos del perfil:

$$\nabla\Phi(x, f_p(x, t)) = \Phi_x(x, f_p(x, t)) \mathbf{i} + \Phi_z(x, f_p(x, t)) \mathbf{k} \quad (2.13)$$

El desarrollo del mismo puede llevarse a cabo utilizando series de Taylor en  $(\epsilon, \nu)$  alrededor del origen:

$$\begin{aligned} \Phi_x(x, f_p(x, t)) &= U_\infty + \epsilon \Phi_{s,x}(x, \epsilon f_s + \nu f_u) + \nu \Phi_{u,x}(x, \epsilon f_s + \nu f_u) \\ &= U_\infty + \epsilon \Phi_{s,x}(x, 0) + \nu \Phi_{u,x}(x, 0) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \\ \Phi_z(x, f_p(x, t)) &= U_\infty + \epsilon \Phi_{s,z}(x, \epsilon f_s + \nu f_u) + \nu \Phi_{u,z}(x, \epsilon f_s + \nu f_u) \\ &= U_\infty + \epsilon \Phi_{s,z}(x, 0) + \nu \Phi_{u,z}(x, 0) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \end{aligned} \quad (2.14)$$

donde  $\mathcal{O}(\epsilon)$  simboliza todos aquellos términos que sean del orden  $\mathcal{O}(\epsilon)$  y  $\mathcal{O}(\nu)$  o superiores, mientras que  $\mathcal{O}(\epsilon^2)$  simboliza los que sean de los órdenes  $\mathcal{O}(\epsilon^2)$ ,  $\mathcal{O}(\nu^2)$  y  $\mathcal{O}(\epsilon\nu)$  o superiores. El parámetro  $\epsilon$  puede interpretarse como el módulo del vector bidimensional de perturbación. El vector velocidad toma entonces el siguiente aspecto:

$$\nabla\Phi = [U_\infty + \epsilon \Phi_{s,x}(x, 0) + \nu \Phi_{u,x}(x, 0), \epsilon \Phi_{s,z}(x, 0) + \nu \Phi_{u,z}(x, 0)] \quad (2.15)$$

Para completar la Ec. (2.12) es necesario calcular:

$$\frac{\partial F}{\partial t} = -\frac{\partial f_p(x, t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}(\epsilon f_s(x) + \nu f_u(x, t)) = -\nu \frac{\partial f_u}{\partial t} \quad (2.16)$$

$$\nabla F = \left[ -\frac{\partial f_p}{\partial x}, -\frac{\partial f_p}{\partial z} + 1 \right] = \left[ -\frac{\partial f_p}{\partial x}, 1 \right] = \left[ -\epsilon \frac{\partial f_s}{\partial x} - \nu \frac{\partial f_u}{\partial x}, 1 \right] \quad (2.17)$$

$$\nabla\Phi \cdot \nabla F = -\epsilon U_\infty \frac{\partial f_s}{\partial x} - \nu U_\infty \frac{\partial f_u}{\partial x} + \epsilon \Phi_{s,z}(x, 0) + \nu \Phi_{u,z}(x, 0) \quad (2.18)$$

Desarrollando la Ec. (2.12) con los valores alcanzados en las Ecs. (2.16) y (2.18) se logra plantear aquella expresión de la condición de contorno sobre el perfil en términos de los parámetros de perturbación:

$$0 = \frac{DF}{Dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \nabla\Phi \cdot \nabla F$$

$$= \nu \left( \Phi_{u,z}(x,0) - \frac{\partial f_u}{\partial t} - U_\infty \frac{\partial f_u}{\partial x} \right) + \epsilon \left( \Phi_{s,z}(x,0) - U_\infty \frac{\partial f_s}{\partial x} \right) \quad (2.19)$$

Identificando términos en  $\epsilon$  y  $\nu$  se obtiene la forma operativa, tanto para el problema estacionario como no-estacionario, en función de la forma del perfil:

$$\text{Problema estacionario} \rightarrow \left. \frac{\partial \Phi_s}{\partial z} \right|_{z=0} = U_\infty \frac{\partial f_s}{\partial x} \quad (2.20)$$

$$\text{Problema no-estacionario} \rightarrow \left. \frac{\partial \Phi_u}{\partial z} \right|_{z=0} = \frac{\partial f_u}{\partial t} + U_\infty \frac{\partial f_u}{\partial x} \quad (2.21)$$

En términos de los potenciales de perturbación  $\phi = \epsilon \Phi_s$ ,  $\varphi = \nu \Phi_u$  y de la geometría del perfil perturbado  $z_s = \epsilon f_s(x)$  y  $z_u = \nu f_u(x,t)$ , las condiciones anteriores son equivalentes a:

$$\text{Problema estacionario} \rightarrow \left. \frac{\partial \phi}{\partial z} \right|_{z=0} = U_\infty \frac{\partial z_s}{\partial x} \quad (2.22)$$

$$\text{Problema no-estacionario} \rightarrow \left. \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right|_{z=0} = \frac{\partial z_u}{\partial t} + U_\infty \frac{\partial z_u}{\partial x} \quad (2.23)$$

### 2.1.3. Condición de contorno en el infinito

Muy lejos del perfil, el potencial debe mantenerse igual al que existe antes de la perturbación debido a que ésta afecta únicamente a una zona localizada alrededor del entorno finito del perfil. Matemáticamente, esta condición de contorno se presenta como:

$$\lim_{x^2+z^2 \rightarrow \infty} \Phi(x, z, t) = \Phi_\infty = U_\infty x \quad (2.24)$$

A lo largo del planteamiento del problema no se impone la condición de contorno en el infinito, ya que se encuentra implícitamente en las singularidades del tipo torbellino, pues el efecto de estos flujos elementales se atenúa con la distancia.

En función de los potenciales de perturbación:

$$\lim_{x^2+z^2 \rightarrow \infty} \phi(x, z) = 0, \quad \lim_{x^2+z^2 \rightarrow \infty} \varphi(x, z, t) = 0 \quad (2.25)$$

#### 2.1.4. Condición en la estela. Hipótesis de Kutta

Antes de traducir a simbología la condición de Kutta en su versión no-estacionaria, cabe repasar su versión estacionaria. En un movimiento estacionario, la condición de Kutta permite obtener una solución matemática compatible con las geometrías que presentan borde de salida anguloso en los perfiles.

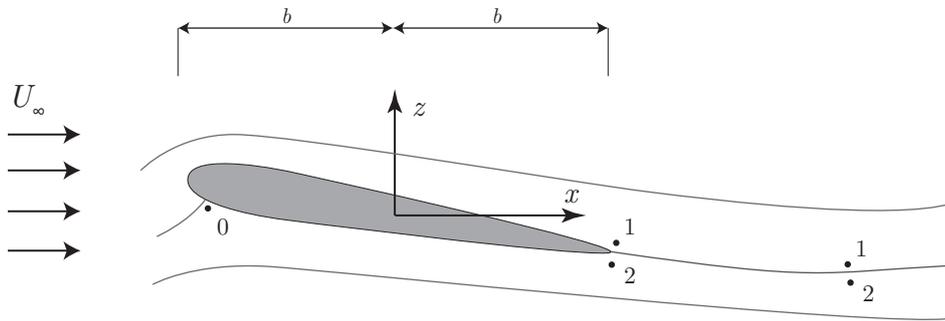


Figura 2.3: Condición de Kutta aplicada en la estela

Considerando los puntos 1 y 2 que se encuentran justo en el borde de salida  $x = b$ . En el caso de aplicar el principio de Bernoulli entre 0 y 1 por un lado, y entre 0 y 2 por otro se alcanza:

$$\frac{1}{2} V_0^2 + \frac{p_0}{\rho_\infty} = \frac{1}{2} V_1^2 + \frac{p_1}{\rho_\infty} \quad (2.26)$$

$$\frac{1}{2} V_0^2 + \frac{p_0}{\rho_\infty} = \frac{1}{2} V_2^2 + \frac{p_2}{\rho_\infty} \quad (2.27)$$

Restando las Ecs. (2.26) y (2.27):

$$\frac{1}{2} V_1^2 + \frac{p_1}{\rho_\infty} = \frac{1}{2} V_2^2 + \frac{p_2}{\rho_\infty} \quad (2.28)$$

Ahora bien, en el punto  $x = b^+$  (inmediatamente a la derecha del perfil) no hay salto de presiones entre intradós y extradós  $p_1 = p_2$  debido a que la estela se caracteriza por ser uniforme. Esta condición se traduce en que los módulos de las velocidades deban ser iguales  $V_1 = V_2$  para lograr dicha situación.

Si la geometría del perfil tiene un borde de fuga anguloso, un mismo punto (borde de salida) tendría dos velocidades con distinta dirección y no es posible, se impone entonces la condición de punto de parada  $V_1 = V_2 = 0$ . Por otro lado, si el borde es suave, es decir, intradós y extradós acaban con la misma pendiente, puede darse que  $V_1 \neq 0$  y  $V_2 \neq 0$ , siendo  $V_1 = V_2$ .

En teoría de pequeñas perturbaciones, la condición de Kutta puede relajarse e incluso con bordes angulosos ser la velocidad en el borde de salida distinta de cero. Eso sí, en dicho punto las componentes horizontales deben ser iguales. Desarrollando la Ec. (2.28) con la condición  $p_1 = p_2$ , tratando primeramente las velocidades:

$$V_1^2 = \left( \frac{\partial \phi_1}{\partial x} \right)^2 = (U_\infty + \phi_{x,1})^2 = U_\infty^2 + 2U_\infty \phi_{x,1} + \mathcal{O}(\epsilon^2) \quad (2.29)$$

$$V_2^2 = \left( \frac{\partial \phi_2}{\partial x} \right)^2 = (U_\infty + \phi_{x,2})^2 = U_\infty^2 + 2U_\infty \phi_{x,2} + \mathcal{O}(\epsilon^2) \quad (2.30)$$

Se puede observar que el resultado obtenido de formular la condición de Kutta es:

$$\phi_{x,1} = \phi_{x,2} \quad \rightarrow \quad \left. \frac{\partial \phi}{\partial x} \right|_{z=0^+} = \left. \frac{\partial \phi}{\partial x} \right|_{z=0^-} \quad (2.31)$$

Impuesta la condición en el borde de salida, se verifica la misma condición en todos los puntos de la estela sin más que aplicar el principio de Bernoulli de nuevo debido a la homogeneidad de la misma.

En movimiento no-estacionario, la hipótesis de Kutta resulta equivalente a aplicar el principio de Bernoulli en cualquier punto de la estela, junto con el hecho de que el salto de presiones es nulo. La diferencia fundamental con el movimiento estacionario reside en que las componentes horizontales de la velocidades pueden ser diferentes, pues el balance global puede ser compensado por la componente no-estacionaria del potencial  $\Phi_t = \varphi_t$ . Usando la ecuación de Bernoulli no-estacionaria entre los puntos 1 y 2 localizados en  $x \geq b$  se alcanza:

$$\varphi_{t,1} + \frac{1}{2} V_1^2 + \frac{p_1}{\rho_\infty} = \varphi_{t,2} + \frac{1}{2} V_2^2 + \frac{p_2}{\rho_\infty} \quad (2.32)$$

Para esta situación, la velocidad responde a:

$$V_1^2 = \left( \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \right)^2 = (U_\infty + \varphi_{x,1})^2 = U_\infty^2 + 2U_\infty \varphi_{x,1} + \mathcal{O}(\nu^2) \quad (2.33)$$

$$V_2^2 = \left( \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \right)^2 = (U_\infty + \varphi_{x,2})^2 = U_\infty^2 + 2U_\infty \varphi_{x,2} + \mathcal{O}(\nu^2) \quad (2.34)$$

Introduciendo las Ecs. (2.33) y Ec (2.34) en la Ec. (2.32) y simplificando:

$$\begin{aligned} \varphi_{t,1} + U_\infty \varphi_{x,1} &= \varphi_{t,2} + U_\infty \varphi_{x,2} \\ \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial t} + U_\infty \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right]_{z=0^-} &= \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial t} + U_\infty \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right]_{z=0^+} \end{aligned} \quad (2.35)$$

Tras desarrollar, en la siguiente subsección, la expresión del coeficiente de presiones, puede observarse que la ecuación anterior es equivalente a imponer  $\Delta c_p(x, t) = 0$  en cualquier punto de la estela  $x \geq b$ .

### 2.1.5. Coeficiente de presiones

El objetivo final es obtener el balance de presiones en el perfil y por tanto, las fuerzas debidas al flujo no-estacionario. Suponiendo el problema resuelto, de manera que el potencial es conocido (al menos sus derivadas temporales), para el cálculo de la presión  $p(x, z, t)$  se evalúa la ecuación de cantidad de movimiento (principio de Bernoulli en su versión no-estacionaria) en un punto cualquiera del campo fluido:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} (\nabla \Phi \cdot \nabla \Phi) + \frac{p(x, z, t)}{\rho_\infty} = \frac{U_\infty^2}{2} + \frac{p_\infty}{\rho_\infty} \quad (2.36)$$

Despejando la presión se tiene que:

$$p(x, z, t) = p_\infty + \frac{1}{2} \rho_\infty U_\infty^2 - \rho_\infty \left( \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla \Phi \cdot \nabla \Phi \right) \quad (2.37)$$

En problemas de aerodinámica, la presión se presenta de forma adimensional usando como presión de referencia la considerada dinámica  $q_\infty = \frac{1}{2} \rho_\infty U_\infty^2$ . Así, se determina el coeficiente de presiones:

$$c_p(x, z, t) = \frac{p(x, z, t) - p_\infty}{q_\infty} = 1 - \frac{2}{U_\infty^2} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla \Phi \cdot \nabla \Phi \right) \quad (2.38)$$

Para obtener el coeficiente de presiones en el perfil se debe evaluar la expresión anterior en los puntos con aspecto  $(x, z) = (x, f_p(x, t))$  y desarrollar en serie de Taylor en los parámetros de perturbación:

$$\begin{aligned} c_p(x, f_p(x), t) &= c_p(x, \epsilon f_s + \nu f_u, t) \\ &= c_p(x, 0, t) + \left. \frac{\partial c_p}{\partial \epsilon} \right|_{\epsilon=0} \epsilon + \left. \frac{\partial c_p}{\partial \nu} \right|_{\nu=0} \nu + \mathcal{O}(\epsilon^2) \end{aligned} \quad (2.39)$$

donde  $\varepsilon = 0$  hace referencia a  $\epsilon = \nu = 0$  y es equivalente a evaluar las expresiones en  $z = 0$ . Tratando cada uno de los términos de la Ec. (2.39) de manera individual:

$$c_p(x, 0, t) = 1 - \frac{2}{U_\infty^2} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla \Phi \cdot \nabla \Phi \right)_{\varepsilon=0} = 1 - \frac{2}{U_\infty^2} \frac{U_\infty^2}{2} = 0 \quad (2.40)$$

debido a que:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0, \quad \nabla \Phi \cdot \nabla \Phi = U_\infty^2 + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \quad (2.41)$$

Por otro lado, teniendo en cuenta la definición del potencial como  $\Phi = U_\infty x + \epsilon \Phi_s + \nu \Phi_u$  se tienen las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} \Phi_{,\epsilon}(\varepsilon = 0) &= \left. \frac{\partial \Phi}{\partial \epsilon} \right|_{\varepsilon=0} = \Phi_s(x, 0) \\ \Phi_{,\nu}(\varepsilon = 0) &= \left. \frac{\partial \Phi}{\partial \nu} \right|_{\varepsilon=0} = \Phi_u(x, 0, t) \\ \nabla \Phi_{,\epsilon}(\varepsilon = 0) &= \left. \frac{\partial \nabla \Phi}{\partial \epsilon} \right|_{\varepsilon=0} = \nabla \Phi_s(x, 0) = \Phi_{s,x} \mathbf{i} + \Phi_{s,z} \mathbf{k} \\ \nabla \Phi_{,\nu}(\varepsilon = 0) &= \left. \frac{\partial \nabla \Phi}{\partial \nu} \right|_{\varepsilon=0} = \nabla \Phi_u(x, 0, t) = \Phi_{u,x} \mathbf{i} + \Phi_{u,z} \mathbf{k} \\ \nabla \Phi(\varepsilon = 0) &= U_\infty \mathbf{i} \end{aligned} \quad (2.42)$$

Resulta ahora posible evaluar:

$$\left. \frac{\partial c_p}{\partial \epsilon} \right|_{\varepsilon=0} = -\frac{2}{U_\infty^2} \left[ \frac{\partial \Phi_{,\epsilon}}{\partial t} + \nabla \Phi_{,\epsilon} \cdot \nabla \Phi \right] = -\frac{2}{U_\infty} \left. \frac{\partial \Phi_s}{\partial x} \right|_{z=0} \quad (2.43)$$

$$\left. \frac{\partial c_p}{\partial \nu} \right|_{\varepsilon=0} = -\frac{2}{U_\infty^2} \left[ \frac{\partial \Phi_{,\nu}}{\partial t} + \nabla \Phi_{,\nu} \cdot \nabla \Phi \right] = -\frac{2}{U_\infty^2} \left[ \frac{\partial \Phi_u}{\partial t} + U_\infty \frac{\partial \Phi_u}{\partial x} \right]_{z=0} \quad (2.44)$$

Reemplazando, la aproximación de primer orden del coeficiente de presiones sobre el perfil adquiere el aspecto:

$$c_p(x, 0, t) \approx -\frac{2\epsilon}{U_\infty} \left. \frac{\partial \Phi_s}{\partial x} \right|_{z=0} - \frac{2\nu}{U_\infty^2} \left[ \frac{\partial \Phi_u}{\partial t} + U_\infty \frac{\partial \Phi_u}{\partial x} \right]_{z=0} \quad (2.45)$$

La expresión anterior debe evaluarse en el intradós ( $z = 0^-$ ) y en el extradós ( $z = 0^+$ ) para calcular el salto de presiones en el perfil y en consecuencia, el coeficiente de sustentación. Así, en términos de potenciales de perturbación estacionario y no-estacionario se tiene:

$$\text{Intradós} \rightarrow c_{p,i}(x, 0, t) \approx -\frac{2}{U_\infty} \frac{\partial \phi}{\partial x} \Big|_{z=0^-} - \frac{2}{U_\infty^2} \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial t} + U_\infty \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right]_{z=0^-} \quad (2.46)$$

$$\text{Extradós} \rightarrow c_{p,e}(x, 0, t) \approx -\frac{2}{U_\infty} \frac{\partial \phi}{\partial x} \Big|_{z=0^+} - \frac{2}{U_\infty^2} \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial t} + U_\infty \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right]_{z=0^+} \quad (2.47)$$

Finalmente, el coeficiente de presiones sobre el perfil:

$$\Delta c_p(x, t) = c_{p,i} - c_{p,e} \quad (2.48)$$

En el caso de que  $\Delta c_p > 0$ , la fuerza localizada en el punto de coordenada  $x$  tiene sentido  $+z$  positivo hacia arriba.

### Resumen:

A lo largo de esta sección ha sido planteada la ecuación de Laplace, la cual gobierna el potencial en régimen incompresible (estacionario y no-estacionario). No obstante, el hecho de que sea lineal no significa que se pueda aplicar directamente el principio de superposición, pues ni la condición en el perfil ni la expresión del coeficiente de presiones presentan una forma lineal en  $\Phi$ .

Ante tal problemática, el método basado en pequeñas perturbaciones ha permitido linealizar tanto las condiciones de contorno como el coeficiente de presión en vista de poder aplicar dicha superposición de soluciones elementales. De forma que las condiciones matemáticas que debe cumplir el problema no-estacionario son las siguientes:

$$\text{Ecuación diferencial} \rightarrow \nabla^2 \varphi = 0$$

$$\text{Cond. contorno sobre el perfil} \rightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial z} \Big|_{z=0} = \frac{\partial z_u}{\partial t} + U_\infty \frac{\partial z_u}{\partial x} \quad (2.49)$$

$$\text{Cond. contorno en el infinito} \rightarrow \lim_{x^2+z^2 \rightarrow \infty} \varphi(x, z, t) = 0$$

$$\text{Condición de Kutta} \rightarrow \Delta c_p(x, t) = 0, \quad x \geq b, \quad t \geq 0$$

Igualmente, se logra alcanzar la expresión característica del coeficiente de presiones sobre el perfil:

$$c_p(x, 0, t) = -\frac{2}{U_\infty^2} \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial t} + U_\infty \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right]_{z=0^\pm} \quad (2.50)$$

## 2.2. Distribución de torbellinos potenciales no-estacionarios

Dado que la ecuación diferencial que gobierna el problema no-estacionario es idéntica a la del problema estacionario, la superposición de soluciones elementales tipo torbellino para los problemas denominados asimétricos, o de sustentación, y manantiales-sumideros para los problemas simétricos, o de espesor, resulta válida.

Las diferencias fundamentales con el problema estacionario resultan ser dos: (1) la distribución resultante depende del tiempo y (2) la distribución de torbellinos no se limita únicamente al perfil, sino que se extiende a la estela como consecuencia de la aplicación de la condición de Kutta.

Se considera por tanto el problema aerodinámico del movimiento no-estacionario de un perfil que viaja con una velocidad  $U_\infty$  y cuyas coordenadas vienen dadas por  $z = z_u(x, t)$ . En tal caso, de acuerdo con los razonamientos y desarrollos mostrados en la sección 2.1, y recuperando la Ec. (2.6) en versión no-estacionaria, el potencial queda definido como:

$$\Phi(x, z, t) = U_\infty x + \varphi(x, z, t) \quad (2.51)$$

El potencial anterior crea un campo de velocidades descrito por las componentes  $U(x, z, t) = U_\infty + u(x, z, t)$  y  $W(x, z, t) = w(x, z, t)$ , siendo  $u$  y  $w$  las velocidades debidas al potencial de perturbación.

La solución del potencial de perturbación viene dada entonces por una distribución de torbellinos  $\gamma(x, t)$  establecidos en el intervalo  $-b \leq x \leq \infty$  que es considerada la incógnita del problema. Conviene entonces presentar  $\gamma(x, t)$  como una función a trozos, denominando  $\gamma_a(x, t)$  a la distribución dentro del perfil y  $\gamma_w(x, t)$  a la correspondiente a la estela.

$$\gamma(x, t) = \begin{cases} 0 & -\infty < x \leq -b \\ \gamma_a(x, t) & -b < x < b \\ \gamma_w(x, t) & b \leq x < \infty \end{cases} \quad (2.52)$$

La velocidad vertical en un punto cualquiera del perfil debida a la distribución de torbellinos se denota por  $w_a(x, t)$ , y a partir de las condiciones de contorno adquiere el aspecto:

$$w_a(x, t) = \left. \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right|_{z=0} = \frac{\partial z_u}{\partial t} + U_\infty \frac{\partial z_u}{\partial x} \quad (2.53)$$

Por otro lado, dado que el potencial de perturbación  $\varphi(x, z, t)$  se encuentra originado por la distribución de singularidades, la velocidad  $w_a(x, t)$  se puede calcular superponiendo las velocidades debidas a toda la distribución.

$$w_a(x, t) = -\frac{1}{2\pi} \int_{r=-\infty}^{\infty} \frac{\gamma(r, t)}{x-r} dr = -\frac{1}{2\pi} \int_{r=-n}^b \frac{\gamma_a(r, t)}{x-r} dr - \frac{1}{2\pi} \int_{r=b}^{\infty} \frac{\gamma_w(r, t)}{x-r} dr \quad (2.54)$$

donde  $r$  representa la coordenada con origen en  $x = 0$  del punto donde se localiza el torbellino  $\gamma(r, t) dr$  y  $x$  la del punto donde se evalúa la velocidad vertical. En adelante, la variable  $r$  dentro de las integrales tiene el mismo papel que la coordenada  $x$ , pero al tener que convivir con ésta última es preferible usar este tipo de notación para evitar confusiones.

La función  $w_a$  es perfectamente conocida a través de la condición de contorno en el perfil y el valor de  $z_p(x, t)$ . Las incógnitas  $\gamma_a$  y  $\gamma_w$  deben extraerse resolviendo la ecuación integral (2.54) con la información adicional que ofrece la condición de Kutta, la cual permite relacionar las dos partes de la distribución de intensidad de torbellino. Previo a realizar dicha acción, se recuerdan ciertas definiciones a considerar.

**Circulación:** Dada una distribución de torbellinos de intensidad  $\gamma(x, t)$  situada en el intervalo  $-b < x < \infty$ , la circulación del problema no-estacionario se define como la intensidad total de la distribución en el intervalo  $(-b, x)$ :

$$\Gamma(x, t) = \int_{r=-b}^x \gamma(r, t) dr \quad (2.55)$$

Por definición, la integral anterior es igual a  $\oint_C V dr$ , donde  $C$  es cualquier curva cerrada dentro del dominio fluido que contenga el tramo  $-b \leq r \leq x$  de la distribución de torbellinos. La circulación en un punto  $x \geq b$  se puede descomponer en:

$$\Gamma(x, t) = \int_{r=-b}^b \gamma_a(r, t) dr + \int_{r=b}^x \gamma_w(r, t) dr = \Gamma_a(t) + \Gamma_w(x, t) \quad (2.56)$$

**Relación entre distribución de torbellinos y potencial:** A partir de la definición de circulación se puede deducir una relación entre el salto local de velocidades horizontales y la intensidad de torbellinos. Operando:

$$\gamma(x, t) = -\Delta u(x, 0^\pm, t) = -\Delta \varphi_x(x, 0^\pm, t) = \left. \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right|_{z=0^+} - \left. \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right|_{z=0^-} \quad (2.57)$$

donde  $u$  es la componente horizontal de la velocidad de perturbación producida por  $\varphi$ . En [6] se puede encontrar una explicación sencilla e intuitiva.

**Relación entre circulación y potencial:** Entrando con la Ec. (2.57) en la Ec. (2.55) se llega a aquella relación directa entre circulación y salto de potencial:

$$\begin{aligned}
 \Gamma(x, t) &= \int_{r=-b}^x \gamma(x, t) dr = \int_{r=-b}^x \left( \left. \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right|_{z=0^+} - \left. \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right|_{z=0^-} \right) dr \\
 &= \left[ \varphi(x, 0^+, t) - \varphi(-b, 0^+, t) \right] - \left[ \varphi(x, 0^-, t) - \varphi(-b, 0^-, t) \right] \\
 &= \Delta \varphi(-b, 0^\pm, t) - \Delta \varphi(x, 0^\pm, t) = -\Delta \varphi(x, 0^\pm, t)
 \end{aligned} \tag{2.58}$$

Se tiene en consideración que el término  $\Delta \varphi(-b, 0^\pm, t)$  resulta nulo al quedar fuera del perfil y libre de singularidades, garantizando la continuidad entre intradós y extradós.

**Teorema de la circulación de Lord Kelvin:** En un fluido no-viscoso incompresible, la circulación alrededor de una curva cerrada que se mueve con el fluido permanece constante en el tiempo, quedando recogida dicha condición a través de:

$$\frac{D\Gamma}{Dt} = \frac{\partial \Gamma}{\partial t} + \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial \Gamma}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \frac{\partial \Gamma}{\partial z} = 0 \tag{2.59}$$

Si en alguna zona del fluido se produce una variación de la circulación, ésta se compensa por el aumento de la vorticidad en otra zona para que la circulación global se mantenga igual a la inicial. Esta condición se visualiza de forma más directa al plantear el esquema de resolución numérica en la sección 3.3.

Una vez han sido presentados los conceptos que relacionan la circulación con la intensidad de la vorticidad, es posible aplicar la condición de Kutta. Cabe recordar que previamente se había alcanzado que el salto del coeficiente de presiones en la estela es nulo:

$$0 = \Delta c_p(x, t) = -\frac{2}{U_\infty^2} \left[ \frac{\partial \Delta \varphi}{\partial t} + U_\infty \frac{\partial \Delta \varphi}{\partial x} \right] \tag{2.60}$$

Por otro lado, las derivadas del salto del potencial aparecen cuando se calculan las derivadas de la circulación:

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{r=-b}^x \gamma(x, t) dr = -\frac{\partial}{\partial t} \int_{r=-b}^x \Delta \left( \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) dr = -\frac{\partial \Delta \varphi}{\partial t} \tag{2.61}$$

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \int_{r=-b}^x \gamma(x, t) dr = -\frac{\partial \Delta \varphi}{\partial x} \tag{2.62}$$

Sustituyendo en la Ec. (2.60) se obtiene:

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial t} + U_{\infty} \frac{\partial \Gamma}{\partial x} = 0, \quad x \geq b \quad (2.63)$$

La ecuación (2.63) se conoce como ecuación de advección, y controla el proceso de transporte de un campo escalar en un fluido de velocidad  $U_{\infty}$ . En el caso particular expuesto, la magnitud física transportada es la circulación generada como consecuencia del movimiento del perfil, que se desplaza en forma de torbellinos en la estela corriente abajo. Es interesante comprobar que también la distribución de torbellinos en la estela es gobernada por la Ec. (2.63). Teniendo en consideración que  $\frac{\partial \Gamma}{\partial x} = \gamma_w(x, t)$  en  $x \geq b$  y derivando respecto de  $x$ :

$$\frac{\partial^2 \Gamma}{\partial t \partial x} + U_{\infty} \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial x^2} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial \gamma_w}{\partial t} + U_{\infty} \frac{\partial \gamma_w}{\partial x} = 0 \quad (2.64)$$

Ecuación que de nuevo pone de manifiesto el desplazamiento de la intensidad de los torbellinos corriente abajo a medida que se van generando como consecuencia de la variación en circulación del perfil. Afrontando la explicación de una forma más concisa, dado que  $\Gamma_a$  varía, deben aparecer torbellinos con la finalidad de que la vorticidad global permanezca constante y la circulación del campo fluido nula. De hecho, particularizando la Ec. (2.63) en  $x = b$ . Por un lado, derivando respecto del tiempo y evaluando en  $x = b$  se tiene:

$$\frac{\partial \Gamma(b, t)}{\partial t} = \frac{d\Gamma_a}{dt}, \quad \frac{\partial \Gamma(b, t)}{\partial x} = \gamma_w(b, t) \quad (2.65)$$

Y tras sustituir se alcanza:

$$\frac{d\Gamma_a}{dt} + U_{\infty} \gamma_w(b, t) = 0 \quad (2.66)$$

Considerando en la ecuación anterior que  $U_{\infty} \approx dx/dt$ :

$$d\Gamma_a = -\gamma_w(b, t) dx \quad (2.67)$$

Esta última expresión es muy importante para comprender el fenómeno físico no-estacionario en perfiles. Se establece que cualquier variación en la circulación del perfil se traduce en la aparición de un torbellino de intensidad  $\gamma_w(b, t)$ , con sentido contrario en el borde de salida del perfil, el cual viaja corriente abajo con una velocidad  $U_{\infty}$ .

Tras comprobar la interpretación física del fenómeno de transporte de la circulación en un perfil en movimiento, se pasa a obtener aquella solución analítica. Para ello, se asume que el movimiento del perfil es armónico de frecuencia  $\omega$ . Así, la ecuación del perfil se puede expresar como  $z_u(x, t) = \bar{z}_u e^{i\omega t}$ . Como consecuencia, todas las variables de respuesta son también armónicas.

$$\begin{aligned} w_a(x, t) &= \bar{w}_a(x) e^{i\omega t} , \quad \Gamma(x, t) = \bar{\Gamma}(x) e^{i\omega t} \\ \gamma_a(x, t) &= \bar{\gamma}_a(x) e^{i\omega t} , \quad \gamma_w(x, t) = \bar{\gamma}_w(x) e^{i\omega t} \end{aligned} \quad (2.68)$$

Introduciendo la forma armónica en la Ec. (2.63) se tiene la ecuación diferencial de primer orden:

$$i\omega \bar{\Gamma}(x) + U_\infty \frac{d\bar{\Gamma}}{dx} = 0 , \quad x \geq b \quad (2.69)$$

La cual se completa con la condición de contorno  $\bar{\Gamma}(b) = \bar{\Gamma}_a$ , siendo  $\Gamma_a(t) = \bar{\Gamma}_a e^{i\omega t}$  la circulación en el perfil. La resolución de la ecuación diferencial ofrece como resultado la amplitud de la circulación:

$$\bar{\Gamma}(x) = \bar{\Gamma}_a e^{-\frac{i\omega}{U_\infty}(x-b)} \quad (2.70)$$

Y por tanto, la propia circulación puede expresarse como:

$$\Gamma(x, t) = \bar{\Gamma}(x) e^{i\omega t} = \bar{\Gamma}_a e^{\frac{i\omega b}{U_\infty}} e^{-\frac{i\omega}{U_\infty}(x-U_\infty t)} \quad (2.71)$$

De manera más compacta:

$$\Gamma(X, t) = \bar{\Gamma}_a e^{-i\kappa \frac{X}{b}} , \quad X = x - b \geq 0 \quad (2.72)$$

donde se ha introducido la coordenada relativa  $X = x - b$ , cuyo origen se encuentra en el borde de fuga del perfil, y la magnitud adimensional  $\kappa = \frac{\omega b}{U_\infty}$  conocida como frecuencia reducida. La frecuencia reducida tiene gran importancia en el comportamiento no-estacionario del conjunto fluido-perfil, pues va a controlar el efecto sustentador que sobre el perfil ejerce la distribución de torbellinos de la estela. El significado físico es muy intuitivo, y atendiendo a su expresión, es proporcional a la razón entre dos tiempos característicos:

$$\kappa = \pi \frac{T_{paso}}{T_{oscil}} = \frac{\omega b}{U_\infty} , \quad T_{paso} = \frac{2b}{U_\infty} , \quad T_{oscil} = \frac{2\pi}{\omega} \quad (2.73)$$

donde el tiempo de paso es aquel que tarda una partícula en recorrer el perfil, mientras que el tiempo de oscilación es el que emplea el perfil para completar un ciclo armónico.

Derivando la Ec. (2.72) respecto de  $x$  se obtiene la distribución de torbellinos en la estela:

$$\gamma_w(X, t) = \frac{-i\kappa}{b} \Gamma_a(t) e^{-i\kappa \frac{X}{b}} , \quad X = x - b \geq 0 \quad (2.74)$$

Teniendo en cuenta que:

$$\frac{i\kappa}{b} \Gamma_a(t) = \frac{1}{U_\infty} i\omega \bar{\Gamma}_a e^{i\omega t} = \frac{1}{U_\infty} \frac{d\Gamma_a}{dt} \quad (2.75)$$

Puede finalmente escribirse:

$$\gamma_w(X, t) = -\frac{1}{U_\infty} \frac{d\Gamma_a}{dt} e^{-i\kappa \frac{X}{b}}, \quad X = x - b \geq 0 \quad (2.76)$$

Antes de proseguir, se presentan ciertas conclusiones en relación al comportamiento del campo fluido y resolución del problema analítico:

- El valor de  $\Gamma_a(t) = \bar{\Gamma}_a e^{i\omega t}$  todavía no es conocido. Posteriormente es calculado a partir del valor de la distribución de  $\gamma_a(x, t)$  sobre el perfil.
- Los torbellinos en la estela se comportan como una onda senoidal que se genera en  $X = 0$  por el efecto del perfil, la cual se desplaza corriente abajo a una velocidad  $U_\infty$ . Destaca el hecho de que la función  $\gamma_w$  verifica la ecuación de ondas unidimensionales:

$$\frac{\partial^2 \gamma_w}{\partial t^2} = U_\infty^2 \frac{\partial^2 \gamma_w}{\partial x^2}, \quad x \geq b \quad (2.77)$$

- El periodo de la onda es inversamente proporcional a la frecuencia reducida. Llamando  $X_p$  al periodo del senoide se tiene que:  $X_p = \frac{2\pi b}{\kappa}$ .
- La amplitud de la onda es directamente proporcional a la frecuencia reducida a partir de la interpretación de la Ec. (2.74). Resulta análogo considerar que es directamente proporcional al cambio de circulación en el perfil según la Ec. (2.76). Llamando  $A_p$  a dicha amplitud:

$$A_p = \left| \kappa \frac{\Gamma_a(t)}{b} \right| = \left| \frac{1}{U_\infty} \frac{d\Gamma_a}{dt} \right| = \kappa \frac{\bar{\Gamma}_a}{b} \quad (2.78)$$

En cualquier caso, ambas interpretaciones son equivalentes pues una alta frecuencia en la oscilación del perfil induce cambios muy rápidos en la circulación.

- Es posible intuir que la influencia de la estela de torbellinos disminuye cuanto menor sea la frecuencia reducida, dado que por un lado decrece la amplitud y por otro la frecuencia de la onda, lo que implica una menor energía. Al contrario, valores elevados de  $\kappa$  derivan en una mayor amplitud de la distribución  $\gamma_w(x, t)$  y además que se incremente la frecuencia de alternancia entre los torbellinos. Ambos fenómenos en conjunto suponen un mayor peso de las fuerzas aerodinámicas no-estacionarias causadas por la estela.

A partir de este punto se continúa con el desarrollo en vista de conocer las expresiones de intensidad de torbellinos tanto en la estela como en el perfil. Introduciendo la variable adimensional  $\xi = x/b$ , la amplitud de la distribución de torbellinos en la estela  $\bar{\gamma}_w(\xi)$  se reescribe como:

$$\bar{\gamma}_w(\xi) = -\bar{\Gamma}_a \frac{i\kappa}{b} e^{-i\kappa(\xi-1)}, \quad \xi \geq 1 \quad (2.79)$$

Con el resultado anterior, ya se dispone del valor (a falta de conocer  $\bar{\Gamma}_a$ ) de la contribución asociada a la estela de la Ec. (2.54), que determinaba la velocidad vertical del perfil, la cual es mostrada eliminando aquellos términos  $e^{i\omega t}$  y usando las coordenadas adimensionales  $\xi = x/b$  y  $\eta = r/b$  como variables de integración:

$$\begin{aligned} \bar{w}_a(\xi, t) &= -\frac{1}{2\pi} \int_{\eta=-1}^1 \frac{\bar{\gamma}_a(\eta) e^{i\omega t}}{\xi - \eta} d\eta - \frac{1}{2\pi} \int_{\eta=1}^{\infty} \frac{\bar{\gamma}_w(\eta) e^{i\omega t}}{\xi - \eta} d\eta \\ \bar{w}_a(\xi) &= -\frac{1}{2\pi} \int_{\eta=-1}^1 \frac{\bar{\gamma}_a(\eta)}{\xi - \eta} d\eta - \frac{1}{2\pi} \int_{\eta=1}^{\infty} \frac{\bar{\gamma}_w(\eta)}{\xi - \eta} d\eta \\ &= -\frac{1}{2\pi} \int_{\eta=-1}^1 \frac{\bar{\gamma}_a(\eta)}{\xi - \eta} d\eta + \frac{1}{2\pi} \left( \frac{i\kappa}{b} \bar{\Gamma}_a e^{i\kappa} \right) \int_{\eta=1}^{\infty} \frac{e^{-i\kappa\eta}}{\xi - \eta} d\eta \\ &\equiv -\frac{1}{2\pi} \int_{\eta=-1}^1 \frac{\bar{\gamma}_a(\eta)}{\xi - \eta} d\eta + \bar{G}(\xi), \quad -1 \leq \xi \leq 1 \end{aligned} \quad (2.80)$$

Para alcanzar la Ec. (2.80) ha sido sustituida la amplitud de la intensidad de torbellinos en la estela  $\bar{\gamma}_w(\xi)$  por la expresión correspondiente a la Ec. (2.76). Así pues, la función  $\bar{G}(\xi)$  hace referencia a la influencia de la estela sobre el campo de velocidades verticales. Pasando a la izquierda todo aquello conocido queda:

$$\bar{w}_a(\xi) - \bar{G}(\xi) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\eta=-1}^1 \frac{\bar{\gamma}_a(\eta)}{\xi - \eta} d\eta \quad (2.81)$$

La expresión anterior es una ecuación integral donde la función  $\gamma_a(\eta)$  resulta ser la incógnita. Existen diferentes metodologías para invertir la Ec. (2.81) y despejar la función incógnita. Las más relevantes son el método de Glauert y el método de Goldstein.

El primero de ellos se basa en el desarrollo en series de Fourier de las funciones implicadas y la solución mediante identificación tras la integración de funciones conocidas. Por otro lado, el procedimiento planteado por Goldstein se establece en la inversión de la ecuación integral mediante núcleos resolventes. Estos núcleos son funciones que premultiplican a la ecuación y que tras una nueva integración permiten despejar la incógnita. Se emplea el segundo de los procedimientos.

Presentando el resultado final para poder continuar con el desarrollo. Sean dos funciones  $f(\xi)$  y  $g(\xi)$  definidas en  $-1 \leq \xi \leq 1$  que verifican:

$$f(\xi) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\eta=-1}^1 \frac{g(\xi)}{\xi - \eta} d\eta \quad (2.82)$$

$$g(\xi) = -\frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{1-\xi}{1+\xi}} \int_{\eta=-1}^1 \sqrt{\frac{1+\eta}{1-\eta}} \frac{f(\xi)}{\eta - \xi} d\eta \quad (2.83)$$

Identificando las funciones  $f(\xi)$  y  $g(\xi)$  en la Ec. (2.80) se tiene:

$$f(\xi) = \bar{w}_a(\xi) - \bar{G}(\xi) \quad (2.84)$$

$$g(\xi) = \bar{\gamma}_a(\xi) \quad (2.85)$$

Por tanto:

$$\bar{\gamma}_a(\xi) = -\frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{1-\xi}{1+\xi}} \int_{\eta=-1}^1 \sqrt{\frac{1+\eta}{1-\eta}} \frac{f(\xi)}{\eta - \xi} d\eta \quad (2.86)$$

Introduciendo la expresión expandida de  $\bar{G}(\xi)$  que había sido calculada:

$$\begin{aligned} \bar{\gamma}_a(\xi) &= \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{1-\xi}{1+\xi}} \int_{\eta=-1}^1 \sqrt{\frac{1+\eta}{1-\eta}} \frac{\bar{w}_a(\xi)}{\xi - \eta} d\eta \\ &+ \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{1-\xi}{1+\xi}} \int_{\eta=-1}^1 \sqrt{\frac{1+\eta}{1-\eta}} \frac{1}{\eta - \xi} \left( \frac{i\kappa}{2\pi b} \bar{\Gamma}_a e^{i\kappa} \int_{\mu=1}^{\infty} \frac{e^{-i\kappa\mu}}{\eta - \mu} d\mu \right) d\eta \end{aligned} \quad (2.87)$$

Atendiendo a la resolución de integrales, puede establecerse que:

$$\int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+\eta}{1-\eta}} \left( \frac{1}{\eta - \xi} \frac{1}{\eta - \mu} \right) d\eta = \frac{\pi}{\xi - \mu} \sqrt{\frac{\mu+1}{\mu-1}} \quad (2.88)$$

Operando con el segundo término de la Ec. (2.87):

$$\begin{aligned} \bar{\gamma}_a(\xi) &= \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{1-\xi}{1+\xi}} \int_{\eta=-1}^1 \sqrt{\frac{1+\eta}{1-\eta}} \frac{\bar{w}_a(\xi)}{\xi - \eta} d\eta \\ &+ \left( \frac{i\kappa}{\pi b} \bar{\Gamma}_a e^{i\kappa} \right) \sqrt{\frac{1-\xi}{1+\xi}} \int_{\mu=1}^{\infty} \sqrt{\frac{\mu+1}{\mu-1}} \frac{e^{-i\kappa\mu}}{\xi - \mu} d\mu \end{aligned} \quad (2.89)$$

Se observa en la Ec. (2.89) que la amplitud de la distribución de torbellinos en el perfil es combinación de dos términos. El primer sumando representa la contribución de la velocidad medida en el mismo perfil y se denota por  $\bar{\gamma}_{a,0}(\xi)$ . Así pues, el segundo sumando se relaciona con la contribución de las velocidades en la estela a la distribución de torbellinos, desde  $\mu = 1$  hasta  $\mu = \infty$ , y es dependiente de la circulación, quedando designado como  $\bar{\gamma}_{a,\infty}(\xi)$ . Se tiene por tanto:

$$\bar{\gamma}_a(\xi) = \bar{\gamma}_{a,0}(\xi) + \bar{\gamma}_{a,\infty}(\xi) \quad (2.90)$$

$$\bar{\gamma}_{a,0}(\xi) = \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{1-\xi}{1+\xi}} \int_{\eta=-1}^1 \sqrt{\frac{1+\eta}{1-\eta}} \frac{\bar{w}_a(\xi)}{\xi-\eta} d\eta \quad (2.91)$$

$$\bar{\gamma}_{a,\infty}(\xi) = \left( \frac{i\kappa}{\pi b} \bar{\Gamma}_a e^{i\kappa} \right) \sqrt{\frac{1-\xi}{1+\xi}} \int_{\mu=1}^{\infty} \sqrt{\frac{\mu+1}{\mu-1}} \frac{e^{-i\kappa\mu}}{\xi-\mu} d\mu \quad (2.92)$$

De la ecuación (2.92) sigue sin ser conocida la circulación  $\bar{\Gamma}_a$ . No obstante, por definición de circulación en el perfil:

$$\bar{\Gamma}_a = \int_{x=-b}^b \bar{\gamma}_a(x) dx = b \int_{\xi=-1}^1 \bar{\gamma}_a(\xi) d\xi \quad (2.93)$$

Por lo que integrando en el intervalo  $\xi \in [-1, 1]$  en la Ec. (2.89):

$$\frac{\bar{\Gamma}_a}{b} = \int_{\xi=-1}^1 \bar{\gamma}_a(\xi) d\xi = \int_{\xi=-1}^1 \bar{\gamma}_{a,0}(\xi) d\xi + \int_{\xi=-1}^1 \bar{\gamma}_{a,\infty}(\xi) d\xi \equiv \frac{\bar{\Gamma}_{a,0}}{b} + \frac{\bar{\Gamma}_{a,\infty}}{b} \quad (2.94)$$

A partir de este punto se busca obtener expresiones más compactas, desarrollando las integrales de manera individual:

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma}_{a,0} &= b \int_{\xi=-1}^1 \bar{\gamma}_{a,0}(\xi) d\xi \\ &= b \int_{\xi=-1}^1 \left( \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{1-\xi}{1+\xi}} \int_{\eta=-1}^1 \sqrt{\frac{1+\eta}{1-\eta}} \frac{\bar{w}_a(\xi)}{\xi-\eta} d\eta \right) d\xi \\ &= \frac{2b}{\pi} \int_{\eta=-1}^1 \sqrt{\frac{1+\eta}{1-\eta}} \bar{w}_a(\xi) \left( \int_{\xi=-1}^1 \sqrt{\frac{1-\xi}{1+\xi}} \frac{d\xi}{\xi-\eta} \right) d\eta \\ &= -2b \int_{\eta=-1}^1 \sqrt{\frac{1+\eta}{1-\eta}} \bar{w}_a(\xi) d\eta \end{aligned} \quad (2.95)$$

$$\begin{aligned}
 \bar{\Gamma}_{a,\infty} &= b \int_{\xi=-1}^1 \bar{\gamma}_{a,\infty}(\xi) d\xi \\
 &= \left( \frac{i\kappa}{\pi} \bar{\Gamma}_a e^{i\kappa} \right) \int_{\xi=-1}^1 \sqrt{\frac{1-\xi}{1+\xi}} \left( \int_{\mu=1}^{\infty} \sqrt{\frac{\mu+1}{\mu-1}} \frac{e^{-i\kappa\mu}}{\xi-\mu} d\mu \right) d\xi \\
 &= \left( \frac{i\kappa}{\pi} \bar{\Gamma}_a e^{i\kappa} \right) \int_{\xi=-1}^1 \sqrt{\frac{\mu+1}{\mu-1}} e^{-i\kappa\mu} \left( \int_{\mu=1}^{\infty} \sqrt{\frac{1-\xi}{1+\xi}} \frac{1}{\xi-\mu} d\xi \right) d\mu \quad (2.96) \\
 &= \left( \frac{i\kappa}{\pi} \bar{\Gamma}_a e^{i\kappa} \right) \int_{\xi=-1}^1 \sqrt{\frac{\mu+1}{\mu-1}} e^{-i\kappa\mu} \left( -\pi + \pi \sqrt{\frac{\mu-1}{\mu+1}} \right) d\mu \\
 &= -i\kappa \bar{\Gamma}_a e^{i\kappa} \int_{\xi=-1}^1 \left( \sqrt{\frac{\mu+1}{\mu-1}} - 1 \right) e^{-i\kappa\mu} d\mu \equiv -i\kappa \bar{\Gamma}_a e^{i\kappa} \psi(\kappa)
 \end{aligned}$$

donde:

$$\psi(\kappa) = -\frac{\pi}{2} \left[ H_1^{(2)}(\kappa) + i H_0^{(2)}(\kappa) \right] - \frac{e^{-i\kappa}}{i\kappa} \quad (2.97)$$

Las funciones  $H_1^{(2)}(\kappa)$  y  $H_0^{(2)}(\kappa)$  son las llamadas funciones de Hankel de orden cero y uno. En ocasiones también se les llama funciones de Bessel o de tercera especie. Finalmente, introduciendo las Ecs. (2.95) y (2.96) en la Ec. (2.94) es posible despejar la circulación  $\bar{\Gamma}_a$ :

$$\bar{\Gamma}_a = \bar{\Gamma}_{a,0} + \bar{\Gamma}_{a,\infty} = \bar{\Gamma}_{a,0} - i\kappa \bar{\Gamma}_a e^{i\kappa} \psi(\kappa) \quad (2.98)$$

Se alcanza que:

$$\bar{\Gamma}_a = \frac{\bar{\Gamma}_{a,0}}{1 + i\kappa e^{i\kappa} \psi(\kappa)} \quad (2.99)$$

Tras introducir los valores de  $\bar{\Gamma}_{a,0}$  y  $\psi(\kappa)$  y simplificar se llega a:

$$\bar{\Gamma}_a = \frac{4b}{i\kappa\pi e^{i\kappa}} \frac{\int_{\eta=-1}^1 \sqrt{\frac{1+\eta}{1-\eta}} \bar{w}_a(\xi) d\eta}{H_1^{(2)}(\kappa) + i H_0^{(2)}(\kappa)} \quad (2.100)$$

El resultado logrado permite expresar las distribuciones de torbellinos en perfil  $\bar{\gamma}_a(\xi)$  y estela  $\bar{\gamma}_w(\xi)$  en función de la geometría del perfil  $\bar{w}_a(\xi)$ .

**Resumen:**

El objetivo de este proceso era obtener la distribución de torbellinos no-estacionarios en el campo fluido  $\gamma(x, t)$ . Cabe recordar que esta función es definida a tramos mediante la Ec. (2.52), distinguiendo los valores en el perfil como  $\gamma_a$  y los torbellinos en la estela como  $\gamma_w$ . Igualmente, por la aplicación de la hipótesis de Kutta en la estela ha sido encontrada una relación entre la distribución de torbellinos en la estela y circulación del perfil:

$$\gamma_w(X, t) = -\frac{1}{U_\infty} \frac{d\Gamma_a}{dt} e^{-i\kappa \frac{X}{b}}, \quad X = x - b \geq 0 \quad (2.101)$$

Se asume ahora que el movimiento es armónico, estableciendo que  $\Gamma_a(x, t) = \bar{\Gamma}_a(x) e^{i\omega t}$  y  $\gamma_w(x, t) = \bar{\gamma}_w(x) e^{i\omega t}$ . Desarrollando en términos de la frecuencia reducida y de la expresión obtenida para  $\bar{\Gamma}_a$  en la Ec. (2.100):

$$\bar{\gamma}_w(\xi) = -\frac{4 e^{-i\kappa\xi} \int_{\eta=-1}^1 \sqrt{\frac{1+\eta}{1-\eta}} \bar{w}_a(\xi) d\eta}{\pi [H_1^{(2)}(\kappa) + i H_0^{(2)}(\kappa)]}, \quad \xi \geq 1 \quad (2.102)$$

Por otro lado, la distribución de torbellinos sobre el perfil se ha calculado a partir de la distribución de velocidades:

$$\begin{aligned} \bar{\gamma}_a(\xi) = & \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{1-\xi}{1+\xi}} \int_{\eta=-1}^1 \sqrt{\frac{1+\eta}{1-\eta}} \frac{\bar{w}_a(\xi)}{\xi-\eta} d\eta \\ & + \left( \frac{i\kappa}{\pi b} \bar{\Gamma}_a e^{i\kappa} \right) \sqrt{\frac{1-\xi}{1+\xi}} \int_{\mu=1}^{\infty} \sqrt{\frac{\mu+1}{\mu-1}} \frac{e^{-i\kappa\mu}}{\xi-\mu} d\mu \end{aligned} \quad (2.103)$$

Es por ello que a lo largo de la sección han sido alcanzadas las expresiones de las incógnitas  $\bar{\gamma}_a$  y  $\bar{\gamma}_w$  para un movimiento tipo armónico del perfil, comprobando que en origen tanto  $\bar{\gamma}_a(\xi)$  como  $\bar{\gamma}_w(\xi)$  dependen directamente de  $w_a(\xi)$ .

La forma del perfil y su movimiento, dadas por la función  $z_u(x, t) = \bar{z}_u(x) e^{i\omega t}$ , permiten obtener la distribución de velocidades verticales  $w_a(x, t) = \bar{w}_a(x) e^{i\omega t}$  a través de la aplicación de la condición de contorno en el perfil. Por consiguiente, la función  $\bar{w}_a(\xi)$  resulta conocida con la expresión:

$$\bar{w}_a(x) = \frac{U_\infty}{b} \left( \frac{dz_u}{dt} + i\kappa \bar{z}_u \right) \quad (2.104)$$

### 2.3. Cálculo analítico del coeficiente de presiones

Como ha sido mencionado a lo largo del planteamiento teórico, la principal meta es el cálculo de la distribución de presiones sobre el perfil dado que las fuerzas aerodinámicas no-estacionarias son necesarias para realizar posteriores análisis. La presión ha sido evaluada en un punto del perfil (intradós o extradós) mediante el coeficiente de presiones adimensional calculado en la sección 2.1.5, con expresión:

$$\text{Intradós} \rightarrow c_{p,i}(x, 0, t) \approx -\frac{2}{U_\infty} \left. \frac{\partial \phi}{\partial x} \right|_{z=0^-} - \frac{2}{U_\infty^2} \left[ \frac{\partial \phi}{\partial t} + U_\infty \frac{\partial \phi}{\partial x} \right]_{z=0^-} \quad (2.105)$$

$$\text{Extradós} \rightarrow c_{p,e}(x, 0, t) \approx -\frac{2}{U_\infty} \left. \frac{\partial \phi}{\partial x} \right|_{z=0^+} - \frac{2}{U_\infty^2} \left[ \frac{\partial \phi}{\partial t} + U_\infty \frac{\partial \phi}{\partial x} \right]_{z=0^+} \quad (2.106)$$

El cómputo global cabe medirlo como el balance entre intradós y extradós, el cual ofrece la distribución de fuerzas de sustentación (en este caso no-estacionaria) aplicada sobre el perfil. Desarrollando el balance del coeficiente de presiones:

$$\Delta c_p(x, 0, t) = -\frac{2}{U_\infty^2} \left[ \frac{\partial \Delta \phi}{\partial t} + U_\infty \frac{\partial \Delta \phi}{\partial x} \right] \quad (2.107)$$

A partir de este punto, se introduce el valor de la circulación según las Ecs. (2.61) y (2.62) obtenidas a partir de la relación entre circulación y potencial:

$$\Delta c_p(x, 0, t) = \frac{2}{U_\infty^2} \left[ \frac{\partial \Gamma}{\partial t} + U_\infty \frac{\partial \Gamma}{\partial x} \right] \quad (2.108)$$

Igualmente, empleando la definición de circulación y asumiendo un movimiento del tipo armónico  $c_p(\xi, t) = \bar{c}_p(\xi) e^{i\omega t}$  y  $\gamma_a(x, t) = \bar{\gamma}_a(x) e^{i\omega t}$ :

$$\Gamma(x, t) = \int_{r=-b}^x \gamma(r, t) dr \quad (2.109)$$

$$\Delta \bar{c}_p(\xi) = \frac{2}{U_\infty} \left[ \bar{\gamma}_a(\xi) + i\kappa \int_{\lambda=-1}^{\xi} \bar{\gamma}_a(\lambda) d\lambda \right], \quad 1 \leq \xi \leq 1 \quad (2.110)$$

La expresión de  $\bar{\gamma}_a(\xi)$  puede ser sustituida atendiendo a los valores previamente alcanzados en la Ec. (2.89). Donde se desarrolla una expresión de forma compacta en función de las velocidades del perfil  $w_a(\xi, t)$  obtenidas mediante las condiciones de contorno:

$$\Delta c_p(\xi, t) = \frac{4}{\pi U_\infty} \sqrt{\frac{1-\xi}{1+\xi}} \int_{\eta=-1}^1 \sqrt{\frac{1+\eta}{1-\eta}} \frac{W_a(\xi, \eta, t)}{\xi - \eta} d\eta \quad (2.111)$$

La expresión  $\mathcal{W}_a(\xi, \eta, t)$  con unidades de velocidad vale:

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_a(\xi, \eta, t) &= w_a(\eta, t) \\ &+ \frac{b}{U_\infty} \frac{1+\xi}{1+\eta} \int_{\lambda=-1}^{\eta} \frac{\partial w_a(\lambda, t)}{\partial t} d\eta \\ &+ (\xi - \eta) [1 - \mathcal{C}(\kappa)] w_a(\eta, t) \end{aligned} \quad (2.112)$$

$$\mathcal{C}(\kappa) = \frac{H_1^{(2)}(\kappa)}{H_1^{(2)}(\kappa) + i H_0^{(2)}(\kappa)} \quad (2.113)$$

La descomposición realizada de  $\mathcal{W}_a(\xi, \eta, t)$  en diversos sumandos permite analizar cada uno de ellos de manera individual. Los dos primeros dan lugar a la distribución de presiones debidas a la distribución de torbellinos en el mismo perfil. El último, y dependiente de la función de Theodorsen según la Ec. (2.113), representa el efecto en la distribución de presiones que tiene la estela a través de la frecuencia reducida.

De forma que el efecto de la estela en el perfil se atenúa con frecuencias reducidas bajas, pues se puede comprobar que  $\lim_{\kappa \rightarrow 0} \mathcal{C}(\kappa) = 1$ , despreciando el último término de la ecuación. Sustituyendo la definición geométrica  $w_a = \dot{z}_u + U_\infty z_{u,x}$  en el primer término de  $\mathcal{W}_a(\xi, \eta, t)$  se pueden agrupar en:

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_a(\xi, \eta, t) &= \frac{U_\infty}{b} \frac{\partial z_u}{\partial \eta} \\ &+ \frac{\partial z_u}{\partial t} + \frac{b}{U_\infty} \frac{1+\xi}{1+\eta} \int_{\lambda=-1}^{\eta} \frac{\partial w_a(\lambda, t)}{\partial t} d\eta \\ &+ (\xi - \eta) [1 - \mathcal{C}(\kappa)] w_a(\eta, t) \\ &\equiv \mathcal{W}_s + \mathcal{W}_{qs} + \mathcal{W}_u \end{aligned} \quad (2.114)$$

De manera individual:

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_s(\xi, \eta, t) &= \frac{U_\infty}{b} \frac{\partial z_u}{\partial \eta} \\ \mathcal{W}_{qs}(\xi, \eta, t) &= \frac{\partial z_u}{\partial t} + \frac{b}{U_\infty} \frac{1+\xi}{1+\eta} \int_{\lambda=-1}^{\eta} \frac{\partial w_a(\lambda, t)}{\partial t} d\eta \\ \mathcal{W}_u(\xi, \eta, t) &= (\xi - \eta) [1 - \mathcal{C}(\kappa)] w_a(\eta, t) \end{aligned} \quad (2.115)$$

En el caso de introducir las expresiones logradas en la definición del coeficiente de presiones, éste puede dividirse en tres contribuciones:

$$\Delta c_p(\xi, t) = \Delta c_{p,s}(\xi, t) + \Delta c_{p,c.e}(\xi, t) + \Delta c_{p,u}(\xi, t) \quad (2.116)$$

El primero de los sumandos  $\Delta c_{p,s}$  responde a la contribución estacionaria, denominado de tal forma porque  $\mathcal{W}_s(\xi, \eta, t)$  no presenta dependencias temporales y se corresponde con la distribución de presiones que tendría un perfil estático con una geometría que no dependiera del tiempo. El segundo sumando  $\Delta c_{p,c.e}$  se conoce como distribución cuasi-estacionaria y depende tanto de las velocidades como de las aceleraciones del perfil en dirección perpendicular a la corriente. Las dependencias temporales surgen debido a la aplicación de las condiciones de contorno y la definición de  $\Delta c_p(x, t)$ . Por último, el tercer sumando  $\Delta c_{p,u}$  es el efecto de la estela de torbellinos en el perfil y es característico de los problemas de aerodinámica no-estacionaria, dependiendo su influencia directamente del valor de la frecuencia reducida.

---

## Método de los paneles no-estacionario

El método de los paneles fue desarrollado a partir de 1970 con la finalidad de obtener soluciones aerodinámicas sobre formas no arbitrarias y que tuviesen en consideración tanto el grosor como la orientación del cuerpo a estudiar. Previa a dicha época, diversas teorías ofrecían aproximaciones de las fuerzas y momentos que quedaban sometidas a numerosas restricciones, destacando entre ellas la teoría de perfiles delgados.

Ante dichas limitaciones, el método de los paneles supuso un paso en firme en el estudio numérico aerodinámico. Específicamente, y a lo largo de este capítulo, se trata la vertiente del método de los paneles basado en aquellas singularidades conocidas como vórtices.

Cabe destacar que dicho procedimiento resulta, en cierta medida, análogo al método de los paneles basado en fuentes. La filosofía de ambos se encuentra fundada en cubrir el cuerpo de estudio por un conjunto de singularidades, de forma que el flujo quede modelado como una línea de corriente. Sin embargo, la diferencia radica en que este último responde al tratamiento de problemas simétricos, es decir, no sustentadores. Dado el gran interés en la resolución del problema sustentador, el uso de vórtices se encuentra justificado ante la necesidad de inducir una determinada circulación en el campo fluido.

Es posible enfocar el análisis a partir de diversos puntos de vista en términos del comportamiento del flujo. Por un lado, puede realizarse un estudio estacionario o plantear aquel esquema en el que se considere la no-estacionalidad del fluido. Con el propósito de llevar a cabo un análisis completo, se implementa el método no-estacionario, en el cual deben modelarse los fenómenos introducidos a través de la influencia de la estela sobre el perfil. Igualmente, se asume un perfil inmerso en una corriente con una velocidad horizontal dada, empleando un tratamiento bidimensional a lo largo del problema.

En lo que acontece a la localización de las singularidades, se lleva a cabo una simplificación al considerar que el perfil presenta una geometría  $z_p(x, t)$  conocida, la cual define la línea media. Así pues, en vista de calcular la distribución de fuerzas sobre el perfil, o el coeficiente de presiones, se divide la línea media en  $n$  paneles. Debido a que la geometría puede considerarse como una ligera perturbación de la situación horizontal inicial, las pendientes de la función  $z_p(x, t)$  se aproximan pequeñas, y por tanto los cosenos se asemejan a la unidad. Significando este hecho que asumir que los paneles residen sobre el perfil o sobre la proyección de la cuerda es lo mismo a efectos matemáticos.

Queda entonces descrito el esquema a implementar, en el cual el perfil se modela a través de su proyección en la línea media. La variable de entrada del esquema numérico resulta ser la geometría  $z_p(x, t)$ , la cual puede variar a lo largo del tiempo y permite resolver diversos casos de estudio.

Por último, y en relación al modelado del fluido, se define un comportamiento del flujo como no compresible. Siendo este hecho de gran relevancia, pues el procedimiento se encuentra sustentado en aquellos principios teóricos mostrados en el capítulo 2.

#### 3.1. Teorema de Kutta-Joukovsky generalizado

Antes de afrontar el planteamiento de las ecuaciones para la resolución numérica, debe ampliarse aquella base teórica sobre la cual se fundamenta el método. El teorema de Kutta-Joukovsky establece que la sustentación, por unidad de envergadura, en un cuerpo bidimensional es directamente proporcional a la circulación alrededor de dicho cuerpo. Destacando este teorema la importancia del concepto teórico de la circulación en el campo fluido.

$$L = \rho_\infty U_\infty \Gamma \quad (3.1)$$

Atendiendo al flujo fuera del perfil, la circulación alrededor de cualquier curva cerrada que no incluya al perfil resulta ser nula al asumirlo irrotacional. Sin embargo, al considerar que el flujo sobre el perfil es modelado mediante vórtices en la línea media, si se traza una curva que incluya a alguna de dichas singularidades, el valor de la circulación se muestra finito. Por este motivo, en el caso de describir una curva que incluya la totalidad del perfil, la circulación adopta un valor igual a la suma de las intensidades de los torbellinos que definen el propio perfil.

El punto importante radica en que el teorema de Kutta-Joukovsky simplemente es una forma alternativa de manifestar las consecuencias de la distribución de presiones surgida sobre el perfil. En ningún caso puede afirmarse que la circulación sea la causante de la sustentación, ya que, la sustentación se origina por un desequilibrio de la distribución de presiones. A pesar de ello, en la teoría de flujo incompresible y potencial, es mucho más fácil determinar la circulación alrededor de un cuerpo que la distribución de presiones, residiendo en este hecho la importancia del teorema de Kutta-Joukovsky.

Consecuentemente, el análisis teórico de la sustentación en cuerpos bidimensionales de flujo incompresible y no viscoso se centra en el cálculo de la circulación para posteriormente derivar de ella aquellas fuerzas que actúan sobre el cuerpo. No obstante, con el propósito de afrontar el estudio planteado en este capítulo, es necesario recurrir al teorema de Kutta-Joukovsky en su vertiente generalizada, es decir, particularizado para la condición no-estacionaria.

Se discretiza el perfil como conjunto de  $n$  paneles, localizando en cada uno de ellos un torbellino de intensidad  $\Gamma_j(t)$  en el centro aerodinámico del panel  $x = -x_{\Gamma_j}$ . En principio, y tal como ha sido desarrollado en la sección 2.2, lo que antes era una distribución  $\gamma_a(x, t)$  incógnita ha sido reducida a un conjunto de  $n$  torbellinos cuyas intensidades deben ser calculadas.

Es por ello que el principal objetivo de esta sección es el desarrollo teórico de la sustentación total en el perfil a partir de dichos torbellinos  $\Gamma_j(t)$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ . Siendo la solución alcanzada una expresión que generaliza el conocido teorema de Kutta Joukovsky para el caso no-estacionario.

Matemáticamente, la distribución de torbellinos se puede formular como una suma de distribuciones singulares (delta de dirac):

$$\gamma_a(x, t) = \sum_{j=1}^n \Gamma_j(t) \delta(x - x_{\Gamma_j}) \quad (3.2)$$

La circulación en un punto  $x$  del perfil admite ser expresada de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \Gamma(x, t) &= \int_{X=-b}^x \gamma_a(X, t) dX = \int_{X=-b}^x \sum_{j=1}^n \Gamma_j(t) \delta(x - x_{\Gamma_j}) dX \\ &= \sum_{j=1}^n \Gamma_j(t) \int_{X=-b}^x \delta(x - x_{\Gamma_j}) dX = \sum_{j=1}^n \Gamma_j(t) \mathcal{H}(x - x_{\Gamma_j}) \end{aligned} \quad (3.3)$$

donde  $\mathcal{H}(x)$  es la función de Heaviside, con valor de  $\mathcal{H}(x) = 1$  para  $x > 0$  y  $\mathcal{H}(x) = 0$  para  $x < 0$ . Además, se tiene que la intensidad de torbellinos dentro del perfil cumple que  $\gamma_a(x, t) = \frac{\partial \Gamma}{\partial x}$ .

En el caso de asumir inicialmente conocidas las funciones  $\Gamma_j(t)$ , resulta posible plantear el cálculo de la sustentación global del perfil:

$$L(t) = \int_{x=-b}^b \Delta p(x, t) dx \quad (3.4)$$

El salto de presiones  $\Delta p(x, t) = \frac{1}{2} \rho_\infty U_\infty^2 \Delta c_p(x, t)$  que aparece en la ecuación de la sustentación puede expresarse en función de la evolución de la circulación.

$$\Delta c_p(x, t) = \frac{\Delta p(x, t)}{\frac{1}{2} \rho_\infty U_\infty^2} = \frac{2}{U_\infty^2} \left[ \frac{\partial \Gamma}{\partial t} + U_\infty \frac{\partial \Gamma}{\partial x} \right] \quad (3.5)$$

La expresión alcanzada también se verifica en la estela tal y como se muestra en la Ec. 2.35, en cuyo caso el valor del coeficiente de presión es nulo. La sustentación adquiere la forma:

$$L(t) = \int_{x=-b}^b \Delta p(x, t) dx = \rho_\infty \int_{x=-b}^b \left[ \frac{\partial \Gamma}{\partial t} + U_\infty \frac{\partial \Gamma}{\partial x} \right] dx \equiv L_s + L_u \quad (3.6)$$

Atendiendo a la Ec. 3.6, es posible dividir la sustentación en aquella componente estacionaria  $L_s$  y no-estacionaria  $L_u$ . Desarrollando cada una de ellas de manera individual, primeramente se lleva a cabo el estudio de la contribución estacionaria:

$$L_s = \rho_\infty U_\infty \int_{x=-b}^b \frac{\partial \Gamma}{\partial x} dx = \rho_\infty U_\infty (\Gamma(b, t) - \Gamma(-b, t)) = \rho_\infty U_\infty \Gamma(b, t) \quad (3.7)$$

Empleando la definición de circulación en el perfil  $\Gamma(b, t) = \Gamma_a$  y teniendo en consideración que  $\Gamma(-b, t) = 0$  debido al hecho de que en el exterior del perfil la circulación es nula, se alcanza la expresión simplificada de la sustentación estacionaria global del perfil:

$$L_s(t) = \rho_\infty U_\infty \Gamma_a(t) \quad (3.8)$$

El valor ofrecido por la Ec. 3.8 coincide con aquel aportado por el teorema de Kutta-Joukovsky en el caso estacionario. En términos de los  $n$  torbellinos que definen el perfil se tiene que:

$$L_s(t) = \rho_\infty U_\infty \sum_{j=1}^n \Gamma_j(t) \quad (3.9)$$

Tratando la expresión de la sustentación no estacionaria  $L_u(t)$ , el desarrollo aumenta en complejidad al incluir la dependencia temporal.

$$L_u(t) = \rho_\infty \int_{x=-b}^b \frac{\partial \Gamma}{\partial t} dx = \rho_\infty \frac{\partial}{\partial t} \left( \int_{x=-b}^b \Gamma(x, t) dx \right) \quad (3.10)$$

Se procede a integrar por partes, tomando  $u = \Gamma(x, t)$ ,  $du = \frac{\partial \Gamma}{\partial x} dx$ ,  $dv = dx$  y  $v = x$ .

$$\begin{aligned}
 L_u(t) &= \rho_\infty \frac{\partial}{\partial t} \left( \int_{x=-b}^b \Gamma(x, t) dx \right) = \rho_\infty \frac{\partial}{\partial t} \left( [x \Gamma(x, t)]_{-b}^b - \int_{x=-b}^b x \frac{\partial \Gamma}{\partial x} dx \right) \\
 &= \rho_\infty \frac{\partial}{\partial t} \left( b \Gamma(b, t) + b \Gamma(-b, t) - \int_{x=-b}^b x \gamma_a(x, t) dx \right) \\
 &= \rho_\infty b \dot{\Gamma}_a - \rho_\infty \frac{\partial}{\partial t} \int_{x=-b}^b x \Gamma_j(t) \delta(x - x_{\Gamma_j}) dx \\
 &= \rho_\infty b \dot{\Gamma}_a - \rho_\infty \frac{\partial}{\partial t} \sum_{j=1}^n \Gamma_j(t) \int_{x=-b}^b x \delta(x - x_{\Gamma_j}) dx \\
 &= \rho_\infty b \dot{\Gamma}_a - \rho_\infty \sum_{j=1}^n \dot{\Gamma}_j(t) x_{\Gamma_j}
 \end{aligned} \tag{3.11}$$

Considerando que  $\Gamma_a = \sum_{j=1}^n \Gamma_j(t)$ , la expresión anterior adquiere la forma:

$$L_u(t) = \rho_\infty \sum_{j=1}^n \dot{\Gamma}_j(t) (b - x_{\Gamma_j}) \tag{3.12}$$

Una vez alcanzados los resultados para las dos contribuciones, la sustentación global del perfil:

$$\begin{aligned}
 L(t) &= L_s + L_u \\
 L(t) &= \rho_\infty U_\infty \Gamma_a + \rho_\infty \sum_{j=1}^n \dot{\Gamma}_j(t) (b - x_{\Gamma_j})
 \end{aligned} \tag{3.13}$$

A través del desarrollo planteado, se llega a la conclusión de que como establecía el teorema de Kutta-Joukovsky, la sustentación resulta proporcional a la circulación pero también a la velocidad de cambio de la circulación en los paneles del perfil.

Así pues, a continuación se establece el cálculo del momento aerodinámico generado por la distribución de presiones en un punto cualquiera del perfil denotado por  $x_a$ . Por definición, el momento total de la distribución de presiones (momento de cabeceo positivo):

$$M_a(t) = - \int_{x=-b}^b \Delta p(x, t) (x - x_a) dx \tag{3.14}$$

Igualmente, cabe realizar la descomposición en parte estacionaria y no-estacionaria:

$$M_a(t) = -\rho_\infty \int_{x=-b}^b \left[ \frac{\partial \Gamma}{\partial t} + U_\infty \frac{\partial \Gamma}{\partial x} \right] (x - x_a) dx \equiv M_s + M_u \tag{3.15}$$

El momento aerodinámico estacionario:

$$\begin{aligned}
 M_s &= -\rho_\infty U_\infty \int_{x=-b}^b \frac{\partial \Gamma}{\partial x} (x - x_a) dx = -\rho_\infty U_\infty \int_{x=-b}^b \gamma_a (x - x_a) dx \\
 &= -\rho_\infty U_\infty \int_{x=-b}^b \Gamma_j(t) \delta(x - x_{\Gamma_j}) (x - x_a) dx \\
 &= -\rho_\infty U_\infty \sum_{j=1}^n \Gamma_j(t) \int_{x=-b}^b \delta(x - x_{\Gamma_j}) (x - x_a) dx \\
 &= -\rho_\infty U_\infty \sum_{j=1}^n \Gamma_j(t) (x_{\Gamma_j} - x_a)
 \end{aligned} \tag{3.16}$$

Mientras que la contribución del momento aerodinámico no-estacionario:

$$M_u(t) = -\rho_\infty \int_{x=-b}^b \frac{\partial \Gamma}{\partial t} (x - x_a) dx = -\rho_\infty \frac{\partial}{\partial t} \left( \int_{x=-b}^b \Gamma(x, t) (x - x_a) dx \right) \tag{3.17}$$

Nuevamente, se integra por partes tomando  $u = \Gamma(x, t)$ ,  $du = \frac{\partial \Gamma}{\partial x} dx$ ,  $dv = (x - x_a) dx$  y  $v = \frac{(x - x_a)^2}{2} dx$ .

$$\begin{aligned}
 M_u(t) &= -\rho_\infty \frac{\partial}{\partial t} \left( \left[ \frac{(x - x_a)^2}{2} \Gamma(x, t) \right]_{x=-b}^b - \int_{-b}^b \frac{(x - x_a)^2}{2} \frac{\partial \Gamma}{\partial x} dx \right) \\
 &= -\frac{\rho_\infty}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left( (b - x_a)^2 \Gamma(b, t) - \int_{x=-b}^b (x - x_a)^2 \gamma_a(x, t) dx \right) \\
 &= -\frac{\rho_\infty}{2} (b - x_a)^2 \dot{\Gamma}_a + \frac{\rho_\infty}{2} \frac{\partial}{\partial t} \sum_{j=1}^n \Gamma_j(t) \int_{x=-b}^b \delta(x - x_{\Gamma_j}) (x - x_a)^2 dx \\
 &= -\frac{\rho_\infty}{2} (b - x_a)^2 \dot{\Gamma}_a + \frac{\rho_\infty}{2} \sum_{j=1}^n \dot{\Gamma}_j(t) (x_{\Gamma_j} - x_a)^2
 \end{aligned} \tag{3.18}$$

Asumiendo que  $\Gamma_a = \sum_{j=1}^n \Gamma_j(t)$ , y tras manipular la Ec. 3.18:

$$M_u(t) = -\frac{\rho_\infty}{2} \sum_{j=1}^n \dot{\Gamma}_j(t) (b - x_{\Gamma_j}) (b + x_{\Gamma_j} - 2x_a) \tag{3.19}$$

La expresión completa del momento aerodinámico presenta la forma:

$$M_a(t) = M_s + M_u$$

$$M_a(t) = -\rho_\infty U_\infty \sum_{j=1}^n \Gamma_j(t)(x_{\Gamma_j} - x_a) - \frac{\rho_\infty}{2} \sum_{j=1}^n \dot{\Gamma}_j(t) (b - x_{\Gamma_j})(b + x_{\Gamma_j} - 2x_a) \quad (3.20)$$

Se recuerda que  $x_{\Gamma_j}$  son las coordenadas donde se localizan los torbellinos,  $b$  es la semicuerda del perfil, y  $x_a$  es el punto donde se desea calcular el momento.

Queda entonces planteado a través de esta sección aquel desarrollo teórico en vista de calcular tanto la sustentación como momento aerodinámico sobre un perfil que ha sido discretizado en  $n$  paneles y asemejándose las expresiones alcanzadas a aquellas definidas por el teorema de Kutta-Joukovsky.

### 3.2. Distribución discreta de torbellinos no-estacionarios

Se afronta ahora la descripción en detalle del esquema y del procedimiento numérico para obtener la respuesta dinámica (fuerzas aerodinámicas y distribución de presiones) frente a un movimiento conocido impuesto sobre el perfil y definido por  $z_p(x, t)$ .

Primeramente, y como ha sido comentado anteriormente, se discretiza la cuerda del perfil en  $n$  paneles, los cuales no necesariamente deben ser iguales. Por ejemplo, puede darse el caso de estudio de un perfil con alerón dividido en dos paneles, en el cual las longitudes de los mismos difieran. En relación al tratamiento de la estela, se divide aquella región evaluada tras el perfil en  $m$  paneles iguales y de longitud  $\Delta x$ , asumiendo que los torbellinos situados más allá de una distancia  $m \Delta x$  respecto del borde de salida no tienen influencia sobre el perfil.

Con el fin de tratar la discretización en el dominio del tiempo, se estudian  $m$  instantes de duración  $\Delta$  segundos:  $t = \{ \Delta t, 2\Delta t, \dots, m \Delta t \}$ . La principal razón de que coincidan el número de paneles en la estela y el de puntos temporales evaluados reside en que cada variación en el tiempo genera un cambio en la vorticidad del campo fluido, y por el principio de conservación de la vorticidad un torbellino debe desprenderse del borde de fuga para lograr un balance global de circulación nulo. Así pues, los torbellinos en la estela no aparecen de forma instantánea, sino que son desplazados por los efectos de la corriente y la velocidad de vuelo.

Para cada instante evaluado, el torbellino que sale a la estela ocupa el primer panel de la misma, desplazando al que se encontraba en dicho panel al siguiente de ellos, véase figura 3.1. Esta secuencia de acontecimientos se repite de manera periódica a medida que se avanza en el tiempo. Por ello, tras  $m$  instantes se han generado  $m$  torbellinos que ocupan respectivamente  $m$  paneles en la estela, residiendo en este hecho la importancia de emplear el mismo número de intervalos temporales y paneles en la estela.

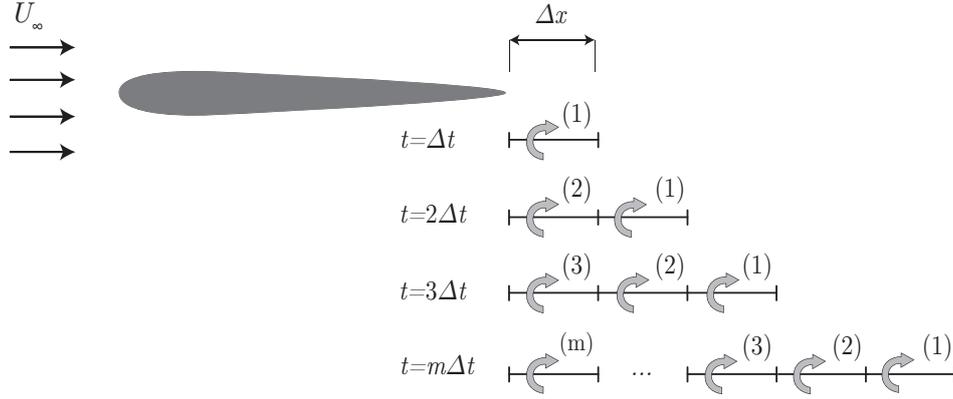


Figura 3.1: Modelado de la estela con el tiempo y desprendimiento de torbellinos

La notación a emplear define  $\Gamma_k^{(j)}$  como aquel torbellino situado en el centro aerodinámico del panel  $k$  del perfil en el instante  $t = j \Delta t$ . De igual forma, la coordenada del centro aerodinámico es representada por  $x_{\Gamma k}$ , mientras que la localización del punto de control responde a  $x_{Ck}$ . Dichos puntos verifican la regla  $1/4 - 3/4$  aplicada sobre la longitud del panel, quedando el primero de ellos situado a  $\Delta x/4$  del inicio del panel y el segundo a  $3\Delta x/4$ .

Se denota como  $\Gamma_{wj}$  al torbellino desprendido a la estela en el instante  $t = j \Delta t$ , localizado a su vez en el punto  $x_{wj}$  que se encuentra a  $\Delta x/4$  del inicio del correspondiente panel que ocupa el torbellino. Nótese que los torbellinos en la estela se desplazan aguas abajo conforme se libera un nuevo torbellino, haciendo sitio al que se desprende. La velocidad de los torbellinos de la estela es  $U_\infty$ , de manera que recorren  $\Delta x$  metros en  $\Delta t$  segundos, por lo que se llega a una relación entre el desplazamiento de los torbellinos en la estela y el incremento temporal:

$$\Delta x = U_\infty \Delta t \quad (3.21)$$

Las incógnitas del problema resultan ser los valores de los torbellinos en el perfil para cada instante evaluado y los  $m$  torbellinos de la estela. Los torbellinos en el perfil se organizan de acuerdo a  $m$  vectores columna adimensionales:

$$g^{(j)} = \left\{ \frac{\Gamma_1^{(j)}}{b U_\infty}, \dots, \frac{\Gamma_n^{(j)}}{b U_\infty} \right\}^T \equiv \{g_1^{(j)}, \dots, g_n^{(j)}\}^T \in \mathbb{R}^n, \quad 1 \leq j \leq m \quad (3.22)$$

Los torbellinos en la estela, expresados de manera adimensional, se denotan por:

$$g_{wj} = \frac{\Gamma_{wj}}{b U_\infty}, \quad 1 \leq j \leq m \quad (3.23)$$

Se alcanza un problema a resolver de manera iterativa con un total de  $m(n+1)$  incógnitas, dado que con cada paso temporal es necesario volver a evaluar los torbellinos en el perfil y aquel nuevo desprendido a la estela. La resolución del problema se plantea a partir de aquellos datos conocidos como son los desplazamientos de los puntos del perfil en cada instante  $z_p(x, t)$ .

### 3.3. Planteamiento de ecuaciones y solución numérica

Al afrontar la resolución mediante el método de los paneles no-estacionario sobre la línea media, se dispone de aquellas expresiones dadas por el cumplimiento de las condiciones de contorno (1) y por la conservación de la vorticidad (2). Para cada instante evaluado, es resuelto un sistema de  $m(n+1)$  incógnitas que se sirve de los resultados obtenidos en el paso inmediatamente anterior. Analizando las ecuaciones disponibles que resultan del esquema implementado:

**(1) Condiciones de contorno:** Garantizan que en cada instante evaluado el flujo queda adherido al perfil y que las velocidades llevan la dirección del mismo, es decir, aseguran un comportamiento de línea de corriente. Estas ecuaciones deben ser evaluadas en los puntos de control de cada panel formando un sistema de  $n \times m$  ecuaciones, ya que, cada una afecta de manera individual a cada uno de los paneles que definen el perfil, debiendo de ser reevaluadas a medida que avanza el paso temporal.

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right|_{x=x_{ci}, z=0, t=j\Delta t} = \left[ \frac{\partial z_p}{\partial t} + U_\infty \frac{\partial z_p}{\partial x} \right]_{x=x_{ci}, t=j\Delta t}, \quad 1 \leq i \leq n, \quad 1 \leq j \leq m \quad (3.24)$$

Respecto a Ec. 3.24, el término de la izquierda representa la velocidad vertical en los puntos de control inducida por todos los torbellinos existentes en el instante  $j$ , mientras que el término de la derecha suele denotarse por  $w_a(x, t)$ , siendo conocidos los  $n \times m$  valores al proceder directamente de la geometría  $z_p(x, t)$ .

**(2) Condición de Kutta o conservación de vorticidad:** Ya ha sido enunciado que la vorticidad debe mantenerse constante, hecho que implica que el cómputo global de circulación sea nulo, y que el mecanismo para que esto suceda es el desprendimiento de torbellinos a la estela.

Matemáticamente, dicha hipótesis es fácil de aplicar imponiendo en cada instante que la suma de las intensidades de todos los torbellinos sea nula, de forma que la vorticidad permanece igual a aquella mostrada inicialmente. Así, hasta el instante  $t = j\Delta t$  se han generado  $j$  torbellinos en la estela, los cuales deben estar en el equilibrio con los existentes en el perfil. Se debe verificar:

$$\sum_{k=1}^n \Gamma_k^{(j)} + \Gamma_{w1} + \Gamma_{w2} + \dots + \Gamma_{wj} = 0, \quad 1 \leq j \leq m \quad (3.25)$$

### 3. Método de los paneles no-estacionario

---

Una vez se han mostrado las ecuaciones a emplear, se trata el método numérico y su implementación. Se analizan los dos instantes iniciales para posteriormente alcanzar aquel esquema genérico, el cual ofrece el valor de las intensidades de los torbellinos tanto del perfil como de la estela.

**Instante  $t = t_1 = \Delta t$ :**

El primer instante marca el comienzo del movimiento y la aparición de  $n$  torbellinos  $\Gamma_1^{(1)}, \Gamma_2^{(1)}, \dots, \Gamma_n^{(1)}$  localizados en los paneles que componen el perfil. Igualmente, se desprende el primer torbellino a la estela  $\Gamma_{w1}$  que queda situado en el punto  $x_{w1} = b + \Delta x/4$ , el cual corresponde con el centro aerodinámico del primer panel de la estela. El sistema se compone de  $n + 1$  incógnitas representadas por el valor de los torbellinos en el perfil y aquel desprendido a la estela.

La primera ecuación a plantear es la de conservación de la vorticidad (1 ecuación):

$$\Gamma_1^{(1)} + \Gamma_2^{(1)} + \dots + \Gamma_n^{(1)} + \Gamma_{w1} = 0 \quad (3.26)$$

El resto de ecuaciones que componen el sistema a resolver surgen de la condición de contorno aplicada en los puntos de control de los paneles del perfil ( $n$  ecuaciones):

$$-\frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^n \frac{\Gamma_k^{(1)}}{x_{Ci} - x_{\Gamma k}} - \frac{1}{2\pi} \frac{\Gamma_{w1}}{x_{Ci} - x_{w1}} = \left[ \frac{\partial z_p}{\partial t} + U_\infty \frac{\partial z_p}{\partial x} \right]_{x=x_{Ci}, t=j\Delta t} \equiv w_a(x_{Ci}, j\Delta t) \quad (3.27)$$

A partir de este punto, resulta conveniente trabajar con variables adimensionales para agilizar el tratamiento de las expresiones:

$$\xi_{Ci} = \frac{x_{Ci}}{b}, \quad \xi_{\Gamma k} = \frac{x_{\Gamma k}}{b}, \quad \xi_{wj} = \frac{x_{wj}}{b}, \quad g_k^{(j)} = \frac{\Gamma_k^{(j)}}{bU_\infty}, \quad g_{wj} = \frac{\Gamma_{wj}}{bU_\infty} \quad (3.28)$$

$$v_k^{(j)} = \frac{w_a(x_{Ci}, j\Delta t)}{U_\infty}$$

Las  $n + 1$  ecuaciones pueden ponerse en forma matricial a través de las variables adimensionales introducidas previamente:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}^T \mathbf{g}^{(1)} + g_{w1} &= 0 \\ \mathbf{A} \mathbf{g}^{(1)} + \mathbf{a}_{w1} g_{w1} &= \mathbf{v}^{(1)} \end{aligned} \quad (3.29)$$

donde los torbellinos en el perfil han quedado organizados en el vector columna  $\mathbf{g}^{(1)}$  que fue introducido en Ec. 3.22. Además, la matriz  $\mathbf{A}$  y los vectores  $\mathbf{r}$ ,  $\mathbf{a}_{w1}$  y  $\mathbf{v}^{(1)}$  se definen a continuación.

$$\mathbf{r} = \{1, 1, \dots, 1\}^T \in \mathbb{R}^n, \quad \mathbf{a}_{wj} = -\frac{1}{2\pi} \left\{ \frac{1}{\xi_{C1} - \xi_{wj}}, \dots, \frac{1}{\xi_{Cn} - \xi_{wj}} \right\} \quad (3.30)$$

$$\mathbf{v}^{(j)} = \{v_1^{(j)}, v_2^{(j)}, \dots, v_n^{(j)}\}^T$$

$$\mathbf{A} = -\frac{1}{2\pi} \begin{bmatrix} \frac{1}{\xi_{C1} - \xi_{\Gamma 1}} & \frac{1}{\xi_{C1} - \xi_{\Gamma 2}} & \cdots & \frac{1}{\xi_{C1} - \xi_{\Gamma n}} \\ \frac{1}{\xi_{C2} - \xi_{\Gamma 1}} & \frac{1}{\xi_{C2} - \xi_{\Gamma 2}} & \cdots & \frac{1}{\xi_{C2} - \xi_{\Gamma n}} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ \frac{1}{\xi_{Cn} - \xi_{\Gamma 1}} & \frac{1}{\xi_{Cn} - \xi_{\Gamma 2}} & \cdots & \frac{1}{\xi_{Cn} - \xi_{\Gamma n}} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n} \quad (3.31)$$

Operando con la primera expresión del sistema 3.29 es posible despejar el valor de  $g_{w1} = -\mathbf{r}^T \mathbf{g}^{(1)}$  e introducirlo en la segunda de las ecuaciones para alcanzar:

$$(\mathbf{A} - \mathbf{a}_{w1} \mathbf{r}^T) \mathbf{g}^{(1)} = \mathbf{v}^{(1)} \quad (3.32)$$

La Ec. 3.32 resulta ser aquella expresión a resolver para calcular el valor de las intensidades de los torbellinos en los paneles del perfil para el instante inicial. De igual forma, es posible almacenar dicha expresión para mediante operaciones matriciales y cálculos de inversas despejar el valor de  $\mathbf{g}^{(1)}$  y  $g_{w1}$ .

**Instante  $t = t_2 = 2 \Delta t$ :**

El procedimiento a seguir para evaluar el segundo instante resulta análogo al del caso anterior, excepto por la necesidad de incluir aquel efecto inducido por el segundo torbellino desprendido.

Atendiendo a la ecuación de conservación de vorticidad, el torbellino  $\Gamma_{w1}$  (conocido del instante anterior a través de  $g_{w1}$ ) se desplaza al segundo panel de la estela y queda localizado en  $x_{w2}$ , mientras que el torbellino desprendido en dicho instante  $\Gamma_{w2}$  se sitúa en el primer panel con coordenada  $x_{w1}$ . Así pues, los torbellinos en el perfil han cambiado debido a la no-estacionalidad del flujo y ahora se organizan en el vector:

$$g^{(2)} = \left\{ \frac{\Gamma_1^{(2)}}{bU_\infty}, \dots, \frac{\Gamma_n^{(2)}}{bU_\infty} \right\}^T \quad (3.33)$$

Se plantean de nuevo la ecuaciones:

$$\Gamma_1^{(2)} + \Gamma_2^{(2)} + \dots + \Gamma_n^{(2)} + \Gamma_{w1} + \Gamma_{w2} = 0 \quad (3.34)$$

$$-\frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^n \frac{\Gamma_k^{(1)}}{x_{Ci} - x_{\Gamma k}} - \frac{1}{2\pi} \frac{\Gamma_{w2}}{x_{Ci} - x_{w1}} - \frac{1}{2\pi} \frac{\Gamma_{w1}}{x_{Ci} - x_{w2}} \equiv w_a(x_{Ci}, j \Delta t) \quad (3.35)$$

Nótese en la Ec. (3.35) que el primer torbellino  $\Gamma_{w1}$  desprendido hace referencia a la coordenada  $x_{w2} = x_{w1} + \Delta x$  al quedar relegado al segundo panel. En cambio, el nuevo torbellino  $\Gamma_{w2}$  se localiza en  $x_{w1}$  como ha quedado expuesto. Organizando nuevamente las ecuaciones en forma matricial:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}^T \mathbf{g}^{(2)} + g_{w1} + g_{w2} &= 0 \\ \mathbf{A} \mathbf{g}^{(2)} + \mathbf{a}_{w1} g_{w1} + \mathbf{a}_{w2} g_{w2} &= \mathbf{v}^{(2)} \end{aligned} \quad (3.36)$$

Tras simplificar y sustituir, se extrae aquella expresión a resolver para calcular el valor de  $\mathbf{g}^{(2)}$ , suponiendo conocido  $g_{w1}$  del instante anterior:

$$(\mathbf{A} - \mathbf{a}_{w1} \mathbf{r}^T) \mathbf{g}^{(2)} = \mathbf{v}^{(2)} + (\mathbf{a}_{w1} - \mathbf{a}_{w2}) g_{w1} \quad (3.37)$$

**Instante  $t = t_j = j \Delta t$ :**

En la situación  $t = j \Delta t$  se suponen conocidos los torbellinos desprendidos en los instantes anteriores  $\Gamma_{w1}, \dots, \Gamma_{w_{j-1}}$ , encontrándose localizados en las coordenadas  $x_{wj}, x_{w_{j-1}}, \dots, x_{w2}$  respectivamente. El torbellino desprendido en el este último instante que es evaluado  $\Gamma_{wj}$  (incógnita) se sitúa en el primer panel de la estela  $x = x_{w1}$ . Los torbellinos en el perfil adquieren la forma generalizada:

$$g^{(j)} = \left\{ \frac{\Gamma_1^{(j)}}{b U_\infty}, \dots, \frac{\Gamma_n^{(j)}}{b U_\infty} \right\}^T \quad (3.38)$$

El esquema genérico de resolución del método se define por las ecuaciones:

$$\Gamma_1^{(j)} + \Gamma_2^{(j)} + \dots + \Gamma_n^{(j)} + \Gamma_{w1} + \Gamma_{w2} + \dots + \Gamma_{w_{j-1}} + \Gamma_{wj} = 0 \quad (3.39)$$

$$-\frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^n \frac{\Gamma_k^{(j)}}{x_{Ci} - x_{\Gamma k}} - \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{j-1} \frac{\Gamma_{wk}}{x_{Ci} - x_{w_{j-k+1}}} - \frac{1}{2\pi} \frac{\Gamma_{wj}}{x_{Ci} - x_{w1}} \equiv w_a(x_{Ci}, j \Delta t) \quad (3.40)$$

Las ecuaciones en forma matricial y adimensional para el caso general:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}^T \mathbf{g}^{(j)} + \sum_{k=1}^{j-1} g_{wk} + g_{wj} &= 0, \quad 2 \leq j \leq m \\ \mathbf{A} \mathbf{g}^{(j)} + \sum_{k=1}^{j-1} \mathbf{a}_{w_{j-k+1}} g_{wk} + \mathbf{a}_{w1} g_{wj} &= \mathbf{v}^{(j)}, \quad 2 \leq j \leq m \end{aligned} \quad (3.41)$$

Despejando  $g_{wj}$  de la primera de las ecuaciones y reemplazando dicho valor en la segunda se alcanza:

$$(\mathbf{A} - \mathbf{a}_{w1} \mathbf{r}^T) \mathbf{g}^{(j)} = \mathbf{v}^{(j)} + \sum_{k=1}^{j-1} (\mathbf{a}_{w1} - \mathbf{a}_{w j-k+1}) g_{wk} \quad (3.42)$$

A la hora de afrontar el cálculo numérico, es importante resaltar que en cada instante se resuelve un sistema de ecuaciones de tamaño  $n$  basado en la matriz de coeficientes  $(\mathbf{A} - \mathbf{a}_{w1} \mathbf{r}^T)$ , lo cual permite ahorrar cálculos dado que se puede obtener su inversa y almacenarla para posteriormente resolver usando productos matriciales.

El resultado del análisis en el tiempo da lugar a los  $m(n+1)$  valores de  $\mathbf{g}^{(j)}$  y  $m$  de  $g_{wj}$ , siendo lo realmente interesante obtener a partir de estos datos información dinámica relevante como la distribución del coeficiente de presiones en cada instante o la sustentación y momento aerodinámico.

Se recupera el tratamiento adimensional, de forma que el perfil queda enmarcado en el intervalo  $\xi \in [-1, 1]$ . El objetivo es el de adaptar las expresiones alcanzadas en la sección 3.1 para la situación en la cual se tiene un perfil discretizado en  $n$  paneles, tomando un tiempo de referencia  $T_r$  respecto al cual se miden los del problema.

En general, este tiempo se considera igual al que tarda una partícula de fluido en atravesar la semicuerda,  $T_r = b/U_\infty$ . Por tanto, el tiempo adimensional queda definido como  $\tau = t/T_r$ , siendo los incrementos de tiempo adimensional  $\Delta\tau = \Delta t/T_r$  y pudiendo deducirse directamente que  $\Delta\xi = \Delta x/b = \Delta\tau$ .

Recuperando la expresión general desarrollada del coeficiente de presiones de la Ec. (2.50):

$$\Delta c_p(x, t) = \frac{2}{U_\infty^2} \left[ \frac{\partial\Gamma}{\partial t} + U_\infty \frac{\partial\Gamma}{\partial x} \right] = \frac{\Delta p(x, t)}{\frac{1}{2} \rho_\infty U_\infty^2} \quad (3.43)$$

Integrando en el panel  $k$ , se puede obtener la sustentación en dicho panel:

$$L_k(t) = \int_{x=x_k}^{x_{k+1}} \Delta p(x, t) dx = \rho_\infty \int_{x=x_k}^{x_{k+1}} \left[ \frac{\partial\Gamma}{\partial t} + U_\infty \frac{\partial\Gamma}{\partial x} \right] dx \equiv L_{ks} + L_{ku} \quad (3.44)$$

donde la expresión alcanzada en la Ec. 3.41 presenta la misma estructura que aquella desarrollada previamente en la sección 3.1. Dado que el procedimiento resulta análogo, se divide en parte cuasi-estacionaria y no-estacionaria para simplificar el tratamiento.

La parte cuasi-estacionaria:

$$L_{ks} = \rho_\infty U_\infty \int_{x=x_k}^{x_{k+1}} \frac{\partial\Gamma}{\partial x} dx = \rho_\infty U_\infty [\Gamma(x_{k+1}, t) - \Gamma(x_k, t)] = \rho_\infty U_\infty \Gamma_k \quad (3.45)$$

### 3. Método de los paneles no-estacionario

---

La diferencia de sendas circulations en los puntos iniciales y finales del panel hace referencia a aquella global presentada por el panel.

La parte de sustentación no-estacionaria:

$$L_{ku}(t) = \rho_\infty \int_{x=x_k}^{x_{k+1}} \frac{\partial \Gamma}{\partial t} dx = \rho_\infty \frac{\partial}{\partial t} \left( \int_{x=x_k}^{x_{k+1}} \Gamma(x, t) dx \right) \quad (3.46)$$

Se procede a integrar por partes, tomando  $u = \Gamma(x, t)$ ,  $du = \frac{\partial \Gamma}{\partial x} dx$ ,  $dv = dx$  y  $v = x$ .

$$\begin{aligned} L_{ku}(t) &= \rho_\infty \frac{\partial}{\partial t} \left( \int_{x=x_k}^{x_{k+1}} \Gamma(x, t) dx \right) = \rho_\infty \frac{\partial}{\partial t} \left( [x \Gamma(x, t)]_{x_k}^{x_{k+1}} - \int_{x=x_k}^{x_{k+1}} x \frac{\partial \Gamma}{\partial x} dx \right) \\ &= \rho_\infty \frac{\partial}{\partial t} \left( x_{k+1} \Gamma(x_{k+1}, t) - x_k \Gamma(x_k, t) - \int_{x=x_k}^{x_{k+1}} x \gamma_a(x, t) dx \right) \\ &= \rho_\infty \frac{\partial}{\partial t} \left( x_{k+1} \sum_{j=1}^k \Gamma_j - x_k \sum_{j=1}^{k-1} \Gamma_j - \int_{x=x_k}^{x_{k+1}} x \sum_{j=1}^n \Gamma_j(t) \delta(x - x_{\Gamma_j}) dx \right) \\ &= \rho_\infty \left( x_{k+1} \sum_{j=1}^k \dot{\Gamma}_j - x_k \sum_{j=1}^{k-1} \dot{\Gamma}_j - x_{\Gamma_k} \dot{\Gamma}_k \right) \end{aligned} \quad (3.47)$$

La sustentación del panel  $k$  queda como:

$$L_k(t) = \rho_\infty U_\infty \Gamma_k + \rho_\infty \left( x_{k+1} \sum_{j=1}^k \dot{\Gamma}_j - x_k \sum_{j=1}^{k-1} \dot{\Gamma}_j - x_{\Gamma_k} \dot{\Gamma}_k \right) \quad (3.48)$$

La expresión anterior pone de manifiesto el hecho de que la sustentación en un panel depende de su circulación y de la velocidad de cambio de la circulación de todos los paneles anteriores. Introduciendo en la ecuación 3.48 las variables adimensionales:

$$\xi_k = \frac{x_k}{b}, \quad \xi_{k+1} = \frac{x_{k+1}}{b}, \quad \xi_{\Gamma_k} = \frac{x_{\Gamma_k}}{b}, \quad g_k(t) = \frac{\Gamma_k(t)}{b U_\infty}, \quad \frac{d(\bullet)}{dt} = \frac{d(\bullet)}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} = \frac{d(\bullet)}{d\tau} \frac{U_\infty}{b} \quad (3.49)$$

Tras algunas operaciones, la sustentación en el panel  $k$  se puede expresar en función de los torbellinos y sus derivadas, así como en la variable adimensional  $\tau = U_\infty t/b$  mediante:

$$L_k(\tau) = \rho_\infty U_\infty^2 b \left( g_k(\tau) + \xi_{k+1} \sum_{j=1}^k g'_j(\tau) - \xi_k \sum_{j=1}^{k-1} g'_j(\tau) - \xi_{\Gamma_k} g'_k(\tau) \right) \quad (3.50)$$

### 3. Método de los paneles no-estacionario

---

Analizando de manera individual el coeficiente de presiones, éste se puede calcular como la fuerza (por unidad de envergadura) en dicho panel dividido por la longitud del panel:

$$\begin{aligned}
 \Delta c_{pk}(\tau) &= \frac{\Delta p_k}{\frac{1}{2} \rho_\infty U_\infty^2} = \frac{L_k(\tau)/\Delta x_k}{\frac{1}{2} \rho_\infty U_\infty^2} \\
 &= \frac{2}{\Delta \xi_k} \left( g_k(\tau) + \xi_{k+1} \sum_{j=1}^k g'_j(\tau) - \xi_k \sum_{j=1}^{k-1} g'_j(\tau) - \xi_{\Gamma_k} g'_k(\tau) \right) \\
 &= \frac{2}{\Delta \xi_k} \left( g_k(\tau) + (\xi_{k+1} - \xi_k) \sum_{j=1}^{k-1} g'_j(\tau) + (\xi_{k+1} - \xi_{\Gamma_k}) g'_k(\tau) \right), \quad 1 \leq k \leq n
 \end{aligned} \tag{3.51}$$

Todavía se puede simplificar más la expresión anterior teniendo en cuenta que  $\xi_{k+1} - \xi_k = \Delta \xi_k$  y que  $\xi_{\Gamma_k} = \frac{1}{4} \xi_{k+1} + \frac{3}{4} \xi_k$ :

$$\Delta c_{pk}(\tau) = \frac{2}{\Delta \xi_k} g_k(\tau) + \frac{3}{2} g'_k(\tau) + 2 \sum_{j=1}^{k-1} g'_j(\tau) \tag{3.52}$$

Asumiendo que todos los paneles son de la misma longitud  $\Delta \xi_k = \Delta x_k/b = (2b/n)/b = 2/n$ :

$$\Delta c_{pk}(\tau) = n g_k(\tau) + \frac{3}{2} g'_k(\tau) + 2 \sum_{j=1}^{k-1} g'_j(\tau), \quad 1 \leq k \leq n \tag{3.53}$$

Del análisis no-estacionario se alcanzan los torbellinos en los diferentes instantes  $\tau = \Delta\tau, 2\Delta\tau, \dots, m\Delta\tau$  que permiten calcular la derivada de la serie temporal  $g'_k(\tau)$  mediante diferencias finitas u otras aproximaciones, y a partir de ella el coeficiente de presiones. Por otro lado, partiendo de los desarrollos planteados para la ecuación de la sustentación total y del momento aerodinámico, se puede hallar el valor de sendos coeficientes para cada instante evaluado en función de los torbellinos.

$$\begin{aligned}
 C_L(\tau) &= \frac{L(\tau)}{\frac{1}{2} \rho_\infty U_\infty^2 2b} = \frac{\rho_\infty U_\infty \sum_{j=1}^n \Gamma_j(t) + \rho_\infty \sum_{j=1}^n \dot{\Gamma}_j(t) (b - x_{\Gamma_j})}{\frac{1}{2} \rho_\infty U_\infty^2 2b} \\
 &= \frac{\rho_\infty U_\infty^2 b \left[ \sum_{j=1}^n g_j(t) + \sum_{j=1}^n g_j(t) (1 - \xi_{\Gamma_j}) \right]}{\frac{1}{2} \rho_\infty U_\infty^2 2b} \\
 &= \sum_{j=1}^n g_j(\tau) + \sum_{j=1}^n g_j(\tau) (1 - \xi_{\Gamma_j})
 \end{aligned} \tag{3.54}$$

$$\begin{aligned}
 C_{ma}(\tau) &= \frac{M_a(\tau)}{\frac{1}{2}\rho_\infty U_\infty^2 (2b)^2} \\
 &= - \frac{\rho_\infty U_\infty \sum_{j=1}^n \Gamma_j(t)(x_{\Gamma_j} - x_a) + \frac{\rho_\infty}{2} \sum_{j=1}^n \dot{\Gamma}_j(t)(b - x_{\Gamma_j})(b + x_{\Gamma_j} - 2x_a)}{\frac{1}{2}\rho_\infty U_\infty^2 (2b)^2} \\
 &= - \frac{(\rho_\infty U_\infty^2 b^2) \left[ \sum_{j=1}^n g_j(\tau)(\xi_{\Gamma_j} - \xi_a) + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n g'_j(\tau)(1 - \xi_{\Gamma_j})(1 + \xi_{\Gamma_j} - 2\xi_a) \right]}{\frac{1}{2}\rho_\infty U_\infty^2 (2b)^2} \\
 &= - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n g_j(\tau)(\xi_{\Gamma_j} - \xi_a) - \frac{1}{4} \sum_{j=1}^n g'_j(\tau)(1 - \xi_{\Gamma_j})(1 + \xi_{\Gamma_j} - 2\xi_a)
 \end{aligned} \tag{3.55}$$

Por último, dichas expresiones, tanto del coeficiente de sustentación como del coeficiente de momentos, pueden ser introducidas directamente en el esquema numérico para obtener la evolución temporal de los mismos dependiendo del movimiento descrito por el perfil. Así pues, a lo largo del capítulo queda recogido aquel procedimiento que permite acceder a la resolución numérica del problema, alcanzado los valores tanto de las circulaciones de los torbellinos como de las magnitudes aerodinámicas de interés.

## Oscilaciones en flexión

Un perfil oscilando a flexión puede ser descrito a través de un desplazamiento vertical en el tiempo, el cual induce un determinado ángulo de ataque a causa de la composición vectorial de velocidades relativas al perfil. Inicialmente, se define el movimiento oscilatorio de flexión como únicamente dependiente del tiempo al desplazarse el perfil de manera uniforme y vertical en el eje  $z$  según:

$$z_p(\xi, t) = h_o e^{i\omega t} \quad (4.1)$$

La expresión anterior debe adimensionalizarse, trabajando en el dominio del tiempo adimensional  $\tau$  y apareciendo la frecuencia reducida  $\kappa$ . Cabe recordar que, además de determinar la frecuencia del movimiento del perfil, la frecuencia reducida también gobierna el comportamiento de los torbellinos en la estela. Es por ello que reside en ella una gran influencia en términos de la respuesta esperada. Igualmente, el valor de  $h_o$  viene definido por el usuario, afectando a la amplitud del movimiento y fijando los valores máximos y mínimos del mismo. No obstante, a lo largo de los desarrollos planteados se trabaja con la variable adimensional  $h_o/b$ .

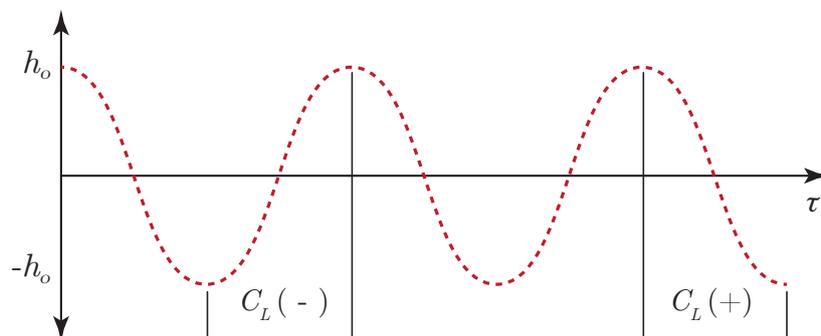


Figura 4.1: Movimiento de un perfil sujeto a oscilaciones en flexión

A lo largo de aquellas etapas en las cuales se describe un movimiento ascendente, se espera una sustentación negativa al quedar inducido un valor  $\alpha_e$  negativo. Por el contrario, al desplazarse el perfil en sentido descendente, la corriente incide con un ángulo  $\alpha_e$  positivo, originando una sustentación opuesta al movimiento. El comportamiento del perfil queda representado en las figuras 4.1 y 4.2.

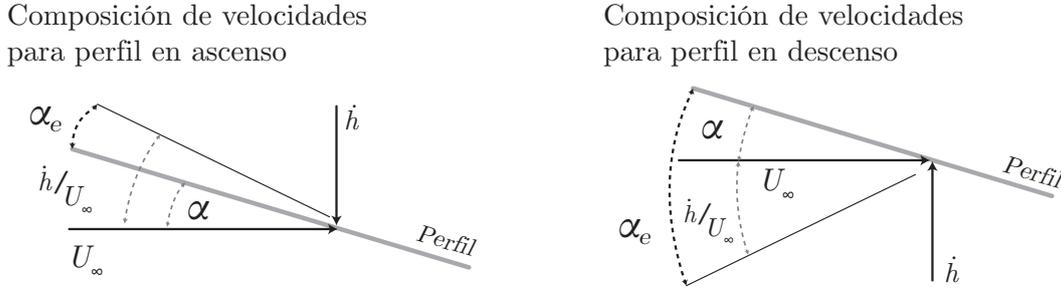


Figura 4.2: Velocidades relativas a un perfil sujeto a oscilaciones en flexión

La justificación del estudio llevado a cabo reside en que es habitual la existencia de situaciones reales en las cuales las alas, u otro tipo de superficies de una aeronave, se encuentren sometidas a oscilaciones en flexión. Por ende, el análisis de este tipo de movimientos en perfiles permite lograr una valoración preliminar de la respuesta y actuar en consecuencia.

#### 4.1. Solución analítica

La resolución analítica no-estacionaria es planteada a partir de la ecuación del coeficiente de presiones particularizada para movimiento armónico. Tomando la Ec. (2.111) como punto de partida, se emplea una geometría genérica que tan solo considere la dependencia temporal mediante la expresión (4.2) para finalmente sustituir aquel valor de  $z_p(\xi, t)$  característico del problema:

$$z_p(\xi, t) = h(t), \quad w_a(\xi, t) = \frac{\partial z_p}{\partial t} + \frac{U_\infty}{b} \frac{\partial z_p}{\partial \xi} = \dot{h} \quad (4.2)$$

Con el fin de organizar las operaciones, se denotan las siguientes expresiones:

$$\mathcal{W}_I(\xi, \eta, t) = w_a(\eta, t) = \dot{h} \quad (4.3)$$

$$\mathcal{W}_{II}(\xi, \eta, t) = \frac{b}{U_\infty} \frac{1+\xi}{1+\eta} \int_{\lambda=-1}^{\eta} \frac{\partial w_a(\lambda, t)}{\partial t} d\lambda = \frac{\ddot{h} b}{U_\infty} (1+\xi) \quad (4.4)$$

$$\mathcal{W}_{III}(\xi, \eta, t) = (\xi - \eta) [1 - \mathcal{C}(\kappa)] w_a(\eta, t) = (\xi - \eta) [1 - \mathcal{C}(\kappa)] \dot{h} \quad (4.5)$$

Sustituyendo en la Ec. (2.111) y realizando un tratamiento individual según las funciones definidas previamente, es posible alcanzar las contribuciones al coeficiente de presiones de cada uno de dichos términos.

$$\begin{aligned}
 \Delta c_{p,I}(\xi, t) &= \frac{4}{\pi U_\infty} \sqrt{\frac{1-\xi}{1+\xi}} \int_{\eta=-1}^1 \sqrt{\frac{1+\eta}{1-\eta}} \frac{\mathcal{W}_I(\xi, \eta, t)}{\xi - \eta} d\eta \\
 &= \frac{4\dot{h}}{\pi U_\infty} \sqrt{\frac{1-\xi}{1+\xi}} \int_{\eta=-1}^1 \sqrt{\frac{1+\eta}{1-\eta}} \frac{1}{\xi - \eta} d\eta \\
 &= -\frac{4\dot{h}}{U_\infty} \sqrt{\frac{1-\xi}{1+\xi}}
 \end{aligned} \tag{4.6}$$

$$\begin{aligned}
 \Delta c_{p,II}(\xi, t) &= \frac{4}{\pi U_\infty} \sqrt{\frac{1-\xi}{1+\xi}} \int_{\eta=-1}^1 \sqrt{\frac{1+\eta}{1-\eta}} \frac{\mathcal{W}_{II}(\xi, \eta, t)}{\xi - \eta} d\eta \\
 &= \frac{4\ddot{h}b}{\pi U_\infty^2} (1+\xi) \sqrt{\frac{1-\xi}{1+\xi}} \int_{\eta=-1}^1 \sqrt{\frac{1+\eta}{1-\eta}} \frac{1}{\xi - \eta} d\eta \\
 &= -\frac{4\ddot{h}b}{U_\infty^2} \sqrt{1-\xi^2}
 \end{aligned} \tag{4.7}$$

$$\begin{aligned}
 \Delta c_{p,III}(\xi, t) &= \frac{4}{\pi U_\infty} \sqrt{\frac{1-\xi}{1+\xi}} \int_{\eta=-1}^1 \sqrt{\frac{1+\eta}{1-\eta}} \frac{\mathcal{W}_{III}(\xi, \eta, t)}{\xi - \eta} d\eta \\
 &= \frac{4\dot{h}}{\pi U_\infty} [1 - \mathcal{C}(\kappa)] \sqrt{\frac{1-\xi}{1+\xi}} \int_{\eta=-1}^1 \sqrt{\frac{1+\eta}{1-\eta}} d\eta \\
 &= \frac{4\dot{h}}{U_\infty} [1 - \mathcal{C}(\kappa)] \sqrt{\frac{1-\xi}{1+\xi}}
 \end{aligned} \tag{4.8}$$

donde en las Ecs. (4.6), (4.7) y (4.8) se han resuelto directamente las integrales:

$$\int_{\eta=-1}^1 \sqrt{\frac{1+\eta}{1-\eta}} d\eta = \pi, \quad \int_{\eta=-1}^1 \sqrt{\frac{1+\eta}{1-\eta}} \frac{1}{\xi - \eta} d\eta = -\pi$$

Sumando los resultados obtenidos para definir un coeficiente global de presiones:

$$\begin{aligned}
 \Delta c_p(\xi, t) &= \Delta c_{p,I}(\xi, t) + \Delta c_{p,II}(\xi, t) + \Delta c_{p,III}(\xi, t) \\
 &= -\frac{4\dot{h}}{U_\infty} \sqrt{\frac{1-\xi}{1+\xi}} \mathcal{C}(\kappa) - \frac{4\ddot{h}b}{U_\infty^2} \sqrt{1-\xi^2} \\
 &\equiv \Delta c_{p,1}(\xi, t) + \Delta c_{p,2}(\xi, t)
 \end{aligned} \tag{4.9}$$

En la expresión anterior,  $\Delta c_{p,1}(\xi, t)$  representa la distribución de presiones debida a la velocidad  $\dot{h}$  y  $\Delta c_{p,2}(\xi, t)$  aquella originada por la aceleración  $\ddot{h}$  del perfil. Recordando la definición de sustentación como la integral de la presión a lo largo del perfil es posible desarrollar:

$$\begin{aligned}
 L(t) &= \int_{x=-b}^b \Delta p(x, t) dx = \frac{1}{2} \rho_\infty U_\infty^2 b \int_{\xi=-1}^1 \Delta c_p(\xi, t) d\xi \\
 &= \frac{1}{2} \rho_\infty U_\infty^2 b \left( \int_{\xi=-1}^1 -\frac{4\dot{h}}{U_\infty} \sqrt{\frac{1-\xi}{1+\xi}} \mathcal{C}(\kappa) d\xi + \int_{\xi=-1}^1 -\frac{4\ddot{h}b}{U_\infty^2} \sqrt{1-\xi^2} d\xi \right) \\
 &= -2\pi b \rho_\infty U_\infty \dot{h} \mathcal{C}(\kappa) - b^2 \rho_\infty \pi \ddot{h} \\
 &\equiv L_1(t) + L_2(t)
 \end{aligned} \tag{4.10}$$

Teniendo en cuenta que el coeficiente de interés para la resolución del problema es el de sustentación, pueden formularse las expresiones de manera independiente para someterlas posteriormente a un tratamiento más exhaustivo.

$$\begin{aligned}
 C_{L,1}(t) &= \frac{L_1(t)}{\frac{1}{2} \rho_\infty U_\infty^2 2b} = -\frac{2\pi \dot{h} \mathcal{C}(\kappa)}{U_\infty} \\
 C_{L,2}(t) &= \frac{L_2(t)}{\frac{1}{2} \rho_\infty U_\infty^2 2b} = -\frac{\pi b \ddot{h}}{U_\infty^2}
 \end{aligned} \tag{4.11}$$

Por último, cabe particularizar las definiciones alcanzadas para un movimiento armónico de flexión pura descrito por la función  $z_p(\xi, \tau) = h = h_o e^{i\kappa\tau}$ . Considerando como variable principal el tiempo adimensional:

$$\dot{h} = \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial h}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial t} = i\kappa h_o \frac{U_\infty}{b} e^{i\kappa\tau}, \quad \ddot{h} = \frac{\partial^2 h}{\partial t^2} = -\kappa^2 h_o \frac{U_\infty^2}{b^2} e^{i\kappa\tau} \tag{4.12}$$

El coeficiente de sustentación adopta entonces la forma:

$$C_L(\tau) = C_{L,1}(\tau) + C_{L,2}(\tau) = -2\pi i\kappa \mathcal{C}(\kappa) \frac{h_o}{b} e^{i\kappa\tau} + \pi \kappa^2 \frac{h_o}{b} e^{i\kappa\tau} \tag{4.13}$$

Atendiendo al análisis individual de cada uno de los términos,  $C_{L,1}$  representa aquel coeficiente de sustentación de origen circulatorio que queda modificado por la función de Theodorsen. Siendo introducidos a través de ella los efectos de desprendimiento de vorticidad del perfil, reduciendo la amplitud y desfasando su efecto en el tiempo. Por el contrario, el término  $C_{L,2}$  modela la masa aparente asociada a la aceleración instantánea del flujo alrededor del perfil, oponiéndose al movimiento del mismo.

## 4.2. Solución numérica

El procedimiento a emplear para hallar la solución numérica no-estacionaria se basa en definir aquel vector  $v(\xi_{C_i}, \tau)$  considerado como entrada del problema y aplicar el esquema de resolución presentado en la sección 3.3. Al igual que ha sido expuesto para la solución analítica, la función que define las cotas del perfil responde a un movimiento de flexión pura que oscila conforme avanza el paso temporal:

$$z_p(\xi, \tau) = h_o e^{i\kappa\tau}, \quad \frac{\partial z_p}{\partial t} = i\kappa U_\infty \frac{h_o}{b} e^{i\kappa\tau} \quad (4.14)$$

El vector adimensional de velocidades en el perfil viene dado por:

$$w_a(\xi_{C_i}, \tau) \equiv \left[ \frac{\partial z_p}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial t} + \frac{U_\infty}{b} \frac{\partial z_p}{\partial \xi} \right]_{\xi=\xi_{C_i}} = i\kappa U_\infty \frac{h_o}{b} e^{i\kappa\tau} \quad (4.15)$$

Se alcanza finalmente la expresión del vector entrada al esquema numérico:

$$v(\xi_{C_i}, \tau) = \frac{w_a(\xi_{C_i}, \tau)}{U_\infty} = i\kappa \frac{h_o}{b} e^{i\kappa\tau} \quad (4.16)$$

El hecho de que  $v(\xi_{C_i}, \tau)$  permanezca invariante en relación a la coordenada adimensional  $\xi_{C_i}$  implica que el vector tratado muestre siempre el mismo valor a lo largo de cada punto de control, debiendo de ser reevaluado exclusivamente en cada instante temporal que quiera ser resuelto. Tanto el valor de  $h_o/b$  como el de  $\kappa$  son establecidos por el propio usuario en vista de definir el comportamiento del perfil.

## 4.3. Resultados

### Influencia de la función $\mathcal{C}(\kappa)$ y $\kappa$ en la solución analítica:

Con respecto a la diferenciación previamente realizada sobre la expresión analítica del coeficiente de sustentación, cabe renombrar individualmente cada uno de sus términos. El primero de ellos, el cual representa la sustentación de origen circulatorio, queda denotado ahora por  $C_{L,Q}$ , mientras que el segundo, que proviene de modelar los efectos de la masa aparente del perfil, pasa a denominarse  $C_{L,A}$ . Se recuerdan sus expresiones empleando la nueva notación:

$$C_{L,Q} = -2\pi i\kappa \mathcal{C}(\kappa) \frac{h_o}{b} e^{i\kappa\tau}, \quad C_{L,A} = \pi \kappa^2 \frac{h_o}{b} e^{i\kappa\tau} \quad (4.17)$$

Puede observarse que el término circulatorio se ve influenciado directamente por la función de Theodorsen, cuyo efecto es el de modificar tanto la amplitud como el desfase al devolver valores complejos para una determinada frecuencia reducida.

La función de Theodorsen adquiere ahora el aspecto  $\mathcal{C}(\kappa) = \mathcal{C}_o e^{i\gamma}$ , donde  $\mathcal{C}_o(\kappa)$  hace referencia a su amplitud  $|\mathcal{C}(\kappa)|$  y  $\gamma(\kappa)$  a su argumento. Tras introducirla en la expresión global del coeficiente de sustentación se obtiene:

$$\begin{aligned} C_L(\tau) &= C_{L,Q}(\tau) + C_{L,A}(\tau) \\ &= -2\pi i \kappa \mathcal{C}_o(\kappa) e^{i\gamma} \frac{h_o}{b} e^{i\kappa\tau} + \pi \kappa^2 \frac{h_o}{b} e^{i\kappa\tau} \\ &= -2\pi i \kappa \mathcal{C}_o(\kappa) \frac{h_o}{b} e^{i(\kappa\tau+\gamma)} + \pi \kappa^2 \frac{h_o}{b} e^{i\kappa\tau} \end{aligned} \quad (4.18)$$

Trabajando a partir de este punto con la parte real:

$$\begin{aligned} Re\{C_L\} &= 2\pi \kappa \mathcal{C}_o(\kappa) \frac{h_o}{b} \sin(\gamma(\kappa) + \kappa\tau) + \pi \kappa^2 \frac{h_o}{b} \cos(\kappa\tau) \\ &= -2\pi \kappa \mathcal{C}_o(\kappa) \frac{h_o}{b} \cos(\gamma(\kappa) + \kappa\tau + \pi/2) + \pi \kappa^2 \frac{h_o}{b} \cos(\kappa\tau) \end{aligned} \quad (4.19)$$

La figura 4.3 recoge como el valor absoluto y la parte real de la función de Theodorsen tienden asintóticamente a  $1/2$  cuando crece la frecuencia reducida, al mismo tiempo que el argumento y la parte imaginaria se aproximan a cero. Este comportamiento hace que la componente de sustentación circulatoria se vea modificada dependiendo del valor de  $\kappa$ , afectando tanto a la amplitud como al desfase del coeficiente de sustentación global.

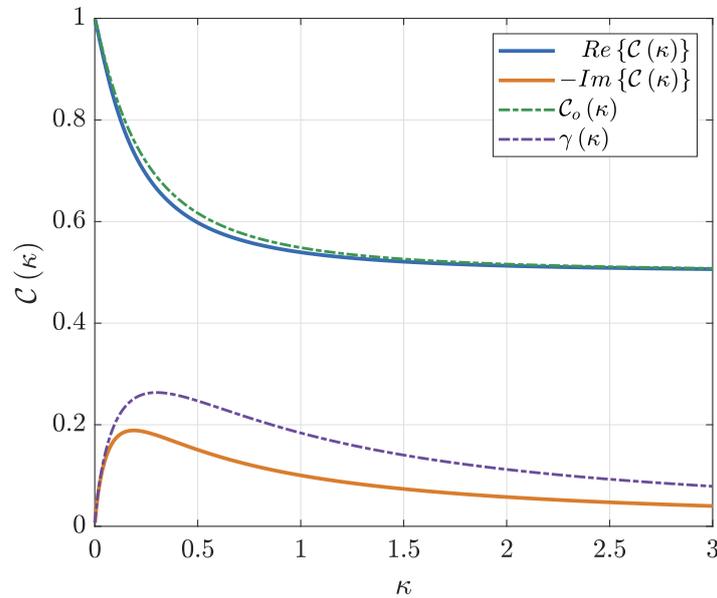


Figura 4.3: Evaluación de la función de Theodorsen

Estudiando primeramente aquel caso particular para frecuencias reducidas muy pequeñas  $\kappa \ll 1$ , puede decirse que la amplitud de la función de Theodorsen se aproxima a la unidad y su argumento resulta nulo.

#### 4. Oscilaciones en flexión

Una vez sustituidos dichos valores en la Ec. (4.19), y despreciando los efectos del término de masa aparente al ser de un orden inferior, se concluye que la solución se encuentra desfasada  $\pi/2$  respecto del movimiento del perfil:

$$Re\{C_L\} = -2\pi\kappa \frac{h_o}{b} \cos(\kappa\tau + \pi/2), \quad \kappa \ll 1 \quad (4.20)$$

Por el contrario, a medida que se incrementa la frecuencia reducida, la función de Theodorsen reduce la amplitud de  $C_{L,Q}$  y aumenta el desfase hasta alcanzar un máximo cuando  $\gamma \approx 0.26$  rad. Sin embargo, al depender el término de la masa aparente del cuadrado de la frecuencia reducida, en el supuesto de incrementar en gran medida el valor de  $\kappa$ , la importancia y contribución de dicho término sobre la sustentación global resulta mayor.

Estos sucesos pueden contemplarse de una manera más gráfica en la figura 4.4, representando (a) aquella circunstancia para la cual la mayor contribución a la sustentación proviene del término circulatorio con un desfase cercano a  $\pi/2$ . En cambio, (b) recoge como el término de masa aparente adquiere una mayor importancia al incrementar  $\kappa$  y aparece un menor desfase entre el coeficiente de sustentación y el desplazamiento descrito por el perfil. Igualmente, el valor máximo de sustentación no se alcanza para el punto de mayor amplitud del movimiento por el efecto del desfase existente, a pesar de ello, conforme aumenta la frecuencia reducida se reduce la discordancia.

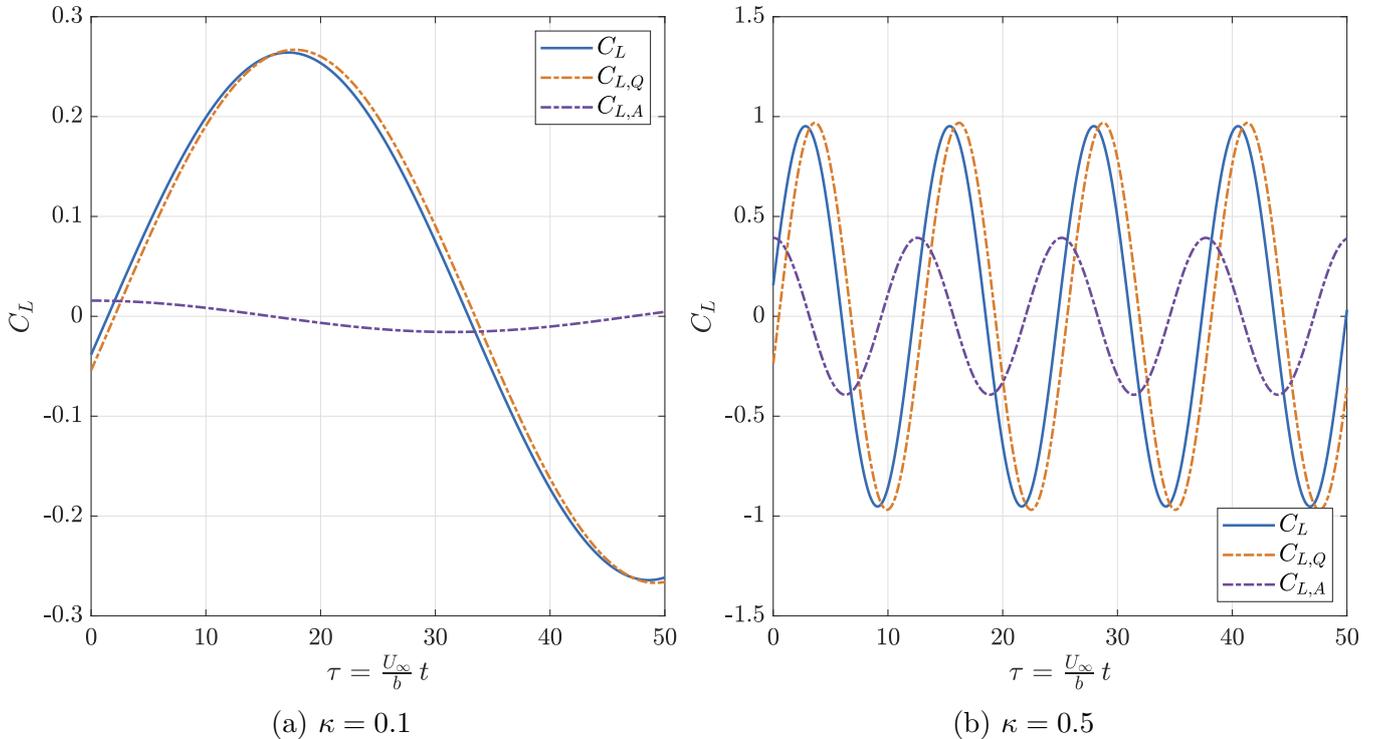


Figura 4.4: Influencia de  $\kappa$  en el coeficiente de sustentación analítico

Dado que el movimiento del perfil es oscilatorio, la respuesta analítica en sustentación a lo largo del tiempo se muestra del mismo tipo como queda patente en la figura 4.4.

Además, es de elevado interés analizar como varía el coeficiente de sustentación en función del ángulo de ataque inducido por el movimiento de flexión. Para ello, se parte de la situación en la cual no existe ángulo de ataque geométrico en el perfil y se emplea el esquema presentado en la figura 4.1, donde el ángulo de ataque que se vislumbra en cada momento es el correspondiente únicamente a la composición de velocidades. Desarrollando la correspondiente expresión:

$$\alpha_e = -\frac{\dot{h}}{U_\infty} = -i \kappa \frac{U_{h_o}}{b} e^{i \kappa \tau} \quad (4.21)$$

Considerando nuevamente la parte real del ángulo de ataque:

$$Re \{ \alpha_e \} = \kappa \frac{h_o}{b} \sin(\kappa \tau) = -\kappa \frac{h_o}{b} \cos(\kappa \tau + \pi/2) \quad (4.22)$$

Se percibe que el ángulo de ataque permanece siempre desfasado  $\pi/2$  respecto del desplazamiento que describe el perfil. Ante tal situación, el comportamiento del coeficiente de sustentación en función de  $\alpha_e$  muestra dos variantes dependiendo de la frecuencia reducida.

Los resultados se exponen a través de la figura 4.5. En (a) se puede observar que para frecuencias reducidas bajas, el ángulo de ataque y el coeficiente de sustentación están en fase, es decir, la máxima sustentación corresponde con aproximadamente el máximo ángulo de ataque. Por el contrario, sendas magnitud se presentan desfasadas  $\pi/2$  respecto del movimiento. Este hecho significa que para frecuencias reducidas bajas, en los puntos de máxima y mínima amplitud el valor de  $\dot{h}$  alcanza un mínimo y por ende, al depender el ángulo de ataque de dicha magnitud, se localiza la mínima sustentación en los extremos. Asimismo, (a) manifiesta que el término que mayoritariamente contribuye a la sustentación global es el circulatorio y como el término de masa aparente se encuentra en fase con el movimiento al coincidir su máximo con  $\alpha_e = 0$ .

Analizando (b), al incrementar la frecuencia reducida a valores razonables, el término de masa aparente adquiere mayor importancia y modifica ligeramente el punto en el que se alcanza el máximo coeficiente de sustentación, el cual ya no coincide exactamente con el máximo ángulo de ataque. Este suceso se aprecia perfectamente en (c) y (d), donde para frecuencias reducidas muy elevadas el coeficiente máximo de sustentación deja de obtenerse para el punto con el mayor ángulo de ataque dado que se reduce el desfase entre sustentación y movimiento. El término circulatorio disminuye así su importancia y la masa aparente es aquella que gobierna ahora el fenómeno, impactando directamente en el hecho de que se reduzca el desfase entre sustentación y movimiento, y se incremente con el ángulo de ataque.

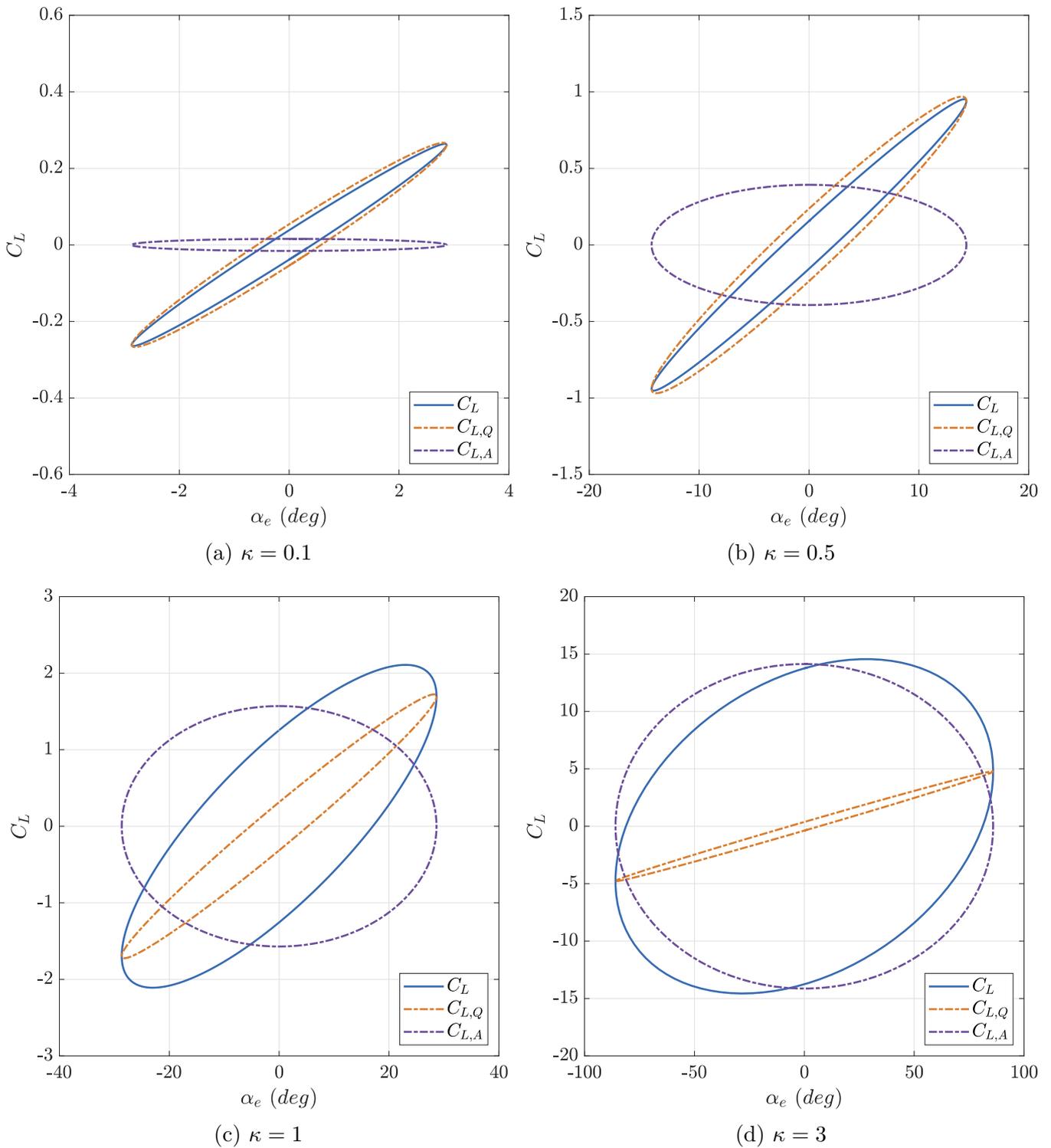


Figura 4.5: Variación del coeficiente de sustentación con  $\alpha_e$  para diferentes  $\kappa$

La situación límite puede intuirse a partir de (d), donde para frecuencias reducidas excesivamente elevadas la respuesta del perfil se encuentra influenciada completamente por los fenómenos de no-estacionarios y por la masa aparente. El término circulatorio queda relegado a un segundo plano y la máxima sustentación se producirá con un desfase cercano a  $\pi/2$  respecto del ángulo de ataque, lo que supone que para ángulos de ataque efectivos nulos se localice el máximo aporte de sustentación. En dicha hipotética situación, el coeficiente de sustentación se mostraría en fase con el movimiento, pues la elevada frecuencia reducida genera que en los puntos de máxima y mínima amplitud se origine la máxima sustentación debido a que el término de masa aparente no presenta desfase alguno respecto del movimiento.

Por último, queda patente que a medida que aumenta la frecuencia reducida se modifica tanto la amplitud del coeficiente de sustentación como aquellos límites del rango descrito por el ángulo de ataque efectivo como muestra la expresión (4.22).

Se puntualiza que todas las simulaciones han sido realizadas para  $h_o/b = 0.5$ .

### Comparación de la solución analítica con la cuasi-estacionaria:

Se expone aquella comparación entre la solución analítica, la cual tiene en cuenta la totalidad de los fenómenos no-estacionarios aparecidos durante el movimiento, y la considerada cuasi-estacionaria en la que no se modela íntegramente la influencia de la estela.

Primeramente, debe recuperarse la expresión de la solución cuasi-estacionaria a partir del ejemplo introducido en el capítulo 2. De hecho, el ejemplo planteado resultaba ser el de un perfil oscilando a flexión, cuya expresión de variación de sustentación viene dada por:

$$L_{c.e} = \frac{1}{2} \rho_{\infty} U_{\infty}^2 2b C_{L\alpha} \alpha_e(t) = -\frac{1}{2} \rho_{\infty} U_{\infty}^2 2b C_{L\alpha} \left( \frac{\dot{h}}{U_{\infty}} \right) \quad (4.23)$$

El subíndice *c.e* denota aquella magnitud referenciada cuasi-estacionaria y posteriormente el subíndice *a* se emplea para designar la procedente del desarrollo analítico. Resulta necesario incluir un signo negativo debido al convenio utilizado para definir el ángulo de ataque  $\alpha_e$  y la velocidad del perfil  $\dot{h}$ . Este suceso se visualiza en la composición de velocidades que fue descrita con anterioridad en la figura 4.1. El coeficiente de sustentación cuasi-estacionario muestra el aspecto:

$$C_{L,c.e} = -C_{L\alpha} \left( \frac{\dot{h}}{U_{\infty}} \right) \quad (4.24)$$

Cabe introducir la pendiente de la curva de sustentación, aproximada al valor de  $2\pi$ , y el desarrollo de  $\dot{h}$  llevado a cabo en la Ec. (4.12). Se recogen entonces sendos coeficientes de sustentación a analizar, por un lado la definición analítica y por otro la cuasi-estacionaria en las Ecs. (4.25) y (4.25) respectivamente.

$$C_{L,a}(\tau) = C_{L,Q}(\tau) + C_{L,A}(\tau) = -2\pi i \kappa \mathcal{C}(\kappa) \frac{h_o}{b} e^{i\kappa\tau} + \pi \kappa^2 \frac{h_o}{b} e^{i\kappa\tau} \quad (4.25)$$

$$C_{L,c.e}(\tau) = -C_{L\alpha} \left( \frac{\dot{h}}{U_\infty} \right) = -2\pi i \kappa \frac{h_o}{b} e^{i\kappa\tau} \quad (4.26)$$

Una vez concretadas las expresiones con las que se va a trabajar, se plantea la comparación para varios valores de frecuencia reducida dejando fija la amplitud de oscilación del perfil. La figura 4.6 representa la superposición de las dos soluciones para varios valores de  $\kappa$  ante una amplitud de  $h_o/b = 0.5$ .

Es significativo que para valores bajos de frecuencia reducida se establece una gran similitud entre las curvas de sendas soluciones, mostradas en (a) y (b), debido al hecho de que el término de masa aparente disminuye en gran medida su influencia. Puede decirse entonces que una simplificación razonable en los problemas para bajas frecuencias reducidas  $\kappa \leq 0.1$  es omitir las fuerzas de inercia originadas por la masa aparente a causa de la mayor influencia de la componente circulatoria.

No obstante, a medida que aumenta la frecuencia reducida queda patente a través de (c) y (d) la disparidad de las aproximaciones a causa de los efectos no-estacionarios y de la mayor contribución de las fuerzas de inercia en el coeficiente de sustentación global. Siendo un error intentar aproximar mediante el modelo cuasi-estacionario aquellos movimientos de gran frecuencia reducida.

Otro hecho que se debe subrayar es que la solución cuasi-estacionaria no es capaz de modelar correctamente el desfase en la sustentación dado que asume que siempre se mantiene igual a  $\pi/2$ , es decir, la sustentación permanece en fase con el ángulo de ataque independientemente del valor de  $\kappa$ .

Para frecuencias muy bajas, la expresión de la solución analítica adquiriría la forma presentada en la Ec. (4.20). Aquella expresión guarda una estrecha similitud con la calculada para la situación cuasi-estacionaria, de hecho, es exactamente la misma. Es posible afirmar que para el caso límite en el cual  $\kappa \ll 1$ , sendas soluciones son iguales y no existe diferencia aparente entre la solución analítica y la cuasi-estacionaria. Dicha resolución también fundamenta la exposición realizada en la cual se aseguraba que para frecuencias reducidas bajas los efectos de la masa aparente eran despreciables y es aceptable usar únicamente la aproximación empleando los términos circulatorios.

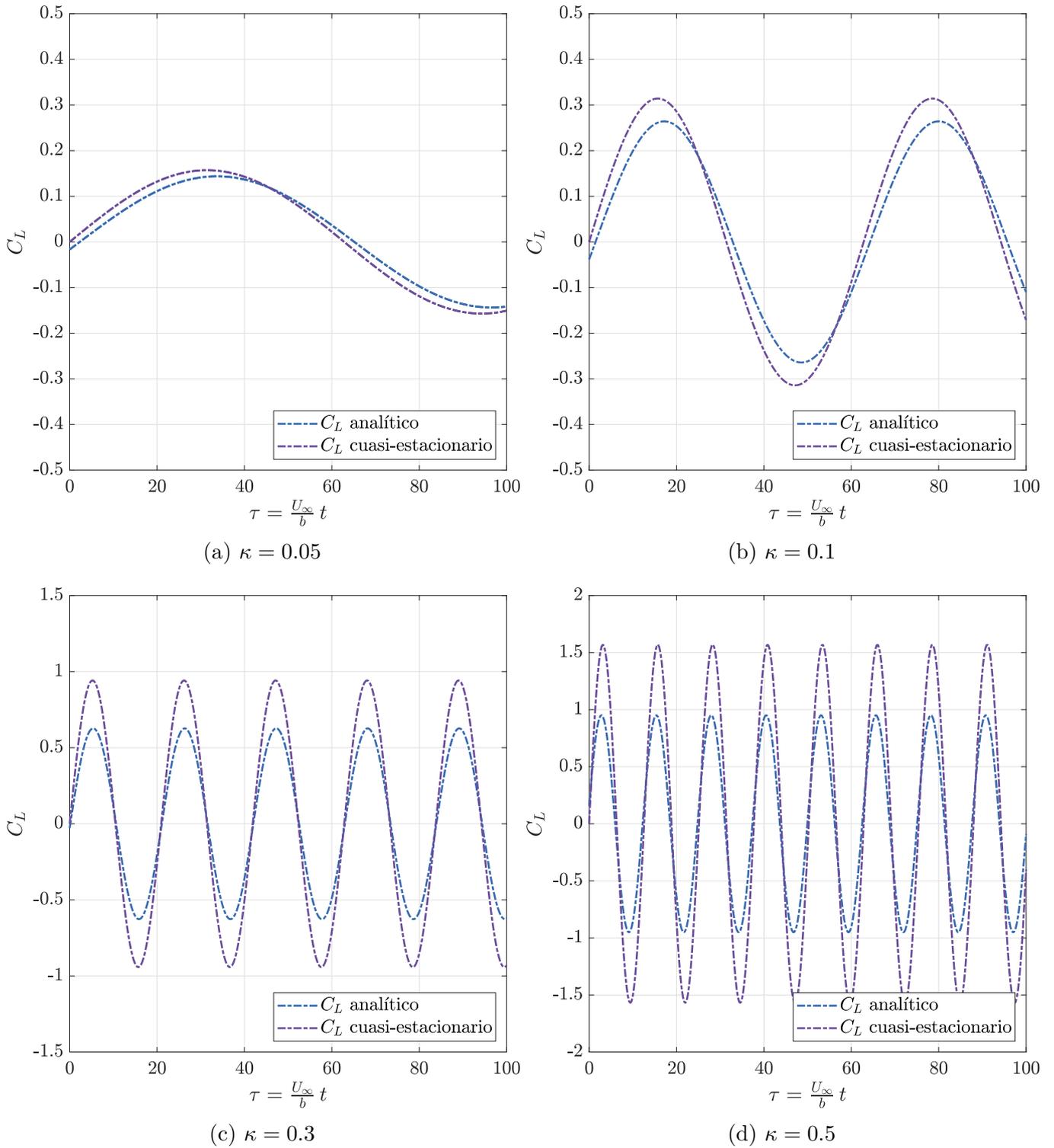


Figura 4.6: Comparación entre solución analítica y cuasi-estacionaria en función de  $\kappa$

### **Comparación de la solución analítica con la numérica:**

Atendiendo a la comparación entre la solución analítica y la numérica, la cual ha sido obtenida mediante el método de los paneles no-estacionario en la línea media, era de esperar que la respuesta ofrecida por el esquema siguiera el tipo de movimiento descrito por el perfil.

Tratando primeramente la respuesta ante variaciones en el número de paneles en el perfil, cabe aclarar que si el objetivo es el de obtener una representación de la distribución del coeficiente de presiones resulta necesario emplear una cantidad relativamente elevada de paneles. No obstante, para estudiar la variación del coeficiente de sustentación puede emplearse un número mucho menor. En la figura 4.7 se presenta la respuesta en forma de armónicos de la variación de la sustentación. En el primero de los caso (a), donde se evalúa ante una baja frecuencia reducida, se observa que la aproximación para bajos números de paneles es bastante precisa, logrando representar correctamente tanto la amplitud como el desfase. El único matriz que se puede añadir es que durante los instantes iniciales el esquema numérico muestra una pequeña desviación que posteriormente es corregida.

Por el contrario, para frecuencias reducidas elevadas (b), la variación ante un bajo número de paneles en el perfil es mucho mayor. Encontrando este hecho explicación en que si la influencia de la totalidad de la estela se materializa únicamente a través de un bajo número de paneles en el perfil se deriva un consecuente error de modelización. Es por ello recomendable, en el caso de trabajar con problemas a altas frecuencias reducidas, aumentar el número de paneles en el perfil para alcanzar aproximaciones de mayor precisión en amplitud. Respecto a los instantes iniciales, la desviación es mayor que en el caso de menores frecuencias aunque en este caso se atenúa en mayor medida con el tiempo excepto para  $n = 1$ .

Sendas soluciones han sido simuladas para 2000 paneles en la estela, con amplitud de movimiento y tamaño de dichos paneles igual a  $1/2$ .

Respecto al tamaño de los paneles en la estela, la figura 4.8 recoge los resultados tanto para bajas como para altas frecuencias. La aproximación de bajas frecuencias reducidas coincide perfectamente con la solución analítica, excepto durante los instantes iniciales. Se concluye entonces que ante problemas con frecuencias pequeñas, el tamaño del panel en la estela no es en gran medida significativo siempre dentro de unos límites razonables.

No obstante, en el caso de altas frecuencias no puede decirse lo mismo, dado que al aumentar el tamaño se actúa directamente sobre la discretización y la aproximación no muestra tanta precisión en términos de amplitud. A pesar de ello, se habla de errores relativamente pequeños entre la solución analítica y la numérica no-estacionaria en el supuesto de trabajar con valores usuales. En el caso de emplear paneles excesivamente grandes para la estela, no se logra modelar correctamente las oscilaciones del coeficiente de sustentación y se induce un error mayor de discretización. Nuevamente, ambas soluciones se han alcanzado colocando 2000 paneles en la estela y para una amplitud de movimiento igual a  $1/2$ .

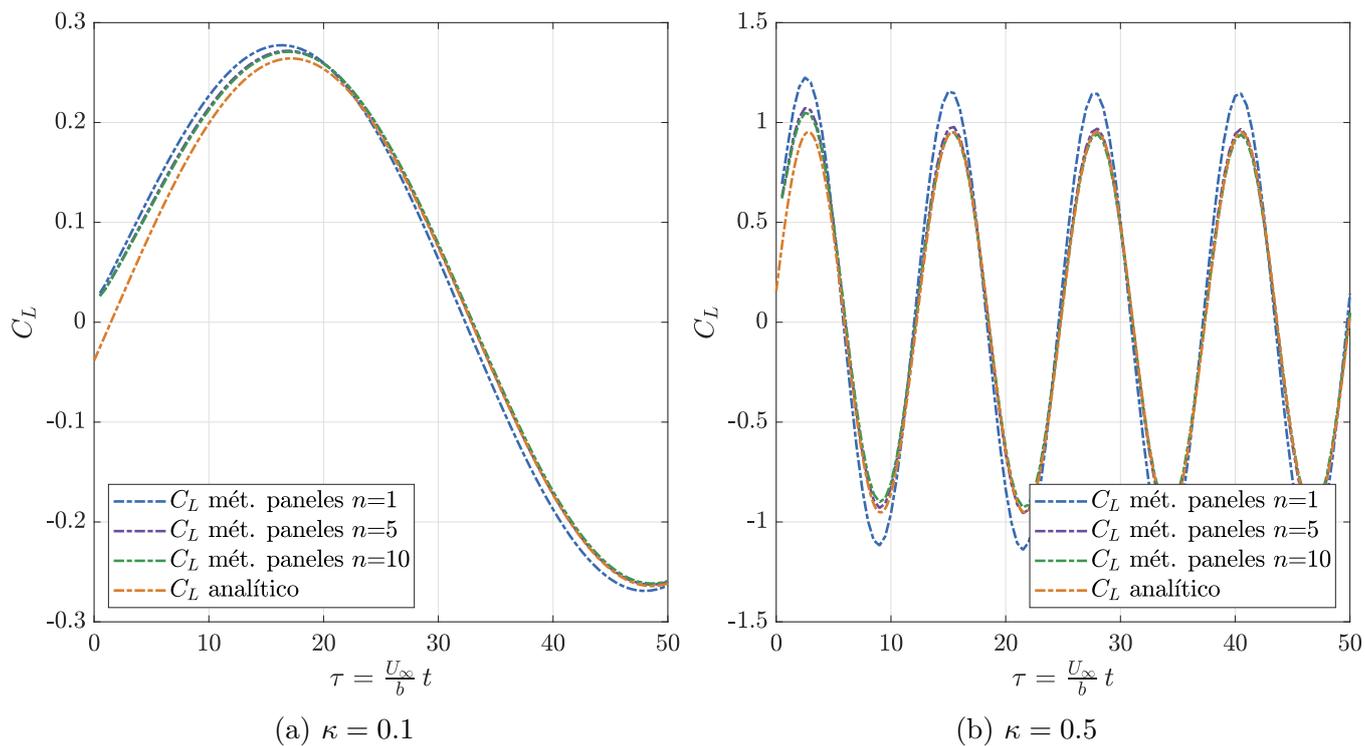


Figura 4.7: Influencia de  $n$  en  $C_L$  para perfil oscilando en flexión

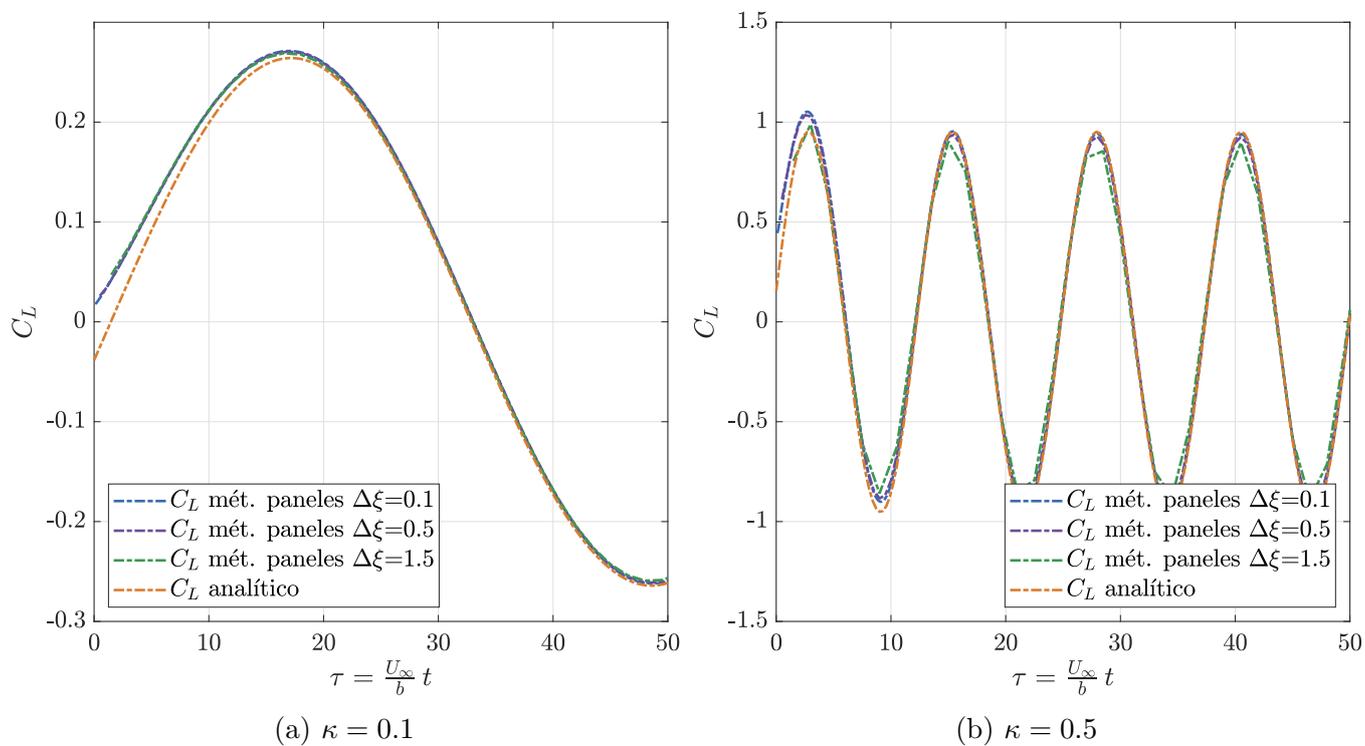


Figura 4.8: Influencia de  $\Delta\xi$  en  $C_L$  para perfil oscilando en flexión

## Oscilaciones en giro

A lo largo del presente capítulo se plantea el estudio de la respuesta de un perfil sometido a un movimiento armónico en giro. La descripción geométrica del problema es evaluada a través de la siguiente expresión de las cotas:

$$z_p(\xi, t) = -\alpha(t) b(\xi - a) \quad (5.1)$$

De modo que el perfil rota en relación a la coordenada adimensional  $a$ , la cual queda delimitada dentro del intervalo  $-1 \leq a \leq 1$ . En el caso de considerar un valor de  $a = -1$ , se aprecia que el perfil gira respecto del borde de ataque, mientras que si  $a = 1$  la rotación tiene lugar entorno al borde de fuga. Así pues, la función  $\alpha(\tau)$  describe aquel oscilamiento periódico del ángulo de ataque gobernado tanto por la amplitud  $\alpha_o$  como por la frecuencia reducida  $\kappa$  característica del desplazamiento.

Mediante la figura 5.1 se presenta el movimiento, acotando  $\alpha_o$  tanto el máximo como el mínimo valor de la oscilación en giro y el rango para el cual se generan valores de sustentación positiva o negativa al considerar que el perfil oscila sin ningún tipo de ángulo de ataque geométrico.

$$\alpha(t) = \alpha_o e^{i\omega t}, \quad \alpha(\tau) = \alpha_o e^{i\kappa\tau} \quad (5.2)$$

El problema a estudiar exhibe un gran interés debido a que las alas de las aeronaves se encuentran continuamente sometidas a movimientos oscilatorios de torsión originados por fenómenos aeroelásticos. No debe olvidarse que un ala se encuentra compuesta por un conjunto de perfiles aerodinámicos, por ello, el estudio a una escala menor permite inicialmente valorar la repercusión del fenómeno y la variación en las fuerzas globales para cada instante temporal.

Sin ir más lejos, un ejemplo de aplicación del movimiento estudiado se da directamente en los helicópteros, donde el ángulo de paso de las palas muestran una variación cíclica dependiendo de su localización con la finalidad de variar la distribución de sustentación en el plano del rotor y compensar la asimetría en vuelo de avance.

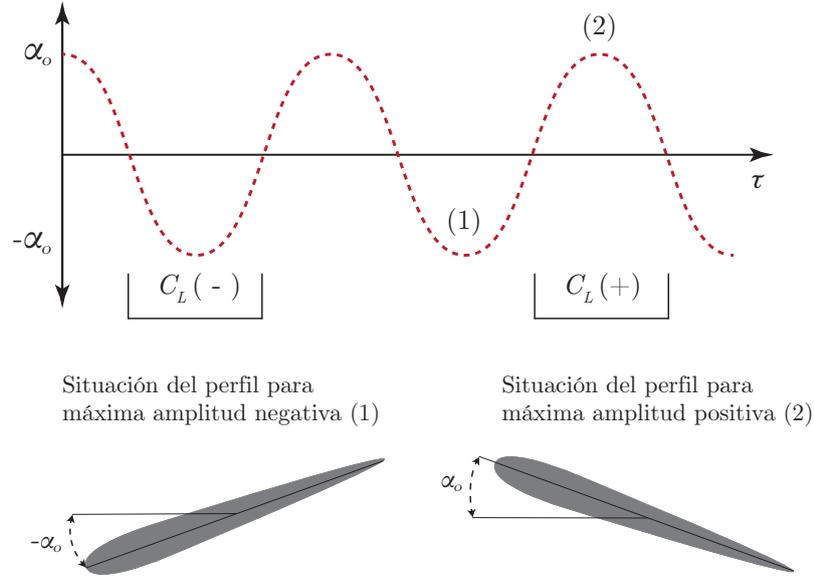


Figura 5.1: Perfil sometido a oscilaciones en giro con  $a=0$

### 5.1. Solución analítica

El proceso para alcanzar la solución analítica resulta análogo al desarrollado en el caso de flexión. No obstante, al tratarse de un movimiento diferente cabe redefinir la función  $z_p(\xi, t)$  y reevaluar el cálculo del vector velocidades sobre el perfil  $w_a(\xi, t)$ . Trabajando con la expresión 5.1 y asumiendo un valor de  $\alpha$  genérico que exclusivamente depende del tiempo:

$$w_a(\xi, t) = \frac{\partial z_p}{\partial t} + \frac{U_\infty}{b} \frac{\partial z_p}{\partial \xi} = -\dot{\alpha} b(\xi - a) - U_\infty \alpha \quad (5.3)$$

Recuperando la ecuación obtenida para el coeficiente de presiones ante un movimiento armónico y especificando la expresión de la función  $\mathcal{W}_a(\xi, \eta, t)$ :

$$\mathcal{W}_I(\xi, \eta, t) = w_a(\eta, t) = -\dot{\alpha} b(\eta - a) - U_\infty \alpha \quad (5.4)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_{II}(\xi, \eta, t) &= \frac{b}{U_\infty} \frac{1+\xi}{1+\eta} \int_{\lambda=-1}^{\eta} \frac{\partial w_a(\lambda, t)}{\partial t} d\lambda \\ &= \frac{b}{U_\infty} \frac{1+\xi}{1+\eta} \int_{\lambda=-1}^{\eta} [-\ddot{\alpha} b(\lambda - a) - U_\infty \dot{\alpha}] d\lambda \\ &= -\frac{b}{U_\infty} (1+\xi) \left[ -\ddot{\alpha} b a + U_\infty \dot{\alpha} + \frac{\ddot{\alpha} b}{2} (\eta - 1) \right] \end{aligned} \quad (5.5)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_{III}(\xi, \eta, t) &= (\xi - \eta) [1 - \mathcal{C}(\kappa)] w_a(\eta, t) \\ &= (\xi - \eta) [1 - \mathcal{C}(\kappa)] (-\dot{\alpha} b(\eta - a) - U_\infty \alpha) \end{aligned} \quad (5.6)$$

Debe dividirse entonces el coeficiente de presiones dado por la Ec. (2.111) en tres contribuciones individuales en vista de agilizar el procedimiento y lograr alcanzar la expresión global que gobierna la distribución de presiones:

$$\begin{aligned}
 \Delta c_{p,I}(\xi, t) &= \frac{4}{\pi U_\infty} \sqrt{\frac{1-\xi}{1+\xi}} \int_{\eta=-1}^1 \sqrt{\frac{1+\eta}{1-\eta}} \frac{\mathcal{W}_I(\xi, \eta, t)}{\xi - \eta} d\eta \\
 &= \frac{4}{\pi U_\infty} \sqrt{\frac{1-\xi}{1+\xi}} \int_{\eta=-1}^1 \sqrt{\frac{1+\eta}{1-\eta}} \frac{-\dot{\alpha} b(\eta - a) - U_\infty \alpha}{\xi - \eta} d\eta \\
 &= 4\alpha \sqrt{\frac{1-\xi}{1+\xi}} + \frac{4}{U_\infty} \sqrt{\frac{1-\xi}{1+\xi}} [\dot{\alpha} b(1+\xi) - ab\dot{\alpha}] \\
 &= 4 \left( \alpha - \frac{ab\dot{\alpha}}{U_\infty} \right) \sqrt{\frac{1-\xi}{1+\xi}} + \frac{4\dot{\alpha}b}{U_\infty} \sqrt{1-\xi^2}
 \end{aligned} \tag{5.7}$$

$$\begin{aligned}
 \Delta c_{p,II}(\xi, t) &= \frac{4}{\pi U_\infty} \sqrt{\frac{1-\xi}{1+\xi}} \int_{\eta=-1}^1 \sqrt{\frac{1+\eta}{1-\eta}} \frac{\mathcal{W}_{II}(\xi, \eta, t)}{\xi - \eta} d\eta \\
 &= -\frac{4b}{\pi U_\infty^2} \sqrt{1-\xi^2} \int_{\eta=-1}^1 \sqrt{\frac{1+\eta}{1-\eta}} \frac{-ab\ddot{\alpha} + U_\infty \dot{\alpha} + \frac{\ddot{\alpha}b}{2}(\eta - 1)}{\xi - \eta} d\eta \\
 &= \frac{4b}{U_\infty^2} \sqrt{1-\xi^2} \left( U_\infty \dot{\alpha} - ab\ddot{\alpha} + \frac{\ddot{\alpha}b}{2} \xi \right)
 \end{aligned} \tag{5.8}$$

$$\begin{aligned}
 \Delta c_{p,III}(\xi, t) &= \frac{4}{\pi U_\infty} \sqrt{\frac{1-\xi}{1+\xi}} \int_{\eta=-1}^1 \sqrt{\frac{1+\eta}{1-\eta}} \frac{\mathcal{W}_{III}(\xi, \eta, t)}{\xi - \eta} d\eta \\
 &= \frac{4}{\pi U_\infty} [1 - \mathcal{C}(\kappa)] \sqrt{\frac{1-\xi}{1+\xi}} \int_{\eta=-1}^1 \sqrt{\frac{1+\eta}{1-\eta}} (-\dot{\alpha} b(\eta - a) - U_\infty \alpha) d\eta \\
 &= -\frac{4}{U_\infty} [1 - \mathcal{C}(\kappa)] \sqrt{\frac{1-\xi}{1+\xi}} \left[ \alpha U_\infty + b\dot{\alpha} \left( \frac{1}{2} - a \right) \right]
 \end{aligned} \tag{5.9}$$

Agrupando las expresiones para obtener el coeficiente de presiones global:

$$\begin{aligned}
 \Delta c_p(\xi, t) &= \Delta c_{p,I}(\xi, t) + \Delta c_{p,II}(\xi, t) + \Delta c_{p,III}(\xi, t) \\
 &= 4\alpha \mathcal{C}(\kappa) \sqrt{\frac{1-\xi}{1+\xi}} - \frac{4b^2\ddot{\alpha}}{U_\infty^2} \sqrt{1-\xi^2} \left( a + \frac{\xi}{2} \right) \\
 &\quad + \frac{4b\dot{\alpha}}{U_\infty} \sqrt{\frac{1-\xi}{1+\xi}} \left[ \mathcal{C}(\kappa) \left( \frac{1}{2} - a \right) + 2\xi + \frac{3}{2} \right] \\
 &\equiv \Delta c_{p,0}(\xi, t) + \Delta c_{p,1}(\xi, t) + \Delta c_{p,2}(\xi, t)
 \end{aligned} \tag{5.10}$$

donde se han empleado las siguientes integrales:

$$\int_{\eta=-1}^1 \sqrt{\frac{1+\eta}{1-\eta}} d\eta = \pi, \quad \int_{\eta=-1}^1 \sqrt{\frac{1+\eta}{1-\eta}} \frac{1}{\xi-\eta} d\eta = -\pi,$$

$$\int_{\eta=-1}^1 \sqrt{\frac{1+\eta}{1-\eta}} \frac{\eta}{\xi-\eta} d\eta = -\pi(1+\xi)$$

Los términos  $\Delta c_{p,0}$ ,  $\Delta c_{p,1}$  y  $\Delta c_{p,2}$  representan aquella contribución al coeficiente de presiones aportada por  $\alpha$ ,  $\dot{\alpha}$  y  $\ddot{\alpha}$  respectivamente. Por consiguiente, puede afrontarse el cálculo de la sustentación mediante la integral de la presión a lo largo del perfil:

$$\begin{aligned} L(t) &= \int_{x=-b}^b \Delta p(x,t) dx = \frac{1}{2} \rho_\infty U_\infty^2 b \int_{\xi=-1}^1 \Delta c_p(\xi,t) d\xi \\ &= -\pi \rho_\infty a b^3 \ddot{\alpha} + 2\pi \rho_\infty b U_\infty \mathcal{C}(\kappa) \left[ \alpha U_\infty + b \dot{\alpha} \left( \frac{1}{2} - a \right) \right] + \pi b^2 \rho_\infty U_\infty \dot{\alpha} \\ &\equiv L_1(t) + L_2(t) + L_3(t) \end{aligned} \tag{5.11}$$

Para hallar la expresión (5.11) se ha recurrido al cálculo de las integrales:

$$\int_{\xi=-1}^1 \sqrt{\frac{1-\xi}{1+\xi}} d\xi = \pi, \quad \int_{\xi=-1}^1 \sqrt{1-\xi^2} d\xi = \pi/2, \quad \int_{\xi=-1}^1 \xi \sqrt{1-\xi^2} d\xi = 0$$

El valor del coeficiente de sustentación se presenta de forma separada para facilitar su tratamiento y posterior análisis, quedando dividido en:

$$\begin{aligned} C_{L,1}(t) &= \frac{L_1(t)}{\frac{1}{2} \rho_\infty U_\infty^2 2b} = -\frac{\pi a b \ddot{\alpha}}{U_\infty^2} \\ C_{L,2}(t) &= \frac{L_2(t)}{\frac{1}{2} \rho_\infty U_\infty^2 2b} = \frac{2\pi \mathcal{C}(\kappa)}{U_\infty} \left[ \alpha U_\infty + b \dot{\alpha} \left( \frac{1}{2} - a \right) \right] \\ C_{L,3}(t) &= \frac{L_3(t)}{\frac{1}{2} \rho_\infty U_\infty^2 2b} = \frac{\pi b \dot{\alpha}}{U_\infty} \end{aligned} \tag{5.12}$$

Particularizando el coeficiente de sustentación global para el movimiento impuesto de giro del perfil con  $\alpha(t) = \alpha_o e^{i\omega t}$  y pasando al dominio del tiempo adimensional:

$$\dot{\alpha} = \frac{\partial \alpha}{\partial t} = \frac{\partial \alpha}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial t} = i \kappa \alpha_o \frac{U_\infty}{b} e^{i\kappa \tau}, \quad \ddot{\alpha} = \frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2} = -\kappa^2 \alpha_o \frac{U_\infty^2}{b^2} e^{i\kappa \tau} \tag{5.13}$$

La expresión del coeficiente de sustentación responde a:

$$\begin{aligned} C_L(\tau) &= C_{L,1}(\tau) + C_{L,2}(\tau) + C_{L,3}(\tau) \\ &= \pi a \kappa^2 \alpha_o e^{i\kappa\tau} + 2\pi \mathcal{C}(\kappa) \alpha_o e^{i\kappa\tau} \left[ 1 + \frac{i\kappa}{2} - i\kappa a \right] + \pi i \kappa \alpha_o e^{i\kappa\tau} \end{aligned} \quad (5.14)$$

Se presenta la distinción entre términos circulatorios y de masa aparente a partir de la expresión del coeficiente de sustentación.  $C_{L,2}$  se caracteriza por ser el término circulatorio, directamente influenciado por la función de Theodorsen y, como fue mencionado con anterioridad, siendo modificado tanto en amplitud como en desfase dependiendo del valor de la frecuencia reducida del movimiento. Por el contrario, el conjunto formado por  $C_{L,1}$  y  $C_{L,3}$  se asocia con los efectos de la masa aparente, donde  $C_{L,1}$  representa la fuerza de inercia del aire girando con una aceleración angular  $\ddot{\alpha}$  y  $C_{L,3}$  denota las fuerzas de inercia originadas por la aceleración de Coriolis.

Las entradas para obtener la solución analítica resultan ser la amplitud  $\alpha_o$  que se le imponga al movimiento, el punto  $a$  respecto del cual gire el perfil y la frecuencia reducida  $\kappa$ .

## 5.2. Solución numérica

Partiendo de las definiciones geométricas características del movimiento de giro, se calcula la expresión del vector  $w_a(\xi_{Ci}, \tau)$  adimensional de velocidades en el perfil:

$$w_a(\xi_{Ci}, \tau) \equiv \left[ \frac{\partial z_p}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial t} + \frac{U_\infty}{b} \frac{\partial z_p}{\partial \xi} \right]_{\xi=\xi_{Ci}} = -\alpha'(\tau) U_\infty (\xi_{Ci} - a) - \alpha(\tau) U_\infty \quad (5.15)$$

Cabe entonces recuperar la expresión de  $\alpha(\tau) = \alpha_o e^{i\kappa\tau}$  y desarrollar hasta finalmente alcanzar:

$$w_a(\xi_{Ci}, \tau) = -i\kappa U_\infty \alpha_o e^{i\kappa\tau} (\xi_{Ci} - a) - \alpha_o U_\infty e^{i\kappa\tau} \quad (5.16)$$

El vector a introducir en el método numérico adquiere la forma:

$$v(\xi_{Ci}, \tau) = \frac{w_a(\xi_{Ci}, \tau)}{U_\infty} = -i\kappa \alpha_o e^{i\kappa\tau} (\xi_{Ci} - a) - \alpha_o e^{i\kappa\tau} \quad (5.17)$$

Puede observarse en la Ec. (5.17) que el vector cambia tanto con el paso temporal como con la coordenada adimensional del perfil, es decir, muestra un valor diferente dependiendo del panel a considerar y debiendo de ser reevaluados todos los paneles para cada instante. La coordenada  $\xi_{Ci}$  representa las localizaciones adimensionales de los puntos de control de cada panel.

### 5.3. Resultados

#### Influencia de la función $\mathcal{C}(\kappa)$ y $\kappa$ en la solución analítica:

Previamente, ha sido mostrado que la expresión analítica del coeficiente de sustentación para el problema de giro depende directamente de la función de Theodorsen a partir del término definido como circulatorio. Se renombran ahora dichos términos para facilitar el tratamiento, recordando sus expresiones con la nueva notación:

$$\begin{aligned}
 C_L(\tau) &= C_{L,1}(\tau) + C_{L,2}(\tau) + C_{L,3}(\tau) \\
 &= \pi a \kappa^2 \alpha_o e^{i\kappa\tau} + 2\pi \mathcal{C}(\kappa) \alpha_o e^{i\kappa\tau} \left[ 1 + \frac{i\kappa}{2} - i\kappa a \right] + \pi i \kappa \alpha_o e^{i\kappa\tau} \quad (5.18) \\
 &\equiv C_{L,A,A} + C_{L,Q} + C_{L,A,C}
 \end{aligned}$$

donde  $C_{L,2}$  pasa a llamarse  $C_{L,Q}$  al representar la contribución del término circulatorio influenciado por la función de Theodorsen. Del mismo modo,  $C_{L,1}$  se denota como  $C_{L,A,A}$  dado que simboliza la influencia de la aceleración angular en las fuerzas de inercia y  $C_{L,3}$  recibe el nombre de  $C_{L,A,C}$  al encontrarse originado por la aceleración de Coriolis. Es por ello que el conjunto formado por  $C_{L,A,A}$  y  $C_{L,A,C}$  designa los efectos de la masa aparente, al contrario que  $C_{L,Q}$  el cual se asocia a los efectos circulatorios.

Introduciendo la expresión de la función de Theodorsen y desarrollando la parte real de cada uno de los términos del coeficiente de sustentación global:

$$\begin{aligned}
 Re\{C_{L,Q}\} &= 2\pi \mathcal{C}_o(\kappa) \alpha_o \left[ \cos(\gamma(\kappa) + \kappa\tau) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\kappa}{2} \cos(\gamma(\kappa) + \kappa\tau + \pi/2) - \kappa a \cos(\gamma(\kappa) + \kappa\tau + \pi/2) \right] \quad (5.19)
 \end{aligned}$$

$$Re\{C_{L,A,A}\} = \pi a \kappa^2 \alpha_o \cos(\kappa\tau)$$

$$Re\{C_{L,A,C}\} = \pi \kappa \alpha_o \cos(\kappa\tau + \pi/2)$$

Queda patente que el desfase no solo proviene del término circulatorio, sino que uno de los componentes de la masa aparente también induce un desfase de  $\pi/2$  respecto del ángulo de ataque o movimiento del perfil.

Se valora entonces la influencia de la frecuencia reducida y de la función de Theodorsen ante un caso en el cual el perfil oscila a partir de su punto medio. En esta situación particular, y debido al hecho de que  $a = 0$ , se espera que la contribución a la sustentación por parte de  $C_{L,A,A}$  sea nula, así como que  $C_{L,Q}$  muestre un sumando menos.

Los resultados se presentan en la figura 5.2. Para bajas frecuencias reducidas, el término predominante es el circulatorio, de forma que aquellos relacionados con la masa aparente manifiestan una contribución muy pequeña.

Al tener una mayor influencia el término circulatorio, para el hipotético límite de frecuencias muy bajas, el desfase tiende a no existir debido a que  $\gamma(\kappa)$  es nulo y  $\kappa \ll 1$  como recoge la ecuación (5.19). Sin embargo, a medida que se incrementa la frecuencia del movimiento, el efecto de la función de Theodorsen hace que la amplitud de la sustentación decrezca en cómputo general debido a que la contribución de las fuerzas de Coriolis no son capaces de compensar dicha reducción. La evolución del suceso puede ser observada en (a), (b) y (c). Así pues, conforme aumenta la frecuencia reducida, el término de la masa aparente cobra importancia y  $C_{L,A,C}$  comienza a actuar tanto en la amplitud de la sustentación como en desfase (d).

Para analizar valores de frecuencia reducida relativamente más elevados, se emplea la figura 5.3. La tendencia de la amplitud se modifica, es decir, comienza a volver a intensificarse (a) debido a que el término de masa aparente recupera importancia hasta sobrepasar al circulatorio (b).

El comportamiento de un perfil que gira entorno a su centro sigue, en este caso, el siguiente razonamiento: para frecuencias reducidas muy bajas, el movimiento se encuentra aproximadamente en fase con la sustentación debido a la influencia del término circulatorio. Asimismo, a medida que se aumenta progresivamente la frecuencia reducida, la amplitud decrece por el efecto de la función de Theodorsen y comienzan a ganar importancia los términos de masa aparente. Por último, y ya en el rango de frecuencias reducidas muy grandes, la amplitud experimenta un incremento y el término circulatorio queda en amplitud relegado a aproximadamente la mitad del valor que presentaba para  $\kappa \ll 1$ . Además, la masa aparente, que para  $a = 0$  se encuentra gobernada por los términos de Coriolis, desfasa la respuesta en sustentación respecto del movimiento.

Otro hecho a remarcar resulta ser que para el tiempo de partida  $\tau = 0$  la solución siempre viene ofrecida por el término circulatorio, independientemente de la frecuencia reducida. Esto ocurre debido al comportamiento senoidal del término de masa aparente, el cual se muestra desfasado  $\pi/2$  con el circulatorio para bajas frecuencias reducidas.

También se aprecia que ante un movimiento con baja frecuencia reducida el flujo precisa del tiempo necesario para estabilizarse y como consecuencia, aproximarse a la solución estacionaria, mientras que para una situación con frecuencias reducidas mayores este hecho no puede llevarse a cabo y se logran elevadas amplitudes de sustentación debido principalmente a los efectos de la masa aparente.

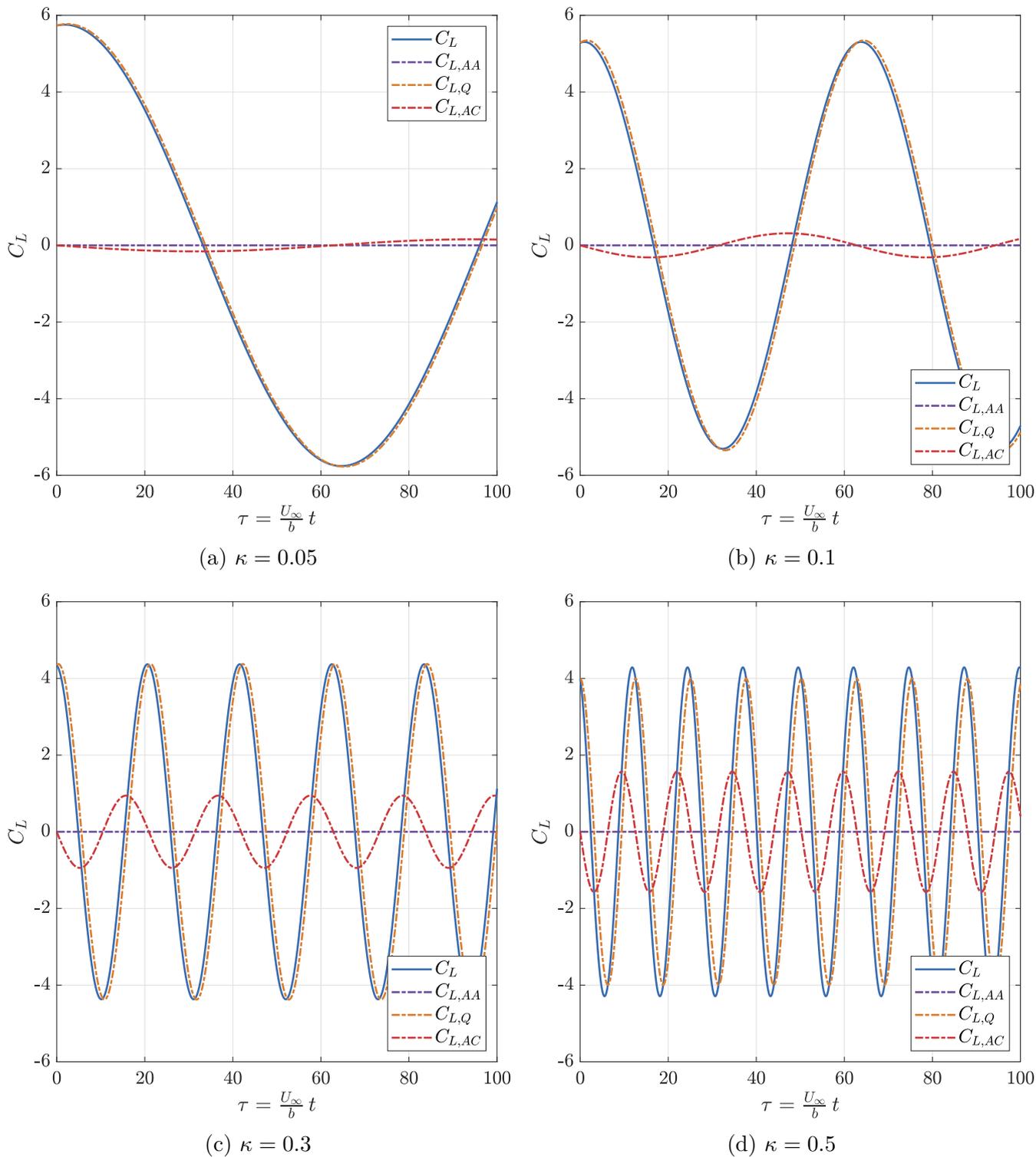


Figura 5.2: Influencia de  $\kappa$  en el coeficiente de sustentación para  $a = 0$

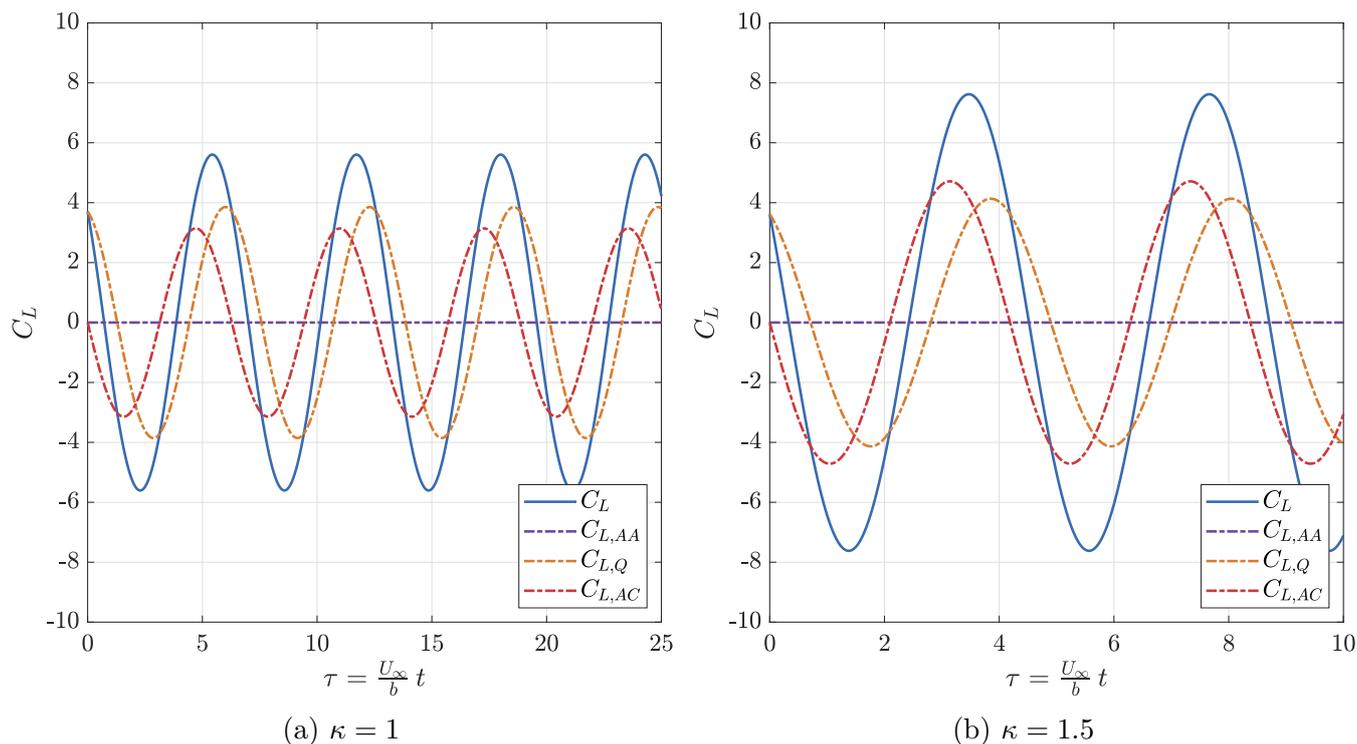


Figura 5.3: Influencia de  $\kappa$  elevados en el coeficiente de sustentación para  $a = 0$

La evolución del ángulo de ataque se muestra en la figura 5.4. Inicialmente, la respuesta está gobernada por el término circulatorio, el cual define en grandes rasgos tanto el desfase como la amplitud. Es por ello que la sustentación no se presenta exactamente en fase con el movimiento, pero el desfase resulta muy pequeño. No obstante, a medida que aumenta la frecuencia reducida, el término de masa aparente inducido por la aceleración de Coriolis genera que el desfase quede modificado y la sustentación máxima deje de tener lugar en las proximidades del máximo ángulo de ataque como puede apreciarse tanto en (c) como en (d).

Igualmente, el hecho de que el perfil oscile con frecuencias muy elevadas hace que sea capaz de superar el límite de la pendiente de sustentación que correspondería a  $2\pi$  al presentar una oscilación de 1 rad de amplitud. No obstante, a efectos prácticos puede no llegar a compensar tener un perfil oscilando a elevadas frecuencias debido a la fatiga y otros fenómenos que puedan aparecer.

Así pues, se aprecia que para frecuencias reducidas muy pequeñas, donde no se modela prácticamente el desprendimiento de los torbellinos, el coeficiente de sustentación tiende al valor estacionario, véase figura 5.5. El cual es alcanzado en el punto de máximo ángulo de ataque, dándole tiempo a establecerse antes de continuar con la oscilación y donde solo contribuye el término circulatorio. En (b) queda recogido como la respuesta obtenida por parte del perfil se aproxima a la de una polar con curva de sustentación lineal.

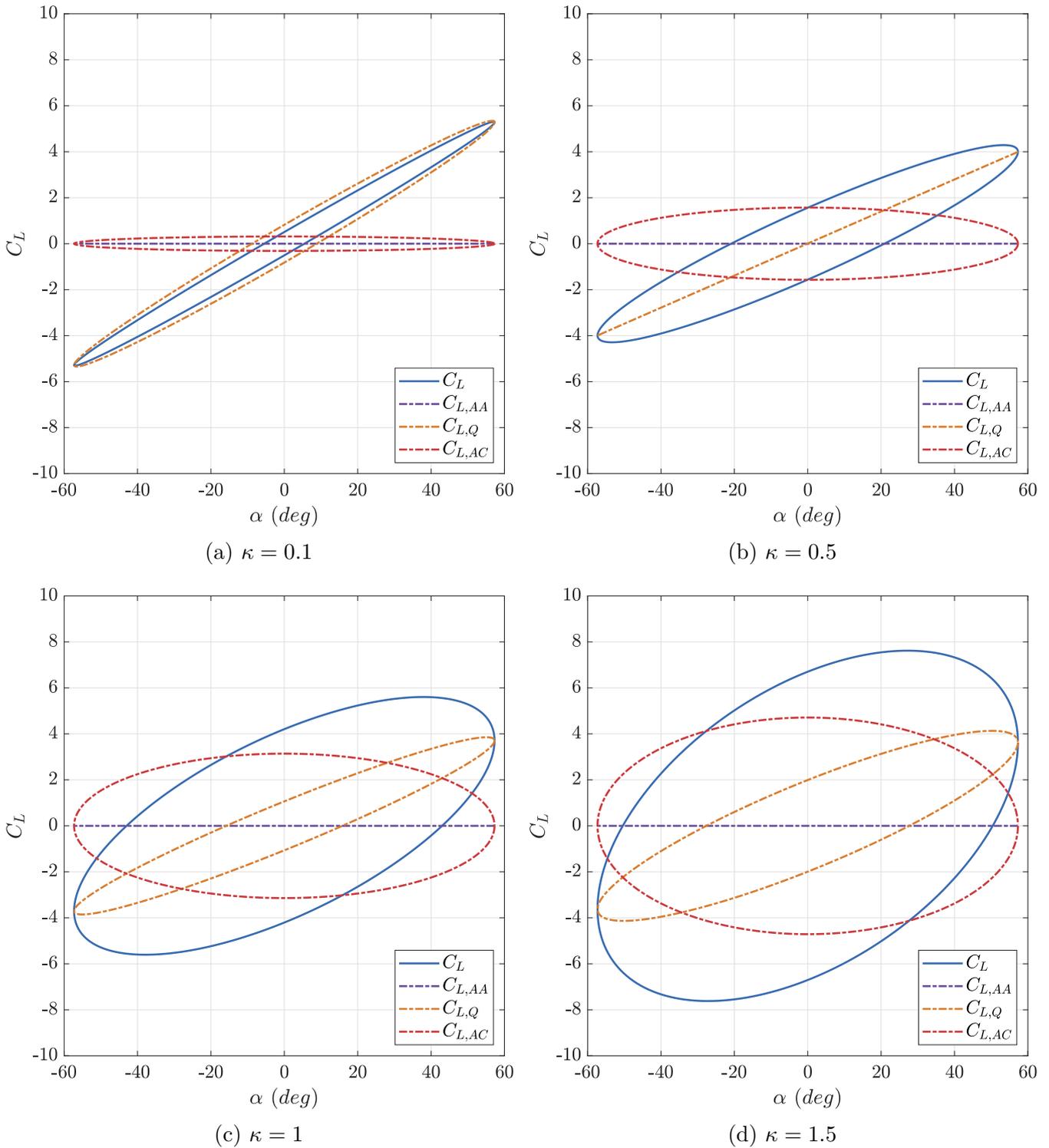


Figura 5.4: Variación de  $C_L$  con  $\alpha$  para perfil oscilando en giro

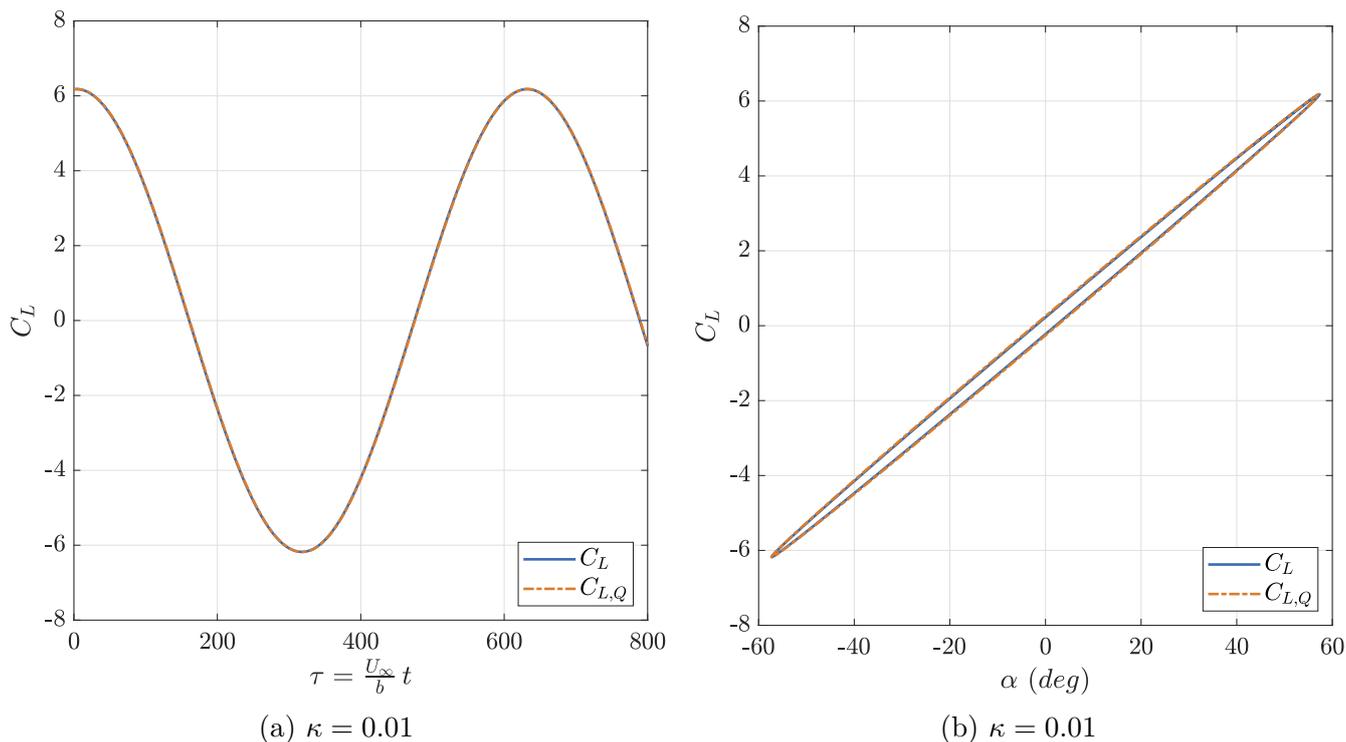


Figura 5.5: Respuesta de perfil oscilando en giro para  $\kappa \ll 1$

### Influencia de $a$ en la solución analítica:

Anteriormente, ha sido estudiado el comportamiento de la solución analítica cuando el perfil giraba respecto de su punto medio. No obstante, pueden acontecerse otras situaciones en las cuales el perfil oscile en relación al borde de ataque o de fuga, o respecto de cualquier otra coordenada adimensional  $a$ .

Primeramente, destaca que este parámetro muestra influencia tanto en el término circulatorio como en el de masa aparente. En el caso de que el punto de giro no coincida con el centro de gravedad de la masa de aire alrededor del perfil, el término  $C_{L,AA}$  deja de ser nulo y muestra una contribución positiva o negativa en amplitud dependiendo de la nueva localización y de la oscilación. Lo mismo sucede con el término circulatorio, donde en este caso afecta tanto al desfase como a la amplitud del coeficiente de sustentación.

El efecto se recoge a través de la comparación presentada en las figuras 5.6 y 5.7, obteniéndose las soluciones para dos valores diferentes de frecuencias reducidas y para tres valores de punto de giro. Queda patente como para  $a = -1$  se alcanzan las mayores amplitudes indistintamente de la frecuencia reducida debido a la contribución de  $C_{L,AA}$  mostrado en las gráficas (b). De igual forma, dicho término y el circulatorio inducen un desfase mayor conforme aumenta la frecuencia reducida sobre la sustentación global en comparación con las soluciones para puntos de giro diferentes.

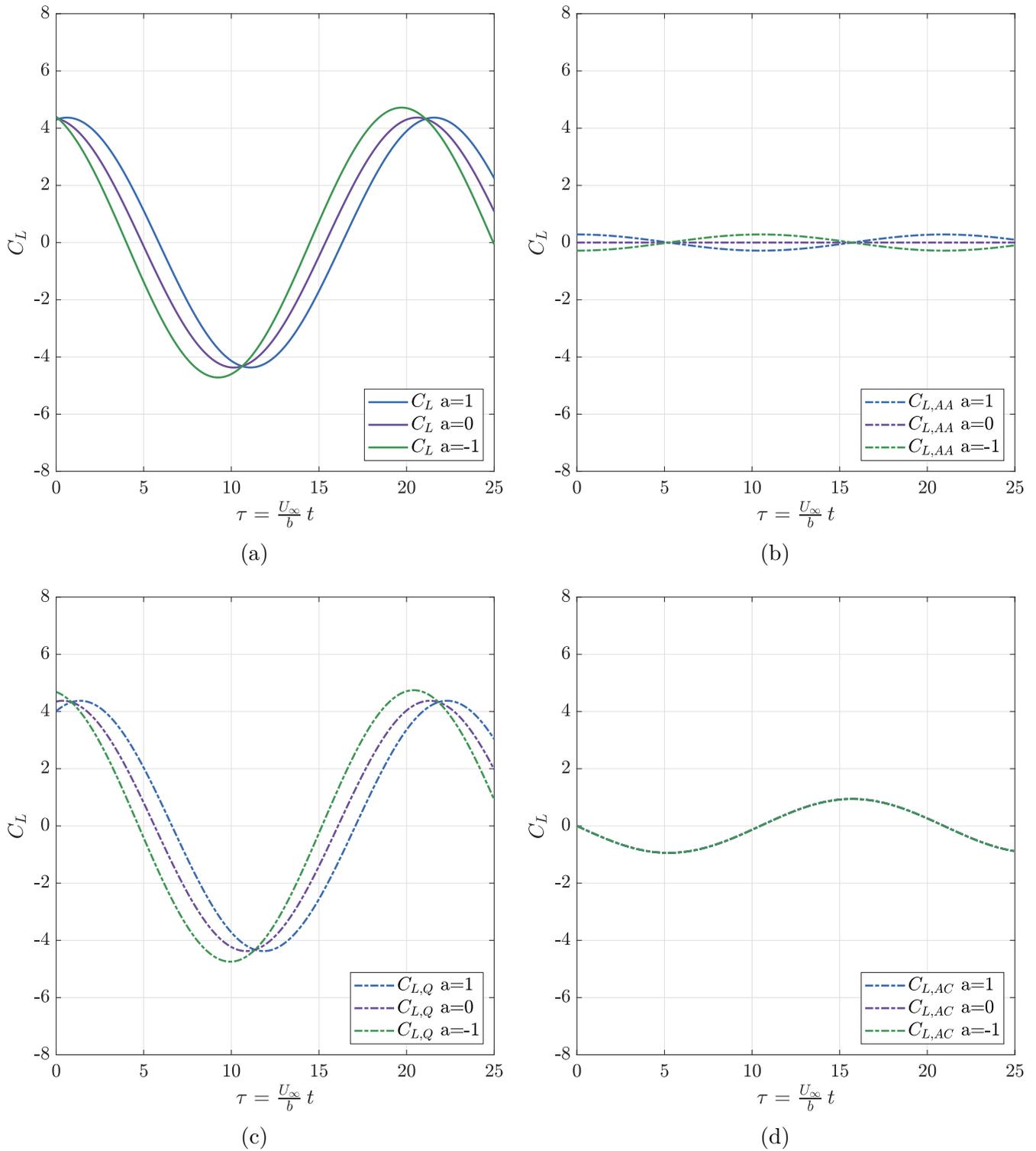


Figura 5.6: Variación de los términos  $C_L$  con  $\alpha$  según el punto de giro para  $\kappa = 0.3$

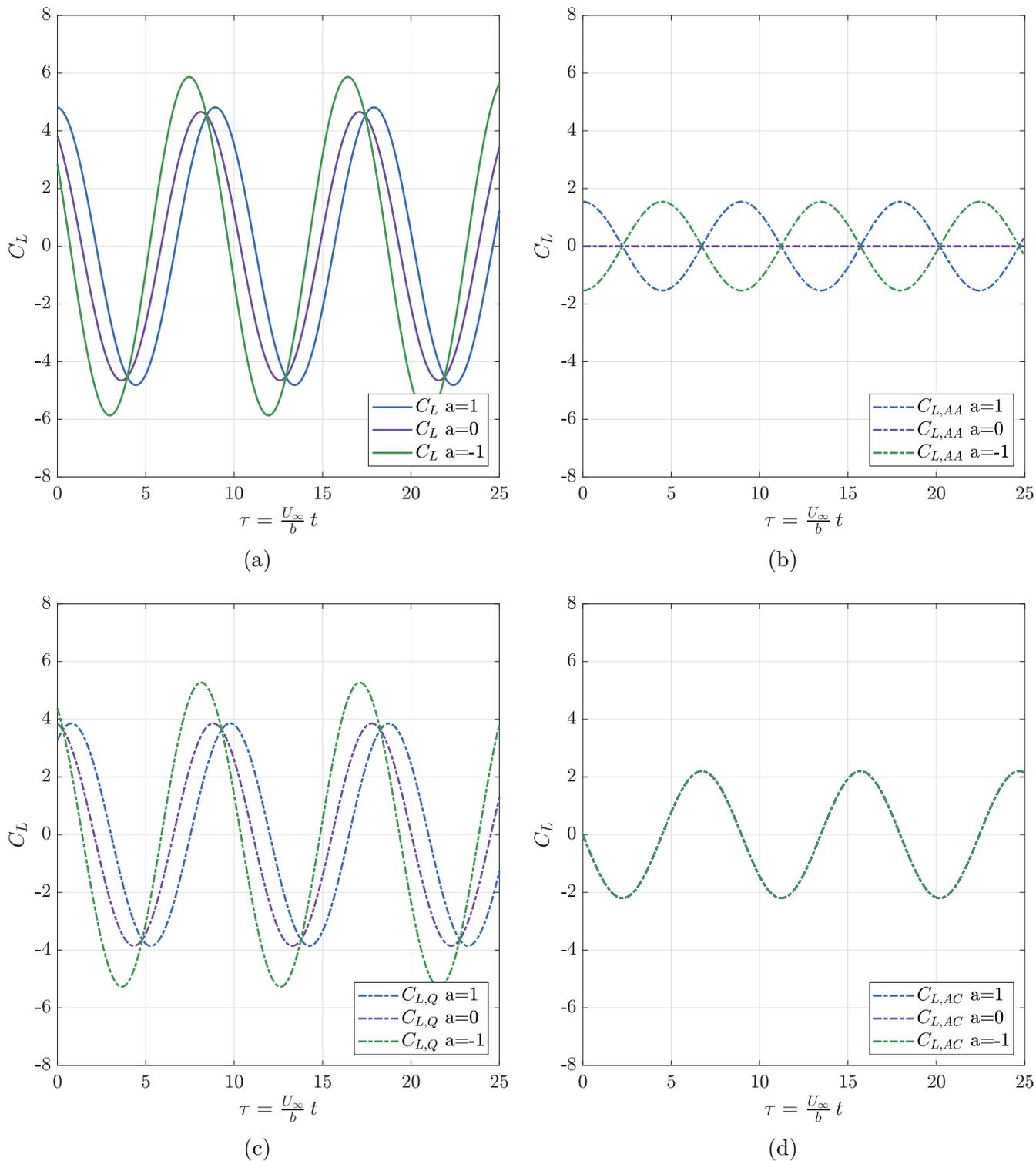


Figura 5.7: Variación de los términos  $C_L$  con  $\alpha$  según el punto de giro para  $\kappa = 0.7$

En el supuesto de que el giro se realice respecto del borde de ataque  $a = 1$ , la solución para bajas frecuencias resulta similar a la obtenida para un giro a partir del punto medio excepto por el desfase introducido por el término  $C_{L,AA}$  que ahora no es nulo. No obstante, a medida que se incrementa la frecuencia reducida tanto la amplitud como el desfase quedan modificados y la solución deja de asemejarse a la de un perfil girando respecto del punto medio.

De igual manera, es de interés señalar que mientras que los términos  $C_{L,AA}$  y  $C_{L,Q}$  varían según la coordenada de giro, aquel que representa la aceleración de Coriolis permanece invariante como se muestra en (d) al depender únicamente de la frecuencia reducida. Asimismo,  $C_{L,AA}$  se desfasa un valor  $\pi$  en el caso de trabajar con  $a = 1$  o  $a = -1$ , hecho que repercute en la amplitud y desfase global.

### Comparación de la solución analítica con la estacionaria:

Resulta conveniente plantear la comparativa entre la respuesta en sustentación del perfil al considerar efectos no-estacionarios y en aquella situación en la cual se desprecian. Todo ello en vista de valorar el error cometido al trabajar con soluciones estacionarias. Con respecto a las dos expresiones a emplear, se presentan a continuación:

$$C_{L,a}(\tau) = \pi a \kappa^2 \alpha_o e^{i\kappa\tau} + 2\pi \mathcal{C}(\kappa) \alpha_o e^{i\kappa\tau} \left[ 1 + \frac{i\kappa}{2} - i\kappa a \right] + \pi i \kappa \alpha_o e^{i\kappa\tau} \quad (5.20)$$

$$C_{L,e}(\tau) = 2\pi \alpha(\tau) = 2\pi \alpha_o e^{i\kappa\tau}$$

Destaca la evidente diferencia entre ambas expresiones, donde la primera de ellas designa la solución analítica y la segunda aquella estacionaria. Por un lado, la analítica modela tanto los fenómenos de la aerodinámica no-estacionaria como aquellos inducidos por la estela. Sin embargo, la solución estacionaria no los tiene en cuenta y resalta por su simpleza. En esta comparación reside una gran importancia, ya que, comúnmente el problema de un perfil oscilando tiende a estudiarse primeramente desde un matiz estacionaria, cuando este suceso puede inducir importantes errores si no se tiene en consideración los efectos no-estacionarios.

En la figura 5.8 puede observarse la disparidad entre sendas soluciones incluso para el caso de bajas frecuencias reducidas. No obstante, en el caso límite para  $\kappa \ll 1$  ambas soluciones tienden a aproximarse pudiendo aceptarse que el error inducido por la solución estacionaria es asumible. Al tratar problemas con frecuencias reducidas elevadas, los efectos no-estacionarios y de estela no deben obviarse como queda recogido en (b), dado que las diferencias tanto en amplitud como en desfase son notables.

Los resultados han sido obtenidos para  $\alpha_o = 1$  rad y  $a = 0$ , quedando patente que la solución estacionaria siempre brinda aquel valor de la pendiente de sustentación igual a  $2\pi$  en los puntos de máxima amplitud y desfase nulo con respecto del movimiento. Al contrario que la solución analítica debido a que el flujo no tiene tiempo a adaptarse por los fenómenos oscilatorios y no estacionarios.

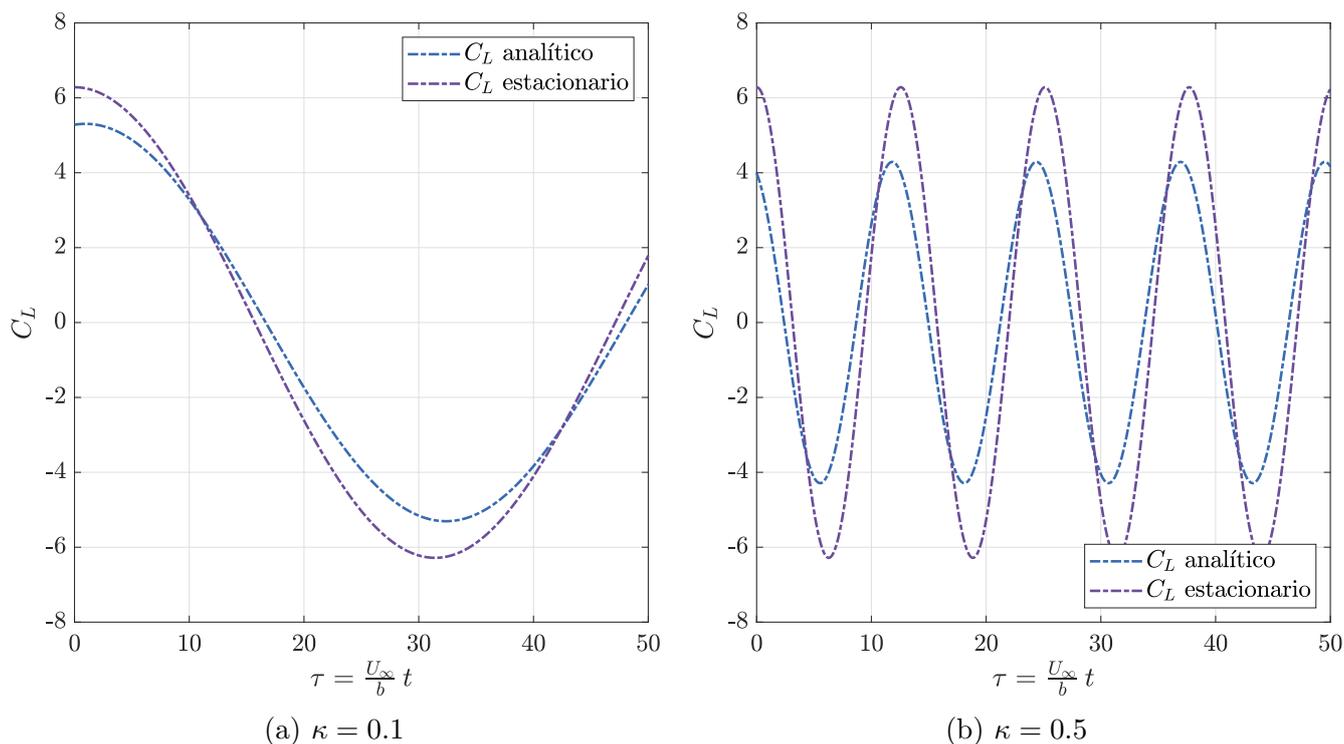


Figura 5.8: Solución analítica y estacionaria para perfil oscilando en giro

### Comparación de la solución analítica con la numérica:

En vista de comparar la solución analítica con la numérica debe realizarse un valoración sobre la influencia tanto del número de paneles en el perfil empleados por el esquema numérico como de la longitud de los paneles en la estela, la cual influye en la discretización temporal.

Con respecto al número de paneles en el perfil, si el objetivo es el de replicar la distribución del coeficiente de presiones debe aumentarse su número. Así pues, la figura 5.9 recoge como varía la solución numérica no-estacionaria en comparación con la analítica a medida que se incrementa el número de paneles en el perfil. Para pocos paneles, la aproximación durante los instante iniciales no resulta precisa. De hecho, incluso incrementando el número de paneles no se logra replicar correctamente el fenómeno ni en amplitud ni en desfase. Este hecho se explica dado que en el esquema numérico debe alcanzarse un determinado tiempo adimensional a partir del cual el flujo o la solución se considera ya desarrollada.

En líneas generales, y para bajas frecuencias reducidas, se hace patente que conforme aumenta el número de paneles se mejora la aproximación a la solución analítica, la cual incluso es bastante precisa para un único panel en el perfil (a). Por el contrario, para elevadas frecuencias no debe emplearse un bajo número de paneles en el perfil dado que se inducen elevados errores en amplitud como se muestra en (b).

Por otro lado, la longitud de los paneles en la estela afecta a la discretización temporal del esquema numérico, es decir, cada cuanto se produce la evaluación y desprendimiento de un nuevo torbellino. Es por ello que conforme se incrementa el tamaño del mismo se inducen mayores errores en la aproximación tanto de la amplitud como del desfase, obviando aquel período inicial en el cual el esquema aún no ofrece soluciones válidas. De igual forma, debe comentarse que a pesar de trabajar con un valor fijo de paneles en la estela, la variación del número de los mismos repercute en dicha discretización, siendo recomendable emplear un número relativamente elevado en el caso de buscar una aproximación precisa con la solución analítica a lo largo de las oscilaciones.

Se concluye entonces que el esquema numérico es capaz de replicar la respuesta oscilatoria, en términos del coeficiente de sustentación, de un perfil oscilando en giro para valores bajos y elevados de frecuencias reducidas. Siempre que se emplee aquel número adecuado de paneles tanto en el perfil como en la estela, así como, las longitudes de los mismos que permitan aproximar correctamente el fenómeno de estudio.

Los resultados se han obtenido para un perfil oscilando a partir de su punto medio, pudiendo ser extrapoladas las conclusiones a cualquier perfil girando respecto de otro punto. Las simulaciones han sido realizadas para  $m = 2000$ ,  $\alpha = 1$  rad.

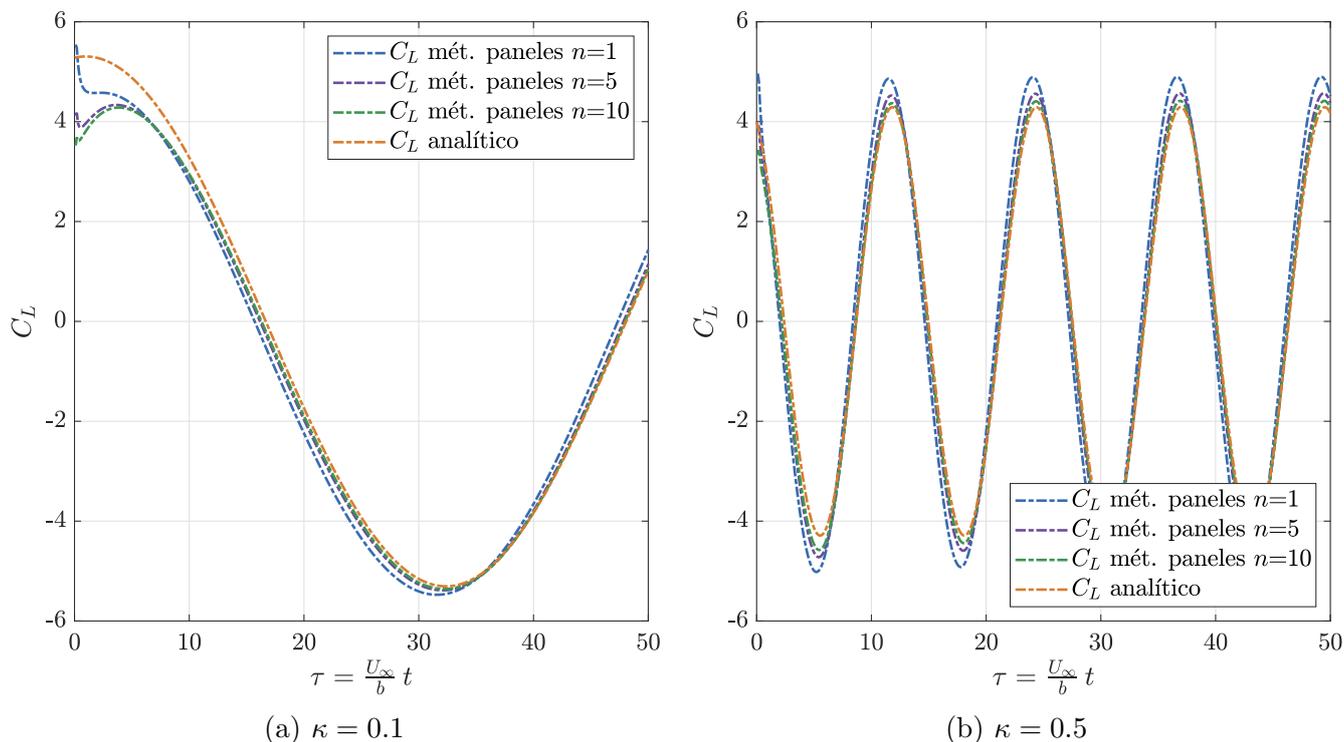


Figura 5.9: Influencia de  $n$  en  $C_L$  para perfil bajo oscilaciones en giro donde  $\Delta\xi = 0.5$

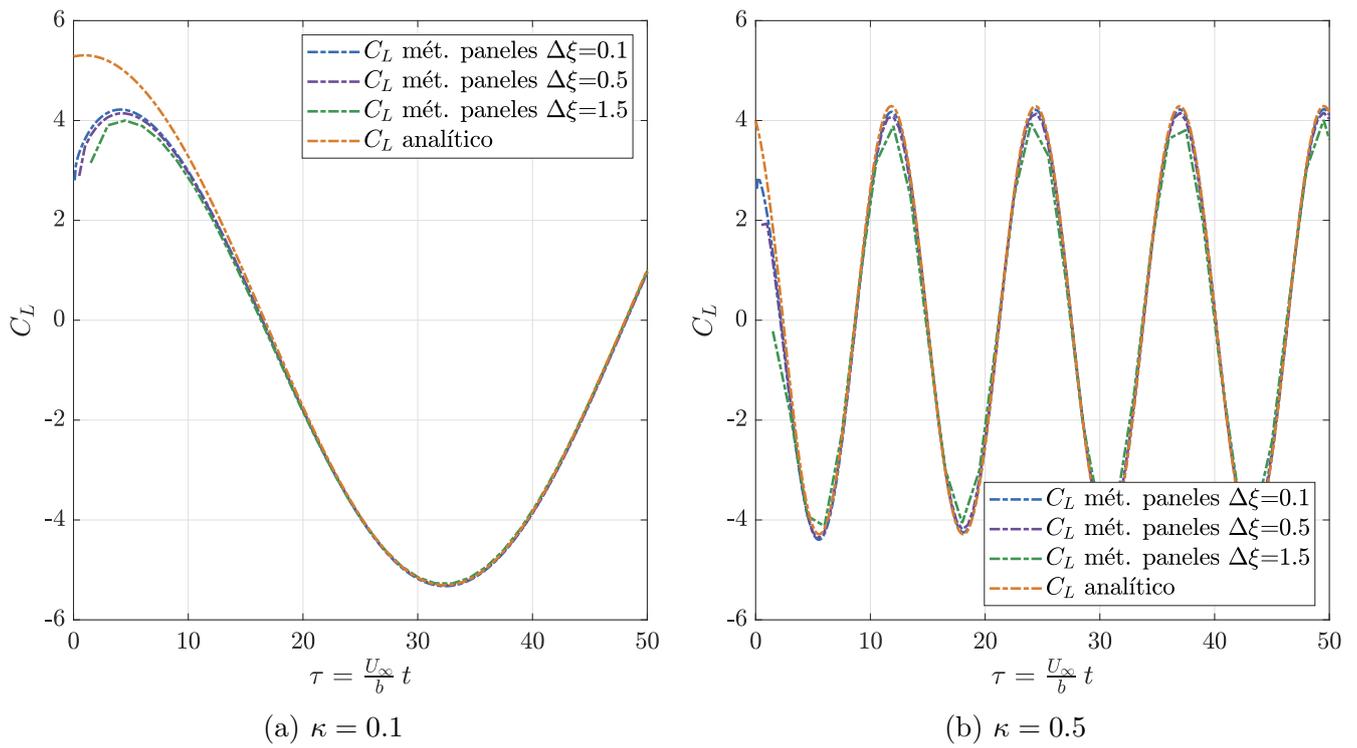


Figura 5.10: Influencia de  $\Delta\xi$  en  $C_L$  para perfil bajo oscilaciones en giro con  $n = 100$

## Cambio en el ángulo de ataque

Una vez analizado el comportamiento del perfil ante movimientos armónicos, se plantea su respuesta frente a un cambio instantáneo en el ángulo de ataque. Previo al estudio en profundidad de dicho escenario, se adelanta que esta situación origina un transitorio en el coeficiente de sustentación. El fenómeno a estudiar se conoce entonces como retardo en el establecimiento de la sustentación, encontrándose ocasionado, en este caso particular, por una variación tipo escalón en el ángulo de ataque. La figura 6.1 recoge la descripción gráfica del suceso, mientras que la expresión 6.1 define las cotas del perfil durante el movimiento.

Dicho retardo es habitual encontrarlo en situaciones donde la aeronave cabecea de una forma abrupta, introduciéndose un retraso en la respuesta debido a los efectos de adecuación del flujo a la nueva geometría.

$$z_p(x, t) = -x \alpha(t) , \quad \alpha(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \alpha_o & t > 0 \end{cases} \quad (6.1)$$

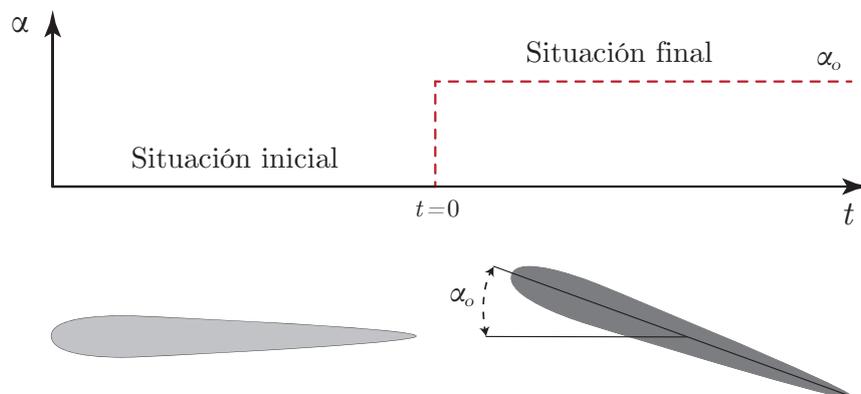


Figura 6.1: Perfil ante cambio instantáneo en el ángulo de ataque

### 6.1. Solución analítica

El cambio en el ángulo de ataque instantáneo tiene lugar cuando el perfil penetra o se induce un campo de velocidades verticales de manera repentina, siendo este problema resuelto por medio de lo que se conoce como función de Wagner. Cabe realizar una distinción con respecto a la respuesta del perfil ante una ráfaga discreta, dado que aunque el comportamiento sea similar, el fenómeno físico que lo desencadena y el tratamiento empleado resulta diferente.

La función de Wagner se caracteriza por depender del tiempo, aproximándose a la unidad a medida que el tiempo tiende a infinito. Dado que la pendiente de la curva de sustentación se asume igual a  $2\pi$  para un perfil que recibe el tratamiento de placa plana, la influencia sobre el resultado de la función de Wagner hace que para valores temporales elevados, el coeficiente de sustentación presente el aspecto de  $C_L = 2\pi \alpha_o$  y la solución tienda a aquella estacionaria. Asumiendo como expresión válida de la función de Wagner aquella expuesta en la Ec. (6.4), su evolución queda recogida en la siguiente figura:

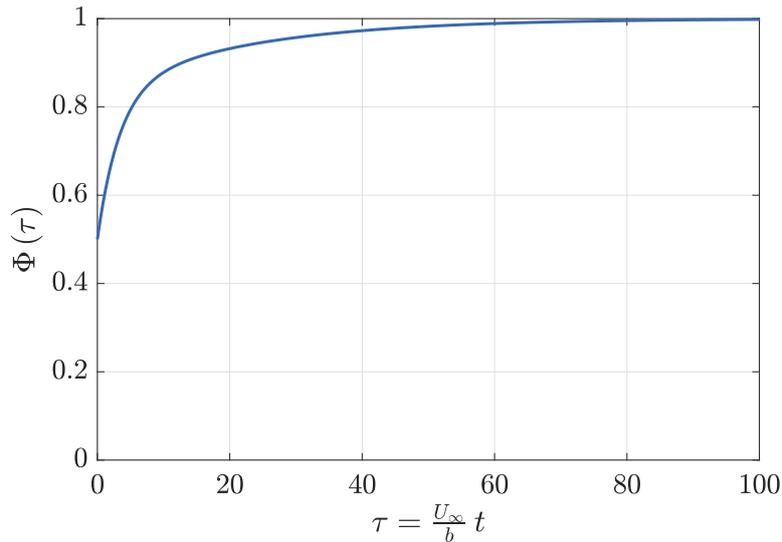


Figura 6.2: Función de Wagner evaluada hasta  $\tau = 100$

Afrontando el cálculo de la solución analítica, en el caso de que el perfil sufra un cambio repentino en el ángulo de ataque se produce una variación de sustentación que deriva en la alteración del susodicho coeficiente:

$$\Delta C_L(t) = \frac{\Delta L(t)}{\frac{1}{2} \rho_\infty U_\infty^2 2b} = C_{L\alpha} \Delta\alpha \Phi(t) \quad (6.2)$$

donde  $\Phi(t)$  se corresponde con la función de Wagner, la cual admite la aproximación mostrada en la Ec. (6.3).

$$\Phi(t) = 1 - 0.165 e^{-0.045t/\tau_r} - 0.335 e^{-0.3t/\tau_r} \quad (6.3)$$

En la ecuación anterior, el tiempo adimensional empleado responde directamente a  $T_r = \frac{c}{2U_\infty}$ , que resulta equivalente a  $T_r = b/U_\infty$ , pudiendo expresarse la función de Wagner en términos del tiempo adimensional de la forma siguiente:

$$\Phi(\tau) = 1 - 0.165 e^{-0.045\tau} - 0.335 e^{-0.3\tau} \quad (6.4)$$

En relación al desarrollo realizado, se asume una variación del ángulo de ataque independiente del tiempo  $\Delta\alpha = \alpha_o$  y una pendiente de la curva de sustentación  $C_{L\alpha} = 2\pi$  al trabajar con un modelo de placa plana. La solución analítica se alcanza sustituyendo directamente dichos valores en la Ec. (6.2) para obtener finalmente:

$$\Delta C_L(\tau) = \frac{\Delta L(\tau)}{\frac{1}{2}\rho_\infty U_\infty^2 2b} = C_{L\alpha} \Delta\alpha \Phi(\tau) \quad (6.5)$$

## 6.2. Solución numérica

La aproximación numérica es calculada empleando el método de los paneles no-estacionario, el cual ha sido introducido y tratado a lo largo del capítulo 3. La variable de entrada del esquema resulta ser la función  $w_a(x_{Ci}, t)$ , que admite un desarrollo según la Ec. (6.6) considerando la expresión conocida de  $z_p(x, t)$  que se recoge en la Ec. (6.1).

$$w_a(x_{Ci}, t) \equiv \left[ \frac{\partial z_p}{\partial t} + U_\infty \frac{\partial z_p}{\partial x} \right]_{x=x_{Ci}} \quad (6.6)$$

Empleando variables adimensionales, la geometría del perfil responde a un cambio en las cotas, las cuales pasan a mostrar una dependencia proporcional directa a la coordenada  $\xi$  y al ángulo de ataque  $\alpha$ . No obstante, es preciso aclarar que al encontrarse en el campo de pequeñas perturbaciones, la función tangente, con la cual se aproxima inicialmente la variación de  $z$ , se establece directamente como el propio ángulo.

$$z_p(\xi, \tau) = -\xi b \alpha(\tau) \quad (6.7)$$

Desarrollando aquellos términos necesarios para alcanzar la expresión de  $w_a(x, t)$  en función de los parámetros adimensionales  $\xi$  y  $\tau$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial z_p}{\partial t} &= \frac{\partial z_p}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial t} = \frac{U_\infty}{b} \frac{\partial z_p}{\partial \tau} = -\xi U_\infty \alpha'(\tau) \\ \frac{\partial z_p}{\partial x} &= \frac{1}{b} \frac{\partial z_p}{\partial \xi} = -\alpha(\tau) \end{aligned} \quad (6.8)$$

Igualmente, la función que gobierna la variación del ángulo de ataque, y que se corresponde con la condición de un cambio brusco del mismo, viene dada por:

$$\alpha(\tau) = \begin{cases} 0 & \tau < 0 \\ \alpha_o & \tau > 0 \end{cases} \quad (6.9)$$

De manera que entrando en la Ec. (6.6) con las ecuaciones (6.8) y (6.9) se alcanza:

$$w_a(\xi_{Ci}, \tau) = -U_\infty \alpha_o \quad (6.10)$$

Por último, el esquema requiere alojar el vector adimensional que se corresponde con la geometría de la siguiente manera:

$$v(\xi_{Ci}, \tau) = \frac{w_a(\xi_{Ci}, \tau)}{U_\infty} = -\alpha_o \quad (6.11)$$

donde destaca que  $v(\xi_{Ci}, \tau)$  permanece independiente tanto de la coordenada  $\xi_{Ci}$  como del tiempo  $\tau$ , agilizando la resolución numérica.

### 6.3. Resultados

Antes de llevar a cabo la comparación entre la solución analítica y numérica, cabe realizar un estudio de sensibilidad con el objetivo de determinar aquellos valores que deben emplearse tanto para el número de paneles en el perfil  $n$  como para el número de paneles en la estela  $m$  y la longitud de los mismos  $\Delta\xi$ .

#### Estudio de sensibilidad:

Se emplea con tales fines un programa elaborado en *Matlab* encargado de llevar a cabo un análisis de la influencia inicial tanto de  $m$  como de  $\Delta\xi$ . El programa desarrollado retorna, ante una entrada fija en la longitud de los paneles de la estela  $\Delta\xi$  y para un valor de  $\alpha$  y  $n$  dados, el tiempo adimensional hasta alcanzar la convergencia en el cálculo del coeficiente de sustentación. Se asume que el proceso ha convergido cuando el error relativo entre la solución no-estacionaria, alcanzada mediante el esquema numérico, y la solución estacionaria del problema de variación instantánea de ángulo de ataque es menor al 1%. Estableciéndose que un valor de discrepancia del 1% es aceptable teniendo en cuenta los errores de numéricos o de redondeo que pueden ser inducidos durante la resolución del método.

Igualmente, y con respecto a la discretización temporal, se resuelve el problema en función de la variable tiempo adimensional  $\tau$ . El bucle empleado añade paneles en la estela a medida que evoluciona el coeficiente de sustentación, quedando dichos paneles relacionados con el tiempo adimensional a través de la expresión  $\tau = m \Delta\xi$ .

## 6. Cambio en el ángulo de ataque

Por ende, el coeficiente de sustentación se ve modificado a medida que aumenta el número de paneles evaluados hasta el punto en el cual el error se encuentra dentro del límite estipulado, presentando el parámetro  $\Delta\xi$  una gran relevancia en el resultado obtenido al ser una de las variables de entrada en el estudio realizado. El diagrama 6.3 pretende facilitar la comprensión acerca del funcionamiento del programa utilizado.

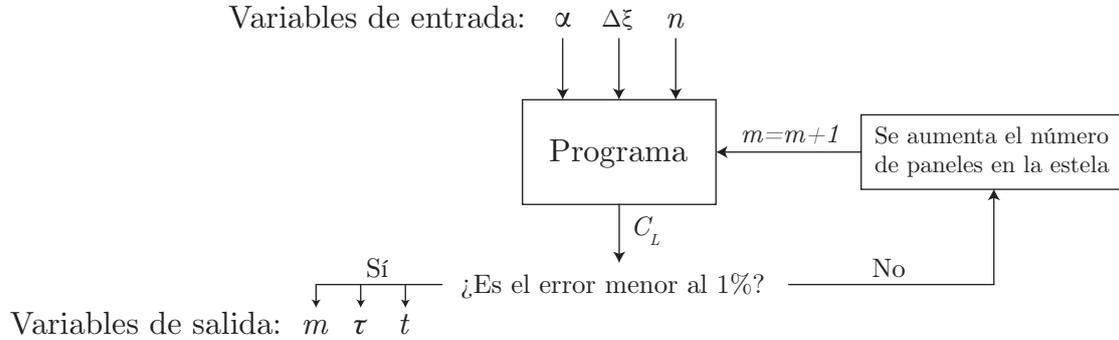


Figura 6.3: Diagrama del programa empleado para realizar el estudio de sensibilidad

Como ha sido mencionado, la finalidad del programa es ofrecer aquel número de paneles en la estela necesarios ante una entrada en la longitud de los mismos para considerar la convergencia del cálculo. La tabla 6.1 recoge los resultados para el caso particular de  $n = 100$  y  $\alpha_o = 1$  rad:

$\Delta\xi$	$m_{conv}$	$\tau_{conv}$	$C_L$	$t_{conv}$
0.05	2181	109.05	6.2204	1.2471
0.1	1091	109.1	6.2204	0.2824
0.3	365	109.5	6.2205	0.0795
0.5	219	109.5	6.2204	0.0478
0.7	157	109.9	6.2205	0.0397
1	110	110	6.2205	0.0396
1.3	85	110.5	6.2206	0.0368
1.5	74	111	6.2209	0.0335
1.7	65	110.5	6.2205	0.0335
2	56	112	6.2213	0.0331
3	38	114	6.2220	0.0346

Tabla 6.1: Resultados obtenidos ante varias entradas de  $\Delta\xi$

Los parámetros  $m_{conv}$  y  $\tau_{conv}$  denotan las mismas magnitudes con las que se ha trabajado habitualmente pero ahora en relación al valor presentado una vez alcanzada la convergencia de la solución. El único parámetro nuevo resulta ser  $t_{conv}$ , el cual permite evaluar el gasto computacional al quedar definido como el tiempo empleado por el bucle para resolver el problema. Dado que las mediciones de  $t_{conv}$  muestran cierta desviación en cada ejecución del programa, se opta por tomar varios valores y llevar a cabo una ponderación.

Primeramente, puede observarse a través de la figura 6.4 que a medida que aumenta la longitud de los paneles es necesario utilizar una menor cantidad de ellos debido a la relación entre sendas magnitudes. De manera directa, se concluye que dado que para alcanzar la convergencia se debe evaluar el problema hasta un tiempo adimensional determinado, equivalente a modelar una cierta longitud de estela, el valor necesario de dicho parámetro puede ser alcanzado empleando pocos paneles de gran tamaño o muchos paneles de reducida longitud. Es por ello que pueden darse varias combinaciones de número de paneles y de longitud de los mismos que brinden el mismo tiempo adimensional.

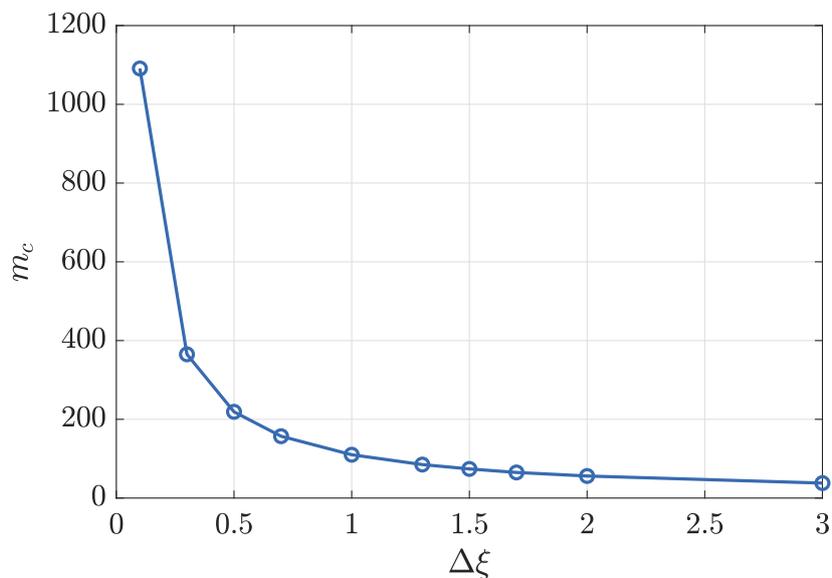


Figura 6.4: Relación entre la longitud y número de paneles hasta la convergencia

Por otro lado, y con respecto al mencionado tiempo adimensional, la convergencia se alcanza para valores cercanos a  $\tau_{conv} \approx 110$ , siendo el valor de este tiempo adimensional independiente tanto del ángulo de ataque con el cual se afronta el problema como del número de paneles en el perfil empleados. El hecho de que el tiempo adimensional sea independiente del caso resuelto ofrece una idea sobre aquella cantidad de estela que debe modelarse para alcanzar el comportamiento ofrecido por la solución estacionaria.

## 6. Cambio en el ángulo de ataque

Analizando la sensibilidad de  $\tau_{conv}$ , la figura 6.5 muestra su variación respecto del número de paneles utilizados en la estela y de la longitud de los mismos. Queda patente que a medida que aumenta la longitud de los paneles, la discretización en el tiempo reduce la precisión al emplear un mayor paso temporal. Este hecho deriva directamente en que  $\tau_{conv}$  crezca para altos valores de  $\Delta\xi$ , ya que transcurre una mayor cantidad de tiempo entre evaluaciones y se incrementa así la distancia simulada de estela.

Tratando la influencia del número de paneles en la estela sobre  $\tau_{conv}$ , cuantos más se empleen mayor precisión presenta el método numérico. Suponiendo un comportamiento contrario al descrito cuando aumentaba la longitud de los paneles. De hecho, para una cantidad elevada de paneles en la estela se observa como se acota el valor del tiempo adimensional de convergencia alrededor del valor mencionado previamente y cercano a  $\tau \approx 110$ .

El hecho de emplear paneles de menor longitud en la estela repercute en que sea necesario recurrir a un mayor número, siendo de suma importancia considerar la influencia del gasto computacional. La figura 6.6 presenta como queda modificado el tiempo de cálculo, donde puede observarse que incrementar el número de paneles supone una mayor penalización en las iteraciones a realizar para alcanzar la solución, creciendo el gasto computacional. Por el contrario, a mayor tamaño de panel, menos trabaja el programa al reducir el tamaño del bucle de simulación de la estela.

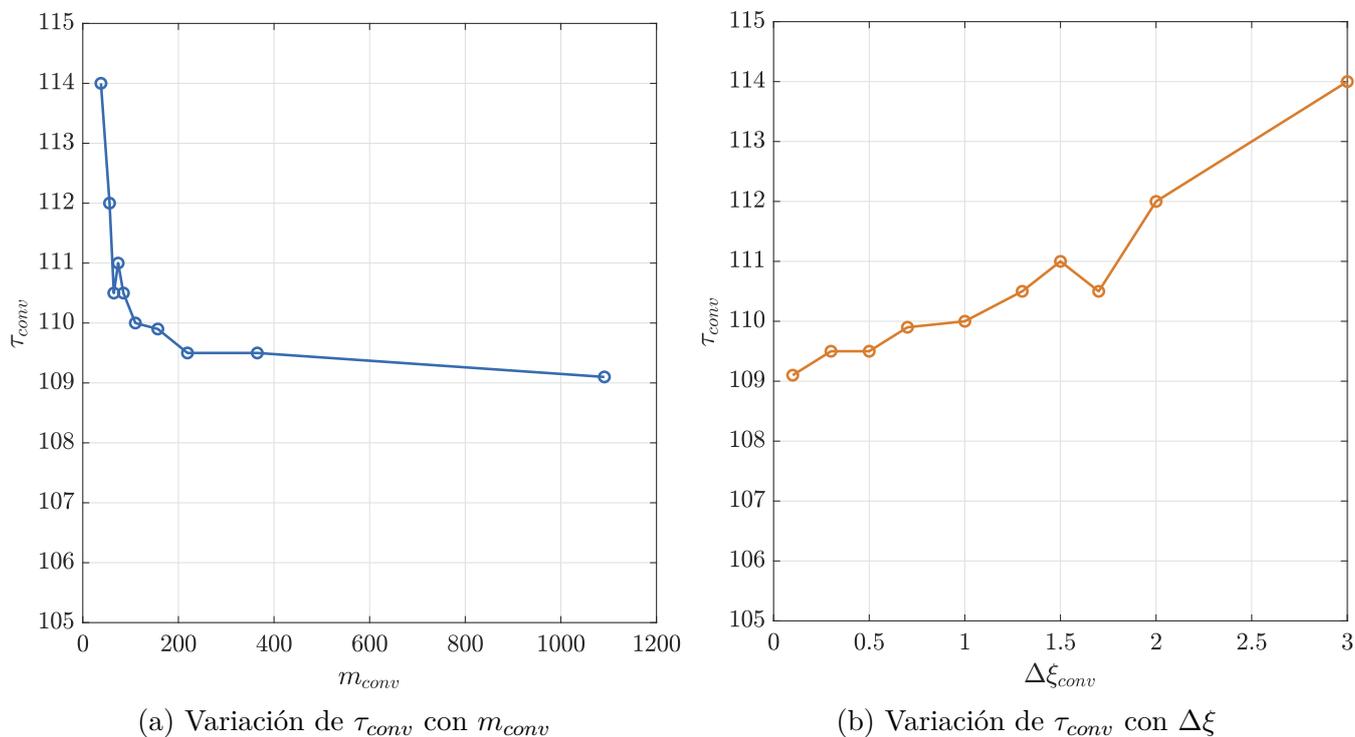


Figura 6.5: Estudio de sensibilidad del tiempo adimensional

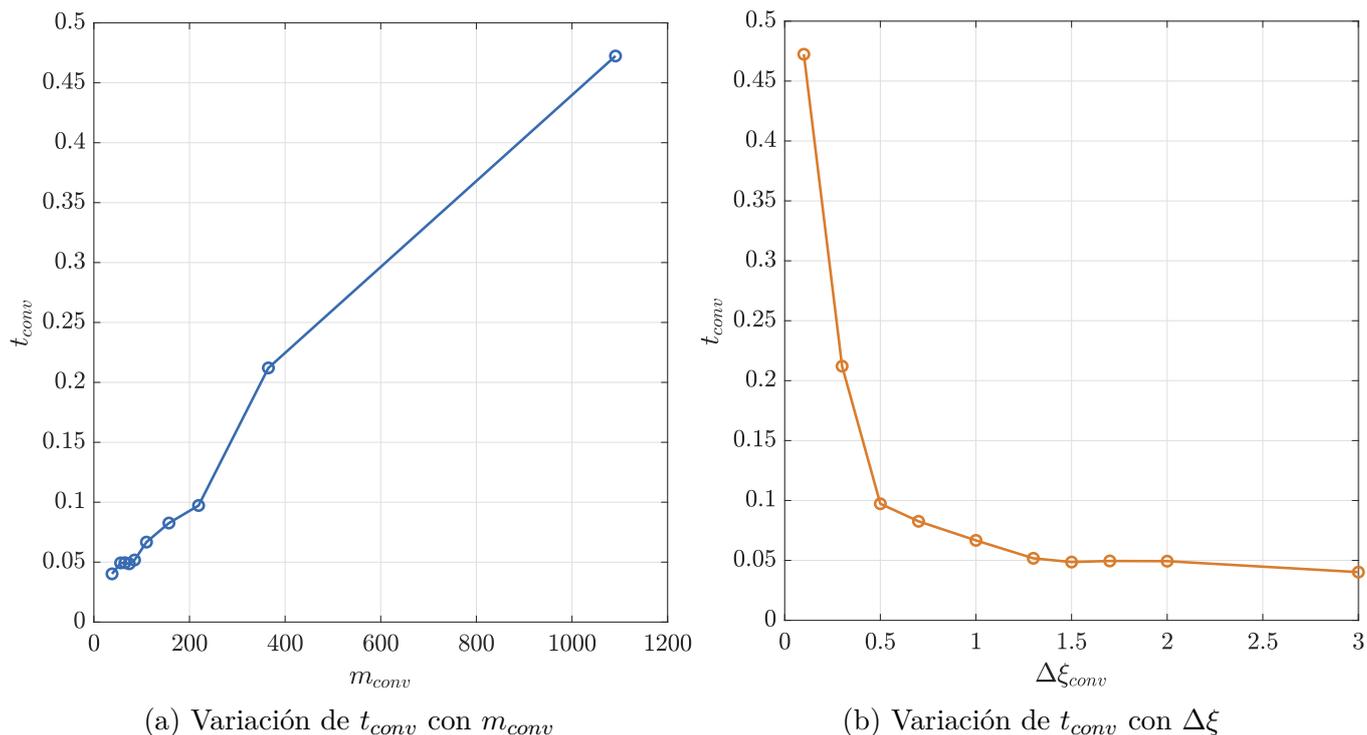


Figura 6.6: Estudio de sensibilidad del gasto computacional

Todo este planteamiento y estudio depende de los objetivos del usuario. En el caso de que se desee un bajo gasto computacional y rapidez en la resolución, se deben usar longitudes de paneles en el rango  $1 \leq \Delta\xi \leq 2$  que además garanticen una buena aproximación al fenómeno. Sin embargo, en el caso de buscar simular con elevada precisión el retardo de la sustentación que sufre el perfil al estar sometido a un cambio brusco en el ángulo de ataque, se recomienda emplear paneles relativamente pequeños donde la discretización temporal sea mucho mayor. Para un rango de tamaño de paneles entre  $0.5 \leq \Delta\xi \leq 1$  se obtienen resultados que se asemejan en gran medida a la solución analítica como se verá posteriormente.

Finalmente, y en relación al número de paneles en el perfil  $n$  que se deben situar, la influencia de los mismos es significativa en la aproximación a la solución analítica durante los instantes iniciales del movimiento. De hecho, cuantos más paneles se utilicen, con mayor precisión se puede aproximar el fenómeno que queda recogido por la función de Wagner y que dictamina que en el instante inicial la sustentación muestra la mitad de su valor final. A través de la figura 6.7 se muestra el comportamiento de la solución para la situación de  $n = \{1, 5, 100\}$ .

No cabe obviar que el número de paneles en el perfil repercute directamente en la representación de la distribución del coeficiente de presiones sobre el mismo, de manera que en el caso de emplear un número bajo resulta una representación bastante pobre comparada con aquella alcanzada con un gran número de paneles.

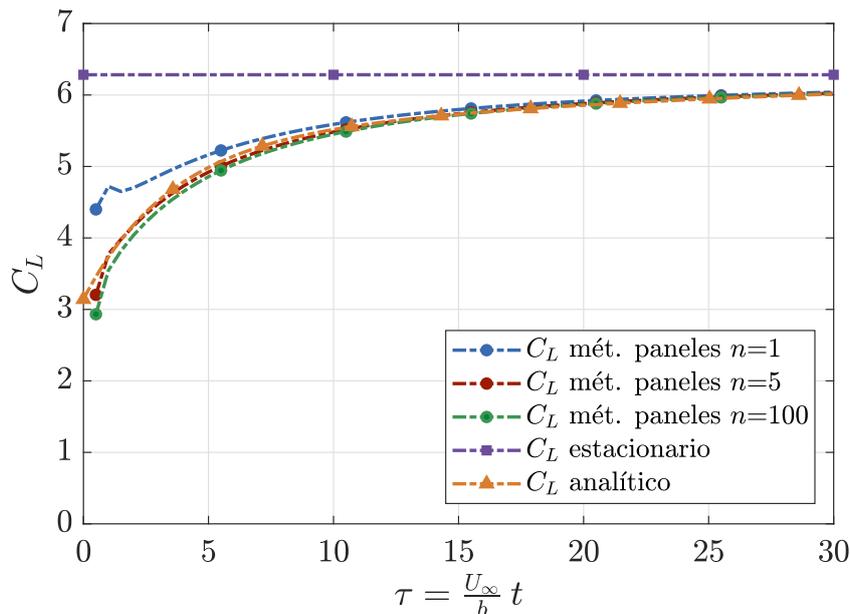


Figura 6.7: Evolución de  $C_L$  durante los instantes iniciales para  $m = 219$ ,  $\Delta\xi = 0.5$  y  $\alpha_o = 1$  rad

Atendiendo a las conclusiones del estudio, puede decirse que el principal procedimiento para disminuir el gasto computacional es reducir el número de paneles en la estela, incrementando su tamaño y recordando siempre alcanzar aquel valor del tiempo adimensional que garantice la convergencia del cálculo en el menor número de iteraciones. No obstante, el hecho de emplear paneles de mayor tamaño induce un error a la hora de buscar aproximarse a la solución analítica debido a la gran discretización que se realiza en el tiempo. Debe llegarse entonces a un compromiso para poder simular el fenómeno de retardo en la sustentación sin perder gran precisión y empleando el mínimo gasto computacional posible, proponiéndose como rangos válidos aquellos presentados a lo largo de esta sección.

### Comparación con la solución analítica:

Tras haber sido evaluada la influencia de los valores de entrada en el esquema, se opta por utilizar los siguientes parámetros:

$$n = 100, \quad m = 250, \quad \alpha_o = 1 \text{ rad}, \quad \Delta\xi = 0.5 \quad (6.12)$$

Se espera alcanzar la convergencia con un error menor al 1% entre la solución numérica no estacionaria y la estacionaria, al igual que el tamaño de los paneles de la estela busca una buena aproximación con la solución analítica.

Puede decirse que el valor del ángulo de ataque influye directamente en el coeficiente de sustentación obtenido al acabar la etapa transitoria, pero no en el tiempo de convergencia de la solución. Además, se emplea el valor de 1 radián como ángulo de ataque dado que el resultado se prevé igual al de aquella pendiente de la curva de sustentación característica de una placa plana.

En la figura 6.8 puede observarse el estudio planteado para un perfil que sufre un cambio instantáneo en el ángulo de ataque desde cero hasta un radián. Con respecto a la solución numérica no-estacionaria, estacionaria y analítica, cabe destacar que todas ellas alcanzan el valor esperado de  $C_L \approx 2\pi$ . De igual forma, la etapa del transitorio de la solución no-estacionaria numérica guarda una elevada semejanza con la ofrecida por la solución analítica debido a los valores empleados de  $\Delta\xi$  y  $m$ . Por el contrario, si se representa la solución para tamaños mayores de los paneles en la estela, puede verse que la similitud entre sendas curvas empieza a ser dispar como recoge la figura 6.9.

Además, durante la etapa inicial y para un valor nulo del tiempo, la solución analítica adquiere el valor de la mitad de la sustentación final debido a la aproximación empleada de la función de Wagner. Fenómeno que no logra replicar con exactitud la solución no-estacionaria a pesar de incorporar un gran número de paneles en el perfil.

Una vez finalizado el transitorio, queda patente que la curva de la solución analítica se aproxima a la estacionaria debido a la propia definición de la función de Wagner, la cual tiende a la unidad para tiempos elevados, mientras que la solución numérica presenta un error relativo del 1% respecto a aquella esperada.

Por todo lo expuesto anteriormente, puede afirmarse que el esquema numérico empleado a través del método de los paneles en la línea media es capaz de replicar el retardo en la sustentación experimentado por un perfil ante un cambio instantáneo en el ángulo de ataque, siempre que se trabaje dentro de un rango razonable tanto de número de paneles en la estela como de longitud de los mismos.

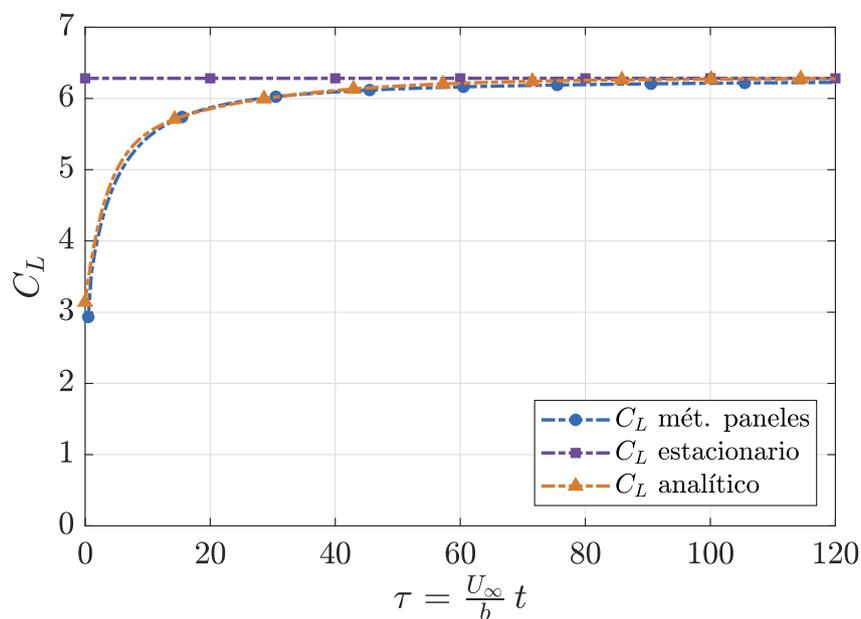
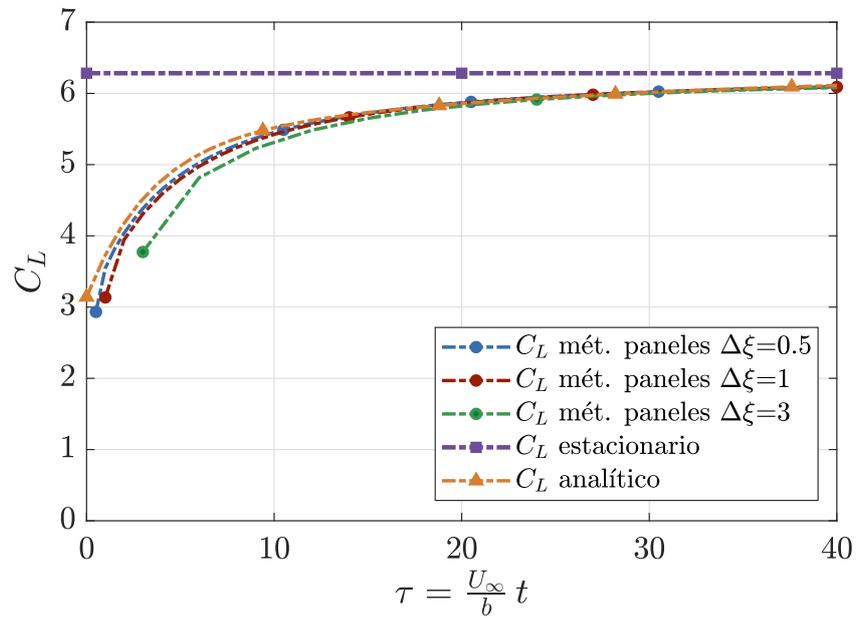
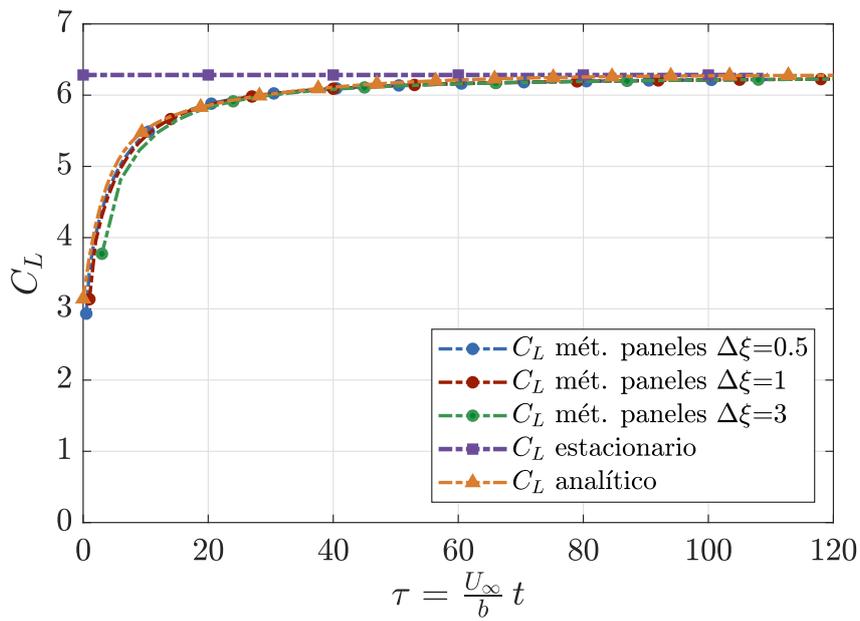


Figura 6.8: Evolución de la sustentación para los tres métodos implementados



(a) Detalle de los instantes iniciales



(b) Evolución completa

Figura 6.9: Variación de la sustentación para varios valores de  $\Delta\xi$

---

## Comportamiento ante ráfaga

Tras estudiar la respuesta de un perfil frente un cambio instantáneo en el ángulo de ataque, resulta de gran interés presentar aquel escenario en el cual el perfil se somete, de manera progresiva, al efecto de una ráfaga transversal. Existe una determinada semejanza con el capítulo anterior, de hecho, la respuesta se espera en cierta medida parecida. Radicando la principal diferencia en que para un cambio instantáneo en el ángulo de ataque, el perfil irrumpe de manera directa en el campo de velocidades, en cambio, para el modelado de una ráfaga el perfil se adentra de forma progresiva hasta encontrarse totalmente inmerso como recoge la figura 7.1.

Es por ello que ahora no se considera una variación directa en el ángulo de ataque, sino de aquella velocidad vertical que es inducida por la ráfaga a través de una función escalón que se desplaza en el tiempo. No obstante, cabe mencionar que la ráfaga tipo escalón no es representativa de la realidad debido a que normalmente este tipo de fenómenos necesitan un tiempo hasta alcanzar su valor máximo, así como exhiben un gradiente en su entrada. De manera que el presente capítulo únicamente contempla el modelado de la respuesta ante una ráfaga escalón. Por ello, en el caso de querer ampliar conocimientos acerca de los efectos de otro tipo de ráfagas puede consultarse [2].

### 7.1. Solución analítica

La solución analítica se plantea para una ráfaga tipo escalón. Se pretende entonces estudiar aquel fenómeno el cual establece que la fuerza de sustentación no aparece instantáneamente, sino que crece a medida que el perfil penetra en la ráfaga debido a los efectos no-estacionarios.

Se asume primeramente que la ráfaga aún no ha actuado, por lo que la variación del coeficiente de sustentación en el instante  $t = 0$  resulta nula. Por el contrario, cuando el perfil se encuentra completamente inmerso en la ráfaga, la expresión de la

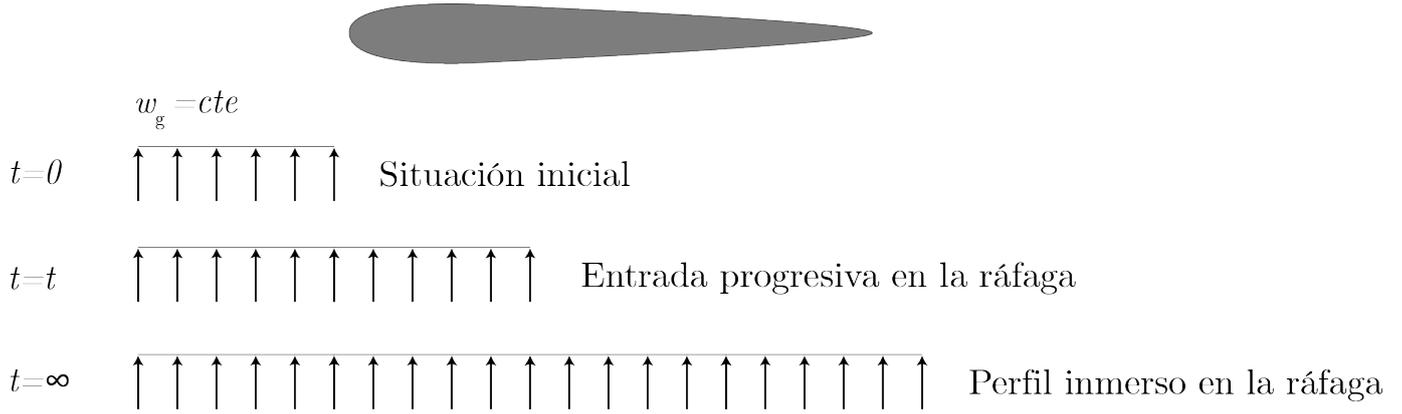


Figura 7.1: Avance en el tiempo de la ráfaga ante un perfil

variación del coeficiente de sustentación responde a  $\Delta C_L(\infty) = C_{L\alpha} w_g / U_\infty$ . Siendo  $w_g / U_\infty$  el ángulo de ataque inducido por el campo de velocidades. Dado el interés por conocer la evolución temporal del coeficiente de sustentación, se recurre a la función de Küssner, verificándose que el incremento de sustentación de un perfil ante una ráfaga tipo escalón de intensidad constante  $w_g$  viene determinado por:

$$\Delta C_L(t) = C_{L\alpha} \frac{w_g}{U_\infty} \Psi(t) \tag{7.1}$$

Al igual que ocurría con la función de Wagner, sendas funciones se caracterizan por mostrar complicadas expresiones integrales que proporcionan la respuesta ante el efecto de una ráfaga o de un cambio en el ángulo de ataque. Es por ello que se decide emplear la aproximación para la función de Küssner presentada a continuación:

$$\Psi(t) = 1 - 0.5 e^{-0.13t/T_r} - 0.5 e^{-t/T_r} \tag{7.2}$$

donde debe desarrollarse la ecuación anterior para expresarla en términos de aquel tiempo adimensional a partir del cual se plantean las soluciones. Reemplazando y recordando que  $T_r = b/U_\infty$ , puede alcanzarse la expresión para la función de Küssner dependiente ahora de  $\tau$ .

$$\Psi(\tau) = 1 - 0.5 e^{-0.13\tau} - 0.5 e^{-\tau} \tag{7.3}$$

La figura 7.2 representa la evolución de la función de Küssner. Queda patente como el valor inicial es nulo al no haber actuado aún la ráfaga. En cambio, para tiempos adimensionales cercanos a  $\tau \approx 40$  se observa como alcanza el valor de la unidad, siendo máxima su contribución y suponiendo este hecho la conclusión del periodo transitorio de la respuesta.

Comparando la evolución tanto de la función de Wagner como de Küssner se alcanzan ciertas conclusiones. Por un lado, para el caso de ángulo de ataque abrupto

## 7. Comportamiento ante ráfaga

---

era interesante observar que el perfil generaba sustentación de manera inmediata debido a la definición de la función de Wagner y siendo el valor de dicha sustentación inicial la mitad del valor estacionario. Sin embargo, para la situación de respuesta ante ráfaga escalón, el perfil no responde de manera instantánea, sino que lo hace de forma progresiva y mucho más rápida al establecerse la solución para  $\tau$  menores.

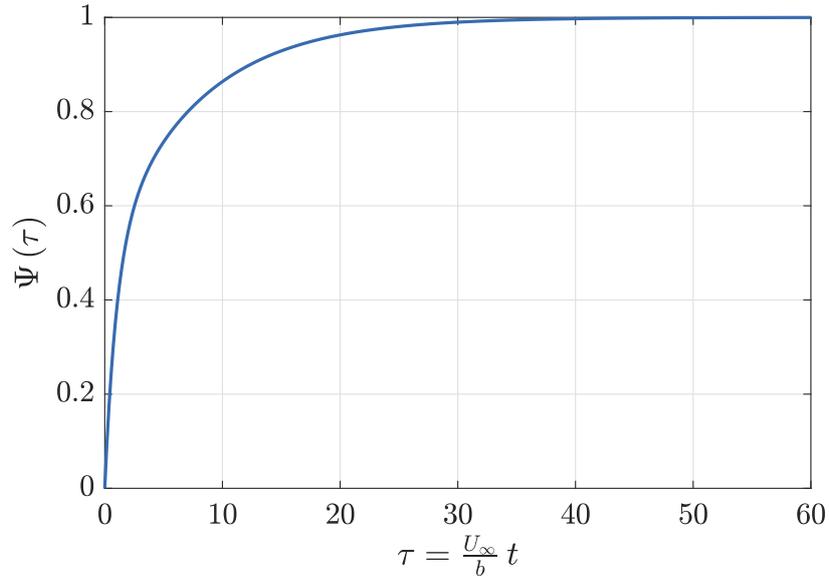


Figura 7.2: Función de Küssner evaluada hasta  $\tau = 60$

## 7.2. Solución numérica

A la hora de plantear la solución numérica, es necesario recurrir a una función escalón que se desplace en el tiempo para poder replicar el comportamiento del avance de la ráfaga. Además, debido a que la ráfaga induce un campo de velocidades verticales  $w_g(x, t)$ , esta circunstancia debe ser introducida en la condición de contorno con la finalidad de garantizar el comportamiento del perfil como línea de corriente durante el movimiento. Recuperando la expresión introducida en el planteamiento del esquema numérico y que definía la condición de contorno sobre el perfil, cabe añadirle aquella velocidad vertical inducida por la ráfaga:

$$w_g(x, t) - \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^n \frac{\Gamma_k^{(j)}}{x_{Ci} - x_{\Gamma k}} - \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{j-1} \frac{\Gamma_{wk}}{x_{Ci} - x_{w j-k+1}} - \frac{1}{2\pi} \frac{\Gamma_{wj}}{x_{Ci} - x_{w1}} \equiv w_a(x_{Ci}, j \Delta t) \quad (7.4)$$

donde el término  $w_a(x_{Ci}, j \Delta t)$  es considerado nulo al no presentar el movimiento ninguna variación geométrica de las cotas del perfil. Cabe entonces trabajar directamente con  $w_g(x, t)$  en vista de definir aquel vector de entrada al esquema numérico que garantice el cumplimiento de la condición de contorno:

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^n \frac{\Gamma_k^{(j)}}{x_{Ci} - x_{\Gamma k}} - \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{j-1} \frac{\Gamma_{wk}}{x_{Ci} - x_{w j-k+1}} - \frac{1}{2\pi} \frac{\Gamma_{wj}}{x_{Ci} - x_{w1}} = -w_g(x, t) \quad (7.5)$$

De forma que para este problema en concreto, la función  $w_g(x, t)$  emula el comportamiento de  $w_a(x_{C_i}, j \Delta t)$  en el método numérico. Como había sido mencionado previamente,  $w_g(x, t)$  se caracteriza por atender a una función escalón que se desplaza en el tiempo y con expresión:

$$w_g(x, t) = w_o \mathcal{H}(U_\infty t - x - b) \quad (7.6)$$

Trabajando en términos de las variables adimensionales:

$$w_g(\xi, \tau) = w_o \mathcal{H}(\tau - \xi - 1) \quad (7.7)$$

El valor de  $w_o$  equivale ahora al parámetro  $w_g$  empleado en el tratamiento analítico del problema dado que sendas variables definen la intensidad de la ráfaga, así como, el ángulo de ataque inducido sobre el perfil.

### 7.3. Resultados

Al igual que se realizaba para el caso del cambio instantáneo en el ángulo de ataque, antes de llevar a cabo la comparación entre resultados analíticos y numéricos es necesario plantear un estudio de sensibilidad que defina tanto el valor del número de paneles en la estela  $m$ , la longitud de los mismos  $\Delta\xi$ , y el número de paneles en el perfil  $n$ .

Una vez determinados los rangos de dichos parámetros, se procede a comparar la solución analítica del problema con la ofrecida por el esquema numérico y se evalúa la validez de la aproximación obtenida del transitorio experimentado por el coeficiente de sustentación.

#### **Estudio de sensibilidad:**

El procedimiento a emplear resulta análogo al planteado en el caso de estudio anterior. Se utiliza entonces el mismo esquema a través del cual, y partiendo tanto de una longitud dada de paneles en la estela como de un número determinado de paneles en el perfil, se añaden paneles durante cada iteración hasta que el error entre la solución analítica y numérica sea menor al 1%. En caso de querer más información acerca el programa implementado, véase la explicación ampliada proporcionada en la sección 6.3.

La tabla 7.1 recoge los resultados para el caso particular de  $n = 100$  y  $w_o = 1$ , donde los parámetros  $m_{conv}$ ,  $\tau_{conv}$  y  $t_{conv}$  representan las mismas magnitudes tratadas anteriormente pero respondiendo a su valor cuando el cálculo se considera convergido. La tendencia mostrada es que cuanto mayor es el tamaño de panel, menor número de paneles deben emplearse dado que el tiempo adimensional de convergencia se alcanza relativamente más rápido al ser paneles más grandes.

Igualmente, el valor de  $\tau_{conv} \approx 111$  es aquel para el cual se considera que la solución ha convergido. De forma que si se emplean paneles más grandes, este valor de tiempo adimensional de convergencia muestra una mayor desviación debido a la discretización temporal. Así mismo, la figura 7.3 expone como decrece el número de paneles a emplear al aumentar la longitud de los mismos, este fenómeno radica en que sendas magnitudes se encuentran relacionadas mediante el tiempo adimensional. Es por ello que para alcanzar la convergencia del cálculo pueden emplearse un gran número de paneles de reducida longitud o pocos paneles de mayor tamaño.

$\Delta\xi$	$m_{conv}$	$\tau_{conv}$	$C_L$	$t_{conv}$
0.05	2211	110.5	6.2204	1.3556
0.1	1105	110.5	6.2204	0.2855
0.3	369	110.7	6.2204	0.0681
0.5	222	111	6.2206	0.0521
0.7	159	111.3	6.2207	0.0403
1	111	111	6.2206	0.0364
1.3	86	111.8	6.2209	0.0342
1.5	75	112.5	6.2212	0.0331
1.7	66	112.2	6.2210	0.0324
2	56	112	6.2213	0.0326
3	38	114	6.2220	0.0329

Tabla 7.1: Resultados obtenidos ante varias entradas de  $\Delta\xi$

En la figura 7.4 (a) se aprecia como el tiempo de convergencia adimensional se establece entorno a  $\tau_{conv} \approx 111$  para el problema de perfil ante ráfaga, así como, permanece constante independientemente del valor de la intensidad de la misma. Puede decirse entonces que para un menor número de paneles en la estela surgen desviaciones originadas por la discretización temporal que genera que se evalúe una mayor cantidad de espacio recorrido por una partícula antes de alcanzar la convergencia. En (b) se presenta como  $\tau_{conv}$  aumenta con el tamaño del panel en la estela por dicha discretización temporal, incrementándose la desviación para valores relativamente elevados de  $\Delta\xi$ .

Atendiendo al gasto computacional del esquema implementado, figura 7.5, queda patente como a mayor número de paneles en la estela, más iteraciones debe de realizar el programa y mayor es el gasto computacional (a). No obstante, puede reducirse en el caso de emplear paneles de mayor tamaño (b) al avanzar en el tiempo con un paso mayor y reducir la carga de operaciones requeridas.

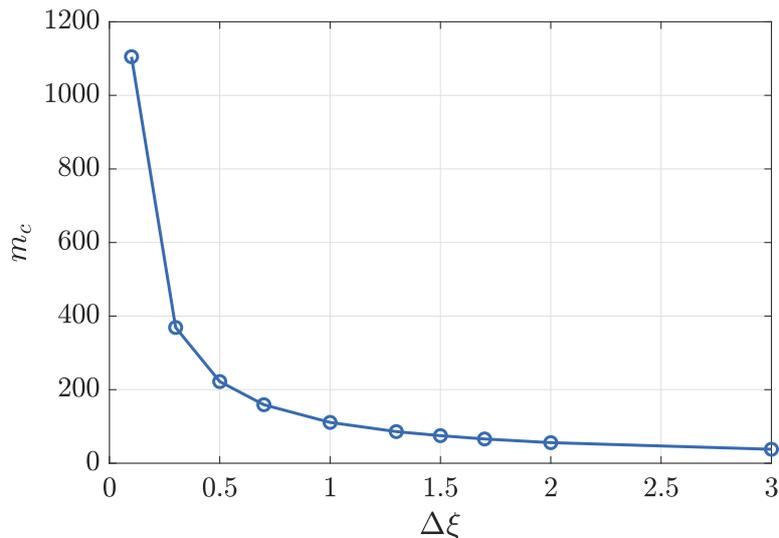
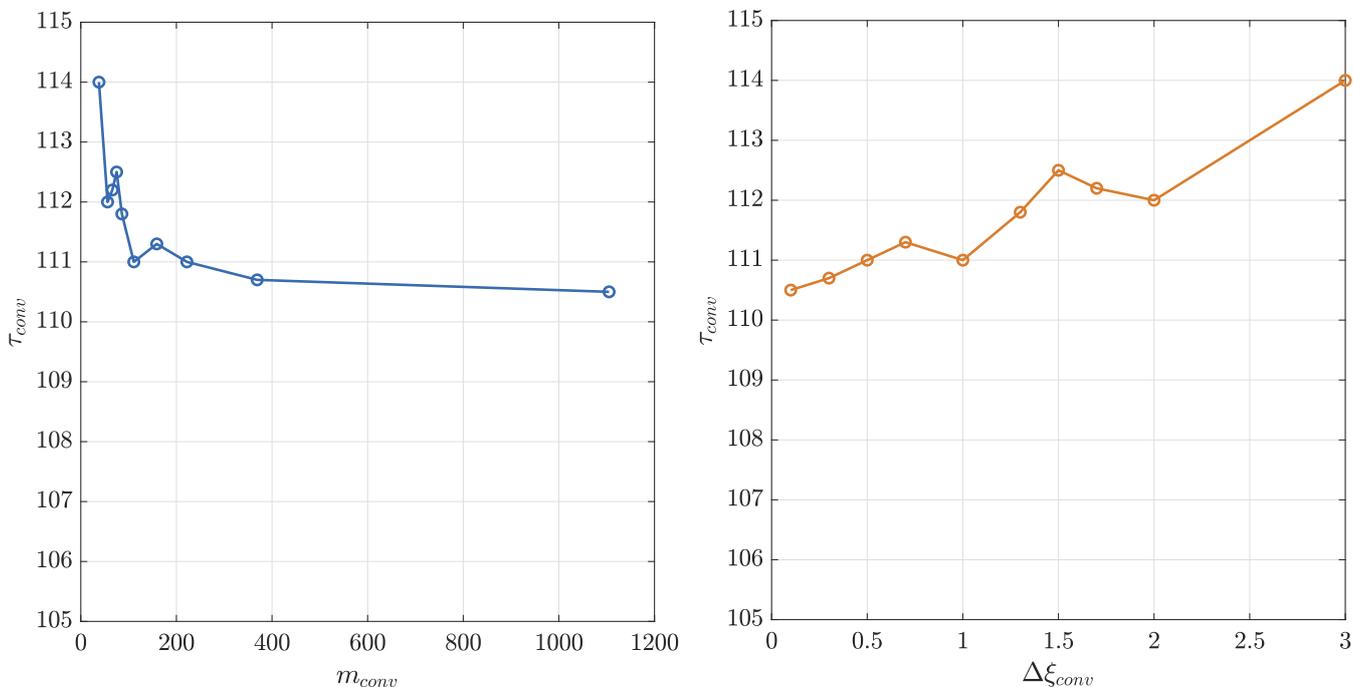


Figura 7.3: Relación entre la longitud y número de paneles hasta la convergencia



(a) Variación de  $\tau_{conv}$  con  $m_{conv}$

(b) Variación de  $\tau_{conv}$  con  $\Delta\xi$

Figura 7.4: Estudio de sensibilidad del tiempo adimensional

Se evidencia que en el caso de desear un bajo gasto computacional, es posible emplear un tamaño mayor de paneles en la estela  $1 \leq \Delta\xi \leq 1.5$ . Sin embargo, a través de dicha resolución pueden cometerse errores de mayor magnitud en el caso de desear replicar la evolución del transitorio de la sustentación. Por el contrario, en la situación de buscar una aproximación de gran precisión con la solución analítica, y sin incurrir en un gasto excesivo de recursos, se recomienda utilizar paneles de menor longitud  $0.1 \leq \Delta\xi \leq 0.5$  y un mayor número  $1000 \leq m \leq 3000$ .

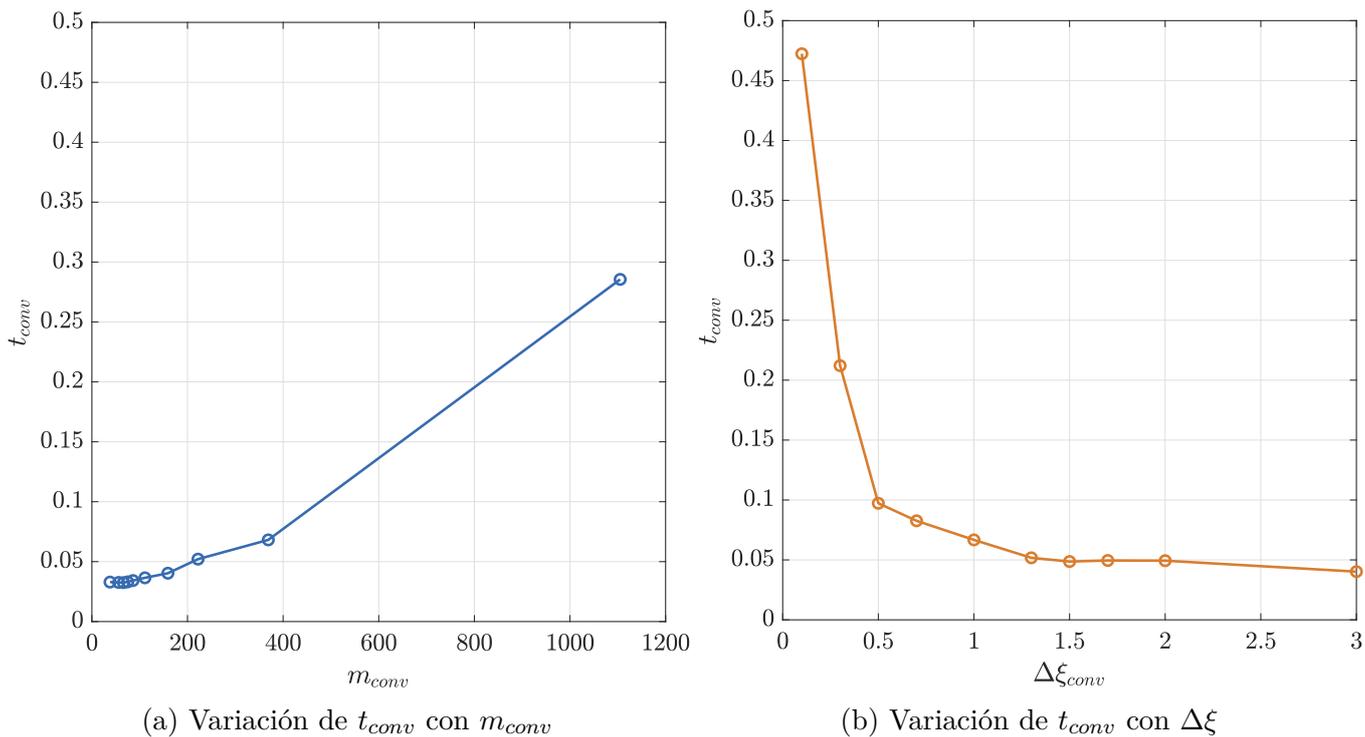


Figura 7.5: Estudio de sensibilidad del gasto computacional

Tratando a continuación la influencia del número de paneles en el perfil, como ha sido mencionado en secciones previas, en el caso de querer replicar la distribución de presiones sobre el perfil debe emplearse un número elevado de paneles. A pesar de ello, si solo se requiere aproximar la solución analítica puede reducirse el número a utilizar. Cabe destacar que dicho número de paneles afecta directamente a los instantes iniciales al determinar el avance de la ráfaga sobre el perfil y la sustentación resultante durante el susodicho período. Una vez el perfil penetra completamente en la ráfaga, la influencia del número de paneles en el perfil resulta menor. Es por ello que cuantos más paneles se empleen, mejor es modelado del avance de la ráfaga al disponer de un mayor número de puntos de control donde aplicar la condición de contorno.

El resultado se ofrece a través de la figura 7.6. Uno de los hechos más significativos es que, en comparación con la solución analítica, no se alcanza el valor de sustentación nula en el instante inicial para un número elevado de paneles en el perfil. Esto se produce debido a que al tratarse de un esquema numérico no-estacionario, que parte de un instante inicial igual a  $\Delta\xi$ , en el caso de emplear un número elevado de paneles en el perfil, la ráfaga comienza directamente a actuar sobre los paneles localizados en las proximidades del borde de ataque debido al valor de  $\Delta\xi$ . Trabajando con valores menores de longitud de paneles en la estela puede discretizarse con mayor precisión el avance de la ráfaga.

Otro aspecto reseñable es el acontecido al emplear únicamente un panel en el perfil, debido a que su punto de control se sitúa alejado del borde de ataque, durante los instantes iniciales la ráfaga no se encuentra actuando al no haber alcanzado dicho punto de control y el resultado es una sustentación nula. Así pues, no debe emplearse un bajo número de paneles en el perfil dado que puede observarse en la figura 7.6 (a) que la aproximación obtenida en comparación con la solución analítica es muy poco precisa a lo largo del transitorio. Al aumentar el número de paneles en el perfil se logra una mejor resolución.

En cualquier caso, puede ampliarse el número de paneles en la estela y reducir la longitud de los mismos para que la discretización temporal sea más rigurosa y se logren mejores aproximaciones, este hecho se observa en la figura 7.6 (b). Donde queda patente el salto que representa la entrada del efecto de la ráfaga al emplear  $n = 1$ , así como, el efecto al incrementar el número de paneles en la estela sobre las curvas cuya solución se aproxima de mejor forma al resultado analítico.

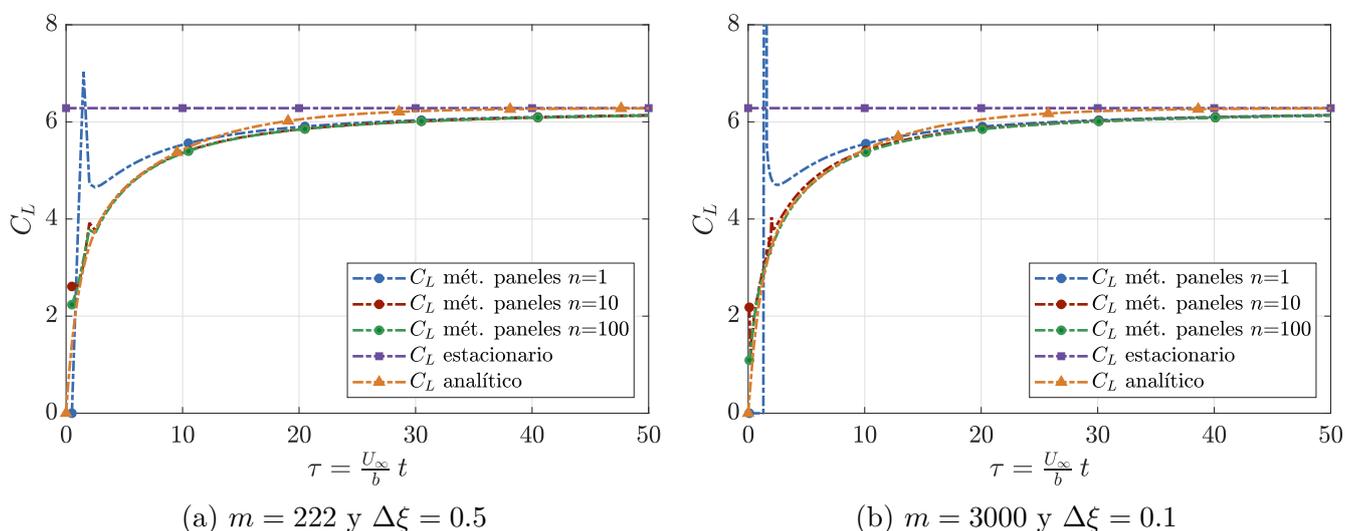


Figura 7.6: Evolución de  $C_L$  durante los instantes iniciales para  $w_o = 1$

### Comparación con la solución analítica:

A la hora de comparar sendas soluciones, se definen aquellos parámetros de entrada al esquema numérico atendiendo a las conclusiones alcanzadas a lo largo del estudio de sensibilidad:

$$n = 100, \quad m = 2500, \quad w_o = 1 \text{ rad}, \quad \Delta\xi = 0.1 \quad (7.8)$$

El elevado número de paneles en la estela encuentra explicación en la necesidad de reducir el paso temporal de la discretización empleada para logra replicar correctamente el transitorio durante los instantes iniciales. De igual forma, se utiliza un elevado número de paneles en el perfil para evitar oscilaciones en la solución. La gráfica 7.7 recoge los resultados de la simulación llevada a cabo.

Destaca que todas las soluciones convergen a aquel valor correspondiente a  $2\pi$ , donde a pesar de no estar trabajando con un ángulo de ataque, la intensidad de la ráfaga se comporta como tal al inducir un campo de velocidades verticales sobre el perfil. Así pues, una intensidad de ráfaga igual a la unidad replica el comportamiento de un ángulo de ataque inducido equivalente a un radián. Se ha decidido emplear dicho valor para contrastar si la solución coincidía con la pendiente de sustentación de un perfil aproximado a placa plana una vez alcanzadas las condiciones estacionarias. No obstante, el esquema permite modificar directamente la intensidad de la ráfaga para abarcar un mayor rango de estudio.

El método numérico es capaz de replicar el transitorio de sustentación con gran precisión, a excepción del instante inicial donde la ráfaga aún no ha actuado, precisamente por la definición del propio método y de su punto inicial. El tiempo que tarda la solución numérica en converger, y que se encuentra entorno a  $\tau \approx 111$ , es mayor que el ofrecido por la solución analítica. No obstante, conforma un error asumible dada la gran diversidad de posibilidades que ofrece el método numérico.

Resulta posible concluir que el esquema numérico no-estacionario de los paneles en la línea media es capaz de brindar y de modelar el comportamiento de un perfil ante la acción progresiva de una ráfaga tipo escalón con elevada exactitud.

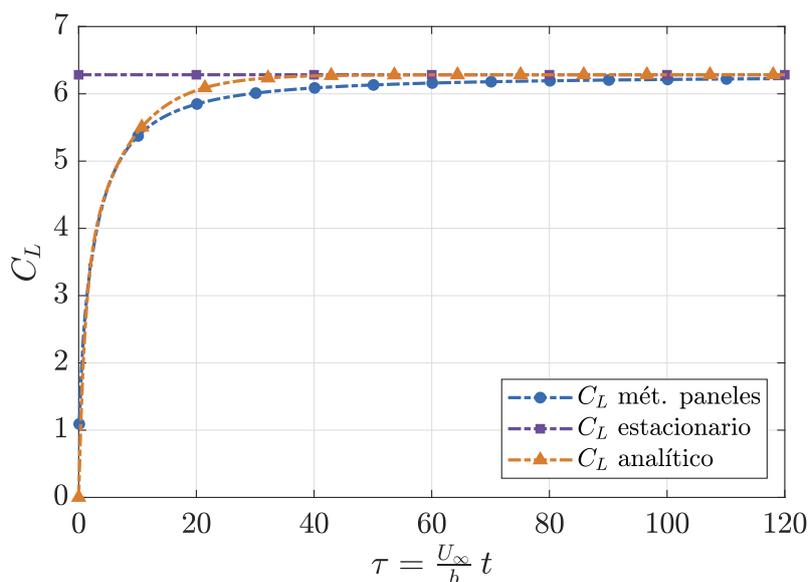


Figura 7.7: Evolución del coeficiente de sustentación ante ráfaga unidad escalón



---

## Código en *Matlab*

El anexo A recoge la implementación de todas aquellas funciones y programas desarrollados en el software *Matlab*. A través de dichas funciones, ha sido posible alcanzar los resultados analizados en los capítulos 4, 5, 6 y 7, incluyendo la programación tanto de las soluciones analíticas y cuasi-estacionarias de los casos de estudio como del esquema numérico de resolución no-estacionario descrito a lo largo del capítulo 3.

Igualmente, el diagrama de flujo presentado en la figura A.1 pretende facilitar la comprensión de todas las funciones empleadas hasta llegar al cómputo final de las variables de salida. Donde queda mostrada aquella segregación realizada en casos de estudio y las funciones utilizadas por cada uno de ellos. Posteriormente, se lleva a cabo una división en tipos de funciones, donde se recopila el código de cada una de ellas. Siendo dicho código autoexplicativo mediante aquellos comentarios realizados en el propio programa. La siguiente enumeración recoge el orden a partir del cual se introducen las funciones empleadas:

1. Discretización del perfil.
2. Soluciones analíticas.
3. Soluciones cuasi-estacionarias.
4. Vectores geométricos.
5. Bucle resolución caso estacionario.
6. Bucle resolución caso no-estacionario.
7. Programa principal.

Para acceder a las soluciones, el usuario únicamente debe definir el número de paneles a emplear en la estela  $m$  y perfil  $n$ , la longitud de los paneles en la estela  $\Delta\xi$ , y el caso a estudiar. Además, para cada caso particular de estudio se deben introducir parámetros característicos como son la frecuencia reducida, ángulo de ataque, intensidad de la ráfaga, o amplitud del movimiento.

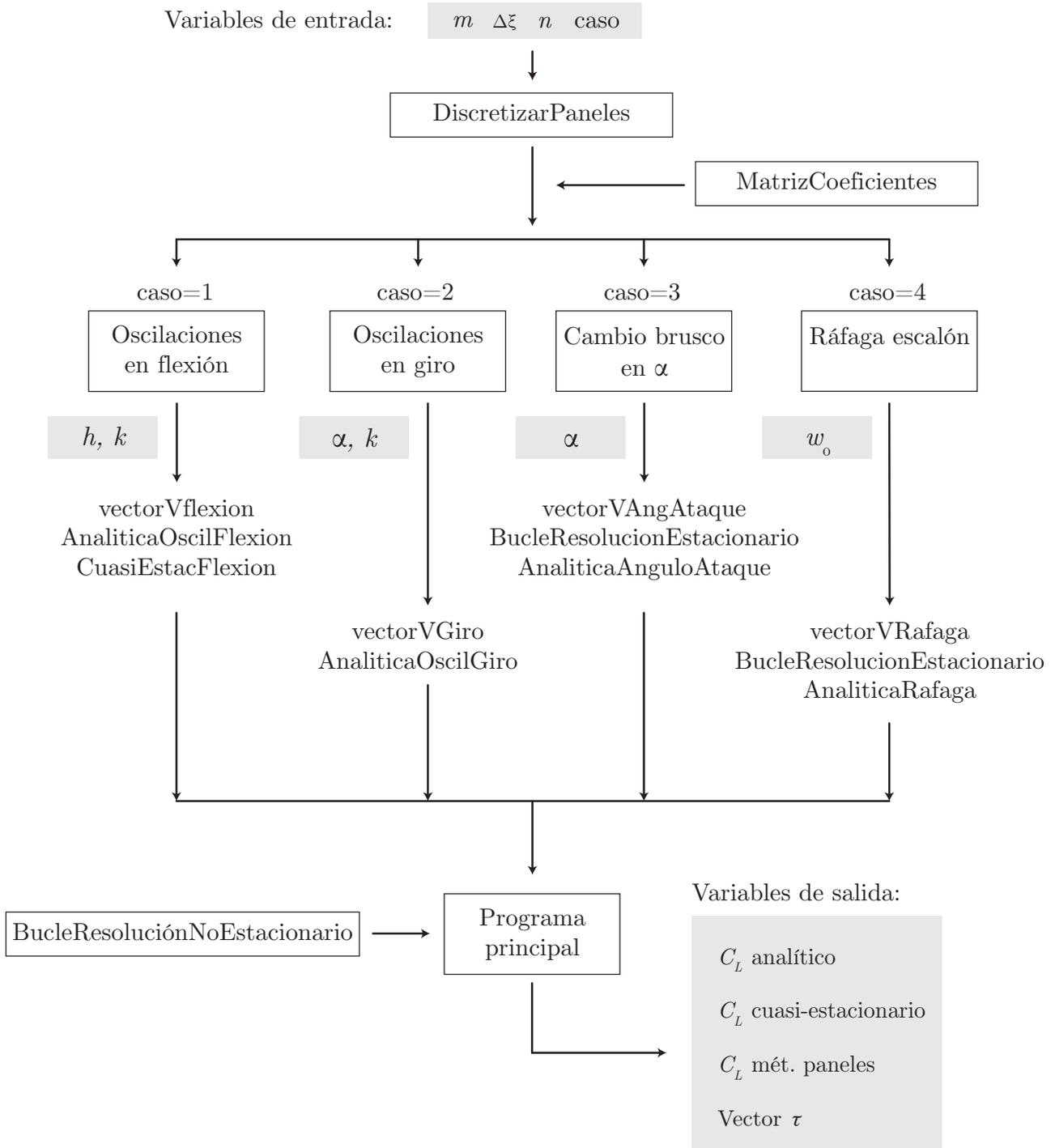


Figura A.1: Diagrama de flujo del programa implementado

### Discretización del perfil:

División del perfil en  $n$  paneles y cálculo de la matriz de coeficientes. Se obtienen las localizaciones tanto de los centros aerodinámicos como de los puntos de control que posteriormente deben ser empleados en el esquema numérico.

```

1 function [xipanel,xipc,xica,xicaw]=DiscretizarPaneles(m,n,xiw)
2
3 %Calcula los puntos geométricos de interés y realiza la división del perfil.
4
5 %Entradas:
6 %m: Número de paneles en la estela.
7 %n: Número de paneles en el perfil.
8 %xiw: Tamaño de los paneles de la estela.
9
10 %Salidas:
11 %xipanel: Vector adimensional que contiene la división del perfil en los n paneles.
12 %xipc: Localizaciones adimensionales de los puntos de control de cada panel.
13 %xica: Posiciones adimensionales de los c.a de cada panel del perfil.
14 %xicaw: Localización adimensional de los c.a de los paneles de la estela.
15
16 xipanel=zeros(1,n);
17 xipc=zeros(1,n);
18 xica=zeros(1,n);
19 xicaw=zeros(1,m);
20
21 for i=1:n %Calcula las posiciones de los puntos de interés del perfil.
22     xipanel(i)=-1+2/n*(i-1);
23     xipc(i)=-1+2/n*(i-1+3/4); %Puntos de control a 3/4 del borde de ataque del panel.
24     xica(i)=-1+2/n*(i-1+1/4); %Centros aerodinámicos a 1/4 del borde de ataque ...
        del panel.
25 end
26
27 for i=1:m %Tratamiento de los puntos de interés de la estela.
28     xicaw(i)=1+xiw/4+xiw*(i-1); %Centros aerodinámicos a 1/4 del borde de ataque ...
        del panel.
29 end
30 end

```

A.1: DiscretizarPaneles.m

```

1 function A=MatrizCoeficientes(xipc,xica,n)
2
3 %Modela como influye cada torbellino del perfil sobre el resto de ellos.
4
5 %Entradas:
6 %n: Número de paneles en el perfil.
7 %xipc: Localizaciones adimensionales de los puntos de control de cada panel.
8 %xica: Posiciones adimensionales de los centros aerodinámicos del perfil.
9
10 %Salidas:
11 %A: Matriz que representa las condiciones de contorno sobre el perfil.
12
13 A=zeros(n,n); %Dimensiones n x n.
14 for i=1:n
15     for j=1:n
16         A(i,j)=-1/(2*pi)*(1/(xipc(i)-xica(j)));
17     end
18 end
19 end

```

A.2: MatrizCoeficientes.m

### Soluciones analíticas:

Queda recogida la programación de las soluciones analíticas para los cuatro casos de estudio planteados. El orden de presentación resulta el mismo que el mostrado en la figura A.1, quedando descrito por:

- Script A.3: Solución analítica oscilaciones en flexión.
- Script A.4: Solución analítica oscilaciones en giro.
- Script A.5: Solución analítica cambio instantáneo en ángulo de ataque.
- Script A.6: Solución analítica respuesta del perfil ante ráfaga.

La implementación de las soluciones analíticas responde directamente a cada uno de los desarrollos realizados en las secciones de los casos de estudio.

```

1 function [Cla,Cla1,Cla2,vectortau,alpha]=AnaliticaOscilFlexion(m,xiw,k,h,p)
2
3 %Solución analítica caso oscilaciones de flexión.
4
5 %Entradas:
6 %m: Número de paneles en la estela.
7 %h: Amplitud de oscilación en flexión.
8 %k: Frecuencia reducida del movimiento.
9 %xiw: Tamaño de los paneles en la estela.
10 %p: Discretización temporal deseada de la solución analítica.
11
12 %Salidas:
13 %Cla: Coeficiente de sustentación analítico en el tiempo.
14 %Cla1: Componente circulatoria del coeficiente de sustentación.
15 %Cla2: Componente de masa aparente del coeficiente de sustentación.
16 %vectortau: Vector del tiempo evaluado para el caso analítico.
17 %alpha: Ángulo de ataque inducido para cada instante por las oscilaciones.
18
19 dtau=xiw;
20
21 vectortau=linspace(0,m*dtau,p);
22 Cla1=zeros(1,length(vectortau));
23 Cla2=zeros(1,length(vectortau));
24 Cla=zeros(1,length(vectortau));
25 alpha=zeros(1,length(vectortau));
26 C=Theodorsen(k); %Función de Theodorsen que modela los efectos de estela.
27
28 for i=1:length(vectortau)
29 Cla1(1,i)=-2*pi*h*C*li*k*exp(li*k*vectortau(1,i)); %Debido a la velocidad ...
    (término circulatorio).
30 Cla2(1,i)=pi*h*k^2*exp(li*k*vectortau(1,i)); %Debido a la aceleración (término ...
    de masa aparente).
31 Cla(1,i)=Cla1(1,i)+Cla2(1,i);
32 alpha(1,i)=-li*k*h*exp(li*k*vectortau(1,i));
33 end
34 end

```

A.3: AnaliticaOscilFlexion.m

```

1 function ...
   [Cla,Cla1,Cla2,Cla3,vectoralpha,vectortaua]=AnaliticaOscilGiro(m,xiw,a,alpha,k,p)
2
3 %Solución analítica caso oscilaciones en giro.
4
5 %Entradas:
6 %m: Número de paneles en la estela.
7 %alpha: %Valor de la oscilación en ángulo de ataque.
8 %xiw: Tamaño de los paneles en la estela.
9 %a: Amplitud de oscilación en flexión.
10 %k: Punto respecto del cual gira el perfil.
11 %p: Discretización temporal deseada de la solución analítica.
12
13 %Salidas:
14 %Cla: Coeficiente de sustentación analítico en el tiempo.
15 %Cla1: Componente de masa aparente (aceleración Coriolis) de Cl.
16 %Cla2: Componente circulatoria de la sustentación.
17 %Cla3: Componente de masa aparente (aceleración angular) de Cl.
18 %vectortaua: Vector del tiempo evaluado para el caso analítico.
19 %vectortaualpha: Vector de ángulo de ataque con el tiempo.
20
21 dtau=xiw;
22 vectortaua=linspace(0,m*dtau,p);
23 Cla1=zeros(1,length(vectortaua));
24 Cla2=zeros(1,length(vectortaua));
25 Cla3=zeros(1,length(vectortaua));
26 Cla=zeros(1,length(vectortaua));
27 vectoralpha=zeros(1,length(vectortaua));
28 C=Theodorsen(k);
29
30 for i=1:length(vectortaua)
31 Cla1(1,i)=pi*a*alpha*k^2*exp(1i*k*vectortaua(1,i));
32 Cla2(1,i)=2*pi*C*alpha*exp(1i*k*vectortaua(1,i))*(1+1i*k/2-1i*k*a);
33 Cla3(1,i)=pi*alpha*1i*k*exp(1i*k*vectortaua(1,i));
34 Cla(1,i)=Cla1(1,i)+Cla2(1,i)+Cla3(1,i);
35 vectoralpha(1,i)=alpha*exp(1i*k*vectortaua(1,i));
36 end
37 end

```

A.4: AnaliticaOscilGiro.m

```

1 function [Cla,vectortaua,Phi]=AnaliticaAnguloAtaque(m,xiw,alpha,p)
2
3 %Solución analítica cambio instantáneo del ángulo de ataque.
4
5 %Entradas:
6 %m: Número de paneles en la estela.
7 %alpha: Ángulo de ataque a analizar.
8 %xiw: Tamaño de los paneles en la estela.
9 %p: Discretización temporal deseada de la solución analítica.
10
11 %Salidas:
12 %Cla: Coeficiente de sustentación analítico en el tiempo.
13 %vectortaua: Vector del tiempo evaluado para el caso analítico.
14 %Phi: Evolución de la función de Wagner.
15
16 dtau=xiw;
17 vectortaua=linspace(0,m*dtau,p);
18 Phi=zeros(1,length(vectortaua));%Crea el vector de la función de Wagner.
19 Cla=zeros(1,length(vectortaua));
20 for i=1:length(vectortaua)
21 Phi(1,i)=1-0.165*exp(-0.045*vectortaua(1,i))-0.335*exp(-0.3*vectortaua(1,i));
22 Cla(1,i)=2*pi*alpha*Phi(1,i);
23 end
24 end

```

A.5: AnaliticaAnguloAtaque.m

```
1 function [Cla,vectortaua,Psi]=AnaliticaRafaga(m,xiw,wg,p)
2
3 %Solución analítica perfil ante ráfaga escalón.
4
5 %Entradas:
6 %m: Número de paneles en la estela.
7 %wg: Intensidad de la ráfaga escalón.
8 %xiw: Tamaño de los paneles en la estela.
9 %p: Discretización temporal deseada de la solución analítica.
10
11 %Salidas:
12 %Cla: Coeficiente de sustentación analítico en el tiempo.
13 %vectortaua: Vector del tiempo evaluado para el caso analítico.
14 %Psi: Evolución de la función de Kussner.
15
16 dtau=xiw;
17 vectortaua=linspace(0,m*dtau,p);
18 Psi=zeros(1,length(vectortaua));%Crea el vector de la función de primer orden de ...
    Kussner.
19 Cla=zeros(1,length(vectortaua));
20
21 for i=1:length(vectortaua)
22     Psi(1,i)=1-0.5*exp(-0.13*vectortaua(1,i))-0.5*exp(-vectortaua(1,i));
23     Cla(1,i)=2*pi*wg*Psi(1,i);
24 end
25 end
```

A.6: AnaliticaRafaga.m

### Soluciones cuasi-estacionarias:

Las soluciones cuasi-estacionarias únicamente son planteadas para la respuesta del perfil ante oscilaciones en flexión.

```
1 function [Clce,vectortauce]=CuasiEstacFlexion(m,xiw,k,h,p)
2
3 %Solución cuasi-estacionaria caso oscilaciones de flexión.
4
5 %Entradas:
6 %m: Número de paneles en la estela.
7 %h: Amplitud de oscilación en flexión.
8 %k: Frecuencia reducida del movimiento.
9 %xiw: Tamaño de los paneles en la estela.
10
11 %Salidas:
12 %Clce: Coeficiente de sustentación cuasi-estacionario en el tiempo.
13 %vectortauce: Vector del tiempo evaluado para el caso cuasi-estacionario.
14
15 dtau=xiw;
16 vectortauce=linspace(0,m*dtau,p);
17 Clce=zeros(1,length(vectortauce));
18
19 for i=1:length(vectortauce)
20     Clce(1,i)=-2*pi*li*h*k*exp(li*k*vectortauce(1,i));
21 end
22 end
```

A.7: CuasiEstacFlexion.m

### Vectores geométricos:

```

1 function [v,vectortau]=vectorVFlexion(n,m,xiw,h,k)
2
3 %Proporciona el vector geometría v de entrada en el esquema numérico no-estacionario.
4
5 %Entradas:
6 %n: Número de paneles en el perfil.
7 %m: Número de paneles en la estela.
8 %xiw: Tamaño de los paneles en la estela.
9 %h: Amplitud de oscilación en flexión.
10 %k: Frecuencia reducida del movimiento.
11
12 %Salidas:
13 %v: vector geometría de dimensiones nxm.
14 %vectortau: Vector del tiempo evaluado según número de paneles en la estela.
15
16 dtau=xiw;
17 v=zeros(n,m);
18 vectortau=zeros(1,m);
19 for i=1:m
20     if i==1
21         vectortau(1,i)=dtau;
22         v(:,i)=h*i*k*exp(1i*k*vectortau(1,i));
23     else
24         vectortau(1,i)=vectortau(1,i-1)+dtau;
25         v(:,i)=h*i*k*exp(1i*k*vectortau(1,i)); %Vector v
26     end
27 end

```

A.8: vectorVFlexion.m

```

1 function [v,vectortau]=vectorVGiro(n,m,xiw,alpha,k,xipc,a)
2
3 %Entradas:
4 %n: Número de paneles en el perfil.
5 %m: Número de paneles en la estela.
6 %alpha: %Valor de la oscilación en ángulo de ataque.
7 %xiw: Tamaño de los paneles en la estela.
8 %a: Amplitud de oscilación en flexión.
9 %k: Punto respecto del cual gira el perfil.
10 %xipc: Localizaciones adimensionales de los puntos de control de cada panel.
11
12 %Salidas:
13 %v: vector geometría de dimensiones nxm.
14 %vectortau: Vector del tiempo evaluado según número de paneles en la estela.
15
16 dtau=xiw;
17 v=zeros(n,m);
18 vectortau=zeros(1,m);
19 for i=1:m
20     for j=1:n
21         if i==1
22             vectortau(1,i)=dtau;
23             v(j,i)=(-alpha*1i*k*exp(1i*k*vectortau(1,i))*(xipc(1,j)-a))...
24                 -alpha*exp(1i*k*vectortau(1,i));
25         else
26             vectortau(1,i)=vectortau(1,i-1)+dtau;
27             v(j,i)=(-alpha*1i*k*exp(1i*k*vectortau(1,i))*(xipc(1,j)-a))...
28                 -alpha*exp(1i*k*vectortau(1,i));
29         end
30     end
31 end

```

A.9: vectorVGiro.m

```

1 function [v,vectortau,ve]=vectorVAngAtaque(n,m,alpha,xiw)
2
3 %Proporciona el vector geometría v de entrada en el esquema numérico no-estacionario.
4
5 %Entradas:
6 %n: Número de paneles en el perfil.
7 %m: Número de paneles en la estela.
8 %alpha: Ángulo de ataque a analizar.
9 %xiw: Tamaño de los paneles en la estela.
10
11 %Salidas:
12 %v: vector geometría de dimensiones nxm.
13 %vectortau: Vector del tiempo evaluado según número de paneles en la estela.
14 %ve: vector geometría del caso estacionario.
15
16 dtau=xiw;
17 v=zeros(n,m);
18 vectortau=zeros(1,m);
19 ve=ones(n,1)*-alpha;
20 for i=1:m
21     if i==1
22         vectortau(1,i)=dtau;
23     else
24         vectortau(1,i)=vectortau(1,i-1)+dtau;
25     end
26     v(:,i)=-alpha; %Vector v invariante al ser nula la derivada temporal.
27 end
28 end

```

A.10: vectorVAngAtaque.m

```

1 function [v,vectortau,ve]=vectorVRafaga(n,m,xiw,xipc,wg)
2
3 %Entradas:
4 %n: Número de paneles en el perfil.
5 %m: Número de paneles en la estela.
6 %wg: Intensidad de la ráfaga escalón.
7 %xiw: Tamaño de los paneles en la estela.
8 %xipc: Vector con las posiciones de los puntos de control del perfil.
9
10 %Salidas:
11 %v: vector geometría de dimensiones nxm.
12 %vectortau: Vector del tiempo evaluado según número de paneles en la
13 %estela.
14 %ve: vector geometría del caso estacionario.
15
16 dtau=xiw;
17 v=zeros(n,m);
18 vectortau=zeros(1,m);
19 ve=ones(n,1)*-wg;
20 for i=1:m %Modela el avance de la ráfaga sobre el perfil.
21     if i==1
22         vectortau(1,i)=dtau;
23     else
24         vectortau(1,i)=vectortau(1,i-1)+dtau;
25     end
26     for j=1:n
27         if vectortau(1,i)-xipc(1,j)-1==0 %Evita indeterminación en función heaviside.
28             v(j,i)=-wg;
29         else
30             v(j,i)=-wg*heaviside(vectortau(1,i)-xipc(1,j)-1);
31         end
32     end
33 end
34 end

```

A.11: vectorVRafaga.m

### Bucle resolución caso estacionario:

```
1 function [Cle,ge,vectortau]=BucleResolucionEstacionario(A,ve,vectortau,m,xiw)
2
3 %Resuelve el problema numérico estacionario.
4
5 %Entradas:
6 %A: Matriz de coeficientes del problema.
7 %ve: Vector geometría del caso estacionario.
8 %m: Número de paneles en la estela.
9 %xiw: Tamaño de los paneles en la estela.
10
11 %Salidas:
12 %Cle: Valor del coeficiente de sustentación estacionario en el tiempo (constante).
13 %ge: Intensidad de torbellinos del caso estacionario.
14 %vectortau: Vector temporal del caso estacionario.
15
16 dtau=xiw;
17 ge=A\ve;
18 Cle=sum(ge);
19 Cle=Cle*ones(1,length(vectortau)+1);
20 vectortau=0:m;
21 vectortau=vectortau*dtau;
22 end
```

A.12: BucleResolucionEstacionario.m

**Bucle resolución caso no-estacionario:**

```

1 function [Cl,g,gd,gw]=BucleResolucionNoEstacionario(n,m,A,v,xipc,xicaw,xiw,xica)
2
3 %Calcula el coeficiente de sustentación para cada instante evaluado a
4 %partir del esquema numérico introducido en el capítulo 3 mediante la
5 %distribución de torbellinos y cómputo de circulaciones de cada panel.
6
7 %Entradas:
8 %m: Número de paneles en la estela.
9 %m: Número de paneles en el perfil.
10 %A: Matriz de coeficientes del problema.
11 %v: Vector de geometría particular para cada caso de estudio.
12 %xipc: Localizaciones adimensionales de los puntos de control de cada panel.
13 %xica: Posiciones adimensionales de los c.a de cada panel del perfil.
14 %xicaw: Localización adimensionales de los c.a de los paneles de la estela.
15 %xiw: Tamaño de los paneles en la estela.
16
17 %Salidas:
18 %Cl: Coeficiente de sustentación para cada instante evaluado. Matriz n x m.
19 %g: Valor de las circulaciones en cada panel del perfil con el tiempo. Matriz n x m.
20 %gd: Derivada temporal de la circulación de los paneles del perfil. Matriz n x m.
21 %gw: Circulación de cada uno de los torbellinos en la estela. Vector 1 x m.
22
23 r=ones(n,1); %Vector proveniente de la ecuación de conservación de vorticidad.
24 aw=zeros(n,m); %Matriz que recoge como influye geoméricamente cada torbellino de ...
    la estela sobre los puntos de control del perfil. Dimensiones n x n. En cada ...
    fila se representa como influye el torbellino 1,2,3...m sobre los puntos de ...
    control 1,2,3...n.
25 gw=zeros(1,m);
26 g=zeros(n,m);
27 gd=zeros(n,m);
28 dtau=xiw;
29
30 for i=1:m %Bucle de resolución No-Estacionario.
31     for j=1:n
32         aw(j,i)=-1/(2*pi)*(1/(xipc(j)-xicaw(i))); %Vector geometría que representa la ...
            influencia de la estela en los torbellinos del perfil.
33     end
34     if i==1 %Evaluación del primer punto.
35         inversa=inv(A-aw(:,1)*transpose(r));
36         g(:,i)=inversa*v(:,i);
37         gw(i)=-transpose(r)*g(:,i);
38     else %Solución general.
39         res=zeros(n,i-1);
40         for k=1:i-1
41             res(:,k)=(aw(:,1)-aw(:,i-k+1))*gw(k);
42         end
43         g(:,i)=inversa*(v(:,i)+sum(res,2)); %#ok<*MINV>
44         gw(i)=-sum(gw)-transpose(r)*g(:,i);
45     end
46 end
47
48 for i=1:n %Cálculo de la derivada de las circulaciones de los paneles del perfil.
49     gd(i,:)=gradient(g(i,:))/dtau;
50 end
51
52 Cl=zeros(1,m);
53 tes=zeros(n,m);
54 for i=1:m %Evolución temporal del coeficiente de sustentación.
55     for j=1:n
56         tes(j,i)=gd(j,i)*(1-xica(1,j));
57     end
58     Cl(1,i)=sum(g(:,i))+sum(tes(:,i));
59 end

```

A.13: BucleResolucionNoEstacionario.m

**Programa principal:**

```

1  clc;clear all;close all;
2
3  %% Variables de entrada
4
5  n=100; %Número de paneles en el perfil
6  m=250; %Número de paneles en la estela
7  xiw=0.5; %Longitud de los paneles de la estela.
8  dtau=xiw;
9  caso=1;
10
11 %% Discretización en paneles
12
13 [xipanel,xipc,xica,xicaw]=DiscretizarPaneles(m,n,xiw);
14
15 %% Resolución del problema
16
17 A=MatrizCoeficientes(xipc,xica,n); %Crea la matriz de coeficientes.
18
19 switch caso
20
21     case 1 %oscilaciones de flexión.
22         h=0.5; %Valor de la amplitud del movimiento.
23         k=0.7; %Frecuencia reducida.
24         [v,vectortau]=vectorVFlexion(n,m,xiw,h,k); %Obtiene el vector geometría v y ...
                de paso temporal vectortau.
25         [Cla,Cla1,Cla2,vectortaua,alpha]=AnaliticaOscilFlexion(m,xiw,k,h,10000);
26         [Clce,vectortauce]=CuasiEstacFlexion(m,xiw,k,h,10000); %Solución ...
                cuasi-estacionaria
27
28     case 2
29         alpha=1; %Valor de la oscilación en ángulo de ataque.
30         k=0.1; %Frecuencia reducida.
31         a=0; %Punto respecto del cual gira el perfil.
32         [v,vectortau]=vectorVGiro(n,m,xiw,alpha,k,xipc,a); %Obtiene el vector ...
                geometría v y de paso temporal vectortau.
33         [Cla,Cla1,Cla2,Cla3,vectoralpha,vectortaua]=AnaliticaOscilGiro...
                (m,xiw,a,alpha,k,10000);
34
35
36     case 3 %Cambio instantáneo en el ángulo de ataque.
37         alpha=1; %Valor del ángulo de ataque a evaluar.
38         [v,vectortau,ve]=vectorVAngAtaque(n,m,alpha,xiw); %Obtiene el vector ...
                geometría v y de paso temporal vectortau.
39         [Cle,ge,vectortauce]=BucleResolucionEstacionario(A,ve,vectortau,m,xiw); ...
                %Resolución del caso estacionario.
40         [Cla,vectortaua,Phi]=AnaliticaAnguloAtaque(m,xiw,alpha,700); %Solución analítica.
41         %RepresentaWagner(Phi,vectortaua);
42
43     case 4 %Perfil ante ráfaga escalón.
44         wg=1; %Intensidad de la ráfaga.
45         [v,vectortau,ve]=vectorVRafaga(n,m,xiw,xipc,wg);
46         [Cle,ge,vectortauce]=BucleResolucionEstacionario(A,ve,vectortau,m,xiw); ...
                %Resolución del caso estacionario.
47         [Cla,vectortaua,Psi]=AnaliticaRafaga(m,xiw,wg,700); %Solución analítica
48         %RepresentaKussner(Psi,vectortaua)
49
50     otherwise
51 end
52
53 [Cl,g,gd,gw]=BucleResolucionNoEstacionario(n,m,A,v,xipc,xicaw,xiw,xica); %Método ...
                numérico no-estacionario.

```

A.14: Global.m

## Interfaz gráfica

Con la finalidad de lograr un acceso más directo a las soluciones del problema no-estacionario, se desarrolla una interfaz gráfica en el software *Matlab* que permite al usuario estudiar la evolución temporal del coeficiente de sustentación para los cuatro casos de estudio desarrollados. La interfaz se encuentra fundada en aquellas funciones presentadas en el anexo A, tomando ahora directamente el valor de las variables de entrada del propio usuario para posteriormente representar las soluciones numéricas, analíticas y cuasi-estacionarias o estacionarias. Una vista general de la interfaz gráfica se muestra en la figura B.1.

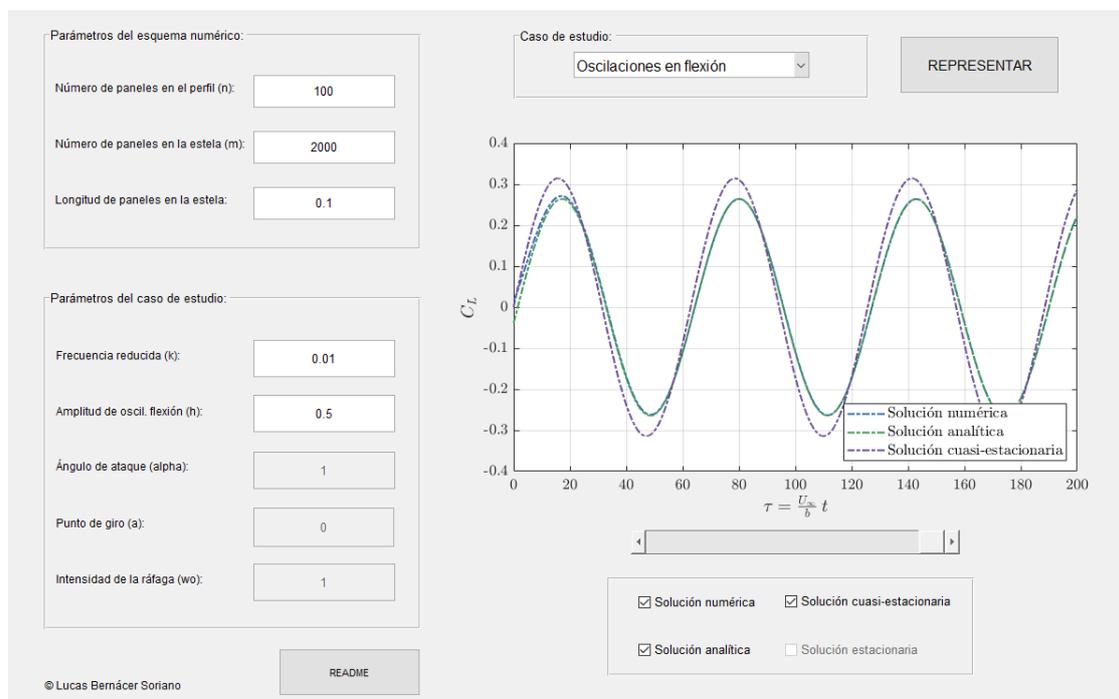


Figura B.1: Vista general de la interfaz gráfica

A continuación se trata de forma individual cada uno de los componentes de la interfaz, los cuales han sido numerados conforme recoge la figura B.2 en función de aquel orden en el que deben ser seleccionados por el usuario. El orden definido no es imperativo, es decir, en realidad el usuario dispone de total libertad para seguir la secuencia que se desee.

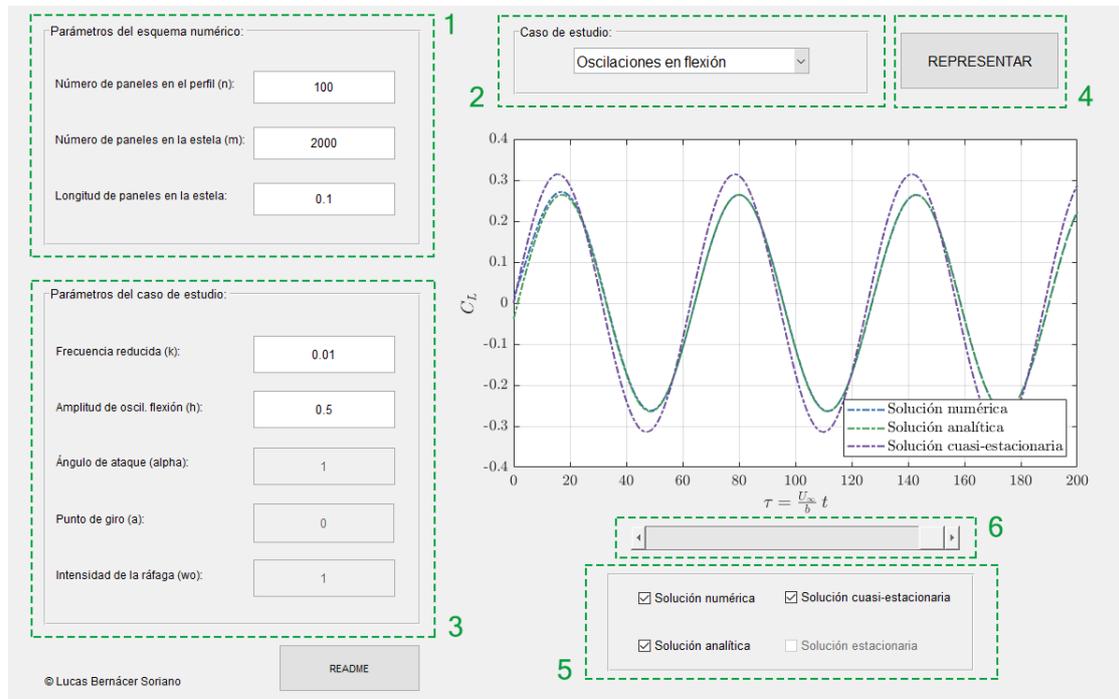


Figura B.2: Segregación de la interfaz en distintos componentes

### 1. Parámetros del esquema numérico:

El primero de los cuadros recoge las variables de entrada del esquema numérico, las cuales se muestran independientes del caso de estudio a resolver. Se define entonces un rango de validez para cada una de ellas en vista de evitar resoluciones que empleen un excesivo gasto computacional o ante errores en las entradas del propio usuario:

- Número de paneles en el perfil:  $1 \leq n \leq 500$
- Número de paneles en la estela:  $1 \leq m \leq 5000$
- Longitud de los paneles en la estela:  $0.01 \leq \Delta\xi \leq 100$

El número de paneles en la estela y la longitud de los mismos determina posteriormente el tiempo adimensional a evaluar durante la resolución del problema, estableciendo el valor máximo del eje de abscisas en la representación.

## 2. Caso de estudio:

El menú desplegable permite seleccionar al usuario aquel caso de estudio que se pretende tratar. Una vez seleccionado, se activa en el cuadro de parámetros del caso de estudio las variables que deben ser definidas para completar la resolución.

## 3. Parámetros del caso de estudio:

Como ha sido comentado, tras seleccionar la situación a resolver deben introducirse las variables que particularizan el movimiento del perfil. Nuevamente, resulta necesario determinar unos rangos de validez para evitar entradas que conduzcan a soluciones carentes de sentido:

- Frecuencia reducida:  $0.01 \leq k \leq 10$
- Amplitud de oscilaciones en flexión:  $-10 \leq h \leq 10$
- Ángulo de ataque:  $-2 \leq \alpha \leq 2$  rad
- Punto de giro del perfil:  $-1 \leq a \leq 1$
- Intensidad de la ráfaga:  $-2 \leq w_o \leq 2$

Cabe aclarar que la entrada en ángulo de ataque se activa tanto a la hora de estudiar el suceso de oscilaciones en giro como el de cambio repentino del ángulo de ataque, definiendo en el primero de los casos la amplitud máxima de las oscilaciones.

## 4. Representar:

Una vez han sido seleccionados tanto los parámetros que define el método numérico como el caso de estudio, y sus variables particulares, el usuario únicamente debe pulsar el botón “Representar” para acceder a la solución del problema mostrada en el gráfico situado debajo de dicho botón.

## 5. Panel de soluciones:

El panel de soluciones permite al usuario marcar o desmarcar aquellas curvas que desee visualizar en el gráfico para poder realizar comparaciones o determinar la precisión del esquema numérico. Han sido implementadas las soluciones analíticas de todos los casos de estudio, así como las respuestas cuasi-estacionarias o estacionarias desarrolladas en los pertinentes capítulos 4, 5, 6 o 7.

## 6. Barra deslizante:

La barra deslizante actúa directamente sobre el rango de acción del eje de abscisas para poder visualizar con una mayor facilidad las soluciones en intervalos más acotados.

Así pues, la interfaz gráfica pone al alcance de cualquier usuario el cálculo de las soluciones de los casos de estudio de una forma intuitiva y ágil. Evitando tener que trabajar con múltiples programas y unificando toda las funciones en un solo fichero.



---

## Presupuesto

El coste aproximado del proyecto queda dividido en función de la secuencia de tareas llevadas a cabo, indicando en cada una de ellas el número de horas estimadas y el precio de la hora de trabajo. Se asume que el coste por hora de un ingeniero aeronáutico es de 20 €/h, mientras que el de un doctor ingeniero aeronáutico asciende a 40 €/h. A continuación se presenta el desglose en bloque de tareas:

- **Revisión bibliográfica:** Resulta necesario realizar un análisis de toda aquella información sobre el tema de estudio y recopilar las fuentes que posteriormente son citadas a lo largo del proyecto. Las horas dedicadas a esta labor se corresponden a 10, que considerando el precio de trabajo por hora de un ingeniero aeronáutico hace que el coste del bloque ascienda a 200 €.
- **Desarrollo teórico:** El fundamento teórico del proyecto es desarrollado por un ingeniero aeronáutico con el soporte de un doctor ingeniero aeronáutico. El primero de ellos destina cerca de 40 horas a la obtención de las expresiones que posteriormente son analizadas. Así como, el doctor aeronáutico cumple la función de apoyo en el tratamiento de las mismas dedicando 5 horas de trabajo. Este conjunto de tareas impacta en el presupuesto con un valor de 1000 €.
- **Implementación del esquema numérico:** En este punto particular debe incluirse el coste de uso del software en el cual se implementa el método numérico, además de las horas de trabajo que requiere dicho proceso. Se recurre a las fuentes que proporciona *MathWorks*, llegando a la conclusión de que una hora de uso de software por trabajador tiene un coste de 0.15 €/h. El esquema numérico es programado por un ingeniero aeronáutico en 20 horas de trabajo, siendo la cantidad a sumar al presupuesto de 403 €.
- **Resolución de los casos de estudio:** Una vez se tiene el programa a ejecutar, se requiere un estudio y análisis de cada uno de los casos de estudio. Debe emplearse tanto el software *Matlab* como un ingeniero aeronáutico y doctor aeronáutico que revisen y valoren las conclusiones alcanzadas.

En vista de llegar a las conclusiones se requieren aproximadamente 5 horas de trabajo de un ingeniero aeronáutico con el software de estudio, mientras que el estudio posterior demanda 10 horas de ingeniero aeronáutico y 3 de doctor ingeniero aeronáutico. Este conjunto supone aproximadamente 420.75 €.

- **Interfaz gráfica:** Finalmente, la programación de una interfaz gráfica que recoja la ejecución de los casos de estudio es llevada a cabo por un ingeniero aeronáutico en una estimación de 5 horas de trabajo con el software *Matlab*, suponiendo este hecho un coste de 100.75 €.

El presupuesto del proyecto presentado asciende a un total de 2124.5 €, teniendo en cuenta que únicamente se lleva a cabo un trabajo de tipo teórico y de programación. Sobre dicho total, debe aplicarse un 5% de gastos generales o adicionales, alcanzado la cifra de 2230.72 €, así como, el impuesto sobre el valor añadido del 21% resultando en el valor aproximado final de 2700 €.

## Bibliografía

- [1] Mario Lázaro y Pablo Fajardo. (2014). *Introducción a la Aeroelasticidad*.
- [2] Mario Lázaro. *Cargas debidas a acciones atmosféricas*.
- [3] Mark Drela. (2014). *Flight Vehicle Aerodynamics*.
- [4] Katz & Polkin. (2001). *Low-Speed Aerodynamics*.
- [5] Ülgen Gülçat. (2016). *Fundamentals Of Modern Unsteady Aerodynamics*.
- [6] John D. Anderson. (2001). *Fundamentals Of Aerodynamics*.